



**COPPE/UFRJ**

## COLORAÇÃO TOTAL DE FAMÍLIAS DE SNARKS

Diana Sasaki de Souza Pereira

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de  
Figueiredo

Simone Dantas de Souza

Rio de Janeiro  
Fevereiro de 2010

# COLORAÇÃO TOTAL DE FAMÍLIAS DE SNARKS

Diana Sasaki de Souza Pereira

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

---

Prof. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D.Sc.

---

Prof. Simone Dantas de Souza, D.Sc.

---

Prof. Christiane Neme Campos, D.Sc.

---

Prof. Nelson Maculan Filho, D.Habil.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

FEVEREIRO DE 2010

Pereira, Diana Sasaki de Souza

Coloração Total de Famílias de Snarks/Diana Sasaki de Souza Pereira. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2010.

XIV, 82 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Simone Dantas de Souza

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2010.

Referências Bibliográficas: p. 79 – 82.

1. Combinatória. 2. Teoria dos Grafos. 3. Matemática. 4. Computação. I. Figueiredo, Celina Miraglia Herrera de *et al.*. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*“It’s a Snark!” was the sound  
that first came to their ears,  
And seemed almost too good to  
be true.*

*Trecho do poema “The Hunting  
of the Snark” de Lewis Carroll.*

# Agradecimentos

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo suporte financeiro.

Agradeço às minhas orientadoras Celina Miraglia Herrera de Figueiredo e Simone Dantas de Souza pela dedicação, apoio e suporte que me proporcionaram sabedoria e segurança durante o mestrado.

Agradeço aos membros de minha família por acreditarem em mim.

Agradeço aos meus professores pelo conhecimento que me proporcionaram durante minha trajetória e aos membros da banca pelas sugestões que enriqueceram este trabalho.

Por fim, agradeço aos meus amigos pela paciência que tiveram comigo e por toda ajuda que me deram durante estes dois anos de estudo.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## COLORAÇÃO TOTAL DE FAMÍLIAS DE SNARKS

Diana Sasaki de Souza Pereira

Fevereiro/2010

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Simone Dantas de Souza

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Uma coloração de arestas de um grafo  $G$  é uma atribuição de cores às arestas do grafo de modo que duas arestas adjacentes não possuam a mesma cor. Uma coloração total de um grafo  $G$  é uma coloração das arestas e dos vértices de  $G$  tal que não existam dois elementos adjacentes com a mesma cor. O *número cromático total*  $\chi_T(G)$  é o menor número de cores para o qual  $G$  admite uma coloração total.

*Snarks* são grafos simples, cúbicos, sem ponte, que não são 3-aresta coloríveis. Este trabalho foi motivado pelo problema proposto pela Cavicchioli et al [15] de determinar, caso exista, um snark com o menor número de vértices tal que  $\chi_T(G) = \Delta + 2$ .

Nesta dissertação determinamos que  $\chi_T(G) = \Delta + 1$  para a família de Snarks de Loupekhine, Blanusa famílias 1 e 2, e para as famílias que construímos com o *produto interno*, operação entre snarks introduzida por Isaacs [26]. Além disso, estudamos propriedades do produto interno com relação à coloração total.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

## TOTAL COLORING OF THE SNARKS FAMILIES

Diana Sasaki de Souza Pereira

February/2010

Advisors: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Simone Dantas de Souza

Department: Systems Engineering and Computer Science

An edge coloring of a graph is an assignment of colors to the edges of the graph so that no two adjacent edges have the same color. A total coloring of a graph  $G$  is a coloring of the edges and the vertices of  $G$  such that no two adjacent elements have the same color. The *total chromatic number*  $\chi_T(G)$  is the least number of colors required for a total coloring of  $G$ .

*Snarks* are simple connected bridgeless cubic graphs which are not 3-edge colorable. This work was motivated by the problem proposed by Cavicchioli et al [15] of determining whether there exists a snark with the smallest number of vertices for which  $\chi_T(G) = \Delta + 2$ .

We determined that  $\chi_T(G) = \Delta + 1$  for the family of Loupekhine snarks, Blanusa First and Second, and for families that we construct using the *dot product*, operation between snarks introduced by Isaacs [26]. Moreover, we studied the dot product operation with respect to total coloring.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>x</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xiv</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Definições gerais . . . . .	1
1.2 Coloração de arestas . . . . .	5
1.3 Teorema das Quatro Cores . . . . .	8
1.4 Coloração total . . . . .	13
<b>2 Snarks</b>	<b>16</b>
2.1 Coloração de vértices dos snarks . . . . .	17
2.2 Reconhecimento dos snarks . . . . .	17
2.3 Snarks triviais . . . . .	18
2.3.1 Cintura dos snarks . . . . .	18
2.3.2 Snarks ciclicamente $k$ -aresta conexo . . . . .	22
2.3.3 Snarks com cintura menor do que 5 e a coloração total . . . . .	25
2.4 Coloração total do grafo de Petersen, Estrela Dupla e Celmins-Swart 1 e 2 . . . . .	28
<b>3 Coloração total das famílias Snark-Flor, Goldberg e Loupekhine</b>	<b>30</b>
3.1 Snark-Flor . . . . .	30
3.2 Snarks de Goldberg . . . . .	34
3.3 Snarks de Loupekhine . . . . .	37
<b>4 Produto interno</b>	<b>45</b>
4.1 O produto interno e a coloração total . . . . .	47

4.2	Os snarks de Blanusa famílias 1 e 2 . . . . .	49
4.2.1	Construção dos blocos de Petersen . . . . .	50
4.2.2	A família $BF_i$ (Blanusa “First”) . . . . .	51
4.2.3	A família $BS_i$ (Blanusa “Second”) . . . . .	52
4.2.4	Coloração total dos snarks de Blanusa famílias 1 e 2 . . . . .	54
<b>5</b>	<b>Coloração total de famílias “Dot”</b>	<b>60</b>
5.1	Coloração total de $F_i \cdot P^j$ . . . . .	61
5.2	Coloração total de $LO_i \cdot P^j$ . . . . .	65
5.3	Coloração total de $G_i \cdot P^j$ . . . . .	69
5.4	Considerações finais sobre o bloco de Petersen . . . . .	74
5.4.1	Coloração do grafo de ligação $L_j, j \geq 1$ . . . . .	74
<b>6</b>	<b>Conclusão e trabalhos futuros</b>	<b>77</b>
6.1	Conclusão . . . . .	77
6.2	Trabalhos futuros . . . . .	78
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>79</b>

# Lista de Figuras

1.1	Grafo de Petersen com 1-fator. . . . .	3
1.2	Grafo classe 2 e não sobrecarregado. . . . .	6
1.3	Somente o vértice $x$ é branco. . . . .	7
1.4	Um exemplo de grafo cúbico com ponte $e$ . . . . .	7
1.5	Grafo $G$ do mapa do Brasil . . . . .	10
1.6	Triangulação $G$ e grafo dual $G'$ . . . . .	11
1.7	ciclo + 1-fator e dois ciclos + 1-fator . . . . .	11
1.8	Uma 3-coloração de arestas de $G$ . . . . .	12
1.9	Uma 4-coloração de faces . . . . .	12
1.10	Grafo $G$ com uma 4-coloração total . . . . .	13
2.1	Ilustração do poema de Lewis Carroll . . . . .	16
2.2	Grafo de Petersen . . . . .	18
2.3	Snark $G$ com $C_2$ . . . . .	19
2.4	Snark $G$ com $C_3$ . . . . .	19
2.5	Snark $G$ com $C_4$ . . . . .	19
2.6	Se $x'y'$ é ponte em $G'$ , então $x'x$ ou $y'y$ é ponte em $G$ . . . . .	20
2.7	Se $x'u$ é ponte em $G'$ , então $xx'$ é ponte em $G$ . . . . .	20
2.8	Se $w'y$ é ponte em $G'$ , então $w'w$ é ponte em $G$ . . . . .	21
2.9	Se $xy$ é ponte em $G'$ , então $xx'$ é ponte em $G$ . . . . .	21
2.10	Snark trivial $G$ e o snark construído $G'$ (grafo de Petersen). . . . .	22
2.11	Grafos $G_1$ e $G_2$ . . . . .	23
2.12	Grafos $G_1$ e $G_2$ . . . . .	23
2.13	Snark $G$ não ciclicamente 4-aresta conexo. . . . .	24
2.14	Grafo $H$ . . . . .	24

2.15	Snark $G$ não ciclicamente 4-aresta conexo. . . . .	24
2.16	Grafo $H$ . . . . .	25
2.17	Snark trivial, $S$ , e o snark de Petersen, $P$ , gerado através da operação $OP_3$ . . . . .	25
2.18	Snark $G$ com $C_2$ e grafo $G'$ . . . . .	26
2.19	Snark $G$ com $C_3$ e grafo $G'$ . . . . .	27
2.20	Snark $G$ com $C_4$ e grafo $G'$ . . . . .	27
2.21	Grafo de Petersen com uma 4-coloração total . . . . .	28
2.22	Estrela Dupla com uma 4-coloração total . . . . .	29
2.23	Celmins-Swart 1 com uma 4-coloração total . . . . .	29
2.24	Celmins-Swart 2 com uma 4-coloração total . . . . .	29
3.1	Bloco $B_i$ . . . . .	31
3.2	Grafo de ligação $L_i$ . . . . .	31
3.3	Snark $F_3$ e grafo de Petersen. . . . .	31
3.4	Snark $F_5$ obtido de $F_3$ e $L_5$ . . . . .	32
3.5	Snark $F_3$ com uma 4-coloração total $\pi_3$ . . . . .	32
3.6	Grafo de ligação $L_i$ com uma 4-coloração total $\pi$ . . . . .	33
3.7	Arestas de $E_3^{out}$ e de $E_5^{in}$ . . . . .	33
3.8	Snark $F_5$ com uma 4-coloração total $\pi_5$ . . . . .	34
3.9	Bloco $B_i$ . . . . .	34
3.10	Grafo de ligação $L_i$ . . . . .	35
3.11	Snark $G_3$ . . . . .	35
3.12	Snark $G_5$ . . . . .	36
3.13	Snark $G_3$ com uma 4-coloração total $\pi_3$ . . . . .	36
3.14	Snark $G_5$ com uma 4-coloração total $\pi_5$ . . . . .	36
3.15	Grafo de ligação $L_i$ com uma 4-coloração total $\pi$ . . . . .	37
3.16	Snark $G_7$ com uma 4-coloração total $\pi_7$ . . . . .	38
3.17	Bloco $B_i$ . . . . .	39
3.18	Grafo de ligação $L_i$ . . . . .	39
3.19	Snark $LO_3$ . . . . .	40
3.20	Snark $LO_5$ . . . . .	40
3.21	Snark $LO_7$ . . . . .	41

3.22	Snark $LO_3$ com uma 4-coloração total $\pi_3$ .	42
3.23	Grafo de ligação $L_i$ com uma 4-coloração total $\pi$ .	42
3.24	Snark $LO_5$ com uma 4-coloração total obtida pelos grafos $LO_3$ e $L_5$ .	43
3.25	Snark $LO_7$ com uma 4-coloração total obtida pelos grafos $LO_5$ e $L_7$ .	44
4.1	Operação produto interno de dois snarks $G_1$ e $G_2$ .	45
4.2	Grafos $P^2$ .	46
4.3	Snarks de Blanusa.	47
4.4	Coloração total no produto interno.	48
4.5	Bloco de Petersen.	50
4.6	Blocos de Petersen na retirada de duas arestas não adjacentes.	51
4.7	Snark $BF_0$ .	51
4.8	Grafo de ligação $L_i$ que é o bloco de Petersen já apresentado.	52
4.9	Snark $BF_1$ .	52
4.10	Snark $BF_2$ .	53
4.11	Snark $BS_0$ .	53
4.12	Snark $BS_1$ .	54
4.13	Snark $BS_2$ .	55
4.14	Snarks $BF_0$ e $BS_0$ .	55
4.15	Snarks $BF_1$ e $BS_1$ .	56
4.16	Grafo de ligação $L_i$ munido de duas colorações $\phi$ e $\phi'$ , respectivamente.	56
4.17	Uma 4-coloração total de Blanusa família 1.	57
4.18	Uma 4-coloração total de Blanusa família 2.	58
4.19	Snarks de Szekeres $BF_5$ e $BS_5$ .	59
5.1	Snark $F_3$ .	61
5.2	Grafo de ligação $L_j$ .	61
5.3	Snark $F_3 \cdot P^1$ .	62
5.4	Snark $F_3 \cdot P^2$ .	62
5.5	Snark $F_3$ .	63
5.6	Uma 4-coloração total $\pi_1$ de $F_3 \cdot P^1$ .	63
5.7	Grafo de ligação $L_j$ com 4-coloração total $\phi$ e $\phi'$ , respectivamente.	64
5.8	A 4-coloração total de $F_3 \cdot P^j$ .	65

5.9	Arestas que são retiradas de $LO_3$ .	66
5.10	Grafo de ligação $L_j$ .	66
5.11	Parte do snark $LO_3 \cdot P^1$ .	67
5.12	Snark $LO_3 \cdot P^2$ .	67
5.13	Snark $LO_3$ .	68
5.14	Snark $LO_3 \cdot P^1$ com uma 4-coloração total $\pi_1$ .	68
5.15	Grafo de ligação $L_j$ com coloração total $\phi'$ e $\phi$ , respectivamente.	68
5.16	Uma 4-coloração total de $LO_3 \cdot P^2$ .	69
5.17	Uma 4-coloração total de $LO_3 \cdot P^j$ para $j \geq 1$ .	70
5.18	Parte do snark $G_3 \cdot P^1$ .	71
5.19	Snark $G_3$ com arestas que serão retiradas.	71
5.20	Grafo de ligação $L_j$ .	72
5.21	Parte do snark $G_i \cdot P^2$ .	72
5.22	Snark $G_3 \cdot P^1$ com uma 4-coloração total.	73
5.23	Grafo de ligação com colorações totais $\phi'$ e $\phi$ , respectivamente.	73
5.24	Snark $G_3 \cdot P^2$ .	73
5.25	Construção da coloração total de $G_3 \cdot P^j$ .	74
5.26	Problema 2.	75
5.27	Problema 3.	76
5.28	Problema 3.	76

# Lista de Tabelas

- 1.1 Snarks mais conhecidos na literatura [46] e sua respectiva classificação 15

# Capítulo 1

## Introdução

Neste capítulo motivamos o estudo dos grafos Snarks apresentando definições gerais de Teoria dos Grafos, resultados sobre coloração de arestas, e uma breve discussão sobre o Teorema das Quatro Cores. Por fim, consideramos resultados sobre coloração total e a organização da dissertação.

### 1.1 Definições gerais

Nesta seção, apresentamos alguns conceitos da Teoria dos Grafos que serão utilizados e citados ao longo deste trabalho. Definições e conceitos não apresentados podem ser obtidos em Bondy e Murty [8].

Seja  $G$  um grafo com um conjunto de *vértices*  $V(G)$  e um conjunto de *arestas*  $E(G)$ , onde  $|V(G)| = n(G) = n$  e  $|E(G)| = m(G) = m$ .

Se a aresta  $e$  tem os vértices  $u, v$  como seus *extremos*, então  $e \in E(G)$  com  $e = uv$  ou  $e = vu$ , onde  $u, v \in V(G)$ . Além disso, os vértices  $u$  e  $v$  são ditos *adjacentes* e a aresta  $e$  é *incidente* aos vértices  $u$  e  $v$ . A *ordem* de um grafo  $G$  é o número  $n$  de vértices deste grafo.

Se  $e_1 = uv$  e  $e_2 = vw \in E(G)$ , as arestas  $e_1$  e  $e_2$  são ditas *adjacentes*. Arestas que não são adjacentes são chamadas *independentes*. Se  $u = w$ , as arestas  $e_1$  e  $e_2$  são denominadas arestas *múltiplas* ou *paralelas*. Se  $e = uu$ , esta aresta é um *laço*. Um grafo que não possui laços nem arestas múltiplas é um *grafo simples*.

A vizinhança de um vértice  $v$ , denotada por  $N(v)$ , é o conjunto de vértices que são adjacentes ao vértice  $v$ .

Um *emparelhamento* é um subconjunto das arestas de um grafo  $G$  que são independentes. Como cada aresta possui dois vértices que são seus extremos, o tamanho de um emparelhamento é limitado superiormente por  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Um *emparelhamento perfeito* é um emparelhamento de tamanho  $\frac{n}{2}$ , ou seja, que cobre todos os vértices do grafo.

O *grau* do vértice  $v$  é o número de arestas incidentes a  $v$  e é denotado por  $d(v)$ . O grau máximo de  $G$  é denotado por  $\Delta = \Delta(G) = \max\{d(v), v \in V(G)\}$  e, similarmente, o grau mínimo do grafo  $G$  é denotado por  $\delta = \delta(G) = \min\{d(v), v \in V(G)\}$ . Um grafo é *k-regular* quando todos os seus vértices têm o mesmo grau  $k$ . Neste caso,  $\delta(G) = \Delta(G) = k$ . O grafo 3-regular também é chamado de *cúbico*.

Um grafo  $H$  é um *subgrafo* de  $G$  se  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ . Seja  $G$  um grafo e  $A$  um subconjunto de vértices de  $G$ . Um subgrafo de  $G$  *induzido por*  $A$ , denotado por  $G[A]$ , é definido por  $V(G[A]) = A$  e  $E(G[A]) = \{xy \in E(G) | x \in A \text{ e } y \in A\}$ . Um *subgrafo gerador*  $H$  de  $G$  é um subgrafo de  $G$  tal que  $V(G) = V(H)$ . Um *subgrafo próprio*  $H$  de  $G$  é tal que  $V(H) \neq V(G)$  ou  $E(H) \neq E(G)$ .

Chama-se *passeio* uma sequência de vértices  $(v_0, v_1, \dots, v_k)$  tal que  $v_i v_{i-1} \in E(G)$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Se o passeio possuir todos os vértices distintos, então o chamamos de *caminho*. Um *passeio fechado* é o passeio que começa e termina no mesmo vértice, isto é  $v_0 = v_k$ . Se o passeio fechado possuir vértices distintos, a menos de  $v_0$  e  $v_k$ , então chamamos de *ciclo*. Logo, ciclos são os grafos simples, conexos e 2-regulares. O tamanho de um ciclo é o número de vértices que o compõe. Define-se a *cintura* de um grafo como o tamanho de um menor ciclo que o grafo possui.

Um grafo é *conexo* se para todo par de vértices distintos de  $G$  existe um caminho entre eles; caso contrário o grafo é *desconexo*. Um *subgrafo conexo maximal*  $H$  de  $G$  é um subgrafo de  $G$  que não é subgrafo próprio de algum subgrafo conexo de  $G$ . Uma *componente conexa* de  $G$  é um subgrafo de  $G$  conexo maximal. Denota-se o número de componentes conexas do grafo por  $w(G)$ .

Um *k-fator* em um grafo  $G$  é um subgrafo gerador  $k$ -regular de  $G$ . Assim, as arestas de um 1-fator formam um emparelhamento perfeito.

Os *grafos completos*,  $K_n$ , são grafos simples, conexos e  $(n - 1)$ -regulares. Uma *clique* de  $G$  é um subconjunto  $S$  de  $V(G)$  tal que  $G[S]$  é um grafo completo.

Um grafo é *bipartido* se os seus vértices podem ser particionados em dois conjun-

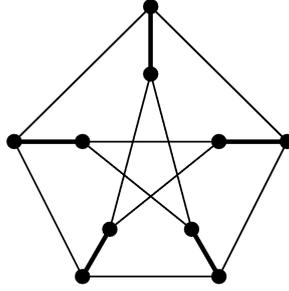


Figura 1.1: Grafo de Petersen com 1-fator.

tos  $X$  e  $Y$  tais que toda aresta possui um extremo em  $X$  e outro em  $Y$ . A bipartição  $(X, Y)$  é chamada de *partição* do grafo e  $X$  e  $Y$  são as *partes*. Um grafo é bipartido se, e somente se, não possui ciclo de tamanho ímpar.

Uma *ponte* (ou *aresta de corte*) de um grafo  $G$  é uma aresta  $e$  tal que  $w(G - e) > w(G)$ . Dado um subconjunto de vértices  $S$  de um grafo, o *corte de arestas* determinado por  $S$  é o conjunto das arestas que possuem uma extremidade em  $S$  e outra em  $\bar{S}$  cujos vértices estão fora de  $S$ . Denota-se tal corte por  $[S, \bar{S}]$ .

Um *isomorfismo* de dois grafos  $G$  e  $G'$  simples é uma bijeção  $f$  de  $V(G)$  em  $V(G')$ ,  $f : V(G) \rightarrow V(G')$ , tal que dois vértices  $v$  e  $u$  são adjacentes em  $G$  se, e somente se,  $f(v)$  e  $f(u)$  são adjacentes em  $G'$ .

Um *problema de decisão* consiste em decidir a resposta SIM ou NÃO a uma determinada questão. Um *algoritmo eficiente (polinomial)* é aquele cuja complexidade de tempo é uma função polinomial nos tamanhos dos dados de entrada. Um problema de decisão pertence a *classe P* se admite algoritmo que o resolva em tempo polinomial. A *classe NP* é aquela que compreende todos os problemas de decisão tais que existe uma justificativa a resposta SIM pode ser verificada por um algoritmo polinomial. Nada é exigido quanto a justificativa a resposta NÃO. Em contrapartida, a *classe CoNP* é aquela que compreende os problemas de decisão para os quais existe uma justificativa a resposta NÃO pode ser verificada em tempo polinomial.

Sejam dois problemas de decisão  $\pi_1$  e  $\pi_2$  e suponha que é conhecido um algoritmo que resolve o problema  $\pi_2$  em tempo polinomial. Se é possível transformar o problema  $\pi_1$  no problema  $\pi_2$  em tempo polinomial e se é conhecido um processo também polinomial de se transformar a solução de  $\pi_2$  numa solução de  $\pi_1$ , então pode-se utilizar o algoritmo conhecido para  $\pi_2$  para resolver o problema  $\pi_1$ . Um problema é *NP-completo* quando este pertence à classe NP e é tal que todo pro-

blema que pertença a classe NP pode ser transformado polinomialmente nele. Um problema é *NP-difícil* se todos os problemas da classe NP forem redutíveis a ele.

Outras informações sobre complexidade de algoritmos podem ser encontradas em Szwarcfiter [38].

Uma *coloração de vértices* é uma associação de cores aos vértices de um grafo de tal forma que vértices adjacentes não tenham a mesma cor. Uma *k-coloração de vértices* de um grafo  $G$  é uma coloração de vértices que utiliza um conjunto de  $k$  cores. Um grafo é *k-vértice colorível* se existe uma  $k$ -coloração de vértices de  $G$ . O *número cromático* de um grafo  $G$ , denotado por  $\chi(G)$ , é o menor número de cores suficientes para colorir os vértices do grafo  $G$  da forma acima estabelecida.

Garey e Johnson em 1979 [22], mostraram que determinar o número cromático  $\chi(G)$  de um grafo  $G$  é um problema NP-difícil e por isso analisa-se o número cromático para classes de grafos. Enunciaremos a seguir um teorema que fornece uma informação relevante sobre o número cromático de um grafo  $G$ , o Teorema de Brooks [9].

**Teorema 1.** (Brooks, 1941) *Seja  $G$  um grafo simples e conexo que não é um grafo completo nem é um ciclo ímpar. Então,*

$$\chi(G) \leq \Delta(G).$$

□

Um grafo *planar* é tal que pode ser representado no plano de tal forma que suas arestas não se cruzem, a menos dos seus extremos. Um grafo *plano* divide o plano em várias regiões. Uma *face* de um grafo plano é uma região do plano limitada por arestas, sem que haja cruzamento entre estas, a menos dos extremos. Dessa forma, arestas são fronteiras das faces.

Uma *coloração de faces* é uma associação de cores às faces de um grafo plano de tal forma que faces vizinhas não tenham a mesma cor; uma *k-coloração de faces* de um grafo  $G$  é uma coloração de faces que utiliza um conjunto de  $k$  cores. Um grafo é *k-face colorível* se existe uma  $k$ -coloração de faces de  $G$ .

## 1.2 Coloração de arestas

Uma *coloração de arestas* é uma associação de cores às arestas de um grafo de tal forma que arestas adjacentes não tenham a mesma cor. Uma *k-coloração de arestas* de um grafo  $G$  é uma coloração de arestas que utiliza um conjunto de  $k$  cores. Um grafo é *k-aresta colorível* se existe uma  $k$ -coloração de arestas de  $G$ . O *índice cromático* de um grafo  $G$ , denotado por  $\chi'(G)$ , é o menor número de cores tal que  $G$  admite uma coloração de arestas. Desta forma,  $\chi'(G) \geq \Delta$ .

