Relatório Técnico

Noções Fundamentais de Processos Estocásticos

Ernesto Prado Lopes
lopes@cos.ufrj.br

04 de dezembro de 2008

Resumo

Este trabalho é continuação do anterior e nele estudamos o teorema de Kolmogorov-Bochner sobre a extensão de um sistema projetivo em uma medida definida em um espaço de funções. Nosso objetivo é aplicar esses resultados na definição de processos estocásticos que possam ter aplicações práticas interessantes. Neste sentido novos trabalhos aparecerão em breve.

0.1 Definições Iniciais e Resultados em Topologia

Seja $((E_t, \mathscr{B}_t))_{t\in T}$ uma família de espaços mensurável. $\forall S \subset T$,

$$E^S = \prod_{t\in S} E_t$$

é espaço produto da subfamília $(E_s)_{s\in S}$. Quando $|S| < +\infty$, $(E^S, \mathscr{B}^S)$ é o espaço mensurável produto, onde $\mathscr{B}^S$ é gerada pelos paralelepípedos de E^S, ou seja, pelos conjuntos da forma $B_{s_1} \times ... \times B_{s_n}$, onde $B_{s_i} \in \mathscr{B}_{s_i}$, para $s_1 < ... < s_n$. Notaremos π_S a projeção canônica de E^T em E^S. Então $\forall A \in E^S$ temos que $\pi_S^{-1}(A) = C_A \in E^T$ é um cilindro de E^T de base A.

Proposição 1. *Seja o conjunto $\mathscr{A}$ dos cilindros de E^T de base pertencente a algum $\mathscr{B}^S, S \subset T, |S| < +\infty$ então $\mathscr{A}$ é um anel.*

Demonstração. Sejam $S \subset T$, $S^{'} \subset T$, $|S| < +\infty$, $|S^{'}| < +\infty$, $A \in \mathscr{B}^S$ e $A^{'} \in \mathscr{B}^{S^{'}}$.

Então

$C_A \cup C_{A'} = \pi_S^{-1}(A) \cup \pi_{S'}^{-1}(A^{'}) = \pi_{S\cup S'}^{-1}(A \times E^{S^{'}}) \cup \pi_{S\cup S'}^{-1}(E^S \times A^{'}) = \pi_{S\cup S'}^{-1}((A \times E^{S^{'}}) \cup (E^S \times A^{'})) = C_{(A\times E^{S'})\cup(E^S\times A')}$,

onde $(A \times E^{S^{'}}) \cup (E^S \times A^{'}) \in \mathscr{B}^{S\cup S^{'}}$.

Temos também

$C_A^{'}|C_A = C_{A'} \cap C_A^c = C_{A'} \cap C_{A^c} = C_{A'\times A^c}$,

onde $A^{'} \times A^c \in \mathscr{B}^{S\cup S^{'}}$.

□

Definição 1. *$\mathscr{B}^T = \sigma(\mathscr{A})$, ou seja, $\mathscr{B}^T$é a σ-álgebra gerada pelo anel $\mathscr{A}$.*

Definição 2. *$(E^T, \mathscr{B}^T)$ é chamado espaço produto da família de espaços mensuráveis $((E_t, \mathscr{B}_t))_{t\in T}$.*

A σ-álgebra $\mathscr{B}^T$ é a menor σ-álgebra que torna mensurável toda projeção canônica $\pi_S : E^T \to E^S$, com $|S| < +\infty$.

Definição 3. *Uma sequência $(C_\lambda)_{\lambda\in I}$ tem a propriedade da interseção finita se $\forall J \subset I$, $|J| < \infty$, $\cap_{j\in J} C_j \neq \emptyset$.*

Definição 4. *O conjunto $\mathscr{C} \subset \mathscr{P}(E)$ é dito ser uma classe compacta de E, se $\forall (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $C_n \in \mathscr{C}$, com a propriedade da interseção finita, tivermos $\cap_{n=1}^{\infty} C_n \neq \emptyset$*

Teorema 1 (Tychonov). *K_λ é compacto, $\forall \lambda \in I$ se, e somente se $\prod_{\lambda\in I} K_\lambda$ é compacto.*

Demonstração. A condição é suficiente. De fato: π_λ é contínua na topologia produto e $\prod_{\lambda\in I} K_\lambda$ é compacto, logo $K_\lambda = \pi_\lambda(\prod_{\lambda\in I} K_\lambda)$ é compacto.

