Relatório Técnico

Complementos de Teoria da Medida

Ernesto Prado Lopes
lopes@cos.ufrj.br

03 de dezembro de 2008

Resumo

Neste trabalho estudamos o teorema de Caratheodory sobre a extensão de uma função de conjuntos σ-aditiva, definida em um semi-anel, para uma medida σ-finita definida em uma σ-álgebra. Este estudo foi feito com vistas a aplicações na definição de processos estocásticos que possam ter aplicações práticas interessantes. Neste sentido novos trabalhos aparecerão em breve.

0.1 Definições Iniciais

Seja Ω um conjunto.

Definição 1. *$\mathcal{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ é um* anel booleano *se:*

1. *$A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$,*
2. *$A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \backslash B \in \mathcal{A}$.*

$\mathcal{A}$ é um anel booleano *unitário* se $\Omega \in \mathcal{A}$.

Definição 2. *$\mathcal{A} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ é um* semi-anel booleano *se:*

1. *$A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$,*
2. *$A \in \mathcal{A}$ e $B \in \mathcal{A}$ e $A \subset B \Rightarrow \exists\ (A_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ com $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$, $A_i \in \mathcal{A}$, $\forall\ i,\ j \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $B \backslash A = \cup_{i=1}^{n} A_i$.*

Observação: Se $\mathcal{A}$ é um anel booleano, então $\mathcal{A}$ é um semi-anel: pois se A e $B \in \mathcal{A}$, então $A \cap B = A \cup B \backslash [(A \backslash B) \cup (B \backslash A)] \in \mathcal{A}$ e se $A \subset B$, $B \backslash A \in \mathcal{A}$.

Definição 3. *$\mathcal{S} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ é um* π-sistema *de Ω se A e $B \in \mathcal{S} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{S}$.*

Definição 4. *$\mathcal{S} \subset \mathscr{P}(\Omega)$ é um* λ-sistema *de Ω se*

1. *Se $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é tal que $S_n \in \mathcal{S}$ e $S_n \subset S_{n+1}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, então $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n \in \mathcal{S}$,*
2. *Se $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S}$ e $A \subset B$, então $B \backslash A \in \mathcal{S}$.*

Seja $\mathcal{S} \subset \mathscr{P}(\Omega)$, chamaremos:

- $\lambda(\mathcal{S})$ de o *menor λ-sistema contendo $\mathcal{S}$* e
- $\pi(\mathcal{S})$ de o *menor π-sistema contendo $\mathcal{S}$*.

Se Λ é o conjunto de λ-sistemas contendo $\mathcal{S}$ e Π é o conjunto de π-sistemas contendo $\mathcal{S}$, então $\lambda(\mathcal{S}) = \bigcap_{\mathcal{A} \in \Lambda} \mathcal{A}$ e $\pi(\mathcal{S}) = \bigcap_{\mathcal{B} \in \Pi} \mathcal{B}$. Diremos que $\lambda(\mathcal{S})$ e $\pi(\mathcal{S})$ são respectivamente o λ-sistema e o π-sistema gerado por $\mathcal{S}$. No mesmo sentido, $\sigma(\mathcal{S})$ é a σ-álgebra gerada por $\mathcal{S}$.

0.2 Lemas Básicos

Lema 1. *Para que um λ-sistema $\mathcal{S}$ de Ω seja uma σ-álgebra, é necessário e suficiente que seja um π-sistema de Ω e que $\Omega \in \mathcal{S}$.*

Demonstração. A condição é evidentemente necessária. A condição é suficiente: pois $\Omega \in \mathcal{S}$ e $\mathcal{S}$ é λ-sistema $\Rightarrow \forall A \in \mathcal{S}$, $A^c \in \mathcal{S}$. Se $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, então $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} C_n$, onde $C_n = \bigcup_{k=0}^{n} A_k$, logo $C_n \subset C_{n+1}$ e como $C_n = (\bigcap_{k=0}^{n} A_k^c)^c$, temos $C_n \in \mathcal{S}$, logo $A \in \mathcal{S}$. □