O Teorema de Vizing [42] é fundamental para o índice cromático:

**Teorema 2.** (Vizing, 1964) *Seja  $G$  um grafo simples de grau máximo  $\Delta$ . Então,*

$$\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta + 1.$$

□

Tal teorema originou a classificação dos grafos em duas classes:  $G$  é *classe 1*, se  $\chi'(G) = \Delta$ ;  $G$  é *classe 2*, se  $\chi'(G) = \Delta + 1$ .

Para grafos bipartidos, por exemplo, temos o Teorema de König [29] sobre a coloração de arestas, cuja prova pode ser obtida no livro de Bondy e Murty [8].

**Teorema 3.** (König, 1916) *Se  $G$  é grafo simples e bipartido, então  $\chi'(G) = \Delta$ .* □

É intuitiva a noção errada de que quanto mais arestas um grafo possui, mais chance este terá de ser classe 2. Entretanto, por vezes esta noção pode ser enganosa.

Um grafo  $G$  é dito *sobrecarregado* se existe um subgrafo  $H$  de  $G$  com  $m(H)$  arestas e  $n(H)$  vértices, tal que  $\Delta(G) = \Delta(H) = \Delta$  e

$$m(H) > \Delta \left\lfloor \frac{n(H)}{2} \right\rfloor$$

Note que  $n(H)$  é ímpar porque caso contrário,

$$m(H) \leq \Delta \left\lfloor \frac{n(H)}{2} \right\rfloor = \Delta \frac{n(H)}{2}$$

As provas dos resultados clássicos apresentados a seguir podem ser encontrados em [18]. A seguir, é demonstrado que grafos sobrecarregados não são classe 1, pois  $\Delta$  cores não são suficientes para colorir as arestas de  $G$ .

**Lema 4.** *Seja  $G$  um grafo com  $n$  vértices,  $m$  arestas e grau máximo igual a  $\Delta$ . Se  $m > \Delta \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , então  $G$  é classe 2.*

**Prova.** Seja  $G$  tal que  $m(G) > \Delta \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Se  $G$  é classe 1, então qualquer  $\Delta$ -coloração de arestas particiona o conjunto de arestas em  $\Delta$  conjuntos independentes. Note que o número de arestas em cada conjunto não pode exceder  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , tamanho do maior emparelhamento em  $G$ . Então, com  $\Delta$  cores colorimos no máximo  $\Delta \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , mas  $m > \Delta \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Contradição.  $\square$

Todo grafo sobrecarregado é classe 2, mas nem todo grafo classe 2 é sobrecarregado. Um exemplo é o *grafo de Petersen*, apresentado na Figura 1.2.

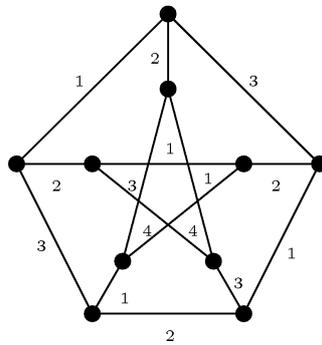


Figura 1.2: Grafo classe 2 e não sobrecarregado.

**Lema 5.** *Todo grafo regular de ordem ímpar é classe 2.*

**Prova.** Considere um grafo  $G$  regular de grau  $\Delta$  e  $n$  ímpar. Então,

$$m = \frac{\sum_{v \in V} d(v)}{2} = \Delta \frac{n(G)}{2} > \Delta \frac{(n-1)}{2} = \Delta \left\lfloor \frac{n(G)}{2} \right\rfloor$$

Logo, por definição,  $G$  é sobrecarregado e, portanto, é classe 2.  $\square$

Desta forma, estudamos os grafos regulares que não são trivialmente classe 2, ou seja, possuem  $n$  par e não são sobrecarregados.

O Teorema 7 mostra uma caracterização dos grafos cúbicos que são sobrecarregados e utiliza a seguinte construção: dado um grafo  $G$ , construa  $G'$  adicionando a  $G$  um vértice novo  $x$ ; e para cada  $v \in V(G)$ , adicione  $\Delta(G) - d(v)$  arestas ligando  $v$  a  $x$ . Note que  $G'$  pode ter arestas múltiplas. Veja a Figura 1.3.

Divida os vértices de  $G'$  em:

- pretos:  $V(G) \cup \{x\}$ , se  $n(G)$  é ímpar. Neste caso  $G'$  não possui vértice branco.
  - brancos:  $x$ , se  $n(G)$  par. Neste caso, os vértices de  $G$  são pretos.
- O objetivo é que se tenha número par de vértices pretos.

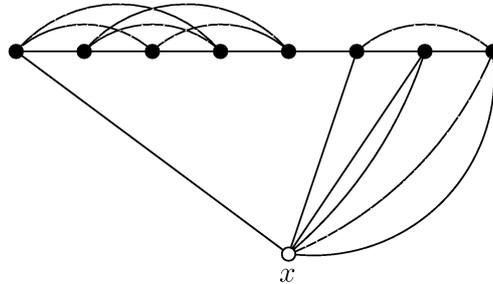


Figura 1.3: Somente o vértice  $x$  é branco.

Seja o corte de arestas determinado por  $S, [S, \bar{S}]$ .

**Teorema 6.** *Seja  $G$  um grafo e  $S \subseteq V(G)$ . O subgrafo  $G[S]$  satisfaz  $m(G[S]) > \Delta(G) \lfloor \frac{|S|}{2} \rfloor$  e  $\Delta(G[S]) = \Delta(G)$  se, e somente se,  $S$  possui um número ímpar de vértices pretos em  $G'$  e  $|[S, \bar{S}]| < \Delta(G)$  em  $G'$ .  $\square$*

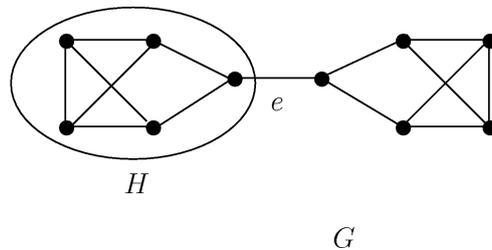


Figura 1.4: Um exemplo de grafo cúbico com ponte  $e$

O resultado a seguir pode ser visto em [18] e é de grande relevância para o nosso estudo.

**Teorema 7.** *Seja  $G$  um grafo cúbico. O grafo  $G$  tem ponte se, e somente se,  $G$  é sobrecarregado.*

**Prova.** Seja  $G$  um grafo cúbico e a aresta  $e \in E(G)$  uma ponte. Sabemos que a ordem de  $G$  é par, pois o número de vértices de grau ímpar é par. Seja  $H$  uma

componente conexa de  $G - e$ . Logo, um vértice de  $H$  possui grau 2 e os restantes possuem grau 3. Veja um exemplo na Figura 1.4.

Neste caso, a ordem de  $H$  é ímpar. O número de arestas de  $H$  é

$$m(H) = \frac{\sum_{v \in V} d(v) - 1}{2} = \frac{3(n(H) - 1) + 2}{2} = \frac{3n(H) - 3 + 2}{2} = \frac{3n(H) - 1}{2} > 3 \left\lfloor \frac{n(H)}{2} \right\rfloor$$

Logo,  $G$  é sobrecarregado.

Seja  $G$  um grafo cúbico e sobrecarregado e  $G'$  o grafo obtido pela construção anterior. Como  $G$  é cúbico, o grafo  $G'$  possui  $V(G') = V(G) \cup \{x\}$  e  $E(G') = E(G)$ . O vértice  $x$  é um vértice isolado com a cor branca e todos os vértices de  $G$  são pretos.

Como  $G$  é sobrecarregado com  $n$  par, existe subconjunto próprio  $S$  de  $V(G)$  tal que  $G[S]$  possui  $\Delta(G[S]) = \Delta(G) = \Delta$  e ele próprio é sobrecarregado. Pelo Teorema 6, temos pela equivalência que,  $|S|$  é ímpar e  $|[S, \bar{S}]| < 3$ .

Além disso, todos os vértices de  $S$  são pretos, pois o único branco em  $G'$  está fora de  $S$ . Note ainda que em  $G'$  todos os vértices de  $G$  têm grau  $\Delta$ . Em particular, em  $G'$ , todos os vértices de  $S$  têm grau  $\Delta$ . A soma dos graus de todos os vértices de  $S$  em  $G[S]$  pode ser escrita como

$$\Delta|S| - |[S, \bar{S}]| = 2|E(S)|$$

Da paridade entre os termos desta equação e como  $G$  é cúbico, temos que

$$3|S| = 2|E(S)| + |[S, \bar{S}]|.$$

e, por consequência,  $|[S, \bar{S}]| = 1$ . □

### 1.3 Teorema das Quatro Cores

Em 1852, Frederick Guthrie, aluno do matemático Augustos De Morgan, descreveu-lhe um problema colocado por seu irmão Francis Guthrie.

Enquanto coloria o mapa da Inglaterra, Francis Guthrie acreditou que 4 cores seriam suficientes para se colorir qualquer mapa, de tal forma que regiões vizinhas não possuíssem a mesma cor.

De Morgan, entusiasmado com o problema, resolveu propor esta questão aos seus colegas matemáticos e em 23 de outubro de 1852, De Morgan escreveu para Hamilton produzindo a primeira referência escrita sobre o problema. Esta é a origem da PROBLEMA DAS QUATRO CORES.

PROBLEMA DAS QUATRO CORES Todo mapa geográfico pode ser colorido com 4 ou menos cores, de tal modo que regiões vizinhas não tenham a mesma cor.

Este problema tornou-se de grande relevância, mas somente foi resolvido após, aproximadamente, cento e vinte e quatro anos.

Em 1976, Appel e Haken em [2, 3] provaram a Conjectura da Quatro Cores utilizando o computador em parte da prova. Até então, muitas provas incorretas tinham sido apresentadas, incluindo a prova de Kempe [28], que apesar de não estar correta, colaborou para a prova definitiva. Em 1996, esta conjectura foi confirmada por Robertson, Sanders, Seymour e Thomas [34]. Maiores informações podem ser obtidas em Biggs et al [6] e Wilson [45].

Vejam como este problema é modelado como um problema de coloração em grafos. Todo mapa desenhado no plano possui uma representação por grafos. Tal representação é obtida da seguinte forma:

- Atribua um vértice a cada região do mapa;
- Atribua uma aresta entre vértices que representam regiões, se tais regiões são vizinhas (têm fronteira);
- Atribua um vértice a região externa ao mapa. Este vértice é chamado *vértice externo*;
- Se regiões do mapa são vizinhas à região externa, atribua uma aresta entre o vértice externo e os demais vértices que representam estas regiões do mapa.

Vejam um exemplo na Figura 1.5.

Desta forma, foi possível construir um grafo  $G$  planar conexo para cada mapa que possui representação no plano. O grafo  $G$  é o *dual do mapa*. Assim, o PROBLEMA DAS QUATRO CORES passa a ser um problema de colorir os vértices de um grafo  $G$  com 4 cores.



Figura 1.5: Grafo  $G$  do mapa do Brasil

Supondo que  $G$  possua o maior número de arestas possível, temos a situação em que todas as faces de  $G$  são triângulos. Neste caso,  $G$  é uma *triangulação*. Note que a triangulação  $G$  é 4-vértice colorível, então todo subgrafo gerador de  $G$  também será 4-vértice colorível.

Por outro lado, se um grafo  $G$  é plano, então este possui um *grafo dual*  $G^*$  obtido de forma análoga à obtenção do grafo  $G$  a partir de um mapa no plano (substituindo as regiões do mapa pelas faces em  $G$ ). O grafo  $G^*$  de um grafo  $G$  cujas faces são triângulos, é cúbico e sem ponte, pois o grafo  $G$  não possui laços. Além disso, a principal observação sobre  $G^*$  é que ele é o próprio mapa, pois estamos voltando ao mapa por dualidade se este for conexo. Define-se um *mapa* como um grafo planar, conexo e sem ponte.

Veja um exemplo de uma triangulação  $G$  e seu respectivo grafo dual  $G^*$  na Figura 1.6.

Neste contexto, em 1880, Tait [39] provou que o PROBLEMA DAS QUATRO CORES

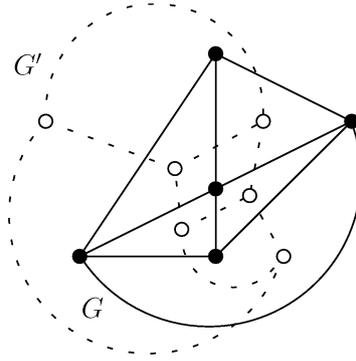


Figura 1.6: Triangulação  $G$  e grafo dual  $G'$

é equivalente ao problema da coloração de arestas de um grafo planar, cúbico e sem ponte. Antes de mostrarmos esta equivalência, enunciaremos o Lema de Petersen que será utilizado na prova do Teorema 9. A prova deste lema pode ser encontrada em [29].

**Lema 8.** (Petersen, 1891) *Seja um grafo  $G$  cúbico e sem ponte. Então o conjunto  $E(G)$  pode ser decomposto na união de ciclos de arestas disjuntas e 1-fator de  $G$ .  $\square$*

Exemplos:

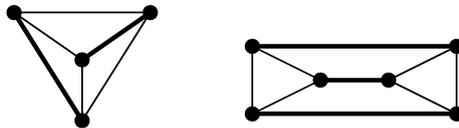


Figura 1.7: ciclo + 1-fator e dois ciclos + 1-fator

A prova do Teorema 9 [39] abaixo é uma modificação da prova apresentada em [18].

**Teorema 9.** (Tait, 1880) *Todo grafo plano e cúbico é 4-face colorível se, e somente se, todo grafo cúbico, planar e sem ponte é 3-aresta colorível.*

**Prova.** Seja  $G$  um grafo cúbico, plano e sem ponte, com regiões coloridas com as cores  $a, b, c$  e  $d$ . Construiremos uma 3-coloração de arestas especificando uma cor para as arestas que separam regiões coloridas da seguinte forma:

- cor 1: para as arestas entre regiões coloridas com a cor  $a$  e  $b$  ou  $c$  e  $d$ ;
- cor 2: para as arestas entre regiões coloridas com cores  $a$  e  $c$  ou  $b$  e  $d$ ;

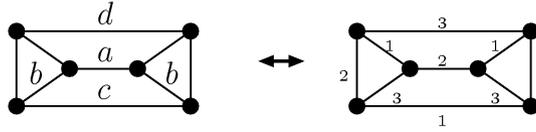


Figura 1.8: Uma 3-coloração de arestas de  $G$

- cor 3: para arestas entre regiões coloridas com as cores  $a$  e  $d$  ou  $b$  e  $c$ .

Suponha que  $G$  é grafo cúbico, planar e sem ponte, com uma 3-coloração de arestas. Veja a Figura 1.8. O subgrafo formado pelas arestas com cor 1 e cor 2 é um ciclo. Cada cor da 3-coloração de arestas de  $G$  forma um emparelhamento perfeito e os três emparelhamentos são disjuntos. Então, pelo Lema 8 e considerando que cada um dos emparelhamentos formam 1-fator, temos que encontrar ciclos de arestas disjuntas. Para tanto, considere o 1-fator formado pelas arestas de cor 3, por exemplo. O restante das arestas formam exatamente um ciclo, cujas arestas possuem cores 1 e 2. Pinte a parte interna deste ciclo com a cor  $\alpha$  e a parte externa ao ciclo, com a cor  $\beta$ . Veja a Figura 1.9(a).

De forma análoga, pinte a parte interna do ciclo formado pelas arestas de cores 1 ou 3, com a cor  $\gamma$  e a externa com a cor  $\rho$ . A união destes dois ciclos é  $G$ , considerando uma única ocorrência das arestas repetidas é  $G$ . Agora, para cada região de  $G$ , atribua um par  $(x, y)$ , no qual  $x \in \{\alpha, \beta\}$  e  $y \in \{\gamma, \rho\}$ . As colorações das regiões vizinhas são diferentes,  $(\alpha, \gamma)$ ,  $(\alpha, \rho)$ ,  $(\beta, \gamma)$  e  $(\beta, \rho)$  e temos uma 4-coloração de faces para  $G$ . Veja a Figura 1.9.

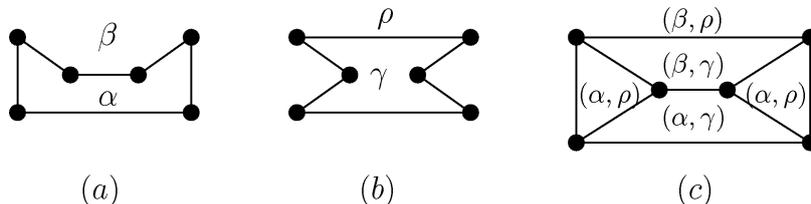


Figura 1.9: Uma 4-coloração de faces

□

A partir deste resultado, iniciou-se a busca por grafos cúbicos, sem ponte que fossem classe 2, de forma a obter um contraexemplo para a conjectura das quatro

cores. Nenhum grafo planar com estas características foi encontrado. Por outro lado, houve o surgimento de uma nova classe de grafos: *Snarks*.

Snarks são grafos cúbicos, sem ponte e classe 2. Veremos mais informações sobre esta classe de grafos no Capítulo 2.

## 1.4 Coloração total

Uma *coloração total* de um grafo  $G$  é uma atribuição de cores aos vértices e às arestas do grafo de tal forma que cores distintas sejam atribuídas a:

- todo par de vértices que sejam adjacentes;
- todas as arestas que sejam adjacentes;
- cada vértice e suas arestas incidentes.

Uma  $k$ -*coloração total* de um grafo  $G$  é uma coloração total de  $G$  que utiliza um conjunto de  $k$  cores. Um grafo é  $k$ -*total colorível* se existe uma  $k$ -coloração total de  $G$ . O *número cromático total* de um grafo  $G$ , denotado por  $\chi_T(G)$ , é o menor inteiro positivo  $k$  para o qual  $G$  admite uma  $k$ -coloração total.

Na Figura 1.10 apresentamos um exemplo de um grafo com uma 4-coloração total. Observe que para este grafo  $G$ ,  $\chi(G) = 2$ ,  $\chi'(G) = 3$  e  $\chi_T(G) = 4$ .

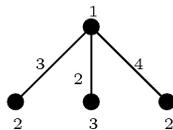


Figura 1.10: Grafo  $G$  com uma 4-coloração total

Um grafo  $G$  com vértice  $v$  tal que o grau de  $v$  seja  $\Delta$  necessita de  $\Delta$  cores para colorir as arestas incidentes a  $v$  e, além disso necessita de mais uma cor para ser atribuída ao próprio vértice  $v$ . Isto implica que

$$\chi_T(G) \geq \Delta + 1, \text{ para todo grafo } G.$$

Behzad [4] e Vizing [42] conjecturaram independentemente um mesmo limite superior para o número cromático total. Esta conjectura é chamada de *Conjectura da Coloração Total (TCC, Total Colouring Conjecture)*.

**Conjectura 10.** (TCC) Para todo grafo  $G$  simples,

$$\chi_T(G) \leq \Delta(G) + 2$$

□

Sabendo que  $\chi_T(G) \geq \Delta(G) + 1$  e a partir da TCC ( $\chi_T(G) \leq \Delta + 2$ ), convencionou-se que: se  $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$ , o grafo  $G$  é *tipo 1*; e se  $\chi_T(G) = \Delta(G) + 2$ , o grafo  $G$  é *tipo 2*.

Em 1989, Sánchez-Arroyo [36] mostrou que decidir se  $\chi_T(G) = \Delta(G) + 1$  é NP-difícil. A TCC ainda é um problema em aberto, mas foi verificada para diversas classes de grafos. Para os grafos completos, o número cromático total do  $K_n$  é igual a  $n$ , se  $n$  é ímpar; e é igual a  $n + 1$  se  $n$  é par, ou seja,  $K_n$  é tipo 1 se  $n$  é ímpar e é tipo 2 se  $n$  é par (Behzad et al [5]).

Para os ciclos, a TCC também foi verificada. O número cromático total é igual a 3, se  $n$  é múltiplo de 3; caso contrário, o número cromático total é igual a 4. Ou seja,  $C_n$  é tipo 1, se  $n$  é múltiplo de 3; caso contrário,  $C_n$  é tipo 2 (Yap [47]).

A TCC foi verificada para os grafos com  $\Delta = 3$  por Rosenfeld [35] e Vijayaditya [41] em trabalhos independentes.

Neste trabalho, estudamos a coloração total de famílias de grafos snarks.

Cavicchioli et al. [15], provaram que todo snark de ordem menor do que 30 é tipo 1. Esta prova foi obtida com o auxílio do computador, mas nenhuma coloração foi apresentada. No trabalho de Da Silva e Dantas [17] foram apresentadas as colorações dos snarks de ordem menor do que 30 que se encontram em Wolfram [46]. Note que nem todos os snarks de ordem menor do que 30 estão em Wolfram [46].

Esta dissertação tem por objetivo contribuir para a solução do problema proposto por Cavicchioli et al. em [15] de encontrar, caso exista, um snark com o menor número de vértices, que seja tipo 2. Dessa forma, classificamos os snarks apresentados na Tabela 1.1.

Esta dissertação está organizada da forma a seguir. No Capítulo 1 apresentamos as definições básicas, a motivação e os objetivos deste trabalho. No Capítulo 2 mostramos algumas propriedades dos snarks, algumas colorações e, além disso, discutimos o conceito de trivialidade com relação a coloração total. No Capítulo 3 descrevemos a coloração total das famílias Snark-Flor e Goldberg, mostradas por

Snarks	Número de vértices ou família infinita	Classificação
Petersen	10	tipo 1 [11]
Estrela Dupla	30	tipo 1 [17]
Celmins-Swart 1 e 2	26	tipo 1 [17]
Snarks	$\leq 30$	tipo 1 [15]
Snarks-Flor	família infinita	tipo 1 [11]
Goldberg	família infinita	tipo 1 [12]
Loupekhine	família infinita	tipo 1
Blanusa famílias 1 e 2	duas famílias infinitas	tipo 1
Szekeres	50	tipo 1
$F_i \cdot P^j$	família infinita	tipo 1
$LO_i \cdot P^j$	família infinita	tipo 1
$G_i \cdot P^j$	família infinita	tipo 1

Tabela 1.1: Snarks mais conhecidos na literatura [46] e sua respectiva classificação

Campos [11] e Campos, Dantas e Mello [12], e determinamos a coloração total da família Loupekhine. No Capítulo 4 estudamos a principal operação entre snarks, o produto interno (*dot product*) e determinamos a coloração total de Blanusa famílias 1 e 2. No Capítulo 5 construímos famílias de snarks utilizando o produto interno entre as famílias Snark-Flor, Goldberg e Loupekhine, e o grafo de Petersen; e determinamos a coloração total de tais famílias. O Capítulo 6 conclui o trabalho com a discussão de trabalhos futuros.

# Capítulo 2

## Snarks

O nome “Snark” foi dado por M. Gardner [21], baseado no poema de Lewis Carroll “The Hunting of the Snark” [13], pela dificuldade de se encontrar tais grafos. Neste poema, snark é um animal fictício, fantástico e inimaginável.



Figura 2.1: Ilustração do poema de Lewis Carroll

Conforme apresentado no Capítulo 1, os snarks são grafos cúbicos, sem ponte e classe 2, para snarks que são grafos simples. O grafo de Petersen é o menor snark, porque possui 10 vértices e foi o primeiro a ser descoberto por J. Petersen em 1898 [30]. Após muito tempo, D. Blanusa, em seu trabalho de 1946 [7], descobriu *Snark de Blanusa* que possui 18 vértices; o *Snark de Descartes* foi publicado em 1948 [19] e possui 210 vértices. Em 1973, G. Szekeres [37] descobriu um novo snark com 50 vértices; o *Snark de Szekeres*. R. Isaacs em 1975 [26] publicou as duas primeiras famílias infinitas de snarks que daremos maior atenção nos próximos capítulos, tratam-se das famílias *BDS* e *Snark-Flor*. Além destas famílias, R. Isaacs

descobriu o snark *Estrela Dupla (Double Star)*. Apesar dos snarks terem surgido a partir do estudo sobre o PROBLEMA DAS QUATRO CORES, os snarks continuam sendo uma classe de grande relevância, pois foram estudados como contraexemplos para outras conjecturas. Maiores informações sobre os snarks e sua importância podem ser obtidas em [8, 10, 14, 15, 16, 20, 24, 33, 40, 44].

Neste capítulo, estudaremos algumas propriedades dos snarks como coloração de vértices, complexidade do problema de reconhecimento e a definição de snark trivial. Na seção 2.3.3 discutiremos sobre a coloração total de alguns snarks triviais.

## 2.1 Coloração de vértices dos snarks

Nesta seção estudamos o número cromático dos grafos snarks.

