Introdução aos Derivativos Financeiros

Ernesto Prado Lopes
Lúcio José Machado Cançado

Setembro de 2009

1 Introdução

De maneira geral, uma opção é um ativo financeiro cujo valor em um determinado instante $t \leq T$ é uma função $h(S_t)$ do preço à vista S_t de um outro ativo financeiro. As opções mais comuns são direitos de compra ou venda até uma determinada data, ou em uma determinada data, de ativos tais como: uma fração do capital de uma companhia aberta[1], títulos de renda fixa emitidos por governos ou corporações, ou até mesmo uma opção, que são as *opções sobre opções*.

Um opção, sendo ela própria um ativo financeiro, possui um preço de mercado. A questão a ser respondida é: este preço em qualquer instante antes do vencimento sobrevaloriza ou subvaloriza o derivativo em relação ao seu "*preço correto*"?

2 Opções Européias e Americanas: Noções Gerais

2.1 Definições e Propriedades Básicas

As opções mais simples e também as mais comuns e antigas são as Européias e as Americanas, que são definidas abaixo.

[1]Uma ação ou *share* de uma companhia que seja listada em uma instituição tal como a Bovespa ou a NYSE.

Definição 2.1. *Uma opção de compra (venda)* Européia *dá a quem a possui o direito de comprar (vender) um determinado ativo financeiro em um determinado instante T, denominado* vencimento*, por um preço K determinado, chamado* preço de exercício*.*

Definição 2.2. *Uma opção de compra (venda)* Americana *é um ativo financeiro que dá a quem o possui o direito de comprar (vender) um determinado ativo em qualquer instante t até um determinado instante de vencimento $T \geq t$, por um preço de exercício K.*

Opções de compra recebem o nome de *call*, enquanto as de venda são chamadas de *put*. O ativo ao qual se refere a opção é chamado *subjacente* ou *base*. O *valor pago* por um ativo financeiro no momento de sua liquidação é o número de unidades de um ativo que se toma como numerário[2] que se obtém através do exercício dos direitos a ele inerentes no instante t. Uma ação, por exemplo, paga em t, o valor S_t, seu preço à vista acrescido de dividendos, se houver. Assim sendo, o valor pago por uma call Européia é:

$$h(S_T) = \max\{S_T - K, 0\}. \tag{2.1}$$

E o valor pago por uma put Européia é:

$$h(S_T) = \max\{K - S_T, 0\}. \tag{2.2}$$

No caso de opções Americanas, o valor pago por uma um call é:

$$h(S_t) = \max\{S_t - K, 0\}, \quad 0 \leq t \leq T, \tag{2.3}$$

enquanto que valor pago por uma put é:

$$h(S_t) = \max\{K - S_t, 0\}, \quad 0 \leq t \leq T. \tag{2.4}$$

Seja $\tau = T - t$, o tempo restante até o vencimento. Os preços $C_t^E(S_t, \tau, K)$ de uma call Européia, $P_t^E(S_t, \tau, K)$ de uma put Européia, $C_t^A(S_t, \tau, K)$ de uma call Americana e $P_t^A(S_t, \tau, K)$ de uma put Americana no instante t recebem o nome de *prêmio*. É comum referir-se ao vendedor de uma opção como o *lançador da opção*.

[2]O que na prática é a própria unidade monetária do país no qual o ativo está sendo negociado.

2.2 Limites superiores e inferiores para os preços de opções

As opções, sendo ativos de responsabilidade limitada, tem-se, para todo $0 \leq t \leq T$:

$$C_t^E(S_t, \tau, K),\ C_t^A(S_t, \tau, K),\ P_t^E(S_t, \tau, K) \text{ e } P_t^A(S_t, \tau, K) \geq 0. \tag{2.5}$$

Como opções Americanas dão direito ao exercício antecipado, possuem preço de mercado maior do que o das Européias com mesmo vencimento e preço de exercício, isto é:

$$C_t^A(S_t, \tau, K) \geq C_t^E(S_t, \tau, K) \tag{2.6}$$

e

$$P_t^A(S_t, \tau, K) \geq P_t^E(S_t, \tau, K). \tag{2.7}$$

Os preços de mercado da call e da put Americanas são funções estritamente crescentes do tempo τ restante para o exercício, isto é:

$$C_t^A(S_t, \tau_1, K) > C_t^A(S_t, \tau_2, K), \quad \tau_1 > \tau_2 \tag{2.8}$$

e

$$P_t^A(S_t, \tau_1, K) > P_t^A(S_t, \tau_2, K), \quad \tau_1 > \tau_2. \tag{2.9}$$

As Européias, podendo ser exercidas somente no vencimento, não gozam desta propriedade.

