



COPPE/UFRJ

CICLO HAMILTONIANO EM GRAFOS DE REARRANJO DE GENOMAS
POR TRANSPOSIÇÕES PRÉ-FIXADAS

Caroline da Silva Reis

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de
Figueiredo
Luis Antonio Brasil Kowada

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2010

CICLO HAMILTONIANO EM GRAFOS DE REARRANJO DE GENOMAS
POR TRANSPOSIÇÕES PRÉ-FIXADAS

Caroline da Silva Reis

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Prof^a. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D.Sc.

Prof. Luis Antonio Brasil Kowada, D.Sc.

Prof^a. Maria Emilia Machado Telles Walter, D.Sc.

Prof^a. Susana Scheimberg de Makler, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

FEVEREIRO DE 2010

Reis, Caroline da Silva

Ciclo Hamiltoniano em Grafos de Rearranjo de Genomas por Transposições Pré-Fixadas/Caroline da Silva Reis. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2010.

X, 67 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Luis Antonio Brasil Kowada

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2010.

Referências Bibliográficas: p. 64 – 67.

1. Ciclo Hamiltoniano. 2. Grafo de Cayley. 3. Rearranjo de genomas. 4. Bioinformática. 5. Transposições Pré-Fixadas. I. Figueiredo, Celina Miraglia Herrera de *et al.*. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

Primeiramente a Deus. Aos meus pais Manoel e Edna pelo dom da vida e pelo amparo ao longo desses anos. Ao meu marido Alexander e à minha irmã Rafaela pelo apoio e força.

Agradecimentos

Primeiramente a Deus.

Aos meus queridos pais, Manoel e Edna, que mesmo longe, sempre incentivam meus estudos e me apóiam em todos os momentos. À minha irmã Rafaela que me entende e tenta me ajudar. Ao meu marido que me motiva e que alegra a minha vida.

À minha amiga Diana que me acompanha desde a graduação e consegue me compreender independente das circunstâncias. Aos meus amigos da COPPE que ouvem minhas piadas sem-graça e me acompanham nesta jornada, os quais prefiro não citar para não esquecer de ninguém.

Ao meu orientador externo Luis Antonio que não somente colaborou ativamente no desenvolvimento deste trabalho mas também me apoiou nos momentos difíceis e me ensinou como ter maior compromisso com pesquisa. Aproveito a oportunidade para agradecê-lo por ser um ótimo professor e pesquisador. À minha orientadora Celina, que acreditou no meu potencial quando me aceitou como aluna no mestrado e sempre se prontificou a me ajudar.

Aos membros da banca Maria Emília, que aceitou prontamente meu convite, e Susana, que mesmo com todos os impedimentos se esforçou para estar fazendo parte deste grupo.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Brasil (CNPq) pelo suporte financeiro.

Finalmente, gostaria de agradecer *você* pelo tempo dedicado a ler minha dissertação, ou parte dela.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

CICLO HAMILTONIANO EM GRAFOS DE REARRANJO DE GENOMAS
POR TRANSPOSIÇÕES PRÉ-FIXADAS

Caroline da Silva Reis

Fevereiro/2010

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Luis Antonio Brasil Kowada

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Uma transposição é uma operação que troca dois blocos consecutivos e adjacentes em uma permutação. Uma transposição pré-fixada é uma transposição que move o primeiro elemento em uma permutação. Definimos um grafo denominado Grafo de Rearranjo de Genomas por Transposições Pré-fixadas no qual cada vértice está associado a uma permutação do Grupo Simétrico S_n e dois vértices são adjacentes quando existe uma transposição pré-fixada que aplicada a uma permutação produz a outra.

Neste trabalho apresentamos propriedades deste grafo, dentre as quais a principal é a existência e a construção de ciclos Hamiltonianos. Além de ser interessante pelo fato de o problema de saber se existe ciclo Hamiltoniano em um grafo ser NP-Completo, também corrobora a conjectura de Lovász sobre ciclo Hamiltoniano em Grafos de Cayley. Em uma abordagem de Bioinformática, também torna possível listar todas as permutações de um determinado tamanho, numa ordem na qual há uma transposição pré-fixada entre duas permutações consecutivas, e ainda de modo que todas as permutações com o mesmo último elemento estejam consecutivas nesta listagem, o que auxilia no estudo do problema desafiador de ordenar por transposições.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

HAMILTONIAN CYCLES IN GENOME REARRANGEMENT GRAPHS BY
PREFIX TRANSPOSITIONS

Caroline da Silva Reis

February/2010

Advisors: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Luis Antonio Brasil Kowada

Department: Systems Engineering and Computer Science

A transposition is an operation that exchanges two consecutive adjacent blocks in a permutation. A prefix transposition is a transposition that moves the first element in the permutation. We define the Prefix Transposition Genome Rearrangement Graph, the vertices are the permutations the Symmetric Group S_n and two vertices are adjacent when there exists a prefix transposition that applied to a permutation produces the other one.

In this work we present properties of this graph, amongst which the main one is the existence and construction of Hamiltonian cycles. Besides being interesting for the fact that to know whether there are Hamiltonian cycles in a graph is NP-Complete, also it corroborates to Lovász's conjecture about Hamiltonian cycles in Cayley graphs. In the context of Bioinformatics, it additionally yields a list of all the permutations of a given size, in an order that has a prefix transposition between two consecutive permutations, and in a particular way such that all the permutations with the same last element are consecutive in this order, which contributes to the study of the challenging problem to sorting by transpositions.

Sumário

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Definições gerais	7
2.1 Definições em grafos	7
2.2 Grafos de Cayley	9
2.3 Rearranjo de genomas	13
2.4 Operações	17
3 O grafo PFTRG	19
3.1 Propriedades gerais	19
3.2 Particionamento do grafo <i>PFTRG</i>	24
4 Ciclos Hamiltonianos no grafo PFTRG	27
4.1 Grafos reduzidos do grafo <i>PFTRG</i>	30
4.1.1 Caso par	30
4.1.2 Caso ímpar	45
4.2 Ciclos Hamiltonianos no PFTRG	51
5 Conclusão	61
Referências Bibliográficas	64

Lista de Figuras

1.1	O dodecaedro com um ciclo Hamiltoniano destacado.	1
1.2	Grafos $PFTRG(n)$ com $n = 1, n = 2$ e $n = 3$	3
1.3	Grafos Petersen e Petersen expandido.	4
1.4	Grafos Coxeter e Coxeter expandido.	4
1.5	O grafo completo com 2 vértices K_2	4
2.1	Exemplo de automorfismo.	9
2.2	Grafo de Cayley direcionado com conjunto gerador $\{\bar{1}\}$	10
2.3	Grafo de Cayley direcionado com conjunto gerador $\{\bar{1}, \bar{4}\}$	10
2.4	Grafo de Cayley com conjunto gerador $\{\bar{1}, \bar{4}\}$	11
2.5	Grafo de Cayley $\Gamma(S_3, S)$	12
3.1	Grafos $PFTRG(n)$ com $n = 1, n = 2$ e $n = 3$	19
3.2	Parte do $PFTRG(4)$ a partir do $PFTRG(3)$ com todas as arestas incidentes ao vértice identidade $\iota_{[4]}$	26
4.1	Um grafo reduzido para $n = 6$ utilizando a tabela 4.1.	29
4.2	Outro grafo reduzido para $n = 6$ utilizando a tabela 4.2.	30
4.3	Um ciclo Hamiltoniano no $PFTRG(3)$	52
4.4	Um ciclo Hamiltoniano destacado no $PFTRG(4)$ com somente as arestas ligantes do ciclo.	53
4.5	Outro ciclo Hamiltoniano destacado no $PFTRG(4)$ com somente as arestas ligantes do ciclo.	54
4.6	Outro ciclo Hamiltoniano do $PFTRG(4)$ com somente as arestas ligantes do ciclo.	55
4.7	Modelo de um grafo reduzido do $PFTRG(m)$	57

4.8	Permanência das arestas ligantes e substituição das arestas representantes por um caminho Hamiltoniano nas partições.	57
-----	---	----

Capítulo 1

Introdução

Um dos mais conhecidos problemas modelados através de grafos foi apresentado em 1857 por William Rowan Hamilton [1], proposto apenas como um jogo matemático chamado *Around the World*, a princípio sem aplicação prática. O jogo era feito sobre um dodecaedro em que cada vértice estava associado a uma cidade importante da época. Tratava-se da busca de uma rota através dos vértices do dodecaedro que iniciasse e terminasse em uma mesma cidade passando uma única vez em cada cidade. Em homenagem a Hamilton, uma solução do seu jogo passou a ser chamada de ciclo Hamiltoniano. Veja na Figura 1.1 um dodecaedro com um ciclo Hamiltoniano destacado.

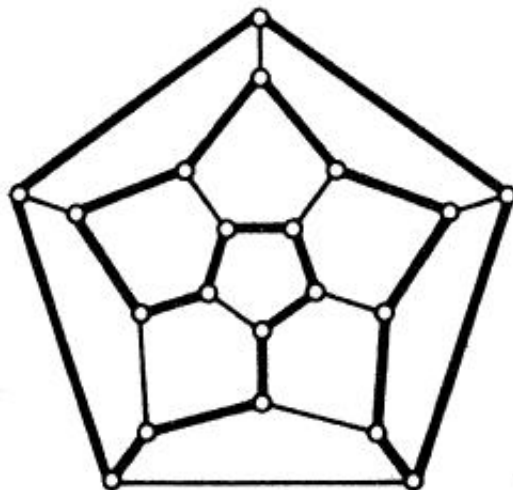


Figura 1.1: O dodecaedro com um ciclo Hamiltoniano destacado.

O jogo proposto por Hamilton ficou conhecido como o Problema do Ciclo Hamil-

toniano (PCH) e, mais de 100 anos depois, encontrar ciclo Hamiltoniano em um grafo é ainda um problema desafiador em teoria dos grafos. Decidir se um grafo possui ciclo Hamiltoniano é um dos clássicos problemas NP-Completo [2]. O Problema do Caminho Hamiltoniano, que consiste em passar por todos os vértices de um grafo, através das arestas, exatamente uma vez sem formar um ciclo, também é NP-Completo [3]. Foi provado ainda que o problema de decidir se um grafo possui ciclo Hamiltoniano permanece NP-Completo mesmo quando um caminho Hamiltoniano do grafo é dado como parte da instância [4]. Estudo de caminhos e ciclos Hamiltonianos é importante para ciência da computação ([5], [6]), em planejamentos combinatórios ([7], [8]), além de outras áreas.

Neste trabalho, estudamos o PCH em um grafo que denotamos por Grafo de Rearranjo de Genomas por Transposições Pré-Fixadas, $PFTRG(n)$, este grafo possui como conjunto de vértices todas as $n!$ permutações do grupo simétrico S_n formadas por n elementos distintos e cada aresta corresponde a existência de uma transposição pré-fixada que troca dois blocos consecutivos e adjacentes em que necessariamente um dos blocos contém o primeiro elemento.

Antes de apresentar o grafo, vamos observar através de exemplos as operações de rearranjo de genomas por transposições e por transposições pré-fixadas.

Observe no Exemplo 1 que a operação de rearranjo por transposições consiste em transpor um bloco de elementos consecutivos para qualquer lugar da permutação à esquerda desse bloco. Já a operação de rearranjo por transposições pré-fixadas, que é um caso particular das transposições, consiste em mover o bloco de elementos consecutivos para a primeira posição da permutação, observe no Exemplo 2.

$$\mathbf{Exemplo 1.} \quad \pi_{[8]} = [8 \ 7 \ 6 \ \underbrace{5 \ 1 \ 4} \ 3 \ 2]$$

$$\downarrow t$$

$$\sigma_{[8]} = [8 \ \underbrace{5 \ 1 \ 4} \ 7 \ 6 \ 3 \ 2]$$

$$\mathbf{Exemplo 2.} \quad \pi_{[8]} = [8 \ 7 \ 6 \ \underbrace{5 \ 1 \ 4} \ 3 \ 2]$$

$$\downarrow pt$$

$$\sigma_{[8]} = [\underbrace{5 \ 1 \ 4} \ 8 \ 7 \ 6 \ 3 \ 2]$$

Veja na Figura 1.2 os grafos $PFTRG(1)$, $PFTRG(2)$ e $PFTRG(3)$.

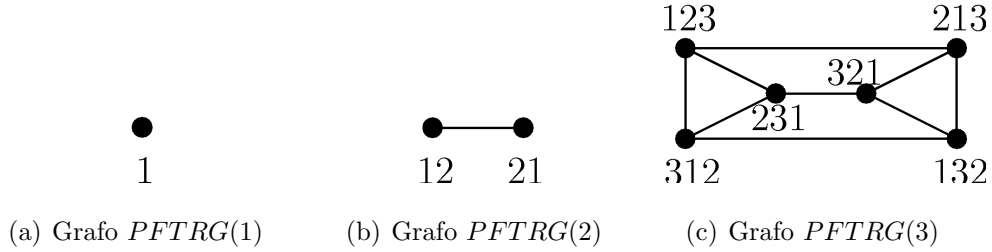


Figura 1.2: Grafos $PFTRG(n)$ com $n = 1, n = 2$ e $n = 3$.

Um grafo que codifica a estrutura de um grupo e usa um conjunto especificado, geralmente finito, gerador para o grupo é um grafo de Cayley [9]. O grafo $PFTRG(n)$ é um grafo de Cayley associado a um conjunto gerador particular do grupo Simétrico S_n . Nesse aspecto, existe uma conjectura bem conhecida de Lovász [10] de que todo grafo vértice-transitivo conexo, não-direcionado, possui um caminho Hamiltoniano. Mas, são conhecidos somente 4 grafos conexos, não-direcionados e vértice-transitivos que não possuem ciclo Hamiltoniano e todos esses grafos possuem caminho Hamiltoniano [9]. Eles são: grafo de Petersen (ver Figura 1.3[a]), grafo Coxeter (ver Figura 1.4[a]), e os grafos obtidos do grafo de Petersen e do grafo Coxeter substituindo cada vértice por um triângulo e juntando os vértices do jeito natural, a saber, como o grafo de Petersen e o grafo Coxeter são cúbicos, fazemos uma expansão de forma que as arestas incidentes em cada vértice tornarão a incidir nos vértices do triângulo (ver Figuras 1.3[b], 1.4[b], respectivamente). É importante destacar que o grafo completo com 2 vértices (ver Figura 1.5) também é vértice-transitivo, conexo e não-direcionado que possui caminho Hamiltoniano, mas será ignorado por não fazer muito sentido falar de ciclo Hamiltoniano neste grafo. Foi observado que todos os quatro grafos citados não são grafos de Cayley. Então a conjectura de Lovász pode ser vista como : Todo grafo finito de Cayley conexo possui ciclo Hamiltoniano [9]. A busca por ciclos Hamiltonianos nos grafos Cayley foi iniciado em 1959 por Rapaport [11].

Vale ressaltar que não é conhecido um grafo vértice-transitivo conexo sem caminho Hamiltoniano.

A existência de ciclo Hamiltoniano no grafo $PFTRG$, além de corroborar a conjectura de Lovász, também possui importância na área de Rearranjo de Genomas como veremos a seguir.

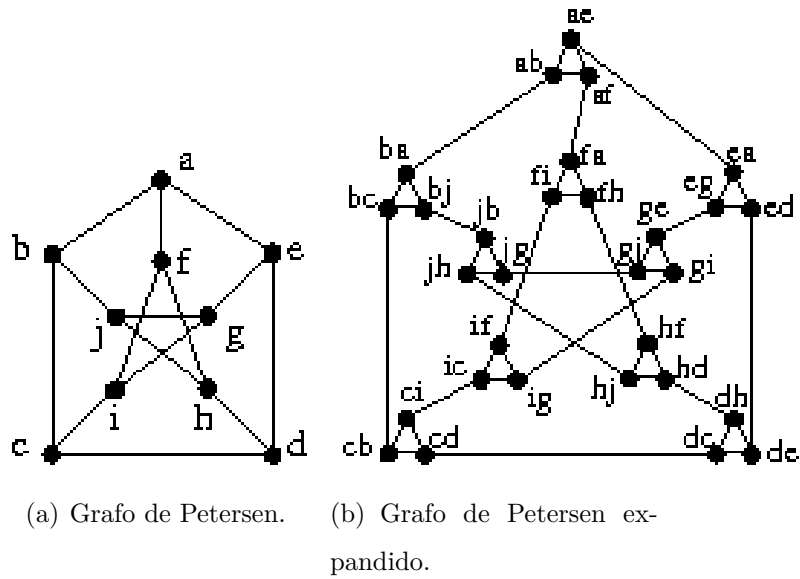


Figura 1.3: Grafos Petersen e Petersen expandido.

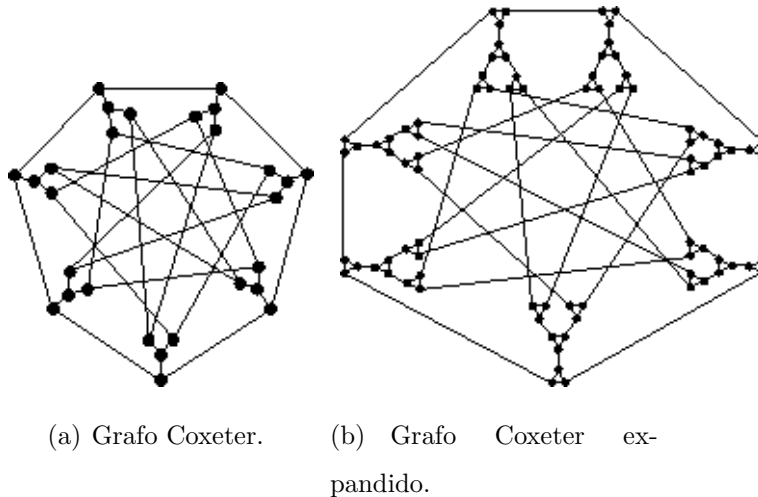


Figura 1.4: Grafos Coxeter e Coxeter expandido.



Figura 1.5: O grafo completo com 2 vértices K_2 .

Com ênfase em Bioinformática, as permutações deste grafo podem ser usadas para representar a sequência de genes e algumas operações com permutações representam eventos evolucionários. Um problema clássico é o de determinar o menor número de mutações necessárias para transformar uma sequência de genes do DNA de uma espécie em outra (problema de distância entre genomas através de rearranjo). Dentre as mutações possíveis que não alteram a natureza dos genes, mas apenas a posição dos mesmos, os tipos mais estudados são reversão e transposição.

A distância entre duas espécies é comumente usada como entrada em algoritmos de construção de árvores filogenéticas [12]. Outro problema bem conhecido é o diâmetro do grafo, que consiste em determinar a maior distância entre dois vértices quaisquer do grafo.

O evento de rearranjo mais estudado foi a reversão, que é uma operação que inverte, ou melhor, troca a ordem de um bloco de qualquer tamanho em uma permutação [13]. Caprara [14] provou que a distância de reversão é um problema NP-difícil.

Há uma variação, para este problema, considerando permutações com sinal, nas quais, cada elemento da permutação possui um sinal positivo ou negativo, e em cada operação de reversão, o sinal de cada elemento do bloco invertido é trocado. Em 1999, Hannenhalli e Pevzner [15] mostraram que o problema da distância de reversão com orientação pode ser resolvido em tempo polinomial.

Outra variação interessante deste problema é chamado de *problema de reversão pré-fixada* ou *problema de reversão de panqueca* como foi originalmente chamado [16], onde apenas reversões envolvendo os primeiros elementos consecutivos de uma permutação são permitidas. Heydari e Sudborough [17] provaram que o problema de distância de reversão pré-fixada é NP-difícil. Gates e Papadimitriou [18] e Heydari e Sudborough [19] estudaram o diâmetro de reversões pré-fixadas.

Já o evento de rearranjo denotado por transposição é uma operação no qual um segmento é cortado de uma permutação e é inserido em outra posição da mesma permutação, ou de outra forma, troca dois blocos consecutivos e adjacentes em uma permutação [20]. Para o problema de distância de transposição não se conhece, até este momento, nenhum algoritmo polinomial, e nem uma prova de que é um problema NP-difícil, o que conhecemos são algoritmos aproximativos ([21], [22],[23]).

Desde os primeiros trabalhos formais de 1998 [24] até os resultados mais recentes de 2006 [25] e de 2008 [26] busca-se sem sucesso uma forma de estimar de maneira exata a distância de transposição para qualquer permutação.

Por conhecermos menos o problema de transposição em relação ao de reversão, abordamos neste trabalho apenas eventos de transposição. E como a distância de transposição, e também o diâmetro, são problemas complexos, afinal estão em aberto

por mais de 10 anos, optamos por estudar uma variação do evento de transposição introduzida por Dias e Meidanis [27], chamada transposição pré-fixada, onde um dos blocos trocados da permutação deve conter o primeiro elemento. Ao explorar esta variação, Dias e Meidanis observaram que o diâmetro de transposição pré-fixada estava entre $\frac{n}{2}$ e $n-1$, e conjecturaram que seria igual a $n - \lfloor \frac{n}{4} \rfloor$. Em seguida, Chitturi e Sudborough [28] melhoraram estes limites, encontrando o diâmetro entre $\frac{2n}{3}$ e $n - \log_3 n$. Recentemente, em 2008, Labarre [29] melhorou ainda mais o limite inferior para o diâmetro de transposição pré-fixada encontrando $\lfloor \frac{3n+1}{4} \rfloor$. Em um trabalho mais atual, de 2009, Sharmin e outros [30] também estudaram este problema e encontraram um algoritmo de aproximação de razão 3 para ordenar transposições pré-fixadas. Porém, a complexidade do problema de distância de transposição pré-fixada ainda está em aberto também.