**Lema 11.** *Seja  $G$  um snark. Então  $\chi(G) = 3$ .*

**Prova.** Pelo Teorema 1,  $\chi(G) \leq 3$ . Por outro lado, pelo Teorema 3,  $G$  não é grafo bipartido, pois seria classe 1. Portanto,  $G$  possui ciclo ímpar, que necessita de no mínimo 3 cores para colorir os vértices. Assim,  $\chi(G) \geq 3$ . Logo,  $\chi(G) = 3$   $\square$

## 2.2 Reconhecimento dos snarks

Nesta seção provamos que o PROBLEMA DE RECONHECIMENTO DE UM GRAFO SNARK (PROBLEMA  $\pi$ ) é CoNP-completo reduzindo o problema NP-completo [25] 3-COLORAÇÃO DE ARESTAS, para o PROBLEMA  $\bar{\pi}$ . Sabemos que o problema 3-COLORAÇÃO DE ARESTAS é NP-completo mesmo para grafos cúbicos [25].

Estes dois problemas de decisão são definidos a seguir:

3-COLORAÇÃO DE ARESTAS

*Instância:* Grafo  $G$  cúbico.

*Pergunta:* Grafo  $G$  é 3-colorível?

PROBLEMA  $\bar{\pi}$

*Instância:* Grafo  $G$ .

*Pergunta:* Grafo  $G$  não é snark?

**Teorema 12.** *O problema de RECONHECIMENTO DE UM GRAFO SNARK é CoNP-completo.*

**Prova.** Claramente o PROBLEMA  $\bar{\pi}$  está em NP, porque basta verificar se o grafo possui ponte ou não é cúbico ou ainda se é sobrecarregado. De forma a reduzir o problema 3-COLORAÇÃO DE ARESTAS para o PROBLEMA  $\bar{\pi}$ , precisamos construir uma instância particular  $G'$  do PROBLEMA  $\bar{\pi}$  a partir de uma instância genérica  $G$  do problema 3-COLORAÇÃO DE ARESTAS tal que  $G$  tem uma 3-coloração de arestas se, e somente se,  $G'$  não é snark.

Construção da instância particular: se o grafo  $G$  for sobrecarregado, então  $G'$  é o grafo de Petersen (Figura 2.2). Caso contrário,  $G' = G$ . Observe que verificar se um grafo é sobrecarregado pode ser realizado em tempo polinomial [18].

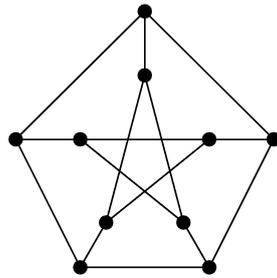


Figura 2.2: Grafo de Petersen

Dessa forma, se  $G$  é sobrecarregado, então  $G'$  não é 3-aresta colorível. Se  $G$  não é sobrecarregado,  $G$  é 3-aresta colorível se, e somente se,  $G$  não é snark.  $\square$

## 2.3 Snarks triviais

Chamamos os snarks de *triviais* quando a partir destes podemos construir snarks menores.

### 2.3.1 Cintura dos snarks

Mostraremos que snarks que possuem cintura menor do que 5 são *triviais*, pois a partir deles podemos construir snarks menores, pela remoção de vértices e arestas. A demonstração do resultado abaixo pode ser encontrada em [18].

**Teorema 13.** *Seja  $G$  um snark contendo  $C_2$ ,  $C_3$  ou  $C_4$ , ou seja, ciclos de tamanho 2, 3 ou 4. Então, o grafo  $G'$  obtido através das operações apresentadas nas Figuras 2.3, 2.4 e 2.5, é um snark.*

**Prova.** O grafo  $G'$  é um grafo cúbico, parte deste grafo pode ser vista nas Figuras 2.3, 2.4 e 2.5. Primeiro mostraremos que o grafo  $G'$  é 4-aresta colorível. Observe que se as arestas do grafo  $G'$  obtido pelas operações das Figuras 2.3, 2.4 e 2.5 pudessem ser coloridas com 3 cores, então  $G$  também poderia ter suas arestas coloridas com 3 cores, já que as arestas que foram retiradas de  $G'$  de modo a recuperar  $G$ , não acarretam o surgimento ou a perda de cores de  $G$  (a extensão da 3-coloração de arestas de  $G'$  para  $G$  é ilustrada nas Figuras 2.3, 2.4 e 2.5). Uma contradição, pois  $G$  é snark.

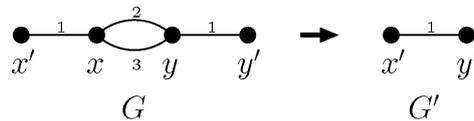


Figura 2.3: Snark  $G$  com  $C_2$ .

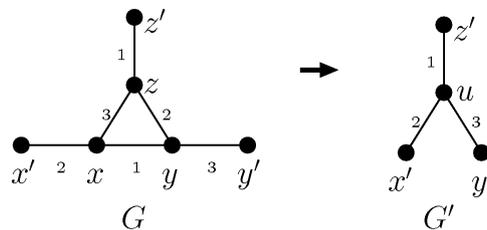


Figura 2.4: Snark  $G$  com  $C_3$ .

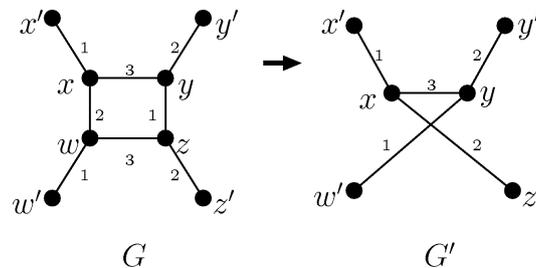


Figura 2.5: Snark  $G$  com  $C_4$ .

Atenção para os vértices das figuras acima, todos possuem grau 3 em  $G$  e  $G'$ .

Em seguida, verificaremos que  $G'$  não tem ponte. Consideremos a construção de  $G'$  da análise anterior.

- Caso 1: Considere um snark  $G$  com  $C_2$ .

Suponha que a aresta  $x'y'$  é ponte em  $G'$ . Então sua retirada desconecta  $G'$  com  $x' \in S$  e  $y' \in S'$ , onde  $S$  e  $S'$  são componentes conexas diferentes de  $G - \{x'y'\}$ . Veja na Figura 2.6.

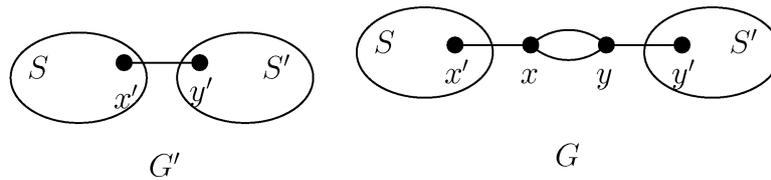


Figura 2.6: Se  $x'y'$  é ponte em  $G'$ , então  $x'x$  ou  $y'y$  é ponte em  $G$ .

Dessa forma,  $x'x$  ou  $yy'$  seriam ponte  $G$ , como mostra a Figura 2.6. Uma contradição, pois  $G$  é snark.

- Caso 2: Considere um snark  $G$  com  $C_3$ :

Suponha que a aresta  $x'u$  é ponte em  $G'$ . Logo, sua retirada implica que  $x' \in S$  e  $u \in S'$ . Veja a Figura 2.7.

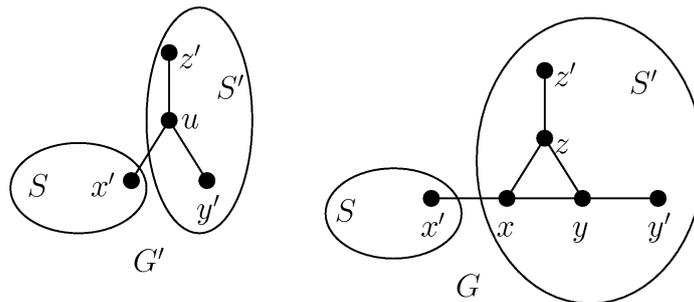


Figura 2.7: Se  $x'u$  é ponte em  $G'$ , então  $xx'$  é ponte em  $G$ .

Dessa forma,  $x'x$  também seria uma ponte em  $G$ , pois os vértices  $x'$  e  $x$  estariam em componentes conexas distintas, como mostra a Figura 2.7. Isto contraria a hipótese de  $G$  ser snark.

A prova é análoga para os casos nos quais  $y'u$  e  $z'u$  são pontes em  $G'$  e dessa forma, as arestas  $y'y$  e  $z'z$  seriam pontes em  $G$ .

- Caso 3: Considere um snark  $G$  com  $C_4$ :

Suponha que a aresta  $w'y$  é ponte em  $G'$ . Então sua retirada desconecta  $G'$  com  $w' \in S$  e  $y \in S'$ , como mostra a Figura 2.8.

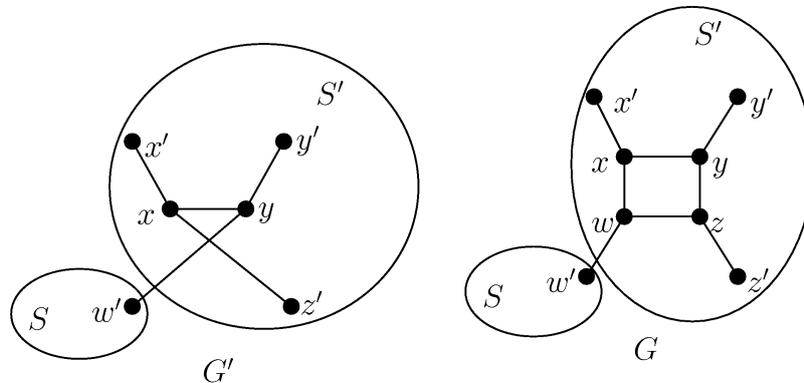


Figura 2.8: Se  $w'y$  é ponte em  $G'$ , então  $w'w$  é ponte em  $G$ .

Dessa forma,  $G$  também possui ponte  $w'w$ , caso contrário teria que ter um caminho que ligasse os vértices  $w'$  e  $y$  em  $G$ , mas estes pertencem à componentes conexas distintas em  $G$ . Veja a Figura 2.8.

Suponha que  $xy$  é ponte em  $G'$ . Logo não existe outro caminho de  $x$  a  $w'$  que não passe por esta aresta em  $G'$ . Dessa forma, como mostra a Figura 2.9, não temos um caminho do vértice  $x'$  ao vértice  $w'$  que não passe pela aresta  $xx'$ . Assim, esta aresta é ponte em  $G$ .

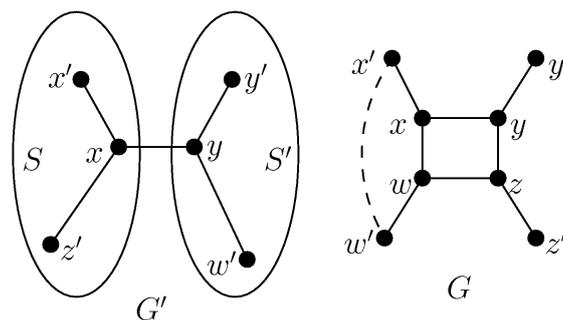


Figura 2.9: Se  $xy$  é ponte em  $G'$ , então  $xx'$  é ponte em  $G$ .

Logo, o grafo  $G'$  não possui ponte.

□

Na Figura 2.10 apresentamos um exemplo do snark-flor  $F_3$  com cintura 3 e o snark de Petersen obtido a partir do  $F_3$  através da operação da Figura 2.4.

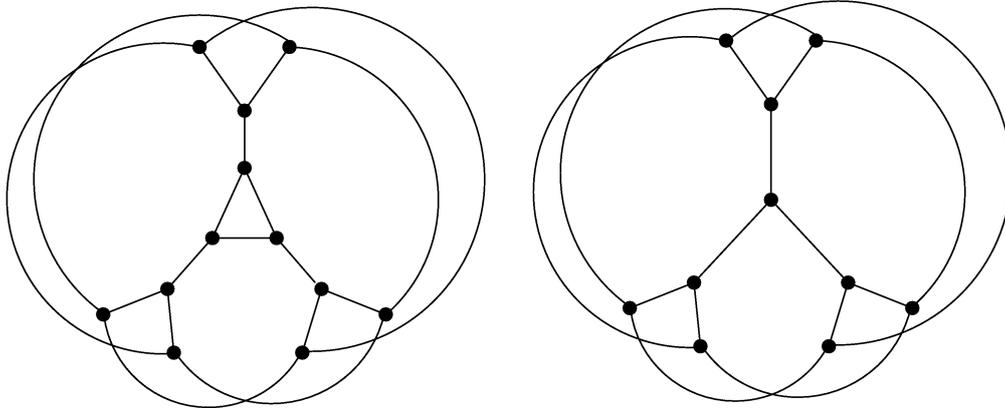


Figura 2.10: Snark trivial  $G$  e o snark construído  $G'$  (grafo de Petersen).

### 2.3.2 Snarks ciclicamente $k$ -aresta conexo

Um grafo  $G$  é *ciclicamente  $k$ -aresta conexo* se é necessário remover pelo menos  $k$  arestas de  $G$  para desconectar  $G$  e para que cada componente conexa possua pelo menos um ciclo.

O grafo de Petersen, por exemplo, é um snark ciclicamente 4-aresta conexo, logo não é um snark trivial. Mais precisamente, o grafo de Petersen é ciclicamente 5-aresta conexo, já que este não possui um corte de arestas de tamanho menor do que 5, tal que sua retirada resulta em duas componentes conexas que possuam ciclo.

Isaacs classificou os snarks ciclicamente  $k$ -aresta conexo com  $k < 4$  como *triviais*, pois estes podem ser obtidos facilmente a partir de snarks menores. Antes de mostrar este resultado, apresentamos duas operações definidas por Isaacs [26]. A demonstração abaixo pode ser encontrada em [31].

Abaixo utilizamos a operação  $OP_2$  descrita a seguir. Seja  $G_i$ , com  $i = 1, 2$ , um grafo com dois vértices  $u_i$  e  $v_i$  de grau 1,  $i = 1, 2$ , e os demais vértices de grau 3. A operação consiste em remover os vértices de grau 1, isto é,  $u_1, v_1, u_2, v_2$  e as respectivas arestas incidentes a eles; e adicionar as arestas  $x_1x_2$  e  $y_1y_2$ . Veja  $G_1$  e  $G_2$  na Figura 2.11.

**Lema 14.** (Isaacs, 1975) *Seja  $G_i$ , com  $i = 1, 2$  um grafo com dois vértices de grau 1 os demais vértices de grau 3. Conforme representado na Figura 2.11. Então, o*

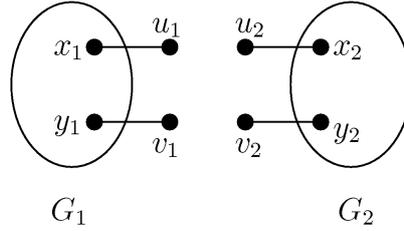


Figura 2.11: Grafos  $G_1$  e  $G_2$ .

grafo resultante da operação  $OP_2$  aplicada à  $G_1$  e  $G_2$  é classe 2 se, e somente se, pelo menos um deles é classe 2.  $\square$

Utilizamos também a operação  $OP_3$ : seja  $G_i$ , com  $i = 1, 2$ , um grafo com três vértices  $u_i, v_i$  e  $w_i$  de grau 1,  $i = 1, 2$  e os demais vértices de grau 3. A operação consiste em remover os vértices de grau 1, isto é,  $u_1, v_1, w_1, u_2, v_2, w_2$ , e as respectivas arestas incidentes a eles; e adicionar as arestas  $x_1x_2, y_1y_2$  e  $w_1w_2$ . Veja a Figura 2.12.

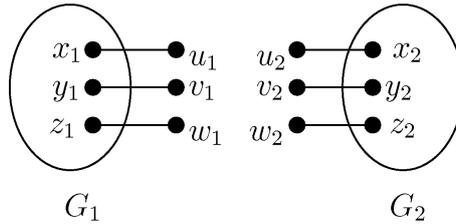


Figura 2.12: Grafos  $G_1$  e  $G_2$ .

**Lema 15.** (Isaacs, 1975 [26]) *Seja  $G_i$ , com  $i = 1, 2$  um grafo com três vértices de grau 1 os demais vértices de grau 3, conforme representado na Figura 2.12. Então, o grafo resultante da operação  $OP_3$  aplicada à  $G_1$  e  $G_2$  é classe 2 se, e somente se, pelo menos um deles é classe 2.*  $\square$

**Teorema 16.** (Isaacs, 1975 [26]) *Seja  $G$  um snark não ciclicamente 4-aresta conexo. O grafo  $G$  pode ser obtido a partir de um snark  $H$ , tal que  $V(H) < V(G)$ .*

**Prova.** Suponha que  $G$  possua um corte de arestas  $\{x_1x_2, y_1y_2\}$  de tamanho 2, tal que cada componente conexa obtida pela retirada destas duas arestas possua pelo menos um ciclo. O grafo  $G$  pode ser visto na Figura 2.13.

Então,  $G$  é resultado da união dos dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ , pela operação  $OP_2$ . Veja a Figura 2.11. Como  $G$  é snark, pelo Lema 14, pelo menos um dos grafos, sem perda de generalidade  $G_1$ , é classe 2.

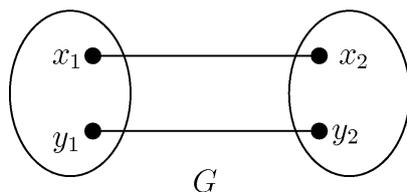


Figura 2.13: Snark  $G$  não ciclicamente 4-aresta conexo.

Seja  $H$  o grafo obtido da união dos grafos  $G_1$  e  $G'_2$  pela operação  $OP_2$ , sendo  $G'_2$  o grafo com vértices  $u_2, v_2$  e aresta  $u_2v_2$ . Veja a Figura 2.14. Então, pelo Lema 14, o grafo  $H$  é cúbico, e não é 3-aresta colorível.

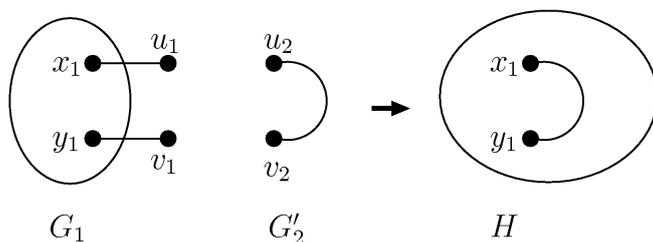


Figura 2.14: Grafo  $H$

Por último, como  $G$  não tem ponte, então o grafo  $H$  não tem ponte. Se o grafo  $H$  possuisse uma ponte  $e \neq x_1y_1$ , então  $G$  também possuiria uma ponte; contradição. Se  $H$  possui ponte  $x_1y_1$ , então  $G$  possui ponte  $x_1x_2$  e  $y_1y_2$ .

Analogamente, suponha que  $G$  possua um corte de arestas  $\{x_1x_2, y_1y_2, w_1w_2\}$  de tamanho 3, tal que cada componente conexa obtida pela retirada destas três arestas possua pelo menos um ciclo. O grafo  $G$  pode ser visto na Figura 2.15.

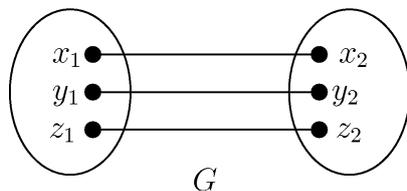


Figura 2.15: Snark  $G$  não ciclicamente 4-aresta conexo.

Então  $G$  é resultado da união dos dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ , pela operação  $OP_3$ . Veja a Figura 2.14. Como  $G$  é snark, pelo Lema 15, pelo menos um dos grafos, sem perda de generalidade  $G_1$ , é classe 2.

Seja  $H$  o grafo obtido da união dos grafos  $G_1$  e  $G'_2$  pela operação  $OP_3$ , sendo  $G'_2$  o grafo com vértices  $u_2, v_2, w_2$  e  $u$  e arestas  $u_2u, v_2u, w_2u$ . Veja a Figura 2.16. Pelo

Lema 15, o grafo  $H$  é cubico, e não é 3-aresta colorível. Além disso,  $V(H) < V(G)$ .

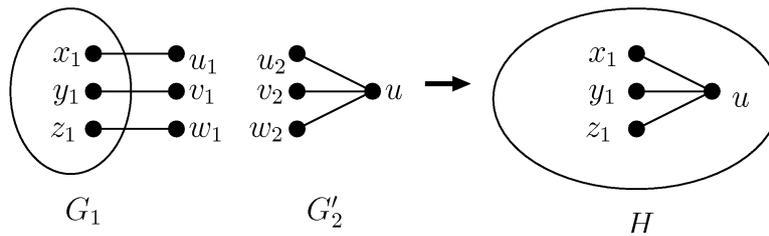


Figura 2.16: Grafo  $H$ .

Por último, como  $G$  não tem ponte, então o grafo  $H$  não tem ponte. Se o grafo  $H$  possuisse uma ponte  $e \neq x_1u$  (resp.  $y_1u, w_1u$ ), então  $G$  também possuiria uma ponte, contradição. E se  $H$  possui ponte  $x_1u$  (resp.  $y_1u, w_1u$ ), então  $G$  possui ponte  $x_1x_2$  e  $y_1y_2$  e  $w_1w_2$ , contradição.  $\square$

Na Figura 2.17 apresentamos um exemplo de um snark não ciclicamente 4-aresta conexo e o grafo de Petersen (na figura a direita), obtido através da operação  $OP_3$ .

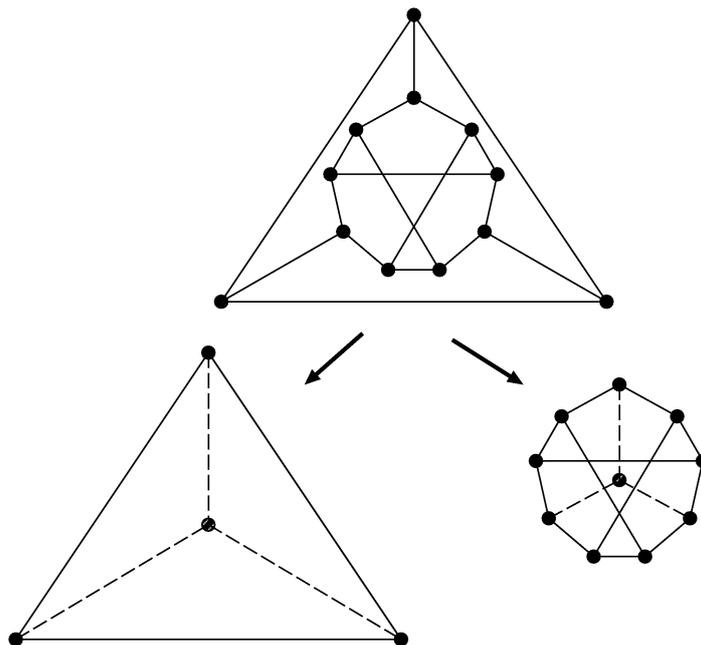


Figura 2.17: Snark trivial,  $S$ , e o snark de Petersen,  $P$ , gerado através da operação  $OP_3$ .

### 2.3.3 Snarks com cintura menor do que 5 e a coloração total

Nesta seção vamos relacionar os snarks que possuem cintura menor do que 5 e a coloração total. Seja  $G$  um snark contendo  $C_2, C_3$  ou  $C_4$ . No Teorema 13, mostramos

que se o grafo  $G'$ , obtido de um snark  $G$  através das operações das Figuras 2.3, 2.4 e 2.5, fosse 3-aresta colorível, então o grafo  $G$  também seria 3-aresta colorível. Além disso, uma 3-coloração de arestas de  $G$  seria facilmente encontrada a partir do grafo  $G'$ .

No caso da coloração total verificamos que, se  $G$  é 4-total colorível, não é possível obter uma 4-coloração total para o grafo  $G'$  preservando as cores empregadas em  $G$ . A noção de trivialidade para coloração de arestas não se mantém para coloração total.

Nas Figuras 2.18, 2.19, 2.20 e ?? rotulamos cada vértice ou aresta com uma caixa contendo a lista de cores possíveis na nova coloração para os elementos que dispõem de mais de uma cor, ou seja, elementos para os quais há mais de uma opção de cor.

Observe na Figura 2.18 a análise para  $G$  com  $C_2$ .

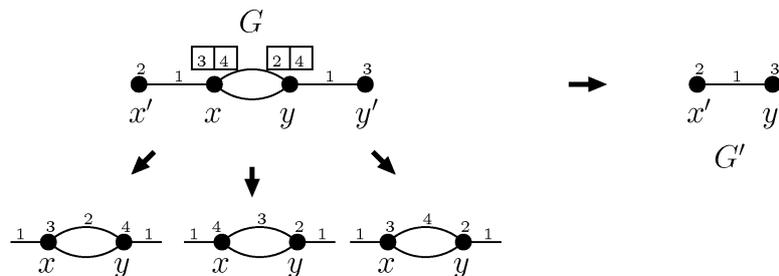


Figura 2.18: Snark  $G$  com  $C_2$  e grafo  $G'$ .