A condição é necessária. Suponhamos que $\forall\lambda \in I$, K_λ é compacto. Seja

$$\mathcal{F} = \left\{ F_\xi \subset \prod_{\lambda\in I} K_\lambda | F_\xi \text{ é fachado e } \forall n \in \mathbb{N},\ F_{\xi_1} \cap \ldots \cap F_{\xi_n} \neq \emptyset \right\},$$

ou seja, $\mathcal{F}$ é o conjunto dos fechados de $\prod_{\lambda\in I} K_\lambda$, com a propriedade da interseção finita. Seja $\mathcal{M} \supset \mathcal{F}$ o conjunto máximo de subconjuntos de $\prod_{\lambda\in I} K_\lambda$ com esta propriedade. O lema de Zorn assegura a existência deste conjunto. De fato: seja uma família totalmente ordenada qualquer de conjuntos de $\mathcal{M}$, a união destes conjuntos é uma cota superior desta família, pois pertence a $\mathcal{M}$, então, pelo lema de Zorn, existe um elemento máximo. Temos que provar que $\cap_\xi F_\xi \neq \emptyset$. Mostraremos que $\exists x \in \prod_{\lambda\in I} K_\lambda$ tal que $x \in \overline{M}$, $\forall M \in \mathcal{M}$, o que implica em $x \in \cap_\xi F_\xi$, pois $\mathcal{F} \subset \mathcal{M}$. Para λ fixado, $\pi_\lambda(M_{\xi_1}) \cap \pi_\lambda(M_{\xi_2}) \cap \ldots \cap \pi_\lambda(M_{\xi_n}) \supset \pi_\lambda(M_{\xi_1} \cap M_{\xi_2} \cap \ldots \cap M_{\xi_n}) \neq \emptyset$, logo o conjunto $\pi_\lambda(\mathcal{M}) = \{\pi_\lambda(M) | M \in \mathcal{M}\}$ possui a propriedade da interseção finita. Como K_λ é compacto, $\exists x_\lambda \in \cap_\xi \overline{\pi_\lambda(M_\xi)}$. Seja $x = (x_\lambda) \in \prod_{\lambda\in I} K_\lambda$. Mostraremos que $x \in \overline{M}$. De fato: $x_\lambda \in \overline{\pi_\lambda(M_\xi)}$, $\forall\xi$, logo $\forall U \subset K_\lambda$, U aberto e $x_\lambda \in U$, temos $U \cap \pi_\lambda(M_\xi) \neq \emptyset$ e $\pi^{-1}(U) \cap M_\xi \neq \emptyset$, $\forall\xi$. Como para a interseção finita de abertos $\pi_\lambda^{-1}(U)$, com U aberto de K_λ e $x_\lambda \in U$, que formam a base da topologia produto, a interseção com $\overline{M_\xi}$, $\forall\xi$ é não vazia, então para todo aberto A de $\prod_{\lambda\in I} K_\lambda$ com $x \in A$ temos $A \cap M_\xi \neq \emptyset$, logo $x \in \overline{M_\xi}$, $\forall\xi$. O que queríamos mostrar. $\square$

0.2 O Teorema de Kolmogorov - Bochner

Lema 1. *Seja $\mathscr{C}$ o conjunto dos cilindros de E^T com base compacta em E^S para algum $S \subset T$, $|S| < \infty$. Então $\mathscr{C}$ é uma classe compacta de E^T.*

Demonstração. Seja $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de $\mathscr{C}$, então

$$C_n = K_{S_n} \times E^{T\setminus S_n},$$

onde K_{S_n} é um compacto de E^{S_n}, $|S_n| < \infty$ e $S_n \subset T$. Suponhamos que $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tenha a propriedade da interseção finita, logo $C_n \neq \emptyset$ e $K_{S_n} \neq \emptyset$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Seja $T_k = \cup_{n=1}^k S_n$ e $T' = \cup_{n=1}^\infty S_n$. Seja

$$K_t = \pi_{\{t\},S_n}(K_{S_n}), \quad t \in T',$$

onde $n = \inf\{p | t \in S_p\}$.

$$C_n = K_{S_n} \times \prod_{t\in T_k\setminus S_n} E_t \times \prod_{t\in T\setminus T_k} E_t, \quad k \geq n \quad \text{e}$$

$$\bigcap_{n=1}^{k} C_n = \left\{ \bigcap_{n=1}^{k} \left(K_{S_n} \times \prod_{t \in T_K \setminus S_n} E_t \right) \right\} \times \prod_{t \in T \setminus T_k} E_t,$$

logo

$$\bigcap_{n=1}^{k} C_n \neq \emptyset \Leftrightarrow \bigcap_{n=1}^{k} \left(K_{S_n} \times \prod_{t \in T_k \setminus S_n} E_t \right) \neq \emptyset.$$