A fim de estudarmos mais características acerca das transposições pré-fixadas, definimos o grafo $PFTRG(n)$ e investigamos propriedades combinatórias e estruturais deste grafo, inclusive a existência de ciclos de diferentes tamanhos e ciclos Hamiltonianos, em particular, obtivemos uma listagem de todas as permutações do grafo, numa ordem na qual temos uma transposição pré-fixada entre duas consecutivas desta listagem, e ainda de um modo em que todas as permutações que terminem com um mesmo elemento estejam consecutivas nesta listagem, o que auxilia no estudo do problema desafiador de ordenar por transposições.

O trabalho está dividido da seguinte forma: Inicialmente, no Capítulo 2, definimos conceitos importantes que serão utilizados adiante. No Capítulo 3 apresentamos algumas propriedades do grafo estudado chamado Grafo de Rearranjo de Genomas por Transposições Pré-Fixadas. No Capítulo 4, apresentamos o resultado principal do trabalho onde mostramos que o grafo estudado possui ciclo Hamiltoniano. E, finalmente, no Capítulo 5 estão as conclusões.

Capítulo 2

Definições gerais

Neste capítulo, apresentamos conceitos básicos utilizados no decorrer do trabalho. Sugerimos para o leitor habituado às definições básicas de teoria de grafos [31] que comece na Seção 2.2.

2.1 Definições em grafos

Um *grafo* G é uma tripla ordenada $G = (V(G), E(G), \psi_G)$, onde $V(G)$ é um conjunto finito e não vazio de pontos denominados *vértices*, $E(G)$ é um conjunto finito de *arestas* e $\psi_G : E(G) \rightarrow V(G) \times V(G)$ é uma função de incidência que associa a cada aresta e de $E(G)$ um par de vértices u e v , notação $\psi_G(e) = \{u, v\}$ (ou $\psi_G(e) = \{v, u\}$ onde a ordem não é importante). Os vértices u e v são chamados de *extremos* de e . Neste caso, dizemos que o vértice u é *vizinho* de v e vice-versa, a aresta e é *incidente* em u e v , e o par de vértices u e v são *adjacentes*. Para simplicidade na notação, escrevemos (u, v) para o par não-ordenado $\{u, v\}$ e $\langle u, v \rangle$ para o par ordenado de u a v .

Um grafo contém arestas *paralelas* ou *múltiplas* se possui arestas diferentes compartilhando os mesmos extremos. Se a função de incidência admite arestas com vértices u e v iguais ($u = v$), então o grafo contém *laços*. Um grafo é *simples* se não contém laços nem arestas paralelas.

Neste trabalho utilizamos apenas grafos simples, o que denotaremos simplesmente por grafos. Sendo assim, como a função de incidência está bem definida pelos extremos de cada aresta, omitiremos a função de incidência da definição de grafos.

Portanto, um grafo é uma dupla $G = (V(G), E(G))$ tal que denotaremos uma aresta $e = (u, v)$ para a qual $\psi_G(e) = (u, v)$.

Definimos como *grau* de um vértice, denotado por $d(u)$, o número de vértices adjacentes ao vértice u . Um grafo G é dito *regular* se todos os seus vértices tem o mesmo grau. Um grafo é *k-regular* quando todos os vértices possuem o mesmo grau k . Chamamos de grafo *cúbico* o grafo 3-regular.

Um *grafo direcionado* ou *digrafo* $D = (V(D), A(D), \phi_D)$ consiste de um conjunto $V(D)$ de vértices e um conjunto $A(D)$ de arcos, onde a função de incidência ϕ_D associa a cada arco de D um par ordenado de vértices (não necessariamente distintos) de D .

Um grafo G é dito *conexo* se existe um caminho entre qualquer par de vértices de G , caso contrário, dizemos que G é *desconexo*.

Um grafo $H = (V(H), E(H))$ é chamado de *subgrafo* de $G = (V(G), E(G))$ se $V(H) \subseteq V(G)$ e se $E(H) \subseteq E(G)$.

Chamamos de *passeio* P em um grafo G uma sequência de vértices e arestas $P = (u = u_1, u_1u_2, u_2, \dots, u_{k-1}, u_{k-1}u_k, u_k = v)$. Se $u = v$, dizemos que P é um *passeio fechado*. Um *caminho* é um passeio que não repete vértices. Dizemos que dois caminhos C_1 e C_2 entre u e v são *disjuntos* se $(C_1 \cap C_2) \setminus \{u, v\} = \emptyset$. Sejam u e v vértices distintos, sejam também C_1 e C_2 caminhos disjuntos entre u e v , então chamamos de *ciclo* a união $C_1 \cup C_2$. Um *k-ciclo* é um ciclo composto de k vértices.

Se um *caminho* contém todos os vértices do grafo dizemos que este caminho é *Hamiltoniano*. Um *ciclo* é *Hamiltoniano* se contém todos os vértices de um grafo G .

Dois grafos G e H são chamados de *isomorfos* se existe uma bijeção $f : G \rightarrow H$ tal que u e v são adjacentes em G se, e somente se, os vértices $f(u)$ e $f(v)$ são adjacentes em H .

Um *automorfismo* de um grafo $G = (V(G), E(G))$ é um isomorfismo de G em G , isto é, $f : G \rightarrow G$ que preserva a adjacência: se $(u, v) \in E(G)$ então $(f(u), f(v)) \in E(G)$. Na Figura 2.1 o mapeamento $f(1) = 2; f(2) = 6; f(3) = 5; f(4) = 3; f(5) = 4$ e $f(6) = 1$ é um automorfismo de G .

Dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é *vértice-transitivo* se para todo par de vértices $u, v \in V(G)$ existe um automorfismo f tal que $f(u) = v$. Dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é *aresta-transitivo* se para todo par de arestas $(u, v) \in E(G)$ existe um

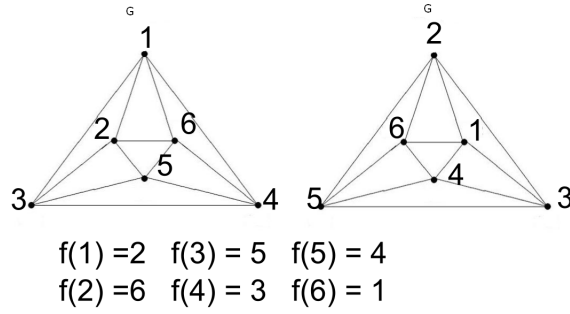


Figura 2.1: Exemplo de automorfismo.

automorfismo f tal que $f(u) = f(v)$. Qualquer grafo vértice e aresta-transitivo é dito ser um *grafo simétrico*.

Um grafo $G = (V, E)$ é dito *distância-transitivo* se, dados quaisquer dois vértices $v, w \in V$ à qualquer distância d , e quaisquer outros dois vértices $x, y \in V$ à mesma distância d , existe um automorfismo do grafo que mapeia v em x e w em y . Um grafo distância-transitivo é simétrico.

2.2 Grafos de Cayley

Esta dissertação trata de grafos que são definidos por grupos, o que causa um conflito de notação. Decidimos usar a partir deste momento a letra G para grupo e a letra Γ para grafo.

Definição 1. (*grafos de Cayley*) [9] Sejam G um grupo finito e S um conjunto gerador de G . O grafo de G (associado a S), que vamos denotar por $\Gamma(G, S)$, é um grafo de Cayley com conjunto de vértices $V(\Gamma)$ sendo os elementos de $\langle v, vs \rangle \in E(\Gamma)$ se existe $s \in S$ tal que $w = vs$. Quando S é simétrico (ou fechado para inverso), isto é, se $s \in S$ implica $s^{-1} \in S$ e não contém a identidade ι , o grafo de Cayley de G (associado a S), $\Gamma(G, S)$, é não-direcionado e não contém laços.

Exemplo 3. Sejam $G = (Z_5, +)$, $Z_5 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$ e conjunto gerador $S = \{\bar{1}\}$. O grafo de Cayley $\Gamma(G, S)$ possui as arestas construídas da seguinte forma:

$$\bar{0} + \bar{1} = \bar{1}, \quad \bar{1} + \bar{1} = \bar{2}, \quad \bar{2} + \bar{1} = \bar{3}, \quad \bar{3} + \bar{1} = \bar{4}, \quad \bar{4} + \bar{1} = \bar{0},$$

gerando as arestas orientadas:

$$\langle \bar{0}, \bar{1} \rangle, \quad \langle \bar{1}, \bar{2} \rangle, \quad \langle \bar{2}, \bar{3} \rangle, \quad \langle \bar{3}, \bar{4} \rangle, \quad \langle \bar{4}, \bar{0} \rangle.$$

E o grafo pode ser visto na Figura 2.2.

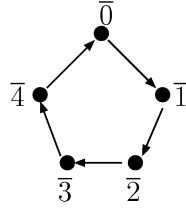


Figura 2.2: Grafo de Cayley direcionado com conjunto gerador $\{\bar{1}\}$.

Observe que para $s = \bar{1}$, $s^{-1} = \bar{4} \notin S$, portanto o grafo de Cayley da Figura 2.2 é direcionado.

Exemplo 4. Quando utilizamos o mesmo grupo do exemplo anterior, porém com conjunto gerador $S = \{\bar{1}, \bar{4}\}$. Temos a seguinte construção das arestas:

Para $s = \bar{1}$:

$$\bar{0} + \bar{1} = \bar{1}, \bar{1} + \bar{1} = \bar{2}, \bar{2} + \bar{1} = \bar{3}, \bar{3} + \bar{1} = \bar{4}, \bar{4} + \bar{1} = \bar{0},$$

gerando as arestas orientadas:

$$\langle \bar{0}, \bar{1} \rangle, \langle \bar{1}, \bar{2} \rangle, \langle \bar{2}, \bar{3} \rangle, \langle \bar{3}, \bar{4} \rangle, \langle \bar{4}, \bar{0} \rangle.$$

Para $s = \bar{4}$:

$$\bar{0} + \bar{4} = \bar{4}, \bar{1} + \bar{4} = \bar{0}, \bar{2} + \bar{4} = \bar{1}, \bar{3} + \bar{4} = \bar{2}, \bar{4} + \bar{4} = \bar{3},$$

gerando as arestas orientadas:

$$\langle \bar{0}, \bar{4} \rangle, \langle \bar{1}, \bar{0} \rangle, \langle \bar{2}, \bar{1} \rangle, \langle \bar{3}, \bar{2} \rangle, \langle \bar{4}, \bar{3} \rangle.$$

Obtendo o grafo da Figura 2.3.

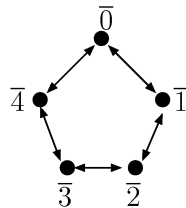


Figura 2.3: Grafo de Cayley direcionado com conjunto gerador $\{\bar{1}, \bar{4}\}$.

Observe no grafo de Cayley da Figura 2.3 que $s^{-1} = \bar{4} \in S$. As arestas orientadas para ambos os lados são trocadas por arestas não-orientadas, o que faz este grafo ser não-direcionado. Como $\iota = \bar{0} \notin S$, também não possui laços.

Assim representamos o grafo como na Figura 2.4.

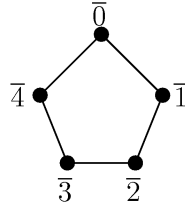


Figura 2.4: Grafo de Cayley com conjunto gerador $\{\bar{1}, \bar{4}\}$.

Definição 2. [32] O grupo simétrico, denotado por S_n , é o conjunto de todas as permutações de n elementos com a operação composição (ou produto) \cdot e com a permutação identidade $\iota_{[n]}$ como elemento neutro.

Neste trabalho, para os grafos de Cayley considerados, o grupo finito utilizado é $G = S_n$, e o conjunto gerador S será formado por elementos de G de forma que $\iota_{[n]} \notin S$ e se $s \in S$, então $s^{-1} \in S$. Logo, os grafos são não-direcionados e não contem laços.

O Exemplo 5 explica como a composição de permutações funciona e então podemos analisar melhor o Exemplo 6.

Exemplo 5. Sejam as permutações $\alpha = [1\ 3\ 2]$ e $\beta = [2\ 3\ 1]$. Tem-se que $\gamma = \alpha \cdot \beta = [1\ 3\ 2] \cdot [2\ 3\ 1] = [3\ 2\ 1]$, pois $\gamma = [\gamma_1\ \gamma_2\ \gamma_3]$ onde: $\gamma_1 = \alpha_{\beta_1} = \alpha_2 = 3$, $\gamma_2 = \alpha_{\beta_2} = \alpha_3 = 2$ e $\gamma_3 = \alpha_{\beta_3} = \alpha_1 = 1$.

Observe que, em geral, dadas $\alpha, \beta \in S_n$, obtemos a permutação composição $\gamma = \alpha \cdot \beta$ através da relação $\gamma_i = \alpha_{\beta_i}$, onde $i = 1, \dots, n$.

Para fixar a notação, consideramos o exemplo para $n = 3$ onde o grupo simétrico $G = (S_3, \cdot)$.

Exemplo 6. Sejam $G = (S_3, \cdot) = (\{[1\ 2\ 3], [1\ 3\ 2], [2\ 1\ 3], [2\ 3\ 1], [3\ 1\ 2], [3\ 2\ 1]\}, \cdot)$ e conjunto gerador $S = \{[2\ 1\ 3], [2\ 3\ 1], [3\ 1\ 2]\}$, acompanhe a construção das arestas para o grafo de Cayley $\Gamma(S_3, S)$:

Para $s = [2\ 1\ 3]$:

$$[1\ 2\ 3] \cdot [2\ 1\ 3] = [2\ 1\ 3], [1\ 3\ 2] \cdot [2\ 1\ 3] = [3\ 1\ 2], [2\ 1\ 3] \cdot [2\ 1\ 3] = [1\ 2\ 3],$$

$$[2\ 3\ 1] \cdot [2\ 1\ 3] = [3\ 2\ 1], [3\ 1\ 2] \cdot [2\ 1\ 3] = [1\ 3\ 2], [3\ 2\ 1] \cdot [2\ 1\ 3] = [2\ 3\ 1],$$

gerando as arestas orientadas:

$$\langle [1\ 2\ 3], [2\ 1\ 3] \rangle, \langle [1\ 3\ 2], [3\ 1\ 2] \rangle, \langle [2\ 1\ 3], [1\ 2\ 3] \rangle,$$

$$\langle [2\ 3\ 1], [3\ 2\ 1] \rangle, \langle [3\ 1\ 2], [1\ 3\ 2] \rangle, \langle [3\ 2\ 1], [2\ 3\ 1] \rangle.$$

Para $s = [2\ 3\ 1]$:

$$[1\ 2\ 3] \cdot [2\ 3\ 1] = [2\ 3\ 1], [1\ 3\ 2] \cdot [2\ 3\ 1] = [3\ 2\ 1], [2\ 1\ 3] \cdot [2\ 3\ 1] = [1\ 3\ 2],$$

$$[2\ 3\ 1] \cdot [2\ 3\ 1] = [3\ 1\ 2], [3\ 1\ 2] \cdot [2\ 3\ 1] = [1\ 2\ 3], [3\ 2\ 1] \cdot [2\ 3\ 1] = [2\ 1\ 3],$$

gerando as arestas orientadas:

$$\langle [1\ 2\ 3], [2\ 3\ 1] \rangle, \langle [1\ 3\ 2], [3\ 2\ 1] \rangle, \langle [2\ 1\ 3], [1\ 3\ 2] \rangle,$$

$$\langle [2\ 3\ 1], [3\ 1\ 2] \rangle, \langle [3\ 1\ 2], [1\ 2\ 3] \rangle, \langle [3\ 2\ 1], [2\ 1\ 3] \rangle.$$

Para $s = [3\ 1\ 2]$:

$$[1\ 2\ 3] \cdot [3\ 1\ 2] = [3\ 1\ 2], [1\ 3\ 2] \cdot [3\ 1\ 2] = [2\ 1\ 3], [2\ 1\ 3] \cdot [3\ 1\ 2] = [3\ 2\ 1],$$

$$[2\ 3\ 1] \cdot [3\ 1\ 2] = [1\ 2\ 3], [3\ 1\ 2] \cdot [3\ 1\ 2] = [2\ 3\ 1], [3\ 2\ 1] \cdot [3\ 1\ 2] = [1\ 3\ 2],$$

gerando as arestas orientadas:

$$\langle [1\ 2\ 3], [3\ 1\ 2] \rangle, \langle [1\ 3\ 2], [2\ 1\ 3] \rangle, \langle [2\ 1\ 3], [3\ 2\ 1] \rangle,$$

$$\langle [2\ 3\ 1], [1\ 2\ 3] \rangle, \langle [3\ 1\ 2], [2\ 3\ 1] \rangle, \langle [3\ 2\ 1], [1\ 3\ 2] \rangle.$$

E o grafo está representado na Figura 2.5.

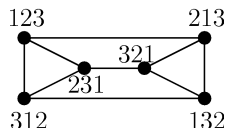


Figura 2.5: Grafo de Cayley $\Gamma(S_3, S)$.

2.3 Rearranjo de genomas

Aqui, apresentamos conceitos básicos usados em Rearranjo de Genomas. Note que algumas definições, inclusive a transposição, são diferentes das definições usadas em outras áreas.

Definição 3. *Uma permutação linear, ou simplesmente uma permutação, de n elementos é uma função bijetiva π tal que*

$$\begin{aligned} \pi : \{1, 2, \dots, n\} &\rightarrow \{1, 2, \dots, n\} \\ i &\mapsto \pi(i) = \pi_i \end{aligned}$$

denotada usualmente por

$$\pi_{[n]} = [\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_n]$$

tal que $1 \leq \pi_i \leq n$, $\pi_i \neq \pi_j$ para $i \neq j$.

A permutação identidade $\iota_{[n]}$ é definida como $\iota_{[n]} = [1 \ 2 \ \cdots \ n]$.

A permutação reversa $\rho_{[n]}$ é definida como $\rho_{[n]} = [n \ \cdots \ 2 \ 1]$.

A permutação $\pi_{[n]}^{-1}$ é a inversa de $\pi_{[n]}$, i. e., a permutação tal que $\pi_{[n]} \cdot \pi_{[n]}^{-1} = \iota_{[n]} = \pi_{[n]}^{-1} \cdot \pi_{[n]}$.

Definição 4. (*[13],[33],[34]*) *Uma reversão, denotada por $r(i, j)$, $1 \leq i \leq j \leq n$, é uma operação que inverte a ordem dos elementos de uma permutação entre as posições i e j , da forma ilustrada a seguir. Seja $\pi_{[n]} = [\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \underbrace{\pi_i \ \cdots \ \pi_j}_{\text{reversão}} \ \cdots \ \pi_n]$; a aplicação da reversão $r(i, j)$ à permutação $\pi_{[n]}$ produz a seguinte permutação:*

$$\pi_{[n]} \cdot r(i, j) = [\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_{i-1} \ \underbrace{\pi_j \ \pi_{j-1} \ \cdots \ \pi_{i+1} \ \pi_i}_{\text{reversão}} \ \pi_{j+1} \ \cdots \ \pi_n].$$

Exemplo 7. *Seja $\pi_{[5]} = [3 \ 2 \ 5 \ 4 \ 1]$ e considere a reversão $r(3, 5)$, aplicada à permutação $\pi_{[5]}$:*

$$[3 \ 2 \ \underbrace{5 \ 4 \ 1}_{\text{reversão}}] \cdot r(3, 5) = [3 \ 2 \ \underbrace{1 \ 4 \ 5}_{\text{reversão}}].$$

Definição 5. (*[24],[35]*) *Uma transposição denotada por $t(i, j, k)$, onde $1 \leq i < j < k \leq n + 1$, “corta” os elementos entre as posições j e $k - 1$ (ambas inclusas) e “cola-os” imediatamente antes da posição i . Uma transposição está associada a uma*

permutação. Seja uma permutação $\pi_{[n]}$, note que $\pi_{[n]} \cdot t(i, j, k) = \pi_{[n]} \cdot (\iota_{[n]} \cdot t(i, j, k))$.
 Seja $\pi_{[n]} = [\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_{i-1} \ \pi_i \ \cdots \ \pi_{j-1} \ \underbrace{\pi_j \ \cdots \ \pi_{k-1}} \ \pi_k \ \cdots \ \pi_n]$; a aplicação da transposição $t(i, j, k)$ à permutação $\pi_{[n]}$ produz a seguinte permutação:

$$\pi_{[n]} \cdot t(i, j, k) = [\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_{i-1} \ \underbrace{\pi_j \ \cdots \ \pi_{k-1}} \ \pi_i \ \cdots \ \pi_{j-1} \ \pi_k \ \cdots \ \pi_n],$$

onde \cdot representa composição de permutações.