Para que  $G'$  possua uma 4-coloração total preservando as cores de  $G$ , temos que considerar a coloração de  $G$  de forma que  $x'$  e  $y'$  possuam cores diferentes e as arestas  $x'x$  e  $yy'$  possuam cores iguais.

O vértice  $x$  pode ser colorido com as cores 3 e 4 e o vértice  $y$  com as cores 2 e 4. Em qualquer escolha com cores diferentes para estes vértices, não há como colorir as arestas  $xy$ .

A Figura 2.19 apresenta a análise feita para  $G$  com  $C_3$ . Analogamente ao caso anterior, para que  $G'$  possua uma 4-coloração total preservando as cores de  $G$  temos que considerar a coloração de  $G$  de forma que o vértice  $z$  e arestas  $x'x$ ,  $y'y$  e  $z'z$  possuam cores diferentes. Novamente não se consegue uma 4-coloração total para  $G$  como na Figura 2.19, para que  $G'$  possa preservá-las. Em qualquer escolha, não há cores disponíveis para os vértices  $x$  ou  $y$ , independente das cores atribuídas aos vértices  $z', x', y'$ .

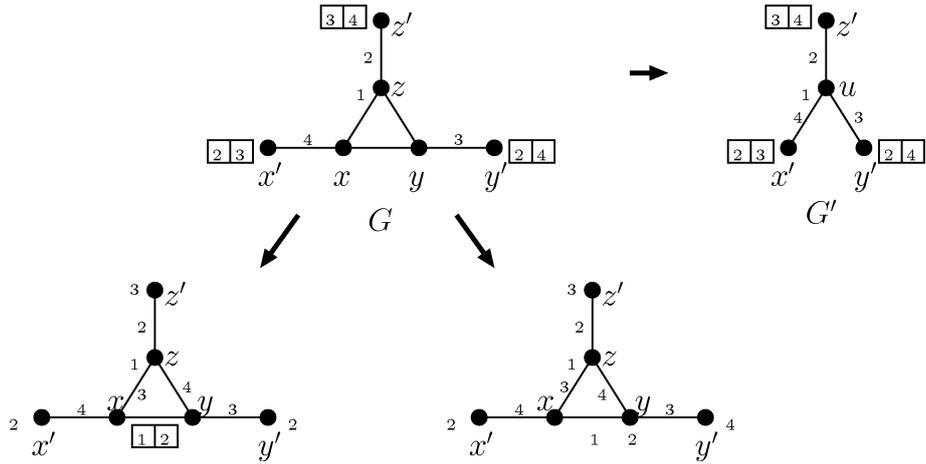


Figura 2.19: Snark  $G$  com  $C_3$  e grafo  $G'$ .

Nos casos em que  $G$  possui  $C_4$ , também não há como manter uma coloração total de  $G$  em  $G'$ . Nos referimos as Figuras.

Sem perda de generalidade, ao colorir o vértice  $x$  e as arestas  $x'x$ ,  $xy$  e  $xz'$ , o vértice  $y$  pode possuir as cores 1 ou 4. Em ambos os casos, não há como obter uma coloração total de  $G'$  a partir da coloração total de  $G$ . Veja um exemplo na Figura ?? onde encontramos um caso onde não é possível e outro caso, que aparentemente parece possível a coloração, mas se prolongarmos o grafo e sua coloração, veremos que também não será possível.

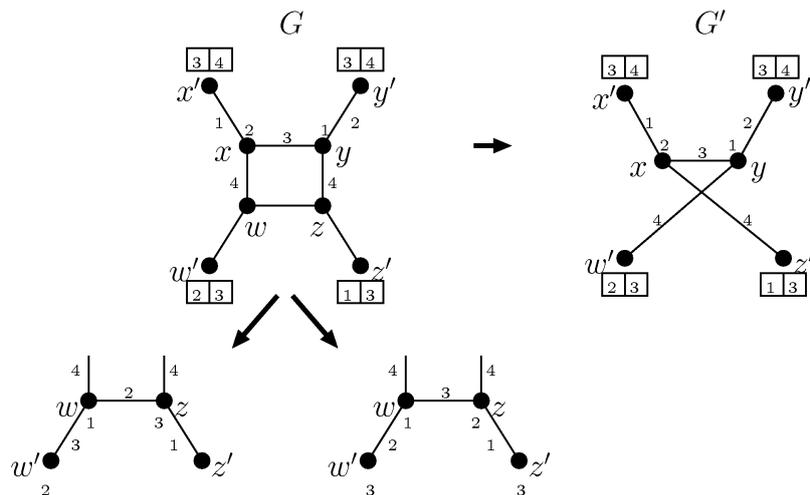


Figura 2.20: Snark  $G$  com  $C_4$  e grafo  $G'$

Em todas as situações onde  $G$  é um snark com  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$ , temos que não é possível obter uma 4-coloração total para  $G'$  preservando a 4-coloração total de  $G$ . Então se  $G'$  tiver uma 4-coloração total, é necessário uma coloração total diferente

da coloração total de  $G$ .

O conceito de trivialidade de snarks nasceu no contexto de coloração de arestas. Uma vez que se tenha uma 3-coloração de arestas de um snark não trivial, facilmente conseguimos expandí-la para o grafo trivial usando o mesmo número de cores. No caso de coloração total, o mesmo não ocorre pois dado um snark não trivial munido de uma 4-coloração total, não é possível expandir a 4-coloração total para o snark trivial original utilizando somente mudanças locais na coloração.

Isto nos leva a crer que o conceito de trivialidade seja diferente para a coloração total.

## 2.4 Coloração total do grafo de Petersen, Estrela Dupla e Celmins-Swart 1 e 2

Apresentamos nesta seção a coloração total de quatro snarks conhecidos e que são de ordem menor do que 30. São estes o grafo de Petersen, Estrela Dupla e Celmins-Swart snarks 1 e 2, tais snarks são tipo 1. A coloração do grafo de Petersen pode ser verificada em Campos [11] e a coloração dos demais grafos pode ser verificada em Da Silva e Dantas [17]. Observe que as cores das arestas dos snarks de Celmins-Swart 1 e 2 estão representadas no meio das arestas.

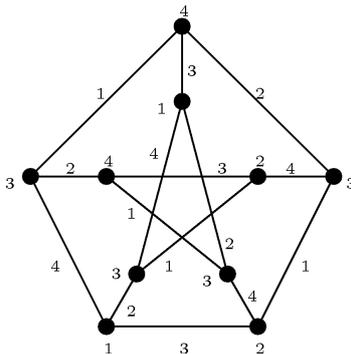


Figura 2.21: Grafo de Petersen com uma 4-coloração total

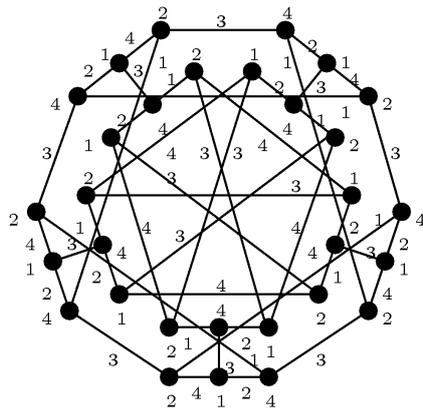


Figura 2.22: Estrela Dupla com uma 4-coloração total

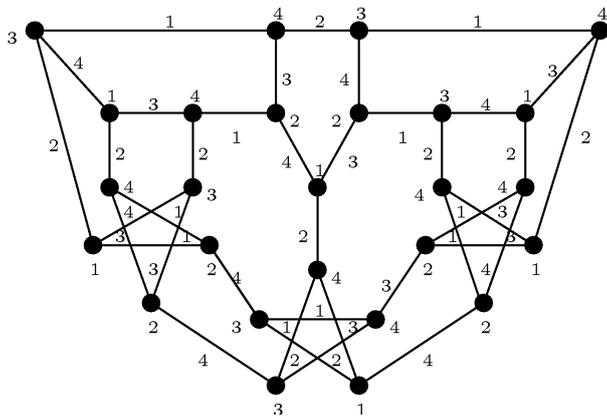


Figura 2.23: Celmins-Swart 1 com uma 4-coloração total

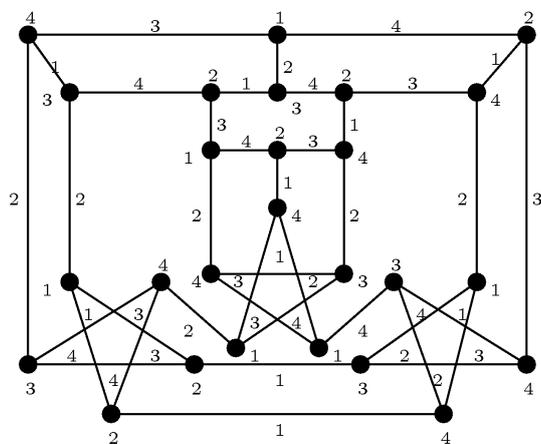


Figura 2.24: Celmins-Swart 2 com uma 4-coloração total

## Capítulo 3

# Coloração total das famílias

## Snark-Flor, Goldberg e

## Loupekhine

Neste capítulo estudamos a coloração total dos Snark-Flor e Snarks de Goldberg, para os quais a coloração total foi determinada em Campos [11] e em Campos, Dantas e Mello [12]. A partir da técnica empregada nestas colorações, determinamos a coloração total dos Snarks de Loupekhine.

### 3.1 Snark-Flor

A família Snark-Flor foi descoberta por R. Isaacs em 1975 [26] e foi a primeira a ser construída dentre as famílias que são apresentadas neste capítulo. Vejamos esta família.

Sejam  $F_i$ , com  $i$  ímpar e  $i \geq 1$ , os membros desta família, onde  $F_i$  possui  $4i$  vértices.

Define-se o *bloco*  $B_i$  como o grafo com o conjunto de vértices  $V(B_i) = \{u_i, v_i, x_i, y_i\}$  e o conjunto de arestas  $E(B_i) = \{u_i v_i, x_i v_i, y_i v_i\}$ . A Figura 3.1 mostra o bloco  $B_i$ . Define-se ainda o conjunto de *arestas de ligação*  $E_{k,j} = \{u_k u_j, x_k x_j, y_k y_j\}$  e o *grafo de ligação*  $L_i$ ,  $i$  ímpar e  $i \geq 5$ , como a junção de  $B_{i-1}$  e  $B_i$  pelas arestas de ligação  $E_{(i-1),i}$ . Veja  $L_i$  na Figura 3.2.

O primeiro Snark-Flor,  $F_3$ , é formado pela junção de  $B_1$ ,  $B_2$  e  $B_3$ , através das

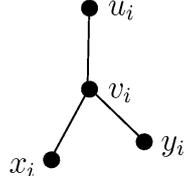


Figura 3.1: Bloco  $B_i$ .

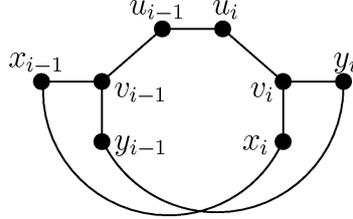


Figura 3.2: Grafo de ligação  $L_i$ .

arestas de ligação  $E_{2,3} \cup E_{3,1} \cup \{u_1u_2, x_1y_2, y_1x_2\}$ , como mostra a Figura 3.3.

Uma observação interessante é que o Snark-Flor  $F_3$  é obtido pela substituição de um vértice por um  $K_3$  no grafo de Petersen. Compare estes grafos na Figura 3.3.

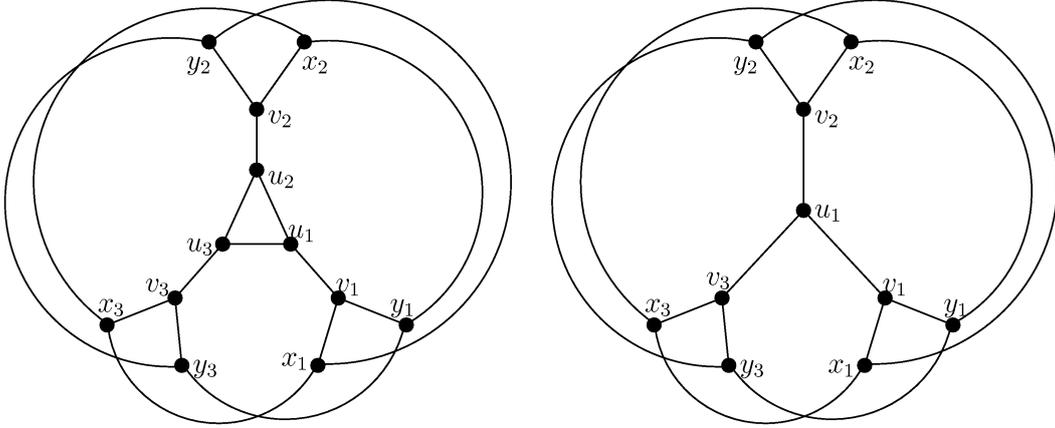


Figura 3.3: Snark  $F_3$  e grafo de Petersen.

Para cada  $i$  ímpar e  $i \geq 5$ ,  $F_i$  é obtido a partir de  $F_{i-2}$  e  $L_i$  da seguinte forma:  $V(F_i) = V(F_{i-2}) \cup V(L_i)$  e  $E(F_i) = (E(F_{i-2}) - E_i^{out}) \cup E_i^{in} \cup E(L_i)$ , onde  $E_i^{out} = E_{(i-2),1}$  e  $E_i^{in} = E_{(i-2),(i-1)} \cup E_{i,1}$

Observe a construção do grafo  $F_5$  a partir de  $F_3$  e  $L_5$  na Figura 3.4.

$V(F_5) = V(F_3) \cup V(L_5)$  e  $E(F_5) = (E(F_3) - E_5^{out}) \cup E_5^{in} \cup E(L_5)$ , onde  $E_5^{out} = E_{3,1}$  e  $E_5^{in} = E_{3,4} \cup E_{5,1}$

O próximo teorema é resultado de Campos, pode ser encontrada em [11, 12] e trata-se da coloração total da família Snark-Flor.

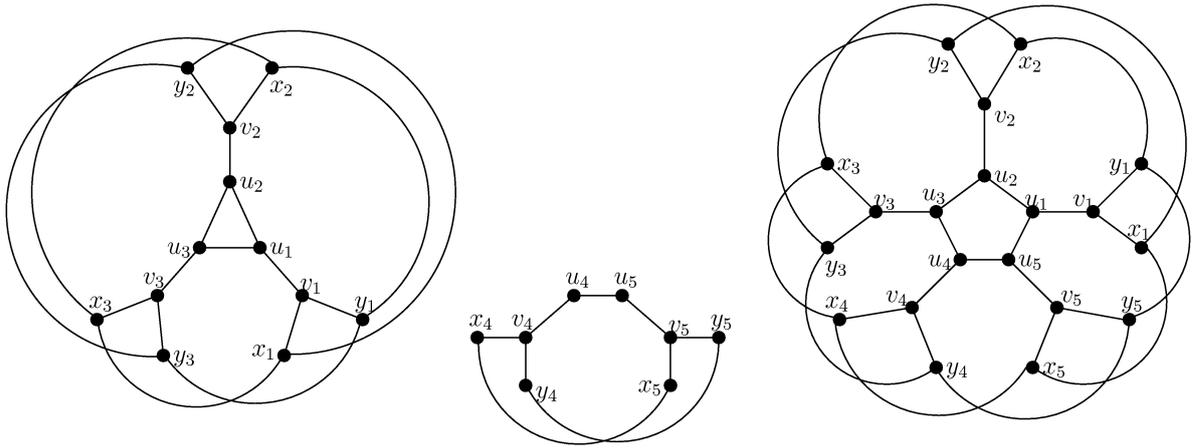


Figura 3.4: Snark  $F_5$  obtido de  $F_3$  e  $L_5$ .

**Teorema 17.** (Campos, 2006) Cada Snark-Flor  $F_i$ ,  $i$  ímpar e  $i \geq 3$ , é tipo 1.

**Prova.** A prova é indutiva baseada na construção da família. A Figura 3.5 mostra uma 4-coloração total  $\pi_3$  para o primeiro snark da família,  $F_3$ . Note que as arestas de  $E_5^{out}$  possuem a cor 1. Esta coloração é a base da indução.

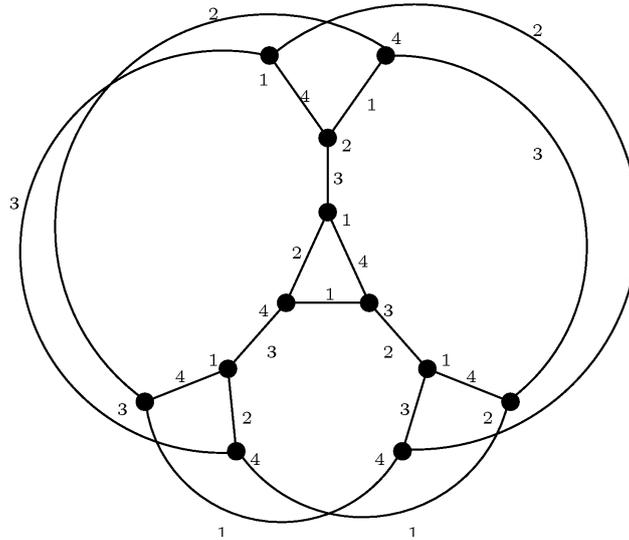


Figura 3.5: Snark  $F_3$  com uma 4-coloração total  $\pi_3$ .

A Figura 3.6 mostra uma 4-coloração total fixa  $\pi$  para o grafo de ligação  $L_i$ .

Como  $F_i$  é recursivamente obtido a partir de  $F_{i-2}$  e  $L_i$ , por hipótese de indução,  $F_{i-2}$  admite uma 4-coloração total  $\pi_{i-2}$  tal que as arestas de  $E_i^{out}$  possuem a cor 1. Com isto, uma 4-coloração total  $\pi_i$  de  $F_i$  é obtida da seguinte forma: as arestas de  $E_i^{in}$  recebem a cor 1 e observe que não há conflito entre estas arestas, pois constituem um conjunto independente. Veja a Figura 3.7.

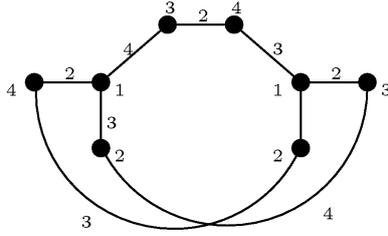


Figura 3.6: Grafo de ligação  $L_i$  com uma 4-coloração total  $\pi$ .

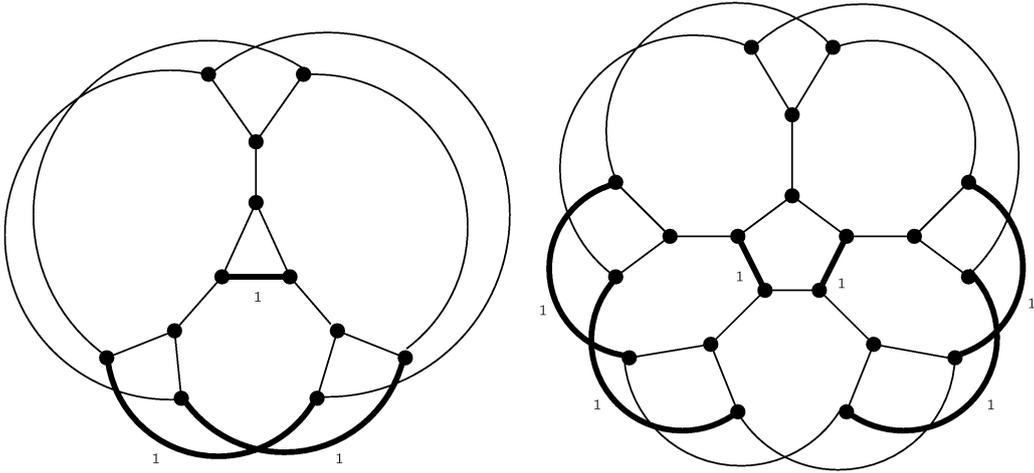


Figura 3.7: Arestas de  $E_3^{out}$  e de  $E_5^{in}$ .

Atribua aos elementos de  $V(F_i) \cup E(F_i) - E_i^{in}$  as mesmas cores que estes elementos possuem em  $F_{i-2}$  ou  $L_i$ . Note que a coloração total do subgrafo  $F_i[V(F_i) \cap V(F_{i-2})]$  é uma 4-coloração total, porque  $\pi_{i-2}$  é uma 4-coloração total para  $F_{i-2}$ . O mesmo pode ser notado para o subgrafo  $F_i[V(F_i) \cap V(L_i)]$ , já que  $\pi$  também é 4-coloração total de  $L_i$ .

No conjunto de vértices que são extremos das arestas de  $E_i^{in}$ ,  $V(E_i^{in}) = V(E_i^{out}) \cup V(L_i) - \{v_{i-1}, v_i\}$ , não ocorre a cor 1, pois trata-se da cor livre após a retirada das arestas de  $E_i^{out}$ .

Por outro lado, os pares de vértices que são extremos de uma mesma aresta de  $E_i^{in}$  possuem cores diferentes. Observe que as cores dos vértices  $V(E_i^{in}) \cap V(L_i)$  são conhecidas porque  $\pi$  é coloração fixa. Também são conhecidas as cores dos vértices  $u_1, x_1$  e  $y_1$ , pois pertencem ao grafo  $F_3$ . Sabe-se que destes vértices, aqueles que compartilham arestas de  $E_i^{in}$  não possuem a mesma cor por construção. Resta determinar as cores dos vértices  $u_{i-2}, x_{i-2}$  e  $y_{i-2}$  que pertencem ao grafo  $F_{i-2}$ . Para  $i = 5$ , estes vértices pertencem a base  $F_3$ . No caso de  $i \geq 7$ , os vértices  $u_{i-2}, x_{i-2}$  e

$y_{i-2}$  pertencem ao grafo de ligação  $L_i$  e portanto possuem 4-coloração total fixa  $\pi$ . Logo temos o resultado. □

Veja o snark  $F_5$  colorido na Figura 3.8.

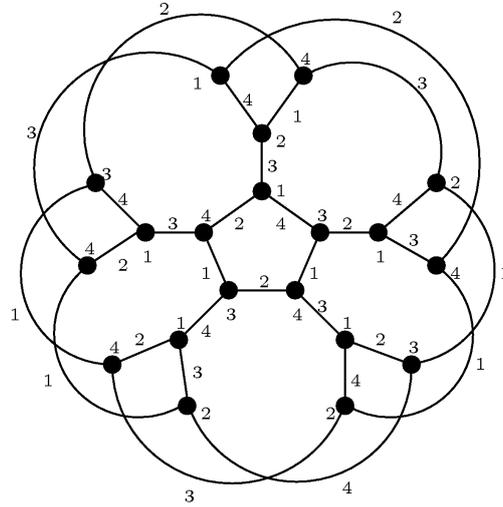


Figura 3.8: Snark  $F_5$  com uma 4-coloração total  $\pi_5$ .

### 3.2 Snarks de Goldberg

A família de Snarks de *Goldberg* foi descoberta por M. Goldberg em 1981 [23] e baseia-se na construção que será apresentada a seguir. Sejam  $G_i$ ,  $i$  ímpar e  $i \geq 3$  os membros desta família, onde  $G_i$  possui  $8i$  vértices.

O bloco  $B_i$  é o grafo cujo conjunto de vértices é  $V(B_i) = \{u_i, v_i, x_i, y_i, z_i, w_i, s_i, t_i\}$  e o conjunto de arestas é  $E(B_i) = \{u_i v_i, x_i y_i, x_i z_i, y_i w_i, z_i v_i, z_i t_i, v_i w_i, w_i s_i, s_i t_i\}$ . A Figura 3.9 apresenta o bloco  $B_i$ .

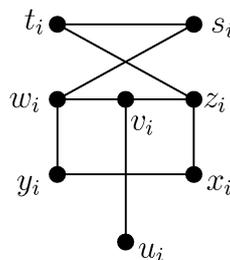


Figura 3.9: Bloco  $B_i$ .

O conjunto de arestas de ligação é dado por  $E_{k,j} = \{s_k t_j, x_k y_j, u_k u_j\}$  e o grafo de ligação  $L_i$ , obtido pela junção dos blocos  $B_{i-1}$  e  $B_i$ , através das arestas de ligação  $E_{(i-1),i}$ , é mostrado na Figura 3.10.

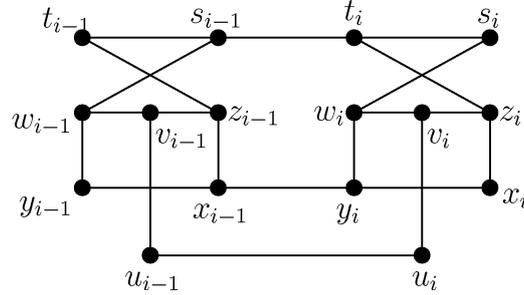


Figura 3.10: Grafo de ligação  $L_i$ .