Os preços da call Americana e da call Européia são funções estritamente decrescentes do preço de exercício, isto é:

$$C_t^A(S_t, \tau, K_2) < C_t^A(S_t, \tau, K_1), \quad K_1 < K_2 \tag{2.10}$$

e

$$C_t^E(S_t, \tau, K_2) < C_t^E(S_t, \tau, K_1), \quad K_1 < K_2;. \tag{2.11}$$

Isto se dá pois uma call Americana ou Européia com preço de exercício menor do que outra que vence no mesmo instante propicia à quem a possui uma maior probabilidade de ganho. Portanto quem a lança exige um prêmio maior. No caso da put, por um raciocínio análogo, o que ocorre é o inverso, isto é:

$$P_t^A(S_t, \tau, K_2) > P_t^A(S_t, \tau, K_1), \quad K_1 < K_2; \tag{2.12}$$

e

$$P_t^E(S_t, \tau, K_2) > P^E(S_t, \tau, K_1) \quad K_1 < K_2. \tag{2.13}$$

Pela mesma razão, os preços à vista da call Americana e Européia são funções estritamente crescentes do preço à vista do ativo subjacente, enquanto que os da put são estritamente decrescentes. Em suma, valem também as desigualdades:

$$C_t^A(S_2, \tau, K) > C_t^A(S_1, \tau, K), \quad S_2 > S_1; \tag{2.14}$$

$$C_t^E(S_2, \tau, K) > C_t^E(S_1, \tau, K), \quad S_2 > S_1; \tag{2.15}$$

$$P_t^A(S_2, \tau, K) < P_t^A(S_1, \tau, K), \quad S_2 > S_1; \tag{2.16}$$

$$P_t^E(S_2, \tau, K) < P_t^E(S_1, \tau, K), \quad S_2 > S_1. \tag{2.17}$$

2.2.1 A Hipótese de Inexistência de Arbitragem

Sejam $\boldsymbol{\theta}_t = (\theta_t^1, \ldots, \theta_t^n)$, $\theta_t^i \in \mathbb{R}$ para todo i, as quantidades dos n ativos financeiros em uma dada carteira em um instante t e $\mathbf{S}_t = (S_t^1, \ldots, S_t^n)$, $S_i > 0$ os preços correspondentes neste mesmo instante. Uma *venda à descoberto*[3] é uma operação em que um agente recebe por um ativo financeiro em um instante t seu preço à vista contra a promessa de entrega-lo em um instante $T > t$.

Existe sempre um ativo i dito ser *sem risco*, isto é, se seu valor é R_0 em t_0, então em $t_1 > t_0$ seu valor será

$$R_t = R_0 e^{\int_{t_0}^{t_1} r_s ds}, \tag{2.18}$$

onde r_s é a taxa de juros. Este ativo pode ser a unidade monetária de algum país.

Uma *arbitragem* é um ganho positivo com probabilidade um e custo zero. Mais precisamente:

Definição 2.3. *Uma* arbitragem *é uma carteira $\boldsymbol{\theta}$ tal que: $\boldsymbol{S}_{t_0}\boldsymbol{\theta} \leq 0$ e em algum $t_1 \geq t_0$, $P(\boldsymbol{S}_{t_1}\boldsymbol{\theta} > \epsilon) = 1$, para algum $\epsilon > 0$ ou $\boldsymbol{S}_{t_0}\boldsymbol{\theta} < 0$ e $P(\boldsymbol{S}_{t_1}\boldsymbol{\theta} \geq 0) = 1$.*

[3] *Short sale* em Inglês.

Diz-se que não existe arbitragens se, para todo t, não se pode construir uma carteira nas condições da definição 2.3. A inexistência de arbitragens é uma hipótese crucial para a avaliação correta de opções e ativos financeiros em geral. É bastante razoável admiti-la, pois mercados financeiros que apresentam sistemáticamente oportunidades de arbitragem possuem graves distorções em seus mecanismos de formação de preços, contudo nada garante que arbitragens ocorram de forma isolada. Mercados financeiros apresentando rotineiramente oportunidade de arbiragem tendem a não existir por muito tempo.

A hipótese de inexistência de arbitragens pode ser justificada pelo fato de que na presença de alguma arbitragem, o agente que a identifica vai tentar replicá-la infinitas vezes. Esta atitude por si só, se traduz em massivas ordens de compra do ativo que está subvalorizado e de venda do que está sobrevalorizado, o que corrige a distorção nos preços relativos dos ativos que está gerando a arbitragem. Como outros participantes do mercado também podem identificar a arbitragem, e se lançar a replicá-la, as distorções de preços tendem a desaparecer rapidamente.