Como

$$\bigcap_{n=1}^{k} \left(K_{S_n} \times \prod_{t \in T_k \setminus S_n} E_t \right) = \bigcap_{n=1}^{k} \left(K_{S_n} \times \prod_{t \in T_k \setminus S_n} K_t \right),$$

temos

$$\bigcap_{n=1}^{k} C_n \neq \emptyset \Leftrightarrow \bigcap_{n=1}^{k} \left(K_{S_n} \times \prod_{t \in T_k \setminus S_n} K_t \right) \times \prod_{t \in T' \setminus T_k} \neq \emptyset,$$

pois $K_t \neq \emptyset$. Como $K_{T'} = \prod_{t \in T'} K_t$ é compacto e

$$K_{T'} \supset \bigcap_{n=1}^{k} \left(K_{S_n} \times \prod_{t \in T_k \setminus S_n} K_t \right) \times \prod_{t \in T' \setminus T_k} K_t = \bigcap_{n=1}^{k} \left(K_{S_n} \times \prod_{t \in T' \setminus S_n} K_t \right),$$

temos que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(K_{S_n} \times \prod_{t \in T' \setminus S_n} K_t \right) \neq \emptyset,$$

logo

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(K_{S_n} \times \prod_{t \in T' \setminus S_n} K_t \right) \right\} \times \prod_{t \in T \setminus T'} E_t \neq \emptyset.$$

□

Lema 2. *Se $\tilde{\mu}$ é uma função simplesmente aditiva definida em uma álgebra $\mathscr{A}$ de subconjuntos de Ω, e se $\mathscr{C}$ é uma classe compacta de partes de Ω, tal que $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$ e $\forall A \in \mathscr{A}$,*

$$\tilde{\mu}(A) = \sup \left\{ \tilde{\mu}(C) | C \in \mathscr{C} \text{ e } C \subset A \right\}.$$

Então $\tilde{\mu}$ é σ-aditiva em $\mathscr{A}$.

Demonstração. Se $\tilde{\mu}$ é simplesmente aditiva em $\mathscr{A}$ e para toda sequência decrescente $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (ou seja,$A_{n+1} \subset A_n,\ \forall n \in \mathbb{N}$), $A_n \in \mathscr{A}$, tal que $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ e $\tilde{\mu}(A_n) < \infty$ tivermos $\lim_{n\to\infty} \tilde{\mu}(A_n) = 0$, então $\tilde{\mu}$ é σ-aditiva em $\mathscr{A}$. De fato: seja $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $B_n \in \mathscr{A}$ e $B_i \cap B_j = \emptyset$ para $i \neq j$, e $B = \cup_{n\in\mathbb{N}} B_n \in \mathscr{A}$. Então $C_k = B \setminus \cup_{i=1}^{k} B_i \in \mathscr{A}$ e $\tilde{\mu}(\cup_{i=1}^{k} B_n) = \tilde{\mu}(B) - \tilde{\mu}(C_k)$, logo $\sum_{n=1}^{k} \tilde{\mu}(B_n) = \tilde{\mu}(B) - \tilde{\mu}(C_k)$. Fazendo $k \to \infty$, temos $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mu}(B_n) = \tilde{\mu}(B) - \lim_{k\to\infty} \tilde{\mu}(C_k) = \tilde{\mu}(B)$, pois $\tilde{\mu}(C_n) \leq \tilde{\mu}(B) < \infty$, $\cap_{n=1}^{\infty} C_n = \emptyset$ e $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência decrescente.

Seja $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $A_n \in \mathscr{A}$, uma sequência decrescente tal que $\cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$ e $\tilde{\mu}(A_n) < +\infty$. Tem-se $\lim \tilde{\mu}(A_n) = 0$. De fato: para $\epsilon > 0$ temos $\forall n \in \mathbb{N}$, existe $C_n \in \mathscr{C}$, $C_n \subset A_n$ com

$$\tilde{\mu}(C_n) \geq \tilde{\mu}(A_n) - \frac{\epsilon}{2^n}.$$

Tem-se que $\cap_{n=1}^{\infty} C_n \subset \cap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Como $\mathscr{C}$ é classe compacta, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ então $\cap_{k=1}^{n} C_k = \emptyset$. Portanto

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(A_n) &= \tilde{\mu}(A_n - \cap_{k=1}^{n} C_k) = \tilde{\mu}(\cap_{k=1}^{n} A_k - \cap_{k=1}^{n} C_k) \\ &\leq \tilde{\mu}(\cup_{k=1}^{n}(A_k - C_k)) \leq \sum_{k=1}^{n} \tilde{\mu}(A_k - C_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\epsilon}{2^n} \leq \epsilon.\end{aligned}$$