O primeiro snark de Goldberg,  $G_3$ , é formado pela união de  $B_1, B_2$  e  $B_3$ , através das arestas de ligação  $E_{1,2} \cup E_{2,3} \cup E_{3,1}$ . Isto pode ser visto na Figura 3.11.

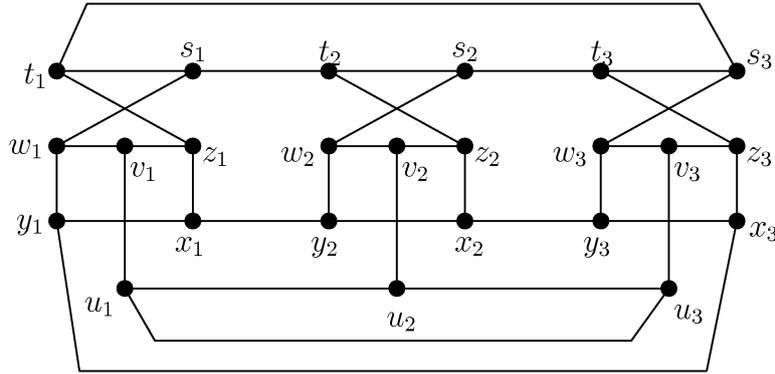


Figura 3.11: Snark  $G_3$ .

Para cada  $i$  ímpar e  $i \geq 5$ , o grafo  $G_i$  é obtido de  $G_{i-2}$  e  $L_i$  da seguinte forma:  $V(G_i) = V(G_{i-2}) \cup V(L_i)$  e  $E(G_i) = (E(G_{i-2}) - E_i^{out}) \cup E(L_i) \cup E_i^{in}$ , onde  $E_i^{out} = E_{(i-2),1}$  e  $E_i^{in} = E_{(i-2),(i-1)} \cup E_{i,1}$ .

Observe  $G_5$  construído a partir de  $G_3$  e  $L_5$  na Figura 3.12.

O teorema a seguir é de autoria de Campos, Dantas e Mello [12] e trata da coloração total desta família.

**Teorema 18.** (Campos, Dantas e Mello, 2009) Cada Snark de Goldberg  $G_i$ ,  $i$  ímpar e  $i \geq 3$ , é tipo 1.

**Prova.** Observe os snarks  $G_3$  e  $G_5$  munidos de uma 4-coloração total nas Figuras 3.13 e 3.14 e também o grafo de ligação  $L_i$  munido de uma 4-coloração total fixa

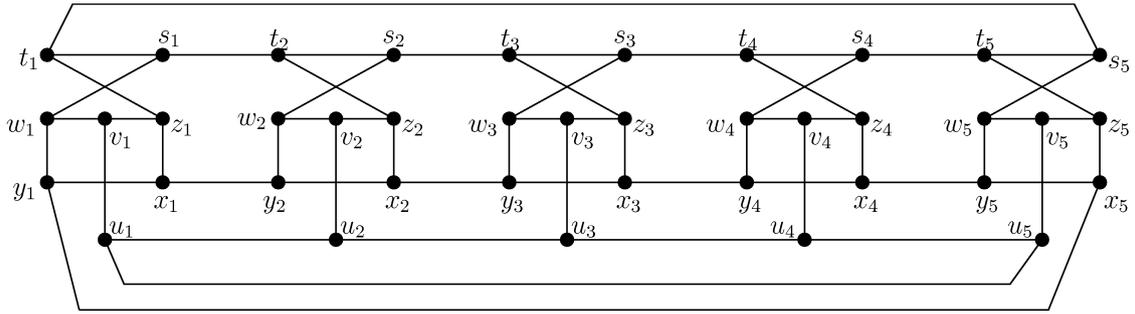


Figura 3.12: Snark  $G_5$ .

$\pi$  na Figura 3.15.

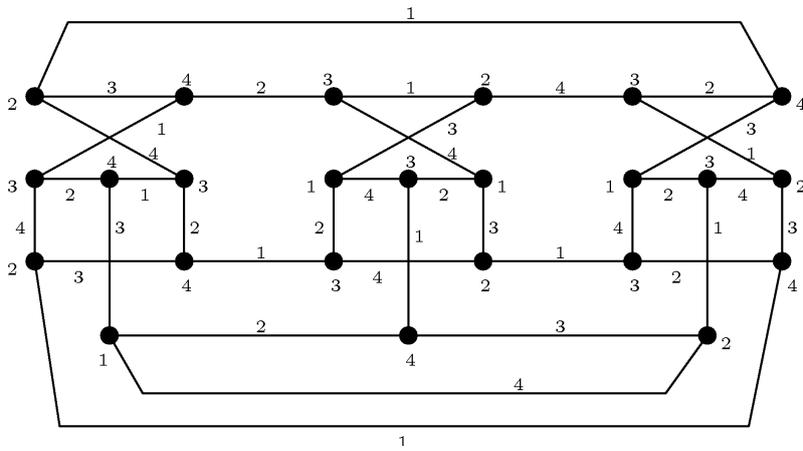


Figura 3.13: Snark  $G_3$  com uma 4-coloração total  $\pi_3$ .

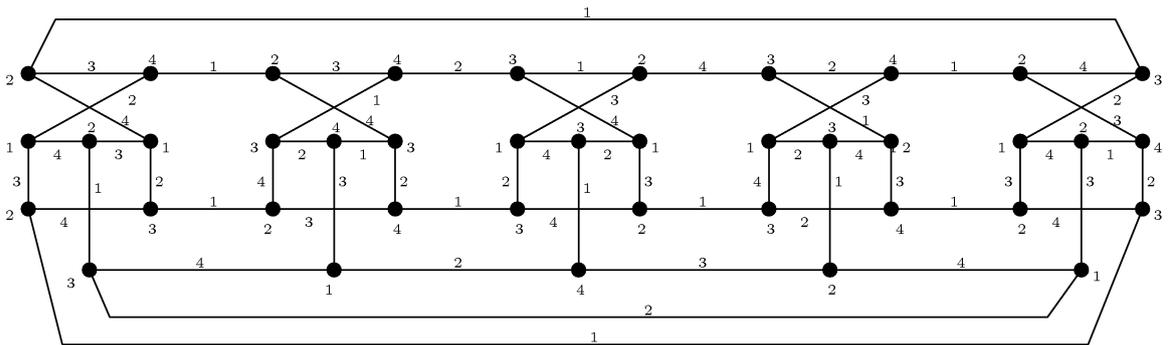


Figura 3.14: Snark  $G_5$  com uma 4-coloração total  $\pi_5$ .

Para cada  $i$  ímpar e  $i \geq 7$ , como os snarks  $G_i$  são obtidos de forma recursiva, a partir de  $G_{i-2}$  e  $L_i$ , obteremos a 4-coloração total  $\pi_i$  de cada snark  $G_i$  por indução, utilizando a construção da família, assim como foi obtida a coloração da família Snark-Flor.

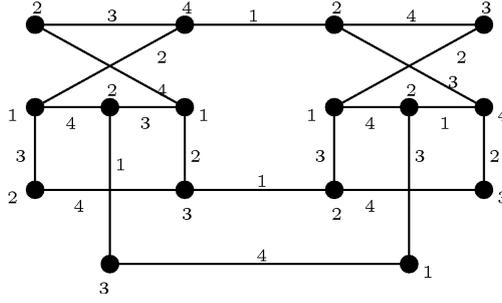


Figura 3.15: Grafo de ligação  $L_i$  com uma 4-coloração total  $\pi$ .

Para a obtenção de  $\pi_i$ , atribua aos elementos de  $V(G_i) \cup E(G_i) - E_i^{in}$  a mesma cor atribuída a estes elementos em  $G_{i-2}$  ou  $L_i$ . As arestas de  $E_i^{in}$  possuem as seguintes cores:

$$\pi_i(s_{i-2}t_{i-1}) = \pi_i(s_it_1) = 1;$$

$$\pi_i(x_{i-2}y_{i-1}) = \pi_i(x_iy_1) = 1;$$

$$\pi_i(u_{i-2}u_{i-1}) = \pi_i(u_iu_1) = 2.$$

Mostraremos que  $\pi_i$  é uma 4-coloração total para  $G_i$ . Como  $\pi_{i-2}$  é uma 4-coloração total para  $G_{i-2}$  por hipótese de indução, e  $\pi$  é uma 4-coloração total fixa para o grafo de ligação  $L_i$ , então a coloração  $\pi_i$  restrita aos elementos de  $G_i - E_i^{in}$  é uma 4-coloração total para  $G_i - E_i^{in}$ .

Por construção de  $\pi_{i-2}$  e  $\pi$ , as arestas de  $E_i^{in}$  possuem extremos com cores diferentes e observe que a base da indução é o grafo  $G_5$ .

Sejam  $E_i^{out} = E_{(i-2),1}$  e a coloração das arestas de  $E_i^{in}$  acima estabelecida. Para o grafo  $G_i - E_i^{in}$ , a cor 1 não ocorre nos vértices  $s_{i-2}, t_1, x_{i-2}$  e  $y_1$  e a cor 2 não ocorre nos vértices  $u_{i-2}$  e  $u_1$ . Por outro lado, observando a coloração  $\pi$  de  $L_i$ , conclui-se que a cor 1 não ocorre em  $y_{i-1}, t_{i-1}, s_i$  e  $x_i$  e a cor 2 não ocorre em  $u_{i-1}$  e  $u_i$ . Logo, temos o resultado.  $\square$

Na Figura 3.16 apresentamos o snark  $G_7$  com uma 4-coloração total obtida pelo processo efetuado acima.

### 3.3 Snarks de Loupekhine

Após a coloração total dos Snark-Flor e Goldberg verificamos que se uma família possui uma construção recursiva é pode ser que seja possível colorir o primeiro snark

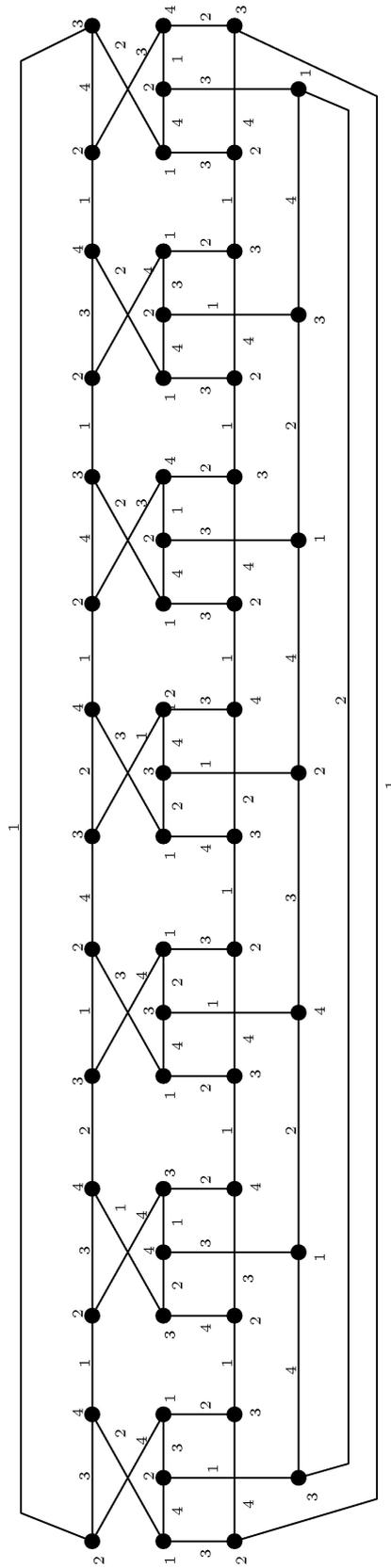


Figura 3.16: Snark  $G_7$  com uma 4-coloração total  $\pi_7$ .

e usar a construção do grafo para produzir a coloração total. Este é o caso dos snarks de Loupekhine coloridos a seguir.

A família de snarks de *Loupekhine* foi descoberta por F. Loupekhine em 1976 [27].

Sejam  $LO_i$ ,  $i$  ímpar e  $i \geq 3$ , os membros desta família, a qual o grafo  $LO_i$  possui  $7i + 1$  vértices.

Para a construção desta família, seja  $P$  o grafo de Petersen. Retire de  $P$  os três vértices consecutivos, como mostra a Figura 3.17, obtendo o bloco  $B_i$ .

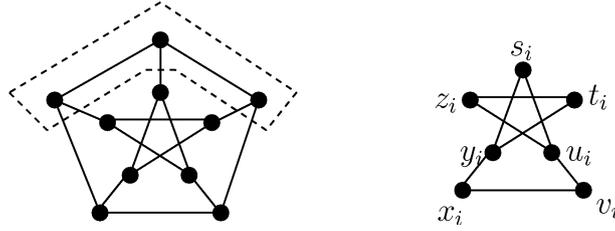


Figura 3.17: Bloco  $B_i$ .

O bloco  $B_i$  é formado pelo conjunto de vértices  $V(B_i) = \{s_i, t_i, u_i, v_i, x_i, y_i, z_i\}$  e pelo conjunto de arestas  $E(B_i) = \{u_i v_i, v_i x_i, x_i y_i, y_i t_i, t_i z_i, z_i u_i, u_i s_i, s_i y_i\}$ .

A Figura 3.18 mostra o grafo de ligação  $L_i$ ,  $i$  ímpar e  $i \geq 5$ , obtido pelos blocos  $B_{i-1}$  e  $B_i$ , conectados pela aresta  $s_{i-1} s_i$ .

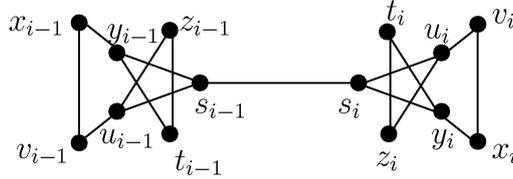


Figura 3.18: Grafo de ligação  $L_i$ .

Considere o seguinte conjunto de arestas de ligação  $E_{k,j} = \{t_k z_j, v_k x_j\}$ . O primeiro snark da família Loupekhine,  $LO_3$ , é definido pela união de  $B_1, B_2$  e  $B_3$ , através das arestas de ligação  $E_{1,2}, E_{2,3}$  e  $E_{3,1}$ , juntamente ao vértice fixo  $a$  e o conjunto de arestas fixo  $s_1 a, s_2 a$  e  $s_3 a$ . Este grafo é mostrado na Figura 3.19.

Para cada  $i$  ímpar e  $i \geq 5$ , o grafo  $LO_i$  é obtido a partir de  $LO_{i-2}$  e  $L_i$  da seguinte forma:  $V(LO_i) = V(LO_{i-2}) \cup V(L_i)$  e  $E(LO_i) = (E(LO_{i-2}) - E_i^{out}) \cup E(L_i) \cup E_i^{in}$ , onde  $E_i^{out}$  são dois conjuntos quaisquer de arestas de ligação de  $LO_{i-2}$  e  $E_i^{in}$  são quatro conjuntos de arestas de ligação que conectam  $LO_{i-2}$  e o grafo de ligação  $L_i$ .

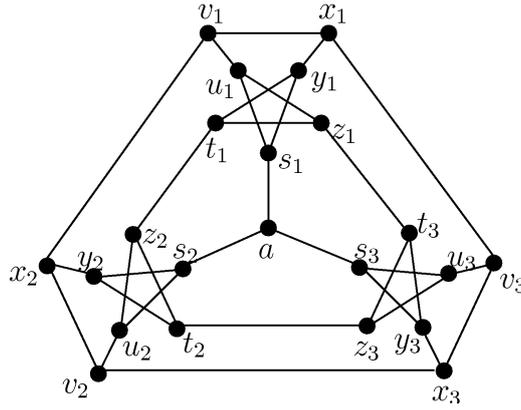


Figura 3.19: Snark  $LO_3$ .

Observe esta construção na obtenção do grafo  $LO_5$ . Este snark é formado pelo snark  $LO_3$  e o grafo de ligação  $L_5$ .

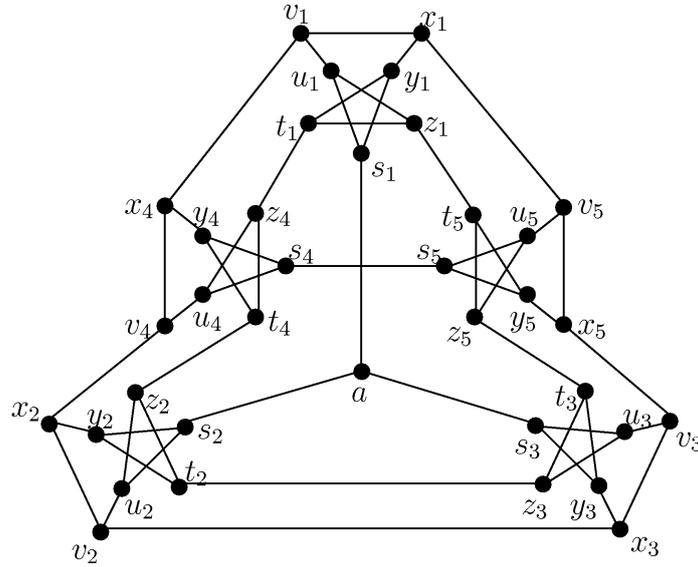


Figura 3.20: Snark  $LO_5$ .

$V(LO_5) = V(LO_3) \cup V(L_5)$  e  $E(LO_5) = (E(LO_3) - E_5^{out}) \cup E(L_5) \cup E_i^{in}$ , onde  $E_5^{out} = E_{1,2} \cup E_{3,1}$  e  $E_i^{in} = E_{1,4} \cup E_{4,2} \cup E_{1,5} \cup E_{3,5}$ .

A escolha de  $E_i^{out}$  permite a construção de snarks não isomorfos  $LO_i$ ,  $i \geq 7$ . Veja a Figura 3.21.

**Teorema 19.** *Cada Snark de Loupekhine  $LO_i$ ,  $i$  ímpar e  $i \geq 3$ , é tipo 1.*

**Prova.** Na Figura 3.22 apresentamos o primeiro snark da família,  $LO_3$ , munido de uma 4-coloração total  $\pi_3$  e na Figura 3.23 o grafo de ligação  $L_i$  com uma 4-coloração

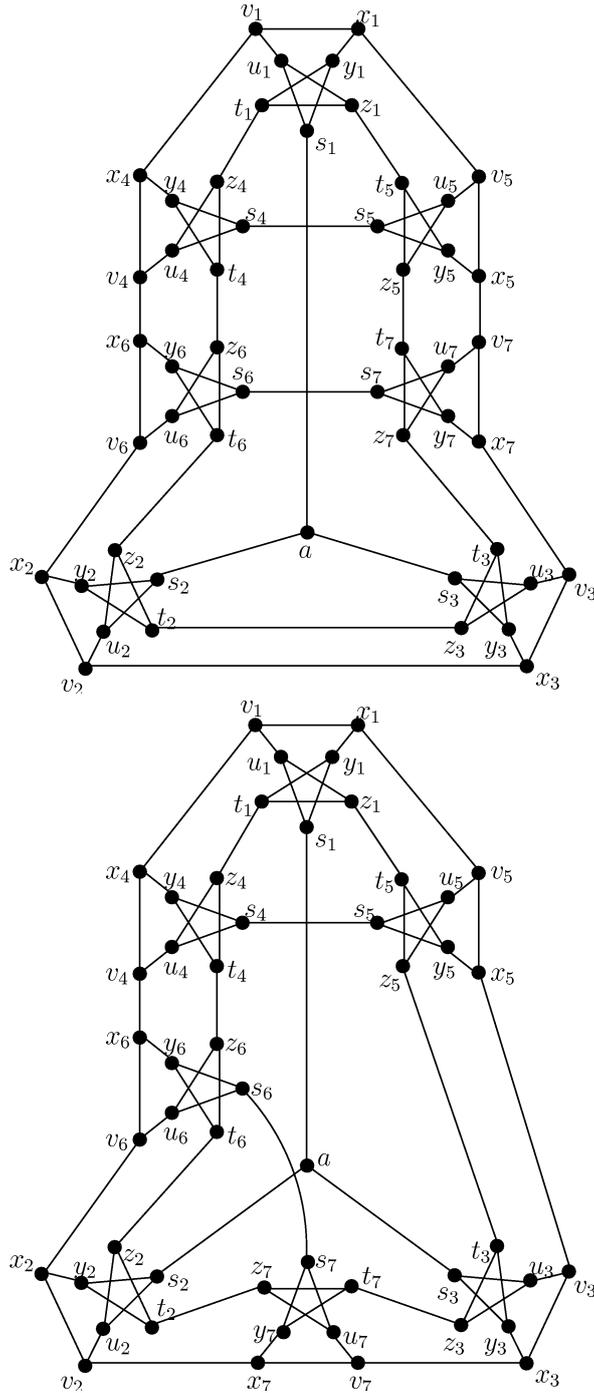


Figura 3.21: Snark  $LO_7$ .

total fixa  $\pi$ . As cores das arestas dos snarks de Loupekhine se encontram no meio das respectivas arestas.

Note que o grafo  $LO_i$  é construído recursivamente a partir de  $LO_{i-2}$  e do grafo de ligação  $L_i$ . Construiremos a 4-coloração total  $\pi_i$  da seguinte forma.

Para cada  $i$  ímpar e  $i \geq 5$ , atribua a cada elemento de  $LO_i - E_i^{in}$  as cores atribuídas aos seus respectivos elementos em  $LO_{i-2}$  ou  $L_i$ .

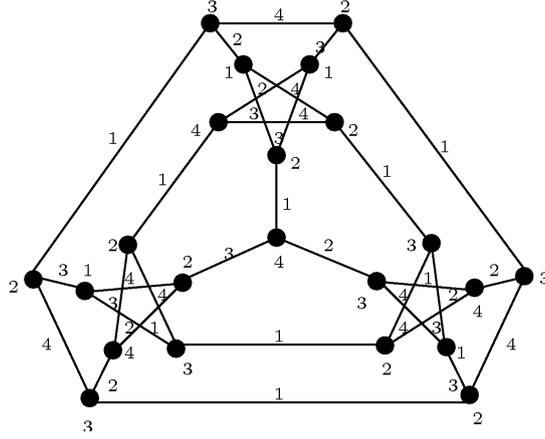


Figura 3.22: Snark  $LO_3$  com uma 4-coloração total  $\pi_3$ .

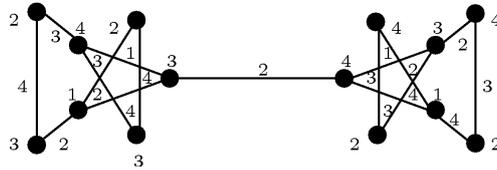


Figura 3.23: Grafo de ligação  $L_i$  com uma 4-coloração total  $\pi$ .

Atribua a cor 1 as arestas de  $E_i^{in}$ . Não há conflito na coloração destas arestas, pois constituem um conjunto independente.

Mostraremos agora que  $\pi_i$  é uma 4-coloração total para  $LO_i$ . A coloração  $\pi_{i-2}$  é uma 4-coloração total de  $LO_{i-2}$  e  $\pi$  é uma 4-coloração total para o grafo de ligação  $L_i$ . A cor 1 não ocorre nos vértices extremos das arestas de  $E_i^{in}$ , ou seja, estes vértices não possuem a cor 1 e ainda suas arestas incidentes também possuem cor diferente da cor 1. Esta cor está livre nestes vértices por ser a cor atribuída ao conjunto de arestas de  $E_i^{out}$ .

Além disso, os extremos das arestas pertencentes a  $E_i^{in}$  possuem cores diferentes pela coloração de  $LO_3$  que é fixa e porque os seguintes vértices do grafo de ligação possuem cores diferentes. São estes:  $x_{i-1}$  e  $v_{i-1}$ ,  $z_{i-1}$  e  $t_{i-1}$ ,  $t_i$  e  $z_i$ ,  $v_i$  e  $x_i$ , pois já são adjacentes em  $L_i$ . Esta propriedade possibilita conectar em um mesmo grafo  $LO_i$ , os grafos de ligação  $L_i$  e  $L_{i+1}$  consecutivamente. Isto ocorre porque esta coloração possui algumas propriedades importantes; são estas:

- todo vértice  $z_j$  e  $x_j$  terão a cor 2;
- todo vértice  $t_j$  e  $v_j$  terão cor  $\in \{3, 4\}$ .

Logo, sempre é possível ligar vértices  $z_j$  com  $t_k$  e  $x_j$  com  $v_k$ . Estas propriedades são conservadas na hipótese de indução.

Para exemplificar a coloração, veja as Figuras 3.24 e 3.25,  $LO_5$  e  $LO_7$  munidos com uma 4-coloração total cada, coloração esta obtida pelo processo acima citado.