Exemplo 8. Seja $\pi_{[8]} = [8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 1 \ 4 \ 3 \ 2]$ e considere a transposição $t(2, 4, 7)$, aplicada à permutação $\pi_{[8]}$:

$$[8 \ 7 \ 6 \ \underbrace{5 \ 1 \ 4} \ 3 \ 2] \cdot t(2, 4, 7) = [8 \ \underbrace{5 \ 1 \ 4} \ 7 \ 6 \ 3 \ 2]$$

ou

$$\pi_{[8]} \cdot ([1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8] \cdot t(2, 4, 7)) = \pi_{[8]} \cdot [1 \ 4 \ 5 \ 6 \ 2 \ 3 \ 7 \ 8] = [8 \ 5 \ 1 \ 4 \ 7 \ 6 \ 3 \ 2].$$

Definição 6. [36] Uma transposição pré-fixada denotada por $t(1, j, k)$ ou $pt(j, k)$, onde $1 < j < k \leq n + 1$, “corta” os elementos entre as posições j e $k - 1$ (ambas inclusas) e “cola-os” imediatamente antes da primeira posição. Seja $\pi_{[n]} = [\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_{j-1} \ \underbrace{\pi_j \ \cdots \ \pi_{k-1}} \ \pi_k \ \cdots \ \pi_n]$, então:

$$\pi_{[n]} \cdot pt(j, k) = [\underbrace{\pi_j \ \cdots \ \pi_{k-1}} \ \pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_{j-1} \ \pi_k \ \cdots \ \pi_n].$$

A transposição pré-fixada também está associada a uma permutação.

Exemplo 9. Seja $\pi_{[8]} = [8 \ 7 \ 6 \ 5 \ 1 \ 4 \ 3 \ 2]$ e considere a transposição $pt(4, 7)$, aplicada à permutação $\pi_{[8]}$:

$$[8 \ 7 \ 6 \ \underbrace{5 \ 1 \ 4} \ 3 \ 2] \cdot pt(4, 7) = [\underbrace{5 \ 1 \ 4} \ 8 \ 7 \ 6 \ 3 \ 2].$$

Definição 7. [37] Um intercâmbio de blocos (ou block-interchange, também denominado block-swapping) com parâmetros (i, j, k, l) , onde $1 \leq i < j \leq k < l \leq n + 1$, troca a posição dos blocos de elementos $\pi_i \cdots \pi_{j-1}$ e $\pi_k \cdots \pi_{l-1}$ em uma permutação. Seja $\pi_{[n]} = [\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_{i-1} \ \underbrace{\pi_i \ \cdots \ \pi_{j-1}} \ \pi_j \ \cdots \ \pi_{k-1} \ \underbrace{\pi_k \ \cdots \ \pi_{l-1}} \ \pi_l \ \cdots \ \pi_n]$, então:

$$\pi_{[n]} \cdot b(i, j, k, l) = [\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_{i-1} \ \underbrace{\pi_k \ \cdots \ \pi_{l-1}} \ \pi_j \ \cdots \ \pi_{k-1} \ \underbrace{\pi_i \ \cdots \ \pi_{j-1}} \ \pi_l \ \cdots \ \pi_n].$$

Exemplo 10. Seja $\pi_{[8]} = [8\ 7\ 6\ 5\ 1\ 4\ 3\ 2]$ e considere $b(3, 5, 6, 9)$, aplicada à permutação $\pi_{[8]}$:

$$[8\ 7\ \underbrace{6\ 5}\ 1\ \underbrace{4\ 3\ 2}] \cdot b(3, 5, 6, 9) = [8\ 7\ \underbrace{4\ 3\ 2}\ 1\ \underbrace{6\ 5}].$$

Uma transposição $t(i, j, k)$ equivale a um intercâmbio de blocos $b(i, j, j, k)$, onde dois blocos adjacentes trocam de posição.

Uma transposição pré-fixada $pt(j, k)$ equivale a um intercâmbio de blocos $b(1, j, j, k)$, onde dois blocos adjacentes trocam de posição e um dos blocos contém o primeiro elemento.

Exemplo 11. Seja $\pi_{[8]} = [8\ 7\ 6\ 5\ 1\ 4\ 3\ 2]$ e considere $b(1, 5, 5, 7)$, aplicada à permutação $\pi_{[8]}$:

$$[\underbrace{8\ 7\ 6\ 5}\ \underbrace{1\ 4}\ 3\ 2] \cdot b(1, 5, 5, 7) = [\underbrace{1\ 4}\ \underbrace{8\ 7\ 6\ 5}\ 3\ 2].$$

Definição 8. [24] A distância de transposição $d_t(\pi, \sigma)$ entre duas permutações $\pi, \sigma \in S_n$ é o número mínimo q de transposições t_1, t_2, \dots, t_q tal que $\pi \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_q = \sigma$.

Observe que $d_t(\pi, \sigma)$ é uma métrica no S_n :

1. $\forall \pi, \sigma \in S_n : d_t(\pi, \sigma) \geq 0$ e $d_t(\pi, \sigma) = 0 \Leftrightarrow \pi = \sigma$ (trivial);
2. $\forall \pi, \sigma \in S_n : d_t(\pi, \sigma) = d_t(\sigma, \pi)$: se $d_t(\pi, \sigma) = q$ então existem q transposições t_1, t_2, \dots, t_q tal que $\pi \cdot t_1 \cdot t_2 \cdot \dots \cdot t_q = \sigma$. Isto implica que $\sigma \cdot t_q^{-1} \cdot t_{q-1}^{-1} \cdot \dots \cdot t_1^{-1} = \pi$, desde que a inversa de uma transposição seja uma transposição. Na verdade, como $(t(i, j, k))^{-1} = t(i, i + k - j, k)$, temos $d_t(\sigma, \pi) \leq d_t(\pi, \sigma)$. A inequação $d_t(\sigma, \pi) \geq d_t(\pi, \sigma)$ é provada analogamente;
3. $\forall \pi, \sigma, \delta \in S_n : d_t(\pi, \delta) \leq d_t(\pi, \sigma) + d_t(\sigma, \delta)$ (desigualdade triangular).

Definição 9. [27] A distância de transposição pré-fixada $d_{pt}(\pi, \sigma)$ entre duas permutações $\pi, \sigma \in S_n$ é o número mínimo q de transposições pt_1, pt_2, \dots, pt_q tal que $\pi \cdot pt_1 \cdot pt_2 \cdot \dots \cdot pt_q = \sigma$.

Podemos utilizar os mesmos argumentos de distância de transposição para concluir que $d_{pt}(\pi, \sigma)$ é uma métrica do S_n .

Definição 10. ([13],[33],[34]) A distância de reversão $d_r(\pi, \sigma)$ entre duas permutações $\pi, \sigma \in S_n$ é o número mínimo q de reversões r_1, \dots, r_q tal que $\pi \cdot r_1 \cdot \dots \cdot r_q = \sigma$.

Definição 11. [24] O diâmetro de transposição $D_t(n)$ do grupo simétrico S_n é a maior distância de transposição entre quaisquer dois elementos do grupo, ou seja:

$$D_t(n) := \max\{d_t(\pi, \sigma); \pi, \sigma \in S_n\}.$$

Definição 12. O diâmetro de transposição pré-fixada $D_{pt}(n)$ do grupo simétrico S_n é a maior distância de transposição pré-fixada entre quaisquer dois elementos do grupo, ou seja:

$$D_{pt}(n) := \max\{d_{pt}(\pi, \sigma); \pi, \sigma \in S_n\}.$$

Definição 13. [32] O grafo de uma permutação $\pi_{[n]}$ possui conjunto de vértices $\{1, 2 \dots, n\}$ e contém uma aresta orientada $\langle u, v \rangle$ quando $\pi_{[n]}(u) = v$.

Definição 14. Uma permutação unicíclica $\delta_{[n]}$ é uma permutação cujo grafo associado a ela possui um único ciclo.

Exemplo 12. Seja $\delta_{[8]} = [8 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 1 \ 2 \ 3]$. Note que: $\delta_{[8]}(1) = 8$, $\delta_{[8]}(8) = 3$, $\delta_{[8]}(3) = 5$, $\delta_{[8]}(5) = 7$, $\delta_{[8]}(7) = 2$, $\delta_{[8]}(2) = 4$, $\delta_{[8]}(4) = 6$, $\delta_{[8]}(6) = 1$.

O grafo da permutação $\delta_{[8]}$ forma um único ciclo:

$$1 \rightarrow 8 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 1.$$

A composição de uma permutação unicíclica $\delta_{[n]}$ com uma permutação $\pi_{[n]}$ qualquer pode ser feita trocando cada elemento u da permutação $\pi_{[n]}$ por $\delta_{[n]}(u) = v$.

Realizando composições sucessivas da permutação unicíclica $\delta_{[n]}$ à permutação $\pi_{[n]}$ obtemos, no máximo, n permutações distintas (inclusive $\pi_{[n]}$), pois $\pi_{[n]} \cdot \delta_{[n]}^n = \pi_{[n]}$, onde $\delta_{[n]}^n$ representa a composição de $\delta_{[n]}$ aplicada à $\pi_{[n]}$ exatamente n vezes.

Exemplo 13. Seja $\delta_{[n]}$ como no exemplo anterior e seja $\pi_{[8]} = [2\ 5\ 8\ 6\ 3\ 4\ 7\ 1]$.

Então: $\pi_{[8]} \cdot \delta_{[8]} = [4\ 7\ 3\ 1\ 5\ 6\ 2\ 8]$.

Note que:

$$\pi_{[8]} \cdot \delta_{[8]} \cdot \delta_{[8]} = \pi_{[8]} \cdot \delta_{[8]}^2 = [6\ 2\ 5\ 8\ 7\ 1\ 4\ 3];$$

$$\pi_{[8]} \cdot \delta_{[8]}^3 = [1\ 4\ 7\ 3\ 2\ 8\ 6\ 5];$$

$$\pi_{[8]} \cdot \delta_{[8]}^4 = [8\ 6\ 2\ 5\ 4\ 3\ 1\ 7];$$

$$\pi_{[8]} \cdot \delta_{[8]}^5 = [3\ 1\ 4\ 7\ 6\ 5\ 8\ 2];$$

$$\pi_{[8]} \cdot \delta_{[8]}^6 = [5\ 8\ 6\ 2\ 1\ 7\ 3\ 4];$$

$$\pi_{[8]} \cdot \delta_{[8]}^7 = [7\ 3\ 1\ 4\ 8\ 2\ 5\ 6];$$

$$\pi_{[8]} \cdot \delta_{[8]}^8 = [2\ 5\ 8\ 6\ 3\ 4\ 7\ 1] = \pi_{[8]}.$$

2.4 Operações

Definimos aqui algumas operações que serão usadas nos próximos capítulos.

Definição 15. (*inserção de um elemento x na última posição*) Seja $\pi_{[n-1]} = [\pi_1\ \pi_2\ \dots\ \pi_{n-1}]$ uma permutação de $n - 1$ elementos e x um inteiro entre 1 e n . Definiremos $\pi_{[n-1]} \oplus x$ como sendo a permutação $[\pi'_1\ \pi'_2\ \dots\ \pi'_{n-1}\ x]$ onde:

$$\pi'_i = \begin{cases} \pi_i, & \text{se } \pi_i \neq x \\ n, & \text{se } \pi_i = x, \end{cases}$$

ou seja, esta operação consiste em inserir o elemento x na última posição e colocar o valor n na posição onde estava o elemento x .

Exemplo 14. Seja $\pi_{[n-1]} = [3\ 2\ 1\ 4]$ e seja $x = 3$, então $\pi'_{[n]} = [3\ 2\ 1\ 4] \oplus 3 = [5\ 2\ 1\ 4\ 3]$.

Definição 16. [36] Denotamos concatenação da sequência a com a sequência b , $a \odot b$, à operação que une um bloco contendo uma sequência a a outro bloco contendo uma sequência b .

Exemplo 15. *Seja $a = [1\ 2\ 3]$ e $b = [4\ 5\ 6]$, temos que:*

$$a \odot b = [1\ 2\ 3] \odot [4\ 5\ 6] = [1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6].$$

Também utilizamos um operador generalizado de concatenação tal que $\bigodot_{i=j}^z f(i)$ é a sequência resultante da concatenação das sequências $f(i)$, com i variando de j até z .

Exemplo 16. *Considere a sequência resultante do operador generalizado de concatenação $f(i) = [1 + 3i\ 2 + 3i]$ com $j = 0$ e $z = 4$, temos:*

$$\bigodot_{i=0}^4 [1 + 3i\ 2 + 3i] = [1\ 2\ 4\ 5\ 7\ 8\ 10\ 11\ 13\ 14].$$

A princípio, o operador concatenação poderia unir sequências com elementos repetidos. Porém, como nesta tese usamos este operador para juntar elementos de uma permutação, os elementos são distintos e a concatenação de todas as sequências resulta em uma permutação.

Capítulo 3

O grafo PFTRG

Neste capítulo, introduzimos o grafo $PFTRG$ e apresentamos algumas propriedades combinatórias e estruturais deste grafo.

3.1 Propriedades gerais

Definição 17. Denotaremos o Grafo de Rearranjo de Genomas por Transposições Pré-Fixadas, $PFTRG(n)$, o grafo cujo conjunto de vértices é o grupo simétrico S_n , possuindo como arestas os pares $(\pi_{[n]}, \sigma_{[n]})$ para os quais existe uma transposição $pt(j, k)$ tal que $\sigma_{[n]} = \pi_{[n]} \cdot pt(j, k)$. Observe na Figura 3.1 os grafos $PFTRG(1)$, $PFTRG(2)$ e $PFTRG(3)$.

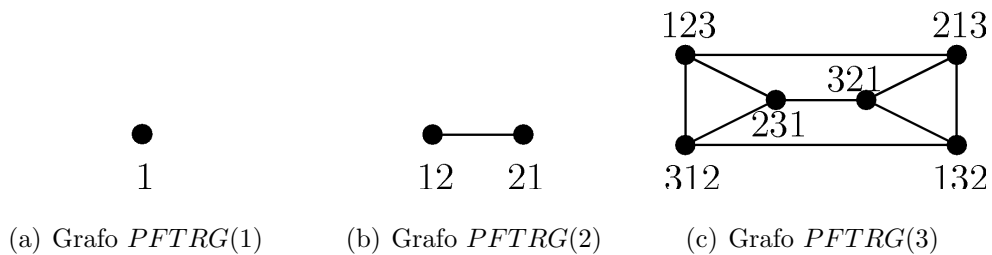


Figura 3.1: Grafos $PFTRG(n)$ com $n = 1, n = 2$ e $n = 3$.

Proposição 18. O grafo $PFTRG(n)$ é regular de grau $\frac{n^2-n}{2}$.

Demonstração. O grau de cada vértice é o número de transposições pré-fixadas que podemos associar a uma permutação.

Seja uma permutação $\pi_{[n]}$ de n elementos.

Na verdade queremos determinar o número de maneiras distintas de arrumar n elementos de modo que só é possível mover elementos para a primeira posição.

Observe que podemos mover de $n - 1$ maneiras distintas os blocos contendo 1 elemento, pois somente o primeiro elemento não será movido.

Podemos mover de $n - 2$ maneiras distintas os blocos contendo 2 elementos.

E assim sucessivamente, até que existe 1 maneira de mover o bloco contendo $n - 1$ elementos.

Ao fazermos a soma $\sum_{i=1}^{n-1} i = 1 + 2 + \dots + n - 2 + n - 1 = \frac{(1+n-1)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2}$.

Como o argumento é análogo para qualquer vértice, temos que o grafo $PFTRG(n)$ é regular de grau $\frac{n^2-n}{2}$. \square

Observe que este valor é o número de transposições pré-fixadas diferentes que podem ser aplicadas a cada permutação de n elementos.

Proposição 19. *O grafo $PFTRG(n)$ possui $N = n!$ vértices e $M = \frac{(n^2-n)n!}{4}$ arestas.*

Demonstração. O número de vértices é o número de permutações de n elementos, ou seja, $N = n!$ vértices. Como o grafo é regular, o número de arestas pode ser verificado pela seguinte relação: o dobro do número de arestas M é igual ao número de vértices ($n!$) vezes o grau de cada vértice (Δ), ou seja:

$$M = \frac{n!\Delta}{2} = \frac{n!n^2 - n}{2} = \frac{(n^2 - n)n!}{4}.$$

\square

Proposição 20. *A inversa de uma transposição pré-fixada $pt(j, k)$ é uma transposição pré-fixada $pt(k - j + 1, k)$, isto é, $(pt(j, k))^{-1} = pt(k - j + 1, k)$.*

Demonstração. Seja $\pi'_{[n]} = \pi_{[n]} \cdot pt(j, k)$, e queremos encontrar a permutação $(pt(j, k))^{-1}$ tal que $\pi'_{[n]} \cdot (pt(j, k))^{-1} = \pi_{[n]}$. Descrevamos cada elemento π'_l , $1 \leq l \leq n$ de $\pi'_{[n]}$ em função de l :

$$\pi'_l = \begin{cases} \pi_{l-1+j}, & \text{se } 1 \leq l < 1 + k - j \\ \pi_{l-k+j}, & \text{se } 1 + k - j \leq l < k \\ \pi_l, & \text{se } l \geq k, \end{cases}$$

ou seja,

$$\pi'_{[n]} = [\pi_j \pi_{j+1} \cdots \pi_{k-1} \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_{j-1} \pi_k \cdots \pi_n],$$

e considere a aplicação da transposição $pt(1 + k - j, k)$ a $\pi'_{[n]}$, dando origem a $\pi''_{[n]} = \pi'_{[n]} \cdot pt(1 + k - j, k)$, ou seja,

$$\pi''_{[n]} = [\pi'_{1+k-j} \cdots \pi'_{k-1} \pi'_1 \cdots \pi'_{k-j} \pi'_k \cdots \pi'_n],$$

onde cada elemento $\pi''_{l'}$ é tal que

$$\pi''_{l'} = \begin{cases} \pi'_{l'+k-j}, & \text{se } 1 \leq l' < j \\ \pi'_{l'-j+1}, & \text{se } j \leq l' < k \\ \pi'_{l'}, & \text{se } l' \geq k. \end{cases}$$

Para $1 \leq l' < j$, como $1 + k - j \leq l' + k - j < j + (k - j)$, obtemos $\pi''_{l'} = \pi'_{l'+k-j} = \pi^{(l'+k-j)-k+j} = \pi'_{l'}$; no caso $j \leq l' < k$, temos $\pi''_{l'} = \pi'_{l'-j+1} = \pi^{(l'-j+1)-1+j} = \pi'_{l'}$, pois neste caso $j - (j - 1) \leq l' - j + 1 < k - j + 1$. Em última instância, $l' \geq k$, temos $\pi''_{l'} = \pi'_{l'} = \pi'_{l'}$. Em todos os casos, temos que $\pi''_{l'} = \pi'_{l'}$, logo $pt(k - j + 1, k)$ é a inversa de $pt(j, k)$. \square

Proposição 21. *O grafo PFTRG(n) é um grafo de Cayley.*

Demonstração. Seja $G = (S_n, \cdot)$ onde S_n é um grupo finito e seja o conjunto $S = \{\iota_{[n]} \cdot pt(j, k), 1 < j < k \leq n + 1\}$. Primeiramente observe que $\iota \notin S$.

Note que dado $s \in S$ temos que o inverso $s^{-1} \in S$ (pela Proposição 20, a inversa de uma transposição pré-fixada é também pré-fixada).

Resta mostrar que S é de fato um conjunto gerador de G . Para tal, vamos mostrar que existe caminho entre quaisquer dois vértices deste grafo, ou seja, G é conexo. Em particular, basta mostrar que existe caminho entre qualquer permutação $\pi_{[n]}$ do grafo e a permutação identidade $\iota_{[n]}$ (pois se existe caminho entre $\pi_{[n]}$ e $\iota_{[n]}$ e entre $\sigma_{[n]}$ e $\iota_{[n]}$, então existe caminho entre $\pi_{[n]}$ e $\sigma_{[n]}$).

Considere uma permutação qualquer $\pi_{[n]} = [\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n]$.

Uma forma fácil de se obter um caminho entre $\pi_{[n]}$ e $\iota_{[n]}$ utilizando somente transposições pré-fixadas é fazendo o seguinte procedimento: mover para frente o elemento $n - 1$, em seguida, mover para frente o elemento $n - 2$ e assim sucessivamente. Note que o elemento n estará naturalmente ao final da permutação, visto

que todos os elementos que estariam à sua direita passarão para a sua esquerda, isto significa que precisamos de $n - 1$ operações. Isto é:

Para $i \leftarrow 1$ até $n - 1$ faça

Seja l tal que $\pi_l = n - i$

$$\pi_{[n]} \leftarrow \pi_{[n]} \cdot pt(l, l + 1).$$

Observe que o número l indica a posição em que o elemento $n - i$ se encontra e portanto para transpor o elemento da posição l para a primeira posição aplicamos a transposição pré-fixada $pt(l, l + 1)$.

Logo, $\Gamma(G, S) = PFTRG(n)$ é um grafo de Cayley. \square

Lema 22. [9] *Os grafos de Cayley são vértice-transitivos.*

Demonstração. Os grafos de Cayley $\Gamma(G, S) = (V, E)$ são da forma: $G = (\{g_1, g_2, \dots, g_n\}, \cdot)$ e $S = \{s_1, s_2, \dots, s_m\}$, $S \subseteq G$ tal que $(g, h) \in E, 1 \leq g, h \leq n$ se, e somente se, existe $s \in S$ tal que $h = g \cdot s$.