Lema 2. *Seja $\mathcal{P}$ um π-sistema de Ω, e seja $\mathcal{S}$ um λ-sistema. Se $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}$ e $\Omega \in \mathcal{S}$, então $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{S}$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{S}' = \lambda(\mathcal{P} \cup \{\Omega\})$, logo $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$. Mostraremos que $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{S}'$. Para isto, mostraremos que $\mathcal{S}'$ é um π-sistema e então, pelo lema 1, $\mathcal{S}'$ será uma σ-álgebra. Como $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}'$, teremos $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$.

Seja $\mathcal{S}'' = \left\{S \in \mathcal{S}' \mid S \cap P \in \mathcal{S}', \forall P \in \mathcal{P}\right\}$, então $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}'' \subset \mathcal{S}'$ e $\Omega \in \mathcal{S}''$. $\mathcal{S}''$ é um λ -sistema. De fato:

- (4.1): seja $P \in \mathcal{P}$ e $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $S_n \subset S_{n+1}$, uma sequência de elementos de $\mathcal{S}''$, então $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n) \in \mathcal{S}'$ e $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n) \cap P = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(S_n \cap P) \in \mathcal{S}'$.

- (4.2): seja $A \in \mathcal{S}''$, $B \in \mathcal{S}''$ com $A \subset B$ e $P \in \mathcal{P}$, então $B \backslash A \in \mathcal{S}'$ e $(B\backslash A) \cap P = (B \cap P)\backslash(A \cap P) \in \mathcal{S}'$.

Como $\mathcal{P} \cup \{\Omega\} \subset \mathcal{S}''$, temos $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}''$, logo $\mathcal{S}' = \mathcal{S}''$.

Seja $\mathcal{S}''' = \left\{S \in \mathcal{S}' \mid S \cap S' \in \mathcal{S}', \forall\, S' \in \mathcal{S}'\right\}$. Como $\mathcal{S}' = \mathcal{S}''$, $\forall\ P \in \mathcal{P}$ e $\forall\ S \in \mathcal{S}'$, $S \cap P \in \mathcal{P} \subset \mathcal{S}'$, logo $\mathcal{P} \subset \mathcal{S}''' \subset \mathcal{S}''$ e $\Omega \in \mathcal{S}'''$. $\mathcal{S}'''$ é um λ-sistema. De fato:

- (4.1): seja $S' \in \mathcal{S}'$ e $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $S_n \subset S_{n+1}$ uma sequência de elementos de S''', então $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S_n) \in \mathcal{S}'$ e $(\bigcup S_n)_{n\in\mathbb{N}} \cap S' = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(S_n \cap S') \in \mathcal{S}'$.

- (4.2): seja $A \in \mathcal{S}'''$ e $B \in \mathcal{S}'''$ com $A \subset B$ e $S' \in \mathcal{S}'$, então $B\backslash A \in \mathcal{S}'$ e $(B\backslash A) \cap S' = (B \cap S')\backslash(A \cap S') \in \mathcal{S}'$. Como $\mathcal{P} \cup \{\Omega\} \subset \mathcal{S}'''$ temos que $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}'''$ logo $\mathcal{S}' = \mathcal{S}'''$, o que prova que $\mathcal{S}'$ é um π-sistema.

□

Lema 3 (Pricípio de extensão por mensurabilidade)**.** *Seja Ω um conjunto, $\mathcal{P}$ um π-sistema e $\sigma(\mathcal{P})$ a σ-álgebra gerada por $\mathcal{P}$. Seja $\mathcal{H}$ um espaço vetorial de funções reais definidas em Ω com as seguintes propriedades:*

- *P_1: $\forall$ (h_n) sequência crescente de funções positivas extraídas de $\mathcal{H}$, tais que $h = \sup_n h_n$ é finita (respectivamente limitada) temos $h \in \mathcal{H}$;*

- *P_2: $I_\Omega \in \mathcal{H}$ e $\forall P \in \mathcal{P},\ I_P \in \mathcal{H}$.*

Então $\mathcal{H}$ contém todas as funções reais $\sigma(\mathcal{P})$-mensuráveis (respectivamente $\sigma(\mathcal{P})$-mensuráveis e limitadas).