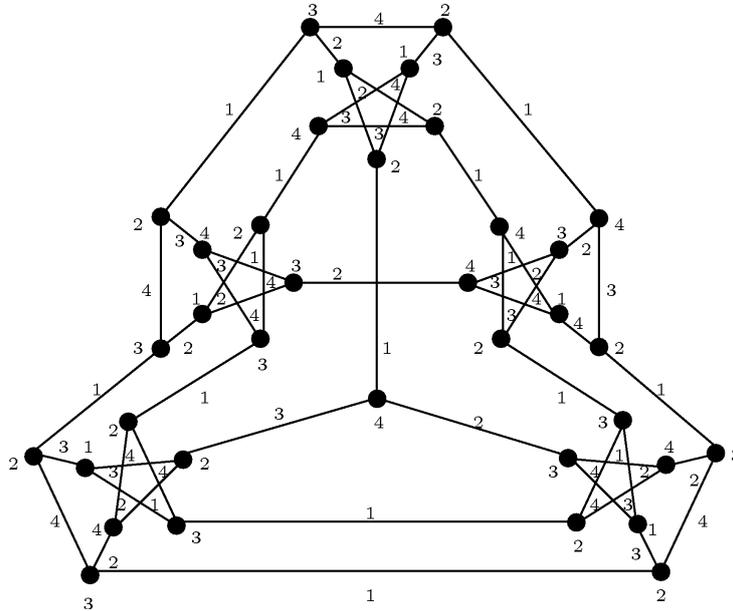


Figura 3.24: Snark  $LO_5$  com uma 4-coloração total obtida pelos grafos  $LO_3$  e  $L_5$ .

□

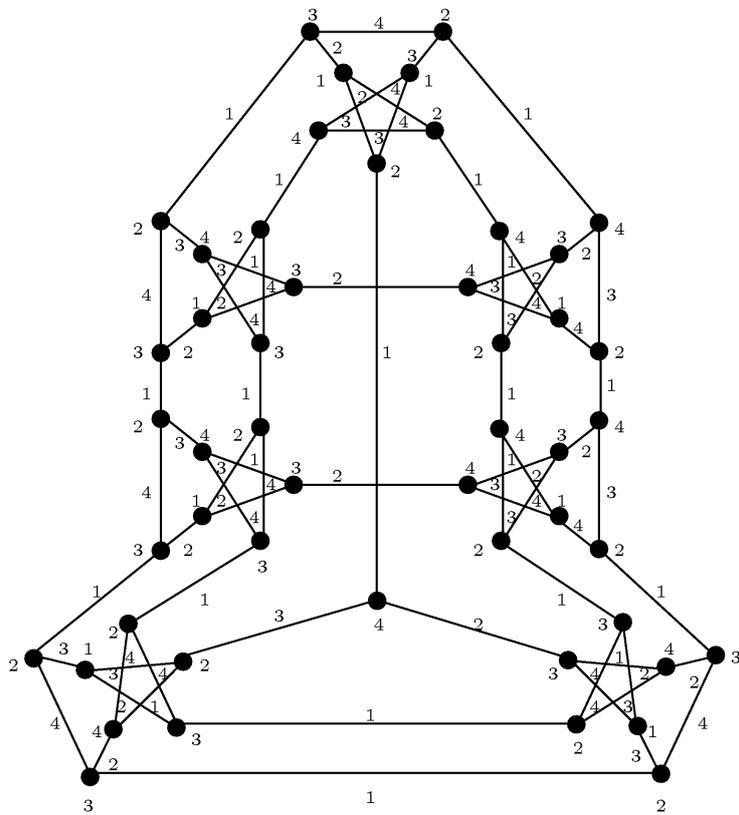


Figura 3.25: Snark  $LO_7$  com uma 4-coloração total obtida pelos grafos  $LO_5$  e  $L_7$ .

# Capítulo 4

## Produto interno

O *produto interno* (*dot product*) é uma operação que gera um novo snark a partir de dois snarks. Esta operação foi introduzida pela primeira vez por R. Isaacs [26] e, independentemente, por Adelson e Titov [1]. A operação é feita da forma a seguir.

Sejam  $G_1$  e  $G_2$  dois snarks. Remova duas arestas  $ab$  e  $cd$  não adjacentes do grafo  $G_1$  e remova dois vértices adjacentes  $x, y$  do grafo  $G_2$ . Sejam  $r$  e  $s$  os dois vértices adjacentes a  $x$  em  $G_2$  e  $t$  e  $u$  os dois vértices adjacentes a  $y$  em  $G_2$ . Adicione as arestas:  $ar, bs, ct$  e  $du$ . Note que os vértices  $r, s, t, u$  são todos distintos entre si. A Figura 4.1 explicita o resultado.

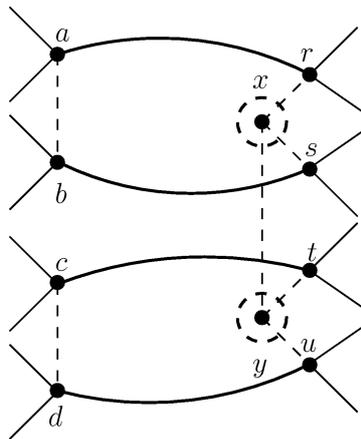


Figura 4.1: Operação produto interno de dois snarks  $G_1$  e  $G_2$ .

Denota-se o produto interno dos snarks  $G_1$  e  $G_2$  por  $G_1 \cdot G_2$ . Vale notar que com o mesmo par de grafos snarks podemos formar diferentes snarks, de acordo com o conjunto de arestas e vértices removidos no processo. O número de vértices

de  $G_1 \cdot G_2$  igual a  $n(G_1) + n(G_2) - 2$ . Observe ainda que o snark formado pelo produto interno possui corte de arestas de tamanho 4 formado pelas arestas que fazem a ligação entre os snarks originais. Logo estes grafos são ciclicamente 4-aresta conexos.

Veja, na Figura 4.2, a construção dos snarks de Blanusa, que são dois produtos internos  $P \cdot P$  de dois grafos  $P$  de Petersen.

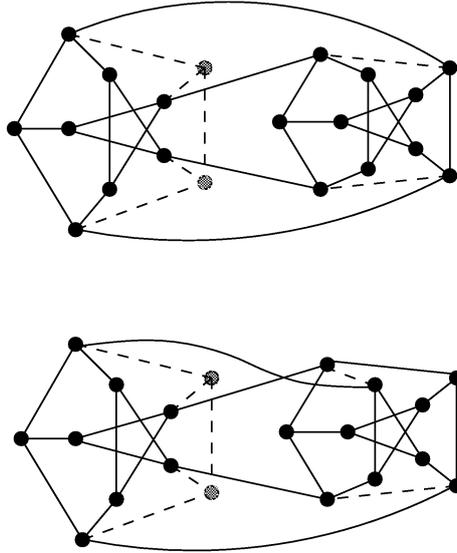


Figura 4.2: Grafos  $P^2$ .

Na Figura 4.3 apresentamos os snarks de Blanusa resultantes. Estes snarks foram descobertos por D. Blanusa em 1946 [7]. Preissmann, em 1982 [32], mostrou que estes são os dois únicos snarks de ordem 18.

Primeiramente, apresentamos o Lema 20, também conhecido como *Lema de Paridade*, de que foi utilizado por Isaacs para demonstrar o Teorema 21. A prova deste lema será apresentada, pois serviu como base para os estudos sobre coloração total apresentados na próxima seção.

**Lema 20.** (Isaacs, 1975) *Seja  $G$  um grafo cúbico com uma 3-coloração de arestas com cores 1, 2 e 3. Se um corte de arestas de tamanho  $k$  contém  $k_i$  arestas de cor  $c_i$ , para  $i = 1, 2, 3$ . Então,*

$$k_1 \equiv k_2 \equiv k_3 \equiv k \pmod{2}. \text{ (todos tem a mesma paridade)}$$

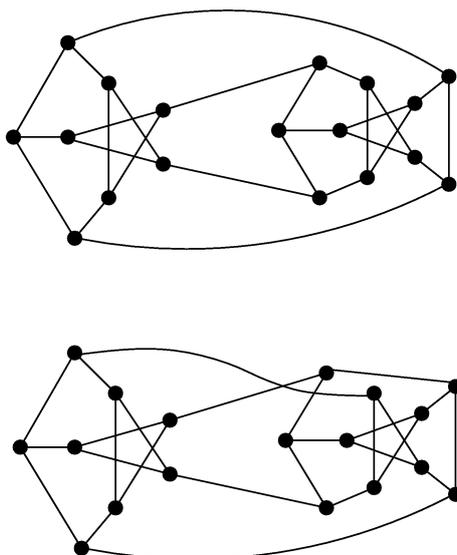


Figura 4.3: Snarks de Blanusa.

**Prova.** A remoção das arestas do corte de tamanho  $k$  de  $G$  resulta em dois conjuntos disjuntos de vértices  $A$  e  $B$ , com  $A \cup B = V(G)$ , tal que cada aresta do corte possui um extremo em  $A$  e o outro em  $B$ .

Como  $G$  é cúbico e 3-aresta colorível, cada vértice de  $A$  é extremo de uma aresta colorida com a cor  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . Os vértices de  $A$  são divididos pela cor  $i$  em dois subconjuntos: um subconjunto é composto vértices extremos de arestas do corte com a cor  $c_i$ ; e outro subconjunto de pares de vértices que são extremos de uma aresta colorida com a cor  $c_i$ .

Então o número de vértices em  $A$  é igual ao número de vértices extremos das arestas do corte que possuem a cor  $c_i$ , mais um número múltiplo de 2.

Logo,  $k_i$  é congruente a  $|A| \pmod{2}$ . □

O Teorema 21 estabelece que os grafos obtidos através do produto interno entre dois snarks são snarks.

**Teorema 21.** (Isaacs, 1975 [26]) *Sejam  $G_1$  e  $G_2$  snarks. Então,  $G_1 \cdot G_2$  é snark.* □

## 4.1 O produto interno e a coloração total

Nesta seção faremos algumas considerações sobre propriedades de uma 4-coloração total de grafos cúbicos de forma a contribuir para o estudo do número cromático

total do produto interno dos grafos snarks.

**Lema 22.** *Seja  $\pi_i$  uma 4-coloração total do snark  $G_i$ ,  $i = 1, 2$ . Não é possível preservar a coloração  $\pi_i$ ,  $i = 1, 2$  em  $G_1 \cdot G_2$ .*

**Prova.** Sem perda de generalidade, considere  $\pi_1$  uma 4-coloração total de  $G_1$  onde a aresta  $ab$  possui a cor 1, como mostra a Figura 4.4.

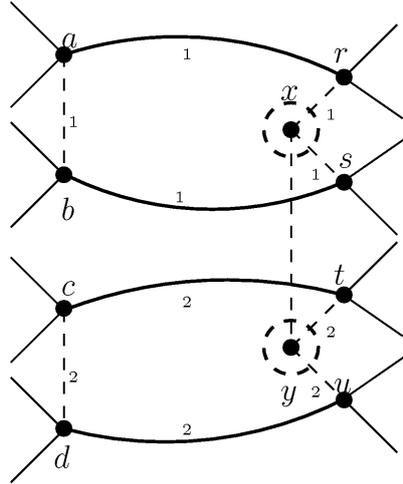


Figura 4.4: Coloração total no produto interno.

Ao fazermos o produto  $G_1 \cdot G_2$ , a única cor livre nos vértices  $a$  e  $b$  é a cor 1. Logo  $ar$  e  $bs$  recebem a cor 1. Assim, a cor 1 deve estar livre nos vértices  $r, s$  e isto implica que as arestas  $xr$  e  $xs$  em  $\pi_2$  têm ambas a cor 1. Mas isto não é possível uma vez que  $xr$  e  $xs$  são adjacentes em  $G_2$ .  $\square$

**Lema 23.** *Seja  $G$  um grafo cúbico com uma 4-coloração total. Então o número de vértices que possuem a cor  $c_i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$  é par.*

**Prova.** Seja  $G$  cúbico com uma 4-coloração total. Então, cada vértice possui a cor  $c_i$  representada, isto é, ou no próprio vértice; ou em alguma de suas arestas incidentes (a cor  $c_i$  ocorre em cada vértice). Logo, podemos particionar o conjunto de vértices de  $G$  da forma a seguir:

$$V(G) = V_1 \cup V_2,$$

onde  $V_1$  é o conjunto de vértices de  $G$  que são extremos de arestas coloridas com a cor  $c_i$  e  $V_2$  é o conjunto de vértices de  $G$  que possuem a cor  $c_i$ . Note que  $V_1$  e  $V_2$  são

conjuntos disjuntos. O tamanho do conjunto  $V_1$  é par, pois cada aresta contribui com dois vértices e  $V(G)$  é par, pois  $G$  é cúbico. Logo,  $V_2$  é par.  $\square$

**Corolário 24.** *Seja  $G$  um grafo cúbico com uma 4-coloração total. Seja  $[A, B]$  um corte de arestas de tamanho 4. O número de vértices de  $A$  (resp.  $B$ ) que possui a cor  $c_i$  é par (resp. ímpar) se, e somente se, o número de arestas do corte com a cor  $c_i$  é par (resp. ímpar).*

**Prova.** Como  $G$  é cúbico,  $V(G)$  é par. Sem perda de generalidade, analisaremos o conjunto  $A$ . Este conjunto possui quatro vértices de grau 2 e os demais de grau 3. Como o número de vértices de grau ímpar é par,  $A$  possui um número par de vértices. Particionando o conjunto  $A$  em três conjuntos, temos

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3,$$

onde  $A_1$  é o conjunto dos vértices que são extremos de arestas que não estão no corte e possuem a cor  $c_i$ ;  $A_2$  é o conjunto dos vértices que possuem a cor  $c_i$ ; e  $A_3$  é o conjunto dos vértices que são extremos das arestas do corte que possuem a cor  $c_i$ . Como  $A$  e  $A_1$  são conjuntos com um número par de vértices, conclui-se que  $A_2 \cup A_3$  é par.

Assim,  $A_2$  é par (resp. ímpar) se, e somente se,  $A_3$  é par (resp. ímpar).  $\square$

## 4.2 Os snarks de Blanusa famílias 1 e 2

Após a descoberta do produto interno [26], R. Isaacs construiu a família formada pelo produto interno de grafos de Petersen que é conhecida como família BDS [26], cujo nome representa os nomes dos autores Blanusa, Descartes e Szekeres, pois estes autores descobriram snarks pertencentes a esta família.

Em 1983, J. Watkins [43, 44] construiu duas famílias infinitas de snarks de ordem  $8i + 10$ ,  $i \geq 0$ , que denominamos por *Blanusa família 1* e *Blanusa família 2*. Estas famílias, para  $i \geq 1$ , coincidem com a família BDS. Ambas as famílias incluem os dois snarks de Blanusa de ordem 18, os snarks de Descartes cuja ordem é 210 e os snarks de Szekeres de ordem 50. Para  $i = 0$ , temos o grafo de Petersen.

Os snarks de Blanusa família 1 e Blanusa família 2 são conhecidos como generalizações dos snarks de Blanusa, como pode ser visto em [43]. Os nomes Blanusa tipo

1 e Blanusa tipo 2 também são encontrados na literatura [43], mas esta nomenclatura não será utilizada neste trabalho, para que não haja conflito com a terminologia empregada para a coloração total.

Cada snark de Blanusa família 1 e 2 é obtido pela operação do produto interno do grafo de Petersen  $P$ . São obtidas duas famílias, pois o produto interno de dois grafos de Petersen dá origem aos dois snarks de Blanusa apresentados na Figura 4.3 [32].

### 4.2.1 Construção dos blocos de Petersen

O *bloco de Petersen* é obtido pela retirada de dois vértices adjacentes do grafo de Petersen como mostra a Figura 4.5.

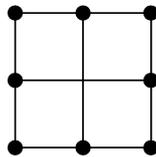


Figura 4.5: Bloco de Petersen.

O grafo de Petersen é simétrico, composto por dois ciclos de tamanho 5 que são ligados por um emparelhamento perfeito. A retirada de dois vértices adjacentes deste grafo resulta sempre em um mesmo grafo, a menos de isomorfismo. Temos duas formas de se retirar dois vértices adjacentes do grafo de Petersen:

1. retirar dois vértices adjacentes de um mesmo ciclo;
2. retirar dois vértices adjacentes do emparelhamento perfeito.

Note que toda aresta pertence a um emparelhamento perfeito e que toda aresta pertence a um ciclo no grafo de Petersen.

De mesma forma, a retirada de duas arestas não adjacentes produz somente dois blocos (Figura 4.6).

Temos quatro formas de se retirar as duas arestas não adjacentes do grafo de Petersen:

1. retirar duas arestas não adjacentes de um mesmo ciclo;
2. retirar duas arestas do emparelhamento perfeito;

3. retirar duas arestas não adjacentes, uma do emparelhamento perfeito e outra de um ciclo;
4. retirar duas arestas, uma de cada ciclo.

Observando bem, temos duas possibilidades de se retirar duas arestas independentes, pois ou as arestas estão a uma distância igual a 1 ou as arestas estão a uma distância igual a 2. Os demais casos são isomorfos a um destes.

Então, a partir de qualquer remoção de dois vértices adjacentes em  $P$ , obtemos o bloco de Petersen que se encontra na Figura 4.5. E, ao retirarmos duas arestas não adjacentes de  $P$  obtemos dois blocos de Petersen que podem ser observados na Figura 4.6.

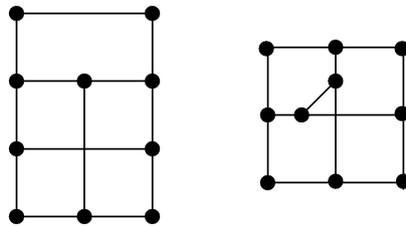


Figura 4.6: Blocos de Petersen na retirada de duas arestas não adjacentes.

Vejamos a construção e a coloração total dos snarks de Blanusa famílias 1 e 2.

### 4.2.2 A família $BF_i$ (Blanusa “First”)

Sejam  $BF_i$  os membros desta família, onde  $BF_i$  possui  $8i + 10$  vértices e  $i \geq 0$ . O primeiro snark da família,  $BF_0$ , é o conhecido grafo de Petersen que está desenhado e rotulado de forma adequada para esta construção na Figura 4.7.

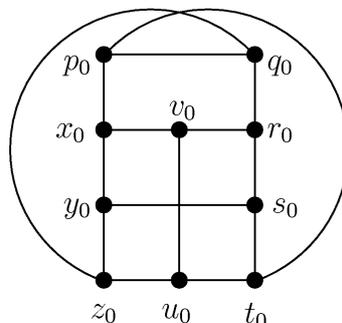


Figura 4.7: Snark  $BF_0$ .

Seja  $L_i$ ,  $i \geq 1$  o grafo de ligação tal que  $V(L_i) = \{a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i, h_i\}$  e  $E(L_i) = \{a_i b_i, b_i c_i, c_i d_i, d_i e_i, e_i f_i, f_i g_i, g_i h_i, h_i a_i, b_i f_i, d_i h_i\}$ . Veja a Figura 4.8.

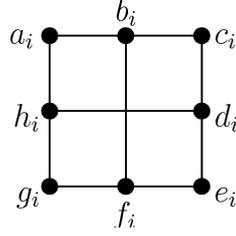


Figura 4.8: Grafo de ligação  $L_i$  que é o bloco de Petersen já apresentado.

O segundo snark da família,  $BF_1$ , é um dos snarks de Blanusa, que possui o conjunto de vértices  $V(BF_1) = V(BF_0) \cup V(L_1)$  e o conjunto de arestas  $E(BF_1) = [E(BF_0) - \{p_0 t_0, q_0 z_0\}] \cup E(L_1) \cup \{t_0 a_1, z_0 c_1, q_0 g_1, p_0 e_1\}$ . Veja-o na Figura 4.9.

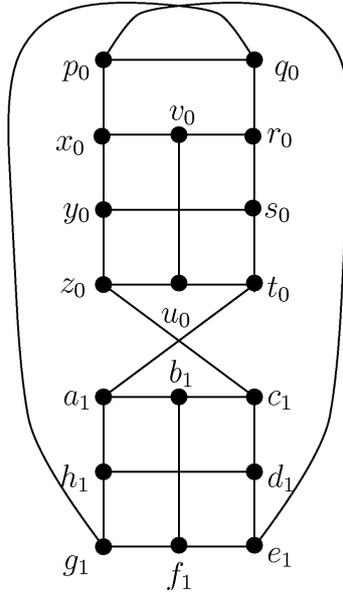


Figura 4.9: Snark  $BF_1$ .

Para cada  $i \geq 2$ ,  $BF_i$  é obtido pelos grafos  $BF_{i-1}$  e  $L_i$  da forma estabelecida a seguir:  $V(BF_i) = V(BF_{i-1}) \cup V(L_i)$  e  $E(BF_i) = [E(BF_{i-1}) - E_i^{out}] \cup E(L_i) \cup E_i^{in}$ , com  $E_i^{out} = \{q_0 g_{i-1}, p_0 e_{i-1}\}$  e  $E_i^{in} = \{q_0 g_i, p_0 e_i, g_{i-1} c_i, e_{i-1} a_i\}$ .

Observe o grafo  $BF_2$  formado a partir de  $BF_1$  e  $L_2$  na Figura 4.10.

### 4.2.3 A família $BS_i$ (Blanusa “Second”)

A construção desta família é a mesma construção de Blanusa família 1. Os membros desta família são os snarks  $BS_i$  que possuem  $8i+10$  vértices e  $i \geq 0$ . O primeiro snark

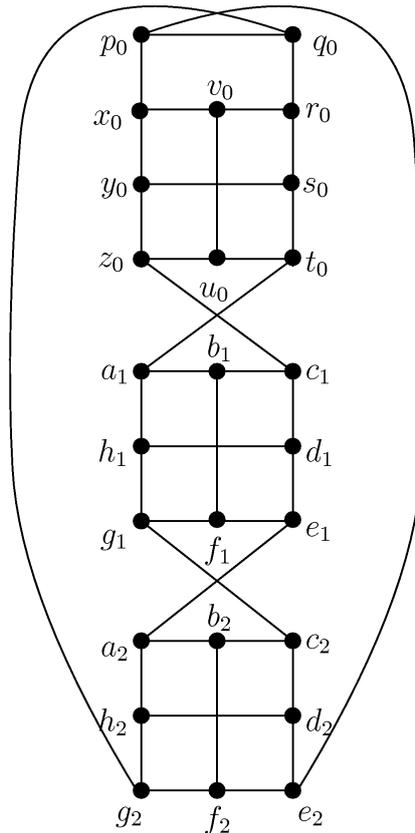


Figura 4.10: Snark  $BF_2$ .

da família,  $BS_0$ , coincide com  $BF_0$  e é o grafo de Petersen, agora apresentado de forma adequada para esta família, pois a diferença entre as famílias Blanusa família 1 e Blanusa família 2 consiste na existência de dois blocos de Petersen obtidos pela retirada de duas arestas independentes do grafo de Petersen, isto já foi visto neste capítulo. Veja-o na Figura 4.11.

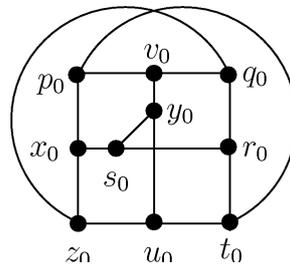


Figura 4.11: Snark  $BS_0$ .

O grafo de ligação  $L_i$ ,  $i \geq 1$ , da Figura 4.8, também será utilizado nesta construção.

O segundo snark da família,  $BS_1$ , é o outro snark de Blanusa, que possui  $V(BS_1) = V(BS_0) \cup V(L_1)$  e  $E(BS_1) = [E(BS_0) - \{p_0t_0, q_0z_0\}] \cup E(L_1) \cup \{t_0a_1, z_0c_1, q_0g_1, p_0e_1\}$ . Veja-o na Figura 4.12.

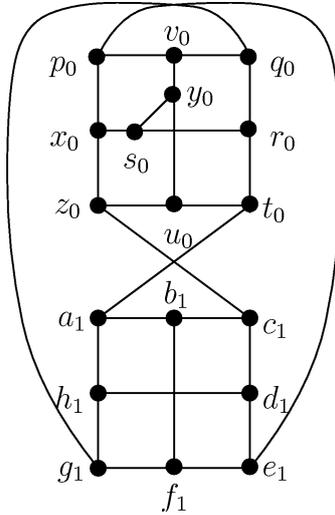


Figura 4.12: Snark  $BS_1$ .

