



COPPE/UFRJ

SOBRE GRAFOS UEH

Priscila Cardoso Petito

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Rio de Janeiro
Setembro de 2009

SOBRE GRAFOS UEH

Priscila Cardoso Petito

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Prof^ª. Márcia Rosana Cerioli, D.Sc.

Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.

Prof. Claudson Ferreira Bornstein, Ph.D.

Prof. Mitre Costa Dourado, D.Sc.

Prof^ª. Renata Raposo Del-Vecchio, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

SETEMBRO DE 2009

Petito, Priscila Cardoso

Sobre grafos UEH/Priscila Cardoso Petito. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2009.

VIII, 94 p. 29, 7cm.

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2009.

Referências Bibliográficas: p. 92 – 94.

1. Grafos UEH. 2. Propriedade Helly. 3. Grafos de interseção. I. Cerioli, Márcia Rosana. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

Agradecimentos

A Deus e Nossa Senhora que nunca deixaram de me amparar e guiar.

Ao meu pai João Petito por ser meu chão.

A minha mãe Norma Cardoso por me ensinar o gosto pela ciência. Alguém que sei que está muito orgulhosa vendo que cheguei até aqui onde quer que ela esteja.

Aos meus filhos João Antônio e Bernardo pelo apoio, compreensão, carinho, paciência e por estarem sempre ao meu lado fazendo minha vida ter muito mais sentido. E ao Alexandre, por me ajudar a cuidar deles.

A minha irmã Patrícia por me ajudar sempre.

Ao meu sobrinho Gustavo e ao meu cunhado Williman pelo apoio.

A tia Vera e tia Miriam porque sem vocês eu não poderia ter chegado até aqui.

A toda minha família que tanto torceu por mim. Aos meus primos e primas, tios e tias que acompanharam de perto esta caminhada.

Aos amigos do trabalho que tanto me apoiaram.

Aos amigos da COPPE por me ajudarem sempre. Em especial aos amigos Rafael Bernardo e Mitre Dourado pelo prazer de trabalharmos juntos.

A CAPES pelo apoio financeiro fundamental para a realização deste trabalho.

Aos professores e funcionários da UFRJ que, no desempenho de suas funções, foram extremamente competentes. A professora Celina Figueiredo pela colaboração.

Finalmente, a Prof^a Márcia Cerioli, a quem devo tanto. Devo a ela o gosto pela descoberta, a eterna busca por fazer cada vez melhor e me superar. Sempre serei grata por sua competência, paciência e por me ajudar a ser a pessoa e a profissional que sou hoje.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

SOBRE GRAFOS UEH

Priscila Cardoso Petito

Setembro/2009

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

O grafo de interseção de uma família de conjuntos é o grafo obtido associando-se a cada conjunto um vértice e , tal que dois vértices são adjacentes se e somente se os conjuntos correspondentes têm interseção não vazia.

Examinamos as classes de grafos UE e UEH, que são os grafos de interseção de caminhos em uma árvore, onde os caminhos são considerados como conjuntos de arestas. Quando a família de caminhos satisfaz a propriedade Helly, temos a classe UEH.

Apresentamos uma caracterização por subgrafos proibidos para os grafos que são simultaneamente UEH e SPLIT, uma prova de que o problema da coloração de vértices para grafos UEH é NP-Completo e provamos que todo grafo UEH admite uma coloração de cliques com 3 cores mas este valor é ilimitado para grafos UE.

Neste texto também estabelecemos que os problemas sanduíche para a classe CLIQUE-HELLY e para subclasses desta são NP-Completo além das relações de inclusão entre as classes UE, UEH e CLIQUE-HELLY.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

ON UEH GRAPHS

Priscila Cardoso Petito

September/2009

Advisor: Márcia Rosana Cerioli

Department: Systems Engineering and Computer Science

The intersection graph of a family of sets is obtained by associating a vertex with each set of the family and two vertices are adjacent if and only if the corresponding sets have a non empty intersection.

We examine the UE and UEH graph classes, that are intersection graphs of paths in a tree, where the paths are given by its edge sets. If the family of paths satisfies the Helly property we obtain the UEH graphs.

We present a forbidden subgraphs characterization for graphs that are both UEH and SPLIT. We prove that the vertex coloring problem for UEH graphs is NP-Complete and every UEH graph admits a clique coloring using 3 colors but this value is unbounded for UE graphs.

We also prove that the sandwich problems for the CLIQUE-HELLY class and subclasses are NP-Complete as well as the inclusion relations between UE, UEH and CLIQUE-HELLY classes.

Sumário

1	Introdução	1
2	Preliminares	5
2.1	Grafos	5
2.2	Grafos de interseção	9
2.3	Propriedade Helly	11
2.4	Grafos de caminho com interseção em arestas	13
2.5	Diagrama de interseção entre as classes	17
3	A classe UEH	19
3.1	Estrutura dos ciclos na classe UEH	21
3.2	Cliques de grafos UEH	25
3.3	Árvore característica para a classe UEH	29
3.4	A subclasse UEH-Local	30
3.5	Decomposição por cliques	32
3.5.1	Complexidade da decomposição por cliques	37
3.5.2	Caracterização de grafos UEH pela decomposição por cliques	37
3.5.3	Grafos UEH indecomponíveis	47
3.5.4	Problema do reconhecimento dos grafos UEH	48
4	Interseção das classes UE, UEH e Clique-Helly	50
4.1	Definições	50
4.2	Inclusão entre as classes UEH e clique-Helly	52
4.3	Interseção das classes UE e clique-Helly	54

5	Sobre o problema sanduíche para grafos clique-Helly e subclasses	59
5.1	Definições	60
5.2	Problema sanduíche para grafos clique-Helly e clique-Helly hereditário	61
5.3	Problema sanduíche para grafos clique-Helly não hereditários	65
6	Caracterização por subgrafos proibidos para a classe dos grafos simultaneamente UEH e SPLIT	69
6.1	Definições	70
6.2	Subgrafos proibidos para grafos simultaneamente UEH e SPLIT	72
7	Sobre o problema da coloração de vértices para grafos UEH	75
7.1	Preliminares	75
7.2	NP-Completude do problema da coloração de vértices para grafos UEH	76
8	Coloração de cliques de grafos UEH e de grafos UE	84
8.1	Definições	84
8.2	Coloração de cliques de grafos UEH	86
8.3	Coloração de cliques de grafos UE	88
9	Considerações Finais	90
	Referências Bibliográficas	92

Capítulo 1

Introdução

O grafo de interseção de uma família de conjuntos é obtido ao associarmos um vértice a cada conjunto da família, adicionando uma aresta entre dois vértices exatamente quando os conjuntos correspondentes têm interseção não vazia. Diferentes classes de grafos de interseção são definidas quando são impostas propriedades especiais às quais esta família de conjuntos deve satisfazer. Os elementos das famílias e as propriedades que as definem aparecem em vários contextos, modelando diferentes situações, inclusive da vida real [1], o que é um incentivo adicional para o estudo destas classes.

Em grande parte deste trabalho, estudamos o caso em que a família é composta por caminhos (não necessariamente todos os possíveis) de uma árvore, dados por seu conjunto de arestas. Mais especificamente, o *grafo de interseção em arestas* de uma família de caminhos \mathcal{P} em uma árvore é o grafo com conjunto de vértices igual a \mathcal{P} e tal que existe uma aresta entre dois vértices se e somente se os caminhos correspondentes têm aresta em comum. Na figura 1.1 temos um exemplo de um tal grafo G e de duas famílias de caminhos em árvores tal que G é o grafo de interseção em arestas de cada uma delas. Se existe uma família de caminhos \mathcal{P} em uma árvore T tal que G é o grafo de interseção em arestas de \mathcal{P} , dizemos que G é um *grafo UE*.

Dizemos que uma família *satisfaz a propriedade Helly* quando para toda subfamília cujos membros se interceptam dois a dois tem-se que a interseção desta subfamília é não vazia. De interesse particular são os grafos UEH, que são os grafos UE para os quais existe uma família de caminhos que o define que satisfaz a propriedade Helly em arestas. Sua relevância se deve ao fato de que esta classe tem

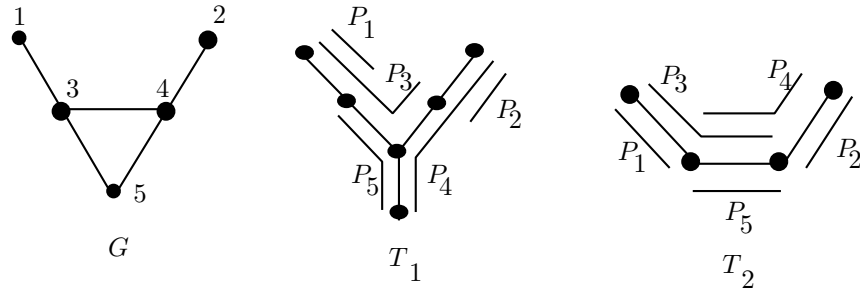


Figura 1.1: Exemplo de um grafo UE, G , que é grafo de interseção da família de caminhos mostrada em T_1 e também da mostrada em T_2 .

propriedades particulares e resultados próprios, conduzindo a caracterizações que fornecem um algoritmo polinomial para o seu reconhecimento [2]. Na figura 1.1, os caminhos P_3 , P_4 e P_5 da árvore T_1 se interceptam dois a dois mas não têm uma aresta em comum porém o grafo G UEH já que a família de caminhos mostrada na árvore T_2 nesta mesma figura satisfaz a propriedade Helly em arestas. Já o grafo da figura 1.2 é UE mas não é UEH e no capítulo 3 apresentamos uma justificativa para este fato.

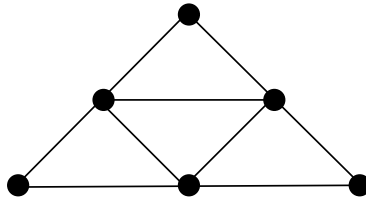


Figura 1.2: Exemplo de um grafo UE que não é UEH.

Os grafos UE modelam conflitos de mensagens em redes de computadores cuja estrutura é dada por uma árvore T . Os vértices de T são as máquinas e os caminhos de \mathcal{P} são rotas de mensagens. Dizemos que mensagens são *conflitantes* quando usam um mesmo *link* e, neste caso, os caminhos que representam as rotas destas mensagens têm uma aresta em comum. O grafo de interseção em arestas de \mathcal{P} é um grafo que modela esta situação de conflito. Se for adicionada a condição de que para qualquer conjunto de mensagens conflitantes duas a duas tem-se que todas as mensagens deste conjunto usam um mesmo link, a situação descrita é modelada pelos grafos UEH.

O trabalho de Monma e Wei [2] de 1986, que foi o primeiro a abordar a classe UEH,

juntamente com os dois trabalhos de Golubic e Jamison [3, 4] de 1985, pioneiros sobre a classe UE, formam a base para o nosso trabalho.

No nosso estudo, objetivamos contribuir para um melhor entendimento das classes de grafos de interseção em arestas de caminhos em uma árvore e sua relação com a propriedade Helly, produzindo resultados estruturais sobre a classe UEH e tratando problemas de otimização restritos a esta classe.

Este trabalho apresenta uma revisão dos resultados da literatura sobre as classes de grafos de interseção de caminhos em árvores relacionadas aos grafos UEH, resultados relativos às relações de inclusão entre as classes UEH, UE e clique-Helly; uma prova de que o problema da coloração de vértices é NP-Completo mesmo restrito a grafos UEH; uma caracterização por subgrafos proibidos dos grafos simultaneamente UEH e SPLIT; um estudo do problema da coloração de cliques para grafos UE e UEH, onde uma coloração de cliques de um grafo G é uma coloração dos vértices de G tal que não haja cliques, com pelo menos dois vértices, monocoloridas.

Além disso, dedicamos um capítulo a apresentação de resultados sobre a complexidade do problema sanduíche para os grafos clique-Helly, clique-Helly hereditários e clique-Helly não hereditários. O problema sanduíche consiste em, dados um grafo, um conjunto de arestas extras permitidas e uma classe de grafos, decidir se algumas destas arestas extras podem ser incluídas no grafo de modo a obter um grafo pertencente a classe dada.

Nosso trabalho está organizado em nove capítulos.

O próximo capítulo contém definições utilizadas nos capítulos seguintes e necessárias para o entendimento do texto. São apresentados os conceitos gerais de grafos, de grafos de interseção, da propriedade Helly e de grafos de interseção em arestas de caminhos em uma árvore além das relações de inclusão entre as classes citadas no capítulo.

No capítulo 3 apresentamos uma revisão dos resultados existentes para a classe UEH, nosso principal objeto de estudo neste trabalho.

No capítulo 4 mostramos os resultados sobre a relação de inclusão entre as classes UEH, clique-Helly e clique-Helly hereditários e sobre a interseção da classe UE com clique-Helly.

O capítulo 5 destina-se a apresentar o problema sanduíche para grafos, em geral,

e a análise da sua complexidade para a classe clique-Helly e para as subclasses clique-Helly hereditário e clique-Helly não hereditário.

O capítulo 6 é destinado a apresentação da caracterização por subgrafos proibidos para a classe $UEH \cap SPLIT$. Antes disso, definimos algumas famílias de grafos especiais que são estruturas proibidas para os grafos $UEH \cap SPLIT$.

O capítulo 7 contém a prova da NP-completude do problema da coloração de vértices para grafos UEH .

No capítulo 8, após as definições necessárias, apresentamos resultados sobre a coloração de cliques de grafos UEH . Provamos que todo grafo UEH é 3-clique-colorível e apresentamos uma família de grafos UE contendo, para cada $k \geq 2$, um grafo que não é k -clique-colorível.

Finalmente, no capítulo 9 concluímos comentando de forma sucinta os resultados apresentados e direcionando os trabalhos futuros.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo apresentamos as definições e resultados que são utilizados nos capítulos seguintes. As notações e definições são extraídas principalmente de [5], [6] e [1].

Inicialmente, revisamos as notações e conceitos básicos de teoria dos grafos, onde as classes de grafos cordais e perfeitos são definidas. A seguir, apresentamos as definições e resultados sobre grafos de interseção, onde as classes CORDAL, UV, DV e RDV também são definidas, e propriedade Helly que são essências para a compreensão das classes de grafos tratadas neste texto. Os grafos de caminho em árvores com interseção em arestas são especialmente considerados na seção 2.4. O capítulo termina com um diagrama de inclusão entre estas classes.

2.1 Grafos

Um *grafo* é um par ordenado $G = (V, E)$ onde V é um conjunto finito e não vazio de *vértices* e E é um conjunto de pares não ordenados de vértices distintos chamados *arestas*. Se G é um grafo, $V(G)$ e $E(G)$ denotam seu conjunto de vértices e de arestas, respectivamente. Se $|V(G)| = 1$, G é chamado *trivial*. Uma aresta $e = (u, v)$ é *incidente* aos vértices u e v , que são os *extremos* de e . Um vértice u é *adjacente* a um vértice v em G se u e v são extremos de uma aresta de G . Neste caso também dizemos que u e v são *vizinhos* em G . Duas arestas são *adjacentes* quando têm algum extremo em comum.

O conjunto dos vértices adjacentes a um vértice u é denotado por $Adj(u)$ e

chamado de *vizinhança* de u . Um vértice u é *isolado* quando $Adj(u) = \emptyset$ e é *universal* quando $Adj(u) = V(G) \setminus \{u\}$. O *grau* de u , denotado por $d(u)$, é o número de vizinhos de u , isto é, $d(u) = |Adj(u)|$. Dois vértices u e v são *gêmeos* quando $Adj(u) \setminus \{v\} = Adj(v) \setminus \{u\}$.

Dois grafos G e H são *isomorfos* se existe um bijeção ϕ de $V(G)$ em $V(H)$ tal que a aresta $(u, v) \in E(G)$ se e somente se $(\phi(u), \phi(v)) \in E(H)$. A função ϕ é um *isomorfismo* de G em H .

Um grafo H é um *subgrafo* de um grafo G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Se G é um grafo e $\emptyset \neq X \subseteq V(G)$, então o *subgrafo induzido* de G por X é o subgrafo H , tal que $V(H) = X$ e $E(H)$ é o conjunto das arestas de G que têm ambos os extremos em X . O subgrafo induzido por X é denotado por $G[X]$. Dizemos que G tem o grafo X como *subgrafo induzido* ou G tem um *subgrafo induzido isomorfo ao grafo X* quando existe um subgrafo H de G tal que H é um subgrafo induzido por X . H é dito ser um *subgrafo induzido proibido* ou simplesmente *subgrafo proibido* para uma classe de grafos \mathcal{C} quando todo grafo G , que tem o grafo X como subgrafo induzido, não pertence à classe \mathcal{C} . O *subgrafo induzido H por um conjunto de arestas Y* é tal que $E(H) = Y$ e $V(H)$ é o conjunto dos vértices de G que são extremos de alguma aresta em Y .

Dizemos que G é um grafo *sem o grafo H* quando G não tem H como subgrafo induzido.

Dizemos que um grafo $G_1 = (V, E_1)$ é um *subgrafo gerador* de $G_2 = (V, E_2)$ se $E_1 \subseteq E_2$.

Um *caminho* $P = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ é uma sequência não vazia de vértices distintos de G tal que, para todo i , $1 \leq i \leq k$, existe a aresta (v_{i-1}, v_i) em G . Dizemos então que P é um *caminho entre v_0 e v_k* e que P *passa* por seus vértices e pelas arestas que têm ambos os extremos consecutivos em P . O inteiro k é o *comprimento* de P . Quando for mais conveniente, um caminho P pode ser expresso pela sequência (e_1, \dots, e_k) das arestas por onde ele passa. Em qualquer caso, v_0 e v_k são os *extremos* de P .

Dois caminhos P_1 e P_2 *compartilham* uma aresta e se P_1 e P_2 passam por e . Neste caso, também dizemos que P_1 e P_2 *têm interseção em arestas*. Um *ciclo* $C = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ é uma sequência não vazia de vértices onde (v_0, \dots, v_{k-1}) é um

caminho, $(v_{k-1}, v_k) \in E(G)$ e $v_0 = v_k$. Um ciclo é dito ser *par* ou *ímpar* quando o seu comprimento k é par ou ímpar, respectivamente. A *distância* $d(u, v)$ entre dois vértices u e v de G é o comprimento de um menor caminho entre u e v em G .

Um grafo é *conexo* se entre qualquer par de vértices distintos de G existe um caminho. Uma *componente conexa* de G é um subgrafo conexo maximal de G . Um grafo G é *desconexo* se não for conexo. No presente texto estaremos nos referindo apenas a grafos conexos, a não ser que seja dito o contrário.

Uma *árvore* é um grafo conexo que não possui ciclos. Um subgrafo conexo de uma árvore é chamado de *subárvore*. Um vértice de grau um em uma árvore é chamado de *folha*. Chamamos de *árvore de grau i* uma árvore tal que o grau máximo de seus vértices é menor ou igual a i . Uma aresta de uma árvore T é uma *aresta-folha* se um dos seus extremos é uma folha de T .

Sejam u e v dois vértices adjacentes de um grafo G . A operação de *identificação* de u e v , ou *contração* da aresta (u, v) , consiste em retirar de G a aresta (u, v) e substituir os vértices u e v por um novo vértice x de forma que $Adj(x) = Adj(u) \cup Adj(v) \setminus \{u, v\}$.

Um grafo G é *completo* se quaisquer dois vértices distintos de G são adjacentes. A menos de isomorfismo, existe um único grafo completo com n vértices e tal grafo é denotado por K_n .

Uma família de subgrafos completos de um grafo G é uma *cobertura de arestas* de G quando cada aresta de G está em, pelo menos, um dos completos desta família.

Um grafo G é *bipartido* se $V(G)$ pode ser particionado em dois conjuntos X e Y , isto é, $X \cup Y = V(G)$ e $X \cap Y = \emptyset$, tais que cada aresta de G tem um extremo em X e o outro em Y . Uma tal partição (X, Y) é chamada *bipartição* do grafo. Os grafos bipartidos são caracterizados no seguinte teorema clássico.

Teorema 2.1. *Um grafo é bipartido se e somente se não possui ciclos ímpares.*

Se G é um grafo, o *complemento* de G , denotado por \overline{G} , é o grafo cujo conjunto de vértices é $V(G)$ e tal que dados dois vértices distintos u e v , existe uma aresta (u, v) em \overline{G} se e somente se $(u, v) \notin E(G)$.

Um conjunto de vértices $X \subseteq V(G)$ é uma *clique* se $G[X]$ é um completo maximal e é um *conjunto independente* se $\overline{G}[X]$ é um completo. Uma clique X de um grafo

G é uma *clique máxima* se qualquer outra clique de G tem um número de vértices menor ou igual ao de X .

Uma *k-estrela* é uma árvore com $k + 1$ vértices onde um deles é universal. Tal vértice é chamado *central*. Uma *garra* é uma 3-estrela. As arestas de uma garra, ou de uma estrela, em geral, são chamadas *braços*.

Se $C = (v_0, v_1, \dots, v_k)$ é um ciclo em G e $e = (u, v) \in E(G)$, então e é uma *corda* em C se u e v são vértices de C , $e \neq (v_{i-1}, v_i)$ para todo i , $1 \leq i \leq k$. Um ciclo de comprimento k sem cordas é denotado por C_k . Um grafo G é *cordal* se para todo ciclo C em G com pelo menos quatro vértices, existe uma corda em C .

Uma *coloração de $V(G)$* ou *coloração de vértices de G* é uma partição de $V(G)$ em conjuntos independentes. Um grafo G é *perfeito* quando todo subgrafo induzido de G possui uma coloração e uma clique de mesma cardinalidade. Neste caso, a coloração é mínima e a clique é máxima. É um fato conhecido que todo grafo cordal é perfeito [5].

O *número cromático* de um grafo G , denotado por $\chi(G)$, é cardinalidade da menor coloração de $V(G)$. Uma *coloração de arestas de G* é uma partição de $E(G)$ em conjuntos de modo que arestas de um mesmo conjunto não tem extremos em comum. A cardinalidade da menor coloração de arestas de G é denominada *índice cromático* de G e denotada por $\chi'(G)$.

Se relaxarmos a definição de grafo permitindo a existência de arestas repetidas temos a definição de *multigrafo*. Mais formalmente, um multigrafo é um par ordenado $G = (V, E)$ onde V é um conjunto finito e não vazio de *vértices* e E é um multiconjunto de pares não ordenados de vértices distintos chamados *arestas*. Utilizamos a nomenclatura usual para grafos também para multigrafos.

Um *grafo direcionado* ou *digrafo* é um par ordenado $D = (V, E)$, onde V é um conjunto finito e não vazio de vértices e E é um conjunto de pares ordenados de vértices distintos, chamados *arestas* ou *arcos*.

Um arco $a = (u, v)$ é *incidente* aos vértices u e v , que são os extremos de a . Além disso, dizemos que a aresta a *sai* de u e *entra* em v . O *grau de entrada* de v é o número de arestas que entram em v enquanto que o *grau de saída* de v é o número de arestas que saem de v . Se o grau de entrada de v é nulo, dizemos que v é uma *fonte* enquanto que se o grau de saída de v é nulo, v é chamado *sumidouro*.

Seja D um digrafo. Se forem desconsideradas as direções das arestas de D , obtém-se um grafo, chamado *grafo subjacente* a D . Um digrafo D é uma *árvore direcionada* quando o seu grafo subjacente é uma árvore.

Uma *árvore enraizada* é uma árvore direcionada que possui uma única fonte, chamada de *raiz*, e todos os outros vértices têm grau de entrada igual a um.

2.2 Grafos de interseção

Uma *família* $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ é uma coleção cujos elementos são conjuntos não necessariamente distintos e não vazios. O *tamanho* de \mathcal{F} é n . Uma família \mathcal{F} é *própria* se, para todo par de elementos F_i e F_j de \mathcal{F} , com $i \neq j$, um não é subconjunto do outro.

Uma família \mathcal{F} é uma *representação de interseção de um grafo* G ou, simplesmente, uma *representação* de G , se $V(G) = \{1, 2, \dots, n\}$ e, para todo par de vértices distintos x e y em $V(G)$, $F_x \cap F_y \neq \emptyset$ se e somente se x e y são adjacentes em G . Neste caso, G é o *grafo de interseção* da família \mathcal{F} , denotado por $\Omega(\mathcal{F})$.

Os grafos de interseção são bastante conhecidos e muito estudados. Um trabalho dedicado às classes de grafos de interseção é [1], onde pode ser encontrada uma vasta coletânea de resultados.

O problema de caracterizar os grafos de interseção de famílias de conjuntos tendo alguma topologia específica é interessante do ponto de vista teórico e, frequentemente, tem aplicações no mundo real.

Em alguns casos a topologia é dada considerando-se que os elementos da família são todos os subgrafos, de um determinado tipo, de um grafo. Por exemplo, um grafo é *grafo linha* se existe um grafo H tal que $G = \Omega(E(H))$, o que é denotado por $G = L(H)$. Ou seja, $V(G) = E(H)$ e existe uma aresta (u, v) em G se e somente se $u \neq v$ e as arestas correspondentes a u e v em H têm um vértice comum. Na figura 2.1, temos um grafo G e um grafo H tal que $G = L(H)$.

Em certas situações, a família considerada não necessita conter todos os subgrafos de um determinado tipo, mas o grafo de onde estes subgrafos são tomados deve satisfazer um determinado padrão. Neste caso, uma *representação* de G é dada pelo par (\mathcal{F}, H) onde H é um grafo e os elementos da família \mathcal{F} são subgrafos de H ,

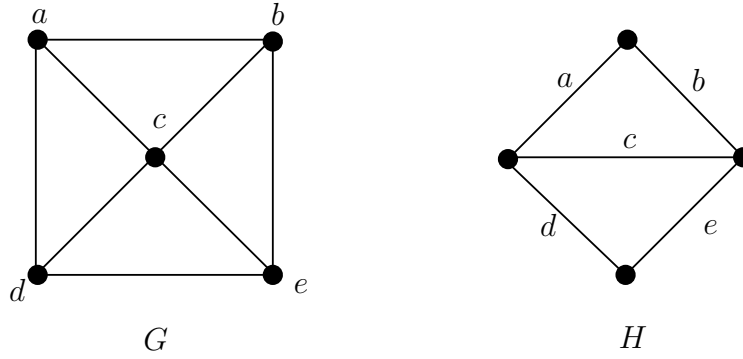


Figura 2.1: Exemplo de um grafo linha G .

que é chamado grafo *base* da representação e $G = \Omega(\mathcal{F}, H)$. Por exemplo, os grafos de interseção de famílias de subárvores de uma árvore são chamados de *grafos de subárvore*. Gavril, Walter e Buneman mostraram, independentemente, que um grafo é cordal se e somente se é grafo de subárvore [1]. A figura 2.2 mostra um grafo G e uma família \mathcal{F} de subárvores da árvore T tal que $G = \Omega(\mathcal{F}, T)$.

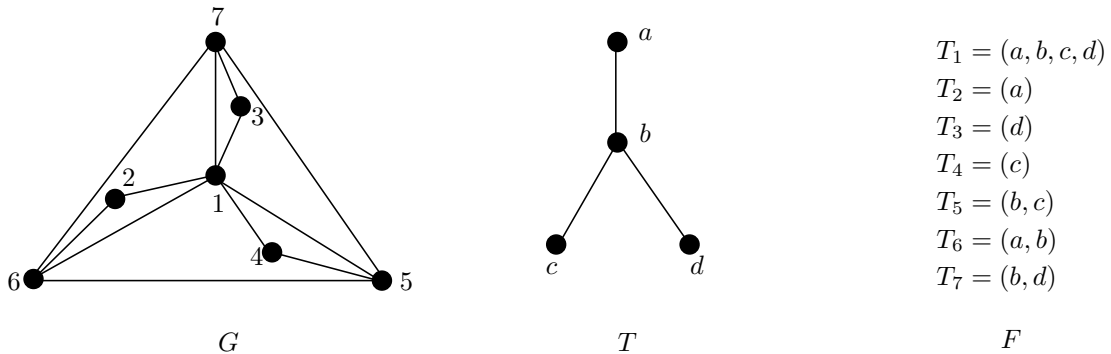


Figura 2.2: Exemplo de um grafo cordal G e uma representação de G .

Outro exemplo são os grafos UV. Um grafo G é UV se é o grafo de interseção de uma família de caminhos em uma árvore. Grafos UV são assim denominados para explicitar que a interseção dos caminhos é não vazia somente quando os caminhos contém pelo menos um vértice em comum e tanto a árvore quanto os caminhos são não direcionados.

A figura 2.3 mostra um grafo G , uma árvore T e uma família \mathcal{P} de caminhos em T , de forma que $G = \Omega(\mathcal{P}, T)$.

Os grafos UV, também encontrados na literatura de teoria dos grafos como grafos *VPT*, foram caracterizados em [7] onde é fornecido um algoritmo eficiente de

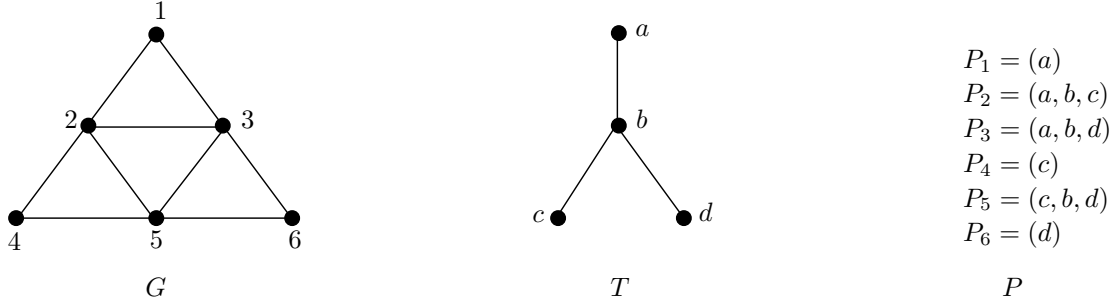


Figura 2.3: Exemplo de um grafo UV e uma representação UV de G .

reconhecimento para esta classe.

Como os grafos cordais são os grafos de interseção de famílias de subárvores de uma árvore, no caso em que as subárvores consideradas são caminhos, temos a classe dos grafos UV. Assim, todo grafo UV é um grafo cordal.