Demonstração. Observando que:

1. Se f é uma função real $\sigma(\mathcal{P})$-mensurável então $f = f^+ - f^-$, onde $f^+(x) = \max(0, f(x))$ e $f^-(x) = -\min(0, f(x))$ são funções reais positivas $\sigma(\mathcal{P})$-mensuráveis.

2. Toda função real positiva $\sigma(\mathcal{P})$-mensurável é limite simples de uma sequência crescente de funções escada definidas em Ω e $\sigma(\mathcal{P})$-mensuráveis.

3. Como $\mathcal{H}$ é um espaço vetorial, se tivermos $I_A \in \mathcal{H},\ \forall\ A \in \sigma(\mathcal{P})$ então as funções escada pertencerão a $\mathcal{H}$ e por (P_1) todas as funções reais $\sigma(\mathcal{P})$-mensuráveis (ou limitadas) pertencerão a $\mathcal{H}$.

4. Temos que provar que $I_A \in \mathcal{H},\ \forall\ A \in \sigma(\mathcal{P})$

   - 4.1. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto dos $A \subset \Omega$ tal que $I_A \in \mathcal{H}$, vamos provar que $\mathcal{S}$ é um λ-sistema. De fato:
     - 4.1.a. Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência crescente de elementos de $\mathcal{S}$ então $\forall\ n \in \mathbb{N},\ I_{A_n} \in \mathcal{H}$ e $I_{\bigcup_n A_n} = \sup I_{A_n} \in \mathcal{H}$, por P_1. Logo, temos $\cup_n A_n \in \mathcal{S}$.
     - 4.1.b. Se $A \in \mathcal{S}$, $B \in \mathcal{S}$ e $A \subset B$ então I_A e $I_B \in \mathcal{H}$ e $I_{B\setminus A} = I_B - I_A \in \mathcal{H}$, pois $\mathcal{H}$ é espaço vetorial.
   - 4.2. Como, por P_2, $\mathcal{P} \cup \{\Omega\} \subset \mathcal{S}$, o lema 2 implica que $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{S}$, o que prova 4.

$\square$

Proposição 1. *Seja Ω um conjunto, $(E, \mathscr{B})$ um espaço probabilizável, φ uma aplicação de Ω em E, e $\sigma(\varphi)$ a σ-álgebra gerada por φ em Ω. Para que uma função numérica finita h definida em Ω seja $\sigma(\varphi)$-mensurável é necessário e suficiente que exista uma função numérica f finita, definida em E e -mensurável tal que $h = f \circ \varphi$.*

Demonstração. A condição é evidentemente suficiente, pois $h = f \circ \varphi$ é $\sigma(\varphi)$-mensurável, se f é $\mathscr{B}$-mensurável.

A codição é necessária. De fato:

1. Seja $\mathcal{H}$ o conjunto das funções numéricas finitas definidas em Ω e $\sigma(\varphi)$-mensuráveis da forma $f \circ \varphi$, onde f é $\mathscr{B}$-mensurável. $\mathcal{H}$ é um espaço vetoral. Vamos mostrar que $\mathcal{H}$ satisfaz P_1 e P_2 do lema 3, com $\mathcal{P} = \sigma(\varphi)$.