Para cada  $i \geq 2$ ,  $BS_i$  é obtido pelos grafos  $BS_{i-1}$  e  $L_i$ , assim como os membros de Blanusa família 1 e por isto, tem-se  $V(BS_i) = V(BS_{i-1}) \cup V(L_i)$  e  $E(BS_i) = [E(BS_{i-1}) - E_i^{out}] \cup E(L_i) \cup E_i^{in}$ , conjunto no qual  $E_i^{out} = \{q_0g_{i-1}, p_0e_{i-1}\}$  e  $E_i^{in} = \{q_0g_i, p_0e_i, g_{i-1}c_i, e_{i-1}a_i\}$ , ou seja, mesmos  $E_i^{out}$  e  $E_i^{in}$  da construção de Blanusa família 1.

Observe na Figura 4.13, o snark  $BS_2$  formado a partir de  $BS_1$  e  $L_2$ .

#### 4.2.4 Coloração total dos snarks de Blanusa famílias 1 e 2

**Teorema 25.** *Cada snark de Blanusa família 1 e Blanusa família 2 é tipo 1.*

**Prova.** O primeiro snark de Blanusa família 1 (resp. 2),  $BF_0$  (resp.  $BS_0$ ), é o grafo de Petersen, munido da 4-coloração total apresentada na Figura 4.14. Observe o snark  $BF_1$  (resp.  $BS_1$ ) colorido com a 4-coloração total  $\pi_1$  (resp.  $\pi'_1$ ) na Figura 4.15.

Obteremos uma 4-coloração total para estas famílias por indução, baseando-se na técnica utilizada para obter a coloração total das famílias Snark- Flor e Goldberg. Dessa forma, utilizaremos a coloração do snark de Blanusa  $BF_1$  (resp.  $BS_1$ ) como base de indução.

Como  $BF_i, i \geq 2$ , é obtido a partir de  $BF_{i-1}$  e  $L_i$ , para obtermos a coloração total

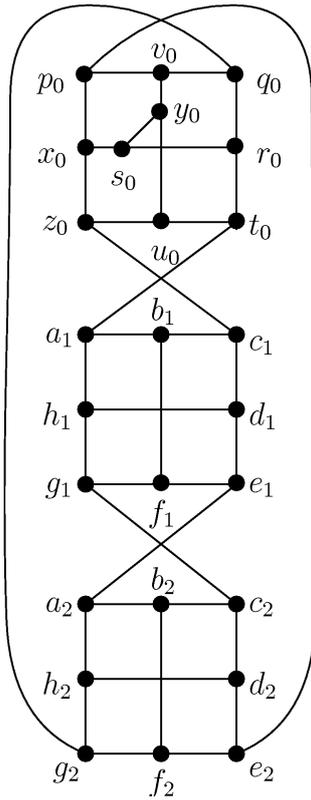


Figura 4.13: Snark  $BS_2$ .

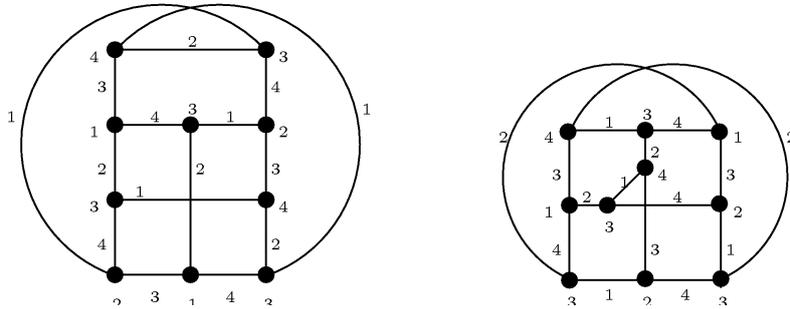


Figura 4.14: Snarks  $BF_0$  e  $BS_0$ .

$\pi_i$ ,  $i \geq 2$  de cada grafo desta família, atribuíremos aos elementos de  $BF_i$  restritos ao subgrafo induzido  $BF_i[V(BF_i) \cap V(L_i)]$  as cores que ocorriam nestes elementos em  $L_i$  e ao subgrafo induzido  $BF_i[V(BF_i) \cap V(BF_{i-1})]$  as cores que ocorriam nestes elementos em  $BF_{i-1}$ . O mesmo procedimento pode ser feito para a Blanusa família 2 na obtenção da coloração total  $\pi'_i$ ,  $i \geq 2$ . Além disso, sejam duas colorações fixas  $\phi$  e  $\phi'$  do grafo de ligação  $L_i$ , como mostra a Figura 4.16. As únicas cores possíveis para as semiarestas estão representadas nas próprias semiarestas, ou seja, arestas que possuem somente um extremo.

A construção da coloração é diferente da construção das famílias, pois agora as

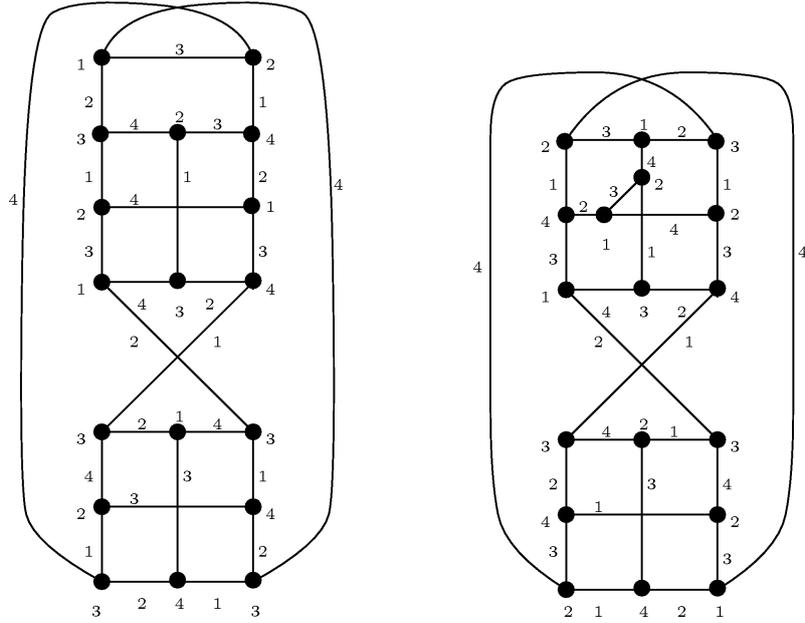


Figura 4.15: Snarks  $BF_1$  e  $BS_1$ .

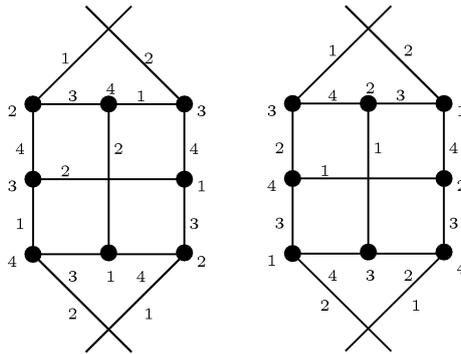


Figura 4.16: Grafo de ligação  $L_i$  munido de duas colorações  $\phi$  e  $\phi'$ , respectivamente.

arestas que serão retiradas de  $BF_1$  (resp.  $BS_1$ ) para a inserção do grafo de ligação com coloração  $\phi$  são as arestas  $z_0c_1$  e  $t_0a_1$ . Note que estas arestas possuem cores 2 e 1, respectivamente. Além disso, as arestas que serão retiradas de  $BF_i$ , para  $i \geq 2$  (resp.  $BS_i$ , para  $i \geq 2$ ) neste mesmo processo são as arestas  $g_{i-1}c_i$  e  $e_{i-1}a_i$  e estas possuem as cores 2 e 1, respectivamente.

Por outro lado, as arestas que serão inseridas na construção da coloração também possuem cores 2 e 1, que são as cores das semiarestas apresentadas no grafo de ligação na Figura 4.16.

O snark  $BF_i$ ,  $i \geq 2$  e  $i$  par, restrito ao subgrafo induzido  $BF_i[V(BF_i) \cap V(L_i)]$  possui a coloração total  $\phi$  e o snark  $BF_i$ ,  $i \geq 2$  e  $i$  ímpar, restrito ao subgrafo induzido  $BF_i[V(BF_i) \cap V(L_i)]$  possui a coloração total  $\phi'$ . Similarmente, o snark

$BS_i$ ,  $i \geq 2$  e  $i$  par, restrito ao subgrafo induzido  $BS_i[V(BS_i) \cap V(L_i)]$  possui a coloração total  $\phi$  e o snark  $BS_i$ ,  $i \geq 2$  e  $i$  ímpar, restrito ao subgrafo induzido  $BS_i[V(BS_i) \cap V(L_i)]$  possui a coloração total  $\phi'$ .

Como  $BF_1$  e  $L_i$  possuem uma 4-coloração total cada, ao atribuírmos aos elementos de  $BF_i$  restrito ao subgrafo induzido  $BF_i[V(BF_i) \cap V(L_i)]$  as cores que estes elementos possuem em  $L_i$  e ao subgrafo induzido  $BF_i[V(BF_i) \cap V(BF_1)]$  as cores que estes elementos tinham em  $BF_1$ , estamos preservando a coloração de  $BF_{i-1}$ ,  $i \geq 2$  e o mesmo acontece com a Blanusa família 2. A coloração das famílias ocorre da forma que podemos constatar nas Figuras 4.17 e 4.18.

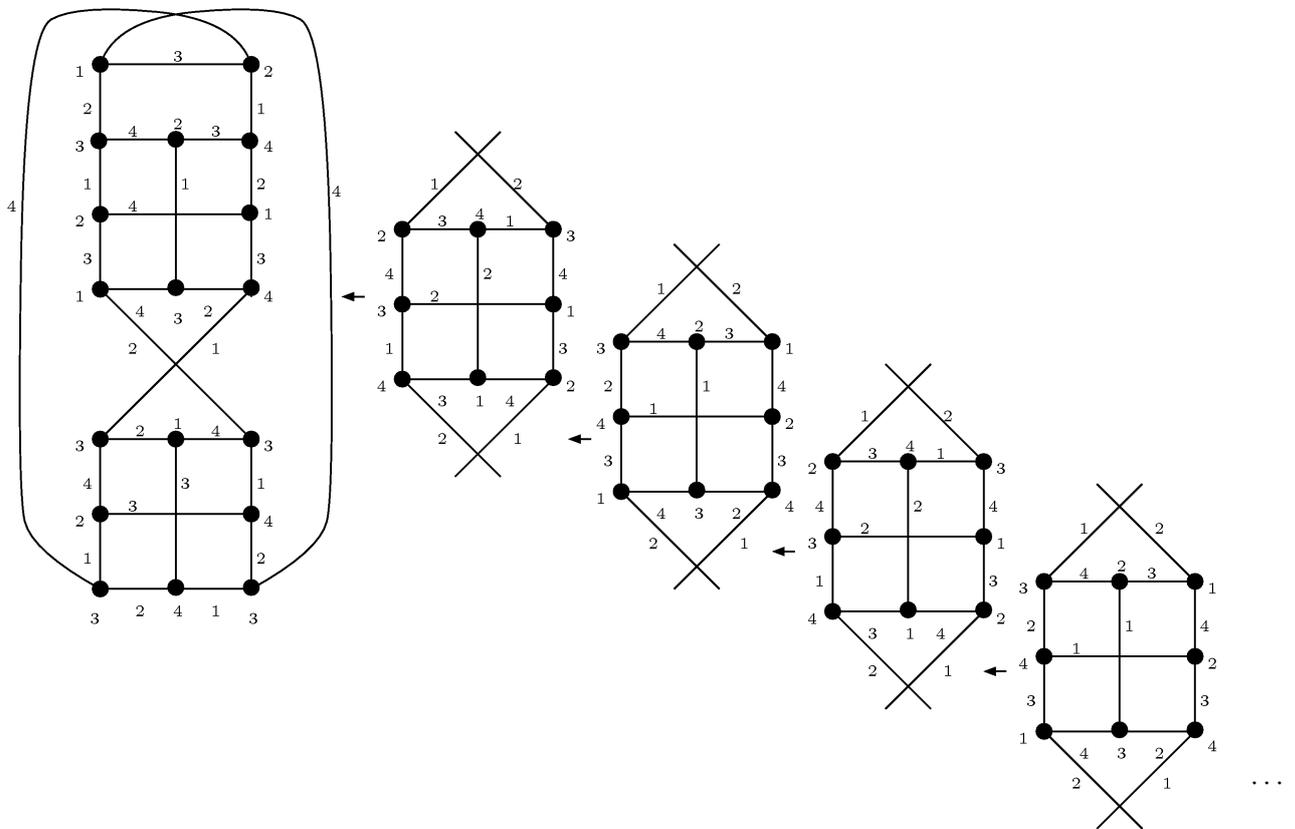


Figura 4.17: Uma 4-coloração total de Blanusa família 1.

Por fim, observe que não há conflito de cores ao juntarmos as colorações  $\phi$  e  $\phi'$  do grafo de ligação às colorações  $\pi_1$  de  $BF_1$  (resp.  $\pi'_1$  de  $BS_1$ ).

De fato, as cores dos vértices  $g_{i-1}$  e  $c_i$ ,  $i \geq 2$  são sempre diferentes e as cores dos vértices  $e_{i-1}$  e  $a_i$ ,  $i \geq 2$ , também são distintas. Isto acontece porque escolhemos colorações do grafo de ligação tais que os vértices que serão adjacentes no processo de construção da coloração possuem cores diferentes e também possuem cores diferentes

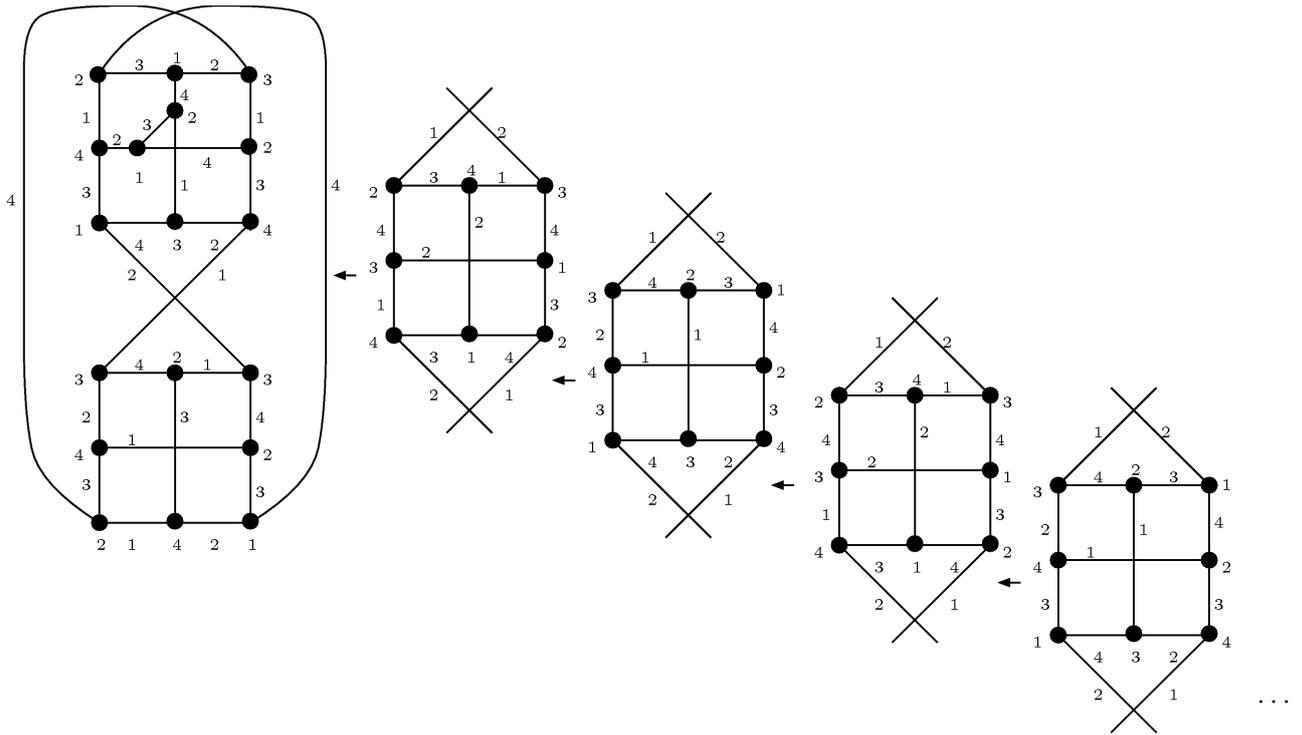


Figura 4.18: Uma 4-coloração total de Blanusa família 2.

dos vértices de  $BF_1$  (resp.  $BS_1$ ) envolvidos no processo de construção da coloração de  $BF_i$ ,  $i \geq 2$  (resp.  $BS_i$ ,  $i \geq 2$ ), se tais vértices forem adjacentes. Isto permite colorirmos os snarks de Blanusa família 1 e 2 da forma apresentada nas Figuras 4.17 e 4.18. □

Vejamos na Figura 4.19 os snarks de Szekeres com uma 4-coloração total que são o produto interno de seis grafos de Petersen. Estes grafos foram coloridos de acordo com a técnica empregada na demonstração do Teorema 25.

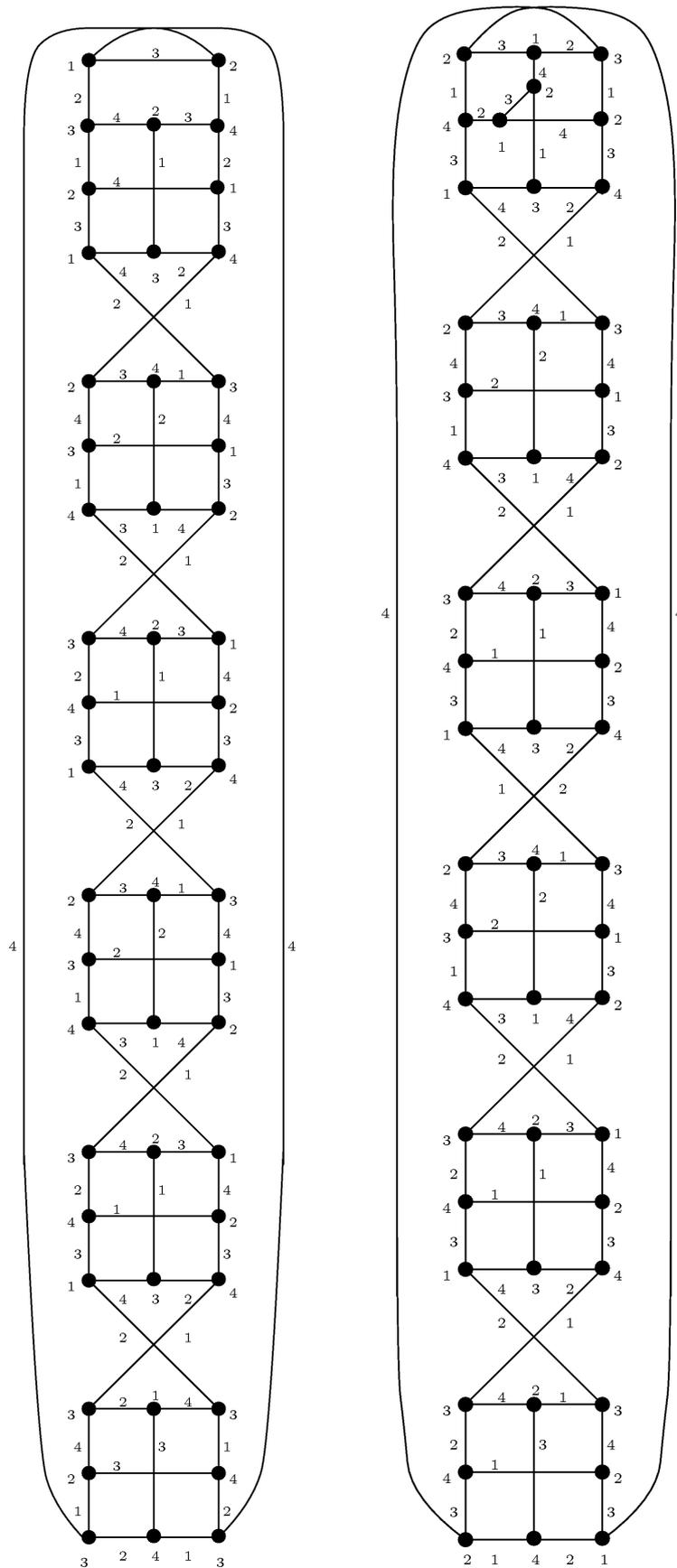


Figura 4.19: Snarks de Szekeres  $BF_5$  e  $BS_5$ .

## Capítulo 5

### Coloração total de famílias “Dot”

Conforme discutido no capítulo anterior, o produto interno gera diferentes famílias infinitas de snarks. Os snarks de Blanusa famílias 1 e 2 são exemplos de snarks formados pelo produto interno entre grafos de Petersen, o menor snark. De forma a estudar propriedades do produto interno e de contribuir para a questão proposta por Cavicchioli [15] de encontrar, caso exista, o menor snark tipo 2, neste capítulo, classificamos três famílias de snarks geradas pelo produto interno como tipo 1.

As famílias construídas através do produto interno são: Snark-Flor com o grafo de Petersen ( $F_i \cdot P^j$ ), Goldberg com o grafo de Petersen ( $G_i \cdot P^j$ ) e Loupekhine com o grafo de Petersen ( $LO_i \cdot P^j$ ).

Relembramos que para um mesmo par de snarks, a operação de produto interno pode gerar diferentes snarks dependendo do conjunto de arestas e de vértices que são escolhidos. Dessa forma, as famílias  $F_i \cdot P^j$ ,  $LO_i \cdot P^j$  e  $G_i \cdot P^j$  não são únicas.

A construção a seguir representa a família  $F_i \cdot P^j$  (resp.  $LO_i \cdot P^j$ ,  $G_i \cdot P^j$ ) para uma escolha de vértices e arestas para o produto interno. Esta escolha é favorável para obtermos a coloração total da família  $F_i \cdot P^j$  (resp.  $LO_i \cdot P^j$ ,  $G_i \cdot P^j$ ) para  $i \geq 3$ .

Por outro lado, diferentes escolhas do conjunto de vértices e arestas que é removido no produto interno nem sempre implicam no surgimento de snarks novos. Um exemplo são os snarks de Blanusa, que quaisquer conjunto de arestas e vértices retirados do grafo de Petersen, sempre resultam nos dois snarks de Blanusa.

## 5.1 Coloração total de $F_i \cdot P^j$

Vejam a construção da família  $F_3 \cdot P^j$ . Esta família consiste na remoção de duas arestas não adjacentes de  $F_3$  e na remoção de dois vértices adjacentes de cada grafo de Petersen  $P$ .

Veja na Figura 5.1 duas formas de se desenhar o snark  $F_3$ . As arestas em negrito representam as arestas que serão retiradas. Utilizaremos na construção a seguir o desenho do grafo  $F_3$  que se encontra do lado esquerdo da Figura 5.1.

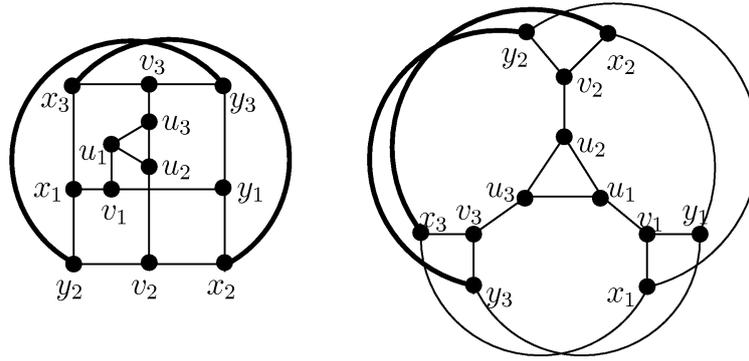


Figura 5.1: Snark  $F_3$ .

O bloco de Petersen é originado da remoção de dois vértices adjacentes do grafo de Petersen. Este grafo será chamado de grafo de ligação  $L_j$  (Figura 5.2).

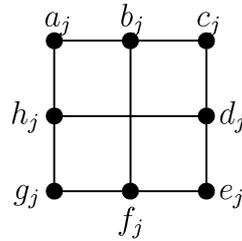


Figura 5.2: Grafo de ligação  $L_j$ .

Sejam  $F_3 \cdot P^1, F_3 \cdot P^2, \dots, F_3 \cdot P^j$  os membros desta família, com  $j \geq 1$ .