Uma consequência imediata da hipótese de inexistência de arbitragens é que os preços da call Americana, da call Européia, da put Americana e da put Européia no vencimento são dados, respectivamente, por:

$$C_T^A(S_T, 0, K) = C_T^E(S_T, 0, K) = \max\{S_T - K, 0\}, \tag{2.19}$$

e

$$P_T^A(S_T, 0, K) = C_T^A(S_T, 0, K) = \max\{K - S_T, 0)\}. \tag{2.20}$$

Também como consequência imediata da inexistência de arbitragens, temse que

$$C_t^A(S_t, \tau, K) \geq \max\{S_t - K, 0\} \tag{2.21}$$

e

$$P_t^A(S_t, \tau, K) \geq \max\{K - S_t, 0\}. \tag{2.22}$$

Se 2.22 não fosse verdadeira, então seria possível obter uma arbitragem comprando o ativo subjacente e a put, exercendo-a no mesmo instante. Do mesmo modo, se fosse $<$ em vez de $\geq$ em 2.21, então obtendo um financiamento no valor de K unidades monetárias, comprando a call, exercendo-a imediatamente, juntamente com a venda do ativo subjacente, também dá origem à uma arbitragem.

Lembrando 2.6 tem-se:

$$C_t^E(S_t, \tau, K) \leq C_t^A(S_t, \tau, K).$$

Da inexistência de arbitragens, tem-se:

$$C_t^A(S_t, \tau, K) \leq S_t \tag{2.23}$$

e

$$C_t^E(S_t, \tau, K) + Ke^{-r\tau} \geq S_t. \tag{2.24}$$

Para provar 2.23, seja a carteira $\boldsymbol{\theta} = (\theta_t^1, \theta_t^2)$ com θ_t^1 unidades de uma call Americana e θ_t^2 unidades do ativo subjacente em t e onde $\boldsymbol{S}_t = (S_1, S_2)$ são os preços correspondentes. Se $C_t^A(S_t, \tau, K) > S_t$, então a venda de uma call juntamente com a compra de uma unidade do ativo subjacente geraria uma arbitragem, pois esta carteira seria $\boldsymbol{\theta}_t = (-1, 1)$, os preços correspondentes seriam $\boldsymbol{S}_t = (C_t^A(S_t, \tau, K), S_t)$ e seu valor seria $\boldsymbol{\theta}_t \mathbf{S}_t < 0$ e para todo $t^{'} > t$ se $S_{t'} > K$, entrega-se o ativo contra o exercício da call. Caso contrário a call não será exercida. Em todos os casos o valor da carteira em $t^{'}$ será não negativo.

Para provar 2.24, seja a carteira $\boldsymbol{\theta}_t = (\theta_t^1, \theta_t^2, \theta_t^3)$ onde as coordenadas são o número de unidades do ativo subjacente, da call e do ativo sem risco respectivamente e $\mathbf{S}_t = (S_t, C_t^E(S_t, \tau, K), e^{-r\tau})$ os preços correspondentes, sendo o último o valor em t de uma unidade do ativo sem risco em T. Supondo que seja $S_t > C_t^E(S_t, \tau, K) + Ke^{-r\tau}$, então a venda à descoberto de uma unidade do ativo subjacente é mais do que suficiente para a compra de uma call[4] e de $Ke^{-r\tau}$ unidades do ativo sem risco. Isto assegura uma arbitragem. De fato: em t tem-se $\boldsymbol{\theta}_t = (-1, 1, 1)$ e $\boldsymbol{\theta}_t \mathbf{S}_t < 0$. Em T, se $S_T > K$, então exerce-se a call utilizando-se as K unidades do ativo sem risco disponíveis, recebe-se o ativo subjacente contra este exercício e entrega-se o ativo subjacente. Se $S_T \leq K$, então não exerce-se a call e as K unidades do ativo sem risco disponíveis são mais do que suficientes para fazer frente ao compromisso de recompra do ativo subjacente, vendido à descoberto em t. Logo $P(\mathbf{S}_T \boldsymbol{\theta}_T \geq 0) = 1$. Decorre das três desigualdades acima a

Proposição 2.1. *O preço de mercado em t de uma call Européia com vencimento em $T \geq t$ e preço de exercício K é limitado superior e inferiormente por:*

$$S_t \geq C_t^E(S_t, \tau, K) \geq \max\left\{S_t - Ke^{-r\tau}, 0\right\}. \tag{2.25}$$

[4]Em inglês, diz-se *long*.