- P_1. Seja $(f_n \circ \varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência crescente de funções positivas de $\mathcal{H}$ tal que $\sup(f_n \circ \varphi)$ seja finita. Seja $g = \limsup_{n\to\infty} f_n$, g é $\mathscr{B}$-mensurável. $\forall\ y \in \varphi(\Omega),\ f_n(y)$ é uma sequência crescente e temos $g(y) = \lim_{n\to\infty} f_n(y) = \sup_n f_n(y) < +\infty$. Seja $f = gI_{[g<+\infty]}$ então f é $\mathscr{B}$-mensurável e f é finita e $\forall x \in \Omega\ (f \circ \varphi)(x) = (g \circ \varphi)(x) = \sup_n(f_n \circ \varphi)(x)$. Logo $\mathcal{H}$ verifica P_1.
- P_2. $\forall B \in \mathscr{B}$ a função $I_B \circ \varphi \in \mathcal{H}$, por definição de $\mathcal{H}$. $I_B \circ \varphi = I_{\varphi^{-1}(B)}$ e $\{\varphi^{-1}(B) | B \in \mathscr{B}\} = \sigma(\varphi)$, em particular $I_\Omega = I_{\varphi^{-1}(\Omega)}$, logo $\mathcal{H}$ satisfaz P_2.

2. Pelo lema 3, $\mathcal{H}$ contém todas as funções $\sigma(\mathcal{P})$-mensuráveis, logo contém h.

□

0.3 Prolongamento de Caratheodory de uma Função de Conjuntos em uma Medida

Definição 5 (medida exterior)**.** *Seja E um conjunto. Chama-se medida exterior em E toda aplicação $\nu : \mathscr{P}(E) \to \bar{\mathbb{R}}^+$ possuindo as seguintes propriedades:*

1. $\nu(\emptyset) = 0$,
2. $A \subset B \Rightarrow \nu(A) \leq \nu(B)$,
3. $\forall\ (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n \subset E$, $\nu(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n)$.

Teorema 1. *Seja ν uma medida exterior em E e seja*

$$\mathfrak{J} = \{A \subset E |\ \forall D \subset E,\ \nu(D) = \nu(D \cap A) + \nu(D \cap A^c)\}.$$

Então $\mathfrak{J}$ é uma σ-álgebra de E e $\nu|\mathfrak{J}$ é uma medida completa em $\mathfrak{J}$ (i.e. $\forall A \in \mathscr{P}(E),\ \nu(A) = 0 \Rightarrow A \in \mathfrak{J}$).

Demonstração. $\mathfrak{J}$ é uma σ-álgebra. De fato:

- $A \in \mathfrak{J}$ e $D \in \mathfrak{J} \Rightarrow \nu(D \cap A^c) + \nu(D \cap (A^c)^c) = \nu(D)$, logo $A^c \in \mathfrak{J}$. E e $\emptyset \in \mathfrak{J}$ pois $\nu(D \cap \emptyset) + \nu(D \cap E) = \nu(\emptyset) + \nu(D) = \nu(D)$, por 1.
- $A \in \mathfrak{J}$ e $B \in \mathfrak{J} \Rightarrow A \cap B \in \mathfrak{J}$. Como $D = [D \cap (A \cap B)] \cup [D \cap (A \cap B)^c]$, temos, por 3, $\nu(D) \leq \nu(D \cap (A \cap B)) + \nu(D \cap (A \cap B)^c),\ \forall D \subset E$. Para todo $D \subset E$, temos

$$\nu(D) = \nu(A \cap D) + \nu(A^c \cap D) \quad \text{e}$$
$$\nu(D) = \nu(B \cap D) + \nu(B^c \cap D)$$

em particular, substituindo D por $A\cap D$ e por $A^c\cap D$, temos

$$\begin{aligned}\nu(A\cap D) &= \nu(A\cap B\cap D)+\nu(A\cap B^c\cap D) \qquad \text{e}\\ \nu(A^c\cap D) &= \nu(A^c\cap B\cap D)+\nu(A^c\cap B^c\cap D).\end{aligned}$$

$\nu(D)=\nu(A\cap B\cap D)+\nu(A^c\cap B\cap D)+\nu(A\cap B^c\cap D)+\nu(A^c\cap B^c\cap D)$. Como $(A\cap B)^c=(A^c\cap B)\cup(A\cap B^c)\cup(A^c\cap B^c)$, por 3

$$\nu(D)\geq \nu(A\cap B\cap D)+\nu((A\cap B)^c\cap D),$$

logo $\nu(D)=\nu(A\cap B\cap D)+\nu((A\cap B)^c\cap D)$ e $A\cap B\in\mathfrak{J}$.