Para mostrar que os grafos de Cayley são vértice-transitivos deve existir um automorfismo A tal que:

Para todo $g, h \in G$ temos que $A(g) = g' \cdot g = h$ através de uma função bijetora A tal que:

$$A : G \rightarrow G$$

$$A_{g'} : g \mapsto g' \cdot g.$$

Devemos ter que:

Para todo $g, h \in G$ temos que: $(g, h) \in E$, se e somente se, $(A(g), A(h)) \in E$.

Primeiramente, vamos analisar que:

Para todo $(g, h) \in E$ temos que existe s tal que $h = g \cdot s$.

$$A(g) = g' \cdot g.$$

$$A(h) = g' \cdot h = g' \cdot (g \cdot s) = (g' \cdot g) \cdot s = A(g) \cdot s.$$

Como $A(h) = A(g) \cdot s$ então: $(A(g), A(h)) \in E$.

Agora, analisaremos a volta, ou seja:

Para todo $(g, h) \notin E$ temos que não existe s tal que $h = g \cdot s$.

Seja $t \in G$ tal que $t \notin S$, temos que $h = g \cdot t$.

$$A(g) = g' \cdot g.$$

$$A(h) = g' \cdot h = g' \cdot (g \cdot t) = (g' \cdot g) \cdot t = A(g) \cdot t.$$

Como $t \notin S$, então $(A(g), A(h)) \notin E$.

Logo, os grafos de Cayley são vértice-transitivos. \square

Corolário 23. *O grafo $PFTRG(n)$ é vértice-transitivo.*

Demonstração. Como os grafos de Cayley são vértice-transitivos e o $PFTRG(n)$ é um grafo de Cayley, então este é vértice-transitivo. \square

É válido ressaltar que nem todo grafo vértice-transitivo é um grafo de Cayley. Um exemplo simples é o grafo de Petersen, que é um grafo cúbico com 10 vértices que é vértice-transitivo e não é um grafo de Cayley.

Proposição 24. *O grafo $PFTRG(n)$ não é aresta-transitivo.*

Demonstração. Como se pode observar na Figura 3.1(c) da Página 19 do $PFTRG(3)$. A aresta $e_1 = ([2\ 3\ 1], [3\ 2\ 1])$ não pertence a um 3 – ciclo e portanto não pode ser mapeada pela aresta $e_2 = ([1\ 2\ 3], [3\ 1\ 2])$ que pertence a um 3 – ciclo. Então não existe automorfismo A tal que $A(e_1) = e_2$.

A generalização para o $PFTRG(n)$ é fácil pois a aresta $([2\ 3\ 1\ 4\ 5 \dots n], [3\ 2\ 1\ 4\ 5 \dots n])$ continuará não pertencendo a um triângulo e portanto continuará não podendo ser mapeada pela aresta $([1\ 2\ 3\ 4\ 5 \dots n], [3\ 1\ 2\ 4\ 5 \dots n])$. \square

Corolário 25. *O grafo $PFTRG(n)$ não é simétrico e portanto não é distância-transitivo.*

3.2 Particionamento do grafo $PFTRG$

Lema 26. *O grafo $PFTRG(n)$ pode ser particionado em n grafos isomorfos ao $PFTRG(n-1)$, tal que as permutações de cada partição $PFTRG_x(n)$, $1 \leq x \leq n$ terminem com um mesmo elemento x .*

Demonstração. Sejam $\pi_{[n-1]} = [\pi_1 \cdots \pi_{n-1}]$ e $\sigma_{[n-1]} = [\sigma_1 \cdots \sigma_{n-1}]$ dois vértices distintos do $PFTRG(n-1)$. Considere a permutação $\pi_{[n-1]} \oplus x$, sendo x um inteiro entre 1 e n e \oplus é a operação citada na Definição 15 da Página 17. Podemos observar que $\pi_{[n-1]} \oplus x$ é um vértice do $PFTRG_x(n)$ e que $\pi_{[n-1]}, \sigma_{[n-1]}$ são adjacentes no $PFTRG(n-1)$ se, e somente se, aplicando a mesma transposição pré-fixada $pt(j, k)$, $1 < j < k \leq n$, $\pi_{[n-1]} \oplus x, \sigma_{[n-1]} \oplus x$ são adjacentes no $PFTRG_x(n)$.

Seja $pt(j, k)$ uma transposição pré-fixada tal que $\sigma_{[n-1]} = \pi_{[n-1]} \cdot pt(j, k)$, ou seja,

$$\sigma_{[n-1]} = [\pi_j \cdots \pi_{k-1} \pi_1 \pi_2 \cdots \pi_{j-1} \pi_k \cdots \pi_{n-1}],$$

onde o l -ésimo elemento de $\sigma_{[n-1]}$ é:

$$\sigma_l = \begin{cases} \pi_{l+j-1}, & \text{se } 1 \leq l < 1+k-j \\ \pi_{l-k+j}, & \text{se } 1+k-j \leq l < k \\ \pi_l, & \text{se } l \geq k. \end{cases}$$

Cada elemento da permutação $\sigma'_{[n]} = \sigma_{[n-1]} \oplus x$ é descrito da seguinte forma:

$$\sigma'_l = \begin{cases} x, & \text{se } l = n \\ \sigma_l, & \text{se } \sigma_l \neq x \\ n, & \text{se } \sigma_l = x. \end{cases}$$

Aplicando-se $pt(j, k)$ a $\pi'_{[n]} = \pi_{[n-1]} \oplus x$, obtemos $\pi''_{[n]} = \pi'_{[n]} \cdot pt(j, k)$ descrita por:

$$\pi''_l = \begin{cases} \pi'_{l+j-1}, & \text{se } 1 \leq l < 1+k-j \\ \pi'_{l-k+j}, & \text{se } 1+k-j \leq l < k \\ \pi'_l, & \text{se } l \geq k. \end{cases}$$

Comparemos um elemento σ'_l com um elemento π''_l . Se $l = n$, então $\sigma'_n = \pi''_n = x$.

Sendo $l < n$, dividimos a análise em três casos:

- $1 \leq l < 1 + k - j$

$$\begin{aligned} \pi_l'' = \pi_{l+j-1}' &= \begin{cases} \pi_{l+j-1}, & \text{se } \pi_{l+j-1} \neq x \\ n, & \text{se } \pi_{l+j-1} = x, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma_l, & \text{se } \sigma_l \neq x \\ n, & \text{se } \sigma_l = x, \end{cases} \\ &\text{(pois } \sigma_l = \pi_{l+j-1} \text{ para } i \leq l < 1 + k - j) \\ &= \sigma_l'. \end{aligned}$$

- $1 + k - j \leq l < k$

$$\begin{aligned} \pi_l'' = \pi_{l-k+j}' &= \begin{cases} \pi_{l-k+j}, & \text{se } \pi_{l-k+j} \neq x \\ n, & \text{se } \pi_{l-k+j} = x, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma_l, & \text{se } \sigma_l \neq x \\ n, & \text{se } \sigma_l = x, \end{cases} \\ &\text{(pois } \sigma_l = \pi_{l-k+j} \text{ para } 1 + k - j \leq l < k) \\ &= \sigma_l'. \end{aligned}$$

- $l \geq k$

$$\begin{aligned} \pi_l'' = \pi_l' &= \begin{cases} \pi_l, & \text{se } \pi_l \neq x \\ n, & \text{se } \pi_l = x, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \sigma_l, & \text{se } \sigma_l \neq x \\ n, & \text{se } \sigma_l = x, \end{cases} \\ &\text{(pois } \sigma_l = \pi_l \text{ para } l \geq k) \\ &= \sigma_l'. \end{aligned}$$

Logo, temos que todo e qualquer elemento $\pi_{[n]}'' = (\pi_{[n-1]} \oplus x) \cdot pt(j, k)$ é igual a $\sigma_{[n]}' = \sigma_{[n-1]} \oplus x$, ou seja, existe uma transposição que transforma $\pi_{[n-1]} \oplus x$ em $\sigma_{[n-1]} \oplus x$, o que indica que estas duas permutações são adjacentes em $PFTRG(n)$.

□

Observação 27. Neste particionamento, podemos denominar $PFTRG_x(n)$, $1 \leq x \leq n$, o grafo isomorfo ao $PFTRG(n-1)$ com todas as permutações de n elementos contendo x na última posição.

No grafo $PFTRG(n)$ construído desta forma, cada vértice com último elemento y possui uma aresta incidente em cada partição $PFTRG_x(n)$, $1 \leq x \leq n$, $x \neq y$.

A Figura 3.2 exibe a construção de parte do grafo $PFTRG(4)$ em 4 partições formadas por grafos isomorfos ao $PFTRG(3)$ onde estão representadas apenas as arestas incidentes à permutação identidade $\iota_{[4]} = [1\ 2\ 3\ 4]$.

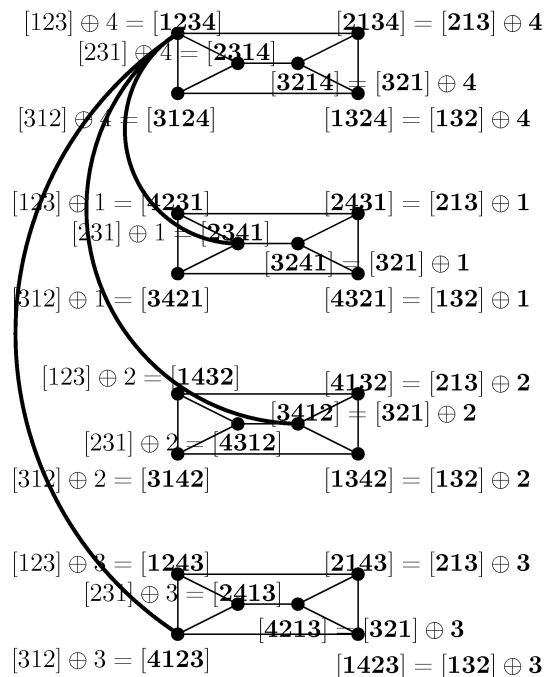


Figura 3.2: Parte do $PFTRG(4)$ a partir do $PFTRG(3)$ com todas as arestas incidentes ao vértice identidade $\iota_{[4]}$.

Capítulo 4

Ciclos Hamiltonianos no grafo

PFTRG

Neste capítulo, apresentamos uma forma especial de construir ciclos Hamiltonianos no grafo $PFTRG(n)$. O processo de construção é recursivo, isto é, a construção do ciclo Hamiltoniano do $PFTRG(n)$ é obtida a partir do ciclo Hamiltoniano do $PFTRG(n - 1)$.

A construção do ciclo Hamiltoniano será diferente de acordo com a paridade de n . Para a construção do ciclo Hamiltoniano do $PFTRG(n)$ para n par, precisamos de apenas um ciclo Hamiltoniano de ordem $n - 1$ (portanto ímpar) construído de uma forma particular, como será mostrado. Já para a construção do ciclo Hamiltoniano do $PFTRG(n)$ para n ímpar, precisamos de 3 ciclos Hamiltonianos pares construídos cada um de forma particular também. E então exibimos, através do teorema que será apresentado, uma forma recursiva de obter pelo menos um ciclo Hamiltoniano no grafo $PFTRG(n)$, para qualquer n .

Construímos o grafo $PFTRG(n)$ como vimos no Lema 26 da Página 24, ou seja, como n grafos isomorfos ao $PFTRG(n - 1)$ em que conhecemos em cada partição $PFTRG_x(n)$, $1 \leq x \leq n$ o último elemento x de cada partição. Isso significa que dada uma permutação qualquer de n elementos sabemos exatamente em qual partição esta se encontra, basta observar o último elemento.

Para provar que o grafo $PFTRG(n)$ é Hamiltoniano usamos o conceito de *grafo reduzido*, que apresentamos a seguir. Exemplos serão dados nas Figuras 4.1 e 4.2.

Definição 28. Um subgrafo do $PFTRG(n)$ formado por 2 vértices adjacentes de cada partição $PFTRG_x(n)$, $1 \leq x \leq n$ é um grafo reduzido se formar um ciclo.

É importante ressaltar que há inúmeros grafos reduzidos do grafo $PFTRG(n)$ para um dado $n \geq 3$.

Note que o grafo reduzido do $PFTRG(n)$ é um $2n$ -ciclo, pois há 2 vértices de cada partição e existem n partições.

Definição 29. Chamamos de aresta representante a aresta incidente a vértices de mesma partição e a transposição pré-fixada $pt(j, k)$ associada a esta aresta é chamada de transposição pré-fixada representante $pt_r(j, k)$.

Definição 30. Chamamos de aresta ligante a aresta incidente a vértices de partições distintas e a transposição pré-fixada $pt(j, k)$ associada a esta aresta é chamada de transposição pré-fixada ligante $pt_l(j, k)$.

Observe alguns exemplos de diferentes grafos reduzidos para $n = 6$. As tabelas 4.1 e 4.2 mostram dois vértices de cada partição e as transposições pré-fixadas intercalando representantes e ligantes entre vértices adjacentes.

Através das tabelas obtemos dois grafos reduzidos para $n = 6$ que podem ser observados na figura 4.1 e figura 4.2 contendo as permutações da tabela 4.1 e tabela 4.2, respectivamente. As arestas pontilhadas são arestas representantes e as arestas preenchidas são arestas ligantes no grafo reduzido.

Para mostrar que um grafo é um grafo reduzido do $PFTRG(n)$ devemos garantir que existe o ciclo que percorre cada vértice exatamente uma vez intercalando arestas representante e ligante, de modo que não há repetição das partições do $PFTRG_x(n)$, $1 \leq x \leq n$.

Um grafo reduzido do $PFTRG(n)$ é um ciclo Hamiltoniano neste subgrafo do $PFTRG(n)$. É fácil ver que este grafo é um ciclo que passa por todos os vértices exatamente uma vez.

Apresentamos, através dos Lemas 31, 32, 33 e 40, construções particulares de grafos reduzidos do $PFTRG(n)$ em que exigimos um vértice de origem, que será sempre o vértice identidade $\iota_{[n]}$, e um vértice de término v_{2n} .

Permutação	Transposição
1 2 3 4 5 6	pt(4,6)
4 5 1 2 3 6	pt(6,7)
6 4 5 1 2 3	pt(4,6)
1 2 6 4 5 3	pt(6,7)
3 1 2 6 4 5	pt(4,6)
6 4 3 1 2 5	pt(6,7)
5 6 4 3 1 2	pt(4,6)
3 1 5 6 4 2	pt(6,7)
2 3 1 5 6 4	pt(4,6)
5 6 2 3 1 4	pt(6,7)
4 5 6 2 3 1	pt(4,6)
2 3 4 5 6 1	pt(6,7)
1 2 3 4 5 6	-

Tabela 4.1: Tabela referente aos vértices de um grafo reduzido do $PFTRG(6)$.

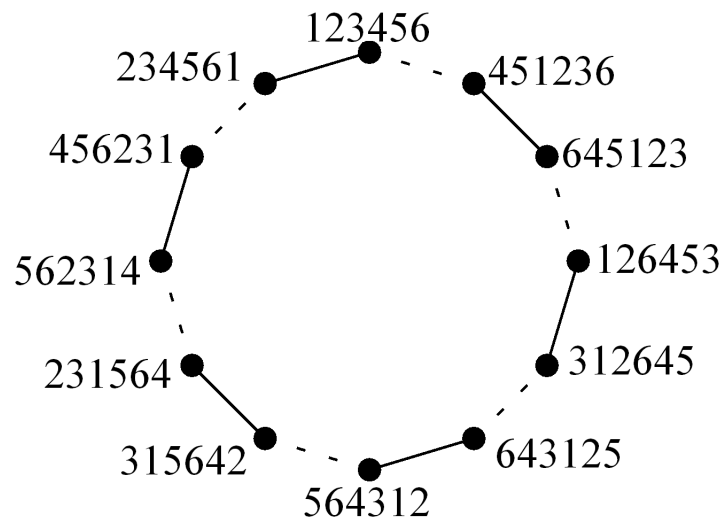


Figura 4.1: Um grafo reduzido para $n = 6$ utilizando a tabela 4.1.

Permutação	Transposição
1 2 3 4 5 6	pt(4,6)
4 5 1 2 3 6	pt(2,7)
5 1 2 3 6 4	pt(4,6)
3 6 5 1 2 4	pt(2,7)
6 5 1 2 4 3	pt(4,6)
2 4 6 5 1 3	pt(2,7)
4 6 5 1 3 2	pt(4,6)
1 3 4 6 5 2	pt(2,7)
3 4 6 5 2 1	pt(4,6)
5 2 3 4 6 1	pt(2,7)
2 3 4 6 1 5	pt(4,6)
6 1 2 3 4 5	pt(2,7)
1 2 3 4 5 6	-

Tabela 4.2: Tabela referente aos vértices de um outro grafo reduzido do $PFTRG(6)$.

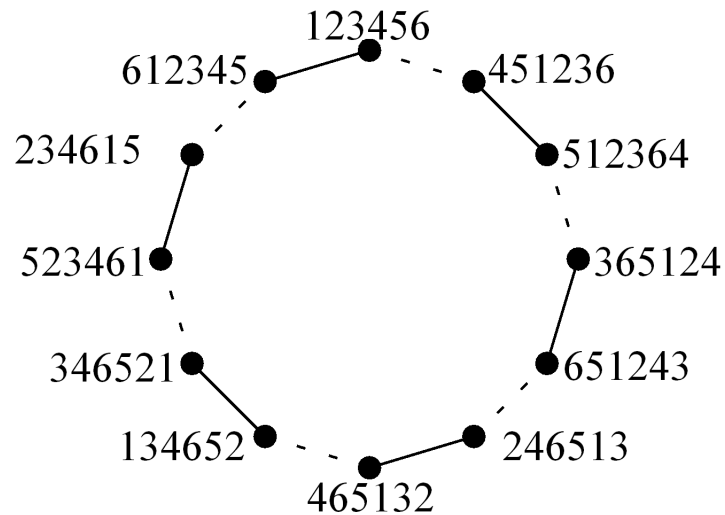


Figura 4.2: Outro grafo reduzido para $n = 6$ utilizando a tabela 4.2.

4.1 Grafos reduzidos do grafo $PFTRG$

4.1.1 Caso par

Vamos mostrar a existência de três grafos reduzidos distintos quando n é par, pois estes são importantes para o teorema que apresentamos posteriormente.

Lema 31. Quando n é par e $n \geq 6$, existe um grafo reduzido do $PFTRG(n)$ com $v_1 = \iota_{[n]}$ e $v_{2n} = \iota_{[n]} \cdot pt(2, n+1) = [2\ 3 \ \cdots\ n\ 1]$ utilizando:

$pt_r(4, n)$ como transposição pré-fixada representante;

$pt_l(n, n+1)$ como transposição pré-fixada ligante.

Demonstração. Fazemos uma permutação $\delta_{[n]}$ resultante da composição da transposição pré-fixada representante $pt_r(4, n)$ com a transposição pré-fixada ligante $pt_l(n, n+1)$, aplicada à identidade, isto é,

$$(\iota_{[n]} \cdot pt_r(4, n)) \cdot pt_l(n, n+1) = \delta_{[n]} = [n\ 4\ 5 \ \cdots\ n-1\ 1\ 2\ 3]$$

Observe que a permutação $\delta_{[n]} = [n\ 4\ 5 \ \cdots\ n-1\ 1\ 2\ 3]$ é unicíclica (ver Definição 14), analise:

$$\delta_{[n]}(1) = n,$$

$$\delta_{[n]}(n) = 3,$$

$$\delta_{[n]}(3) = 5,$$

$$\delta_{[n]}(a \geq 5, a \text{ ímpar}) = a + 2 \text{ enquanto } a < n - 3,$$

$$\delta_{[n]}(n - 3) = n - 1,$$

$$\delta_{[n]}(n - 1) = 2,$$

$$\delta_{[n]}(2) = 4,$$

$$\delta_{[n]}(a \geq 4, a \text{ par}) = a + 2 \text{ enquanto } a < n - 4,$$

$$\delta_{[n]}(n - 4) = n - 2,$$

$$\delta_{[n]}(n - 2) = 1.$$

Note que o grafo da permutação $\delta_{[n]}$ forma um único ciclo:

$$\begin{aligned} n \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow \cdots \rightarrow (n-1) \rightarrow 2 \rightarrow 4 \\ \rightarrow 6 \rightarrow 8 \rightarrow \cdots \rightarrow (n-2) \rightarrow 1 \rightarrow n. \end{aligned}$$

Esta ordem do ciclo da permutação unicíclica é exatamente a ordem das partições $PFTRG_x(n)$, $1 \leq x \leq n$ percorridas, ou seja,

$$PFTRG_n(n), PFTRG_3(n), PFTRG_5(n), PFTRG_7(n), PFTRG_9(n), \cdots,$$

$$PFTRG_{n-1}(n), PFTRG_2(n), PFTRG_4(n), PFTRG_6(n), PFTRG_8(n), \dots, \\ PFTRG_{n-2}(n), PFTRG_1(n), PFTRG_n(n).$$

Já vimos que existe o grafo reduzido, agora precisamos mostrar que este grafo reduzido possui o vértice de término $v_{2n} = \iota_{[n]} \cdot pt(2, n + 1) = [2 \ 3 \ \dots \ n \ 1]$

Para encontrarmos o vértice v_{2n-1} basta compor a permutação $\iota_{[n]}$ com a permutação $\delta_{[n]}$ (ver Exemplo 13 na Página 17) exatamente $n - 1$ vezes, pois $\delta_{[n]}$ é a composição das transposições pré-fixadas representante e ligante aplicada à identidade e temos $n - 1$ composições até chegar no vértice v_{2n-1} .