Além do problema da avaliação, quando trata-se de opções Americanas, também está presente o problema da determinação do instante ótimo para o direito de exercício, que eventualmente será em uma data anterior a do vencimento. Isto é verdadeiro somente no caso da put. De fato: seja $C_t^A(S_t,\tau,K)$ uma call Americana que não paga dividendo em $[t,T]$. Se a decisão for pelo exercício em $t<T$ e pela manutenção do ativo subjacente em carteira, obtém-se, em T, $S_T-K\leq \max\{S_T-K,0\}$. O exercício da opção seguido da venda imediata do ativo subjacente também não é a melhor escolha, pois pela proposição 2.1 juntamente com a equação 2.6, tem-se $C_t^A(S_t,\tau,K)\geq \max\{S_t-Ke^{-r\tau},0\}>S_t-K$. Ou seja, é melhor manter a opção. Se a call Americana pagar dividendos até o momento do exercício, então pode ser que seja ótimo exercê-la em algum $t<T$.

Se o preço de exercício de uma put Americana for uma função $K(t)$, é possível que a put não seja exercida antes do vencimento. Por exemplo, se o preço de exercício de uma put Americana $P_t^A(S_t,\tau,e^{rt})$ cresce à mesma taxa r que o ativo sem risco, então o exercício se dará em T. De fato: seja uma carteira que contém a opção e uma unidade do ativo subjacente. Se a opção for exercida em $t<T$, o valor da carteira resultante desta decisão em T será $e^{rt}e^{r\tau}=e^{rT}$. Por outro lado, ao exercer a put em T, o valor da carteira resultante desta decisão será $S_T+\max\left\{e^{rT}-S_T,0\right\}=\max\left\{e^{rT},S_T\right\}\geq e^{rT}$.

Tem-se ainda como consequência da ausência de arbitragens dois fatos importantes: a relação entre os preços de mercado de uma put e de uma call Européias com mesmo preço e data de exercício e a convexidade em K de $C_t^E(S_t,\tau,K)$. Estas questões são objeto das proposições 2.2 e 2.3 abaixo:

Proposição 2.2 (Paridade entre put e call)**.** *Uma call e uma put Européias com o mesmo preço de exercício K e o mesmo instante de vencimento e cujo ativo subjacente não paga dividendos obedecem a seguinte relação*

$$P_t^E(S_t,\tau,K)=C_t^E(S_t,\tau,K)-S_t+Ke^{-r\tau}. \qquad (2.26)$$

Demonstração. Seja $\boldsymbol{\theta}_t=(\theta_t^1,\theta_t^2,\theta_t^3,\theta_t^4)$, onde θ_t^1, θ_t^2, θ_t^3 e θ_t^4 denotam, respectivamente, o número de unidades da put, da call, do ativo subjacente e do ativo sem risco mantidas em carteira.

Supondo que seja $P_t^E<C_t^E-S_t+Ke^{-r\tau}$. Vendendo uma call, comprando uma put, comprando uma unidade do ativo subjacente[5] e obtendo

[5]Quando se vende uma call e se compra uma unidade do ativo subjacente, diz-se que a call está *coberta*.

um financiamento no valor de $Ke^{-r(T-t)}$, tem-se $\boldsymbol{\theta}_t = (1, -1, 1, -Ke^{-r(T-t)})$ e $\mathbf{S}_t\boldsymbol{\theta}_t < 0$. Seja $S_T > K$. Neste caso, entregando-se a unidade do ativo subjacente contra o exercício da call, obtém-se K unidades monetárias, que são utilizadas para quitar o financiamento de valor $Ke^{-r(T-t)}$ em t, e cujo valor é K em T. Se $S_T < K$, então exerce-se a put, entregando-se contra este exercício a unidade do ativo subjacente, obtendo-se assim a quantidade K que é necessária para a liquidação do financiamento. Se $S_T = K$, não exerce-se a put nem sofre-se o exercício da call. Vende-se o ativo subjacente por K e liquida-se o financiamento.