- $\forall\ (A_n)_{n\in\mathbb{N}},\ A_n\in\mathfrak{J},\ A_i\cap A_j=\emptyset,\ se\ i\neq j$, temos:

$$A=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\in\mathfrak{J}\ \text{ e }\ \nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}A_n\right)=\sum_{n\in\mathbb{N}}\nu(A_n).$$

De fato: como $\bigcup_{k=1}^n A_k=(\bigcap_{k=1}^n A_k^c)^c\in\mathfrak{J}$ e fazendo $B_n=\bigcup_{k=1}^n A_k$, temos $\forall D\subset E$,

$$\begin{aligned}\nu(D\cap B_k) &= \nu(D\cap B_k\cap B_{k-1})+\nu(D\cap B_k\cap B_{k-1}^c)\\ &= \nu(D\cap B_{k-1})+\nu(D\cap A_k),\end{aligned}$$

pois $A_k\subset B_{k-1}^c$, como $B_k=B_{k-1}\cup A_k$ temos $B_k\cap B_{k-1}^c=A_k\cap B_{k-1}^c=A_k$. Esta equação, por recorrência, nos permite escrever:

$$\nu(D\cap B_k)=\sum_{i=1}^k\nu(D\cap A_i).$$

Como $B_n\in\mathfrak{J}$ temos: $\forall\ n\in\mathbb{N}$ e $\forall\ D\subset E$

$$\begin{aligned}\nu(D)=\nu(D\cap B_n)+\nu(D\cap B_n^c) &= \sum_{k=1}^n\nu(D\cap A_k)+\nu(D\cap B_n^c)\\ &\geq \sum_{k=1}^n\nu(D\cap A_k)+\nu(D\cap A^c),\end{aligned}$$

pois $A\supset B_n$ logo $B_n^c\supset A^c$ e aplicando 2, obtemos o resultado. Passando ao limite quando $n\to\infty$ temos: $\forall\ D\subset E$,

$$\nu(D)\geq\sum_{k=1}^\infty\nu(D\cap A_k)+\nu(D\cap A^c) \tag{1}$$

e 3 implica $\forall\ D \in E$,

$$\nu(D) \geq \nu(D \cap A) + \nu(D \cap A^c).$$

Como, por 3, também vale $\forall\ D \in E$,

$$\nu(D) \leq \nu(D \cap A) + \nu(D \cap A^c),$$

temos a igualdade e $A \in \mathfrak{J}$. Logo $\mathfrak{J}$ é uma σ-álgebra. [Lembrar que se $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de conjuntos, então $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, onde $B_n = C_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} C_i$, $B_i \cap B_j = \emptyset$, se $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{n-1} C_i = \left(\bigcap_{i=i}^{n-1} C_i^c\right)^c$ e $C_n \backslash \bigcup_{i=1}^{n-1} C_i = C_n \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n-1} C_i\right)^c$].

Fazendo $D = A$ em (1) temos

$$\nu(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k).$$

Como por 3 temos

$$\nu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \nu(A_k),$$

então $\nu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \nu(A_n)$ e ν é uma medida em $\mathfrak{J}$.