Porém, $\iota_{[n]} \cdot \delta_{[n]}^{n-1}$ equivale a percorrer apenas uma vez o grafo da permutação $\delta_{[n]}$ no sentido contrário já que $\delta_{[n]}^n = \delta_{[n]}$, isto é, devemos alterar cada elemento u da permutação $\iota_{[n]}$ pelo consecutivo $\delta_{[n]}(u) = v$ do grafo da permutação $\delta_{[n]}$ percorrido no sentido contrário. Como o grafo da permutação $\delta_{[n]}$ percorrido no sentido contrário é:

$$n \rightarrow 1 \rightarrow (n - 2) \rightarrow \dots \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow (n - 1) \\ \rightarrow \dots \rightarrow 9 \rightarrow 7 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow n.$$

Como $\delta_{[n]}^{n-1}(1) = n - 2$; $\delta_{[n]}^{n-1}(2) = n - 1$; $\delta_{[n]}^{n-1}(3) = n$; $\delta_{[n]}^{n-1}(4) = 2$; $\delta_{[n]}^{n-1}(5) = 3$; $\delta_{[n]}^{n-1}(6) = 4$; \dots ; $\delta_{[n]}^{n-1}(n) = 1$, obtemos:

$v_{2n-1} = [n - 2 \ n - 1 \ n \ 2 \ 3 \ 4 \ \dots \ 1]$ e portanto ao aplicarmos a transposição pré-fixada representante $pt_r(4, n)$ encontramos v_{2n} :

$$v_{2n} = v_{2n-1} \cdot pt_r(4, n) = [2 \ 3 \ \dots \ n \ 1] = \iota_{[n]} \cdot pt(2, n + 1).$$

□

Observe que a Figura 4.1 é um exemplo deste grafo reduzido para $n = 6$.

Lema 32. Quando n é par e $n \geq 6$, existe um grafo reduzido do $PFTRG(n)$ com $v_1 = \iota_{[n]}$ e $v_{2n} = \iota_{[n]} \cdot pt(n, n + 1) = [n \ 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n - 1]$ utilizando:

$pt_r(4, n)$ como transposição pré-fixada representante;

$pt_l(2, n + 1)$ como transposição pré-fixada ligante.

Demonstração. O argumento é análogo ao anterior, fazemos uma permutação $\delta_{[n]}$ resultante da composição da transposição pré-fixada representante $pt_r(4, n)$ com a transposição pré-fixada ligante $pt_l(2, n + 1)$, aplicada à identidade, isto é,

$$(\iota_{[n]} \cdot pt_r(4, n)) \cdot pt_l(2, n+1) = \delta_{[n]} = [5 \ 6 \ 7 \ \cdots \ n-1 \ 1 \ 2 \ 3 \ n \ 4].$$

Vamos observar que a permutação $\delta_{[n]} = [5 \ 6 \ 7 \ \cdots \ n-1 \ 1 \ 2 \ 3 \ n \ 4]$ é unicíclica (ver Definição 14). Dividiremos a análise em dois casos:

Para o caso em que n é da forma $4t+2$, $t \in \mathbb{N}^*$:

$$\delta_{[n]}(n) = 4,$$

$$\delta_{[n]}(a \geq 4, a = 4t) = a + 4 \text{ enquanto } a < n - 2,$$

$$\delta_{[n]}(n-2) = 3,$$

$$\delta_{[n]}(3) = 7,$$

$$\delta_{[n]}(a \geq 7, a = 4t+3) = a + 4 \text{ enquanto } a < n - 3,$$

$$\delta_{[n]}(n-3) = 2,$$

$$\delta_{[n]}(2) = 6,$$

$$\delta_{[n]}(a \geq 6, a = 4t+2) = a + 4 \text{ enquanto } a < n - 4,$$

$$\delta_{[n]}(n-4) = 1,$$

$$\delta_{[n]}(1) = 5,$$

$$\delta_{[n]}(a \geq 5, a = 4t+1) = a + 4 \text{ enquanto } a < n - 1,$$

$$\delta_{[n]}(n-1) = n.$$

Note que o grafo da permutação $\delta_{[n]}$ forma um único ciclo:

$$\begin{aligned} n &\rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 12 \rightarrow \cdots \rightarrow (n-2) \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 11 \\ &\rightarrow 15 \rightarrow \cdots \rightarrow (n-3) \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 10 \rightarrow \cdots \rightarrow (n-4) \\ &\rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \rightarrow \cdots \rightarrow (n-1) \rightarrow n. \end{aligned}$$

Esta ordem do ciclo da permutação unicíclica é exatamente a ordem das partições $PFTRG_x(n)$, $1 \leq x \leq n$ percorridas, ou seja,

$$\begin{aligned} &PFTRG_n(n), PFTRG_4(n), PFTRG_8(n), PFTRG_{12}(n), \cdots, PFTRG_{n-2}(n), \\ &PFTRG_3(n), PFTRG_7(n), PFTRG_{11}(n), PFTRG_{15}(n), \cdots, PFTRG_{n-3}(n), \\ &PFTRG_2(n), PFTRG_6(n), PFTRG_{10}(n), \cdots, PFTRG_{n-4}(n), PFTRG_1(n), \\ &PFTRG_5(n), PFTRG_9(n), \cdots, PFTRG_{n-1}(n), PFTRG_n(n). \end{aligned}$$

Observe que a Figura 4.2 é um exemplo deste grafo reduzido para $n = 6$.

Resta analisar se a permutação $\delta_{[n]} = [5\ 6\ 7\ \cdots\ n-1\ 1\ 2\ 3\ n\ 4]$ é unicíclica para o caso em que n é da forma $4t$, $t \in N^* - \{1\}$:

$$\delta_{[n]}(n) = 4,$$

$$\delta_{[n]}(4) = 8,$$

$$\delta_{[n]}(a \geq 8, a = 4t) = a + 4 \text{ enquanto } a < n - 4,$$

$$\delta_{[n]}(n - 4) = 1,$$

$$\delta_{[n]}(1) = 5,$$

$$\delta_{[n]}(5) = 9,$$

$$\delta_{[n]}(a \geq 9, a = 4t + 1) = a + 4 \text{ enquanto } a < n - 3,$$

$$\delta_{[n]}(n - 3) = 2,$$

$$\delta_{[n]}(2) = 6,$$

$$\delta_{[n]}(6) = 10,$$

$$\delta_{[n]}(a \geq 10, a = 4t + 2) = a + 4 \text{ enquanto } a < n - 2,$$

$$\delta_{[n]}(n - 2) = 3,$$

$$\delta_{[n]}(3) = 7,$$

$$\delta_{[n]}(7) = 11,$$

$$\delta_{[n]}(a \geq 11, a = 4t + 3) = a + 4 \text{ enquanto } a < n - 1,$$

$$\delta_{[n]}(n - 1) = n.$$

Note que o grafo da permutação $\delta_{[n]}$ forma um único ciclo:

$$\begin{aligned} n &\rightarrow 4 \rightarrow 8 \rightarrow 12 \rightarrow \cdots \rightarrow (n - 4) \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 9 \\ &\rightarrow \cdots \rightarrow (n - 3) \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 10 \rightarrow \cdots \rightarrow (n - 2) \rightarrow 3 \\ &\rightarrow 7 \rightarrow 11 \rightarrow 15 \rightarrow \cdots \rightarrow (n - 1) \rightarrow n. \end{aligned}$$

Esta ordem do ciclo da permutação unicíclica é exatamente a ordem das partições $PFTRG_x(n)$, $1 \leq x \leq n$ percorridas, ou seja,

$$PFTRG_n(n), PFTRG_4(n), PFTRG_8(n), PFTRG_{12}(n), \cdots, PFTRG_{n-4}(n),$$

$$PFTRG_1(n), PFTRG_5(n), PFTRG_9(n), \cdots, PFTRG_{n-3}(n), PFTRG_2(n),$$

$$PFTRG_6(n), PFTRG_{10}(n), \cdots, PFTRG_{n-2}(n), PFTRG_3(n), PFTRG_7(n),$$

$$PFTRG_{11}(n), PFTRG_{15}(n), \dots, PFTRG_{n-1}(n), PFTRG_n(n).$$

Já vimos que existe o grafo reduzido, agora precisamos mostrar que este grafo reduzido possui o vértice de término $v_{2n} = \iota_{[n]} \cdot pt(n, n+1) = [n \ 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n-1]$

Para encontrarmos o vértice v_{2n-1} , utilizamos o mesmo argumento do Lema 31, compondo a permutação $\iota_{[n]}$ com a permutação $\delta_{[n]}$ exatamente $n-1$ vezes, equivalente a alterar cada elemento u da permutação $\iota_{[n]}$ pelo consecutivo $\delta_{[n]}(u) = v$ do grafo da permutação $\delta_{[n]}$ percorrido no sentido contrário. O grafo da permutação $\delta_{[n]}$ percorrido no sentido contrário para os dois casos apresentados neste lema é:

Para o caso em que $n = 4t + 2$, $t \in N^*$:

$$\begin{aligned} n &\rightarrow (n-1) \rightarrow \dots \rightarrow 9 \rightarrow 5 \rightarrow 1 \rightarrow (n-4) \rightarrow \dots \rightarrow 10 \\ &\rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow (n-3) \rightarrow \dots \rightarrow 15 \rightarrow 11 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \\ &\rightarrow (n-2) \rightarrow \dots \rightarrow 12 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow n \end{aligned}$$

Para o caso em que $n = 4t$, $t \in N^* - \{1\}$:

$$\begin{aligned} n &\rightarrow (n-1) \rightarrow \dots \rightarrow 15 \rightarrow 11 \rightarrow 7 \rightarrow 3 \rightarrow (n-2) \\ &\rightarrow \dots \rightarrow 10 \rightarrow 6 \rightarrow 2 \rightarrow (n-3) \rightarrow \dots \rightarrow 9 \rightarrow 5 \\ &\rightarrow 1 \rightarrow (n-4) \rightarrow \dots \rightarrow 12 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow n \end{aligned}$$

Embora a ordem seja diferente, podemos observar que v_{2n-1} é o mesmo, e obtemos:

$v_{2n-1} = [n-4 \ n-3 \ n-2 \ n \ 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n-5 \ n-1]$ e portanto ao aplicarmos a transposição pré-fixada representante $pt_r(4, n)$ encontramos v_{2n} :

$$v_{2n} = v_{2n-1} \cdot pt_r(4, n) = [n \ 1 \ 2 \ 3 \ \dots \ n-1] = \iota_{[n]} \cdot pt(n, n+1).$$

□

Lema 33. Quando n é par e $n \geq 6$, existe grafo reduzido do $PFTRG(n)$ com $v_1 = \iota_{[n]}$ e $v_{2n} = \iota_{[n]} \cdot pt(3, n+1) = [3 \ 4 \ \dots \ n \ 1 \ 2]$ utilizando:

$pt_r(4, n)$ e $pt_l(n, n+1)$ exatamente $\frac{n-4}{2}$ vezes,

$pt_r(4, n)$ e $pt_l(2, n+1)$ exatamente 1 vez,

$pt_r(4, n)$ e $pt_l(n, n+1)$ exatamente $\frac{n-4}{2}$ vezes,

$pt_r(4, n)$ e $pt_l(n-1, n+1)$ exatamente 1 vez,

$pt_r(4, n)$ e $pt_l(n, n + 1)$ exatamente 1 vez,
 $pt_r(4, n)$ e $pt_l(n - 1, n + 1)$ exatamente 1 vez.

Demonstração. Para o caso em que $n = 6$ basta observar pela Tabela 4.3 que existe tal grafo reduzido.

Permutação	Transposição
1 2 3 4 5 6	pt(4,6)
4 5 1 2 3 6	pt(6,7)
6 4 5 1 2 3	pt(4,6)
1 2 6 4 5 3	pt(2,7)
2 6 4 5 3 1	pt(4,6)
5 3 2 6 4 1	pt(6,7)
1 5 3 2 6 4	pt(4,6)
2 6 1 5 3 4	pt(5,7)
3 4 2 6 1 5	pt(4,6)
6 1 3 4 2 5	pt(6,7)
5 6 1 3 4 2	pt(4,6)
3 4 5 6 1 2	pt(5,7)
1 2 3 4 5 6	-

Tabela 4.3: Tabela representando outro grafo reduzido do $PFTRG(6)$.

Para mostrar que o ciclo Hamiltoniano no grafo reduzido do $PFTRG(n)$, $n \geq 8$, n par, percorre todas as partições sem repeti-las, e como as transposições pré-fixadas ligantes são distintas neste caso, dividimos em diversas fases e utilizamos o operador de concatenação (ver Definição 16 da Página 17).

Fase 1) aplicar as transposições pré-fixadas $pt_r(4, n)$ e $pt_l(n, n + 1)$ exatamente $\frac{n-4}{2}$ vezes, obtendo a família $F_1(n)$, $n \geq 8$, n par:

$$F_1(n) = [n - 5 \ n - 2 \ n - 1 \ 1 \ 2 \ n \ 4] \odot \bigodot_{i=1}^{\frac{n-8}{2}} [2i + 1, 2i + 4] \odot [n - 3].$$

Fase 2) aplicar as transposições pré-fixadas $pt_r(4, n)$ e $pt_l(2, n + 1)$ exatamente uma vez, obtendo a família $F_2(n)$, $n \geq 8$, n par:

$$F_2(n) = [2 \ n \ 4] \odot \bigodot_{i=1}^{\frac{n-6}{2}} [2i+1, 2i+4] \odot [n-1 \ n-3 \ 1].$$

Fase 3) aplicar as transposições pré-fixadas $pt_r(4, n)$ e $pt_l(n, n+1)$ exatamente $\frac{n-4}{2}$ vezes, obtendo a família $F_3(n), n \geq 8, n$ par:

$$F_3(n) = [n-4 \ n-1 \ n-3 \ 2 \ n \ 1] \odot \bigodot_{i=1}^{n-7} [i+2] \odot [n-2].$$

Fase 4) aplicar as transposições pré-fixadas $pt_r(4, n)$ e $pt_l(n-1, n+1)$ exatamente uma vez, obtendo a família $F_4(n), n \geq 8, n$ par:

$$F_4(n) = [n-3 \ n-2 \ 2 \ n \ 1] \odot \bigodot_{i=1}^{n-6} [i+2] \odot [n-1].$$

Fase 5) aplicar as transposições pré-fixadas $pt_r(4, n)$ e $pt_l(n, n+1)$ exatamente uma vez, obtendo a família $F_5(n), n \geq 8, n$ par:

$$F_5(n) = [n-1 \ n \ 1] \odot \bigodot_{i=1}^{n-4} [i+2] \odot [2].$$

Fase 6) aplicar as transposições pré-fixadas $pt_r(4, n)$ e $pt_l(n-1, n+1)$ exatamente uma vez, obtendo a família $F_6(n) = \iota_{[n]}, n \geq 8, n$ par.

Devemos observar que ao aplicarmos as transposições sugeridas, de fato encontraremos as permutações resultantes de cada fase, portanto precisamos analisar cada caso em particular em cada observação a seguir.

Observação 34. A fase 1 transforma $\iota_{[n]}$, na permutação $F_1(n)$.

Considere π_z , onde $0 \leq z \leq \frac{n-4}{2}$, como sendo a permutação obtida após z transposições da fase 1. Então temos a seguinte recorrência:

$$\pi_0 = \iota_{[n]};$$

$$\pi_1 = \pi_0 \cdot pt_r(4, n) \cdot pt_l(n, n+1) = [n] \odot \bigodot_{i=0}^{n-5} [i+4] \odot [1 \ 2 \ 3];$$

$$\pi_2 = \pi_1 \cdot pt_r(4, n) \cdot pt_l(n, n+1) = [3] \odot \bigodot_{i=0}^{n-7} [i+6] \odot [1 \ 2 \ n \ 4 \ 5];$$

$$\pi_z = \pi_{z-1} \cdot pt_r(4, n) \cdot pt_l(n, n+1), \text{ para } 3 \leq z \leq \frac{n-4}{2}.$$

Para $2 \leq z \leq \frac{n-4}{2}$, vamos mostrar que a fórmula para a permutação π_z pode ser vista como:

$$\pi_z = [2z-1] \odot \bigcirc_{i=0}^{n-2z-3} [2(z+1)+i] \odot [1 \ 2 \ n \ 4] \odot \bigcirc_{i=1}^{z-2} [2i+1 \ 2i+4] \odot [2z+1].$$

Ou, de forma equivalente:

$$\pi_z = [2z-1] \odot \alpha_z \odot [1 \ 2 \ n \ 4] \odot \beta_z \odot [2z+1],$$

onde,

$$\alpha_z = \bigcirc_{i=0}^{n-2z-3} [2(z+1)+i].$$

$$\beta_z = \bigcirc_{i=1}^{z-2} [2i+1 \ 2i+4].$$

A prova dessa afirmação pode ser feita por indução. Para o caso base $z = 2$ temos:

$$\begin{aligned} \pi_2 &= [2 \cdot 2 - 1] \odot \bigcirc_{i=0}^{n-2 \cdot 2 - 3} [2(2+1)+i] \odot [1 \ 2 \ n \ 4] \odot \bigcirc_{i=1}^{2-2} [2i+1, 2i+4] \odot [2 \cdot 2 + 1] \\ &= [3] \odot \bigcirc_{i=0}^{n-7} [6+i] \odot [1 \ 2 \ n \ 4 \ 5]. \end{aligned}$$

Vamos provar agora que para $3 \leq z+1 \leq \frac{n-4}{2} - 1$, temos $\pi_z \cdot pt_r(4, n) \cdot pt_l(n, n+1) = \pi_{z+1}$.

Perceba que a z -ésima transposição da fase 1 remove o bloco contendo os três primeiros elementos para a penúltima posição da permutação, logo após remove o último elemento para frente da permutação. Essa observação torna mais claras as seguintes fórmulas relacionando as subsequências α e β de π_z e π_{z+1} .

$$\alpha_z = \bigcirc_{i=0}^{n-2z-3} [2(z+1)+i]$$

$$\begin{aligned}
&= [2(z+1) \ 2(z+1) + 1] \odot \bigcirc_{i=2}^{n-2z-3} [2(z+1) + i] \\
&= [2(z+1) \ 2(z+1) + 1] \odot \bigcirc_{i=0}^{n-2(z+1)-3} [2(z+1+1) + i] \\
&= [2z+2 \ 2z+3] \odot \alpha_{z+1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{z+1} &= \bigcirc_{i=1}^{z+1-2} [2i+1 \ 2i+4] \\
&= \bigcirc_{i=1}^{z-2} [2i+1 \ 2i+4] \odot [2(z-1) + 1 \ 2(z-1) + 4] \\
&= \beta_z \odot [2z-1 \ 2z+2].
\end{aligned}$$

Surge que

$$\begin{aligned}
\pi_z &= [2z-1] \odot \alpha_z \odot [1 \ 2 \ n \ 4] \odot \beta_z \odot [2z+1] \\
&= [2z-1] \odot [2z+2 \ 2z+3] \odot \alpha_{z+1} \odot [1 \ 2 \ n \ 4] \odot \beta_z \odot [2z+1] \\
&= [2z-1 \ 2z+2 \ 2z+3] \odot \alpha_{z+1} \odot [1 \ 2 \ n \ 4] \odot \beta_z \odot [2z+1].
\end{aligned}$$

Aplicando as transposições pré-fixadas $pt_r(4, n)$ e $pt_l(n, n+1)$ à permutação π_z obtemos π_{z+1} :

$$\begin{aligned}
\pi_z \cdot pt_r(4, n) \cdot pt_l(n, n+1) &= [2z+1] \odot \alpha_{z+1} \odot [1 \ 2 \ n \ 4] \odot \beta_z \odot [2z-1 \ 2z+2] \odot [2z+3] \\
&= [2z+1] \odot \alpha_{z+1} \odot [1 \ 2 \ n \ 4] \odot \beta_{z+1} \odot [2z+3] \\
&= [2(z+1) - 1] \odot \alpha_{z+1} \odot [1 \ 2 \ n \ 4] \odot \beta_{z+1} \odot [2(z+1) + 1] \\
&= \pi_{z+1},
\end{aligned}$$

o que prova que após $\frac{n-4}{2}$ transposições da fase 1 obtemos a permutação:

$$\begin{aligned}
\pi_{\frac{n-4}{2}} &= [2(\frac{n-4}{2}) - 1] \odot \bigcirc_{i=0}^{n-2(\frac{n-4}{2})-3} [2(\frac{n-4}{2} + 1) + i] \odot [1 \ 2 \ n \ 4] \odot \bigcirc_{i=1}^{\frac{n-4}{2}-2} [2i+1 \ 2i+4] \odot [2(\frac{n-4}{2}) + 1] \\
&= [n-5] \odot \bigcirc_{i=0}^1 [n-2+i] \odot [1 \ 2 \ n \ 4] \odot \bigcirc_{i=1}^{\frac{n-8}{2}} [2i+1 \ 2i+4] \odot [n-3] \\
&= [n-5 \ n-2 \ n-1 \ 1 \ 2 \ n \ 4] \odot \bigcirc_{i=1}^{\frac{n-8}{2}} [2i+1 \ 2i+4] \odot [n-3] \\
&= F_1(n).
\end{aligned}$$

Observação 35. A fase 2 transforma $F_1(n)$ na permutação $F_2(n)$.