Se, por outro lado, $P_t^E > C_t^E - S_t + Ke^{-r\tau}$, então vendendo-se uma put, comprando-se uma call, vendendo-se à descoberto uma unidade do ativo subjacente e investindo-se $Ke^{-r\tau}$ no ativo sem risco, tem-se $\boldsymbol{\theta}_t = (-1, 1, -1, Ke^{-r\tau})$ com $\boldsymbol{\theta}_t\mathbf{S}_t < 0$. Se $S_T > K$, então exerce-se a call utilizando-se as K unidades monetárias que foram geradas pelo investimento de $Ke^{-r\tau}$ em t e entrega-se a unidade do ativo subjacente contra a obrigação de recompra gerada pela venda à descoberto em t. Se, por outro lado, $S_T < K$, então a put será exercida contra o lançador que utiliza as K unidades monetárias à sua disposição para comprar uma unidade do ativo subjacente e entrega-la contra o exercício da put. Logo, tem-se, em todos os casos analisados $P(\boldsymbol{\theta}_t\mathbf{S}_T = 0) = 1$ □

Ou seja, a venda de uma call sobrevalorizada coberta por uma unidade do ativo subjacente, acompanhada de um financiamento de valor igual ao preço de exercício e associada à compra de uma unidade da put de mesmo ativo subjacente com mesmo preço e data de exercício, dá origem à uma arbitragem. Na situação em que a put é a opção que está sobrevalorizada, uma carteira com sinal contrário também origina uma arbitragem.

Até aqui tratamos de ativos que não pagam dividendos. Ações são ativos que, em geral, pagam dividendos, que nada mais são que uma parcela do lucro da empresa após as deduções fiscais, dividido pela quantidade de ações emitidas por esta. O valor esperado dos dividendos influencia o preço à vista das ações. Quando há o anúncio por parte de uma companhia do pagamento de dividendos em algum instante t^*, o preço de suas ações passa a ser cotado, até este instante, da seguinte forma: S_t, se $t < t^*$ e $S_{t^*} - De^{-r(T-t^*)}$, onde D é o valor do dividendo em T. Se o ativo subjacente for uma ação que paga dividendos em algum $t^* \in (t, T]$, então vale a proposição 2.2 com a equação 2.26 substituída por

$$P_t^E(S_t, \tau, K) = C_t^E(S_t, \tau, K) - (S_t - D) + Ke^{-r\tau}. \tag{2.27}$$

A demonstração é análoga, basta fazer $\theta_t^4 = -(K+D)e^{-r\tau}$ caso seja $P_t^E > C_t^E - (S_t - D) + Ke^{-r\tau}$ e $\theta_t^4 = (K-D)e^{-r\tau}$ caso contrário a fim de encontrar-se a arbitragem desejada.

No caso de opções Americanas, a fórmula 2.26 não é mais válida. No entanto, os preços de uma put e de uma call cujo ativo subjacente não pague dividendos em $t \in [0,T]$ e com mesmo preço e instante de exercício obedeçem à seguinte relação:

$$S_t - K \leq C_t^A(S_t,\tau,K) - P_t^A(S_t,\tau,K) \leq S_t - Ke^{-r\tau}. \tag{2.28}$$

Com efeito: por 2.7 e 2.26, tem-se: $C_t^E - P_t^A \leq S_t - Ke^{-r\tau}$. Como o ativo subjacente não paga dividendos, tem-se $C_t^A = C_t^E$. Pela inexistência de arbitragens, vale $C_t^E + K \geq P_t^A + S_t$. De fato: supondo que fosse o contrário. Neste caso, a carteira $\boldsymbol{\theta}_t = (\theta_t^1, \theta_t^2, \theta_t^3, \theta_t^4) = (1, 1, -1, -1)$, onde θ_t^1, θ_t^2, θ_t^3 e θ_t^4 são, respectivamente, as quantidades da call Européia, do ativo tomado como numerário, da put Americana e do ativo subjacente, é uma arbitragem, pois $\boldsymbol{\theta}_t \mathbf{S}_t < 0$ e em T, se $0 < S_T < K$, seu valor será: $K - (K - S_T) - S_T = 0$. Caso contário, será $S_T - K + K - S_T = 0$.

A outra importante consequência da inexistência de arbitragens é dada pela proposição:

Proposição 2.3 (Convexidade do preço de mercado da call Européia em K)**.** *O preço de mercado de uma call Européia, $C_t^E(S_t,\tau,K)$, é uma função convexa em K.*

Demonstração. Sejam K_1 e K_2, $K_2 > K_1$ dois preços de exercício e $\lambda \in [0,1]$. Supondo que fosse

$$\lambda C_t^E(S_t,\tau,K_1) + (1-\lambda)C_t^E(S_t,\tau,K_2) < C_t^E(S_t,\tau,\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2).$$