Se considerarmos as direções das arestas de T e dos caminhos em \mathcal{P} temos a classe de grafos DV e, se a árvore T for enraizada, temos a classe RDV.

Um trabalho relevante sobre classes de grafos de caminho é [2], onde foram introduzidas as terminologias UV, DV e RDV e feitas diversas considerações a respeito destas classes e de outras classes tratadas neste texto.

Outra importante classe de grafos de interseção é a dos grafos de intervalo, que podem ser considerados como os grafos de interseção de caminhos de um caminho.

O teorema seguinte resume os resultados sobre as inclusões dos grafos de caminho.

Teorema 2.2 (Monma e Wei [2]). $\text{INTERVALO} \subset \text{RDV} \subset \text{DV} \subset \text{UV} \subset \text{CORDAL} \subset \text{PERFEITO}$

2.3 Propriedade Helly

Dada uma família \mathcal{F} , dizemos que \mathcal{F} *satisfaz a propriedade Helly* se para toda subfamília $\mathcal{F}' = \{F_1, F_2, \dots, F_k\} \subseteq \mathcal{F}$ tal que, para todos $1 \leq i < j \leq k$, $F_i \cap F_j \neq \emptyset$ temos $\bigcap_{F_i \in \mathcal{F}'} F_i \neq \emptyset$.

Por exemplo, seja $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$, onde $F_1 = \{a, b, c\}$, $F_2 = \{a, b\}$, $F_3 = \{a, c, d\}$, $F_4 = \{d\}$. A família \mathcal{F} satisfaz a Propriedade Helly já que, para toda subfamília cujos elementos se interceptam dois a dois, tem-se que a interseção desta

é não vazia.

Como um caminho pode ser definido tanto pelo conjunto de vértices quanto pelo de arestas nas quais ele passa, podemos considerar, em famílias de caminhos, a propriedade Helly em vértices ou em arestas. No primeiro caso, a interseção entre caminhos é constituída dos vértices pelos quais estes caminhos passam simultaneamente. No outro caso, a interseção é determinada pelo conjunto de arestas comuns aos caminhos.

Um resultado de Gavril [7], que aqui apresentamos como lema, diz respeito à famílias de caminhos em uma árvore e à propriedade Helly em vértices.

Lema 2.3 (Gavril [7]). *Toda família de caminhos em uma árvore satisfaz a propriedade Helly em vértices.*

Demonstração. Sejam \mathcal{P} uma família de caminhos em uma árvore T e $\mathcal{P}' = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ uma subfamília de \mathcal{P} . Vamos provar, por indução em n , que se $P_i \cap P_j \neq \emptyset$ para $1 \leq i < j \leq n$, então $\bigcap_{P_i \in \mathcal{P}'} P_i \neq \emptyset$.

Se $n \leq 2$ e os elementos de \mathcal{P}' se interceptam, claramente a interseção de todos os caminhos de \mathcal{P}' é não vazia.

Seja \mathcal{P}' uma subfamília de \mathcal{P} com $n > 2$ elementos tal que $P_i \cap P_j \neq \emptyset$, para $1 \leq i < j \leq n$.

Pela hipótese de indução,

$$\bigcap_{i=1}^{n-1} P_i \neq \emptyset, \bigcap_{i=2}^n P_i \neq \emptyset \text{ e } P_1 \cap P_n \neq \emptyset.$$

Além disso, os três caminhos acima descritos se interceptam dois a dois e têm interseção não vazia, pois, caso contrário, haveria um ciclo em T .

Como esta interseção está contida na interseção de \mathcal{P}' , temos que $\bigcap_{P_i \in \mathcal{P}'} P_i \neq \emptyset$.

Portanto, \mathcal{P} satisfaz a propriedade Helly. \square

Também pode-se mostrar, usando um argumento similar, que famílias de subárvores de uma árvore satisfazem a propriedade Helly em vértices. Note que se considerarmos a interseção em arestas de caminhos em uma árvore, então a família de caminhos pode não satisfazer a propriedade Helly. Como já vimos, na figura 1.2 temos uma família \mathcal{P} de caminhos em uma árvore T onde \mathcal{P} não satisfaz a propriedade Helly.

2.4 Grafos de caminho com interseção em arestas

Um caminho em um grafo pode ser dado pelo seu conjunto de vértices ou pelo seu conjunto de arestas. Neste último caso, se o grafo G é grafo de interseção de uma família de caminhos em uma árvore, de modo que dois vértices de G são adjacentes se e somente se seus caminhos correspondentes compartilham uma aresta, dizemos que G é *grafo de interseção em arestas* destes caminhos e denotamos por $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$, onde T é uma árvore e \mathcal{P} é uma família de caminhos em T .

Dizemos que um grafo G é UE (*undirected edge path graph*) se é o grafo de interseção em arestas de uma família de caminhos em uma árvore.

A figura 2.4 mostra um grafo G , uma árvore T e uma família de caminhos $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$ em T , de forma que $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$. Se \mathcal{P} é uma família de caminhos de uma árvore T e $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$ dizemos que (\mathcal{P}, T) é uma *representação UE* de G e que T é uma *árvore de representação UE* de G .

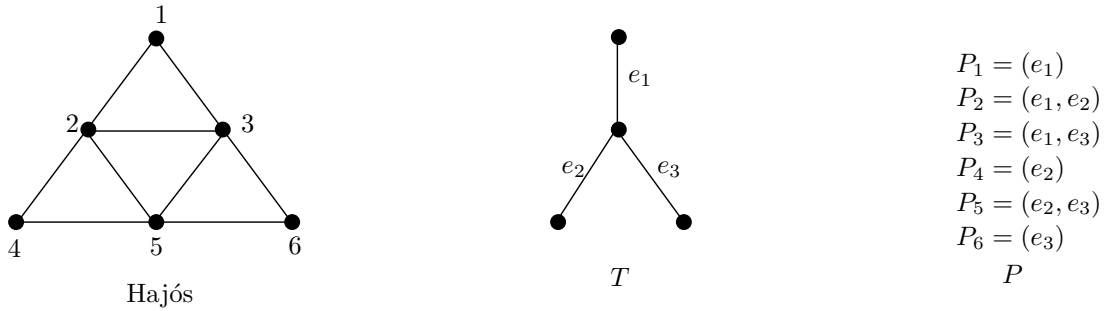


Figura 2.4: Grafo de Hajós e uma representação UE deste grafo.

Observamos que, por ser uma classe de grafos de interseção, a classe de grafos UE é *hereditária*, ou seja, se um grafo G é UE então todo subgrafo induzido H de G também é UE. De fato, se $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$ basta tomarmos para a representação UE de H , os caminhos de \mathcal{P} que correspondem aos vértices de H e a mesma árvore T .

Os grafos UE foram introduzidos por Sysło [8], em 1978, onde foram denominados de grafos *ciclo fundamental*. Seu estudo foi motivado pelo problema de acrescentar o maior conjunto possível de arestas à uma árvore geradora de um grafo de modo que os ciclos formados não se interceptam. Para cada aresta acrescentada à árvore considere o caminho em T entre seus extremos. O grafo de interseção em arestas desta família de caminhos é um grafo UE e resolver o problema proposto é determinar um conjunto independente máximo neste grafo. Os ciclos formados a partir de

uma árvore geradora de um grafo pelo acréscimo de uma aresta são chamados *ciclos fundamentais*, daí o nome da classe proposto por Sysło. Ainda em [8], Sysło conjecturou que $UE \cap \text{CORDAL} = UE \cap UV$. Uma prova para esta conjectura foi apresentada por ele mesmo em 1985 [9] usando os resultados estruturais obtidos por Golubic e Jamison [4], em particular a caracterização dos grafos que são simultaneamente UE e UV. O teorema 2.4 mostra o resultado provado por Sysło. Neste artigo, os grafos ciclo fundamental foram denominados de grafos EPT, denominação proposta por Golubic e Jamison [3, 4] e também utilizada por Tarjan [10], em 1985.

Teorema 2.4 (Sysło [9]). $UE \cap \text{CORDAL} = UE \cap UV$

Golubic e Jamison [3] apresentaram vários resultados a respeito da classe UE. Estes resultados são referentes às cliques, à estrutura dos grafos, ao comportamento da classe para alguns problemas em grafos e a relação com a Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos. Os mesmos autores, em [4], provaram que o problema do reconhecimento de grafos UE é NP-Completo. Tarjan considerou a decomposição por cliques destes grafos em [10].

Finalmente, em 1986, Monma e Wei [2] publicaram o trabalho mais completo, até então, sobre as classes de grafos de interseção de caminhos em uma árvore onde uniformizaram tanto a terminologia quanto a abordagem para o estudo destas classes. Em particular, introduziram a nomenclatura UE e definiram a subclasse UEH dos grafos de interseção em arestas de uma família de caminhos em uma árvore, satisfazendo a propriedade Helly. Do ponto de vista do reconhecimento, a classe UEH se mostrou mais simples que a classe UE, um algoritmo polinomial para este fim foi dado em [2]. Em 2001, Gutierrez e Meidanis [11] analisaram as classes tratadas por Monma e Wei segundo o operador clique. Em particular, apresentaram a prova de que o grafo clique de um grafo UEH é um grafo DUALLYUEH e um grafo clique de um grafo DUALLYUEH é UEH. Concluindo com um algoritmo polinomial de reconhecimento da classe DUALLYUEH. Nos capítulos seguintes estudaremos a classe UEH mais detalhadamente.

Um grafo é DE (*directed edge path graph*) se é o grafo de interseção em arestas de uma família de caminhos direcionados em uma árvore direcionada.

A figura 2.5 mostra um grafo G , uma família de caminhos direcionados \mathcal{P} e uma árvore direcionada T , de modo que $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$.



Figura 2.5: Grafo G e uma representação DE de G .

Observe que se desconsiderarmos as direções das arestas de T e dos caminhos em \mathcal{P} , (\mathcal{P}, T) transforma-se em uma representação UE de G . Logo, $DE \subseteq UE$.

Mais especificamente, pode-se provar que todo grafo DE é um grafo UEH [2]. Porém, a recíproca não é verdadeira pois o C_5 , por exemplo, é um grafo UEH que não é DE.

Um grafo é RDE (*rooted directed edge path graph*) se é o grafo de interseção em arestas de uma família de caminhos direcionados em uma árvore enraizada.

Por exemplo, o grafo G da figura 2.6 é RDE já que $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$, onde $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5\}$.

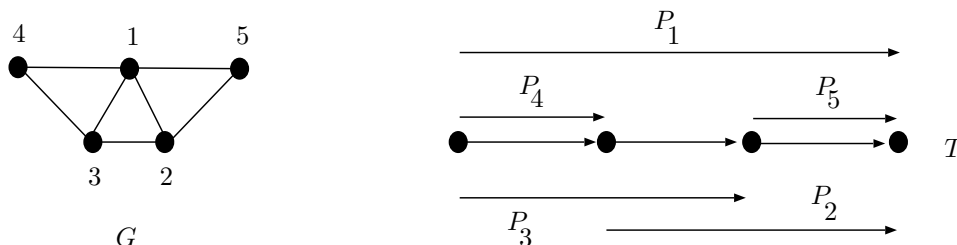


Figura 2.6: Grafo G e uma representação RDE de G .

Como toda árvore enraizada é direcionada, podemos concluir que $RDE \subseteq DE$. Monma e Wei [2] também provaram que as classes RDV e RDE coincidem.

Exemplos de grafos RDE e, conseqüentemente, DE e UE são as árvores. O seguinte teorema resume os resultados desta seção.

Teorema 2.5 (Monma e Wei [2]). $INTERVALO \subset RDV = RDE \subset DE \subset UEH \subset UE$. Além disso, toda árvore é um grafo RDE.

Se considerarmos a interseção em vértices de subárvores de uma árvore, temos exatamente a classe dos grafos cordais. Uma questão natural é a análise da interseção

em arestas de subárvores de uma árvore. Outro caso a analisar é o da interseção de uma família de caminhos em um grafo qualquer, seja esta em arestas ou em vértices. Golubic e Jamison [3] mostraram que, nos casos citados, nenhuma nova classe é criada e os grafos em questão são todos os grafos. Como consequência da análise feita para obter estes resultados, é possível mostrar também que todo grafo é grafo de interseção em arestas de subestrelas de uma estrela.

Outra importante variante da interseção em arestas consiste em determinar a quantidade de arestas na interseção de dois caminhos. Os grafos resultantes desta variante são os grafos k -EPT [12], que são os grafos UE que admitem uma representação onde os vértices do grafo são adjacentes se e somente se os seus caminhos correspondentes têm k arestas em comum.

No estudo de grafos de interseção também é natural considerar as classes definidas por famílias próprias.

Diferente do que acontece com as classes dos grafos de intervalo, a restrição à famílias próprias não leva à uma subclasse própria da classe dos grafos UE, como mostra o lema a seguir.

Lema 2.6. *Todo grafo UE é grafo de interseção em arestas de uma família própria de caminhos em uma árvore.*

Demonstração. Seja $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$ um grafo UE. Se \mathcal{P} é uma família própria, nada há a fazer. Suponha, então que existem caminhos P e Q de \mathcal{P} tais que $P \subset Q$. Seja x um extremo de P . Acrescente a T um novo vértice y e a aresta (x, y) obtendo T' . Acrescente a P a aresta (x, y) obtendo o caminho P' . Observe que P' não está contido em Q e que $G = \Omega_e(\mathcal{P}', T')$, onde $\mathcal{P}' = \mathcal{P} - \{P\} \cup \{P'\}$. Claramente este processo pode ser repetido até uma família própria ser obtida. \square

Observamos que ao aplicar a construção acima em uma família \mathcal{P} de caminhos em uma árvore que satisfaz a propriedade Helly em arestas obtemos uma família \mathcal{P}' que também satisfaz a propriedade Helly em arestas, ou seja, todo grafo UEH é grafo de interseção em arestas de uma família própria que satisfaz a propriedade Helly em arestas de caminhos em uma árvore.

2.5 Diagrama de interseção entre as classes

Nesta seção, resumimos as relações de inclusão entre as classes de grafos até agora consideradas e que aparecem nos trabalhos fundamentais sobre grafos de interseção de caminhos.

É natural perguntarmos sobre as relações entre os grafos de interseção em vértices e em arestas de caminhos em uma árvore. Monma e Wei [2], após introduzirem as classes DV e DE, provaram o seguinte teorema.

Teorema 2.7 (Monma e Wei [2]). *Todo grafo DV é um grafo DE.*

Observe que a inclusão é própria pois C_4 é um grafo DE e não é DV, já que não é cordal e todo grafo DV é cordal.

Uma inclusão não própria é obtida se analisarmos grafos de interseção de caminhos em árvores enraizadas. Monma e Wei [2] provaram que um grafo é RDV se e somente se é RDE.

Analisando a estrutura dos grafos UEH, após definir tal classe, Monma e Wei [2] provaram as relações entre as classes UEH, DE, DV, PERFEITO e CORDAL. Os teoremas seguintes apresentam os resultados obtidos.

Teorema 2.8 (Monma e Wei [2]). *Um grafo é DE se e somente se é simultaneamente UEH e PERFEITO.*

Teorema 2.9 (Monma e Wei [2]). *Um grafo é DV se e somente se é simultaneamente UEH e CORDAL.*

O diagrama da figura 2.7 resume os resultados dos teoremas 2.7 a 2.9 e descreve as relações de inclusão entre as classes de grafos mencionadas, com exemplos separadores.

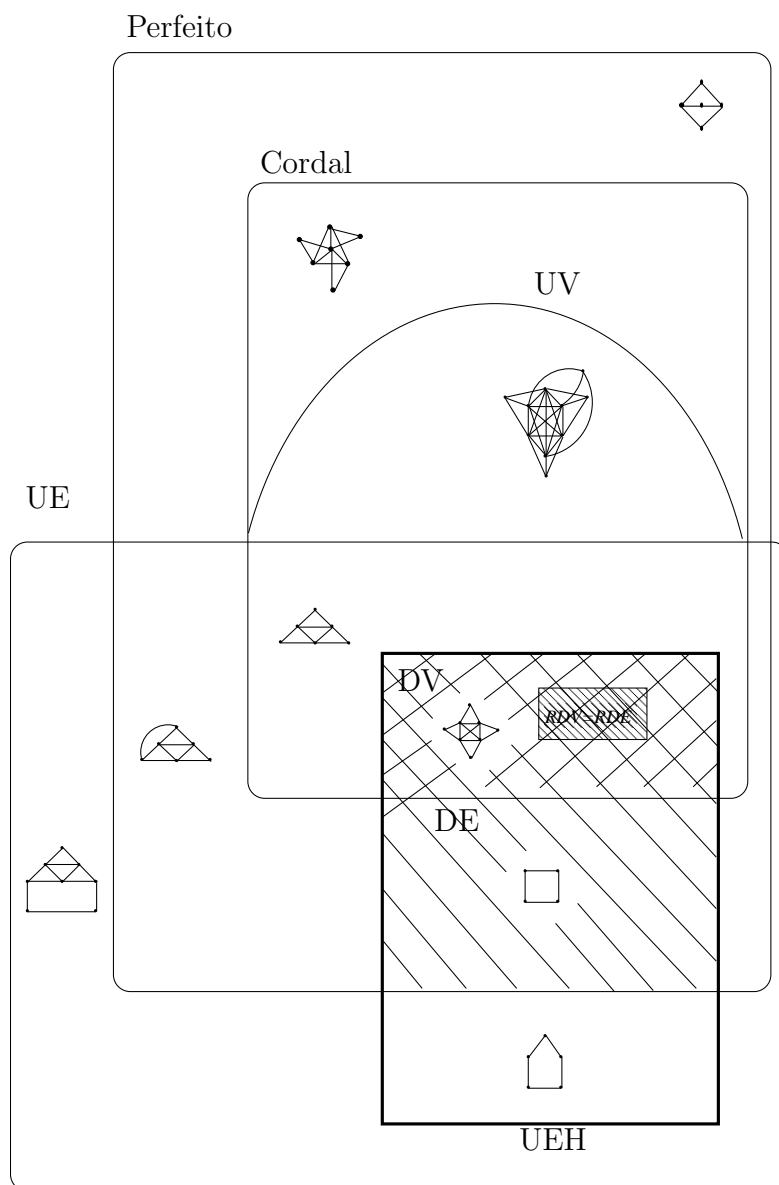


Figura 2.7: Diagrama das classes de grafos.

Capítulo 3

A classe UEH

Um grafo G é UE *Helly*, ou simplesmente UEH, se é o grafo de interseção em arestas de uma família de caminhos em uma árvore, satisfazendo a propriedade Helly em arestas.

Se \mathcal{P} é uma família de caminhos em uma árvore T , satisfazendo a propriedade Helly em arestas, e $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$, dizemos que (\mathcal{P}, T) é uma *representação UEH* de G . Na figura 3.1 temos que (\mathcal{P}, T) é uma representação UEH do grafo G .

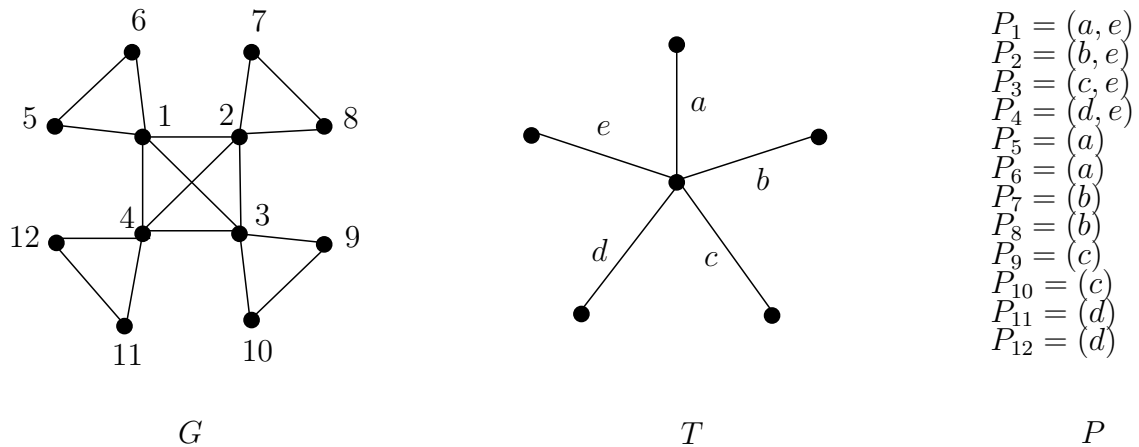


Figura 3.1: Grafo G e uma representação UEH de G .

Como vimos no capítulo 1, na figura 1.1 temos em T_1 uma representação UE que não é uma representação UEH de G . Por outro lado, G é um grafo UEH pois em T_2 temos uma representação UEH de G .

Obviamente, todo grafo UEH é UE, mas a recíproca não é verdadeira. O grafo de Hajós, ilustrado na figura 3.2, é UE mas não é UEH. De fato, na figura 2.4 temos uma representação UE do grafo de Hajós. Observe que naquela representação P_2, P_3

e P_5 se interceptam em arestas dois a dois mas não possuem uma aresta em comum. Vamos agora mostrar que este grafo não pode ser representado por uma família de caminhos em uma árvore, satisfazendo a propriedade Helly em arestas.

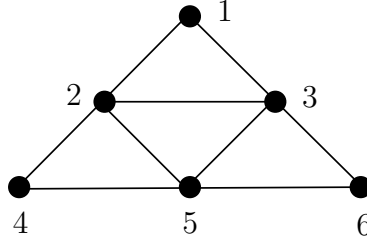


Figura 3.2: Hajós: exemplo de grafo UE que não é UEH.

Suponha que exista (\mathcal{P}, T) uma representação UEH do grafo de Hajós, onde $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$. Observe que para a propriedade Helly ser satisfeita deve existir uma aresta (a, b) em T que pertence aos caminhos P_1, P_2 , e P_3 . Da mesma forma deve existir uma aresta (c, d) pertencente a P_2, P_3 e P_5 e uma outra (e, f) pertencente aos caminhos P_3, P_5 e P_6 . Como P_5 passa pelas arestas (c, d) e (e, f) e não passa por (a, b) , pois P_5 não tem aresta em comum com P_1 , o único caminho de c a f em T não passa por (a, b) . Além disso, como P_2 não tem aresta em comum com P_6 , a aresta (e, f) não está no único caminho em T entre c e b . Logo, a aresta (c, d) tem que estar no caminho entre a e f em T , como mostra a figura 3.3.

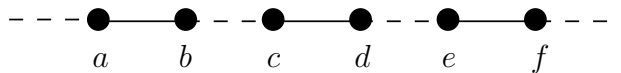


Figura 3.3: Posição das arestas (a, b) , (c, d) e (e, f) em T .

Temos, então, um problema para determinar o caminho P_4 , pois se este caminho passar por qualquer aresta do caminho de a a f em T , obrigatoriamente, deverá passar por alguma aresta de P_3 , mas os vértices 3 e 4 de G não são adjacentes. Logo só resta P_4 estar na subárvore de T que contém o vértice a e todos os outros vértices v tais que exista um caminho entre a e v em T sem passar por b mas, neste caso, P_4 não teria qualquer aresta em comum com P_5 , ou na subárvore de T que contém o vértice f e todos os outros vértices u tais que exista um caminho entre f e u em T sem passar por e e P_4 não poderia passar por qualquer aresta de P_2 . Como, em

ambos os casos, adjacências seriam perdidas, não é possível determinar o caminho P_4 .

Pelo lema 2.3, a propriedade Helly em vértices é verdadeira para qualquer família de caminhos em uma árvore. Deste modo, uma definição análoga a UEH para grafos UV não determina uma nova classe de grafos, isto é, $UV = UVH$.

3.1 Estrutura dos ciclos na classe UEH

Nesta seção descrevemos como os ciclos sem cordas de um grafo UEH são representados, investigamos a adjacência de um vértice a um ciclo sem cordas e, através destes resultados, fornecemos exemplos de grafos que não são UEH. Além disso, analisamos as particularidades da estrutura de um ciclo sem cordas na representação UE de um grafo.

A figura 3.4 mostra uma representação UEH de um ciclo sem cordas com n vértices.

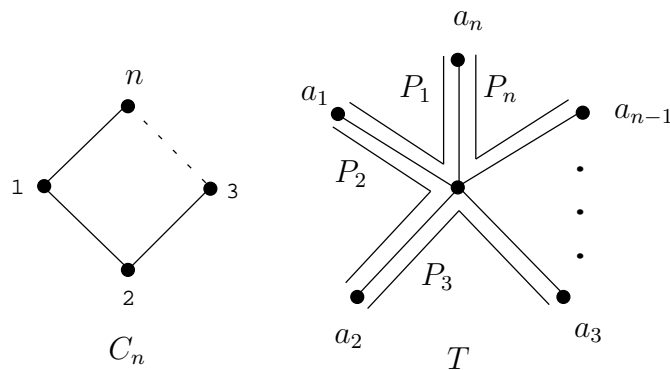


Figura 3.4: Representação UEH de um C_n .

O teorema seguinte mostra que a representação UEH de um ciclo sem cordas com n vértices, onde $n \geq 4$, mostrada na figura 3.4 é, essencialmente, única.

Teorema 3.1 (Golumbic e Jamison [3]). *Seja G um grafo UEH. Se G contém um ciclo C_n sem cordas, com $n \geq 4$, então toda árvore de representação UEH de G contém uma estrela de centro v e arestas (v, a_i) , com $1 \leq i \leq n$, onde cada caminho P_i correspondente a um vértice v_i de C_n contém as arestas (v, a_{i-1}) e (v, a_i) .*

Demonstração. Seja G um grafo UEH e (\mathcal{P}, T) uma representação UEH de G . Seja $C = (v_0, v_1, \dots, v_n)$, $n \geq 4$, um ciclo sem cordas em G e $\mathcal{P}' = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$ a subfamília de \mathcal{P} formada pelos caminhos correspondentes aos vértices de C .

Sejam v_i e v_j vértices não consecutivos em C . Mostraremos que P_i e P_j compartilham um vértice. Suponha, por absurdo que P_i e P_j não têm um vértice em comum. Então, na árvore T , existe pelo menos uma aresta e que pertence a todo caminho entre um vértice de P_i e um de P_j e, além disso, e não pertence a P_i e nem a P_j . Em C , um caminho entre v_i e v_j corresponde à uma sequência de caminhos em \mathcal{P}' de modo que, nesta sequência, cada caminho intercepta o seu antecessor e o seu sucessor. Assim, existirá um caminho P_k nesta seqüência contendo a aresta e , já que a união destes caminhos contém todas as arestas do caminho entre P_i e P_j , inclusive e . Mas existem dois caminhos em C entre v_i e v_j . O raciocínio anterior aplicado ao segundo caminho implica que existe um caminho P_l , com $l \neq k$, de modo que e pertence a P_l . Mas isso significa que v_k e v_l são adjacentes e há uma corda no ciclo, uma contradição.

Temos então, que a subfamília \mathcal{P}' satisfaz à propriedade de que os seus elementos compartilham, dois a dois, um vértice. Além disso, pelo lema 2.3, uma família de caminhos em uma árvore satisfaz a propriedade Helly em vértices. Então, existe um vértice v que pertence a todos os caminhos de \mathcal{P}' .

Agora, escolhendo vértices a_i tais que $(v, a_i) \in P_i \cap P_{i+1}$, obtemos uma estrela com n vértices em T , como mostra a figura 3.4. \square

Usando o teorema anterior, podemos obter exemplos de grafos que não são UEH devido à impossibilidade de descrevermos um de seus ciclos sem cordas em uma representação UEH. Um exemplo disto é o grafo G , complemento do caminho com seis vértices, mostrado na figura 3.5.

Os vértices 2, 6, 3 e 5 formam um ciclo sem cordas e, pelo teorema 3.1, na árvore de representação UEH de G , deve existir uma estrela com centro v e arestas e_1 , e_2 , e_3 e e_4 de modo que os caminhos correspondentes aos vértices do ciclo estão definidos da seguinte forma: $P_2 \supseteq (e_1, e_2)$, $P_6 \supseteq (e_2, e_3)$, $P_3 \supseteq (e_3, e_4)$ e $P_5 \supseteq (e_1, e_4)$.

O vértice 1 é adjacente aos vértices 3, 5 e 6 do ciclo. Logo, P_1 deve conter as arestas e_3 e e_4 . Como o vértice 4 é adjacente a 1 e a 2, o caminho P_4 deve conter as arestas e_1 ou e_2 e deve conter e_3 ou e_4 . Mas, para qualquer escolha, adjacências

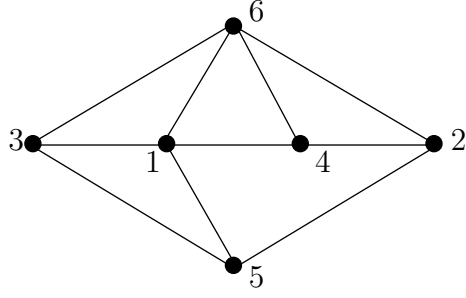


Figura 3.5: Grafo G , complemento do caminho $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$.

seriam acrescentadas no grafo. Logo, o grafo G não é UEH.

Segue imediatamente do último teorema, o seguinte corolário.

Corolário 3.2. *Se G é um grafo UEH, então, para todo ciclo $C = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ sem cordas em G , com $n \geq 4$, e para todo vértice $w \in G$, $w \notin C$, exatamente uma das seguintes afirmações acontece:*

1. $Adj(w) \cap C = \emptyset$;
2. $Adj(w) \cap C = \{v_i\}$, para algum i ;
3. $Adj(w) \cap C = \{v_i, v_{i+1}\}$, para algum i ;
4. $Adj(w) \cap C = \{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\}$, para algum i ;
5. $Adj(w) \cap C = \{v_i, v_{i+1}, v_j, v_{j+1}\}$, para algum i e algum j de modo que os vértices $v_i, v_{i+1}, v_j, v_{j+1}$ não aparecem consecutivamente no ciclo.