Que ν é completa em $\mathfrak{J}$ segue de: se $\nu(A) = 0$, então $\forall\ D \subset E$, $\nu(D \cap A) = 0$ por 2, e ainda por 2, $\nu(D) \geq \nu(D \cap A) + \nu(D \cap A^c)$. Por 3, $\nu(D) \leq \nu(D \cap A) + \nu(D \cap A^c)$, logo se $\nu(A) = 0$ então $A \in \mathfrak{J}$. $\square$

Definição 6. *Definiremos o conjunto $\mathfrak{J}$ do teorema 1 como sendo a σ-*álgebra gerada pela medida exterior ν.

Definição 7. *Seja $\mathscr{S} \subset \mathscr{P}(E)$ e $\lambda : \mathscr{S} \to \mathbb{R}^+$ uma função de conjuntos, dizemos que λ é:*

- *simplesmente aditiva em $\mathscr{S}$ se para toda família finita, $S_1, \ldots, S_n$, de elementos de $\mathscr{S}$ dois a dois disjuntos tais que $\bigcup_{i=1}^n S_i \in \mathscr{S}$, temos $\lambda\left(\bigcup_{i=1}^n S_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda(S_i)$;*
- *σ-aditiva se para toda família $(S_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathscr{S}$ dois a dois disjuntos tais que $\bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \in \mathscr{S}$, temos:*

$$\lambda\left(\cup_{i=0}^{\infty} S_i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda(S_i).$$

Proposição 2. *Seja $\mathscr{S} \subset \mathscr{P}(E)$ um semi-anel.*

- *Seja $\lambda : \mathscr{S} \to \mathbb{R}$ uma função de conjunto simplesmente aditiva e σ-aditiva;*
- *$\forall\, B \in \mathscr{P}(E)$, seja $\mathscr{S}(B)$ o conjunto das sequências finitas ou enumeráveis de elementos de $\mathscr{S}$, tais que $B \subset \bigcup_n S_n$;*
- *Seja $\lambda^* : \mathscr{P}(E) \to \mathbb{R}^+$ tal que:*

$$\lambda^*(B) = \begin{cases} \inf\left\{\sum_n \lambda(S_n) : (S_n) \in \mathscr{S}(B)\right\}, & \textit{se } \mathscr{S}(B) \neq \emptyset, \\ +\infty, & \textit{se } \mathscr{S}(B) = \emptyset. \end{cases}$$

Então λ^* é uma medida exterior em E , $\mathscr{S} \subset \mathfrak{J}$ é a σ-álgebra de E gerada por λ^* e λ é a restrição de λ^* a $\mathscr{S}$.

Demonstração. λ^* é uma medida exterior, de fato:

1. $\emptyset \in \mathscr{S}$, pois se $A \in \mathscr{S}$, $\emptyset = A \backslash A$ logo $\emptyset \in \mathscr{S}$ e $\lambda^*(\emptyset) = \lambda(\emptyset) = 0$.

2. Se $A \subset E$ e $B \subset E$ e $A \subset B$ resulta, óbviamente, da definição de λ^* que $\lambda^*(A) \leq \lambda^*(B)$, pois $\mathscr{S}(B) \subset \mathscr{S}(A)$.

3. Seja $(A_n)_{n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}},\ A_n \in E$ então: se $\exists\, n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ tal que $\lambda^*(A_n) = +\infty$, teremos

$$\lambda^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n)$$

e se $\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ $\lambda^*(A_n) < +\infty$, então, dado $\epsilon > 0$, para cada n existe uma sequência $(B_n^k)_k \in \mathscr{S}(A_n)$ tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(B_n^k) - \frac{\epsilon}{2^n} \leq \lambda^*(A_n).$$

Temos $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n,k} B_n^k$ e $B_n^k \in \mathscr{S},\ \forall\, n$ e $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, logo

$$\lambda^*\left(\cup_{n=1}^{\infty}\right) \leq \sum_{n,k} \lambda(B_n^k) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n) + \epsilon.$$