Sejam $\boldsymbol{\theta}_t = (\theta_t^1, \theta_t^2, \theta_t^3)$, onde θ_t^1, θ_t^2 e θ_t^3 são as quantidades das call com preços de exercício K_1, K_2 e $\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2$ respectivamente mantidas em carteira e $\mathbf{S}_t = (C_t^E(S_t,\tau,K_1), C_t^E(S_t,\tau,K_2), C_t^E(S_t,\tau,\lambda K_1 + (1-\lambda K_2))$ os preços correspondentes. Comprando λ unidades de $C_t^E(S_t,\tau,K_1)$ e $(1-\lambda)$ unidades de $C_t^E(S_t,\tau,K_2)$ e vendendo uma unidade de $C_t^E(S_t,\tau,\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2)$, tem-se $\boldsymbol{\theta}_t = (\lambda, (1-\lambda), -1)$ e $\boldsymbol{\theta}_t \mathbf{S}_t < 0$. Se $S_T < K_1$, então a carteira valerá zero. Se $K_1 \leq S_T < \lambda K_1 + (1-\lambda)K_2$, então a carteira valerá $\lambda(S_T - K_1) \geq 0$. Se $\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2 \leq S_T \leq K_2$, a carteira valerá $\lambda(S_T - K_1) - (S_T - \lambda K_1 - (1-\lambda)K_2) = (1-\lambda)(K_2 - S_T) \geq 0$. Finalmente se $S_T > K_2$, então a carteira valerá $\lambda(S_T - K_1) + (1-\lambda)(S_T - K_2) - (S_T - \lambda K_1 - (1-\lambda)K_2) = 0$. Logo a carteira gera uma arbitragem. $\square$

2.3 Operando com Opções

Analisaremos a seguir alguns exemplos de operações com opções que são realizadas habitualmente em mesas de operação de derivativos em instituições financeiras através do mundo. As mais comuns serão descritas à seguir.

Call Coberta

Uma call coberta é uma operação que envolve a venda de uma call Européia em t, juntamente com a compra de uma unidade do ativo à ela subjacente neste mesmo instante. Tem-se então: $\boldsymbol{\theta}_t = (\theta_t^1, \theta_t^2) = (-1, 1)$, onde θ_t^1 e θ_t^2 são, respectivamente, o número de unidades da call e do ativo subjacente que são mantidos em carteira. Tem-se, desse modo, que $\boldsymbol{\theta}_t \mathbf{S}_t > 0$, pela proposição 2.1. O rendimento da carteira em T, $\pi(S_T)$, é então dado por:

$$\begin{aligned}
\pi(S_T) &= S_T - \max\{S_T - K, 0\} - (S_t - C^E(S_t, \tau, K)) \\
&= C_t^E(S_t, \tau, K) - S_t + \min\{S_T, K\} \\
&\begin{cases} C_t^E(S_t, \tau, K) - S_t + S_T & \text{se } S_T < K, \\ C_t^E(S_t, \tau, K) - S_t + K & \text{se } S_T \geq K. \end{cases}
\end{aligned}$$

Esta operação, que é feita por agentes que esperam uma alta no preço do ativo subjacente e propicia proteção contra grandes altas.

Put Protegida

Uma put protegida é uma carteira constituída pela compra de uma put Européia e de seu ativo subjacente. Assim sendo, tem-se $\boldsymbol{\theta}_t = (\theta_t^1, \theta_t^2) = (1, 1)$, com θ_t^1 e θ_t^2 sendo, respectivamente, o número de unidades da put e do ativo subjacente que são mantidas na carteira. Em T, esta carteira apresenta o rendimento:

$$\begin{aligned}
\pi(S_T) &= S_T + \max\{K - S_T, 0\} - (P_t^E(S_t, \tau, K) + S_t) \\
&= \max\{K, S_T\} - (P_t^E(S_t, \tau, K) + S_t) \\
&= \begin{cases} -(P_t^E(S_t, \tau, K) + S_t) + K & \text{se } S_T < K, \\ -(P_t^E(S_t, \tau, K) + S_t) + S_T & \text{se } S_T \geq K. \end{cases}
\end{aligned}$$

Esta operação garante ao investidor um preço mínimo pelo ativo subjacente. Ou seja, a put funciona como uma forma de seguro contra queda de preço do ativo subjacente.