Demonstração. Seja G um grafo e (\mathcal{P}, T) uma representação UEH de G . Suponha que exista um ciclo sem cordas $C = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ em G e denote por S a estrela em T com centro v e arestas e_1, e_2, \dots, e_n onde cada caminho P_i correspondente à um vértice de C contém as arestas (v, a_{i-1}) e (v, a_i) . Tal estrela existe pelo teorema 3.1. Usaremos P_x para denotar o caminho em \mathcal{P} correspondente ao vértice x de G .

Seja w um vértice de G que não está em C . Em T , ou P_w não contém qualquer aresta da estrela em T , ou contém apenas uma aresta de S , ou duas arestas de S e, neste caso, pode conter duas arestas que estão em um caminho correspondente à um vértice de C ou não existem caminhos correspondente à vértices de C passando por estas arestas.

Porém, as possibilidades descritas podem gerar famílias de caminhos que não satisfazem a propriedade Helly. Analisaremos o caso em que os vértices v_i, v_{i+1}, v_j e v_{j+1} são consecutivos em C . Na árvore S , o caminho P_w obrigatoriamente contém duas arestas: a aresta comum aos caminhos P_{v_i} e $P_{v_{i+1}}$ e a aresta comum aos caminhos P_{v_j} e $P_{v_{j+1}}$. Neste caso, a subfamília formada pelos caminhos $P_{v_{i+1}}, P_{v_j}$ e P_w não satisfaz a propriedade Helly. Logo, os vértices v_i, v_{i+1}, v_j e v_{j+1} não podem aparecer consecutivamente no ciclo C .

A distribuição dos casos adicionada à análise feita para o caso dos quatro vértices consecutivos no ciclo culmina, justamente, nos casos explicitados no enunciado. \square

O corolário acima fornece uma maneira de identificar grafos que não são UEH. Na figura 3.6 temos exemplos desta situação.

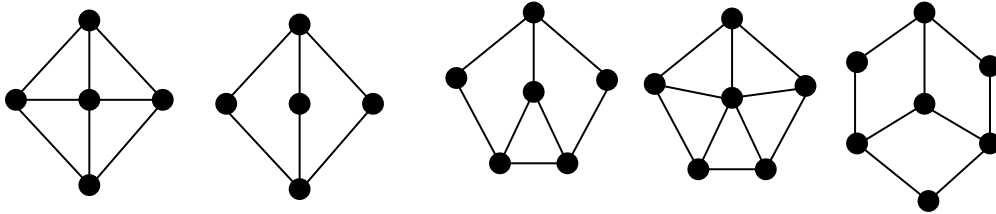


Figura 3.6: Grafos que não são UEH.

Para grafos UE, Golumbic e Jamison provaram resultados análogos aos do teorema 3.1 e do Corolário 3.2. Porém, neste último resultado um vértice pode ser adjacente a quatro vértices consecutivos de um ciclo. O Corolário seguinte enuncia o resultado obtido para grafos UE em geral.

Corolário 3.3 (Golumbic e Jamison [3]). *Se G é um grafo UE, então, para todo ciclo $C = (v_0, v_1, \dots, v_n)$ sem cordas, com $n \geq 4$, e para todo vértice $w \notin C$, exatamente uma das seguintes afirmações acontece:*

1. $Adj(w) \cap C = \emptyset$;
2. $Adj(w) \cap C = \{v_i\}$, para algum i ;
3. $Adj(w) \cap C = \{v_i, v_{i+1}\}$, para algum i ;
4. $Adj(w) \cap C = \{v_i, v_{i+1}, v_{i+2}\}$, para algum i ;
5. $Adj(w) \cap C = \{v_i, v_{i+1}, v_j, v_{j+1}\}$, para algum i e algum j , com $j \neq i$ e $j \neq i+1$.

3.2 Cliques de grafos UEH

Nesta seção as cliques de um grafo UEH são caracterizadas. Tal caracterização implica no fato do número de cliques de um grafo UEH ser polinomial.

Seja (\mathcal{P}, T) uma representação UEH de um grafo G . Seja e uma aresta de T , denotamos por $P[e]$ a subfamília de \mathcal{P} formada pelos caminhos que passam por e . Seja k uma garra em T , denotamos por $P[k]$ a subfamília de \mathcal{P} formada pelos caminhos que passam por exatamente duas arestas de k . Claramente, o conjunto de vértices de G correspondente a $P[e]$ e a $P[k]$ induz um completo em G . Uma clique de G correspondente à uma família $P[e]$ é chamada de *clique aresta*. Porém, $P[k]$ não pode induzir uma clique em G que não é uma clique aresta já que os caminhos de \mathcal{P} devem satisfazer a propriedade Helly.

Para grafos UE em geral, uma clique correspondente à uma família $P[k]$, que não é correspondente à uma $P[e]$, é chamada de *clique garra*. Observe que todos os caminhos de $P[k]$ passam pelo centro da garra k . Chamamos de *conjunto de testemunhas* de k a um conjunto de três caminhos de \mathcal{P} que estão em $P[k]$ e não têm uma aresta em comum.

Por exemplo, na figura 3.7, a clique $\{2, 3, 6\}$ de G é uma clique aresta já que corresponde à $P[c]$. A clique $\{2, 5, 6\}$ é uma clique garra pois corresponde à $P[k]$ onde k é a garra formada pelas arestas a, b e c . Observe que $P[a]$ não corresponde à uma clique de G já que o completo formado pelos vértices correspondentes aos caminhos que passam por a está contido na clique $\{2, 5, 6\}$.

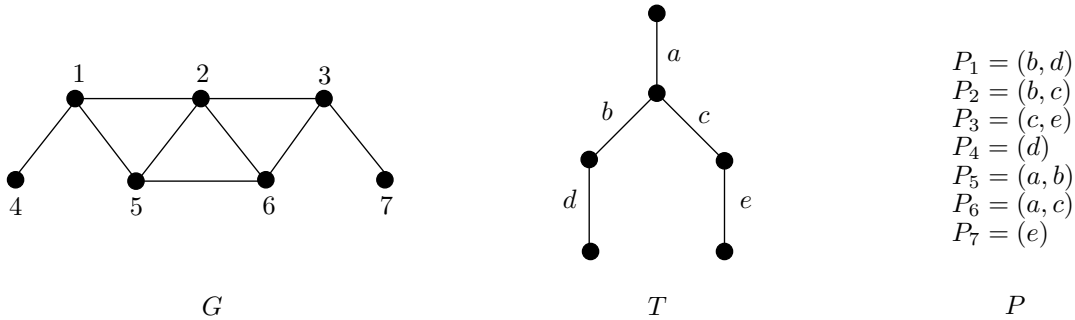


Figura 3.7: Exemplo de um grafo G e uma representação UE deste.

Observe que uma clique de um grafo G UE que não é UEH pode ser clique aresta ou clique garra dependendo da representação UE que está sendo considerada. Por exemplo, na figura 3.8, temos duas representações UE do grafo G . Se considerarmos

a representação em T_1 , então as cliques de G são cliques aresta. Se a representação for na árvore T_2 , ambas são cliques garra.

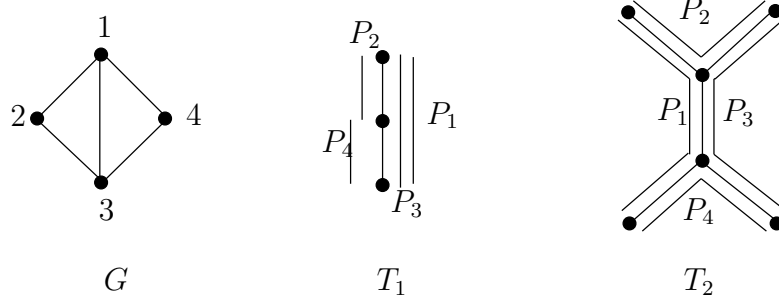


Figura 3.8: Grafo G e duas representações UE deste.

Teorema 3.4 (Monma e Wei [2]). *Seja (\mathcal{P}, T) uma representação UEH de um grafo G . Toda clique de G é clique aresta em (\mathcal{P}, T) .*

Demonstração. Seja C uma clique de $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$. Temos que C corresponde à uma subfamília \mathcal{P}' de \mathcal{P} cujos caminhos se interceptam em arestas dois a dois. Como os elementos de \mathcal{P}' são caminhos em uma árvore, pelo lema 2.3, \mathcal{P}' satisfaz a propriedade Helly em vértices. E basta tomarmos a interseção de três determinados caminhos P_1, P_2 e P_3 para obter a interseção de \mathcal{P}' .

Seja $Q = \bigcap_{P \in \mathcal{P}'} P = P_1 \cap P_2 \cap P_3$. Claramente, Q é um caminho em T . Temos, então, dois casos a analisar: Q contém uma aresta de T ou Q consiste de um único vértice de T .

Se Q passa por uma aresta e , então como C é clique, $P[e] = \mathcal{P}'$ e C é clique aresta.

Se $Q = \{v\}$ como P_1, P_2 e P_3 têm, dois a dois, uma aresta em comum, existe uma garra k em T formada pelas arestas $(v, a), (v, b)$ e (v, c) , que são respectivamente arestas em $P_1 \cap P_2, P_2 \cap P_3$ e $P_1 \cap P_3$. Qualquer outro caminho de \mathcal{P}' intercepta em arestas P_1, P_2 e P_3 e passa por v . Logo, estes caminhos contém, cada um, duas das três arestas da garra k e $\mathcal{P}' \subseteq P[k]$. Neste caso, os caminhos P_1, P_2 e P_3 se interceptam dois a dois e não têm uma aresta comum. O que contradiz o fato de que a família \mathcal{P}' satisfaz a propriedade Helly. \square

Com a caracterização das cliques de um grafo UEH, podemos avaliar o número de cliques de um grafo nesta classe.

Teorema 3.5 (Monma e Wei [2]). *Seja $G = (V, E)$ um grafo UEH. O número de cliques de G é menor ou igual a $\frac{3|V|-4}{2}$.*

Demonstração. Seja (\mathcal{P}, T) uma representação UEH de um grafo $G = (V, E)$ onde T tem o menor número possível de arestas.

Como G tem somente cliques aresta, basta provar que o número de arestas de T é menor ou igual a $\frac{3|V|-4}{2}$ ou que o número de vértices de T é menor ou igual a $\frac{3|V|-2}{2}$.

Sejam t_1, t_2, t_3 e t_4 o número de vértices de grau 1, grau 2, grau 3 e grau maior ou igual a 4 de T , respectivamente.

Observe que, cada vértice de grau 1 em T , deve ser extremo de, pelo menos, dois caminhos de \mathcal{P} pois, em caso contrário, esta aresta poderia ser contraída, contradizendo a hipótese de que T tem o menor número de arestas possível. Pelo mesmo motivo, cada vértice de grau 2 em T é extremo de, pelo menos, dois caminhos de \mathcal{P} , cada um passando por apenas uma das arestas a ele incidentes. Vamos provar que cada vértice de grau 3 também tem esta propriedade.

Seja v um vértice de grau 3 em T . As três arestas incidentes a v correspondem à cliques em G , já que T tem o menor número possível de arestas. Logo, existe um caminho em cada clique que não está nas outras duas ao mesmo tempo e, como a subfamília formada por tais caminhos satisfaz a propriedade Helly em arestas, v é extremo de, pelo menos, dois caminhos.

Portanto, $2t_1 + 2t_2 + 2t_3$ é menor ou igual ao número de extremos de caminhos de \mathcal{P} e, então, $t_1 + t_2 + t_3 \leq |V|$.

Vamos provar, por indução em t_4 , que $t_4 \leq \frac{t_1-2}{2}$.

Se $t_4 = 0$, como $t_1 \geq 2$ em qualquer árvore, a desigualdade é verificada.

Suponha que $t_4 > 0$. Seja v um vértice de T tal que $d(v) \geq 4$. Considere as $d(v)$ subárvores $T_1, T_2, \dots, T_{d(v)}$ de T , onde cada T_i é induzida por v , seu vizinho u_i e pelos vértices de T cujo único caminho até v passa por u_i . Sejam $t_1^{(i)}$ e $t_4^{(i)}$ o número de vértices de grau 1 e grau maior ou igual a 4 em T_i , $1 \leq i \leq d(v)$.

Pela hipótese de indução, $t_4^{(i)} \leq \frac{t_1^{(i)}-2}{2}$, $1 \leq i \leq d(v)$. Somando termo a termo estas desigualdades, temos:

$$\sum_{i=1}^{d(v)} t_4^{(i)} \leq \sum_{i=1}^{d(v)} \left(\frac{t_1^{(i)} - 2}{2} \right).$$

Ou ainda,

$$\sum_{i=1}^{d(v)} t_4^{(i)} \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d(v)} t_1^{(i)} - d(v).$$

Além disso, observe que $\sum_{i=1}^{d(v)} t_4^{(i)} = t_4 - 1$, já que v é o único vértice de T com grau maior ou igual a 3 que tem esta característica modificada com a subdivisão de T em subárvores, e $\sum_{i=1}^{d(v)} t_1^{(i)} = t_1 + d(v)$ pois v tem grau 1 em cada T_i .

Logo,

$$t_4 - 1 \leq \frac{1}{2}(t_1 + d(v)) - d(v).$$

Ou seja,

$$t_4 \leq \frac{1}{2}t_1 - \frac{1}{2}d(v) + 1.$$

Como $d(v) \geq 4$, temos que:

$$t_4 \leq \frac{t_1}{2} - 1 = \frac{t_1 - 2}{2}.$$

Logo, $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \leq |V| + \frac{t_1}{2} - 1$.

Como duas vezes o valor de t_1 é menor ou igual ao número de extremos de caminhos em \mathcal{P} , temos que $t_1 \leq |V|$. Portanto, $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 \leq \frac{3}{2}|V| - 1$. \square

Como consequência do teorema 3.5 temos que o número de cliques de um grafo UEH é linear. Além disso, esta cota superior é atingida pelos grafos da família mostrada na figura 3.9. Uma família de grafos UEH com número ímpar de vértices atingindo esta cota superior pode ser obtida adaptando-se a construção feita para grafos com número par de vértices.

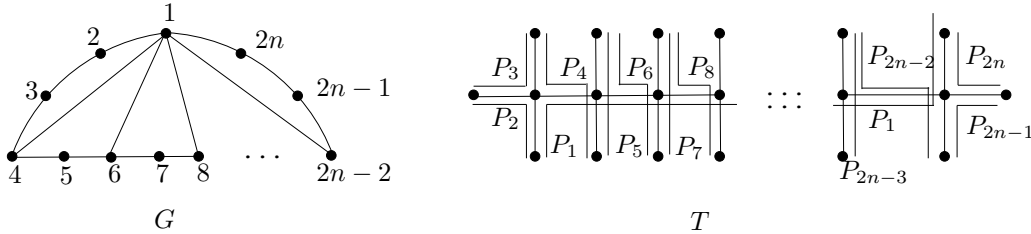


Figura 3.9: Família de grafos UEH onde $|\mathcal{C}| = \frac{3|V|-4}{2}$.

3.3 Árvore característica para a classe UEH

Nesta seção apresentamos uma caracterização dos grafos UEH, dada por Monma e Wei [2] que traz conseqüências estruturais muito importantes.

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Denotamos por \mathcal{C} o conjunto de todas as cliques de G e por C_v o conjunto das cliques de G que contém um determinado vértice v de G . Lembramos que em um grafo UEH, toda clique de \mathcal{C} é clique aresta.

Seja G um grafo e T uma árvore. Se $E(T) = \mathcal{C}$ e $T[C_v]$ é um caminho em T , para todo $v \in V(G)$, dizemos que T é uma *árvore característica* de G .

A figura 3.1 mostra um exemplo de um grafo UEH e de uma árvore característica deste grafo. Uma árvore característica do mesmo grafo não isomorfa àquela é dada na figura 3.10.

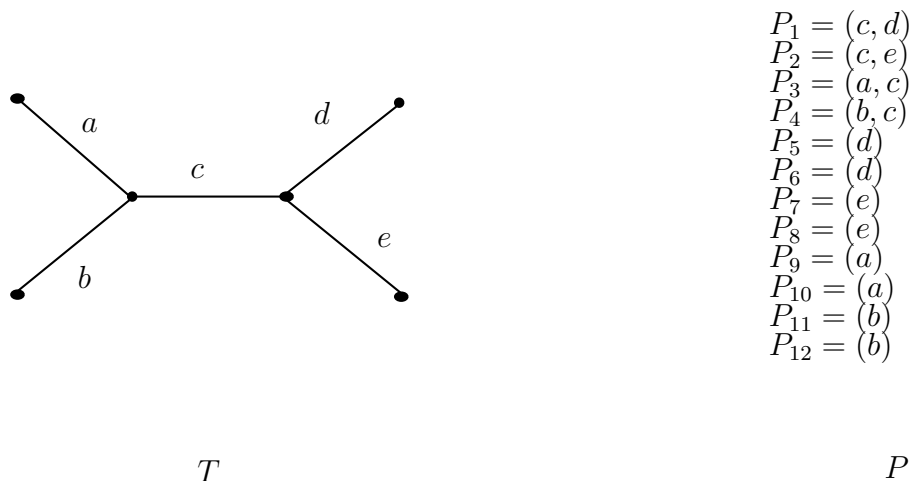


Figura 3.10: Árvore característica para o grafo da figura 3.1.

Árvores características desempenham um papel fundamental.

Teorema 3.6 (Monma e Wei [2]). *Um grafo G é UEH se e somente se existe uma árvore característica de G .*

Demonstração. (\implies) Seja (\mathcal{P}, T) uma representação UEH de um grafo G onde $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ e T tem o menor número possível de arestas. Assim, para toda aresta e de T , $P[e]$ é uma clique de G e portanto, existe uma bijeção entre \mathcal{C} e $E(T)$.

Resta apenas mostrar que $T[C_v]$, para cada $v \in V(G)$, é um caminho. Como $T[C_v]$ é formado pelas arestas de T correspondentes à cliques de G que contém o vértice v e P_v , o caminho em \mathcal{P} correspondente ao vértice v , passa por estas arestas,

então temos que $T[C_v] \subseteq P_v$. Por outro lado, as arestas de P_v correspondem às cliques de G que contém v . Logo, tais arestas estão em $T[C_v]$ e então $P_v \subseteq T[C_v]$. Portanto, $P_v = T[C_v]$ e, conseqüentemente, $T[C_v]$ é um caminho.

(\Leftarrow) Seja T uma árvore com conjunto de arestas \mathcal{C} , tal que para todo vértice v de G , $T[C_v]$ é um caminho em T .

Considere $\mathcal{P} = \{P_v = T[C_v] : v \in V(G)\}$. Vamos mostrar que (\mathcal{P}, T) é uma representação UEH de G .

Os caminhos P_v e P_w correspondentes aos vértices v e w de G compartilham uma aresta se e somente se v e w estão em uma mesma clique de G mas, neste caso, v e w são adjacentes em G . Assim, a árvore T e a família \mathcal{P} formam uma representação UE de G . Falta provar que a família \mathcal{P} satisfaz a propriedade Helly em arestas.

Seja \mathcal{P}' uma subfamília de \mathcal{P} tal que os caminhos de \mathcal{P}' se interceptam em arestas dois a dois. Em G , os vértices correspondentes a tais caminhos formam um completo que está contido em alguma clique do grafo. Além disso, existe uma aresta e da árvore T que é correspondente à tal clique, por hipótese. Mas, então, e pertence a todo P_v , tal que $P_v \in \mathcal{P}'$. Logo, \mathcal{P}' satisfaz a propriedade Helly em arestas e (\mathcal{P}, T) é uma representação UEH de G . \square

Teoremas que caracterizam os grafos pertencentes às classes DE e RDE com base num conceito de árvore característica também foram provados em [2].

Outro conceito análogo é o de árvore característica tendo \mathcal{C} como conjunto de vértices. Esta noção foi usada para caracterizar grafos DV em [2] e por Gavril em [13, 7, 14] para grafos RDV, UV e CORDAIS, respectivamente.

3.4 A subclasse UEH-Local

Um grafo G é UEH-LOCAL se $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$, onde (\mathcal{P}, T) é uma representação UEH de G e T é uma estrela.

Os ciclos são exemplos de grafos UEH-LOCAL e uma representação UEH onde o grafo base é uma estrela é dada na figura 3.4.

Observe que se (\mathcal{P}, T) é uma representação UEH de um grafo G onde T é uma estrela, então o centro da estrela está em todos os caminhos de \mathcal{P} . Além disso, podemos assumir que todo caminho passa por duas arestas de T pois, em caso

contrário, basta criar uma nova aresta na estrela para um caminho que passa apenas por uma aresta e fazer com este caminho passe pela nova aresta também. O processo pode ser repetido até que não existam mais caminhos com apenas uma aresta.

A classe UEH-LOCAL foi caracterizada em termos de grafos linha de multigrafos por Monma e Wei, em 1986. O teorema seguinte apresenta tal caracterização.

Teorema 3.7 (Monma e Wei [2]). *Um grafo G é UEH-LOCAL se e somente se G é grafo linha de um multigrafo sem triângulos.*

Demonstração. (\implies) Seja G um grafo UEH e (\mathcal{P}, T) uma representação UEH de G onde T é uma estrela. Seja v o centro de T .

Seja H o multigrafo definido da seguinte forma. O conjunto de vértices de H é o conjunto de arestas de T e existe uma aresta entre dois vértices de H para cada caminho em \mathcal{P} que contém as duas arestas correspondentes em T . A figura 3.11 ilustra esta construção. Arestas múltiplas em H correspondem à caminhos idênticos em \mathcal{P} .

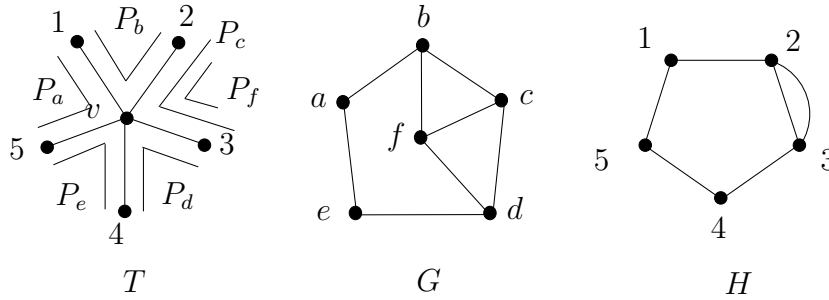


Figura 3.11: Uma representação UE para G e o multigrafo H tal que $L(H) = G$.

Observe que a cada vértice de G corresponde uma aresta de H . De fato, um vértice de G corresponde à um caminho em \mathcal{P} que, em H , corresponde à aresta que liga os vértices de H correspondentes às arestas deste caminho.

É fácil ver que dois vértices de G são adjacentes se e somente se as arestas correspondentes a eles em H têm um extremo comum. De fato, dois vértices de G são adjacentes se e somente se os caminhos a eles correspondentes em \mathcal{P} têm uma aresta em comum. Em H , esta aresta comum é um vértice que é extremo das arestas correspondentes aos caminhos considerados. Assim, temos que $G = L(H)$.

Suponha que H tem um triângulo, digamos de vértices a, b e c . As arestas do triângulo correspondem à caminhos de \mathcal{P} que se interceptam em arestas dois a dois

e os vértices correspondem às arestas de T que estão nestes caminhos. Assim, a estrela T contém as arestas a , b e c e \mathcal{P} contém os caminhos cujas arestas são: (a, b) , (a, c) e (b, c) . Mas, então, a subfamília de \mathcal{P} formada por estes três caminhos não satisfaz a propriedade Helly em arestas, uma contradição. Portanto, H não tem triângulos.

(\Leftarrow) Seja H um multigrafo tal que $G = L(H)$. Vamos construir uma estrela T e um conjunto \mathcal{P} de caminhos de T tal que $G = \Omega_e(\mathcal{P}, T)$.

Seja $\{v_1, \dots, v_m\}$ o conjunto dos vértices de H . A estrela T tem centro v e $V(T) = \{v, 1, \dots, m\}$.

Os elementos de \mathcal{P} são dados do seguinte modo: para cada aresta $e_i = (v_j, v_k)$ de H (que corresponde a um vértice de G), considere o caminho em T formado pelas arestas (v, j) e (v, k) .

Assim sendo, se dois vértices são adjacentes em G , então as arestas correspondentes a eles em H têm um extremo comum. Logo, em \mathcal{P} , os caminhos que correspondem a tais vértices, compartilham a aresta formada por v e por este extremo. Reciprocamente, se dois caminhos compartilham uma aresta (v, i) em T , as arestas correspondentes em H têm v_i como extremo comum. Logo, os vértices a elas correspondentes em G são adjacentes. Portanto, G é grafo de interseção em arestas dos caminhos de \mathcal{P} .

Vamos provar que \mathcal{P} satisfaz a propriedade Helly em arestas.

Seja \mathcal{P}' uma subfamília de \mathcal{P} cujos caminhos se interceptam dois a dois.

Se todos os caminhos de \mathcal{P}' forem iguais, o resultado é imediato. Em outro caso, sejam $P_i = ((v, x), (v, y))$ e $P_j = ((v, x), (v, z))$ dois caminhos distintos de \mathcal{P}' . Observe que qualquer outro caminho de \mathcal{P}' intercepta P_i e P_j . Mas, isso só pode acontecer se estes caminhos passarem pela aresta (v, x) pois, em caso contrário, um triângulo será formado em H . Logo, \mathcal{P}' satisfaz a propriedade Helly em arestas. \square

3.5 Decomposição por cliques

Nesta seção apresentamos uma decomposição especial de grafos chamada *decomposição por cliques* e sua aplicação as classes de grafos de interseção em arestas de caminhos em uma árvore. Esta decomposição foi introduzida por Tarjan [10]

e adaptada por Monma e Wei [2] para auxiliar na caracterização das classes UEH, $UE \cap CORDAL$, UV e subclasses destas.

Uma clique C de um grafo $G = (V, E)$ é um *separador clique* se $G[V \setminus C]$ é desconexo. Desta forma, o conjunto de vértices de G fica particionado em C, V_1, V_2, \dots, V_s , com $s \geq 2$, de maneira que $1 \leq i < j \leq s$, para quaisquer i e j , tem-se que $G[V_i]$ é conexo e vértices em V_i não são adjacentes a vértices de V_j . É dito também que C *separa* G em $G[V_i \cup C]$, $1 \leq i \leq s$ e que G é *particionado* por C . Um grafo que não possui um separador clique é chamado de *átomo* ou *grafo indecomponível*. Considerando o grafo G da figura 3.12 com separador clique inicial $C = \{1, 2, 3, 4\}$ temos que os grafos G_1, G_2 e G_5 são átomos enquanto que G_3 e G_4 não são.

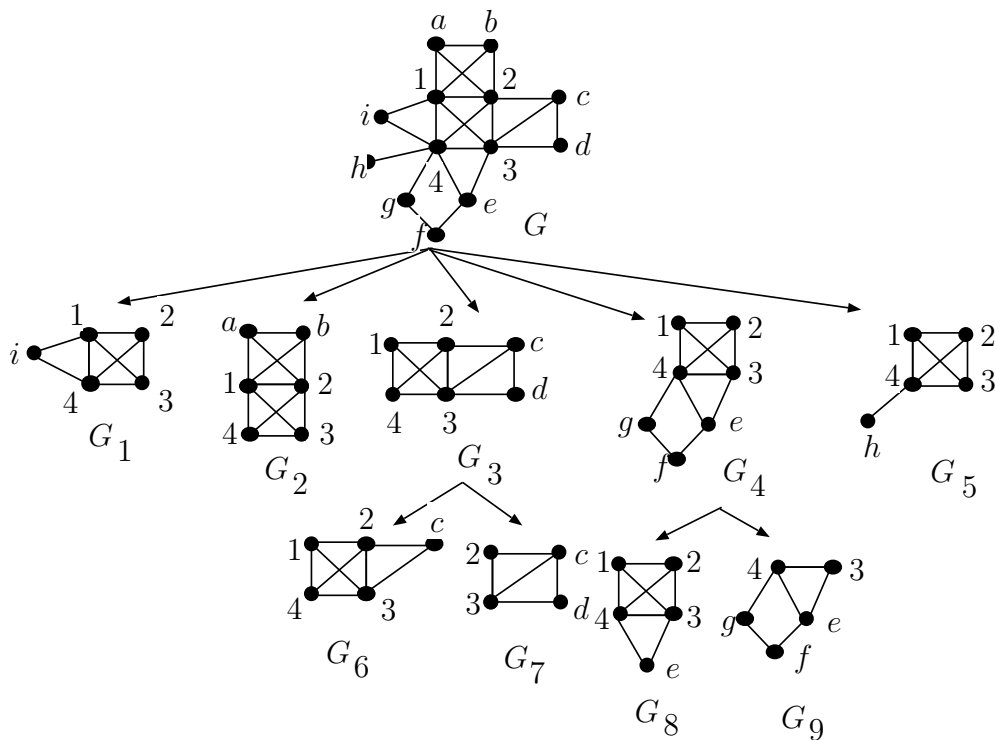


Figura 3.12: Decomposição por cliques de um grafo G .

Aplicando recursivamente o processo de particionar um grafo por um separador clique aos grafos obtidos até que todos os grafos considerados sejam átomos, temos uma *decomposição por cliques* de G . Tal decomposição pode ser representada por uma *árvore clique*, que é uma árvore enraizada onde cada nó interno representa um separador clique e cada folha é um átomo. O grafo original pode ser obtido pela composição dos subgrafos, a partir das folhas da árvore clique. A figura 3.12 ilustra como uma árvore clique pode ser construída.

Na literatura de Teoria dos Grafos, separadores clique são também conhecidos como *cortes clique*.

A noção de decomposição por cliques foi introduzida por Monma e Wei [2] e utilizada para caracterizar várias classes de grafos. No presente texto, abordamos apenas os resultados referentes à classe UEH e UE. Uma caracterização por separadores clique de uma classe de grafos pode conduzir a um algoritmo polinomial de reconhecimento para esta classe.

Esta idéia de decomposição já havia sido utilizada por Tarjan [10], mas este considerava conjuntos completos, ou seja, não necessariamente maximais, como separadores.

Em tudo o que segue, G é um grafo e C é um separador clique de G tal que C separa G em $G_i = G[V_i \cup C]$, $1 \leq i \leq s$.