Basta observar que a composição das transposições pré-fixadas $pt_r(4, n)$ e $pt_l(2, n + 1)$ resulta em $F_2(n)$.

$$F_2(n) = F_1(n) \cdot pt_r(4, n) \cdot pt_l(2, n + 1),$$

onde,

$$F_1(n) = [n - 5 \ n - 2 \ n - 1 \ 1 \ 2 \ n \ 4] \odot \bigodot_{i=1}^{\frac{n-8}{2}} [2i + 1 \ 2i + 4] \odot [n - 3].$$

Aplicando a transposição pré-fixada $pt_r(4, n)$ em $F_1(n)$ temos que o bloco contendo os elementos $[n - 5 \ n - 2 \ n - 1]$ é transposto para a penúltima posição da permutação $F_1(n)$.

$$F_1(n) \cdot pt_r(4, n) = [1 \ 2 \ n \ 4] \odot \bigodot_{i=1}^{\frac{n-8}{2}} [2i + 1 \ 2i + 4] \odot [n - 5 \ n - 2 \ n - 1 \ n - 3]$$

$$= [1 \ 2 \ n \ 4] \odot \bigodot_{i=1}^{\frac{n-6}{2}} [2i + 1 \ 2i + 4] \odot [n - 1 \ n - 3].$$

Aplicando a transposição pré-fixada $pt_l(2, n + 1)$ à permutação $F_1(n) \cdot pt_r(4, n)$ temos que o elemento 1 é transposto para o final da permutação obtendo:

$$\begin{aligned} F_1(n) \cdot pt_r(4, n) \cdot pt_l(2, n + 1) &= [2 \ n \ 4] \odot \bigodot_{i=1}^{\frac{n-6}{2}} [2i + 1 \ 2i + 4] \odot [n - 1 \ n - 3 \ 1] \\ &= F_2(n). \end{aligned}$$

Observação 36. A fase 3 transforma $F_2(n)$, na permutação $F_3(n)$.

Considere π_z , onde $0 \leq z \leq \frac{n-4}{2}$, como sendo a permutação obtida após z transposições da fase 3. Então temos a seguinte recorrência:

$$\pi_0 = F_2(n);$$

$$\pi_1 = \pi_0 \cdot pt_r(4, n) \cdot pt_l(n, n + 1) = [1] \odot \bigodot_{i=1}^{\frac{n-6}{2}} [2i + 1 \ 2i + 4] \odot [n - 1 \ n - 3 \ 2 \ n \ 4];$$

$$\pi_2 = \pi_1 \cdot pt_r(4, n) \cdot pt_l(n, n+1) = [4] \odot \bigcirc_{i=2}^{\frac{n-6}{2}} [2i+1 \ 2i+4] \odot [n-1 \ n-3 \ 2 \ n \ 1 \ 3 \ 6];$$

$$\pi_z = \pi_{z-1} \cdot pt_r(4, n) \cdot pt_l(n, n+1), \text{ para } 3 \leq z \leq \frac{n-4}{2}.$$

Para $2 \leq z \leq \frac{n-4}{2}$, vamos mostrar que a fórmula para a permutação π_z pode ser vista como:

$$\pi_z = [2z] \odot \bigcirc_{i=z}^{\frac{n-6}{2}} [2i+1 \ 2i+4] \odot [n-1 \ n-3 \ 2 \ n \ 1] \odot \bigcirc_{i=1}^{2z-3} [i+2] \odot [2z+2].$$

Ou, de forma equivalente:

$$\pi_z = [2z] \odot \alpha_z \odot [n-1 \ n-3 \ 2 \ n \ 1] \odot \beta_z \odot [2z+2],$$

onde,

$$\alpha_z = \bigcirc_{i=z}^{\frac{n-6}{2}} [2i+1 \ 2i+4].$$

$$\beta_z = \bigcirc_{i=1}^{2z-3} [i+2].$$

A prova dessa afirmação é análoga a da fase 1 e será também feita por indução.

Para o caso base $z = 2$ temos:

$$\begin{aligned} \pi_2 &= [2.2] \odot \bigcirc_{i=2}^{\frac{n-6}{2}} [2i+1 \ 2i+4] \odot [n-1 \ n-3 \ 2 \ n \ 1] \odot \bigcirc_{i=1}^{2.2-3} [i+2] \odot [2.2+2] \\ &= [4] \odot \bigcirc_{i=2}^{\frac{n-6}{2}} [2i+1 \ 2i+4] \odot [n-1 \ n-3 \ 2 \ n \ 1 \ 3 \ 6]. \end{aligned}$$

Vamos provar agora que para $3 \leq z+1 \leq \frac{n-4}{2} - 1$, temos $\pi_z \cdot pt_r(4, n) \cdot pt_l(n, n+1) = \pi_{z+1}$.

Perceba que a z -ésima transposição da fase 3 troca o bloco contendo o último elemento com o bloco contendo os três primeiros elementos. Essa observação torna mais claras as seguintes fórmulas relacionando as subsequências α e β de π_z e π_{z+1} .

$$\begin{aligned}
\alpha_z &= \bigcirc_{i=z}^{\frac{n-6}{2}} [2i+1 \ 2i+4] \\
&= [2z+1 \ 2z+4] \odot \bigcirc_{i=z+1}^{\frac{n-6}{2}} [2i+1 \ 2i+4] \\
&= [2z+1 \ 2z+4] \odot \alpha_{z+1}.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{z+1} &= \bigcirc_{i=1}^{2(z+1)-3} [i+2] \\
&= \bigcirc_{i=1}^{2z-1} [i+2] \\
&= \bigcirc_{i=1}^{2z-3} [i+2] \odot [2z \ 2z+1] \\
&= \beta_z \odot [2z \ 2z+1].
\end{aligned}$$

Surge que

$$\begin{aligned}
\pi_z &= [2z] \odot \alpha_z \odot [n-1 \ n-3 \ 2 \ n \ 1] \odot \beta_z \odot [2z+2] \\
&= [2z] \odot [2z+1 \ 2z+4] \odot \alpha_{z+1} \odot [n-1 \ n-3 \ 2 \ n \ 1] \odot \beta_z \odot [2z+2].
\end{aligned}$$

Aplicando as transposições pré-fixadas $pt_r(4, n)$ e $pt_l(n, n+1)$ à permutação π_z encontramos π_{z+1} :

$$\begin{aligned}
\pi_z \cdot pt_r(4, n) \cdot pt_l(n, n+1) &= [2z+2] \odot \alpha_{z+1} \odot [n-1 \ n-3 \ 2 \ n \ 1] \odot \beta_z \odot [2z \ 2z+1 \ 2z+4] \\
&= [2z+2] \odot \alpha_{z+1} \odot [n-1 \ n-3 \ 2 \ n \ 1] \odot \beta_{z+1} \odot [2z+4] \\
&= [2(z+1)] \odot \alpha_{z+1} \odot [n-1 \ n-3 \ 2 \ n \ 1] \odot \beta_{z+1} \odot [2(z+1)+2] \\
&= \pi_{z+1},
\end{aligned}$$

o que prova que após $\frac{n-4}{2}$ transposições da fase 1 obtemos a permutação:

$$\begin{aligned}
\pi_{\frac{n-4}{2}} &= [2(\frac{n-4}{2})] \odot \bigcirc_{i=\frac{n-4}{2}}^{\frac{n-6}{2}} [2i+1 \ 2i+4] \odot [n-1 \ n-3 \ 2 \ n \ 1] \odot \bigcirc_{i=1}^{2(\frac{n-4}{2})-3} [i+2] \odot [2(\frac{n-4}{2})+2] \\
&= [n-4 \ n-1 \ n-3 \ 2 \ n \ 1] \odot \bigcirc_{i=1}^{n-7} [i+2] \odot [n-2] \\
&= F_3(n).
\end{aligned}$$

Observação 37. A fase 4 transforma $F_3(n)$ na permutação $F_4(n)$.

Basta observar que a composição das transposições pré-fixadas $pt_r(4, n)$ e $pt_l(n-1, n+1)$ resulta em $F_4(n)$.

$$F_4(n) = F_3(n) \cdot pt_r(4, n) \cdot pt_l(n-1, n+1),$$

onde,

$$F_3(n) = [n-4 \ n-1 \ n-3 \ 2 \ n \ 1] \odot \bigodot_{i=1}^{n-7} [i+2] \odot [n-2].$$

Aplicando a transposição pré-fixada $pt_r(4, n)$ em $F_3(n)$ temos que o bloco contendo os elementos $[n-4 \ n-1 \ n-3]$ é transposto para a penúltima posição da permutação $F_3(n)$.

$$F_3(n) \cdot pt_r(4, n) = [2 \ n \ 1] \odot \bigodot_{i=1}^{n-7} [i+2] \odot [n-4 \ n-1 \ n-3 \ n-2].$$

Aplicando a transposição pré-fixada $pt_l(n-1, n+1)$ à permutação $F_3(n) \cdot pt_r(4, n)$ temos que o bloco contendo os elementos $[n-3 \ n-2]$ é transposto para frente da permutação obtendo :

$$\begin{aligned} F_3(n) \cdot pt_r(4, n) \cdot pt_l(n-1, n+1) &= [n-3 \ n-2 \ 2 \ n \ 1] \odot \bigodot_{i=1}^{n-7} [i+2] \odot [n-4 \ n-1] \\ &= [n-3 \ n-2 \ 2 \ n \ 1] \odot \bigodot_{i=1}^{n-6} [i+2] \odot [n-1] \\ &= F_4(n). \end{aligned}$$

Observação 38. A fase 5 transforma $F_4(n)$ na permutação $F_5(n)$.

Basta observar que a composição das transposições pré-fixadas $pt_r(4, n)$ e $pt_l(n, n+1)$ resulta em $F_5(n)$.

$$F_5(n) = F_4(n) \cdot pt_r(4, n) \cdot pt_l(n, n+1),$$

onde,

$$F_4(n) = [n - 3 \ n - 2 \ 2 \ n \ 1] \odot \bigodot_{i=1}^{n-6} [i + 2] \odot [n - 1].$$

Aplicando a transposição pré-fixada $pt_r(4, n)$ em $F_4(n)$ temos que o bloco contendo os elementos $[n - 3 \ n - 2 \ 2]$ é transposto para a penúltima posição da permutação $F_4(n)$.

$$F_4(n) \cdot pt_r(4, n) = [n \ 1] \odot \bigodot_{i=1}^{n-6} [i + 2] \odot [n - 3 \ n - 2 \ 2 \ n - 1].$$

Aplicando a transposição pré-fixada $pt_l(n, n + 1)$ à permutação $F_4(n) \cdot pt_r(4, n)$ temos que o elemento $n - 1$ é transposto para frente da permutação, obtendo:

$$\begin{aligned} F_4(n) \cdot pt_r(4, n) \cdot pt_l(n, n + 1) &= [n - 1 \ n \ 1] \odot \bigodot_{i=1}^{n-6} [i + 2] \odot [n - 3 \ n - 2 \ 2] \\ &= [n - 1 \ n \ 1] \odot \bigodot_{i=1}^{n-4} [i + 2] \odot [2] \\ &= F_5(n). \end{aligned}$$

Observação 39. A fase 6 transforma $F_5(n)$ na permutação $F_6(n) = \iota_{[n]}$.

Basta observar que a composição das transposições pré-fixadas $pt_r(4, n)$ e $pt_l(n - 1, n + 1)$ resulta em $F_6(n)$.

$$F_6(n) = F_5(n) \cdot pt_r(4, n) \cdot pt_l(n - 1, n + 1),$$

onde,

$$F_5(n) = [n - 1 \ n \ 1] \odot \bigodot_{i=1}^{n-4} [i + 2] \odot [2].$$

Aplicando a transposição pré-fixada $pt_r(4, n)$ em $F_5(n)$ temos que o bloco contendo os elementos $[n - 1 \ n \ 1]$ é transposto para a penúltima posição da permutação $F_5(n)$ e assim obtemos v_{2n} :

$$v_{2n} = F_5(n) \cdot pt_r(4, n) = \bigodot_{i=1}^{n-4} [i + 2] \odot [n - 1 \ n \ 1 \ 2].$$

Aplicando a transposição pré-fixada $pt_l(n-1, n+1)$ à permutação $F_5(n) \cdot pt_r(4, n)$ temos que o bloco contendo os elementos $[1\ 2]$ é transposto para frente da permutação, obtendo:

$$\begin{aligned} F_5(n) \cdot pt_r(4, n) \cdot pt_l(n-1, n+1) &= [1\ 2] \odot \bigcirc_{i=1}^{n-4} [i+2] \odot [n-1\ n] \\ &= [1\ 2] \odot \bigcirc_{i=1}^{n-2} [i+2] \\ &= \iota_{[n]} = F_6(n). \end{aligned}$$

Conseqüentemente, a ordem das partições percorridas no grafo reduzido será:

$$\begin{aligned} &PFTRG_n(n), PFTRG_3(n), PFTRG_5(n), PFTRG_7(n), \dots, PFTRG_{n-3}(n), \\ &PFTRG_1(n), PFTRG_4(n), PFTRG_6(n), PFTRG_8(n), \dots, PFTRG_{n-2}(n), \\ &PFTRG_{n-1}(n), PFTRG_2(n), PFTRG_n(n) \end{aligned}$$

□

4.1.2 Caso ímpar

Lema 40. *Quando n é ímpar e $n \geq 5$, existe grafo reduzido do $PFTRG(n)$ com $v_1 = \iota_{[n]}$ e $v_{2n} = \iota_{[n]} \cdot pt(4, n+1) = [4\ 5\ \dots\ n\ 1\ 2\ 3]$ utilizando:*

- $pt_r(2, n)$ e $pt_l(n-1, n+1)$ exatamente $n-4$ vezes,
- $pt_r(2, n)$ e $pt_l(n-2, n+1)$ exatamente 1 vez,
- $pt_r(2, n)$ e $pt_l(2, n+1)$ exatamente 1 vez,
- $pt_r(n-1, n)$ e $pt_l(n, n+1)$ exatamente 1 vez,
- $pt_r(3, n)$ e $pt_l(n-2, n+1)$ exatamente 1 vez.

Demonstração. O argumento deste caso é análogo ao anterior, ou seja, dividimos em várias fases e usamos o operador concatenação para exibir as permutações percorridas.

Fase 1) aplicar as transposições pré-fixadas $pt_r(2, n)$ e $pt_l(n-1, n+1)$ exatamente $n-4$ vezes, obtendo a família $F_1(n)$, $n \geq 5$, n ímpar:

$$F_1(n) = [1] \odot \bigodot_{i=1}^{n-4} [i+4] \odot [2 \ 3 \ 4].$$

Fase 2) aplicar as transposições pré-fixadas $pt_r(2, n)$ e $pt_l(n-2, n+1)$ exatamente uma vez, obtendo a família $F_2(n)$, $n \geq 5$, n ímpar:

$$F_2(n) = [3 \ 1] \odot \bigodot_{i=1}^{n-3} [i+3] \odot [2].$$

Fase 3) aplicar as transposições pré-fixadas $pt_r(2, n)$ e $pt_l(2, n+1)$ exatamente uma vez, obtendo a família $F_3(n)$, $n \geq 5$, n ímpar:

$$F_3(n) = \bigodot_{i=1}^{n-3} [i+3] \odot [3 \ 2 \ 1].$$

Fase 4) aplicar as transposições pré-fixadas $pt_r(n-1, n)$ e $pt_l(n, n+1)$ exatamente uma vez, obtendo a família $F_4(n)$, $n \geq 5$, n ímpar:

$$F_4(n) = [1 \ 2] \odot \bigodot_{i=1}^{n-3} [i+3] \odot [3].$$

Fase 5) aplicar as transposições pré-fixadas $pt_r(3, n)$ e $pt_l(n-2, n+1)$ exatamente uma vez, obtendo a família $F_5(n) = \iota_{[n]}$, $n \geq 5$, n ímpar.

Devemos observar que ao aplicarmos as transposições sugeridas, de fato encontraremos as permutações de cada fase, portanto precisamos analisar cada caso em particular nas observações abaixo:

Observação 41. *A fase 1 transforma $\iota_{[n]}$ na permutação $F_1(n)$.*

Considere π_z , onde $0 \leq z \leq n-4$, como sendo a permutação obtida após z transposições da fase 1. Então temos a seguinte recorrência:

$$\pi_0 = \iota_{[n]};$$

$$\pi_z = \pi_{z-1} \cdot pt_r(2, n) \cdot pt_l(n-1, n+1), \text{ para } 1 \leq z \leq n-4.$$

Para $0 \leq z \leq n-4$, vamos mostrar que a fórmula para a permutação π_z pode ser vista como:

$$\pi_z = [1] \odot \bigcirc_{i=1}^z [n - z + i] \odot \bigcirc_{i=0}^{n-2-z} [2 + i].$$

Ou, de forma equivalente:

$$\pi_z = [1] \odot \alpha_z \odot \beta_z,$$

onde,

$$\alpha_z = \bigcirc_{i=1}^z [n - z + i].$$

$$\beta_z = \bigcirc_{i=0}^{n-2-z} [2 + i].$$

A prova dessa afirmação pode ser feita por indução. Para o caso base $z = 0$ temos:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= [1] \odot \bigcirc_{i=1}^0 [n + i] \odot \bigcirc_{i=0}^{n-2} [2 + i] \\ &= [1] \odot \bigcirc_{i=0}^{n-2} [2 + i] \\ &= \iota_{[n]}. \end{aligned}$$

Vamos provar agora que para $1 \leq z + 1 \leq n - 5$, temos $\pi_z \cdot pt_r(2, n) \cdot pt_l(n - 1, n + 1) = \pi_{z+1}$.

Perceba que a z -ésima transposição da fase 1 remove o último elemento da permutação e o insere na segunda posição. Em outras palavras, o último elemento de β_z torna-se o primeiro elemento de α_z . Essa observação torna mais claras as seguintes fórmulas relacionando as subsequências α e β de π_z e π_{z+1} .

$$\begin{aligned} \beta_z &= \bigcirc_{i=0}^{n-2-z} [2 + i] \\ &= \bigcirc_{i=0}^{n-2-(z+1)} [2 + i] \odot [n - z] \\ &= \beta_{z+1} \odot [n - z]. \end{aligned}$$

$$\alpha_{z+1} = \bigcirc_{i=1}^{z+1} [n - (z + 1) + i]$$

$$\begin{aligned}
&= [n - z] \odot \bigcirc_{i=2}^{z+1} [n - (z + 1) + i] \\
&= [n - z] \odot \bigcirc_{i=1}^z [n - z + i] \\
&= [n - z] \odot \alpha_z.
\end{aligned}$$

Surge que

$$\begin{aligned}
\pi_z &= [1] \odot \alpha_z \odot \beta_z \\
&= [1] \odot \alpha_z \odot \beta_{z+1} \odot [n - z].
\end{aligned}$$

Aplicando as transposições pré-fixadas $pt_r(2, n) \cdot pt_l(n - 1, n + 1)$ à permutação π_z obtemos π_{z+1} :

$$\begin{aligned}
\pi_z \cdot pt_r(2, n) \cdot pt_l(n - 1, n + 1) &= [1] \odot [n - z] \odot \alpha_z \odot \beta_{z+1} \\
&= [1] \odot \alpha_{z+1} \odot \beta_{z+1} \\
&= \pi_{z+1},
\end{aligned}$$

o que prova que após $n - 4$ transposições da fase 1 obtemos a permutação

$$\begin{aligned}
\pi_{n-4} &= [1] \odot \bigcirc_{i=1}^{n-4} [n - (n - 4) + i] \odot \bigcirc_{i=0}^{n-2-(n-4)} [2 + i] \\
&= [1] \odot \bigcirc_{i=1}^{n-4} [i + 4] \odot \bigcirc_{i=0}^2 [2 + i] \\
&= [1] \odot \bigcirc_{i=1}^{n-4} [i + 4] \odot [2 \ 3 \ 4] \\
&= F_1(n).
\end{aligned}$$

Observação 42. *A fase 2 transforma $F_1(n)$ na permutação $F_2(n)$.*

Basta observar que a composição das transposições pré-fixadas $pt_r(2, n)$ e $pt_l(n - 2, n + 1)$ resulta em $F_2(n)$.

$$F_2(n) = F_1(n) \cdot pt_r(2, n) \cdot pt_l(n - 2, n + 1),$$

onde,

$$F_1(n) = [1] \odot \bigcirc_{i=1}^{n-4} [i+4] \odot [2 \ 3 \ 4].$$

Aplicando a transposição pré-fixada $pt_r(2, n)$ em $F_1(n)$ temos que o elemento 1 é transposto para a penúltima posição da permutação $F_1(n)$.

$$F_1(n) \cdot pt_r(2, n) = \bigcirc_{i=1}^{n-4} [i+4] \odot [2 \ 3 \ 1 \ 4].$$

Aplicando a transposição pré-fixada $pt_l(n-2, n+1)$ à permutação $F_1(n) \cdot pt_r(2, n)$ temos que o bloco contendo os três últimos elementos $[3 \ 1 \ 4]$ é transposto para frente, obtendo:

$$\begin{aligned} F_1(n) \cdot pt_r(2, n) \cdot pt_l(n-2, n+1) &= [3 \ 1 \ 4] \odot \bigcirc_{i=1}^{n-4} [i+4] \odot [2] \\ &= [3 \ 1] \odot \bigcirc_{i=1}^{n-3} [i+3] \odot [2] \\ &= F_2(n). \end{aligned}$$

Observação 43. *A fase 3 transforma $F_2(n)$ na permutação $F_3(n)$.*

Basta observar que a composição das transposições pré-fixadas $pt_r(2, n)$ e $pt_l(2, n+1)$ resulta em $F_3(n)$.

$$F_3(n) = F_2(n) \cdot pt_r(2, n) \cdot pt_l(2, n+1),$$

onde,

$$F_2(n) = [3 \ 1] \odot \bigcirc_{i=1}^{n-3} [i+3] \odot [2].$$

Aplicando a transposição pré-fixada $pt_r(2, n)$ em $F_2(n)$ temos que o elemento 3 é transposto para a penúltima posição da permutação $F_2(n)$. Logo:

$$F_2(n) \cdot pt_r(2, n) = [1] \odot \bigcirc_{i=1}^{n-3} [i+3] \odot [3 \ 2].$$

Aplicando a transposição pré-fixada $pt_l(2, n+1)$ à permutação $F_2(n) \cdot pt_r(2, n)$ temos que o elemento 1 é transposto para a última posição da permutação, resultando:

$$\begin{aligned}
F_2(n) \cdot pt_r(2, n) \cdot pt_l(2, n+1) &= \bigodot_{i=1}^{n-3} [i+3] \odot [3 \ 2 \ 1] \\
&= F_3(n).
\end{aligned}$$

Observação 44. A fase 4 transforma $F_3(n)$ na permutação $F_4(n)$.