***Spread* de Alta**

Uma carteira formada pela compra de uma call Européia com preço de exercício K_1 e pelo lançamento de outra call Européia com preço de exercício K_2, $K_2 > K_1$, e mesma data de vencimento chama-se um *spread* de alta[6]. Tem-se, portanto, $\boldsymbol{\theta}_t^{SA} = (\theta_t^1, \theta_t^2) = (1, -1)$, onde θ_t^1 é o número de unidades da call com preço de exercício K_1 e θ_t^2 o número de unidades da call com preço de exercício K_2. Por 2.11, tem-se $C_t^E(S_t, \tau, K_2) < C_t^E(S_t, \tau, K_1)$. O rendimento em T de uma carteira deste tipo é:

$$
\begin{aligned}
\pi(S_T) &= C_t^E(S_t, \tau, K_2) - C_t^E(S_t, \tau, K_1) \\
&\quad + \max\{S_T - K_1, 0\} - \max\{S_T - K_2, 0\} \\
&= \begin{cases} C_t^E(S_t, \tau, K_2) - C_t^E(S_t, \tau, K_1) & \text{se } S_T < K_1, \\ C_t^E(S_t, \tau, K_2) - C_t^E(S_t, \tau, K_1) + S_T - K_1 & \text{se } K_1 \leq S_T < K_2, \\ C_t^E(S_t, \tau, K_2) - C_t^E(S_t, \tau, K_1) + K_2 - K_1 & \text{se } S_T \geq K_2. \end{cases}
\end{aligned}
$$

***Spread* de Baixa**

Um *spread* de baixa [7] é uma carteira $\boldsymbol{\theta}_t^{SB}$ tal que $\boldsymbol{\theta}_t^{SB} = -\boldsymbol{\theta}_t^{SA}$.

Box Spread

Uma *box spread* é uma carteira $\boldsymbol{\theta}_t^{Box} = (\theta_t^1, \theta_t^2, \theta_t^3, \theta_t^4) = (1, -1, 1, -1)$, onde θ_t^1 é o número de unidades compradas de uma call tendo K_1 por preço de exercício, θ_t^2 é o número de unidades vendidas de uma call tendo K_2 como preço de exercício, θ_t^3 o número de unidades compradas de uma put com preço de exercício K_1 e θ_t^4 o número de unidades vendidas de uma put com K_2 como preço de exercício. Pode-se ter $K_1 > K_2$, ou o contrário. O custo da operação é:

$$
\begin{aligned}
H_t(S_t, \tau, K_1, K_2) = \boldsymbol{\theta}_t^{Box} \mathbf{S}_t &= C_t(S_t, \tau, K_1) - C_t(S_t, \tau, K_2) \\
&\quad + P_t(S_t, \tau, K_1) - P_t(S_t, \tau, K_2).
\end{aligned}
$$

Uma carteira com esta composição possui a seguinte função ganho:

$$
\pi(S_t) = H_t(S_t, \tau, K_1, K_2) + G(S_T),
$$

[6] Esta carteira também recebe o nome de *bullish spread*.

[7] Também chamado de *bearish spread*.

onde

$$\begin{aligned} G(S_T) &= \max\{S_T - K_1, 0\} - \max\{S_T - K_2, 0\} \\ &\quad + \max\{K_1 - S_T, 0\} - \max\{K_2 - S_T, 0\} \\ &= \begin{cases} K_1 - K_2 & \text{se } 0 < S_T < K_1, \\ 2S_T - (K_1 + K_2) & \text{se } K_1 \le S_T < K_2, \\ K_2 - K_1 & \text{se } S_T \ge K_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Borboleta

Uma borboleta é uma carteira que é composta pela compra de uma call Européia com preço de exercício K_1, pela compra de uma outra call Européia com preço de exercício K_3 e pelo lançamento de duas unidades de uma terceira call Européia com preço de exercício $K_2 = \frac{K_1+K_3}{2}$. Assim sendo, tem-se $\boldsymbol{\theta}_t = (\theta_t^1, \theta_t^2, \theta_t^3) = (1, -1, 1)$, onde θ_t^1, θ_t^2 e θ_t^3 são, respectivamente, as quantidades das calls cujos preços de exercício são K_1, K_2 e K_3. Pela proposição 2.3, o custo da operação satisfaz

$$\begin{aligned} H_t(S_t, \tau, K_1, K_2, K_3) &= 2C_t^E(S_t, \tau, K_2) \\ &\quad - C_t^E(S_t, \tau, K_1) - C_t^E(S_t, \tau, K_3) < 0. \end{aligned}$$