Como ϵ é qualquer real positivo, temos

$$\lambda^*\left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^*(A_n).$$

Vamos mostrar que para toda sequência finita $S_1, \ldots, S_n$ de elementos de $\mathscr{S}$ dois a dois disjuntos temos que:

$$\lambda^* \left(\cup_{i=1}^n S_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda^*(S_i)$$

[neste caso, fazendo $n = 1$ temos $\forall\ S \in \mathscr{S},\ \lambda^*(S) = \lambda(S)$ e $\lambda = \lambda^*|\mathscr{S}$]. De fato, segue da definição de λ^* que:

$$\lambda^* \left(\cup_{i=1}^n S_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \lambda(S_i),$$

pois $S_1, \ldots, S_n \in \mathscr{S}\left(\cup_{i=1}^n S_i\right)$. Además, para $\epsilon > 0$, existe $(B_k)_k \in \mathscr{S}\left(\cup_{i=1}^n S_i\right)$ tal que

$$\lambda^* \left(\cup_{i=1}^n S_i\right) + \epsilon \geq \sum_k \lambda(B_k).$$

Como $B_k \in \mathscr{S}$ e $B_k \supset \cup_{i=1}^n (S_i \cap B_k)$ temos

$$\begin{aligned}\lambda^* \left(\cup_{i=1}^n S_i\right) + \epsilon \geq \sum_k \lambda(B_k) \geq \sum_k \sum_{i=1}^n \lambda(S_i \cap B_k) = \sum_{i=1}^n \sum_k \lambda(S_i \cap B_k) \\ \geq \sum_{i=1}^n \lambda\left(\cup_k (S_i \cap B_k)\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda(S_i).\end{aligned}$$

Como ϵ é qualquer temos

$$\lambda^* \left(\cup_{i=1}^n S_i\right) \geq \sum_{i=1}^n \lambda(S_i)$$

logo

$$\lambda^* \left(\cup_{i=1}^n S_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda(S_i).$$

Finalmente mostraremos que: $\mathscr{S} \subset \mathfrak{J}$, ou seja, $\forall B \subset E$ e $\forall\ S \in \mathscr{S}$ temos:

$$\lambda^*(B) = \lambda^*(B \cap S) + \lambda^*(B \cap S^c).$$

- Sejam $B \in \mathscr{P}(E)$ e $S \in \mathscr{S}$, $B = (B \cap S) \cup (B \cap S^c)$ logo por 3 $\lambda^*(B) \leq \lambda^*(B \cap S) + \lambda^*(B \cap S^c)$.

- Temos que provar que: $\lambda^*(B) \geq \lambda^*(B \cap S) + \lambda^*(B \cap S^c)$. Se $\lambda^*(B) = \infty$ então a desigualdade é válida. Se $\lambda^*(B) < \infty$, para $\epsilon > 0$, $\exists (S_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathscr{S}(B)$ tal que

$$\lambda^*(B) + \epsilon \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(S_n).$$

Como $\mathscr{S}$ é um semi-anel, $S_n \in \mathscr{S}$ e $S \in \mathscr{S}$ então $S_n \backslash S = \bigcup_{i=1}^{m} B_n$, onde $B_n^i \in \mathscr{S}$ e $B_n^i \cap B_n^j \neq \emptyset$, se $i \neq j$. Como $S_n \backslash S = S_n \cap S^c$ temos

$$\begin{aligned} \lambda^*(S_n) = \lambda(S_n) &= \lambda(S_n \cap S) + \lambda(S_n \cap S^c) \\ &= \lambda(S_n \cap S) + \sum_{i=1}^{m} \lambda(B_n^i) \\ &= \lambda^*(S_n \cap S) + \lambda^*\left(\cup_{i=1}^{m} B_n^i\right) \quad \text{e} \\ \lambda^*(B) + \epsilon &\geq \sum_{n=1}^{\infty} \left(\lambda(S_n \cap S) + \lambda^*\left(\cup_{i=1}^{m} B_n^i\right)\right) \\ &\geq \lambda^*(B \cap S) + \lambda^*(B \cap S^c), \end{aligned}$$