Basta observar que a composição das transposições pré-fixadas $pt_r(n-1, n)$ e $pt_l(n, n+1)$ resulta em $F_4(n)$.

$$F_4(n) = F_3(n) \cdot pt_r(n-1, n) \cdot pt_l(n, n+1),$$

onde,

$$F_3(n) = \bigodot_{i=1}^{n-3} [i+3] \odot [3 \ 2 \ 1].$$

Aplicando a transposição pré-fixada $pt_r(n-1, n)$ em $F_3(n)$ temos que o elemento 2 é transposto para frente da permutação $F_3(n)$.

$$F_3(n) \cdot pt_r(n-1, n) = [2] \odot \bigodot_{i=1}^{n-3} [i+3] \odot [3 \ 1].$$

Aplicando a transposição pré-fixada $pt_l(n, n+1)$ à permutação $F_3(n) \cdot pt_r(n-1, n)$ temos que o elemento 1 é transposto para frente da permutação, obtendo:

$$\begin{aligned}
F_3(n) \cdot pt_r(n-1, n) \cdot pt_l(n, n+1) &= [1 \ 2] \odot \bigodot_{i=1}^{n-3} [i+3] \odot [3] \\
&= F_4(n).
\end{aligned}$$

Observação 45. A fase 5 transforma $F_4(n)$ na permutação $F_5(n) = \iota_{[n]}$.

Basta observar que a composição das transposições pré-fixadas $pt_r(3, n)$ e $pt_l(n-2, n+1)$ resulta em $F_5(n)$.

$$F_5(n) = F_4(n) \cdot pt_r(3, n) \cdot pt_l(n-2, n+1),$$

onde,

$$F_4(n) = [1 \ 2] \odot \bigodot_{i=1}^{n-3} [i+3] \odot [3].$$

Aplicando a transposição pré-fixada $pt_r(3, n)$ em $F_4(n)$ temos que o bloco contendo os elementos $[1\ 2]$ é transposto para a penúltima posição da permutação $F_4(n)$ e assim obtemos v_{2n} :

$$v_{2n} = F_4(n) \cdot pt_r(3, n) = \bigodot_{i=1}^{n-3} [i + 3] \odot [1\ 2\ 3].$$

Aplicando a transposição pré-fixada $pt_l(n-2, n+1)$ à permutação $F_4(n) \cdot pt_r(3, n)$ temos que o bloco contendo os três últimos elementos, a saber, $[1\ 2\ 3]$ é transposto para frente da permutação, obtendo:

$$\begin{aligned} F_4(n) \cdot pt_r(3, n) \cdot pt_l(n-2, n+1) &= [1\ 2\ 3] \odot \bigodot_{i=1}^{n-3} [i + 3] \\ &= \bigodot_{i=1}^n [i] \\ &= \iota_{[n]} = F_5(n). \end{aligned}$$

Consequentemente, a ordem das partições percorridas pelo grafo reduzido é:

$$PFTRG_n(n), PFTRG_{n-1}(n), PFTRG_{n-2}(n), PFTRG_{n-3}(n), \dots, PFTRG_4(n),$$

$$PFTRG_2(n), PFTRG_1(n), PFTRG_3(n), PFTRG_n(n)$$

□

Agora que todos os grafos reduzidos do $PFTRG(n)$ que precisamos já foram apresentados, além de provadas as suas existências, para cada caso, vamos buscar o ciclo Hamiltoniano no $PFTRG(n)$.

4.2 Ciclos Hamiltonianos no PFTRG

Nesta seção, mostramos que a partir dos grafos reduzidos do $PFTRG(n)$ que construímos na seção anterior, formamos ciclos Hamiltonianos no $PFTRG(n)$. Por ser um processo recursivo, necessitamos de três ciclos Hamiltonianos particulares com n par para construir um ciclo Hamiltoniano particular com n ímpar e necessitamos de apenas um ciclo Hamiltoniano com n ímpar para construir três ciclos Hamiltonianos particulares com n par. Porém, para o caso em que $n = 3$, temos que fazer separadamente, pois não faria sentido para o caso ímpar a permutação $pt(4, 3 + 1)$.

Proposição 46. *O grafo $PFTRG(3)$ possui ciclo Hamiltoniano.*

Demonstração. Basta observar a sequência dos vértices abaixo:

$$[1\ 2\ 3], [2\ 3\ 1], [3\ 2\ 1], [2\ 1\ 3], [1\ 3\ 2], [3\ 1\ 2], [1\ 2\ 3].$$

observe o ciclo destacado do $PFTRG(3)$ na Figura 4.3 abaixo:

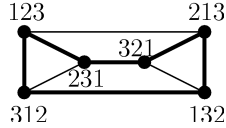


Figura 4.3: Um ciclo Hamiltoniano no $PFTRG(3)$.

□

Teorema 47. *O grafo $PFTRG(n)$, $n \geq 4$ possui ciclo Hamiltoniano $(v_1, v_2, \dots, v_n, v_1)$ da seguinte forma:*

A) Para $n \geq 4, n$ par:

Existe a construção dos 3 ciclos Hamiltonianos abaixo:

1. *Existe ciclo Hamiltoniano com $v_1 = \iota_{[n]}$ e $v_n = \iota_{[n]} \cdot pt(2, n + 1)$.*
2. *Existe ciclo Hamiltoniano com $v_1 = \iota_{[n]}$ e $v_n = \iota_{[n]} \cdot pt(n, n + 1)$.*
3. *Existe ciclo Hamiltoniano com $v_1 = \iota_{[n]}$ e $v_n = \iota_{[n]} \cdot pt(3, n + 1)$.*

B) Para $n \geq 5, n$ ímpar:

Existe ciclo Hamiltoniano com $v_1 = \iota_{[n]}$ e $v_n = \iota_{[n]} \cdot pt(4, n + 1)$.

Demonstração. Usando indução matemática em n , temos que:

Base da indução:

Para n par, seja $n = 4$.

O grafo $PFTRG(4)$ possui ciclo Hamiltoniano:

1. Ciclo Hamiltoniano com $v_1 = \iota_{[4]}$ e $v_{4!=24} = \iota_{[4]} \cdot pt(2, 5)$, isto é, $v_1 = [1\ 2\ 3\ 4]$ e $v_{24} = [2\ 3\ 4\ 1]$ dado pelos vértices de permutações:

[1 2 3 4], [2 3 1 4], [3 2 1 4], [2 1 3 4], [1 3 2 4], [3 1 2 4],
 [4 3 1 2], [3 1 4 2], [1 3 4 2], [3 4 1 2], [4 1 3 2], [1 4 3 2],
 [2 1 4 3], [1 4 2 3], [4 1 2 3], [1 2 4 3], [2 4 1 3], [4 2 1 3],
 [3 4 2 1], [4 2 3 1], [2 4 3 1], [4 3 2 1], [3 2 4 1], [2 3 4 1],
 [1 2 3 4].

Observe na Figura 4.4, o ciclo Hamiltoniano destacado onde as arestas ligantes não pertencentes ao ciclo Hamiltoniano não foram representadas a fim de não poluir visualmente a figura.

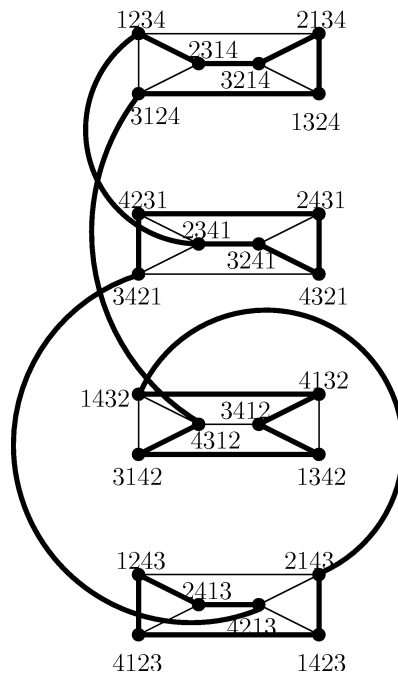


Figura 4.4: Um ciclo Hamiltoniano destacado no $PFTRG(4)$ com somente as arestas ligantes do ciclo.

2. Ciclo Hamiltoniano com $v_1 = \iota_{[4]}$ e $v_{4!=24} = \iota_{[4]} \cdot pt(4, 5)$, isto é, $v_1 = [1\ 2\ 3\ 4]$ e $v_{24} = [4\ 1\ 2\ 3]$ dado pelos vértices de permutações:

[1 2 3 4], [2 1 3 4], [3 2 1 4], [1 3 2 4], [3 1 2 4], [2 3 1 4],

[3 1 4 2], [1 3 4 2], [4 1 3 2], [3 4 1 2], [4 3 1 2], [1 4 3 2],
 [4 3 2 1], [3 4 2 1], [2 3 4 1], [4 2 3 1], [2 4 3 1], [3 2 4 1],
 [2 4 1 3], [4 2 1 3], [1 4 2 3], [2 1 4 3], [1 2 4 3], [4 1 2 3],
 [1 2 3 4].

Observe na Figura 4.5, o ciclo Hamiltoniano destacado onde as arestas ligantes não pertencentes ao ciclo não foram representadas.

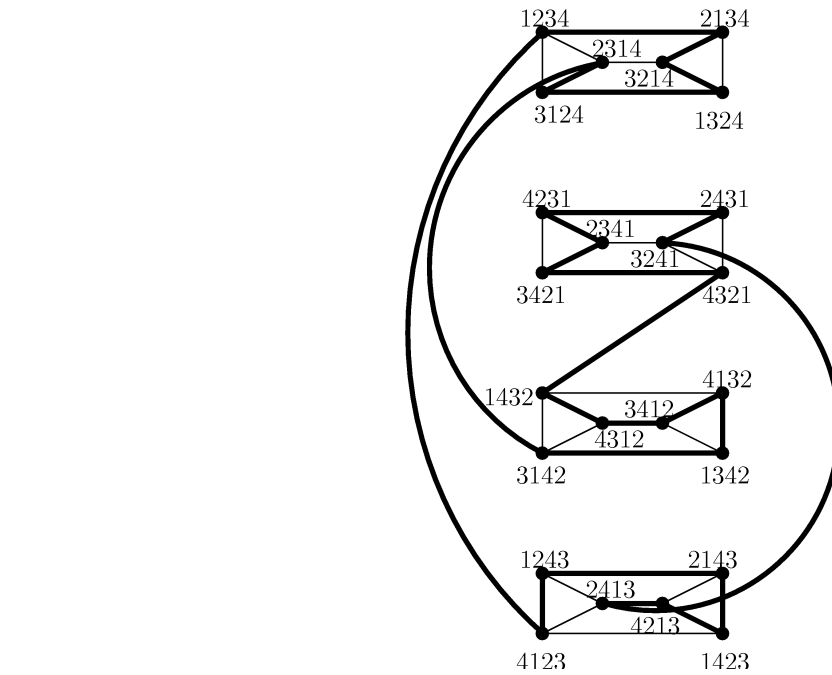


Figura 4.5: Outro ciclo Hamiltoniano destacado no $PFTRG(4)$ com somente as arestas ligantes do ciclo.

3. Ciclo Hamiltoniano com $v_1 = \iota_{[4]}$ e $v_{4!-24} = \iota_{[4]} \cdot pt(3, 5)$, isto é, $v_1 = [1 2 3 4]$ e $v_{24} = [3 4 1 2]$ dado pelos vértices de permutações:

[1 2 3 4], [3 1 2 4], [2 3 1 4], [3 2 1 4], [1 3 2 4], [2 1 3 4],
 [3 4 2 1], [2 3 4 1], [4 2 3 1], [2 4 3 1], [3 2 4 1], [4 3 2 1],
 [2 1 4 3], [4 2 1 3], [1 4 2 3], [4 1 2 3], [2 4 1 3], [1 2 4 3],
 [4 3 1 2], [1 4 3 2], [3 1 4 2], [1 3 4 2], [4 1 3 2], [3 4 1 2],
 [1 2 3 4].

Observe na Figura 4.6 o ciclo Hamiltoniano destacado onde as arestas ligantes não pertencentes ao ciclo não foram representadas.

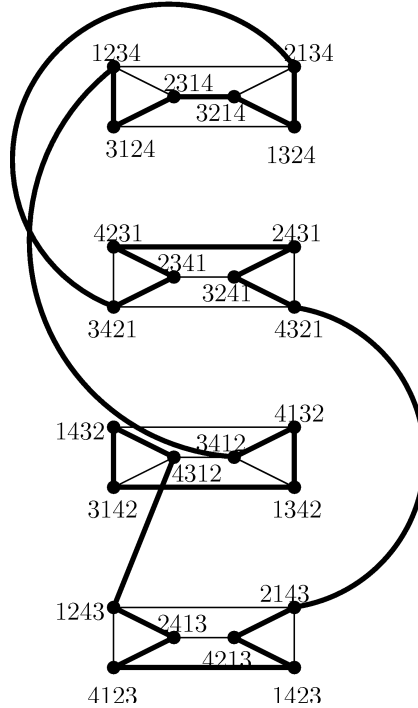


Figura 4.6: Outro ciclo Hamiltoniano do $PFTRG(4)$ com somente as arestas ligantes do ciclo.

Para n ímpar, seja a base de indução $n = 5$.

O grafo $PFTRG(5)$ possui ciclo Hamiltoniano com $v_1 = \iota_{[5]}$ e $v_{5!}=120 = \iota_{[5]} \cdot pt(4, 6)$, isto é, $v_1 = [1\ 2\ 3\ 4\ 5]$ e $v_{120} = [4\ 5\ 1\ 2\ 3]$ dado pelos vértices de permutações:

- [1 2 3 4 5], [2 3 1 4 5], [3 2 1 4 5], [2 1 3 4 5], [1 3 2 4 5], [3 1 2 4 5], [4 3 1 2 5], [3 1 4 2 5],
 [1 3 4 2 5], [3 4 1 2 5], [4 1 3 2 5], [1 4 3 2 5], [2 1 4 3 5], [1 4 2 3 5], [4 1 2 3 5], [1 2 4 3 5],
 [2 4 1 3 5], [4 2 1 3 5], [3 4 2 1 5], [4 2 3 1 5], [2 4 3 1 5], [4 3 2 1 5], [3 2 4 1 5], [2 3 4 1 5],
 [1 5 2 3 4], [5 2 1 3 4], [2 5 1 3 4], [5 1 2 3 4], [1 2 5 3 4], [2 1 5 3 4], [3 2 1 5 4], [2 1 3 5 4],
 [1 2 3 5 4], [2 3 1 5 4], [3 1 2 5 4], [1 3 2 5 4], [5 1 2 3 4], [1 3 5 2 4], [3 1 5 2 4], [1 5 3 2 4],
 [5 3 1 2 4], [3 5 1 2 4], [2 3 5 1 4], [3 5 2 1 4], [5 3 2 1 4], [3 2 5 1 4], [2 5 3 1 4], [5 2 3 1 4],
 [3 1 4 5 2], [1 4 3 5 2], [4 1 3 5 2], [1 3 4 5 2], [3 4 1 5 2], [4 3 1 5 2], [5 4 3 1 2], [4 3 5 1 2],
 [3 4 5 1 2], [4 5 3 1 2], [5 3 4 1 2], [3 5 4 1 2], [1 3 5 4 2], [3 5 1 4 2], [5 3 1 4 2], [3 1 5 4 2],

$[1\ 5\ 3\ 4\ 2], [5\ 1\ 3\ 4\ 2], [4\ 5\ 1\ 3\ 2], [5\ 1\ 4\ 3\ 2], [1\ 5\ 4\ 3\ 2], [5\ 4\ 1\ 3\ 2], [4\ 1\ 5\ 3\ 2], [1\ 4\ 5\ 3\ 2],$
 $[4\ 5\ 3\ 2\ 1], [5\ 4\ 3\ 2\ 1], [3\ 5\ 4\ 2\ 1], [4\ 3\ 5\ 2\ 1], [3\ 4\ 5\ 2\ 1], [5\ 3\ 4\ 2\ 1], [3\ 4\ 2\ 5\ 1], [4\ 3\ 2\ 5\ 1],$
 $[2\ 4\ 3\ 5\ 1], [3\ 2\ 4\ 5\ 1], [2\ 3\ 4\ 5\ 1], [4\ 2\ 3\ 5\ 1], [2\ 3\ 5\ 4\ 1], [3\ 2\ 5\ 4\ 1], [5\ 3\ 2\ 4\ 1], [2\ 5\ 3\ 4\ 1],$
 $[5\ 2\ 3\ 4\ 1], [3\ 5\ 2\ 4\ 1], [5\ 2\ 4\ 3\ 1], [2\ 5\ 4\ 3\ 1], [4\ 2\ 5\ 3\ 1], [5\ 4\ 2\ 3\ 1], [4\ 5\ 2\ 3\ 1], [2\ 4\ 5\ 3\ 1],$
 $[1\ 2\ 4\ 5\ 3], [4\ 1\ 2\ 5\ 3], [2\ 4\ 1\ 5\ 3], [4\ 2\ 1\ 5\ 3], [1\ 4\ 2\ 5\ 3], [2\ 1\ 4\ 5\ 3], [4\ 5\ 2\ 1\ 3], [2\ 4\ 5\ 1\ 3],$
 $[5\ 2\ 4\ 1\ 3], [2\ 5\ 4\ 1\ 3], [4\ 2\ 5\ 1\ 3], [5\ 4\ 2\ 1\ 3], [2\ 1\ 5\ 4\ 3], [5\ 2\ 1\ 4\ 3], [1\ 5\ 2\ 4\ 3], [5\ 1\ 2\ 4\ 3],$
 $[2\ 5\ 1\ 4\ 3], [1\ 2\ 5\ 4\ 3], [5\ 4\ 1\ 2\ 3], [1\ 5\ 4\ 2\ 3], [4\ 1\ 5\ 2\ 3], [1\ 4\ 5\ 2\ 3], [5\ 1\ 4\ 2\ 3], [4\ 5\ 1\ 2\ 3],$
 $[1\ 2\ 3\ 4\ 5].$

Por possuir 120 vértices, a figura do ciclo Hamiltoniano destacado no $PFTRG(5)$ foi omitida.

Hipótese de Indução:

Suponha que o teorema seja válido para $n = m - 1, n \geq 4$.

Prova de indução:

Deve-se mostrar que o grafo $PFTRG(m)$ possui ciclo Hamiltoniano da seguinte forma:

A) Para $m \geq 6, m$ par:

Existe a construção dos 3 ciclos Hamiltonianos abaixo:

1. Existe ciclo Hamiltoniano com $v_1 = \iota_{[m]}$ e $v_{m!} = \iota_{[m]} \cdot pt(2, m + 1)$.
2. Existe ciclo Hamiltoniano com $v_1 = \iota_{[m]}$ e $v_{m!} = \iota_{[m]} \cdot pt(m, m + 1)$.
3. Existe ciclo Hamiltoniano com $v_1 = \iota_{[m]}$ e $v_{m!} = \iota_{[m]} \cdot pt(3, m + 1)$.

B) Para $m \geq 5, m$ ímpar:

Existe ciclo Hamiltoniano com $v_1 = \iota_{[m]}$ e $v_{m!} = \iota_{[m]} \cdot pt(4, m + 1)$.

Como afirmado anteriormente, vamos mostrar que o grafo $PFTRG(m)$ possui ciclos Hamiltonianos a partir dos grafos reduzidos do $PFTRG(m)$, pois sabemos que todo grafo reduzido do $PFTRG(m)$ é Hamiltoniano.

Construímos o grafo $PFTRG(m)$ a partir do grafo reduzido do $PFTRG(m)$ da seguinte forma: as m arestas ligantes do grafo reduzido do $PFTRG(m)$ pertencem ao ciclo Hamiltoniano no $PFTRG(m)$. Já as m arestas representantes do grafo reduzido, representadas por linhas pontilhadas na Figura 4.7, precisam ser substituídas por um caminho Hamiltoniano contendo todos os vértices existentes na devida partição $PFTRG_x(m)$, $1 \leq x \leq m$. Observe na Figura 4.8 o grafo com as mesmas arestas ligantes do grafo reduzido e as arestas representantes sendo substituídas por um caminho Hamiltoniano.