Uma carteira assim composta apresenta o seguinte rendimento em T:

$$\begin{aligned} \pi(S_T) &= \max\{S_T - K_1, 0\} + \max\{S_T - K_3, 0\} \\ &\quad - \max\{2S_T - (K_1 + K_2), 0\} + H(S_t, \tau, K_1, K_2, K_3) \\ &= \begin{cases} H_t(S_t, \tau, K_1, K_2, K_3) & \text{se } S_T \le K_1, \\ H_t(S_t, \tau, K_1, K_2, K_3) + S_T - K_1 & \text{se } K_1 < S_T \le K_3, \\ H_t(S_t, \tau, K_1, K_2, K_3) - S_T + K_2 & \text{se } K_3 < S_T \le K_2, \\ H_t(S_t, \tau, K_1, K_2, K_3) & \text{se } S_T > K_3. \end{cases} \end{aligned}$$

Strip

A carteira constituída pela compra de uma call e pela venda de duas put com mesmo preço de exercício K e mesmo vencimento recebe o nome de *strip*. Tem-se $\boldsymbol{\theta}_t^{strip} = (1, -2)$. O custo desta carteira é:

$$D_t^{strip}(S_t, K, \tau) = C_t^E(S_t, K, \tau) - 2P_t^E(S_t, K, \tau).$$

Uma carteira deste tipo apresenta rendimento em T dado por:

$$\begin{aligned}
\pi(S_T) &= \max\{S_T - K, 0\} - 2\max\{K - S_T, 0\} - D_t^{stip}(S_t, K, \tau) \\
&= \begin{cases} 2(S_T - K) - D_t^{strip}(S_t, K, \tau) & \text{se } S_T \leq K, \\ S_T - K - D_t^{strip}(S_T, K, \tau) & \text{se } S_T > K. \end{cases}
\end{aligned}$$

Strap

Uma carteira composta pela compra de duas call com vencimento em T e preço de exercício K e pela venda de uma put com mesmo vencimento e preço de exercício chama-se uma *strap*. Tem-se $\boldsymbol{\theta}_t^{strap} = (2, -1)$. Seja

$$D_t^{strap}(S_t, K, \tau) = 2C_t^E(S_t, K, \tau) - P_t^E(S_t, K, \tau).$$

Uma carteira deste tipo apresenta rendimento em T dado por

$$\begin{aligned}
\pi(S_T) &= 2\max\{S_T - K, 0\} - \max\{K - S_T, 0\} - D_t^{strap}(S_t, K, \tau) \\
&= \begin{cases} S_T - K - D_t^{strap}(S_t, K, \tau) & \text{se } S_T \leq K, \\ 2(S_T - K) - D_t^{strap}(S_t, K, \tau) & \text{se } S_T > K. \end{cases}
\end{aligned}$$

Note que os indivíduos que se posicionam em uma carteira do tipo *strap* esperam um aumento de preço, enquanto que os que se posicionam em uma *strip* esperam o contrário.

Strangle

Uma carteira composta por uma call e uma put com mesmo vencimento e preços de exercício diferentes recebe o nome de *strangle* (estrangulamento em português). Sejam K^C e K^P os preços de exercício da call e da put, respectivamente, com $K^C > K^P$. Seja

$$D_t\left(S_t, K^C, K^P, \tau\right) = C_t^E\left(S_t, K^C, \tau\right) + P_t^E\left(S_t, K^P, \tau\right).$$

O rendimento, no momento do vencimento, de uma carteira deste tipo é:

$$\begin{aligned}
\pi(S_T) &= \max\left\{S_T - K^C, 0\right\} + \max\left\{K^P - S_T, 0\right\} - D_t(S_t, K^C, K^P, \tau) \\
&= \begin{cases} K^P - S_T - D_t(S_t, K^C, K^P, \tau) & \text{se } S_T \leq K^P, \\ -D_t(S_t, K^C, K^P, \tau) & \text{se } K^P < S_T \leq K^C, \\ S_T - K^C - D_t\left(S_t, K^C, K^P, \tau\right) & \text{se } S_T > K^C. \end{cases}
\end{aligned}$$

No próximo trabalho examinaremos o problema da avaliação das opções Européias usando o cálculo de Itô. A primeira resposta satisfatória a este problema foi dada em 1973 por Myron Scholes e Fischer Black.

Referências

[1] Hull, J., *Options, Futures, and Other Derivatives*, Prentice Hall, 2002.

[2] Merton, R. C., *Theory of Rational Option Pricing*, Bell Journal of Economics and Management Sciences, 4:141-183, 1973.

[3] Cox, J.C. e Rubinstein, M. *Options Markets*, Prentice-Hall, 1985.

[4] Kwok, Y.K., *Mathematical Models of Financial Derivatives*, Springer-Verlag, 1998.