□

Teorema 2 (Kolmogorov-Bochner)**.** *Sejam T um conjunto de índices qualquer, $\mathscr{S} = \{S \subset T |\ |S| < \infty\}$ e $(E^S, \mathscr{B}_S, \mu_s)_{S\in\mathscr{S}}$ uma família de espaços de medida na qual*

$$E^S = \prod_{t\in S} E_t$$

é um espaço topológico e $\mathscr{B}_S$ a σ-álgebra de seus borelianos. Supõe-se ainda que as medidas μ_S possuem a seguinte propriedade:

$$\forall B \in \mathscr{B}_S,\ \mu_S(B) = \sup\{\mu_S(K) |\ K \ compacto,\ K \subset B\}.$$

A fim de que exista uma medida μ_T em $(E^T, \mathscr{B}_T)$, com $\mathscr{B}_T = \sigma\left\{\cup_{S\in\mathscr{S}} \pi_S^{-1}(\mathscr{B}_S)\right\}$, tal que para todo $S \in \mathscr{S}$ a medida μ_S seja a imagem de μ_T por μ_S, é necessário e suficiente que $(E^S, \mathscr{B}_S, \mu_S, \pi_{SS'})_{S,\ S'\in\mathscr{S},\ S\subset S'}$ seja um sistema projetivo.

Demonstração. A condição é necessária pois $\pi_S = \pi_{SS'} \circ \pi_{S'}$, para todo $(S, S') \in \mathscr{S} \times \mathscr{S}$ com $S \subset S'$, logo

$$\mu_S = \mu_T \circ \pi_S^{-1} = \mu_T \circ \pi_{S'}^{-1} \circ \pi_{SS'}^{-1} = \mu_{S'} \circ \pi_{SS'}^{-1}.$$

Usando os Lemas e o teorema de Caratheodory, podemos provar a suficiência.

1. Seja $\mathscr{A}$ o conjunto dos cilindros de E^T com base em $\mathscr{B}_S$ para algum $S \subset T$, $|S| < \infty$. Então $\mathscr{A}$ é uma álgebra e portanto um semi-anel.

2. Seja $\tilde{\mu} : \mathscr{A} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida por: para cada $A \in \mathscr{A}$, $\exists B \in \mathscr{B}^S$ tal que $A = \pi_S^{-1}(B)$ então fazendo $\tilde{\mu}(A) = \mu_S(B)$, ou seja, $\mu_S(B) = \tilde{\mu}(\pi_S^{-1}(B))$, então μ_S será a medida imagem de $\tilde{\mu}$ por π_S.

   A medida $\tilde{\mu}$ está bem definida pois se $A = \pi_S^{-1}(B) = \pi_{S'}^{-1}(C)$ onde $B \in \mathscr{B}^S$ e $C \in \mathscr{B}^{S'}$ então fazendo $S'' = S \cup S'$, como $(E^S, \mathscr{B}^S, \mu_S, \pi_{SS'})_{S,\, S' \in \mathscr{S},\, S \subset S'}$ é um sistema projetivo

$$A = \pi_{S''}^{-1} \circ \pi_{SS''}^{-1}(B) = \pi_{S''}^{-1} \circ \pi_{S'S''}^{-1}(C)$$

   e

$$\mu_S(B) = \mu_{S''}(\pi_{SS''}^{-1}(B)) = \mu_{S''}(\pi_{S'S''}^{-1}(C)) = \mu_{S'}(C).$$

3. $\tilde{\mu}$ é simplesmente aditiva.

4. A classe $\mathscr{C} \subset \mathscr{A}$ dos cilindros de E^T com base compacta em algum E^S, $S \subset T$, $|S| < \infty$ é, pelo lema 1, uma classe compacta de E^T.

5. $\forall A \in \mathscr{A}$,

$$\begin{aligned}\tilde{\mu}(A) = \mu_S(\pi_S(A)) &= \sup\left\{\mu_S(K) | K \subset E^T \text{ é compacto e } K \subset \pi_S(A)\right\} \\ &= \sup\left\{\tilde{\mu}(C) | C \in \mathscr{C},\ C \subset A\right\}.\end{aligned}$$

6. O lema 2 garante que $\tilde{\mu}$ é σ-aditiva.

7. Pelo teorema de Caratheodory, existe um prolongamento único de $\tilde{\mu}$ em uma medida que chamamos de μ_T definida em $\sigma(A) = \sigma(\cup_{s \in \mathscr{S}} \pi_S^{-1}(\mathscr{B}_S)) = \mathscr{B}_T$.

$\square$

Referências Bibliográficas

[1] KOLMOGOROV, FOMIN: *Elementos da Teoria das Funções e de Análise Funcional*, Editorial Mir

[2] MÉTIVIER, M: *Notions fondamentales de la Théorie des Probabilités*, Dunod, Paris

[3] BOCHNER, S: *Harmonic Analysis and the Theory of Probability*, Dover Publications, 2005

[4] NEVEAU, J. *Mathematical Foundations of the Calculus of Probabilities* Holden-day, San Francisco, 1965