Os seguintes fatos decorrem diretamente da definição.

Lema 3.8 (Monma e Wei [2]). *O conjunto das cliques de G é a união dos conjuntos das cliques dos G_i 's, $1 \leq i \leq s$. Além disso, C é uma clique de cada G_i e qualquer outra clique de G está em exatamente um dos G_i 's.*

Lema 3.9 (Monma e Wei [2]). *Se uma clique C' não é um separador clique de G , então C' não é um separador clique de nenhum G_i , $1 \leq i \leq s$. Independente disso, C não é um separador clique de nenhum G_i .*

As cliques de G que interceptam C e são diferentes de C são chamadas de *cliques relevantes*. No decorrer deste capítulo estaremos considerando apenas as cliques relevantes. Se C_i é uma clique diferente de C , chamamos de *vizinhança de C_i no separador clique C* e denotamos por \mathbb{C}_i o conjunto $C_i \cap C$. Observe que, neste caso, $\mathbb{C}_i \neq \emptyset$.

Dois grafos G_1 e G_2 são *disjuntos* quando para toda clique C_1 de G_1 e toda clique C_2 de G_2 , $\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}_2 = \emptyset$.

Um grafo G_1 *domina* um grafo G_2 , o que denotamos por $G_1 \geq G_2$, se eles não são disjuntos e para cada clique C_1 de G_1 , ou $\mathbb{C}_1 \supseteq \mathbb{C}_2$, para toda clique C_2 de G_2 , ou $\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}_2 = \emptyset$, para toda clique C_2 de G_2 . Dois grafos G_1 e G_2 são *equivalentes* quando $G_1 \geq G_2$ e $G_2 \geq G_1$. Se $G_1 \geq G_2$ mas G_2 não domina G_1 , escrevemos $G_1 > G_2$.

Dois grafos G_1 e G_2 são *antipodais* se eles não são disjuntos e nenhum domina o outro. Duas cliques C_1 e C_2 são *antipodais* quando \mathbb{C}_1 e \mathbb{C}_2 são incomparáveis e têm, pelo menos, um elemento em comum.

Por exemplo, na figura 3.12, os subgrafos G_1 e G_2 são antipodais, já que estes só possuem uma clique relevante cada um, que não são disjuntas em relação à C e uma não contém a vizinhança da outra no separador clique. Os subgrafos G_1 e G_3 não são antipodais pois são disjuntos. Já G_1 e G_5 apesar de não serem disjuntos também não são antipodais pois G_1 domina G_5 .

O *grafo dos antipodais*, em relação à um separador clique C , tem um vértice v_i para cada $G_i = G[V_i \cup C]$, $1 \leq i \leq s$ e v_i e v_j são adjacentes se e somente se G_i e G_j são antipodais. Em relação ao grafo G e ao separador clique C da figura 3.12 o grafo A dos antipodais tem $V(A) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ e $E(A) = \{(v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), (v_4, v_1)\}$.

Grafos antipodais podem ser reconhecidos de acordo com as interseções de suas cliques, como mostra o lema a seguir.

Lema 3.10 (Monma e Wei [2]). *Dois grafos G_1 e G_2 são antipodais se e somente se existem cliques C_1, C'_1, C''_1 em G_1 e cliques C_2, C'_2, C''_2 em G_2 , não necessariamente distintas, tais que uma das condições abaixo é verdadeira:*

- (1) C_1 e C_2 são antipodais;
- (2) $\mathbb{C}_1 \supset \mathbb{C}_2$ e $\mathbb{C}'_1 \subset \mathbb{C}'_2$;
- (3) (a) $\mathbb{C}_1 \supset \mathbb{C}_2$, $\mathbb{C}'_1 \supseteq \mathbb{C}'_2$ e $\mathbb{C}'_1 \cap \mathbb{C}''_2 = \emptyset$ ou (b) $\mathbb{C}_2 \supset \mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}'_2 \supseteq \mathbb{C}'_1$ e $\mathbb{C}'_2 \cap \mathbb{C}''_1 = \emptyset$;
- (4) $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}_2$, $\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}'_2 = \emptyset$, $\mathbb{C}''_2 = \mathbb{C}'_1$ e $\mathbb{C}''_2 \cap \mathbb{C}''_1 = \emptyset$;

Demonstração. (\Leftarrow) Um exame dos casos mostra que cada uma das quatro condições implica que G_1 e G_2 são antipodais.

(\Rightarrow) Suponha que G_1 e G_2 são grafos antipodais.

Se existem cliques antipodais C_1 em G_1 e C_2 em G_2 , temos o caso (1).

Se não existir um tal par de cliques antipodais mas existirem cliques C_1 de G_1 e C_2 de G_2 tais que $\mathbb{C}_1 \supset \mathbb{C}_2$, como G_1 não domina G_2 , temos que devem existir cliques C'_1, C'_2 e C''_2 onde ou $\mathbb{C}'_1 \subset \mathbb{C}'_2$ ou $\mathbb{C}'_1 \supseteq \mathbb{C}'_2$ e $\mathbb{C}'_1 \cap \mathbb{C}''_2 = \emptyset$, que são exatamente as condições descritas nos casos (2) e (3). Por outro lado, se não existir um par de cliques antipodais e nem um par de cliques tal que uma contém propriamente a vizinhança no separador clique da outra, temos o caso (4). \square

Os resultados seguintes estabelecem uma relação de ordem entre os subgrafos dois a dois não antipodais.

Lema 3.11 (Monma e Wei [2]). *A relação de dominação é transitiva.*

Demonstração. Sejam G_1 , G_2 e G_3 subgrafos tais que $G_1 \geq G_2$ e $G_2 \geq G_3$. Por definição, G_1 e G_2 são não disjuntos e, como $G_1 \geq G_2$, deve existir uma clique C_1^* em G_1 tal que $C_1^* \supseteq C_i, \forall C_i$ em G_2 . Analogamente, existe uma clique C_2^* em G_2 tal que $C_2^* \supseteq C_j, \forall C_j$ em G_3 . Vamos, agora, analisar a relação entre as cliques de G_1 e as de G_3 .

Seja C_1 uma clique de G_1 . Se $C_1 \supseteq C_i, \forall C_i$ em G_2 , então $C_1 \supseteq C_2^*$ inclusive. Mas $C_2^* \supseteq C_j, \forall C_j$ em G_3 e, conseqüentemente, $C_1 \supseteq C_j, \forall C_j$ em G_3 . Em outro caso, $C_1 \cap C_i = \emptyset, \forall C_i$ em G_2 , mas então $C_1 \cap C_2^* = \emptyset$, como $C_2^* \supseteq C_j, \forall C_j$ em G_3 , temos que $C_1 \cap C_j = \emptyset, \forall C_j$ em G_3 .

Logo, G_1 e G_3 são não disjuntos e $G_1 \geq G_3$. Portanto, a relação de dominação é transitiva. \square

Lema 3.12 (Monma e Wei [2]). *Uma família de subgrafos dois a dois não antipodais de G pode ser ordenada de forma que se $G_i > G_j$, então $i < j$.*

Demonstração. Seja \mathcal{S} uma coleção de subgrafos dois a dois não antipodais de G , ou seja, os grafos de \mathcal{S} , dois a dois, são disjuntos, um domina o outro ou são equivalentes.

Seja \mathcal{S}' uma subfamília maximal de \mathcal{S} formada pelos subgrafos que não são equivalentes a nenhum outro subgrafo e não são disjuntos de todos os outros subgrafos de \mathcal{S}' . O objetivo é provar que existe uma ordenação para \mathcal{S}' satisfazendo a condição do enunciado e, a partir desta, construir uma tal ordenação para \mathcal{S} .

A ordenação dos elementos de \mathcal{S}' é feita da seguinte forma, inicie a ordenação com um subgrafo qualquer. A partir deste, cada G_i é inserido na ordenação testando se G_i domina algum outro subgrafo já inserido na ordenação. Se a resposta for sim, G_i é inserido na posição imediatamente anterior ao primeiro subgrafo da ordenação que ele domina. Se a resposta for não, então se algum G_j domina G_i , G_i deve ser inserido imediatamente depois do último subgrafo que o domina na ordenação. Caso contrário, G_i é inserido no final da ordenação.

Para provar que a condição do enunciado é mantida a cada passo vamos mostrar que em nenhum momento acontecerá o impasse do tipo G_i é dominado por G_k , G_i

domina G_j e G_j está antes de G_k na ordenação. Suponha, por absurdo, que isto acontece para algum G_i . Assim, $G_k > G_i$ e $G_i > G_j$ e, pelo lema 3.11, $G_k > G_j$. Mas G_j está antes de G_k na ordenação, o que é uma contradição.

Para ordenar a família \mathcal{S} a partir da ordenação de \mathcal{S}' basta inserir na ordenação os subgrafos equivalentes a algum subgrafo G_i em \mathcal{S}' e os subgrafos disjuntos de todos os grafos em \mathcal{S}' . No primeiro caso, o subgrafo é inserido imediatamente após G_i . Os subgrafos disjuntos de todos os outros podem ser inseridos, em qualquer ordem, no final da ordenação.

Observe que as inserções na ordenação em nada afetam a propriedade de que se $G_i > G_j$, então $i < j$ e, portanto, a família \mathcal{S} admite uma ordenação satisfazendo a condição do enunciado. \square

3.5.1 Complexidade da decomposição por cliques

A família de cliques de um grafo $G = (V, E)$ pode ser gerada em tempo $O(|V(G)||E(\overline{G})||\mathcal{C}|)$, pelo algoritmo de Tsukiyama et al.[15], onde cada clique é gerada em tempo $O(|V(G)||E(\overline{G})|)$.

Observe que, pelos lemas 3.8 e 3.9, se uma clique C é um separador clique de um grafo G , C não precisa mais ser considerada como separador para nenhum G_i , $1 \leq i \leq s$, e cada uma das cliques restantes de \mathcal{C} faz parte da família de cliques de exatamente um dos G_i 's. Isto significa que cada clique precisa ser considerada uma única vez como separador.

Para cada clique, as componentes conexas de $G \setminus C$ podem ser geradas em $O(|V(G)| + |E(G)|)$ [6]. Logo, concluímos que decompor um grafo $G = (V, E)$ por separadores clique pode ser feito em $O(|V(G)||E(\overline{G})||\mathcal{C}| + (|V(G)| + |E(G)|)|\mathcal{C}|)$. No caso dos grafos UEH, a complexidade é polinomial pois um grafo UEH tem um número polinomial de cliques.

3.5.2 Caracterização de grafos UEH pela decomposição por cliques

Nesta seção, enunciamos e provamos o teorema de caracterização para grafos UEH que contém um separador clique.

Seja G um grafo UEH e (\mathcal{P}, T) uma representação UEH de G .

Uma aresta de T é uma *aresta clique* quando corresponde a uma clique aresta de G , ou seja, uma aresta clique é uma aresta de T que está em todos os caminhos que representam vértices de C , onde C é uma clique aresta. Se T for uma árvore característica de G , existe uma correspondência entre as arestas clique de T e as cliques aresta de G .

Sejam C, C' e C'' cliques aresta de G . Definimos $P(C', C'')$ como o único caminho (conjunto de arestas) entre as arestas da árvore T correspondentes às cliques aresta C' e C'' , incluindo estas arestas. Dizemos ainda que C' e C'' *estão do mesmo lado de C* quando $C \notin P(C', C'')$.

Seja C um separador clique para G , ou seja, C separa G em $G_i = [V_i \cup C]$, $1 \leq i \leq s$.

Teorema 3.13 ([Monma e Wei [2]] Teorema do Separador para UEH). *G é UEH se e somente se cada G_i é UEH, $1 \leq i \leq s$, e o grafo dos antipodais pode ser 2-colorido.*

Demonstração. (\implies) Sejam G um grafo UEH com separador clique C e (\mathcal{P}, T) uma representação UEH de G , onde T é uma árvore característica de G .

Primeiramente vamos mostrar que cada G_i é UEH e tem uma árvore característica T_i tendo C como aresta-folha.

Seja $P(V_i)$ o subgrafo de T induzido pelo conjunto de todas as arestas de T que fazem parte de algum caminho em \mathcal{P} que representa um vértice de V_i . Obviamente, $P(V_i)$ é conexo já que, por definição, $G[V_i]$ é conexo.

Seja v_0 o vértice de $P(V_i)$ mais próximo da aresta clique C em T . Construa cada T_i acrescentando a $P(V_i)$ uma aresta (v_0, u) , onde u é um vértice novo. Esta aresta é correspondente à clique C em T_i . Observe que, desta forma, há uma correspondência entre as arestas de T_i e as cliques de G_i .

Agora vamos definir os caminhos de \mathcal{P}_i . Os caminhos de \mathcal{P} que representam os vértices de V_i não são modificados em \mathcal{P}_i . Os caminhos que representam vértices da clique C serão modificados adicionando-se às arestas de $P(V_i)$ que estão em tal caminho, a aresta (v_0, u) correspondente à C . Desta forma, (\mathcal{P}_i, T_i) é uma representação UEH para G_i , onde T_i é árvore característica de G_i , tendo C como aresta-folha. Um exemplo da construção de T_i e \mathcal{P}_i a partir de T e \mathcal{P} é mostrado na figura 3.13,

onde é dada uma árvore característica do grafo G_5 a partir da árvore característica do grafo G da figura 3.12.

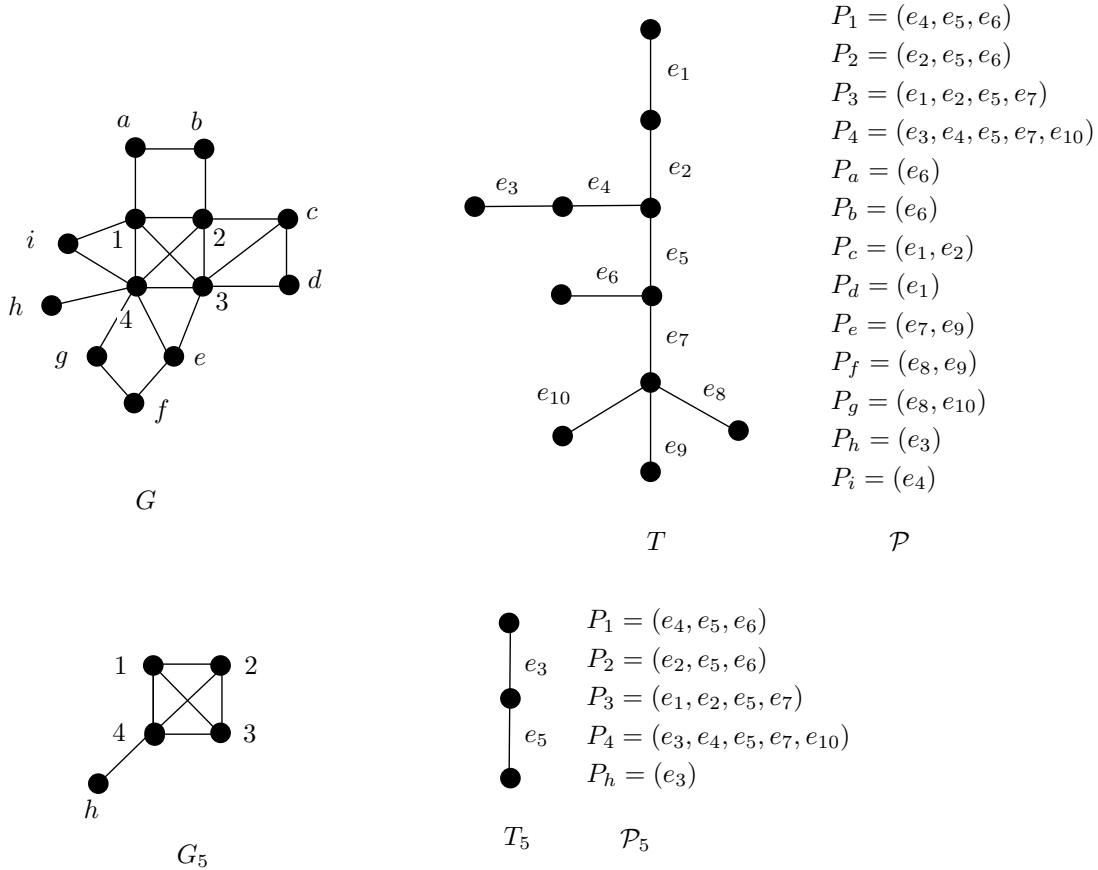


Figura 3.13: Construção de uma árvore característica de G_5 .

Falta provar que os G_i 's podem ser 2-coloridos tais que pares de grafos antipodais não têm a mesma cor. Para isso observamos que:

Fato 3.14. *As cliques de um mesmo G_i correspondem à arestas do mesmo lado de C em T .*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que existam arestas clique C' e C'' de G_i em lados diferentes de C tais que C' e C'' são as arestas de G_i mais próximas de C com tais características.

Como C' é uma clique, existe um vértice x do grafo G tal que $x \in C' \setminus C$ e, por motivo análogo, existe um vértice y de $V(G)$ tal que $y \in C'' \setminus C$. Mas, então, em $G \setminus C$, x e y estão em componentes conexas distintas, o que é uma contradição, pois estão em V_i e, por definição, $G[V_i]$ é conexo. Portanto, C' e C'' devem estar do mesmo lado de C . \square

Assim, o conjunto dos G_i 's pode ser particionado em dois conjuntos, de acordo com o lado de C em T em que se encontram suas arestas clique. E podemos atribuir uma cor a cada conjunto de G_i 's assim definido.

Temos, agora, que provar que G_i 's cujas arestas clique estão de um mesmo lado de C em T não são antipodais.

Suponha, por absurdo, que existam G_1 e G_2 grafos antipodais tais que as suas arestas clique estão do mesmo lado de C em T . Existem quatro casos a serem analisados, de acordo com o lema 3.10.

Antes de analisarmos os casos, provaremos alguns fatos a fim de facilitar as demonstrações.

Fato 3.15. *Cada G_i não contém pares de cliques antipodais.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que C_1 e C_2 são cliques antipodais em $G_i = \Omega_e(\mathcal{P}_i, T_i)$. Logo, existem x, y e z em C tais que $x \in C_1 \setminus C_2$, $y \in C_2 \setminus C_1$ e $z \in C_1 \cap C_2$. Seja P_z o caminho em \mathcal{P}_i correspondente a z . P_z deve conter as arestas clique C , C_1 e C_2 , onde C_2 está entre C e C_1 ou C_1 está entre C e C_2 , já que C é uma folha em T_i . Mas, no primeiro caso, P_x deve conter o único caminho em T_i entre as arestas clique C_1 e C e, então, contém a aresta clique C_2 , o que contradiz o fato de x não pertencer a C_2 . Em outro caso, P_y contém o único caminho em T_i entre as arestas clique C_2 e C mas, desta forma, contém a aresta clique C_1 , o que é uma contradição análoga à anterior. \square

Fato 3.16. *Se C_1 e C_2 são cliques não disjuntas em relação à C e do mesmo lado de C , então*

1. $C_1 \in P(C, C_2)$ ou $C_2 \in P(C, C_1)$;
2. Se $\mathbb{C}_1 \subset \mathbb{C}_2$, então $C_2 \in P(C, C_1)$;
3. Se $C_2 \in P(C, C_1)$, então $\mathbb{C}_1 \subseteq \mathbb{C}_2$.

Demonstração. Para a prova dos itens vamos considerar C_1 e C_2 cliques não disjuntas em relação à C , isto é, $\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}_2 \neq \emptyset$ e do mesmo lado de C .

(1) É fácil ver que, como existe um vértice v de C tal que $v \in C_1 \cap C_2$ temos que, em P_v , ou a aresta clique C_1 está entre as arestas clique C e C_2 ou a aresta clique

C_2 está entre as arestas clique C e C_1 , o que é o mesmo que dizer que $C_1 \in P(C, C_2)$ ou $C_2 \in P(C, C_1)$.

(2) Suponha, agora, que $\mathbb{C}_1 \subset \mathbb{C}_2$. Observe que a aresta clique C_2 está, obrigatoriamente, entre as arestas clique C e C_1 , já que todo vértice de C que está em C_1 tem seu caminho correspondente em T passando necessariamente por C_2 , o que significa que $C_2 \in P(C, C_1)$.

(3) Suponha, além das hipóteses do fato 3.15, que C_2 está em $P(C, C_1)$. A vizinhança de C_1 em C , ou seja, os vértices de C que estão em C_1 , deverá estar contida na vizinhança de C_2 em C , ou estas vizinhanças são iguais. Portanto, $\mathbb{C}_1 \subseteq \mathbb{C}_2$. \square

Fato 3.17. *Se uma aresta clique C_k está no único caminho em T entre duas arestas clique de um mesmo G_i , então C_k está em G_i .*

Demonstração. Sejam C'_i e C''_i duas cliques de um mesmo G_i . Seja C_k uma clique G tal que $C_k \in P(C'_i, C''_i)$. Além disso, sejam $v' \in C'_i$ e $v'' \in C''_i$, vértices de V_i . Em $G[V_i]$ existe um caminho Q conectando v' e v'' , já que $G[V_i]$ é conexo. Mas, em T , Q é correspondente à uma família de caminhos de modo que cada caminho intercepta o seu antecessor e o seu sucessor e o primeiro intercepta $P_{v'}$ e o último intercepta $P_{v''}$. Então, algum desses caminhos, obrigatoriamente, passa pela aresta clique C_k . Logo, C_k contém algum vértice de V_i , mas, neste caso, C_k deve estar em G_i , já que a retirada de C do grafo G não desconecta C_k e V_i . \square

Passemos, agora, para a análise dos casos.

(1) \mathbb{C}_1 e \mathbb{C}_2 são antipodais.

Seja v um vértice de G tal que $v \in \mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}_2$. Observe que C é uma aresta-folha em P_v . Além disso, a aresta clique C_1 está no único caminho em T entre as arestas clique C e C_2 ou C_2 está no único caminho entre C e C_1 em T . No primeiro caso, todo vértice de C que está em C_2 têm o seu caminho correspondente em T passando pela aresta clique C_2 . Mas isto significa que $\mathbb{C}_2 \subseteq \mathbb{C}_1$, o que é uma contradição. Analogamente, no segundo caso, conclui-se que $\mathbb{C}_1 \subseteq \mathbb{C}_2$, que também é uma contradição.

(2) $\mathbb{C}_1 \supset \mathbb{C}_2$ e $\mathbb{C}'_1 \subset \mathbb{C}'_2$

Pelo segundo item do fato 3.16, $C'_2 \in P(C, C'_1)$ e $C_1 \in P(C, C_2)$.

Observe que $P(C_2, C'_2) = P(C, C_2) \oplus P(C, C'_2)$, ou seja, o conjunto de arestas em T entre C_2 e C'_2 é igual ao conjunto de arestas entre C e C_2 unido com o conjunto de arestas entre C e C'_2 , menos as arestas que estiverem nestes dois conjuntos simultaneamente. Além disso, C_1 não pode estar em $P(C_2, C'_2)$ pois, pelo fato 3.17, C_1 estaria em G_2 . Mas C_1 está em $P(C, C_2)$, logo, C_1 deve estar, necessariamente, em $P(C, C'_2)$.

Desta forma, $C'_2 \in P(C_1, C'_1)$, então, pelo fato 3.17, C'_2 está em G_1 , o que é uma contradição.

$$(3a) \mathbb{C}_1 \supset \mathbb{C}_2 \text{ e } \mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}'_2 = \emptyset;$$

Pelo fato 3.16, ítem 3, como C_1 e C'_2 são disjuntos em relação a C , então $C_1 \notin P(C, C'_2)$ e $C'_2 \notin P(C, C_1)$. Além disso, $C_1 \in P(C, C_2)$, pelo segundo ítem do fato 3.16. Então, $C_1 \in P(C_2, C'_2)$. Assim sendo, $C_1 \in G_2$, pelo fato 3.17, o que é uma contradição.

$$(3b) \mathbb{C}_2 \supset \mathbb{C}_1 \text{ e } \mathbb{C}_2 \cap \mathbb{C}'_1 = \emptyset;$$

A prova deste caso é análoga à do caso (3a).

$$(4) \mathbb{C}_1 = \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}'_2 = \emptyset \text{ e } \mathbb{C}'_1 \cap \mathbb{C}_2 = \emptyset;$$

Pelo terceiro ítem do fato 3.16, como C_1 e C'_2 são disjuntos em relação a C , $C_1 \notin P(C, C'_2)$ e $C'_2 \notin P(C, C_1)$.

Analogamente, podemos concluir que $C_2 \notin P(C, C'_1)$ e $C'_1 \notin P(C, C_2)$.

Como C_1 e C_2 são cliques não disjuntas em relação a C , pelo primeiro ítem do fato 3.16, ou $C_1 \in P(C, C_2)$ ou $C_2 \in P(C, C_1)$. No primeiro caso, temos claramente uma contradição porque C_1 estaria em $P(C_2, C'_2)$, já que $C_1 \notin P(C, C'_2)$. Logo, $C_2 \in P(C, C_1)$.

Entretanto, $C_2 \notin P(C, C'_1)$, por observação anterior. Sendo assim, $C_2 \in P(C_1, C'_1)$, o que é uma contradição.

No segundo caso, como $C_2 \notin P(C_1, C'_1)$, pelo fato 3.17, então $C_2 \in P(C, C'_1)$, o que é uma contradição pois, por observação anterior, $C_2 \notin P(C, C'_1)$.

Como foram analisados todos os casos possíveis, podemos concluir que não existem G_1 e G_2 antipodais do mesmo lado de C . Portanto, a coloração dos G_i 's definida anteriormente não atribui a mesma cor a grafos antipodais.

(\Leftarrow) Seja G um grafo e C um separador clique de G tal que cada $G_i = G[V_i \cup C]$ é UEH, $1 \leq i \leq s$, e o grafo dos antipodais pode ser 2-colorido.

A idéia da prova é construir uma árvore característica de G a partir das árvores características dos G_i 's, usando a partição dos G_i 's em dois conjuntos, definida pela 2-coloração destes.

Pelo lema 3.9, C não é um separador de nenhum dos G_i 's. Assim, C deve ser aresta-folha em cada árvore característica T_i de G_i , $1 \leq i \leq s$. Caso contrário, existem C_1 e C_2 arestas clique adjacentes a C em T por extremos diferentes. Como C_1 e C_2 são cliques de G , existem $u \in C_1 \setminus C$ e $v \in C_2 \setminus C$. A retirada de C iria separar u e v em componentes conexas distintas de $G \setminus C$, pois qualquer caminho em T entre P_u e P_v passa pela aresta clique C , ou seja, qualquer caminho em G entre u e v passa por algum vértice da clique C . Logo, C é um separador clique de G_i , o que é uma contradição.

Pelo lema 3.12, existe uma ordenação G_1, G_2, \dots, G_t dos G_i 's de uma mesma cor tal que se $G_i > G_j$ então $i < j$.

Vamos construir recursivamente uma árvore característica UEH para $G[V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_i \cup C]$, onde C é uma aresta-folha para cada i , e os $G_i = G[V_i \cup C]$ têm a mesma cor, $1 \leq i \leq t$. Esta construção para o grafo G da figura 3.12 pode ser a partir das árvores dadas na figura 3.14.

Temos que $G_1 = G[V_1 \cup C]$ tem uma árvore característica onde C é uma aresta-folha. Suponha que $G[V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{i-1} \cup C]$ tem uma árvore característica $T^{(i-1)}$ onde C é uma aresta-folha.

Como observado anteriormente, $G_i = G[V_i \cup C]$ tem uma árvore característica T_i onde C é uma aresta-folha. Dois casos devem ser analisados.

Caso 1: \mathbb{G}_i não está contido em nenhum \mathbb{G}_j , para $1 \leq j \leq i - 1$;

Caso 2: Existe algum G_j , $1 \leq j \leq i - 1$, para o qual $\mathbb{G}_j \supset \mathbb{G}_i$.