pois $\bigcup_{n=1}^{\infty}(S_n \cap S) \supset B \cap S$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{m} B_i = \bigcup_{n=1}^{\infty}(S_n \cap S^c) \supset B \cap S^c$. Como $\epsilon > 0$ é qualquer temos

$$\lambda^*(B) \geq \lambda^*(B \cap S) + \lambda^*(B \cap S^c).$$

□

Teorema 2. *Seja $\mathscr{S}$ um semi-anel de partes de E tal que $\exists (S_n)_{n \in \mathbb{N}},\ S_n \in \mathscr{S}$ e $\cup_n S_n = E$. Seja λ uma aplicação de $\mathscr{S}$ em $\mathbb{R}^+$ simplesmente aditiva e σ-aditiva. Então existe um prolongamento único de λ em uma medida definida na σ-álgebra $\sigma(\mathscr{S})$.Esta medida μ é σ-finita (ou seja, E é a união de uma família enumerável de conjuntos de medida finita).*

Demonstração. Se λ^* é a medida exterior associada a λ e $\mathscr{T}$ é a σ-álgebra gerada por λ^* temos que: pelo teorema 1, $\lambda^*|\mathscr{T}$ é uma medida completa em $\mathscr{T}$; pela proposição 2, $\mathscr{S} \subset \mathscr{T}$ e $\lambda = \lambda^*|\mathscr{S}$. Logo $\sigma(\mathscr{S}) \subset \mathscr{T}$ e $\mu = \lambda^*|\sigma(\mathscr{S})$ é uma medida em $\sigma(\mathscr{S})$, que prolonga λ a este conjunto. Como $\lambda : \mathscr{S} \to \mathbb{R}^+$ temos que $\mu(S_n) < +\infty, \forall n$ e $E = \cup_n S_n$ logo μ é σ-finita.

Sejam duas medidas μ_1 e μ_2 definidas em $\sigma(\mathscr{S})$ tais que $\mu_1|\mathscr{S} = \mu_2|\mathscr{S} = \lambda$ e seja $\mathscr{M} = \{M \in \sigma(\mathscr{S}) | \mu_1(M) = \mu_2(M)\}$, temos: $\mathscr{M}$ é um λ-sistema. De fato:

- Se $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é tal que $S_n \in \mathscr{M}$ e $S_n \subset S_{n+1}$, $\forall n$ temos:

$$\begin{aligned}\mu_1(\cup_{n\in\mathbb{N}}S_n) &= \mu_1(\cup_{n\in\mathbb{N}}(S_{n+1}\backslash S_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu_1(S_{n+1}\backslash S_n)\\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\mu_2(S_{n+1}\backslash S_n) = \mu_2(\cup_{n\in\mathbb{N}}S_n).\end{aligned}$$

- Se $M_1 \in \mathscr{M}$ e $M_2 \in \mathscr{M}$ e $M_1 \subset M_2$ então

$$\mu_1(M_2\backslash M_1) = \mu_1(M_2) - \mu_1(M_1) = \mu_2(M_2) - \mu_2(M_1) = \mu_2(M_2\backslash M_1).$$

Como $\mathscr{S}$ é um semi-anel, $\mathscr{S}$ é também um π-sistema. Como $\mathscr{S} \subset \mathscr{M}$ e $E \in \mathscr{M}$, pelo lema 2, $\sigma(\mathscr{S}) \subset \mathscr{M}$, o que prova a unicidade. $\square$

Referências Bibliográficas

[1] KOLMOGOROV, FOMIN: *Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional*, Editorial Mir

[2] MÉTIVIER, M: *Notions fondamentales de la Théorie des Probabilités*, Dunod, Paris

[3] BOCHNER, S: *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*, Dover Publications, 2005

[4] NEVEAU, J. *Mathematical Foundations of the Calculus of Probabilities* Holden-day, San Francisco, 1965