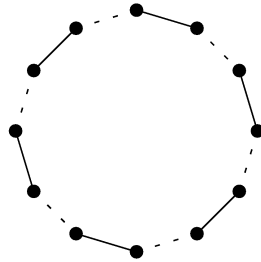


Figura 4.7: Modelo de um grafo reduzido do $PFTRG(m)$.

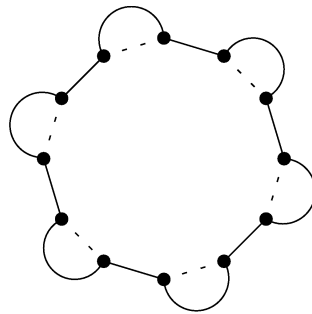


Figura 4.8: Permanência das arestas ligantes e substituição das arestas representantes por um caminho Hamiltoniano nas partições.

Precisamos mostrar, para m par e m ímpar, que existe caminho Hamiltoniano que substitua cada aresta representante do grafo reduzido do $PFTRG(m)$ por um caminho Hamiltoniano contendo todos os vértices da respectiva partição.

A) Para o caso em que m é par:

1. Vamos mostrar que existe ciclo Hamiltoniano no $PFTRG(m)$ com $v_1 = \iota_{[m]}$ e $v_m = \iota_{[m]} \cdot pt(2, m + 1)$.

Sabemos que existe um grafo reduzido do $PFTRG(m)$ com $v_1 = \iota_{[m]}$ e $v_{2m} = \iota_{[m]} \cdot pt(2, m + 1)$, pelo Lema 31.

Como o grafo reduzido do $PFTRG(m)$ é Hamiltoniano, ao manter as arestas ligantes do grafo reduzido e substituir cada aresta representante por um caminho Hamiltoniano contendo todos os vértices da respectiva partição $PFTRG_x$, $1 \leq x \leq m$, obtemos um ciclo Hamiltoniano do $PFTRG(m)$. Vale a pena ressaltar que as arestas representantes ligam dois vértices de uma mesma partição.

Para substituímos as arestas representantes que podemos escrever na forma $(u_{[m]}, v_{[m]})$, $u_{[m]}, v_{[m]} \in PFTRG_x(m)$, $1 \leq x \leq m$, tal que $v_{[m]} = u_{[m]} \cdot pt_r(4, m)$, utilizamos a hipótese de indução, pois como $m - 1$ é ímpar, conhecemos um ciclo Hamiltoniano no $PFTRG(m-1)$ com $v_1 = \iota_{[m-1]}$ e $v_{(m-1)!} = \iota_{[m-1]} \cdot pt(4, m)$, ou seja, conhecemos uma sequência de transposições pré-fixadas tal que entre v_1 e $v_{(m-1)!}$ existe caminho Hamiltoniano no $PFTRG(m-1)$.

Utilizando a operação inserção do elemento m na última posição (ver Definição 15 na Página 17), obtemos um caminho Hamiltoniano na partição do $PFTRG(m)$, $PFTRG_m(m)$, que substitua a aresta representante entre $u_{[m]}$ e $v_{[m]}$ nesta partição, pois esta partição é isomorfa ao grafo $PFTRG(m-1)$ pelo Lema 26 da Página 17.

Para a substituição das outras arestas representantes $(u_{[m]}, v_{[m]})$ tal que $v_{[m]} = u_{[m]} \cdot pt_r(4, m)$ referente às partições $PFTRG_x(m)$, $1 \leq x \leq m - 1$, basta utilizar, a partir do vértice $u_{[m]}$, a mesma sequência de transposições pré-fixadas usada para obter o caminho Hamiltoniano na partição $PFTRG_m(m)$ do $PFTRG(m)$ obtendo o vértice $v_{[m]}$ pois cada partição $PFTRG_x(m)$ é isomorfa ao grafo $PFTRG(m-1)$, pelo Lema 26.

2. Vamos mostrar que existe ciclo Hamiltoniano no $PFTRG(m)$ com $v_1 = \iota_{[m]}$ e $v_{m!} = \iota_{[m]} \cdot pt(m, m+1)$.

O argumento é análogo ao item 1, basta usar o Lema 32 da Página 32 que certifica que existe um grafo reduzido com $v_1 = \iota_{[m]}$ e $v_{m!} = \iota_{[m]} \cdot pt(m, m+1)$.

3. Vamos mostrar que existe ciclo Hamiltoniano no $PFTRG(m)$ com $v_1 = \iota_{[m]}$ e $v_{m!} = \iota_{[m]} \cdot pt(3, m+1)$.

O argumento é análogo ao item 1, basta usar o Lema 33 da Página 35 que certifica que existe um grafo reduzido com $v_1 = \iota_{[m]}$ e $v_{m!} = \iota_{[m]} \cdot pt(3, m+1)$.

É importante ressaltar que as arestas ligantes diferentes não influenciam, pois estas já pertencem ao ciclo Hamiltoniano no $PFTRG(m)$.

B) Para o caso em que m é ímpar:

Queremos mostrar que existe ciclo Hamiltoniano no $PFTRG(m)$ com $v_1 = \iota_{[m]}$ e $v_{m!} = \iota_{[m]} \cdot pt(4, m + 1)$.

Sabemos, pelo Lema 40 da Página 45 que existe um grafo reduzido do $PFTRG(m)$ com $v_1 = \iota_{[m]}$ e $v_{m!} = \iota_{[m]} \cdot pt(4, m + 1)$.

O argumento é análogo ao par, porém neste caso, utilizamos no grafo reduzido três tipos de transposições pré-fixadas representantes diferentes, a saber, $pt_r(2, m)$, $pt_r(m - 1, m)$ e $pt_r(3, m)$. Isto significa que serão necessários três caminhos Hamiltonianos distintos, ou melhor, três sequências de transposições pré-fixadas distintas, que substituam as arestas representantes.

Mas pela hipótese de indução, para $m - 1$ par, existem três ciclos Hamiltonianos do $PFTRG(m - 1)$: um ciclo com $v_1 = \iota_{[m]}$ e $v_{m!} = \iota_{[m]} \cdot pt(2, m + 1)$, outro com $v_1 = \iota_{[m]}$ e $v_{m!} = \iota_{[m]} \cdot pt(m - 1, m + 1)$ e outro com $v_1 = \iota_{[m]}$ e $v_{m!} = \iota_{[m]} \cdot pt(3, m + 1)$, ou seja, conhecemos as sequências de transposições pré-fixadas entre v_1 e $v_{(m-1)!}$ tal que existe caminho Hamiltoniano entre eles no $PFTRG(m - 1)$.

Utilizando a operação inserção do elemento m na última posição (ver Definição 15) nos três ciclos Hamiltonianos do $PFTRG(m - 1)$, obtemos três ciclos Hamiltonianos distintos na partição $PFTRG_m(m)$, pois esta é isomorfa ao grafo $PFTRG(m - 1)$, pelo Lema 26. Então, temos três caminhos Hamiltonianos diferentes que ligam v_1 a $v_{(m-1)!}$ da partição $PFTRG_m(m)$. Observando o grafo reduzido do $PFTRG(m)$, m ímpar, verificamos que a transposição pré-fixada que está associada ao vértice $\iota_{[m]}$ é $pt_r(2, m)$, então optamos pelo caminho Hamiltoniano que está entre $v_1 = \iota_{[m]}$ e $v_{(m-1)!} = \iota_{[m]} \cdot pt(2, m)$.

Para substituir as arestas representantes $(u_{[m]}, v_{[m]})$ referentes às outras partições $PFTRG_x(m)$, $1 \leq x \leq m - 1$, tal que $v_{[m]} = u_{[m]} \cdot pt_r(j, k)$, basta aplicar uma das três sequências de transposições já conhecidas, que aplicada a $u_{[m]}$ chegue em $v_{[m]}$ por um caminho Hamiltoniano. Isto é possível pois, para cada uma das três transposições pré-fixadas representantes distintas que ligam $u_{[m]}$ a $v_{[m]}$, existe um caminho Hamiltoniano entre $u_{[m]}$ e $v_{[m]}$ por hipótese de indução.

Basta fazer as seguintes substituições:

Se $v_{[m]} = u_{[m]} \cdot pt_r(2, m)$ então substitua esta aresta pelo caminho Hamiltoniano entre $u_{[m]}$ e $v_{[m]} = u_{[m]} \cdot pt_r(2, m)$, aplicando a sequência de transposições pré-fixadas

já conhecida, por hipótese de indução, ao vértice $u_{[m]}$ obtendo ao final $v_{[m]}$ da mesma partição.

Se $v_{[m]} = u_{[m]} \cdot pt_r(m-1, m)$ então substitua esta aresta pelo caminho Hamiltoniano entre $u_{[m]}$ e $v_{[m]} = u_{[m]} \cdot pt_r(m-1, m)$.

E se $v_{[m]} = u_{[m]} \cdot pt_r(3, m)$ então substitua esta aresta pelo caminho Hamiltoniano entre $u_{[m]}$ e $v_{[m]} = u_{[m]} \cdot pt_r(3, m)$.

E assim é possível substituir cada aresta representante por um caminho Hamiltoniano contendo todos os vértices da respectiva partição.

Logo, o $PFTRG(m)$, $m \geq 5$ possui ciclo Hamiltoniano.

□

Capítulo 5

Conclusão

Neste trabalho, definimos o Grafo de Rearranjo de genomas por Transposições Pré-Fixadas encontrando propriedades combinatoriais e estruturais para esse grafo, tais como:

- Regular de grau $\frac{n^2-n}{2}$.
- Possui $N = n!$ vértices e $M = \frac{(n^2-n)n!}{4}$ arestas.
- É um grafo de Cayley e portanto vértice-transitivo.
- **NÃO** é aresta-transitivo e portanto **NÃO** é simétrico.
- A inversa de uma transposição pré-fixada pt é uma transposição pré-fixada pt^{-1} .
- Partição do $PFTRG(n)$ em n cópias isomorfas ao $PFTRG(n-1)$, tal que as permutações de cada partição terminem com um mesmo elemento.
- Construimos 4 grafos reduzidos do grafo $PFTRG$. Cada um com dois vértices fixos, a saber, o ponto de origem e último vértice percorrido.
- O grafo $PFTRG$ possui ciclo Hamiltoniano com dois vértices fixos.

Vale a pena destacar que decidir se um grafo possui ciclo Hamiltoniano é NP-Completo. Além disso, como o $PFTRG$ é um grafo de Cayley e possui ciclo Hamiltoniano, esse grafo corrobora a conjectura de Lovász.

Observe a tabela comparativa 5.1 cujo objetivo é complementar a importância do resultado obtido neste trabalho.

-	$\Delta_{vertice}$	Ciclo Hamiltoniano	Problema distância
TRG(n)	$\Theta(n^3)$	Jwo J-S, 1991	Bafna e Pevzner, 1998
PFTRG(n)	$\Theta(n^2)$	Caroline, 2010	Dias e Meidanis, 2002
BS(n)	$\Theta(n)$	Jwo J-S, 1991	Darlington, 1978

Tabela 5.1: Tabela comparativa.

A tabela é composta de três grafos: o grafo de rearranjo de genomas por transposições (*TRG*), o grafo de rearranjo de genomas por transposições pré-fixadas (*PFTRG*) e o grafo Bubble-sort(*BS*), neste último grafo as transposições admitidas são aquelas que trocam dois elementos consecutivos de lugar. Todos estes grafos possuem o mesmo conjunto de vértices. Observe a ordem do grau do vértice representado na tabela: o *TRG* é o mais denso possuindo ordem cúbica, já o *PFTRG* está entre os dois, possuindo ordem quadrática e o *BS* é o menos denso possuindo ordem linear. Foi mostrado em 1991 que existe ciclo Hamiltoniano no *BS*, mas como o *BS* é um subgrafo do *TRG*, temos que o *TRG* também possui ciclo Hamiltoniano. Porém, o *BS* não é subgrafo do *PFTRG* então nada podemos afirmar. Através do nosso trabalho, mostramos que existe ciclo Hamiltoniano no *PFTRG*.

A tabela 5.1 também trata do problema de distância. Apesar do problema original de distância introduzido por Bafna e Pevzner em 1998 tratar do grafo *TRG*, o problema de distância por transposições pré-fixadas introduzido por Dias e Meidanis em 2002 já está sendo estudado separadamente, pois também possui muitos problemas em aberto, e portanto encontrar propriedades acerca deste grafo deve contribuir na área de rearranjo de genomas.

A forma como o ciclo Hamiltoniano é construído produz uma listagem de permutações de forma que só tenhamos transposições pré-fixadas entre duas consecutivas, isto pode contribuir no problema de distância, pois o fato de se ter um ciclo Hamiltoniano garante que todas as permutações foram percorridas sem repetir nem pular nenhuma. Observe que o fato de que as permutações serem agrupadas por partições ajuda a escolher apenas um sub-conjunto de permutações com alguns elementos em posições comuns (fixando os últimos

elementos, por exemplo, "...21" ou "...4537"). E caso se deseje que as permutações não sejam uniformes, mas variadas, basta "pular" as permutações usando o grafo reduzido.

Referências Bibliográficas

- [1] HAMILTON, W. R., “Letter to John T. Graves on the Icosian, 17 Oct., 1856”. In: *The Mathematical Papers of Sir William Rowan Hamilton*, v. 3 (Algebra), pp. 612–625, Cambridge University Press: New York, 1931.
- [2] KARP, R. M., “Reducibility among combinatorial problems”. In: *Complexity of Computer Computations*, pp. 85–103, Plenum Press: New York, 1972.
- [3] GAREY, M. R., JOHNSON, D. S., *Computers and Intractability. A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H. Freeman and Company: New York, 1979.
- [4] PAPADIMITRIOU, C. H., STEIGLITZ, K., “Some complexity results for the traveling salesman problem”. In: *In Proceedings 8th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, pp. 1–9, Association for Computing Machinery: New York, 1976.
- [5] LAKSHMIVARAHAN, S., JWO, J. S., DHALL, S. K., “Symmetry in interconnection networks based on Cayley graphs of permutation groups: a survey”, *Parallel Computing*, v. 19, pp. 361–407, 1993.
- [6] HEYDEMANN, M. C., DUCOURTHIAL, B., *Cayley graphs and interconnection networks*. in: G.Hahn, G.Sabidussi (Eds.), *Graph Symmetry: Algebraic Methods and Applications*, 1997.
- [7] LEIGHTON, F. T., “Introduction to parallel algorithms and architectures: array, trees, hypercubes”, *Morgan Kaufmann Publishers Inc.*, 1991.
- [8] DISCONIS, P., HOLMES, S., “Gray codes for randomization procedures”, *Journal Statistics and Computing*, v. 4, n. 4, 1994.

- [9] KONSTANTINOVA, E., “Some problems on Cayley graphs”, *Linear Algebra and its Applications*, v. 429, pp. 2754–2769, 2008.
- [10] LOVÁSZ, L., “Problem 11 in Combinatorial Structures and their Applications”, *Gorden and Breach*, 1970.
- [11] RAPAPORT, E. S., “Cayley color groups and Hamilton lines”, *Annals of Discrete Mathematics*, v. 24, pp. 51–58, 1959.
- [12] HAUSEN, R. A., *Rearranjos de Genomas: Teoria e Aplicações*, Ph.D. Thesis, COPPE-Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2007.
- [13] BAFNA, V., PEVZNER, P. A., “Genome rearrangements and sorting by reversals”. In: *Proceedings of the 34th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pp. 148–157, 1993.
- [14] CAPRARA, A., “Sorting by reversals is difficult”. In: *In Proceedings of the First International Conference on Computacional Molecular Biology - (RECOMB’97)*, pp. 75–83, ACM Press, 1997.
- [15] HANNENHALLI, S., PEVZNER, P., “Transforming cabbage into turnip: polynomial algorithm for sorting signed permutations by reversals”. In: *STOC ’95: Proceedings of the twenty-seventh annual ACM symposium on Theory of computing*, pp. 178–189, ACM Press: New York, NY, USA, 1995.
- [16] DWEIGHTER, H., “American Mathematical Monthly”, *The Mathematical Association of America*, v. 82, pp. 1010, 1975.
- [17] HEYDARI, M. H., SUDBOROUGH, I. H., “Sorting by prefix reversals is NP-complete”, *To be submitted*.
- [18] GATES, W. H., PAPADIMITRIOU, C. H., “Bounds for sorting by prefix reversals”, *Discrete Mathematics*, v. 27, pp. 47–57, 1979.
- [19] HEYDARI, M. H., SUDBOROUGH, I. H., “On the Diameter of the Pancake Network”, *Journal of Algorithms*, v. 25, pp. 67–94, 1997.
- [20] SETUBAL, C., MEIDANIS, J., *Introduction to Computational Molecular Biology*. PWS Publishing Company, 1997.
- [21] WALTER, M. E., SOBRINHO, M. C., OLIVEIRA, T. G., et al., “Improving the algorithm of Bafna and Pevzner for the problem of sorting

- by transpositions: a practical approach”, *Journal of Discrete Algorithms*, v. 3, pp. 342–361, 2005.
- [22] WALTER, M. E. M. T., SOARES, L. S. N., DIAS, Z., “Branch-and-bound algorithms for the problem of sorting by transpositions”. In: *Anais do XXVI Congresso da SBC, XXXIII Seminário Integrado de Software e Hardware*, 2006.
- [23] WALTER, M. E. T., FREIRE, A. L., MOURA, C., et al., “An approximation algorithm for the problem of sorting by transversals”. In: *Third Brazilian Workshop on Bioinformatics – WOB*, 2004.
- [24] BAFNA, V., PEVZNER, P. A., “Sorting by transpositions”, *SIAM Journal Discrete Mathematics.*, v. 11, pp. 224–240, 1998.
- [25] ELIAS, I., HARTMAN, T., “A 1.375-approximation algorithm for sorting by transpositions”, *IEEE/ACM Trans. Comput. Biol. Bioinformatics*, v. 3, n. 4, pp. 369–379, 2006.
- [26] HAUSEN, R. A., FARIA, L., FIGUEIREDO, C. M. H., et al., “On the toric graph as a tool to handle the problem of sorting by transpositions”. In: *Proceedings of Brazilian Symposium on Bioinformatics BSB 2008, Lecture Notes in Computer Science (sub-serie: Bioinformatics)*, v. 5167, pp. 79–91, Springer-Verlag, 2008.
- [27] DIAS, Z., MEIDANIS, J., “Sorting by Prefix Transpositions”. In: *Proceedings of the 9th International Symposium on String Processing and Information Retrieval*, v. 2476 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 463–468, Springer-Verlag: London, UK, 2002.
- [28] CHITTURI, B., SUDBOROUGH, I. H., “Bounding Prefix Transposition Distance for Strings and Permutations”. In: *in Proceedings of the Forty-First Annual Hawaii International Conference on System Sciences (HICSS)*, p. 468, IEEE Computer Society Press: Los Alamitos, CA, USA, 2008.
- [29] LABARRE, A., “Edit Distances and Factorisations of Even Permutations”. In: *in Proceedings of the Sixteenth Annual European Symposium on Algorithms (ESA)*, D. Halperin and K. Mehlhorn, eds., v.

5193 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 635–646, Springer-Verlag: Karlsruhe, Germany, 2008.

- [30] SHARMIN, M., HASAN, M., RAHMAN, A., et al., “Pancake Flipping with Two Spatulas”, *Computer Science*, 2008.
- [31] BONDY, J. A., MURTY, U. S. R., *Graph Theory*. v. 244. *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 2008.
- [32] LABARRE, A., *Combinatorial aspects of genome rearrangements and haplotype networks*, Ph.D. Thesis, Pôle Universitaire Européen de Bruxelles, 2007-2008.
- [33] KECECIOGLU, J., SANKOFF, D., “Exact and approximation algorithms for the inversion distance between two permutations”, *Algorithmica*, , n. 13, pp. 180–210, 1995.
- [34] WATTERSON, G., EWENS, W., HALL, T., et al., “The chromosome inversion problem”, v. 99, n. 1, pp. 1–7, 1982.
- [35] WALTER, M. E. M. T., DIAS, Z., MEIDANIS, J., “Transposição em Rearranjo de Genomas”. In: *Anais do XXVI Congresso da SBC, Workshop de Biologia Computacional (WBC)*, 2006.
- [36] FORTUNA, V. J., *Distâncias de Transposição entre Genomas*. Master Thesis, Instituto de Computação - Unicamp, 2005.
- [37] CHRISTIE, D. A., “Sorting permutations by block-interchanges”, *Information Processing Letters*, v. 60, n. 4, pp. 165–169, 1996.
- [38] CURRAN, S. J., WITTE, D., “Hamiltonian paths in cartesian products os directed cycles”, *Annals of Discrete Mathematics, B. R. Alspach and C. D. Godsil, eds.*, v. 27, 1985.
- [39] KEATING, K., WITTE, D., “On Hamiltonian cycles in Cayley graphs of groups with cyclic commutator subgroup”, *Annals of Discrete Mathematics*, v. 27, 1985.
- [40] JWO, J. S., *Analysis of interconnection networks based on Cayley graphs related to permutation groups*, Ph.D. Thesis, The University of Oklahoma, Norman, OK, USA, 1991.