No caso 1, \mathbb{G}_i deve ser disjunto de qualquer outro \mathbb{G}_j , $i \neq j$, pois, em caso contrário, G_i e G_j seriam antipodais. Observe que \mathbb{G}_i não pode conter nenhum \mathbb{G}_j já que G_i está depois de G_j na ordenação. Então basta fazer uma operação com as arestas correspondentes a C em T_i e $T^{(i-1)}$, como mostra a figura 3.15, identificando v_0 com v'_0 e v_1 com v'_1 para formar $T^{(i)}$. Pelo lema 3.8, as arestas de $T^{(i)}$ correspondem exatamente às arestas de $G[V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_i \cup C]$. Seja $v \in V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_i$, ou existia um caminho P_v em $T^{(i-1)}$ correspondente a v ou em T_i , que continua sendo o mesmo

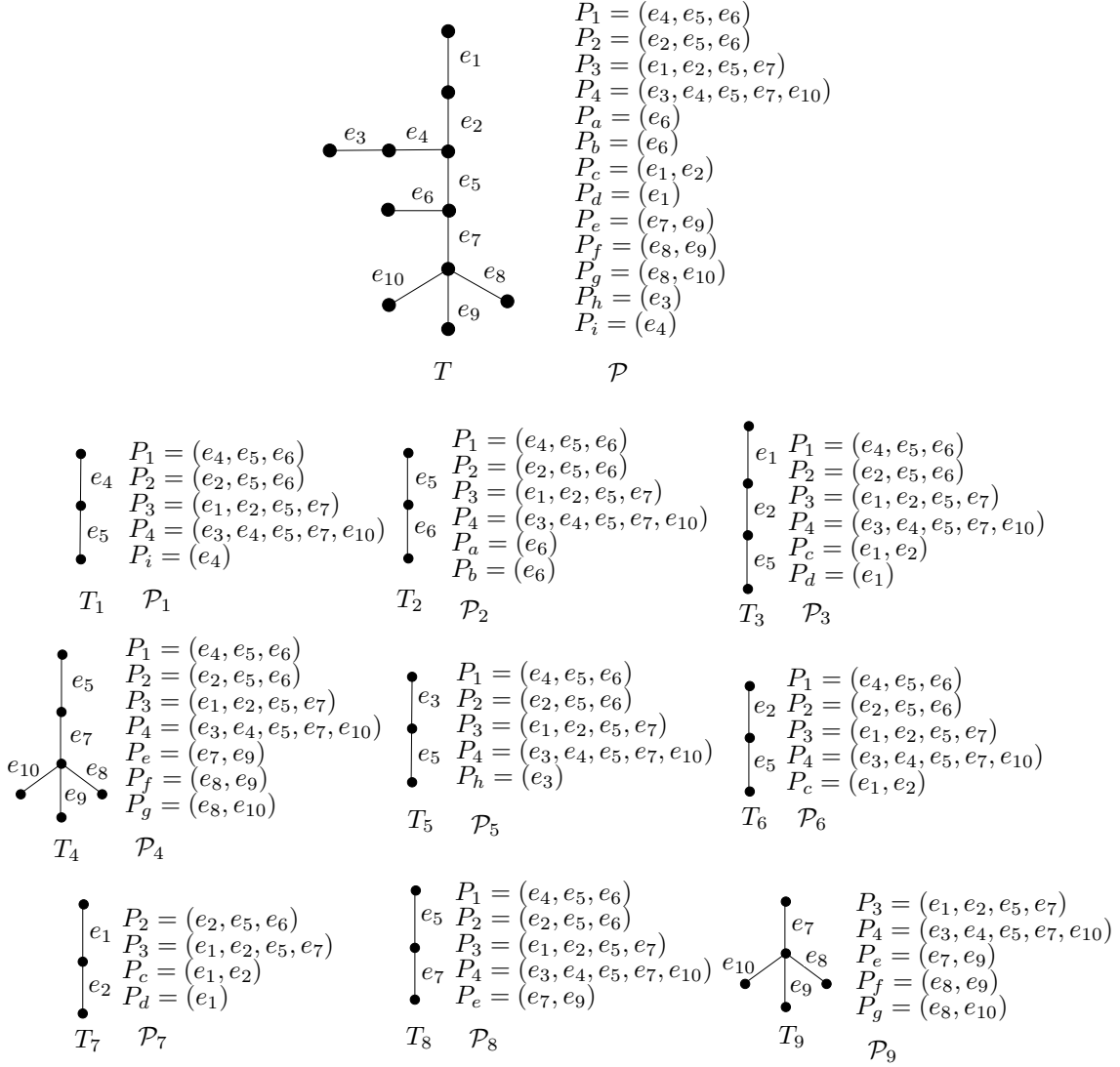


Figura 3.14: Árvores características para os grafos da figura 3.12.

em $T^{(i)}$. Agora, seja $v \in C$, v pode ser adjacente somente a vértices de C e, então, P_v é formado apenas pela aresta correspondente a C em $T^{(i)}$, ou ainda, v pode ser adjacente a vértices de $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{i-1}$ ou de V_i , mas nunca a vértices nos dois conjuntos, pois neste caso haveriam G_i 's antipodais com a mesma cor. No primeiro caso, existe um caminho P_v em $T^{(i-1)}$ correspondente a v e uma única clique em T_i contendo v , a clique C . Logo, em $T^{(i)}$, as cliques que contém v continuam formando um caminho. No outro caso, quando v é adjacente somente a vértices de V_i , existe um caminho correspondente a v em T_i e, em $T^{(i-1)}$, apenas a clique C contém v . Assim, as cliques que contém v continuam formando um caminho em $T^{(i)}$.

No caso 2, seja $A = \{C_1, \dots, C_k\}$ o conjunto de todas as cliques de $G[V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{i-1} \cup C]$ tal que cada clique está em algum G_j , $1 \leq j \leq i-1$,

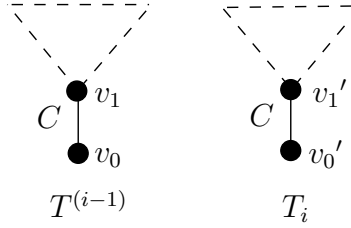


Figura 3.15: Árvores características para $G[V_1 \cup \dots \cup V_{i-1} \cup C]$ e para G_i , respectivamente.

e a sua vizinhança em C contém a vizinhança em C de toda clique de G_i .

Obviamente, a clique C está no conjunto A . Observe que, todo vértice v de C que é vizinho de alguém em V_i , e algum vértice nestas condições necessariamente existe, deve estar em toda clique de A , pela construção de A . E aí, $P_v = A$ em $T^{(i-1)}$. Logo, as arestas correspondentes às cliques em A formam um caminho em $T^{(i-1)}$.

Vamos construir uma nova árvore $T^{(i)}$ a partir de $T^{(i-1)}$ e de T_i , mostradas na figura 3.15, como segue.

Sejam as arestas $C = (v_0, v_1)$ e $C^* = (u_0, u_1)$ os extremos do caminho A em $T^{(i-1)}$ e $C = (w_0, w_1)$ a aresta-folha correspondente à clique C em T_i , como mostra a figura 3.16.

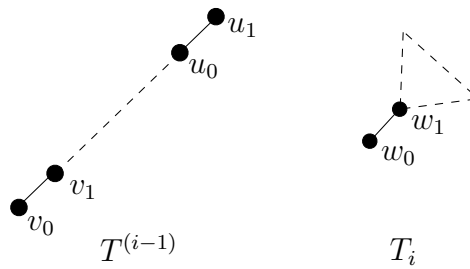


Figura 3.16: Árvores características para $G[C \cup V_1 \cup \dots \cup V_{i-1}]$ e para G_i descritas no caso 2.

Construímos $T^{(i)}$ identificando u_0 com w_0 e u_1 com w_1 a fim de unir as árvores $T^{(i-1)}$ e T_i , como mostra a figura 3.17.

Qualquer vértice do grafo que não está em C tem um caminho correspondente em $T^{(i-1)}$ ou em T_i e, conseqüentemente, o mesmo caminho corresponde à este vértice em $T^{(i)}$, conforme o caso anterior.

Analisaremos, agora, os vértices de C . Um vértice de C pode estar somente

em C , pode estar em \mathbb{G}_i ou estar somente em $\mathbb{G}_{V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_{i-1}}$. No último caso, não há problema já que v já tem um caminho P_v correspondente em $T^{(i-1)}$, que será o mesmo caminho em $T^{(i)}$. Se o vértice v está somente em C , P_v é formado apenas pela aresta (v_0, v_1) que é a correspondente a C em $T^{(i)}$. O único caso restante é quando o vértice v é vizinho de alguém em V_i . Neste caso, conforme verificado anteriormente, v deve estar em toda clique de A , basta, então, unir o caminho correspondente a v em T_i com as arestas do caminho A , tendo, assim, formado um novo caminho P_v em $T^{(i)}$ correspondente ao vértice v .

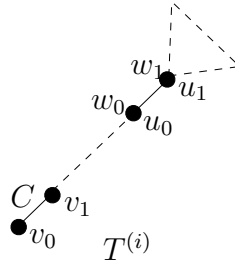


Figura 3.17: $T^{(i)}$ construída pelo processo descrito para o caso 2.

Cada aresta da árvore $T^{(i)}$ é uma aresta clique de $T^{(i-1)}$ ou de T_i e, portanto, corresponde à uma clique de $G[V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_i \cup C]$. Por outro lado, cada clique deste grafo corresponde à uma aresta em $T^{(i-1)}$ ou em T_i . Como arestas não são excluídas no processo, existe uma aresta em $T^{(i)}$ correspondente à cada clique. Portanto, $T^{(i)}$ é uma árvore característica UEH para o grafo $G[V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_i \cup C]$. Então, para cada cor, podemos construir uma árvore característica UEH onde C é uma aresta-folha.

Para construir uma árvore característica do grafo G , basta identificar as arestas $C_1 = (v_0, v_1)$ e $C_2 = (v'_0, v'_1)$ correspondentes a C na árvore característica dos G_i 's coloridos por uma cor e para os G_i 's coloridos pela outra, respectivamente, sempre identificando um vértice de grau um com o vértice extremo da outra aresta cujo grau é maior do que um, como mostra a figura 3.18.

Portanto, G é UEH. □

É válido mencionar que Monma e Wei [2] provaram teoremas semelhantes para outras classes de grafos. No caso dos grafos UE, o Teorema do Separador caracteriza os grafos simultaneamente UE e cordais. Antes de enunciarmos o teorema em questão serão necessárias algumas definições adicionais.

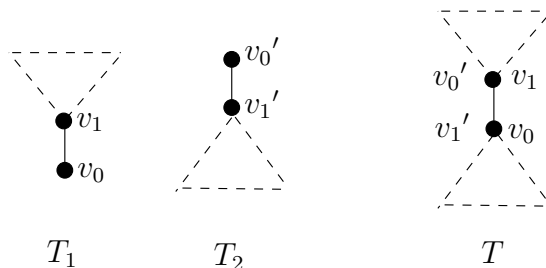


Figura 3.18: Árvore característica T construída a partir das árvores características T_1 e T_2 de cada cor.

Seja G um grafo e C um separador clique de G tal que C separa G em $G_i = G[V_i \cup C]$, $1 \leq i \leq s$. O conjunto dos subgrafos vizinhos de um vértice v de C é o conjunto dos G_i 's tais que V_i contém algum vizinho de v em G . Por exemplo, o conjunto dos subgrafos vizinhos do vértice $2 \in C$, na figura 3.12, é $\{G_2, G_3\}$.

Teorema 3.18 ([Monma e Wei [2]] Teorema do Separador para $UE \cap \text{CORDAL}$). *G é um grafo UE e cordal se e somente se cada G_i é simultaneamente UE e cordal e o grafo dos antipodais é 3-colorível de forma que, para cada $v \in C$, o conjunto dos subgrafos vizinhos de v está 2-colorido.*

3.5.3 Grafos UEH indecomponíveis

Nesta subseção apresentamos o teorema de Monma e Wei [2] que analisa os grafos UEH que não podem ser decompostos por separadores clique, isto é, que são indecomponíveis ou átomos.

Lema 3.19 (Monma e Wei [2]). *Todo átomo UEH é um grafo UEH-LOCAL.*

Demonstração. Seja G um átomo UEH e T uma árvore característica de G . Se T tiver um caminho com quatro vértices, a, b, c e d , como toda aresta de T corresponde à uma clique, a retirada da aresta (b, c) desconecta a árvore e a retirada da clique a ela correspondente em G desconecta G , contradizendo o fato de G ser átomo.

Portanto, toda árvore característica de G é uma estrela e, conseqüentemente, G é UEH-LOCAL. \square

A recíproca deste lema também não é verdadeira visto que o grafo G da figura 1.1 é UEH-LOCAL mas não é átomo.

Para reconhecer átomos UEH precisamos ainda da caracterização:

Teorema 3.20 (Teorema do átomo). *Se G é um átomo, então G é UEH se e somente se cada vértice de G está em no máximo duas cliques de G .*

Demonstração. (\implies) Seja G um átomo UEH e (\mathcal{P}, T) um representação UEH de G onde T é árvore característica. Pelo lema 3.19, T é uma estrela. Neste caso, cada caminho de \mathcal{P} passa por duas arestas de T , no máximo. Isto equivale a dizer que cada vértice de G está, no máximo, em duas cliques.

(\impliedby) Seja G um átomo onde cada vértice está em duas cliques no máximo. Podemos construir uma estrela T onde cada braço corresponde à uma clique e P_v , para cada $v \in V(G)$, é constituído das arestas correspondentes às cliques de G que contém v . Claramente, T é uma árvore característica de G e, pelo teorema 3.6, G é UEH. □

Corolário 3.21. *Átomos UEH podem ser reconhecidos eficientemente.*

Demonstração. Seja G um átomo. Reconhecer se G é grafo UEH é o mesmo que saber se, em G , todo vértice está contido no máximo em duas cliques. Isto pode ser feito em tempo polinomial, já que podemos gerar todas as cliques do G até a cota polinomial dada no teorema 3.5 verificando se cada vértice de G está no máximo em duas cliques. □

3.5.4 Problema do reconhecimento dos grafos UEH

Nesta seção, vamos reunir os resultados anteriores para decidir, dado um grafo $G = (V, E)$, se ele pertence ou não à classe de grafos UEH. A versão decisão deste problema é :

PROBLEMA DO RECONHECIMENTO DE GRAFOS UEH

Instância: Um grafo $G = (V, E)$.

Questão: O grafo G é UEH?

Baseado no teorema 3.13 e na decomposição por cliques, temos um algoritmo polinomial para resolver este problema.

Entrada: Um grafo $G = (V, E)$.

Saída: G é UEH ou G não é UEH.

- 1 Obter uma decomposição por cliques para G ;
- 2 Verificar se as folhas da árvore clique são grafos UEH;
- 3 Verificar, em cada separação obtida na decomposição por cliques, se o teorema 3.13 é satisfeito.

Algoritmo 3.1: Reconhecimento de grafos UEH

Teorema 3.22. *O algoritmo 3.1 tem complexidade de tempo polinomial.*

Demonstração. Seja $G = (V, E)$ um grafo. Denotamos por n o número de vértices, m o número de arestas e q o tamanho da família de cliques de G .

Como visto na subseção 3.5.1, o passo 1 pode ser feito em $O(nmq + (n + m)q)$.

O passo 2, pelo corolário 3.21, pode ser feito em $O(nq)$ por átomo e o número de átomos é da ordem do número de cliques do grafo. Logo, o passo 2 tem complexidade de tempo $O(nq^2)$.

Por último, verificar se o teorema 3.13 é satisfeito em cada separação obtida é testar no máximo q vezes se o grafo dos antipodais obtido naquele passo da decomposição é 2-colorível, o que pode ser feito em $O(m + n)$.

Como consequência da análise dos três passos do algoritmo e do fato de que, para a classe UEH, $q \leq \frac{3n-4}{2}$ podemos concluir que o algoritmo 3.1 é polinomial. \square

Como corolário do teorema 3.22 temos o seguinte resultado.

Corolário 3.23. *Grafos UEH podem ser reconhecidos eficientemente.*

Capítulo 4

Interseção das classes UE, UEH e Clique-Helly

Com o objetivo de estabelecer propriedades estruturais dos grafos UEH, analisamos a interseção entre as classes UEH e CLIQUE-HELLY, já que ambas são definidas em termos da propriedade Helly. Tal análise nos levou a concluir que UEH é uma subclasse própria de CLIQUE-HELLY. Como consequência, provamos também que todo grafo UEH é clique-Helly hereditário.

Outras questões naturais surgiram a partir dos resultados obtidos para a classe UEH. O estudo com a classe CLIQUE-HELLY teve continuidade com a análise da interseção com a classe UE que culminou com a demonstração de que todo grafo simultaneamente UE e clique-Helly é clique-Helly hereditário.

Na seção 4.2 estabelecemos a relação entre as classes UEH e CLIQUE-HELLY, respondendo com isto à questão natural sobre a presença da propriedade Helly na definição destas classes e na seção 4.3 apresentamos o resultado da análise feita sobre grafos UE que são clique-Helly.

4.1 Definições

Observamos que a família das cliques de um grafo não necessariamente satisfaz a propriedade Helly. Assim é natural considerar a classe CLIQUE-HELLY, que é a classe dos grafos cuja família de cliques satisfaz a propriedade Helly. A figura 4.1 mostra um exemplo de grafo que é clique-Helly e outro que não é clique-Helly.

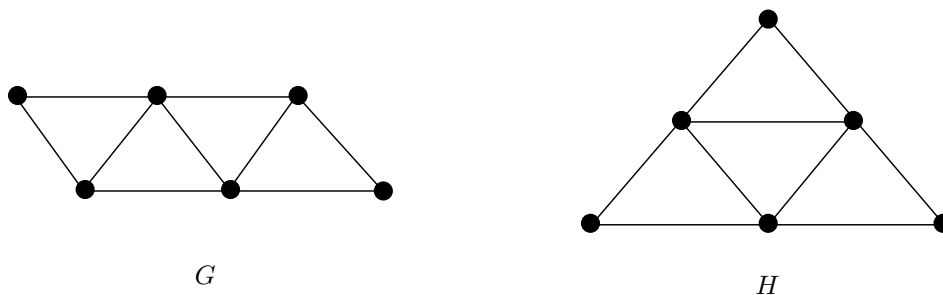


Figura 4.1: Um grafo G que é clique-Helly e o grafo de Hajós H que não é.

Um grafo é *clique-Helly hereditário* quando todos os seus subgrafos induzidos são clique-Helly. Um grafo clique-helly que não é clique-Helly hereditário é um grafo *clique-Helly não hereditário*.

Os problemas de reconhecimento das classes CLIQUE-HELLY e CLIQUE-HELLY HEREDITÁRIO são polinomiais. Um algoritmo polinomial de reconhecimento para a classe dos grafos clique-Helly foi apresentado em [16]. Este algoritmo utiliza a caracterização de grafos clique-Helly baseada no conceito de triângulo estendido. Um *triângulo* T em um grafo G é um completo com exatamente três vértices. O *triângulo estendido* de G relativo ao triângulo T é o subgrafo induzido em G pelos vértices adjacentes a pelo menos dois vértices de T .

Teorema 4.1 (Szwarcfiter [16]). *Um grafo G é clique-Helly se e somente se todo triângulo estendido de G contém um vértice universal.*

Um algoritmo polinomial de reconhecimento para a classe dos grafos clique-Helly hereditários foi apresentado em [17]. Este algoritmo usa uma família finita de subgrafos induzidos proibidos chamados *grafos oculares* mostrados na figura 4.2.

Teorema 4.2 (Prisner [17]). *Um grafo G é clique-Helly hereditário se e somente se G não contém nenhum dos quatro grafos mostrados na figura 4.2 como subgrafo induzido.*

Dado um grafo G e um triângulo $T = \{x_1, x_2, x_3\}$ dizemos que T *induz um grafo ocular* em G se existem vértices y_1, y_2 e y_3 tais que o vértice y_1 não é adjacente a x_1 mas é adjacente a x_2 e x_3 , o vértice y_2 não é adjacente a x_2 mas é adjacente a x_1 e a x_3 e o vértice y_3 não é adjacente a x_3 mas é adjacente a x_1 e a x_2 . O primeiro grafo mostrado na figura 4.2 é o grafo de Hajós e o triângulo que induz este grafo

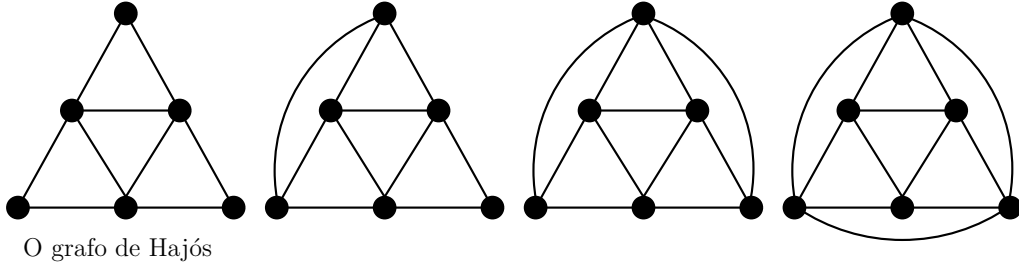


Figura 4.2: Subgrafos induzidos proibidos para grafos clique-Helly hereditários.

ocular em particular é conhecido como *triângulo central* do grafo de Hajós. Grafos oculares foram definidos em [18] como uma ferramenta para estudar a propriedade Helly.

Vale a pena ressaltar que, em [19], Lin e Szwarcfiter descrevem algoritmos com complexidade menor do que os citados anteriormente para reconhecer grafos clique-Helly e clique-Helly hereditários.

Como consequência dos teoremas 4.1 e 4.2 o problema do reconhecimento de grafos clique-Helly não hereditários é polinomial.

4.2 Inclusão entre as classes UEH e clique-Helly

O teorema a seguir mostra a relação de inclusão entre as classes UEH e CLIQUE-HELLY.

Teorema 4.3. *Todo grafo UEH é clique-Helly.*

Demonstração. Seja G um grafo UEH e (\mathcal{P}, T) uma representação UEH de G , onde T é uma árvore característica de G .

Vamos mostrar que a família \mathcal{C} das cliques de G satisfaz a propriedade Helly.

Seja \mathcal{C}' uma subfamília de \mathcal{C} cujos elementos se interseptom dois a dois.

Suponha que existe um caminho Q em T , não necessariamente em \mathcal{P} , que contém todas as arestas clique de \mathcal{C}' . Como as cliques de \mathcal{C}' se interseptom duas a duas, existe um caminho P_v em \mathcal{P} que passa pelas arestas que são a primeira e a última aresta clique de Q . Logo, v está em todas as cliques de \mathcal{C}' e a interseção de \mathcal{C}' é não vazia. Assim, \mathcal{C} satisfaz a propriedade Helly.

Se não existe um tal caminho Q em T , então existe uma estrela em T com, pelo menos, três braços e com uma aresta clique de \mathcal{C}' em cada subárvore de T induzida

pelo centro da estrela, um vizinho deste vértice e todos os vértices de T cujo caminho até o centro passa por este vizinho, como mostra a figura 4.3.

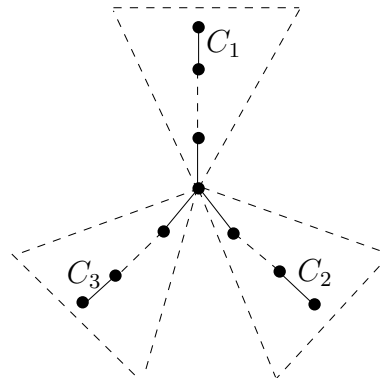


Figura 4.3: Estrutura da árvore T e das arestas clique de \mathcal{C}' .

Mas, como as cliques se interseptom duas a duas, existe um caminho P_{12} que passa pelas arestas clique C_1 e C_2 , um caminho P_{23} que passa por C_2 e C_3 e P_{13} passando por C_1 e C_3 . A subfamília de \mathcal{P} formada por P_{12} , P_{23} e P_{13} não satisfaz a propriedade Helly em arestas, o que contradiz o fato de T ser uma árvore característica.

Portanto, G é clique-Helly. □

A recíproca do teorema 4.3 não é verdadeira. O grafo da figura 4.4, por exemplo, é clique-Helly mas não é UEH, como visto na seção 3.1.

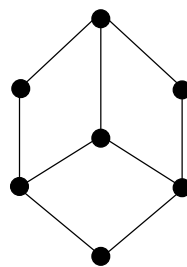


Figura 4.4: Exemplo de um grafo CLIQUE-HELLY que não é UEH.

Observe também que o teorema não pode ser estendido para a classe UE. O grafo de Hajós (figura 2.4), por exemplo, é UE mas sua família de cliques não satisfaz a propriedade Helly.

Também é natural indagar se existe alguma relação entre a classe UEH e as classes CLIQUE-HELLY HEREDITÁRIO e CLIQUE-HELLY NÃO HEREDITÁRIO. O teorema e

o corolário seguintes apresentam o resultado da análise da interseção entre estas classes.

Teorema 4.4. *Todo grafo UEH é clique-Helly hereditário.*

Demonstração. Seja G um grafo UEH. Como G é grafo de interseção, todo subgrafo induzido de G também é UEH.

Pelo teorema 4.3, todo grafo UEH é clique-Helly. Logo, todo subgrafo induzido de G é clique-Helly. Portanto, G é um grafo clique-Helly hereditário. \square

O corolário 4.5 segue imediatamente do teorema 4.4 e do fato de que as classes de grafos CLIQUE-HELLY HEREDITÁRIO e CLIQUE-HELLY NÃO HEREDITÁRIO são complementares em relação a classe CLIQUE-HELLY.

Corolário 4.5. *Não existe grafo simultaneamente UEH e clique-Helly não hereditário.*

4.3 Interseção das classes UE e clique-Helly

Como a classe UEH é uma subclasse de UE, é natural questionarmos a relação entre os grafos UE e os grafos clique-Helly. O teorema seguinte mostra que os grafos simultaneamente UE e clique-Helly são clique-Helly hereditários.

Teorema 4.6. *Todo grafo simultaneamente UE e clique-Helly é clique-Helly hereditário.*

Demonstração. Seja G um grafo simultaneamente UE e clique-Helly. Para mostrar que G é clique-Helly hereditário, provaremos que G não tem um grafo ocular (figura 4.2) como subgrafo induzido.

Inicialmente provaremos que o grafo G_3 mostrado na figura 4.5 não é UE.

Suponha que existe (\mathcal{P}, T) , uma representação UE do grafo G_3 . Note que os vértices 1, 3, 5 e 4 formam um C_4 sem cordas em G_3 e, pelo corolário 3.3, a representação deste ciclo em T é única. A figura 4.6 mostra tal representação.

Para que o vértice 2 seja adjacente a todos os vértices deste ciclo em G_3 , o caminho P_2 deve passar ou pelas arestas e_1 e e_3 ou pelas arestas e_2 e e_4 de T . Em

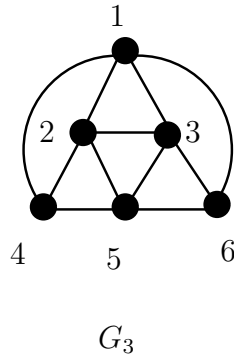


Figura 4.5: Grafo G_3 .

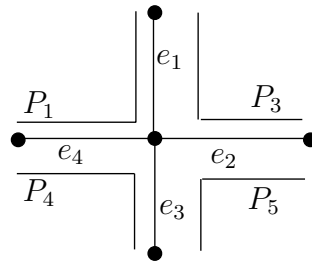


Figura 4.6: Representação do C_4 em T .

ambos os casos, não é possível determinar o caminho P_6 já que o vértice 6 é adjacente aos vértices 1, 3 e 5 mas não é adjacente nem ao vértice 2 nem ao vértice 4.

A fim de provar que todo grafo simultaneamente UE e clique-Helly é clique-Helly hereditário suponha, por absurdo, que existe um grafo UE e clique-Helly que não é clique-Helly hereditário. Seja (\mathcal{P}, T) uma representação UE de G . Pelas observações anteriores, G não tem o grafo G_3 como subgrafo induzido. Porém, G deve ter o grafo de Hajós, o grafo G_2 ou o grafo G_4 , mostrados na figura 4.7, como subgrafo induzido pois G não é clique-Helly hereditário.

Como G é clique-Helly, pelo teorema 4.1, cada um destes subgrafos está contido em um triângulo estendido que tem um vértice universal.

Analisando o caso do grafo G_2 , podemos usar o ciclo induzido 1, 3, 5, 4 para concluir que, na representação UE de G , existe a estrutura mostrada na figura 4.6. Como o vértice 6 não é adjacente aos vértices 1 e 4, o caminho P_6 não passa pelas arestas e_1 , e_3 e e_4 . Além disso, P_6 passa por alguma aresta do ramo de T que tem a aresta e_2 pois 6 é adjacente aos vértices 3 e 5. Como 2 é um vértice universal no ciclo e 2 e 6 não são adjacentes, o caminho P_2 deve passar pelas arestas e_1 e e_3 . Seja agora v um vértice universal do triângulo estendido que contém G_2 . Podemos

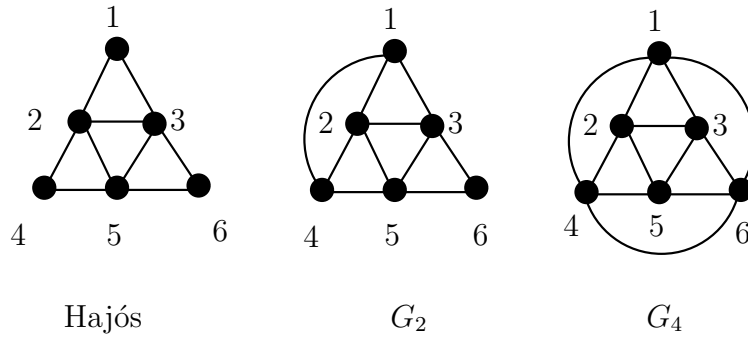


Figura 4.7: Grafo de Hajós, grafo G_2 e grafo G_4 .

afirmar que P_v tem que passar por e_2 já que v é adjacente ao vértice 6. E tem que passar por e_1 ou e_3 já que é adjacente ao vértice 2. Por este motivo, não é possível determinar o caminho P_v . Logo, G não tem o grafo G_2 como subgrafo induzido.

No caso do grafo G_4 , também deve existir a estrutura mostrada na figura 4.6 na representação UE de G . Os caminhos P_6 e P_2 devem ter arestas em comum com os vértices 1, 3, 5 e 4 mas não podem passar pela mesma aresta. Então um destes caminhos passa pelas arestas e_1 e e_3 e o outro passa pelas arestas e_2 e e_4 . Novamente, não é possível determinar o caminho correspondente ao vértice universal do triângulo estendido que contém o grafo G_4 visto que tal caminho deve ter arestas em comum com cada um dos caminhos P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 e P_6 .

Para a análise do grafo de Hajós, denotaremos por H o subgrafo induzido em G por este grafo e pelo vértice universal v do triângulo estendido que o contém. Usaremos o fato mencionado na seção 3.2 de que uma clique de G é clique aresta ou clique garra para provar que o grafo H não é UE.

Seja C a clique de H formada pelos vértices 2, 3, 5 e pelo vértice v . Note que H é um grafo cordal e, por este motivo, podemos usar a caracterização dos grafos $UE \cap \text{CORDAL}$ apresentada no teorema 3.18. A clique C é um separador clique de H porque C separa H em $H_i = [V_i \cup C]$, $1 \leq i \leq 3$, como mostra a figura 4.8.

Neste caso, o grafo dos antipodais é um triângulo e precisa de três cores para ser colorido. Porém, o conjunto dos subgrafos vizinhos do vértice v é o próprio triângulo e não pode estar 2-colorido. Logo, H não é um grafo UE.

Conseqüentemente, G não tem o grafo de Hajós, o grafo G_2 nem o grafo G_4 como

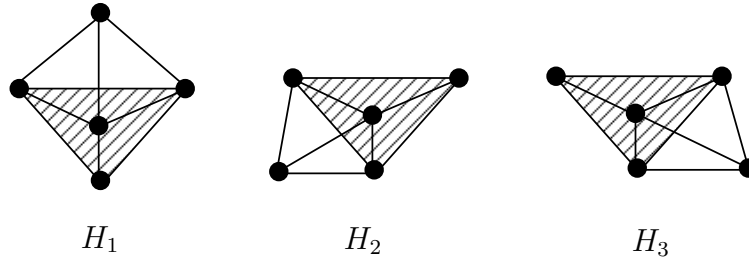


Figura 4.8: Grafos obtidos pela decomposição por separadores clique do grafo H .

subgrafo induzido. O que contradiz o fato de G não ser clique-Helly hereditário.

Portanto, não existe um grafo simultaneamente UE e clique-Helly que não é clique-Helly hereditário. \square

Vale ressaltar também que todo grafo simultaneamente UV e clique-Helly é clique-Helly hereditário. Pois é fácil provar que o subgrafo induzido pelos vértices do grafo de Hajós e pelo vértice universal v do triângulo estendido que o contém não é UV. Além disso, todos os outros grafos oculares não são cordais e, portanto, não são UV.

O diagrama da figura 4.9 ilustra os resultados sobre as relações de inclusão entre as classes de grafos já tratadas no diagrama da figura 2.7 e as classes CLIQUE-HELLY, CLIQUE-HELLY HEREDITÁRIO e CLIQUE-HELLY NÃO HEREDITÁRIO.

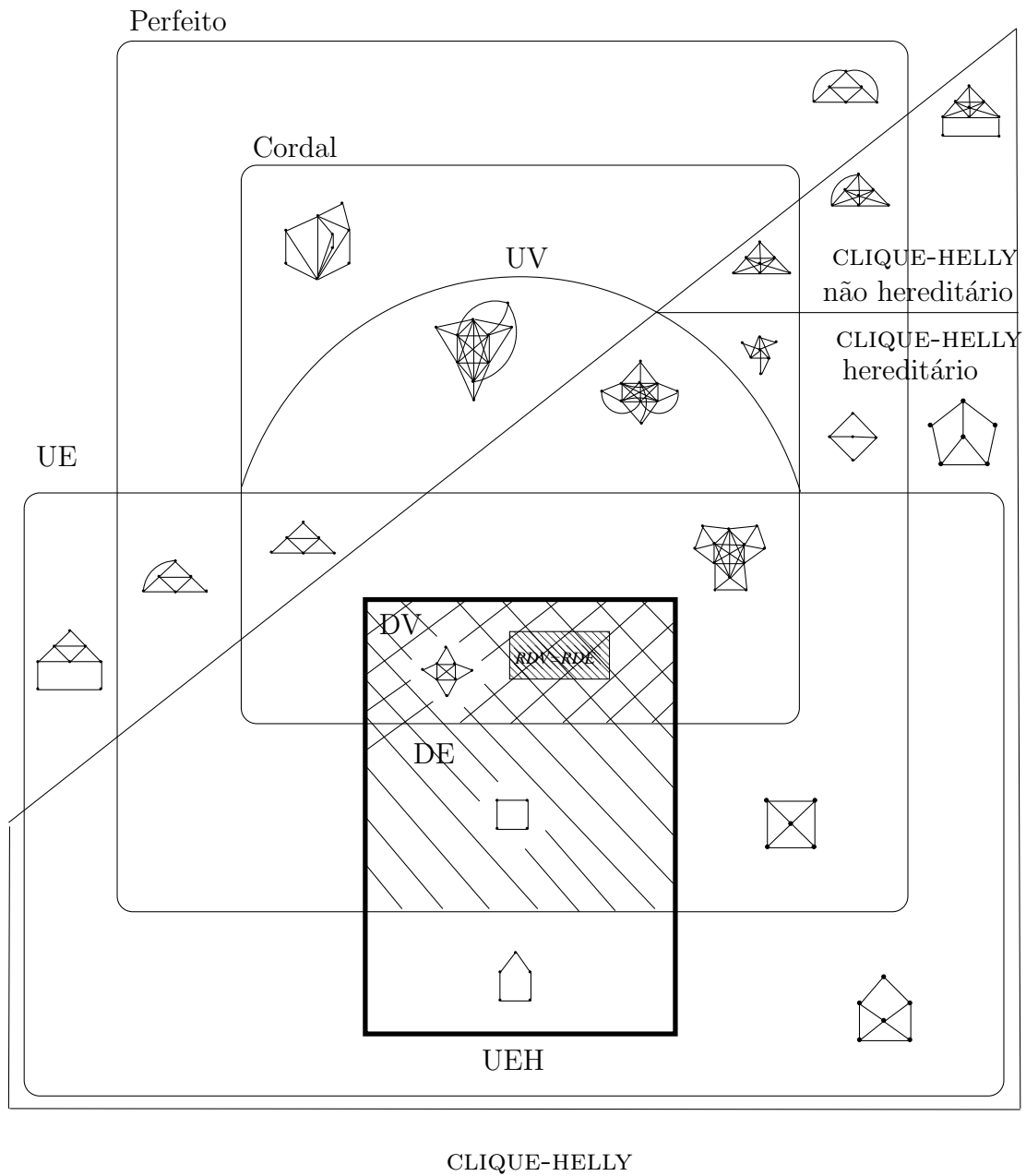


Figura 4.9: Diagrama das classes de grafos.

Capítulo 5

Sobre o problema sanduíche para grafos clique-Helly e subclasses

Problemas sanduíche generalizam problemas de reconhecimento de grafos. Dada uma propriedade π , o problema sanduíche associado tem dois grafos G_1 e G_2 como entrada, e pergunta-se por um grafo G , tal que G satisfaz a propriedade π e $E(G_1) \subseteq E(G) \subseteq E(G_2)$. Enquanto que no problema de reconhecimento $G_1 = G = G_2$.

Neste capítulo, mostramos que o problema sanduíche é NP-Completo para as classes clique-Helly, clique-Helly hereditário e clique-Helly não hereditário.

Inicialmente, a complexidade do problema sanduíche foi analisada para os grafos UEH. Porém, tal problema mostrou-se extremamente difícil e ainda encontra-se em aberto. O interesse em particular na classe dos grafos clique-Helly hereditário ocorreu pelo fato de que todo grafo UEH é clique-Helly hereditário, como mostra o teorema 4.4, e pela complexidade do problema do reconhecimento de grafos clique-Helly hereditário também ser polinomial. Além disso, a análise até então feita para tentar solucionar o problema sanduíche para grafos UEH baseava-se em subgrafos proibidos e a classe clique-Helly hereditário admite uma tal caracterização onde a família dos grafos proibidos tem apenas quatro elementos e todos estes grafos têm estruturas semelhantes. O estudo do problema sanduíche não pode ser estendido à classe UE, o que seria uma possibilidade natural, porque o problema do reconhecimento destes grafos é NP-Completo.

A estratégia usada na análise do problema sanduíche para a classe dos grafos clique-Helly hereditários mostrou-se eficiente também quando passamos a trabalhar

com o mesmo problema para as classes clique-Helly e clique-Helly não hereditário. Esta evolução natural dos estudos gerou teoremas interessantes também para estas duas classes de grafos.

Os resultados aqui mostrados foram apresentados no ICGT'05 [20] e o trabalho completo publicado em [21].

5.1 Definições

Considere os grafos $G_1 = (V, E_1)$ e $G_2 = (V, E_2)$ com $E_1 \subseteq E_2$. O grafo $G = (V, E)$ é um *grafo sanduíche* para o par G_1, G_2 se $E_1 \subseteq E \subseteq E_2$. Chamamos E_1 de *conjunto de arestas forçadas* e $E_2 \setminus E_1$ de *conjunto de arestas opcionais*. O PROBLEMA DE GRAFO SANDUÍCHE PARA A PROPRIEDADE Π é definido como segue [22].

PROBLEMA DE GRAFO SANDUÍCHE PARA A PROPRIEDADE Π

Instância: Conjunto de vértices V , conjunto de arestas forçadas E_1 , conjunto de arestas opcionais $E_2 \setminus E_1$.

Questão: Existe um grafo $G = (V, E)$ tal que $E_1 \subseteq E \subseteq E_2$ satisfazendo a propriedade Π ?

O problema de grafo sanduíche, ou simplesmente problema sanduíche, foi definido no contexto de Biologia Computacional e tem atraído muita atenção ultimamente em decorrência das suas aplicações e por ser uma generalização do problema de reconhecimento. O problema de reconhecimento para uma classe C é equivalente ao problema de grafo sanduíche no qual o conjunto de arestas forçadas $E_1 = E$, o conjunto de arestas opcionais $E_2 \setminus E_1 = \emptyset$, $G = (V, E)$ é o grafo que queremos reconhecer e a propriedade Π é *pertencer a classe C* .

O problema sanduíche para várias subclasses de grafos perfeitos foi estudado em [22].

No capítulo 4, mencionamos que um grafo é clique-Helly quando sua família de cliques satisfaz a propriedade Helly e que um grafo é clique-Helly hereditário quando todos os seus subgrafos induzidos são clique-Helly. No mesmo capítulo, definimos os grafos clique-Helly não hereditários como sendo os grafos clique-Helly

que não são clique-Helly hereditários e apresentamos caracterizações de grafos clique-Helly e Clique-Helly hereditários, a caracterização apresentada desta última classe é baseada nos grafos oculares mostrados na figura 4.2 . Neste capítulo usamos tais caracterizações para determinar a complexidade do problema sanduíche para grafos clique-Helly, clique-Helly hereditários e clique-Helly não hereditários.

As propriedades consideradas nos estudos do problema sanduíche não são ancestrais nem hereditárias para subgrafos induzidos por arestas pois, em caso contrário, as complexidades do problema de reconhecimento e do problema sanduíche coincidem. As classes de grafos consideradas neste capítulo satisfazem esta condição.

Na seção 5.2 provamos que o problema sanduíche para as classes de grafos clique-Helly hereditário e clique-Helly é NP-Completo; na seção 5.3 provamos que o problema sanduíche para grafos clique-Helly não hereditários é NP-Completo.

5.2 Problema sanduíche para grafos clique-Helly e clique-Helly hereditário

Provamos a NP-Completo do problema sanduíche para grafos clique-Helly hereditário usando uma redução do problema NP-Completo 3-SAT, definido a seguir.

3-SAT

Instância: Conjunto $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ de variáveis, uma coleção $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ de cláusulas sobre X tal que cada cláusula $c \in C$ tem 3 literais.

Questão: Existe uma atribuição verdade para X tal que cada cláusula em C tem pelo menos um literal verdadeiro?

A fim de reduzir o problema 3-SAT para o problema sanduíche para grafos clique-Helly hereditários precisamos construir uma instância deste último problema (V, E_1, E_2) em tempo polinomial a partir de uma instância genérica (X, C) de 3-SAT, tal que C é satisfatível se e somente se (V, E_1, E_2) admite um grafo sanduíche $G = (V, E)$ que é clique-Helly hereditário.

Teorema 5.1. *O problema sanduíche para grafos clique-Helly hereditários é NP-Completo.*

Demonstração. O problema sanduíche para grafos clique-Helly hereditários está em NP pois o certificado é um grafo sanduíche G que é clique-Helly hereditário e um algoritmo polinomial para o reconhecimento de grafos clique-Helly hereditários.

Seja (X, C) uma instância genérica de 3-SAT. Assumimos, sem perda de generalidade, que cada variável ocorre como literal positivo e como literal negativo. Para cada variável x_i , adicione a V quatro *vértices-variável* X_i, \bar{X}_i, a_i e b_i . Para cada cláusula $c_j = \{l_r, l_s, l_t\}$, onde $l_u, u \in \{r, s, t\}$, é um literal da variável x_u , adicione a V os *vértices-cláusula* y_{jr}, y_{js}, y_{jt} . O conjunto V contém $4n$ vértices-variável e $6m$ vértices-cláusula.

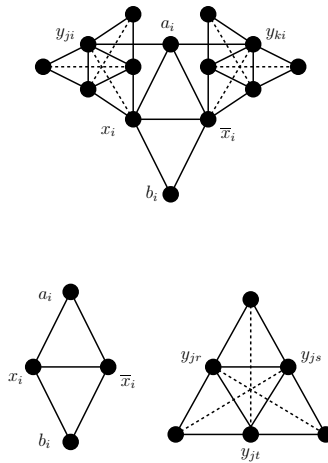


Figura 5.1: Grafo em G_2 induzido pelos vértices $X_i, \bar{X}_i, a_i, b_i, y_{ji}$ e y_{ki} ; diamante forçado por uma variável; grafo de Hajós forçado correspondente à cláusula c_j .

Observe a figura 5.1, onde representamos as arestas forçadas como arestas contínuas e as arestas opcionais como arestas pontilhadas. Cada tripla de vértices-cláusula correspondente a uma cláusula c_j induz um triângulo T_j em G_1 , chamado *triângulo-cláusula*. Os vértices X_i, \bar{X}_i, a_i e b_i induzem um diamante forçado D_i em G_1 chamado *diamante-variável*, composto por dois triângulos que compartilham a aresta (X_i, \bar{X}_i) .

Sejam y_{jr}, y_{js}, y_{jt} os vértices-cláusula de um triângulo-cláusula T_j . Se o vértice-cláusula $y_{ju}, u \in \{r, s, t\}$, corresponde a um literal positivo da variável x_u então adicione a aresta opcional (X_u, y_{ju}) e duas arestas forçadas $(X_u, y_{jw}),$ para $w \neq u$, e adicione a aresta forçada (a_u, y_{ju}) . Se o vértice-cláusula $y_{ju}, u \in \{r, s, t\}$, corresponde a um literal negativo da variável x_u então adicione a aresta opcional (\bar{X}_u, y_{ju})

e duas arestas forçadas (\overline{X}_u, y_{jw}) , para $w \neq u$, e (a_u, y_{ju}) . Assim, concluímos a construção de uma instância particular (V, E_1, E_2) do problema sanduíche.

Primeiro, mostraremos que, dado um grafo sanduíche G' de G_1 e G_2 , se G' contém um grafo ocular como subgrafo induzido então este grafo ocular é na verdade um grafo de Hajós. Além disso, mostraremos que existem apenas duas possibilidades para os triângulos produzidos.

Observe novamente a figura 5.1, note que se o triângulo $T = \{y_{jr}, y_{js}, y_{jt}\}$ formado pelos três vértices-cláusula de uma cláusula c_j induz um grafo ocular em G' , este subgrafo é na verdade um grafo de Hajós porque não existem arestas unindo dois vértices-variável de variáveis distintas. Chamaremos este subgrafo de *Hajós-cláusula*.

Note que se o triângulo $T = \{a_i, X_i, \overline{X}_i\}$ formado pelos três vértices-variável de uma variável x_i induz um grafo ocular em G' , este subgrafo é também um grafo de Hajós porque b_i tem grau 2 em G_2 e não existem arestas unindo dois vértices-cláusula de cláusulas distintas. Chamaremos este grafo de *Hajós-variável*.

As duas outras possibilidades para um triângulo T são: $T = \{b_i, X_i, \overline{X}_i\}$, para algum i , e como b_i não tem outros vizinhos então T não pode induzir um grafo ocular em G' ; $T = \{v, l, z\}$, onde v é um vértice-variável, l é um vértice-cláusula e z é vértice-variável ou vértice-cláusula e, neste caso, é fácil ver que T não faz parte de um grafo ocular em G' .

Pela construção, está claro que G_1 e G_2 contém, respectivamente, um Hajós-cláusula e um Hajós-variável. Consequentemente, os grafos G_1 e G_2 não são clique-Helly hereditários, pelo teorema 4.2.

Inicialmente, suponha que C é satisfatível e considere uma atribuição verdade para X tal que cada cláusula c_j em C tem pelo menos um literal verdadeiro. Para definir o grafo sanduíche G' , se x_i tem valor verdadeiro adicione, para cada cláusula c_j onde x_i ocorre como literal positivo, a aresta opcional (y_{ji}, X_i) a E ; se x_i tem valor falso adicione a E , para cada cláusula c_j onde x_i ocorre como literal negativo, a aresta opcional (y_{ji}, \overline{X}_i) . Note que no grafo sanduíche G' construído, para cada variável x_i , ou todas as arestas opcionais incidentes ao vértice X_i ou todas as arestas opcionais incidentes a \overline{X}_i estão presentes. Portanto, um Hajós-variável em G_2 não pode aparecer em G' . Note também que, em G' , para cada cláusula c_j , pelo menos

uma aresta opcional é adicionada ao Hajós-cláusula forçado correspondente. Por este motivo, um Hajós-cláusula em G_1 não aparece em G' .

Por outro lado, suponha que G' é um grafo sanduíche clique-Helly hereditário para a instância particular construída (V, E_1, E_2) . Logo, G' não contém qualquer configuração proibida mostrada na figura 4.2(grafos oculares). Pela construção da instância particular, G_1 contém um Hajós-cláusula forçado correspondente a cada cláusula. Por isso, em G' , para cada Hajós-cláusula forçado, deve-se ter pelo menos uma aresta opcional adicionada. Além disso, G' não pode ter, para uma variável x_i , uma aresta opcional incidente ao vértice X_i e uma aresta opcional incidente a \bar{X}_i presentes ao mesmo tempo, pois isto resultaria em um Hajós-variável. Portanto, podemos construir uma atribuição verdade tornando a variável x_i verdadeira se existe, em G' , uma aresta (y_{ji}, X_i) para alguma cláusula c_j onde x_i ocorre como literal positivo, e tornando-a falsa em caso contrário. \square

A figura 5.2 mostra um exemplo de uma instância construída no teorema 5.1. Representamos as arestas forçadas como arestas contínuas e as arestas opcionais como arestas pontilhadas.

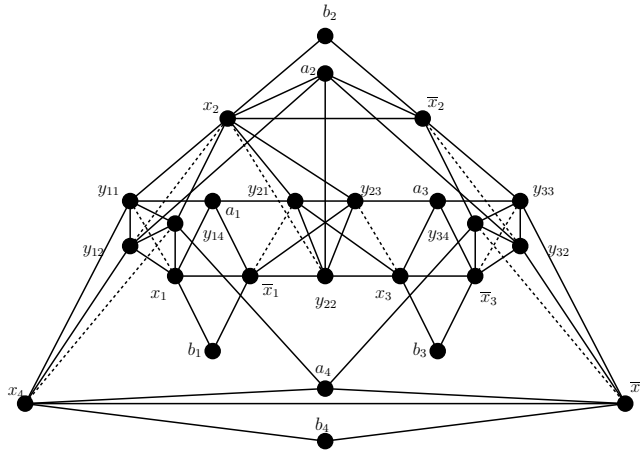


Figura 5.2: Exemplo da instância construída de (V, E_1, E_2) correspondente às cláusulas $\{x_1, x_2, x_4\}$, $\{\bar{x}_1, x_2, x_3\}$, $\{\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$

Analisando as propriedades da instância particular construída no teorema 5.1, provamos, no teorema 5.2 que o problema sanduíche para grafos clique-Helly é também NP-Completo.

Teorema 5.2. *O problema sanduíche para grafos clique-Helly é NP-Completo.*

Demonstração. O problema sanduíche para grafos clique-Helly está em NP porque um certificado é um grafo sanduíche G que é clique-Helly e um algoritmo polinomial para reconhecer grafos clique-Helly.

A fim de estabelecer a dificuldade do problema, utilizaremos a mesma redução do problema 3-SAT do teorema 5.1. É suficiente mostrar que todo grafo sanduíche de (V, E_1, E_2) que é clique-Helly também é clique-Helly hereditário. Por contradição, suponha que um grafo sanduíche G de (V, E_1, E_2) é clique-Helly mas não é clique-Helly hereditário. Pelo teorema 4.2, G tem, como subgrafo induzido, um dos grafos da figura 4.2 que denotaremos por H . Pelas observações feitas na demonstração do teorema 5.1, H é na verdade um Hajós-variável ou um Hajós-cláusula. Nos dois casos, existem dois vértices-variável v_1 e v_2 em H . Note que estes dois vértices-variável podem ser de uma mesma variável ou não. Como G é clique-Helly, pelo teorema 4.1, existe um vértice v adjacente a todo vértice de H . Lembre que todo vértice de V é um vértice-variável ou um vértice-cláusula. Como o grau de um vértice-cláusula é menor ou igual a 6 e, neste caso, seus seis vizinhos não induzem um grafo de Hajós, concluímos que v é um vértice-variável. Isto é uma contradição pois não existe um vértice-variável que não pertence a H e é adjacente a v_1 e a v_2 . □

5.3 Problema sanduíche para grafos clique-Helly não hereditários

A partir dos teoremas 5.1 e 5.2, não é possível concluir que o problema sanduíche para grafos clique-Helly não hereditários é NP-Completo. Alternativamente, o teorema 5.3 prova que o problema sanduíche para grafos clique-Helly não hereditários é NP-Completo por uma redução do problema NP-Completo SAT, definido a seguir.

SAT

Instância: Conjunto $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ de variáveis, uma coleção $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ de cláusulas sobre X .

Questão: Existe uma atribuição verdade para X tal que cada cláusula em C tem pelo menos um literal verdadeiro?

Teorema 5.3. *O problema sanduíche para grafos clique-Helly não hereditários é NP-Completo.*

Demonstração. O problema sanduíche para grafos clique-Helly não hereditários está em NP porque um certificado é um grafo sanduíche G que é clique-Helly não hereditário com algoritmos polinomiais para o reconhecimento de grafos clique-Helly e clique-Helly não hereditários.

Seja (X, C) uma instância genérica de SAT. Sem perda de generalidade, assumimos que cada variável ocorre como um literal negativo e como literal positivo.

Cada cláusula c_j corresponde a uma cópia H_j em G_1 do grafo de Hajós. Cada par de cláusulas distintas c_j e c_k correspondem a um vértice auxiliar d_{jk} adjacente em G_1 a dois vértices em cada um dos triângulos centrais correspondentes aos grafos de Hajós H_j e H_k , como mostrado na figura 5.3.

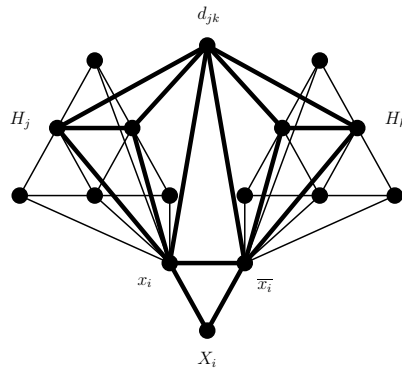


Figura 5.3: Em G_2 , o triângulo estendido relativo ao triângulo $\{x_i, \bar{x}_i, d_{jk}\}$ não tem vértice universal

Como cada variável x_i ocorre como literal positivo e como literal negativo, para cada variável, temos três vértices: o *vértice-literal* x_i representa a ocorrência da variável x_i como literal positivo, o *vértice-literal* \bar{x}_i representa a ocorrência da variável x_i como literal negativo, e o vértice X_i representa a variável. Estes três vértices induzem um *triângulo-variável* T_i em G_1 .

Concluimos a construção da instância particular (V, E_1, E_2) construindo o conjunto de arestas opcionais $E_2 \setminus E_1$. Seja l um literal tal que $l \in c_j$. Este vértice corresponde a um vértice-literal $l \in V$. Adicionamos a $E_2 \setminus E_1$ seis arestas opcionais, uma para cada vértice z do grafo de Hajós H_j . E acrescentamos, para cada vértice auxiliar d_{jk} , a aresta opcional (l, d_{jk}) a $E_2 \setminus E_1$.

Note que um grafo sanduíche de (V, E_1, E_2) não é um grafo clique-Helly hereditário porque, para cada cláusula, existe um grafos de Hajós induzido. Portanto, todo grafo sanduíche de (V, E_1, E_2) é clique-Helly não hereditário se e somente se for um grafo clique-Helly. Usaremos a caracterização de grafos clique-Helly do teorema 4.1 para dar continuidade à demonstração.

Inicialmente suponha que C é satisfatível e considere um atribuição verdade para X tal que cada cláusula c_i em C tem pelo menos um literal verdadeiro. Para definir o grafo sanduíche G , adicione a E_1 , para cada grafo de Hajós H_j correspondente a uma cláusula c_j , as arestas opcionais que fazem um dos literais verdadeiros da cláusula c_j adjacente a todo vértice de H_j , e adjacente a todo vértice d_{jk} . Seja L o conjunto dos literais verdadeiros escolhidos. Note que toda aresta opcional adicionada tem um de seus extremos em L . E para um triângulo estendido T' em G_1 com um vértice z , se a aresta (l, z) , $l \in L$, foi adicionada a E_1 para a construção de G podemos afirmar que, para todo vértice $z' \in V(T')$, a aresta (l, z') também foi adicionada a E_1 . Isto implica no fato de que todos os triângulos estendidos de G_1 têm vértices universais em G . Falta analisar os triângulos estendidos relativos aos triângulos de G que não estão em G_1 . Todo triângulo deste tipo contém exatamente um vértice-literal e este vértice é universal em relação ao triângulo estendido relativo a tal triângulo.

Por outro lado, suponha que G é um grafo sanduíche clique-Helly para a instância particular construída (V, E_1, E_2) . Então, todo triângulo estendido de G tem um vértice universal. Seja c_j uma cláusula, e considere H_j seu grafo de Hajós correspondente. Em G , o triângulo estendido relativo ao triângulo central de H_j tem um vértice universal. Este vértice universal é um vértice-literal correspondente a um literal da cláusula c_j . Para uma variável x_i , suponha que seu literal positivo ocorre em c_j e seu literal negativo ocorre em c_k . Se, em G , os vértices-literais x_i e \bar{x}_i são ambos vértices universais em relação aos grafos de Hajós correspondentes H_j e H_k , então o triângulo estendido relativo a x_i , \bar{x}_i , d_{jk} não tem vértice universal. Portanto, para cada variável x_i , se seu literal positivo é universal em relação ao grafo de Hajós associado a uma cláusula então atribua a x_i o valor verdadeiro, em caso contrário, atribua-lhe o valor falso. Assim, obtemos a atribuição verdade desejada. \square

A figura 5.4 mostra um exemplo de uma instância construída na prova do teorema 5.3. Representamos arestas forçadas como arestas contínuas e arestas opcionais

incidentes a d_{jk} como pontilhadas. Cada grafo de Hajós H_j é representado dentro de uma região limitada por uma curva fechada cinza e as seis arestas opcionais que tornam o literal $l \in c_j$ universal em relação ao grafo de Hajós H_j foram representadas por uma aresta única unindo l à região onde H_j está representado.

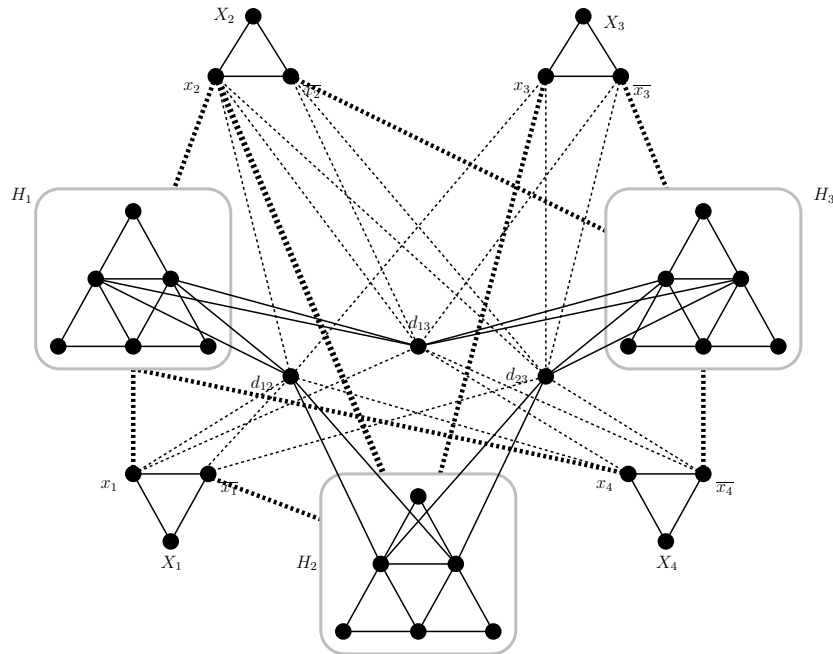


Figura 5.4: Exemplo da instância construída de (V, E_1, E_2) correspondente às cláusulas $\{x_1, x_2, x_4\}$, $\{\bar{x}_1, x_2, x_3\}$, $\{\bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4\}$.

Uma prova alternativa do teorema 5.3 consiste em usar a mesma instância construída na demonstração do teorema 5.2 acrescida de um grafo G' formado somente por arestas obrigatórias que seja clique-Helly e tenha um subgrafo induzido proibido para a classe CLIQUE-HELLY HEREDITÁRIO, como por exemplo o grafos de Hajós com um vértice universal.

Capítulo 6

Caracterização por subgrafos proibidos para a classe dos grafos simultaneamente UEH e SPLIT

Muitas classes de grafos são definidas ou admitem caracterizações baseadas em uma família de subgrafos induzidos proibidos, por exemplo, os cografos, os grafos de intervalo e os grafos cordais [1].

Uma classe \mathcal{G} admite uma caracterização por subgrafos proibidos se existe uma família $\mathcal{F}_{\mathcal{G}} = \{H : H \notin \mathcal{G} \text{ mas } H - v \in \mathcal{G} \text{ para todo } v \in V(H)\}$ tal que $G \in \mathcal{G}$ se e somente se G não tem um membro de $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}$ como subgrafo induzido.

Um grafo $G = (V, E)$ é SPLIT se existe uma partição $V = W \cup U$ do seu conjunto de vértices em um conjunto independente W e um completo U .

Os grafos SPLIT foram introduzidos por Földes e Hammer [23], onde a caracterização por subgrafos proibidos foi apresentada: G é SPLIT se e somente se G não contém $2K_2$, C_4 ou C_5 como subgrafo induzido.

Neste capítulo, apresentamos uma caracterização por subgrafos proibidos para os grafos UEH que são SPLIT. Restringimos os grafos UEH para os grafos que são obrigatoriamente SPLIT porque usamos o Teorema do Separador para caracterizá-los e, para isso, precisamos verificar se dois subgrafos G_i e G_j , obtidos pela partição de um grafo G por uma clique C , são antipodais. Esta verificação consiste em testar se uma das quatro condições de Lema 3.10 é satisfeita, o que pode ser extremamente difícil do ponto de vista estrutural. Porém, se soubermos que o grafo G é SPLIT,

somente a primeira das quatro condições poderá ocorrer e a análise consiste em estudar quando a única clique relevante C_i de G_i e a única relevante C_j de G_j são antipodais.

Os resultados deste capítulo foram apresentados no 2nd GRACO e publicados em [24].

6.1 Definições

Antes de enunciar os teoremas de caracterização por subgrafos proibidos para as classes mencionadas, apresentamos as definições de algumas famílias especiais de grafos SPLIT.

Um *sol completo ímpar* é um grafo com $2n$ vértices, para n ímpar e $n \geq 3$, cujo conjunto de vértices pode ser particionado em $W = \{w_1, \dots, w_n\}$ e $U = \{u_1, \dots, u_n\}$, tal que U é um conjunto completo, W é um conjunto independente e, para cada i , u_i é adjacente a w_j se e somente se $i = j$ ou $i \equiv j + 1 \pmod{n}$. Exemplos são mostrados na figura 6.1.

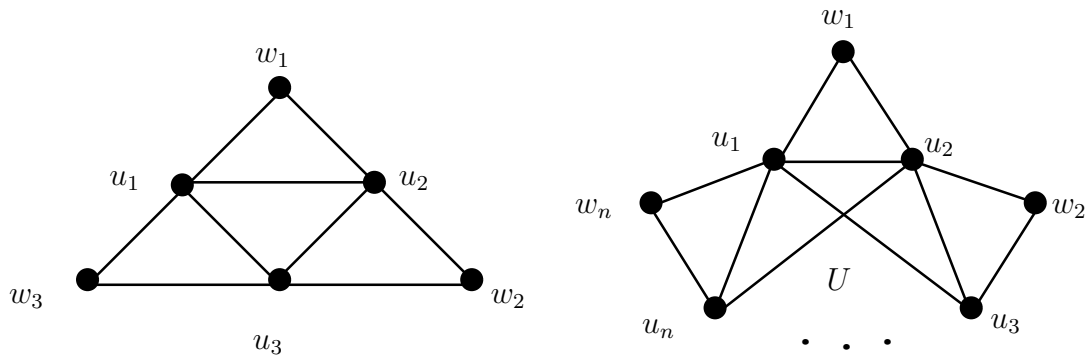


Figura 6.1: Exemplos de grafos sol completo onde $n = 3$ e $n = 2k + 1$, $k \geq 1$.

Um *palhaço* é um grafo com $2m + n - 1$ vértices, onde $m + n$ é ímpar, cujo conjunto de vértices pode ser particionado em $W = \{w_1, \dots, w_{m-1}\}$, $U = \{u_1, \dots, u_m\}$ e $B = \{b_1, \dots, b_n\}$, tal que U é um conjunto completo, $W \cup B$ é um conjunto independente e, para cada i , w_j é adjacente a u_i se e somente se $i = j$ ou $i = j + 1$, um vértice b_j é adjacente a u_i para todo $j \notin \{1, n\}$, b_1 é adjacente a cada vértice pertencente a $U \setminus \{u_1\}$ e b_n é adjacente a cada vértice em $U \setminus \{u_n\}$. Vértices de B são chamados *vértices chefe*. As figuras 6.2, 6.3, 6.4 mostram exemplos de grafos

palhaço.

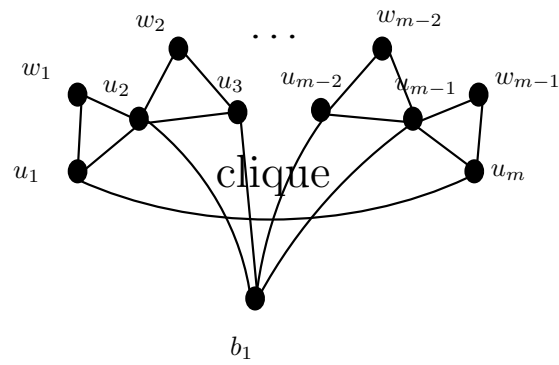


Figura 6.2: Grafo palhaço onde b_1 é o único vértice chefe.

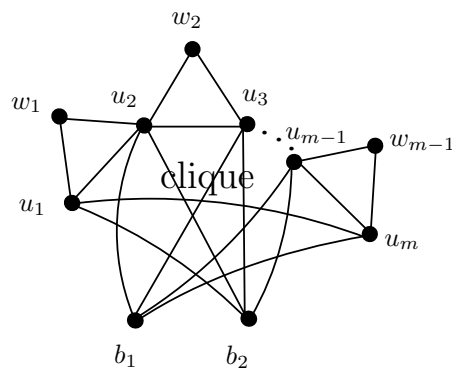


Figura 6.3: Grafo palhaço onde b_1 e b_2 são vértices chefe.

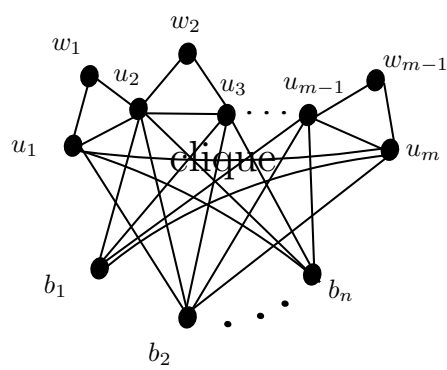


Figura 6.4: Grafo palhaço com n vértices chefe.

6.2 Subgrafos proibidos para grafos simultaneamente UEH e SPLIT

Nesta seção, apresentamos a caracterização por subgrafos proibidos para os grafos simultaneamente UEH e SPLIT.

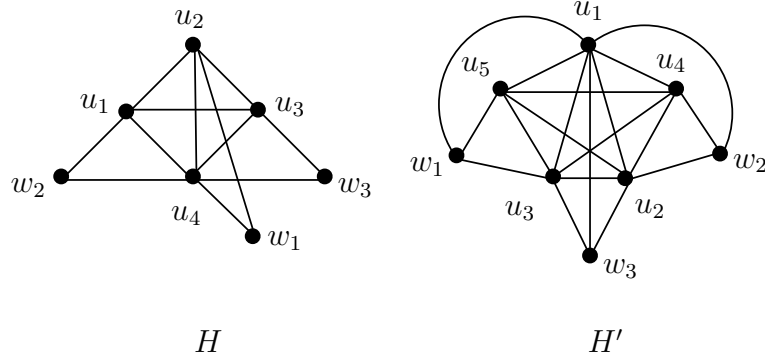


Figura 6.5: Grafos H e H' : subgrafos proibidos para grafos $\text{UEH} \cap \text{SPLIT}$.

Teorema 6.1. *Seja G um grafo SPLIT. G é um grafo UEH se e somente se G não contém um sol completo ímpar, o grafo H , o grafo H' ou um grafo palhaço com um ou dois vértices chefe como subgrafo induzido.*

Demonstração. Seja G um grafo SPLIT conexo com $V(G) = W \cup U$, onde $W = \{w_1, \dots, w_s\}$. Suponha que G não tem separador clique. Daí, $s = 0$ ou $s = 1$ e uma representação UEH para G pode ser facilmente obtida. Em outro caso, considere o separador clique $C = U$ de G . Note que se G tem um separador clique então U é um separador clique de G , não necessariamente o único. Nos outros casos, a análise é igual porque as interseções entre as cliques relevantes são sempre dentro de C .

Para o separador clique $C = U$ de G temos que cada subgrafo G_i de G tem apenas duas cliques, C e $C_i = \{w_i\} \cup N(w_i)$, cuja interseção é igual a $N(w_i) = C_i$. Como consequência deste fato temos que G_i é um grafo UEH e uma representação UEH para G_i pode ser facilmente obtida.

Suponha que G tem um grafo H , um grafo H' , um sol completo ímpar ou um grafo palhaço com um ou dois vértices chefe como subgrafo induzido. Para qualquer um dos referidos grafos é fácil ver que o grafo dos antipodais G_C tem um ciclo ímpar. Logo, G_C não é 2-colorível e, pelo teorema 3.13, o grafo G não é UEH. Portanto, se

G contém um sol completo ímpar, o grafo H , o grafo H' ou um grafo palhaço com um ou dois vértices chefe como subgrafo induzido então G não é UEH. Além disso, estes grafos são minimais SPLIT não UEH.

Agora, suponha que G é UEH. Pelo teorema 3.13, temos que o grafo dos antipodais G_C pode ser 2-colorido ou, equivalentemente, G_C não tem ciclo ímpar. Suponha que G_C tem um ciclo ímpar.

Inicialmente, considere que G_C tem um triângulo como subgrafo induzido. Neste caso, existem G_1 , G_2 e G_3 dois a dois antipodais. Daí $\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}_2 \neq \emptyset$, $\mathbb{C}_2 \cap \mathbb{C}_3 \neq \emptyset$ e $\mathbb{C}_1 \cap \mathbb{C}_3 \neq \emptyset$. Além disso, existe um vértice de U em \mathbb{C}_1 que não está em \mathbb{C}_2 e um outro vértice de \mathbb{C}_2 que não está em \mathbb{C}_1 . O mesmo ocorre entre \mathbb{C}_2 e \mathbb{C}_3 , e entre \mathbb{C}_1 e \mathbb{C}_3 . Conseqüentemente, o grafo de Hajós mostrado na figura 6.1 ou o grafo H da figura 6.5 é subgrafo induzido de G .

Suponha que G_C tem um ciclo induzido $C_G = (v_{G_1}, \dots, v_{G_q})$ com $q = 2k + 1$ e $k > 1$, como subgrafo.

Temos duas possibilidades a considerar: na primeira, $\mathbb{C}_i \cap \mathbb{C}_j = \emptyset$, para v_{G_i} e v_{G_j} não consecutivos em C_G ; na segunda, existem não consecutivos v_{G_i} e v_{G_j} tais que $\mathbb{C}_i \cap \mathbb{C}_j \neq \emptyset$.

No primeiro caso, a única interseção não vazia é entre \mathbb{C}_i 's correspondentes a G_i 's antipodais. Então G tem um sol completo ímpar como subgrafo induzido.

No outro caso, sejam G_i e G_j subgrafos de G tais que $\mathbb{C}_i \cap \mathbb{C}_j \neq \emptyset$ e v_{G_i} e v_{G_j} não são consecutivos em C_G . Note que G_i e G_j não podem ser antipodais entre si porque o ciclo C_G não pode ter cordas. Logo, $\mathbb{C}_i \subseteq \mathbb{C}_j$ ou $\mathbb{C}_j \subseteq \mathbb{C}_i$. Suponha, sem perda de generalidade, que $\mathbb{C}_i \supseteq \mathbb{C}_j$. Então $\mathbb{C}_i \cap \mathbb{C}_{j-1} \neq \emptyset$ e $\mathbb{C}_i \cap \mathbb{C}_{j+1} \neq \emptyset$. Além disso, se $\mathbb{C}_{j+1} \supseteq \mathbb{C}_i$ então $\mathbb{C}_{j+1} \supseteq \mathbb{C}_j$. Mas isto é uma contradição porque G_j e G_{j+1} são antipodais. Por um argumento simétrico, podemos concluir que \mathbb{C}_{j-1} não contém \mathbb{C}_i . Logo, $\mathbb{C}_{j+1} \subset \mathbb{C}_i$ e $\mathbb{C}_{j-1} \subset \mathbb{C}_i$. Esta análise prossegue e nos leva a concluir que $\mathbb{C}_i \supset \mathbb{C}_j$, para todo j tal que $j \neq i + 1$, $j \neq i - 1$.

Note que como $(v_{G_i}, v_{G_{i+1}})$ e $(v_{G_{i-1}}, v_{G_i})$ são arestas de C_G , existem vértices u_{i-1} e u_{i+1} em C tais que $u_{i-1} \in \mathbb{C}_{i-1} \setminus \mathbb{C}_i$ e $u_{i+1} \in \mathbb{C}_{i+1} \setminus \mathbb{C}_i$. Se não existir outro subgrafo G_k , $k \notin \{i - 1, i + 1\}$, para o qual $\mathbb{C}_k \cap \mathbb{C}_i \neq \emptyset$, o vértice w_i é um vértice chefe em G e o subgrafo induzido pelos vértices w_s pertencentes às cliques de G cujos vértices correspondentes formam um ciclo em G_C e pelos vértices de C adjacente a algum

w_s é um grafo palhaço com um vértice chefe.

Em outro caso, existe um subgrafo G_k , com $k \neq i$, antipodal com G_j , para algum $j \neq k, i$, então G_k deve ser tal que v_{G_k} e v_{G_i} aparecem consecutivamente no ciclo do grafo dos antipodais pois, em caso contrário, existe uma corda neste ciclo entre os vértices v_{G_k} e v_{G_i} . Logo, existe um vértice $v_{G_{i+1}}$ adjacente a v_{G_i} para o qual $v_{G_{i+1}} \in C_G$ e $\mathbb{C}_{i+1} \cap \mathbb{C}_j \neq \emptyset$ para algum j tal que $v_{G_j} \in C_G$ podemos notar que existe um vértice em $\mathbb{C}_i \setminus \mathbb{C}_{i+1}$ e existe um outro vértice em $\mathbb{C}_{i+1} \setminus \mathbb{C}_i$. Além disso, ambos os vértices não estão em qualquer outro \mathbb{C}_k tal que $\mathbb{C}_{i+1} \supset \mathbb{C}_k, \forall v_{G_k} \in C_G$ onde $k \notin \{i, i+2\}$. Observe que esta estrutura contém um grafo palhaço com dois vértices chefe.

Note que se existir outro vértice v_{G_l} adjacente a v_{G_i} ou adjacente a $v_{G_{i+1}}$ em C_G , tal que existe um G_k antipodal a G_l , e v_{G_l} e v_{G_k} são não adjacentes, então o vértice que está entre os dois outros vértices em C_G deve ser correspondente a uma clique C_j , onde o vértice w_j correspondente a C_j em G_C é adjacente a todos os vértices em U e tem-se, neste caso, um grafo palhaço com mais do que dois vértices chefe como subgrafo induzido de G . Porém, G_j não é antipodal com nenhum outro subgrafo, o que contradiz o fato de v_{G_j} pertencer a C_G .

Como consequência da análise anterior temos que se G é UEH então G não contém um sol completo ímpar, o grafo H , o grafo H' ou um grafo palhaço com um ou dois vértices chefe como subgrafo induzido. \square

O corolário 6.2 segue imediatamente da caracterização por subgrafos proibidos de grafos SPLIT e do teorema 6.1.

Corolário 6.2. *G é um grafo simultaneamente UEH e SPLIT se e somente se G não contém como subgrafo induzido $2K_2, C_4, C_5$, um sol completo ímpar, o grafo H , o grafo H' ou um grafo palhaço com um ou dois vértices chefe.*

Capítulo 7

Sobre o problema da coloração de vértices para grafos UEH

Diversas classes de grafos de interseção tem a particularidade de servir de modelo para situações práticas. Como mencionamos na introdução deste texto, Golubic e Jamison [3] apresentaram os grafos UE como modelo de conflitos de mensagens em redes de computadores. Os vértices da árvore T , onde (\mathcal{P}, T) é uma representação UE de um grafo G , representam as máquinas e os caminhos de \mathcal{P} são rotas de mensagens. Neste contexto, determinar o número cromático de um grafo UE consiste em estipular o menor tempo possível para que todas as mensagens cheguem ao destino sem que hajam conflitos.

Neste capítulo, mostramos que o problema de determinar o número cromático de um grafo UEH é NP-Completo, resolvendo um problema proposto por Monma e Wei, em [2].

Vale ressaltar que o problema de determinar o número cromático de um grafo UE é NP-Difícil [3] e o mesmo problema para a classe DE é polinomial [2].

Os resultados aqui mostrados foram apresentados no ISMP 2006 e publicados em [25].

7.1 Preliminares

No capítulo 3, mencionamos que a classe UEH-LOCAL é a subclasse da classe UEH composta pelos grafos que admitem uma (\mathcal{P}, T) representação UEH onde T é uma

estrela, isto é, uma árvore com um único vértice que não é folha.

O teorema 3.7 mostra que a classe UEH-LOCAL é exatamente a classe dos grafos linha de multigrafos sem triângulos. Assim, o problema da coloração de vértices de um grafo UEH-LOCAL é equivalente ao problema da coloração de arestas de um multigrafo sem triângulos.

Uma subclasse dos multigrafos sem triângulos é a classe dos multigrafos 3- regulares sem triângulos. Provamos neste capítulo que decidir se o índice cromático de um grafo nesta classe é três ou quatro é um problema NP-Completo.

Deste fato, podemos concluir que o problema da coloração de vértices para a classe UEH-LOCAL é NP-Completo. Conseqüentemente, o problema da coloração de vértices para a classe UEH também é NP-Completo.

7.2 NP-Completude do problema da coloração de vértices para grafos UEH

Neste seção, provamos que a coloração de arestas de um multigrafo 3-regular sem triângulos é um problema NP-Completo.

Inicialmente, vamos encontrar uma transformação polinomial da instância de um problema NP-Completo Π na instância do problema em questão.

O problema Π será o de determinar o índice cromático em grafos 3- regulares, problema que é NP-Completo como mostrado em [26].

Teorema 7.1. *O problema de determinar o índice cromático de um multigrafo 3-regular sem triângulos é NP-Completo.*

Demonstração. O problema está em NP porque é polinomial verificar, dado um multigrafo G , se uma dada atribuição de cores às arestas não atribui cores iguais a arestas adjacentes em G .

Seja G um grafo 3-regular. A partir de G , construiremos um multigrafo G' sem triângulos e 3-regular. Para tal, vamos analisar os possíveis triângulos de G . Seja v um vértice de G que pertence a algum triângulo. Por hipótese, todo vértice de G tem grau três. Logo, v pode estar em um único triângulo e, neste caso, os outros vértices do triângulo, que chamaremos de u e w , podem estar em um mesmo triângulo

diferente deste, e somente em um outro triângulo, já que também devem ter grau três, ou não estão em qualquer outro triângulo. Assim, temos as configurações A , B e C na figura 7.1.

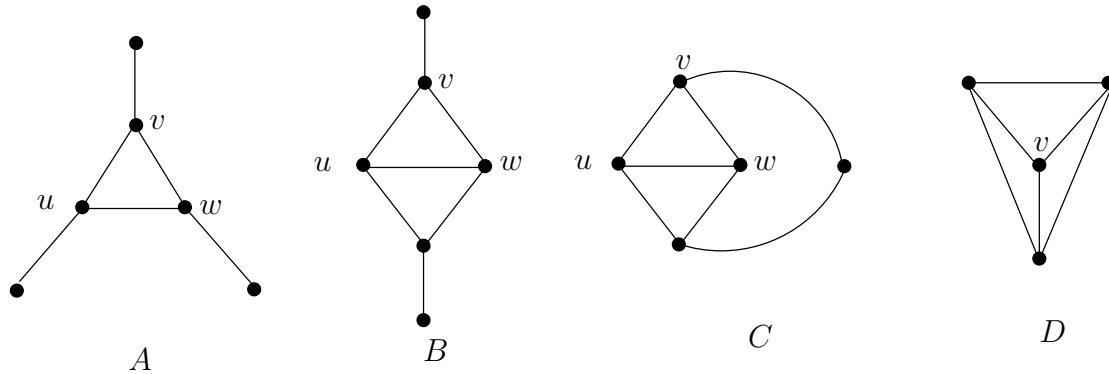


Figura 7.1: Possíveis configurações dos triângulos de G .

Em outro caso, o vértice v pode estar em dois triângulos diferentes e, neste caso, estes triângulos devem ter uma aresta em comum, obrigatoriamente. Ou seja, deve existir um outro vértice u que também está nos dois triângulos e é adjacente a v , o que fornece as configurações B e D da figura 7.1.

Resta, ainda, o caso em que v está em três triângulos diferentes. Neste caso, as três arestas incidentes a v devem estar, cada uma, em dois triângulos e G é o grafo da configuração D da figura 7.1.

Como v não pode estar em mais do que três triângulos, estes são os possíveis casos de existência de triângulos.

Definimos, a partir das possíveis configurações dos triângulos, a transformação de G em G' .

As transformações dos triângulos de G para a obtenção de G' são mostradas na figura 7.2, de acordo com a configuração do triângulo.

Entrada: Um grafo G 3-regular

Saída: Um multigrafo G' 3-regular sem triângulos

O algoritmo 7.1 mostra o processo para a transformação de G em G' . Este

- 1 $i:=1$;
- 2 $G':=G$;
- 3 procure um triângulo em G' ;
- 4 **enquanto** G' tiver triângulo **faça**
- 5 observe de que tipo de configuração é este triângulo ;
- 6 transforme o multigrafo G' substituindo a configuração X por X' de acordo com a figura 7.2 e mantendo os demais vértices e arestas ;
- 7 $i:=i+1$;
- 8 $G':=G_i$;
- 9 procure um triângulo em G' ;
- 10 **fim enquanto**

Algoritmo 7.1: Transformação de G em G'

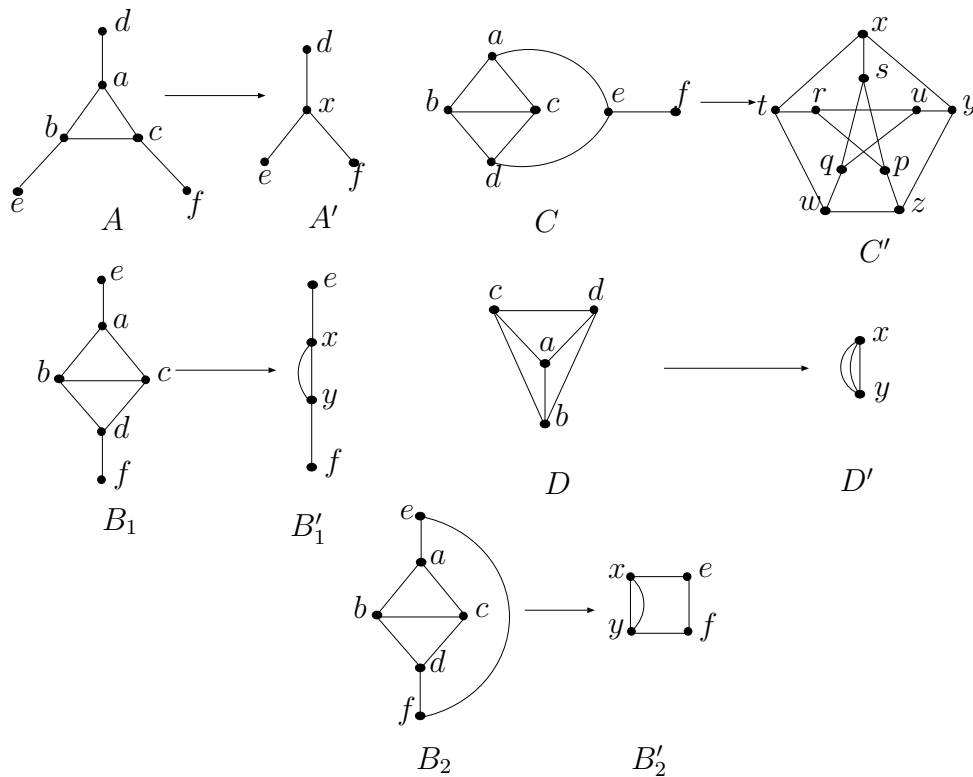


Figura 7.2: As transformações dos triângulos de G .

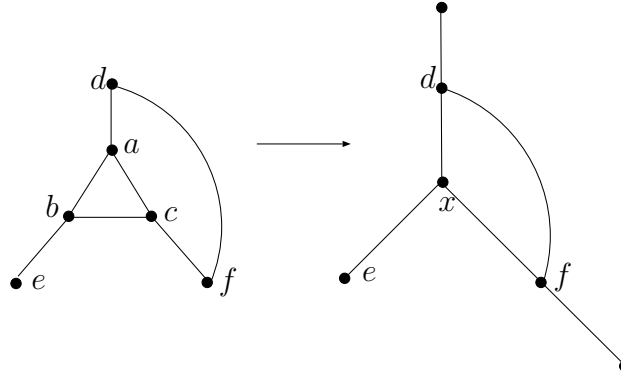


Figura 7.3: Caso especial da transformação da configuração A .

algoritmo termina porque, a cada execução do looping, o multigrafo G' tem, pelo menos, dois vértices a menos do que na iteração anterior ou é o próprio grafo C' .

Para a obtenção do multigrafo sem triângulos, o bloco de repetição é executado $O(n)$ vezes, pela argumentação anterior. Além disso, em cada execução, o único passo que não é constante é o de procurar um triângulo em um grafo, que tem complexidade $O(n^3)$. Logo, a complexidade do algoritmo 7.1 é $O(n^4)$.

Note que a transformação da configuração A pode gerar novos triângulos sempre do mesmo tipo, como mostra a figura 7.3. E nenhuma outra configuração tem esta característica. A configuração B foi dividida em dois casos. No primeiro caso, os vértices e e f são adjacentes e, no outro caso, não são.

Antes de prosseguirmos, observe que se G tiver um subgrafo induzido isomorfo a configuração C , podemos afirmar que o índice cromático de G é quatro já que este subgrafo tem índice cromático quatro e é fácil ver que a atribuição de cores da figura 7.4 utiliza o menor número possível de cores.

Falta provarmos que $\chi'(G) = 3$ se e somente se $\chi'(G') = 3$. Para tal, provaremos que o índice cromático de um grafo após uma iteração do algoritmo 7.1 é mantido.

Fato 7.2. $\chi'(G) = 3$ se e somente se $\chi'(G') = 3$.

Demonstração. Seja G_i um multigrafo com índice cromático três obtido de G após a i -ésima iteração do algoritmo 7.1. Observe que as possíveis configurações dos triângulos de G_i continuam sendo as mesmas de G .

Seja G_{i+1} o multigrafo obtido de G_i após uma iteração do algoritmo 7.1. Note que G_i tem pelo menos um triângulo pois, em caso contrário, não ocorreria a $(i+1)$ -ésima iteração do algoritmo.

Este triângulo não pode estar em uma configuração do tipo C já que, por hipótese, G_i tem índice cromático três. Então o triângulo está em uma configuração do tipo A , B_1 , B_2 ou é o próprio grafo D .

A coloração das arestas de G_{i+1} correspondentes as de G_i que não fazem parte da configuração que contém o triângulo em questão, é feita atribuindo-se a esta aresta a mesma cor da correspondente em G_i .

Para as arestas de G_{i+1} provenientes da transformação em G_i , a coloração segue de acordo com a configuração como mostrado na figura 7.5.

Observe que a coloração das arestas das configurações A , B , C e D está bem definida.

Estamos representando por 1, 2 e 3 as cores utilizadas para colorir tais arestas em G_i .

Desta forma, colorimos as arestas de G_{i+1} com três cores. Falta provarmos que arestas adjacentes de G_{i+1} não tem cores iguais.

Suponha que existam arestas adjacentes e_j e e_k em G_{i+1} coloridas com a mesma cor.

Se e_j e e_k são arestas correspondentes a arestas de G_i que não sofreram modificação, as arestas a elas correspondentes em G_i também são adjacentes e estão coloridas com a mesma cor, uma contradição. Agora, considere o caso em que e_j e e_k são correspondentes a arestas da configuração do triângulo encontrado na $(i+1)$ -ésima iteração do algoritmo.

Note que e_j e e_k não podem ser arestas em D' , A' , B'_1 ou B'_2 porque arestas obtidas a partir de uma transformação das estruturas de uma mesma configuração são coloridas de modo que arestas adjacentes não têm a mesma cor.

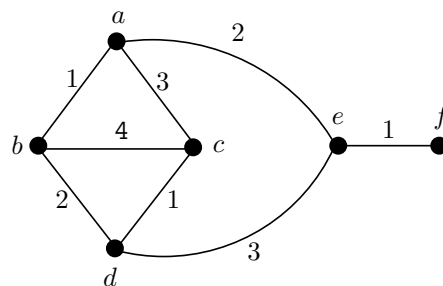


Figura 7.4: Coloração da configuração C .

Então podemos concluir que uma das arestas está em uma configuração A' , B'_1 ou B'_2 , digamos e_k , e a outra aresta corresponde a uma de G_i que não sofreu qualquer modificação. Neste caso, uma das extremidades de e_j é um vértice com grau menor que três em D' , A' , B'_1 ou B'_2 , como mostra a figura 7.5. Porém, todos os vértices de D' têm grau três. Logo, e_k está em uma configuração A' , B'_1 ou B'_2 . Além disso, como a aresta correspondente a e_j em G_i tem a mesma cor da aresta correspondente a e_k na configuração A , B_1 ou B_2 que tem uma extremidade comum com e_j , podemos concluir que a coloração de arestas de G_i não é própria, uma contradição.

Portanto, a coloração de arestas definida para G_{i+1} é própria e $\chi'(G_{i+1}) = 3$.

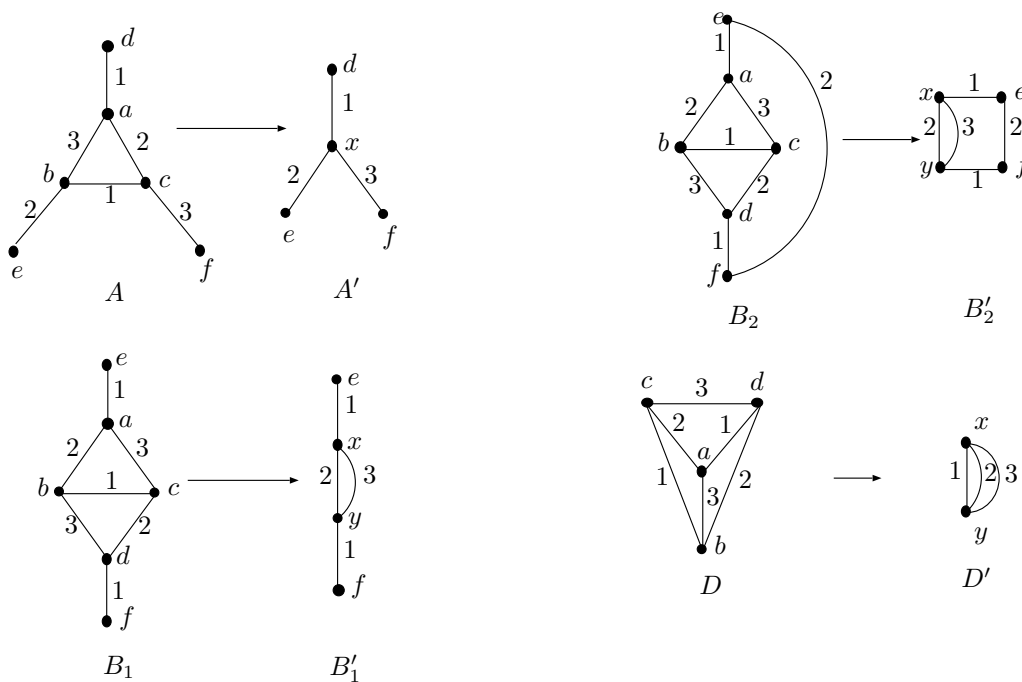


Figura 7.5: Coloração das configurações de G_{i+1} usando a coloração de G_i .

Para provarmos a outra parte da equivalência, considere que G_{i+1} é o grafo obtido de G_i após a $(i + 1)$ -ésima iteração do algoritmo 7.1, tal que $\chi'(G_{i+1}) = 3$.

Observe que G_i deve ter algum triângulo pois, em caso contrário, não haveria a $(i + 1)$ -ésima iteração do algoritmo. Além disso, este triângulo não pode estar em uma configuração do tipo C já que, neste caso, G_{i+1} teria a configuração C' , o que contradiz o fato de que $\chi'(G_{i+1}) = 3$.

Vamos colorir as arestas de G_i a partir da coloração das arestas de G_{i+1} como segue.

As arestas de G_i que não fazem parte da configuração do triângulo transformado

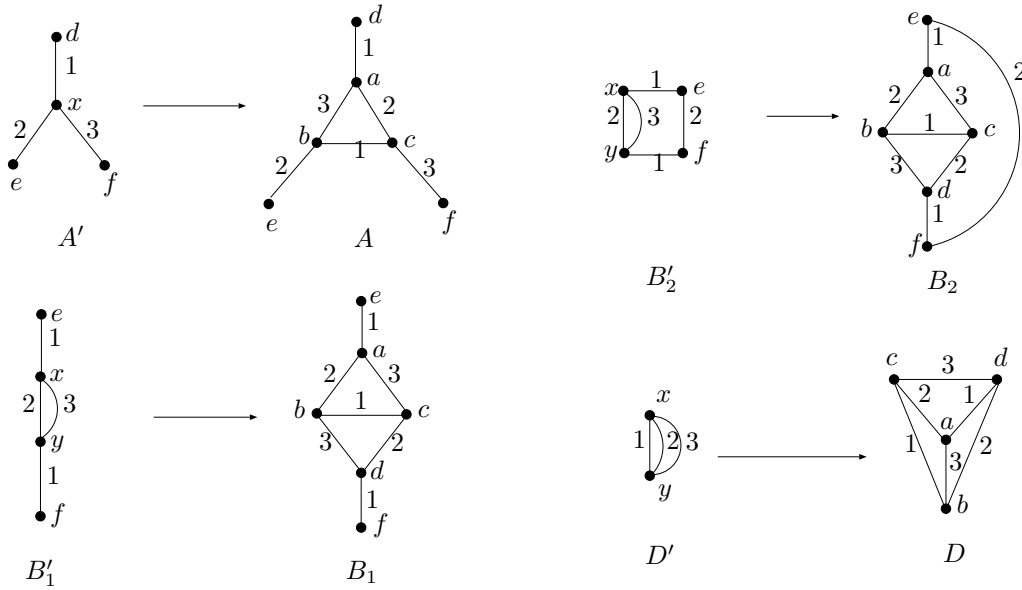


Figura 7.6: Coloração das possíveis configurações dos triângulos de G_i a partir de uma coloração para G_{i+1} .

na $(i + 1)$ -ésima iteração do algoritmo 7.1 recebem a mesma cor de sua aresta correspondente em G_{i+1} . Para as arestas de G_i da configuração transformada, a coloração é feita de acordo com a figura 7.6 e depende do tipo da configuração. As cores usadas para colorir as arestas de G_{i+1} são representadas por 1, 2 e 3.

Falta provar que a coloração de G_i assim definida é própria.

Suponha que existam arestas e_j e e_k adjacentes em G_i coloridas com a mesma cor.

Pelo menos uma destas arestas deve estar na configuração do triângulo transformada pelo algoritmo 7.1 pois, em caso contrário, as arestas a estas correspondentes em G_{i+1} seriam adjacentes e teriam a mesma cor.

Além disso, as arestas e_j e e_k não podem estar na configuração do triângulo encontrado nesta iteração do algoritmo já que a coloração de arestas mostrada na figura 7.6 não atribui a mesma cor a arestas adjacentes. E ainda, e_j ou e_k não podem ser arestas da configuração D pois, neste caso, não há aresta em G_i que não pertence à configuração.

Só resta o caso em que uma das arestas está em uma configuração A , B_1 ou B_2 , suponha que seja a aresta e_k , e a outra é uma aresta que não sofre qualquer modificação nesta iteração do algoritmo 7.1.

Se e_k é uma aresta em A , B_1 ou B_2 então uma das extremidades de e_k é uma

extremidade de e_j . Entretanto, a aresta correspondente a e_j em G_{i+1} tem uma extremidade comum com uma aresta e_l na configuração correspondente a A' , B'_1 ou B'_2 , pela construção mostrada na figura 7.6. Mas e_l está colorida com a mesma cor de e_k . Então, e_l e a aresta correspondente a e_j em G_{i+1} são adjacentes e têm a mesma cor, contradizendo a hipótese de que a coloração de arestas de G_{i+1} é própria.

Observe que o grau dos vértices de G_i é três e este grafo foi colorido com três cores. Logo, $\chi'(G_i) = 3$. □

Logo, o índice cromático do grafo após uma iteração do algoritmo 7.1 é mantido. □

Como consequência deste teorema, temos os seguintes resultados.

Corolário 7.3. *O problema da coloração de vértices para a classe de grafos UEH-LOCAL é NP-Completo.*

Demonstração. Sabe-se que o problema da coloração de vértices para a classe UEH-LOCAL é equivalente ao da coloração de arestas de multigrafos sem triângulos.

Segundo o teorema 7.1, o problema da coloração de arestas para a classe dos multigrafos 3-regulares sem triângulos é NP-Completo. Portanto, o mesmo problema também é NP-Completo para a superclasse dos multigrafos sem triângulos. O que nos leva a concluir que o problema da coloração de vértices para a classe UEH-LOCAL é NP-Completo. □

Finalmente, o corolário seguinte apresenta o resultado da análise da complexidade do problema da coloração de vértices para grafos UEH.

Corolário 7.4. *O problema da coloração de vértices para a classe de grafos UEH é NP-Completo.*

Demonstração. Pelo corolário 7.3, a coloração de vértices para a classe UEH-LOCAL é um problema NP-Completo. Logo, o mesmo problema é NP-Completo para qualquer superclasse desta. Portanto, o problema da coloração de vértices para a classe UEH é NP-Completo também. □

Capítulo 8

Coloração de cliques de grafos

UEH e de grafos UE

Uma coloração de cliques de um grafo G é uma coloração dos vértices de G tal que nenhuma clique de G com pelo menos dois vértices, está monocolorida. Determinar o número clique-cromático, isto é, o menor número para o qual o grafo G admite uma coloração de cliques com este número de cores, é um problema NP-difícil. Neste capítulo, mostramos que o número clique-cromático de um grafo UEH é no máximo 3 e a prova deste resultado é construtiva, o que fornece um algoritmo polinomial para colorir um grafo UEH com no máximo 3 cores. Além disso, apresentamos uma família de grafos UE tal que, para cada $c \geq 2$, existe um grafo desta família que não tem uma coloração de cliques com c cores.

Os resultados mostrados neste capítulo foram apresentados no IV LAGOS, em Puerto Varas, no Chile e publicados em [27].

8.1 Definições

Uma k -coloração de cliques de um grafo $G = (V, E)$ é uma função $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$, tal que para toda clique C de G , existem $u, v \in C$ para os quais $f(u) \neq f(v)$. Se tal função existe dizemos que G é k -clique-colorível. O número clique-cromático de G é o menor k para o qual G é k -clique-colorível. Uma coloração de cliques é uma k -coloração de cliques para algum k . Frequentemente, a coloração de cliques de um grafo G é definida com base em seu hipergrafo-clique. O hipergrafo-

clique $H(G)$ de um grafo G tem $V(G)$ como seu conjunto de vértices e o conjunto das cliques de G como seu conjunto de hiperarestas. Por definição, uma coloração de vértices de $H(G)$ é uma coloração de cliques de G . Dizemos que uma clique *tem a cor* i quando existe um vértice desta clique ao qual foi atribuída a cor i . A figura 8.1 mostra uma 2-coloração de cliques do grafo G .

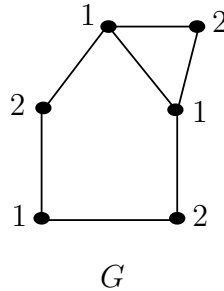


Figura 8.1: Coloração de cliques de G .

Coloração de cliques tem semelhanças com a coloração de vértices de um grafo. Por exemplo, para todo grafo G toda coloração de vértices é também uma coloração de cliques e, para G sem triângulos, uma coloração ótima coincide com uma k -coloração de cliques com o menor k possível. Mas também existem diferenças essenciais. Por exemplo, uma coloração de cliques de um grafo pode não ser uma coloração de cliques para seus subgrafos. Os subgrafos podem inclusive ter o número clique-cromático maior do que o grafo original.

Outra diferença é que um grafo 2-clique-colorível pode ter uma clique arbitrariamente grande. Na verdade, o problema de determinar se um grafo é 2-clique-colorível é NP-Difícil e permanece NP-Completo mesmo para grafos perfeitos [28].

Como o número cromático de grafos sem triângulo é ilimitado [29], podemos concluir que o número clique-cromático destes grafos também o é. Por outro lado, existe uma conjectura sobre a existência de uma constante c tal que todo grafo perfeito é c -clique-colorível [30]. Embora esta conjectura permaneça em aberto até o momento, muitas subclasses tiveram respostas positivas e a maioria dos resultados obtidos garantem que, para subclasses especiais de grafos perfeitos, c é igual a 2 ou 3. Não é difícil encontrar um limite para a classe de grafos cordais. De fato, todo grafo cordal é 2-clique-colorível.

8.2 Coloração de cliques de grafos UEH

Os grafos UEH podem ser caracterizados e reconhecidos em tempo polinomial baseando-se na teoria de separadores clique, como mencionado no capítulo 3. Além disso, os grafos UEH que não tem separadores clique são grafos linha de multigrafo sem triângulo. O teorema a seguir resolve o problema da coloração de cliques para átomos UEH.

Teorema 8.1 (Bacsó, et al. [30]). *Seja G um multigrafo sem triângulos e $H = L(G)$. O número clique-cromático de H é menor ou igual a três. E a igualdade é verificada exatamente quando G tem um ciclo ímpar onde toda aresta é uma clique.*

Em uma árvore característica, toda aresta não incidente a uma folha corresponde a um separador clique de um grafo G . Além disso, atribuir cores aos caminhos de uma representação UEH dada por uma árvore característica é o mesmo que atribuir cores aos vértices de G de forma que, para cada aresta da árvore característica existem dois caminhos que compartilham esta aresta e tem cores diferentes se e somente se a coloração de seus vértices correspondentes é uma coloração de cliques de G . Baseados nestes fatos, podemos provar que o número clique-cromático de grafos UEH é limitado.

A figura 8.2 mostra o exemplo de um grafo G com número clique-cromático igual a 3 porém, na decomposição por separadores clique, as folhas têm número clique-cromático igual a 2.

Teorema 8.2. *Se G é um grafo UEH, então G é 3-clique-colorível.*

Demonstração. Seja (\mathcal{P}, T) uma representação UEH de G onde T é uma árvore característica.

A prova é feita por indução no número de separadores clique de G . Se G não tem separadores clique então T é uma estrela e, aplicando o teorema 8.1 temos que G é 3-clique-colorível.

Suponha que T não é uma estrela. Então existe uma aresta $e = (v, w)$ em T tal que todos os vizinhos de w , exceto v , são folhas. Considere T' e T'' as subárvores de T tais que T' é induzida por v, w e todos os vértices de T que não são vizinhos de w , e T'' é a estrela induzida por v, w e seus vizinhos em T .

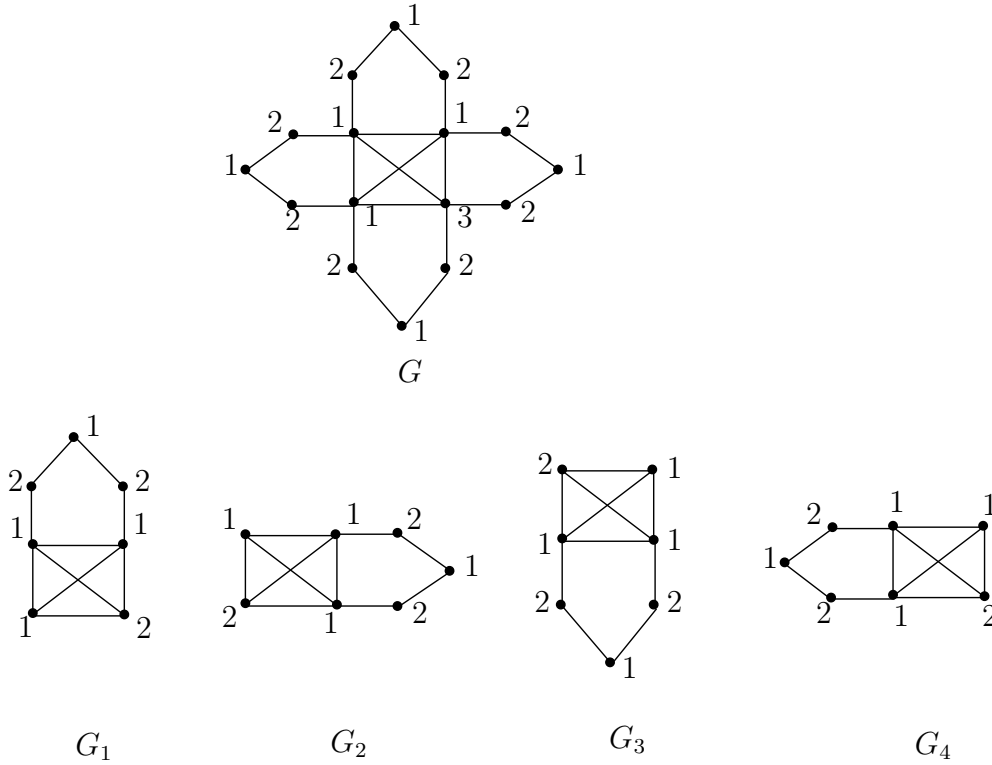


Figura 8.2: Coloração de cliques de G, G_1, G_2, G_3 e G_4 .

Sejam \mathcal{P}' e \mathcal{P}'' os subconjuntos de \mathcal{P} tais que P está em \mathcal{P}' se e somente se P passa por uma aresta de T' , e P está em \mathcal{P}'' se e somente se P passa por uma aresta de T'' . Sejam G' e G'' os grafos de interseção em arestas de \mathcal{P}' e de \mathcal{P}'' , respectivamente.

Pela hipótese de indução, G' é 3-clique-colorível. Considere uma tal atribuição de cores em $\{1, 2, 3\}$ dada aos vértices de G' . Isto fornece uma coloração parcial de \mathcal{P} onde os caminhos de \mathcal{P}'' que passam pela aresta e já estão coloridos. Observe que, como T'' é árvore característica, por cada aresta de $T'' - v$ passa pelo menos um caminho não colorido nesta coloração parcial, caso contrário esta aresta não corresponderia a uma clique maximal de G . Para estender esta coloração aos outros caminhos de \mathcal{P} , classificaremos as arestas de $T'' - e$; de acordo com esta coloração parcial:

Uma aresta é do *tipo 2* quando existem dois caminhos em \mathcal{P}'' , ambos passando por esta aresta, com cores diferentes; uma aresta é do *tipo 1* se todos os caminhos coloridos em \mathcal{P}'' que passam por esta aresta têm a mesma cor e existe pelo menos um caminho nestas condições; finalmente quando nenhum dos caminhos que passam por uma aresta está colorido, dizemos que esta aresta é do *tipo 0*. Seja $A_i, i \in \{0, 1, 2\}$,

o conjunto das arestas de $T'' - e$ do tipo i .

Para atribuir cores aos caminhos de \mathcal{P}'' que ainda não foram coloridos, procedemos da seguinte forma:

Passo 1: Enquanto $A_1 \neq \emptyset$ escolha uma aresta $a \in A_1$ e um caminho não colorido P_a em \mathcal{P}'' que passa por a . Suponha, sem perda de generalidade, que todos os caminhos coloridos passando por a têm cor 1. Se P_a passa apenas pela aresta a , então colorimos P_a com a cor 2, movemos a de A_1 para A_2 . Caso contrário, seja $P_a = (a, b)$. Se b é do tipo 2, seguimos o mesmo processo descrito no caso anterior. Se b é do tipo 0, fazemos o mesmo, porém também movendo b para A_1 . Finalmente, suponha que b é do tipo 1. Se todos os caminhos coloridos em \mathcal{P} que passam por b também têm cor 1, então atribuímos a cor 2 a P_a , senão atribuímos a cor restante a P_a e, em ambos os casos, movemos a e b para A_2 .

Passo 2: Se $A_0 \neq \emptyset$, escolhemos um caminho não colorido P que passa por uma aresta do tipo 0. Atribuímos a cor 1 a P , movemos todas as arestas de P para A_1 , e voltamos ao passo 1.

Passo 3: Se $A_0 = \emptyset$, então atribuímos a cor 1 a todos os caminhos ainda não coloridos.

Desta forma, todos os caminhos de \mathcal{P}'' e portanto, de \mathcal{P} estão coloridos.

Como $A_1 \cup A_0 = \emptyset$ quando o Passo 3 termina, para cada aresta de T'' , existem dois caminhos de cores diferentes que passam por esta aresta. Portanto, G é 3-clique-colorível. \square

8.3 Coloração de cliques de grafos UE

Para cada n , consideramos o grafo G_n definido pela representação UE (\mathcal{P}_n, S_n) , onde S_n é uma n -estrela e \mathcal{P}_n é o conjunto de todos os caminhos de duas arestas em S_n .

Desta forma, G_n tem exatamente $\binom{n}{2}$ vértices, cada um rotulado por um par não ordenado $ab = \{a, b\} \subseteq \{1, \dots, n\}$. Note que G_n tem $\binom{n}{3}$ cliques-garra, cada uma com 3 vértices (triângulos no grafo). Observe também que cada atribuição de cores aos vértices de G_n corresponde a uma atribuição de cores às arestas do grafo completo K_n . Se uma tal atribuição de cores é uma k -coloração de cliques

de G_n então ela corresponde a uma coloração de arestas de K_n sem triângulos monocromáticos.

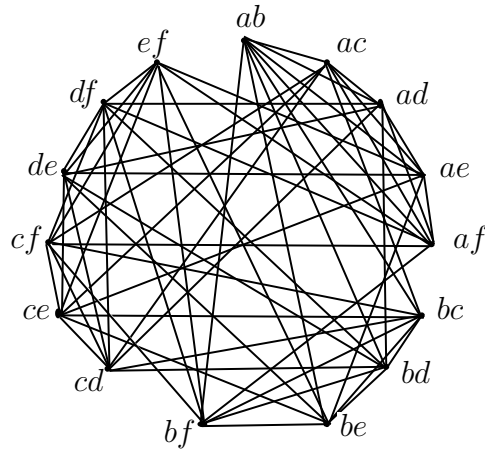


Figura 8.3: O grafo UE G_6 .

Na figura 8.3, como o número de Ramsey $r(3, 3) = 6$, temos que o grafo K_6 não tem uma coloração de arestas com 2 cores sem triângulos monocromáticos. Assim, G_6 não é 2-clique-colorível.

O número de Ramsey generalizado, $r(k_1, k_2, \dots, k_m)$, é o menor inteiro n tal que toda coloração de arestas (E_1, E_2, \dots, E_m) de K_n contém, para algum i , um subgrafo completo com k_i vértices, onde todas as arestas têm a cor i . O Teorema de Ramsey estabelece um limite superior para $r(k_1, k_2, \dots, k_m)$ [29]. Se considerarmos $n = r(3, 3, \dots, 3)$, para algum m , temos que G_n não tem uma m -clique-coloração.

Como consequência, temos:

Teorema 8.3. *Não existe uma constante c tal que todo grafo UE é c -clique-colorível.*

Uma questão natural, ainda não resolvida, é a de determinar a complexidade, para um dado k , do problema de decidir se existe uma k -clique-coloração para um grafo UE.

Capítulo 9

Considerações Finais

Neste trabalho objetivamos estabelecer propriedades estruturais dos grafos UEH como forma de contribuir para um melhor entendimento desta classe, produzindo caracterizações alternativas e resolvendo problemas de otimização restritos a ela. Inicialmente, buscávamos uma caracterização por subgrafos proibidos para grafos UEH e outras propriedades que levassem a um método de reconhecimento mais simples do que o já existente para estes grafos. As caracterizações conhecidas utilizam a árvore característica e o Teorema do Separador, sendo este último a base do algoritmo polinomial de reconhecimento da classe UEH, mostrado no capítulo 3. Porém, a utilização destes resultados exigem um estudo minucioso de conceitos específicos e de difícil manipulação, o que dificulta o acesso a esta classe de grafos. Além disso, um conhecimento profundo de propriedades estruturais da classe UEH levaria naturalmente à solução de problemas de otimização em aberto para ela.

Em relação a problemas estruturais, obtivemos uma caracterização por subgrafos proibidos de uma subclasse não trivial, $UEH \cap \text{SPLIT}$, da classe UEH [24], apresentada no capítulo 6; a prova de que a família de cliques de um grafo UEH satisfaz a propriedade Helly e, conseqüentemente, a prova de que todo grafo UEH é clique-Helly hereditário, apresentadas no capítulo 4; e a prova de que o problema sanduíche é NP-Completo para a superclasse dos grafos clique-Helly hereditários [21], apresentada no capítulo 5.

Quanto aos problemas de otimização, mostramos que o problema da coloração de vértices é NP-Completo [25], apresentado no capítulo 7; e apresentamos um limite superior para o número clique-cromático dos grafos UEH e, para a superclasse

UE, mostramos que não existe uma constante c tal que todo grafo desta classe é c -clique-colorível [27], apresentados no capítulo 8.

A caracterização por subgrafos proibidos para a classe $UEH \cap SPLIT$ é proveniente de uma análise das condições necessárias e suficientes para um dado grafo pertencer a classe UEH segundo o Teorema do Separador, que é facilitada pelo fato do grafo ser SPLIT. Neste sentido, é natural a continuidade da investigação com a análise dos demais casos de interseção entre as cliques relevantes dos subgrafos gerados por um separador clique de um grafo, para tentar encontrar uma caracterização por subgrafos proibidos para os grafos UEH em geral. Porém, estes casos de interseção que não ocorrem em grafos $UEH \cap SPLIT$ mostraram-se extremamente complexos no caso de grafos UEH em geral onde a estrutura é menos limitada. Consequentemente, uma caracterização por subgrafos proibidos para grafos UEH permanece em aberto. Dificuldade semelhante foi encontrada na análise de superclasses de $UEH \cap SPLIT$ que admitem estes outros casos de interseção entre as cliques relevantes.

Com o objetivo de determinar a complexidade do problema sanduíche para grafos UEH adotamos uma estratégia baseada na caracterização por subgrafos proibidos para grafos $UEH \cap SPLIT$ já encontrada. Essa estratégia mostrou-se bastante eficiente para a classe clique-Helly hereditário por esta admitir uma caracterização por subgrafos proibidos com características apropriadas. Este estudo evoluiu para as classes clique-Helly e clique-Helly não hereditário, porém, o problema sanduíche para grafos UEH ainda permanece em aberto.

Poucos problemas de otimização restritos às classes UE e UEH já foram abordados na literatura. Os problemas de encontrar a clique ponderada máxima [3] e o conjunto independente ponderado máximo [10] são polinomiais para grafos UE e, portanto, para grafos UEH. Todos os problemas já estabelecidos serem NP-difíceis para grafos UE, tais como coloração de vértices [3], cobertura por cliques [3] e conjunto dominante [31], decorrem do fato de o serem para grafos linha. O problema da coloração de vértices para grafos UEH que já estava proposto no artigo seminal de Monma e Wei foi resolvido aqui; os demais problemas de otimização continuam em aberto e são tópicos de interesse para investigações futuras.

Referências Bibliográficas

- [1] MCKEE, T., MCMORRIS, F., *Topics in Intersection Graph Theory*. SIAM: Philadelphia, 1999.
- [2] MONMA, C., WEI, V., “Intersection graphs of paths in a tree”, *Journal of Combinatorial Theory (Series B)*, v. 41, pp. 141–181, 1986.
- [3] GOLUMBIC, M., JAMISON, R., “The edge intersection graphs of paths in a tree”, *Journal of Combinatorial Theory (Series B)*, v. 38, pp. 8–22, 1985.
- [4] GOLUMBIC, M., JAMISON, R., “Edge and vertex intersection of paths in a tree”, *Discrete Mathematics*, v. 55, pp. 151–159, 1985.
- [5] GOLUMBIC, M., “Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs”. In: *Annals of Discrete Mathematics*, v. 57, North Holland, 2004.
- [6] SZWARCFITER, J., *Grafos e Algoritmos Computacionais*. Campus: Rio de Janeiro, 1986.
- [7] GAVRIL, F., “A recognition algorithm for the intersection graphs of paths in trees”, *Discrete Mathematics*, v. 23, pp. 211–217, 1978.
- [8] SYSŁO, M., *On characterizations of cycle graphs and on other families of intersection graphs*, Tech. Rep. N-40, Institute of Computer Science, University of Wrocław - Poland, 1978.
- [9] SYSŁO, M., “Triangulated edge intersection graphs of paths in a tree”, *Discrete Mathematics*, v. 55, pp. 217–220, 1985.
- [10] TARJAN, R., “Decomposition by clique separators”, *Discrete Mathematics*, v. 55, pp. 221–232, 1985.

- [11] GUTIERREZ, M., MEIDANIS, J., “Algebraic theory for the clique operator”, *Journal of the Brazilian Computer Society*, v. 7, pp. 53–64, 2001.
- [12] GOLUBIC, M., LIPSHTEYN, M., STERN, M., “Equivalences and the complete hierarchy of intersection graphs of paths in a tree”, *Discrete Applied Mathematics*, v. 156, pp. 3203–3215, 2008.
- [13] GAVRIL, F., “A recognition algorithm for the intersection graphs of directed paths in directed trees”, *Discrete Mathematics*, v. 13, pp. 237–249, 1975.
- [14] GAVRIL, F., “The intersection graphs of subtrees in trees are exactly the chordal graphs”, *Journal of Combinatorial Theory (Series B)*, v. 16, pp. 47–56, 1974.
- [15] TSUKIYAMA, S., IDE, M., ARIYOSHI, M., et al., “A new algorithm for generating all the maximal independent sets”, *SIAM Journal of Computing*, v. 6, pp. 505–517, 1977.
- [16] SZWARCFITER, J., “Recognizing clique-Helly graphs”, *Ars Combinatoria*, v. 45, pp. 29–32, 1997.
- [17] PRISNER, E., “Hereditary clique-Helly graphs”, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, v. 14, pp. 216–220, 1993.
- [18] WALLIS, W., ZHANG, G.-H., “On maximal clique irreducible graphs”, *Journal of Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing*, v. 8, pp. 187–193, 1990.
- [19] LIN, M., SZWARCFITER, J., “Faster recognition of clique-Helly and hereditary clique-Helly graphs”, *Information Processing Letters*, v. 103, pp. 40–43, 2007.
- [20] DOURADO, M., PETITO, P., TEIXEIRA, R., et al., “Helly property, clique graphs, complementary graph classes, and sandwich problems”. In: *Proceedings of the 7th International Colloquium on Graph Theory*, ICGT’05, 2005.

- [21] DOURADO, M., PETITO, P., TEIXEIRA, R., et al., “Helly property, clique graphs, complementary graph classes, and sandwich problems”, *Journal of the Brazilian Computer Society*, v. 14, pp. 45–52, 2008.
- [22] GOLUMBIC, M., KAPLAN, H., SHAMIR, R., “Graph sandwich problems”, *Journal of Algorithms*, v. 19, pp. 449–473, 1995.
- [23] FÖLDES, S., HAMMER, P., “Split graphs”, *Congressus Numerantium*, v. 19, pp. 311–315, 1977.
- [24] CERIOLO, M., PETITO, P., “Forbidden subgraph characterization of split graphs that are UEH”, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 19, pp. 305–311, 2005.
- [25] CERIOLO, M., PETITO, P., “The vertex coloring problem of UEH graphs”. In: *Proceedings of the 19th International Symposium on Mathematical Programming*, p. 134, ISMP, 2006.
- [26] HOYLER, I., “The NP-completeness of edge-coloring”, *SIAM Journal of Computing*, v. 10, pp. 718–720, 1981.
- [27] CERIOLO, M., PETITO, P., “Clique-coloring UE and UEH graphs”, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 30, pp. 201–206, 2008.
- [28] KRATOCHVÍL, J., TUZA, Z., “On the complexity of bicoloring clique hypergraphs of graphs”, *Journal of Algorithms*, v. 45, pp. 40–54, 2002.
- [29] BONDY, J., MURTY, U., *Graph Theory with Applications*. Macmillan: London, 1976.
- [30] BACSÓ, G., GRAVIER, S., GYÁRFÁS, A., et al., “Coloring the maximal cliques of graphs”, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 17, pp. 361–376, 2004.
- [31] BRANDSTÄDT, A., LE, V., SZYMCZAK, T., et al., “Information System on Graph Class Inclusions v2.0”, *Disponível em: <http://www.teo.informatik.uni-rostock.de/isgci>*, Acesso em: 20 ago. 2009.