O primeiro snark da família,  $F_3 \cdot P^1$ , é o produto interno entre  $F_3$  e  $P$ . Veja Figura 5.3. Tal snark possui o seguinte conjunto de vértices e de arestas:

$$V(F_3 \cdot P^1) = V(F_3) \cup V(L_1) \text{ e}$$

$$E(F_3 \cdot P^1) = [E(F_3) - \{x_3x_2, y_3y_2\}] \cup E(L_1) \cup \{y_2c_1, x_2a_1, y_3g_1, x_3e_1\}.$$

Para cada  $j \geq 2$ ,  $F_3 \cdot P^j$  é obtido pelos grafos  $F_3 \cdot P^{j-1}$  e  $L_j$  da seguinte forma:

$$V(F_3 \cdot P^j) = V(F_3 \cdot P^{j-1}) \cup V(L_j) \text{ e } E(F_3 \cdot P^j) = [E(F_3 \cdot P^{j-1}) - E_j^{out}] \cup E(L_j) \cup E_j^{in},$$

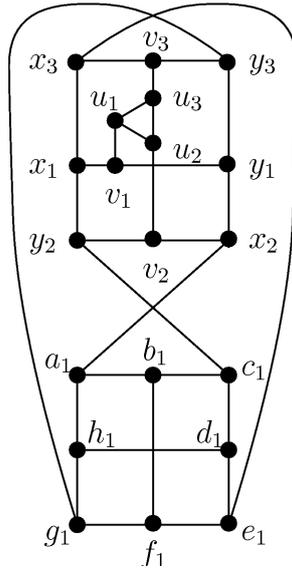


Figura 5.3: Snark  $F_3 \cdot P^1$ .

onde  $E_j^{out} = \{x_3e_{j-1}, y_3g_{j-1}\}$  e  $E_j^{in} = \{x_3e_j, y_3g_j, g_{j-1}c_j, e_{j-1}a_j\}$ .

A Figura 5.4 apresenta o grafo  $F_3 \cdot P^2$  construído a partir de  $F_3 \cdot P^1$  e  $L_2$ .

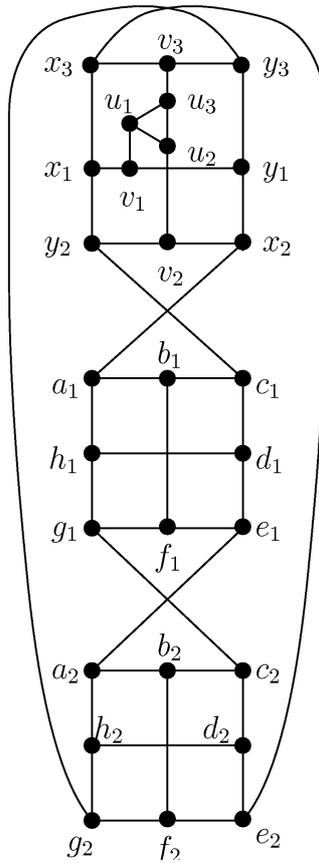


Figura 5.4: Snark  $F_3 \cdot P^2$ .

**Teorema 26.** Cada snark da família  $F_3 \cdot P^j$ ,  $j \geq 1$ , construída acima é tipo 1.

**Prova.** Observe na Figura 5.5, o snark  $F_3$  munido da 4-coloração total que foi utilizada na coloração total da família Snark-Flor no Capítulo 3.

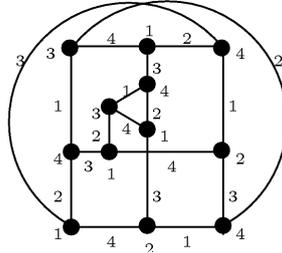


Figura 5.5: Snark  $F_3$ .

Obteremos uma 4-coloração total por indução utilizando a construção definida previamente. A base da indução para a coloração total desta família é a 4-coloração total  $\pi_1$  do snark  $F_3 \cdot P^1$  apresentada na Figura 5.6.

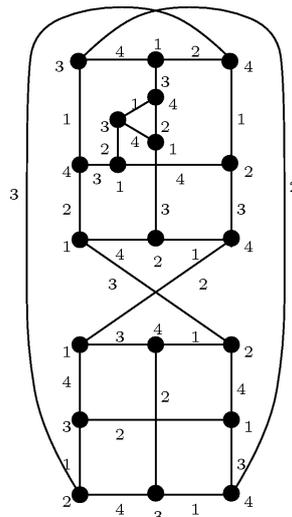


Figura 5.6: Uma 4-coloração total  $\pi_1$  de  $F_3 \cdot P^1$ .

Como  $F_3 \cdot P^j$ ,  $j \geq 2$  é formado a partir de  $F_3 \cdot P^{j-1}$  e  $L_j$ , para obter a coloração total  $\pi_j$  de  $F_3 \cdot P^j$ ,  $j \geq 2$ , atribua aos elementos de  $G_j = F_3 \cdot P^j$ , restritos ao subgrafo induzido  $G_j[V(G_j) \cap V(F_3 \cdot P^{j-1})]$  as cores que ocorriam nestes elementos em  $F_3 \cdot P^{j-1}$  e ao subgrafo induzido  $G_j[V(G_j) \cap V(L_j)]$  as cores que ocorriam nestes elementos em  $L_j$ ,  $j \geq 2$ , já que  $L_j$  e  $F_3 \cdot P^{j-1}$  possuem 4-colorações totais.

Para obtermos a coloração de  $F_3 \cdot P^j$  com  $j \geq 2$ , usaremos as colorações  $\phi'$  e  $\phi$  do grafo de ligação  $L_j$  que se encontram na Figura 5.7.

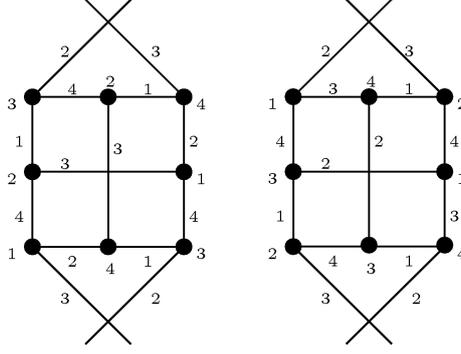


Figura 5.7: Grafo de ligação  $L_j$  com 4-coloração total  $\phi$  e  $\phi'$ , respectivamente.

O snark  $G_j = F_3 \cdot P^j$ ,  $j \geq 2$  e  $j$  ímpar, restrito ao subgrafo induzido  $G_j[V(G_j) \cap V(L_j)]$  possui coloração total  $\phi'$ . Analogamente, snark  $G_j = F_3 \cdot P^j$ ,  $j \geq 2$  e  $j$  par, restrito ao subgrafo induzido  $G_j[V(G_j) \cap V(L_j)]$  possui coloração total  $\phi$ .

Para os grafos desta família, as arestas  $x_3e_{j-1}$  e  $y_3g_{j-1}$  de  $E_j^{out}$  possuem as cores 2 e 3, respectivamente, assim como o par de arestas  $x_3e_j$  e  $y_3g_j$  de  $E_j^{in}$  que também possui cores 2 e 3, respectivamente. Além disso, o par de arestas  $g_{j-1}c_j$  e  $e_{j-1}a_j$  também de  $E_j^{in}$  possui cores 3 e 2 nesta ordem.

Note que na coloração dos membros desta família os vértices  $g_{j-1}$  e  $c_j$  não possuem a mesma cor, assim como os vértices  $e_{j-1}$  e  $a_j$ , os vértices  $y_3$  e  $g_j$  e o par de vértices  $x_3$  e  $e_j$  também não possuem mesma cor. Assim, os extremos das arestas de  $E_j^{in}$  possuem cores diferentes por construção. A coloração total da família  $F_3 \cdot P^j$  é apresentada na Figura 5.8.

Este procedimento gera uma 4-coloração total para cada grafo desta família. Como  $F_3 \cdot P^1$  possui uma 4-coloração total fixa, ao atribuímos aos elementos de  $G = F_3 \cdot P^j$ ,  $j \geq 2$  restrito ao subgrafo induzido  $G[V(G) \cap V(F_3 \cdot P^{j-1})]$  as cores que ocorriam nestes elementos em  $F_3 \cdot P^{j-1}$  e ao subgrafo induzido  $G[V(G) \cap V(L_j)]$  as cores que ocorriam nestes elementos em  $L_j$ , estamos preservando a coloração de  $F_3 \cdot P^{j-1}$ . Logo, temos o resultado. □

**Corolário 27.** *Cada snark da família  $F_i \cdot P^j$ ,  $j \geq 1$ ,  $i > 3$  e  $i$  ímpar construída acima, é tipo 1.*

**Prova.** Pelo Teorema 26,  $F_3 \cdot P^j$  é tipo 1. Para colorirmos  $F_5 \cdot P^j$  utilizamos a coloração de  $F_3 \cdot P^j$  e a coloração do grafo de ligação utilizado na construção da

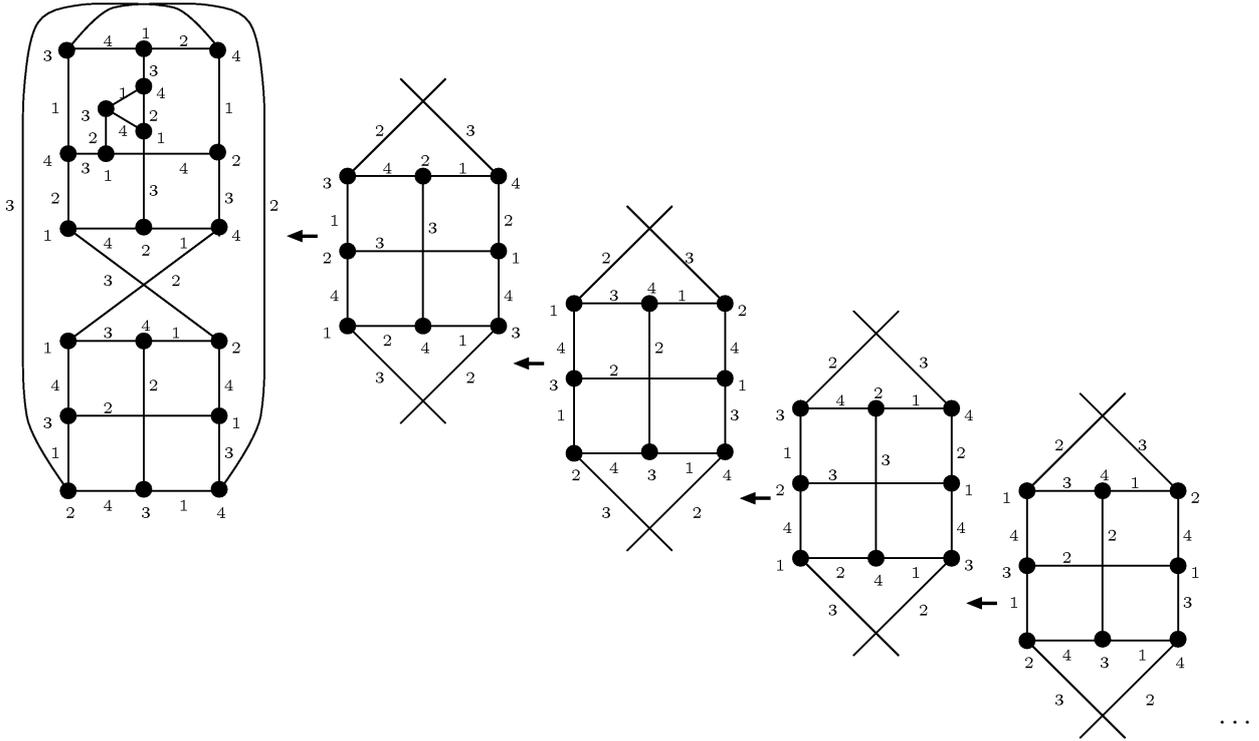


Figura 5.8: A 4-coloração total de  $F_3 \cdot P^j$ .

família Snark-Flor. As arestas retiradas do grafo  $F_3$  para a operação do produto interno são  $y_2y_3$  e  $x_2x_3$ .

Por outro lado, as arestas utilizadas na construção do grafo  $F_5$  são  $y_1y_3$ ,  $x_1x_3$  e  $u_1u_3$ . Como  $y_1y_3$  é adjacente a aresta  $y_2y_3$ ,  $x_1x_3$  é adjacente a aresta  $x_2x_3$ , não há conflito entre a cor utilizada nas arestas nem entre a cor destas arestas com os vértices. Para  $i \geq 7$ , as arestas utilizadas no produto interno não são adjacentes as utilizadas na construção do  $F_i$ .

□

## 5.2 Coloração total de $LO_i \cdot P^j$

A família  $LO_3 \cdot P^j$  é obtida de forma análoga à  $F_3 \cdot P^j$ , pois é formada pela remoção de duas arestas não adjacentes de  $LO_3$  e dois vértices adjacentes de cada grafo de Petersen  $P$ .

Assim,  $LO_3 \cdot P^j$  terá o seu primeiro membro formado pelo produto interno entre o primeiro snark de Loupekhine  $LO_3$  e o grafo de Petersen  $P$ . Os demais membros são obtidos pelo produto interno do Petersen com o grafo anterior, como na construção

anterior.

Veja na Figura 5.9 as arestas em negrito que são retiradas de  $LO_3$ . Novamente,

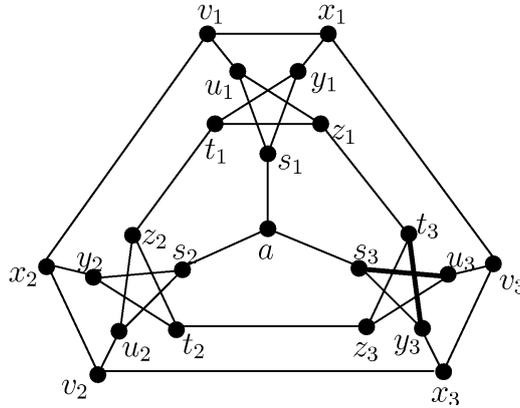


Figura 5.9: Arestas que são retiradas de  $LO_3$ .

é utilizado o grafo de ligação  $L_j$ ,  $j \geq 1$ . Veja a figura 5.10. Sejam  $LO_3 \cdot P^1, LO_3 \cdot$

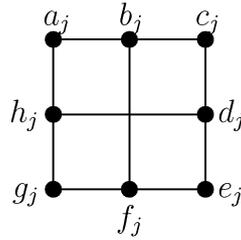


Figura 5.10: Grafo de ligação  $L_j$ .

$P^2, \dots, LO_3 \cdot P^j$  os membros da família, com  $j \geq 1$ . O grafo  $LO_3 \cdot P^1$  possui o seguinte conjunto de vértices e arestas:  $V(LO_3 \cdot P^1) = V(LO_3) \cup V(L_1)$  e  $E(LO_3 \cdot P^1) = [E(LO_3) - \{u_3s_3, t_3y_3\}] \cup E(L_1) \cup \{a_1u_3, c_1y_3, g_1t_3, e_1s_3\}$  e pode ser visto na Figura 5.11.

Para cada  $j \geq 2$ ,  $LO_3 \cdot P^j$  é obtido dos grafos  $LO_3 \cdot P^{j-1}$  e  $L_j$  de tal forma que  $V(LO_3 \cdot P^j) = V(LO_3 \cdot P^{j-1}) \cup V(L_j)$  e  $E(LO_3 \cdot P^j) = [E(LO_3 \cdot P^{j-1}) - E_j^{out}] \cup E(L_j) \cup E_j^{in}$ , onde  $E_j^{out} = \{g_{j-1}t_3, e_{j-1}s_3\}$  e  $E_j^{in} = \{g_{j-1}c_j, e_{j-1}a_j, g_jt_3, e_js_3\}$ .

Veja  $LO_3 \cdot P^2$  na Figura 5.12.

**Teorema 28.** *Cada snark da família  $LO_3 \cdot P^j$ ,  $j \geq 1$ , construída acima é tipo 1.*

**Prova.** Veja na Figura 5.13 o snark  $LO_3$  com a 4-coloração total utilizada na coloração da família Loupekhine no Capítulo 3.

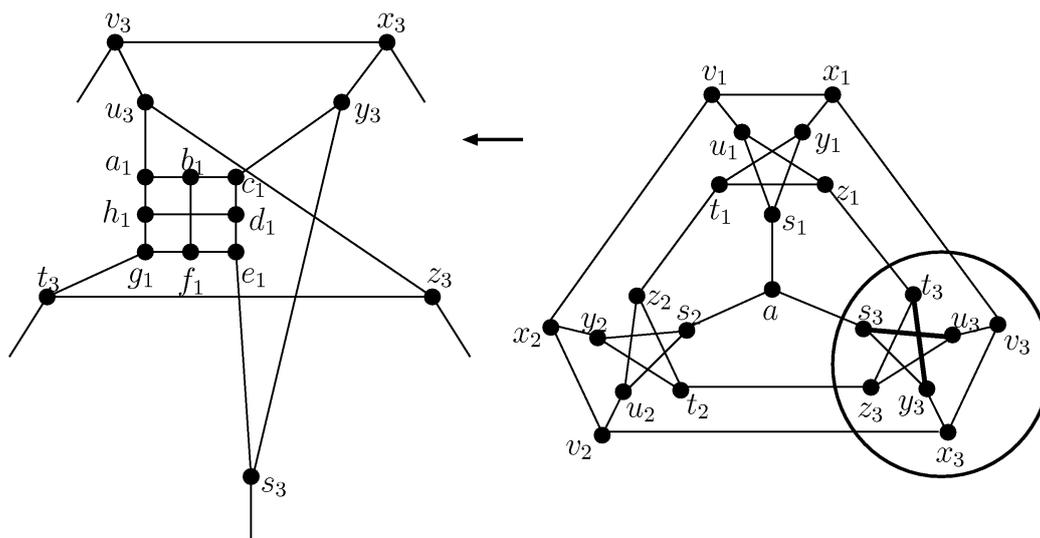


Figura 5.11: Parte do snark  $LO_3 \cdot P^1$ .

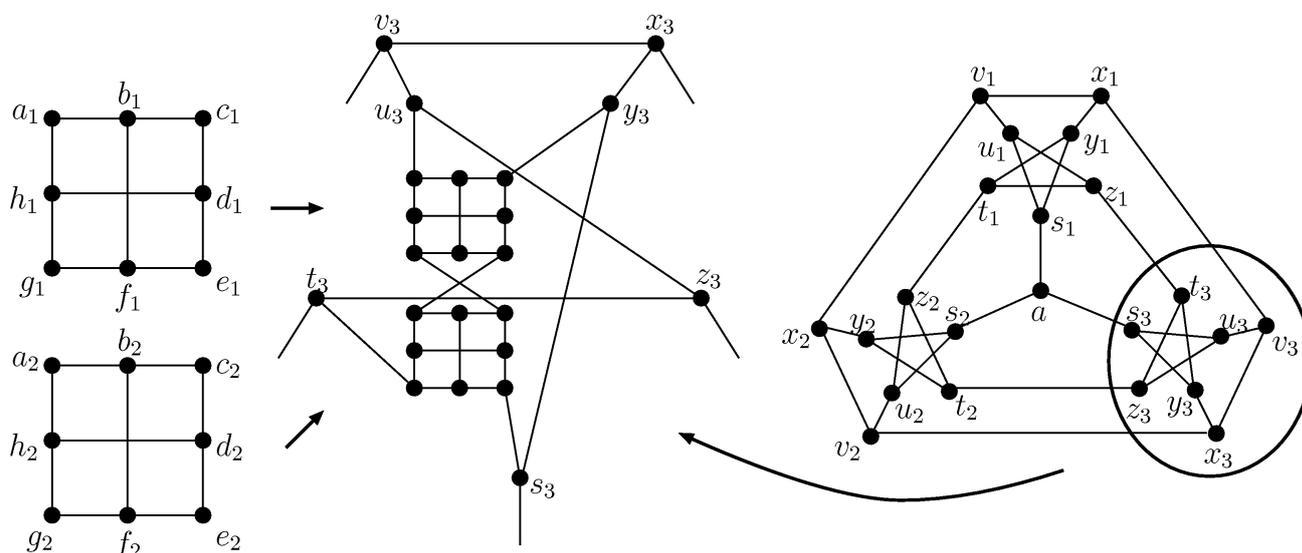


Figura 5.12: Snark  $LO_3 \cdot P^2$ .

Esta prova é semelhante a prova do Teorema 26. A prova é por indução, assim como a prova do Teorema 26 e o grafo  $LO_3 \cdot P^1$  é a base, que se encontra na Figura 5.14.

O grafo  $LO_3 \cdot P^j$  é obtido a partir de  $LO_3 \cdot P^{j-1}$  e  $L_j$ , então para obtermos a coloração  $\pi_j$  de  $LO_3 \cdot P^j$ ,  $j \geq 2$  de cada grafo da família, utilizaremos a construção recursiva desta família. Utilizaremos também as colorações  $\phi$  e  $\phi'$  do grafo de ligação  $L_j$  podem ser vistas na Figura 5.15.

Para a família  $LO_3 \cdot P^j$ ,  $j \geq 2$ , as arestas  $g_{j-1}t_3$  e  $e_{j-1}s_3$  de  $E_j^{out}$  possuem as cores 2 e 1, respectivamente, e as arestas  $e_{j-1}a_j$  e  $g_{j-1}c_j$  de  $E_j^{in}$  possuem as cores 1

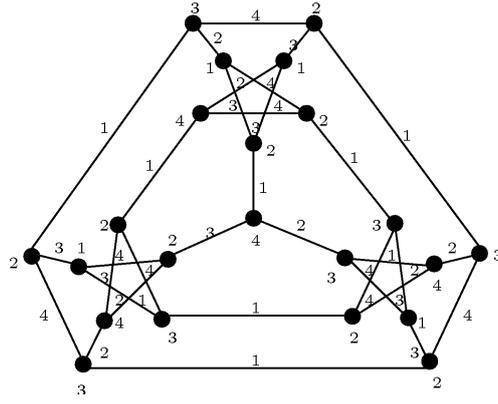


Figura 5.13: Snark  $LO_3$ .

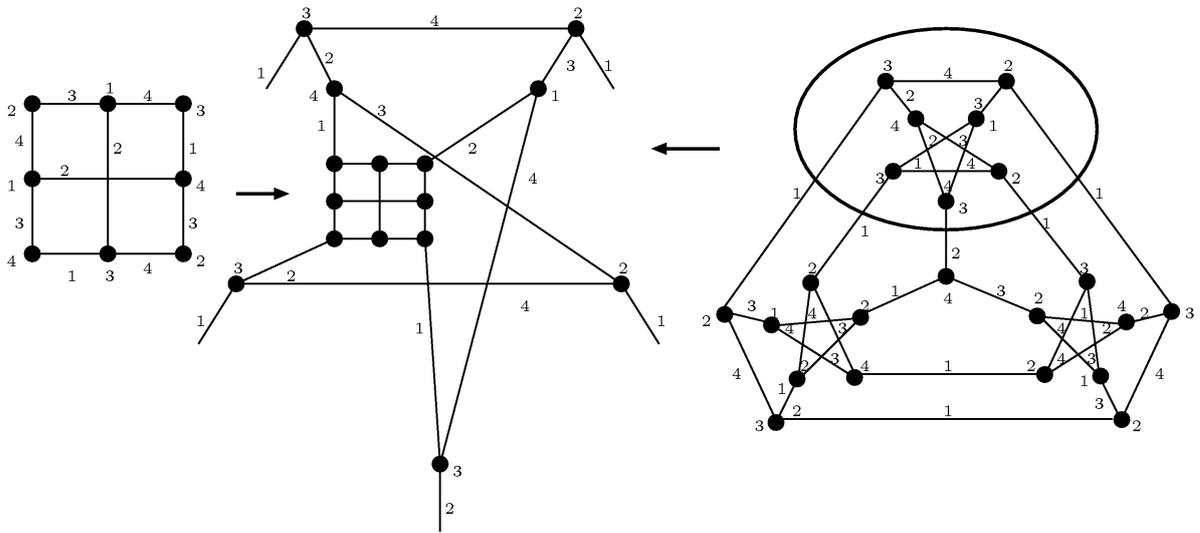


Figura 5.14: Snark  $LO_3 \cdot P^1$  com uma 4-coloração total  $\pi_1$ .

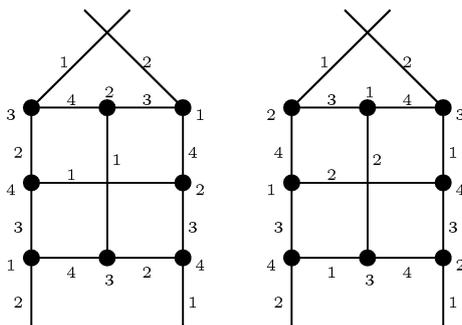


Figura 5.15: Grafo de ligação  $L_j$  com coloração total  $\phi'$  e  $\phi$ , respectivamente.

e 2, respectivamente e ainda, as arestas  $e_j s_3$ ,  $g_j t_3$  de  $E_j^{in}$  também possuem as cores 1 e 2, nesta ordem. A coloração da família  $LO_3 \cdot P^j$  acontece como na Figura 5.17, em particular, a coloração de  $LO_3 \cdot P^2$  está na Figura 5.16.

Não há conflito de cores durante este processo. De fato, note que os vértices que

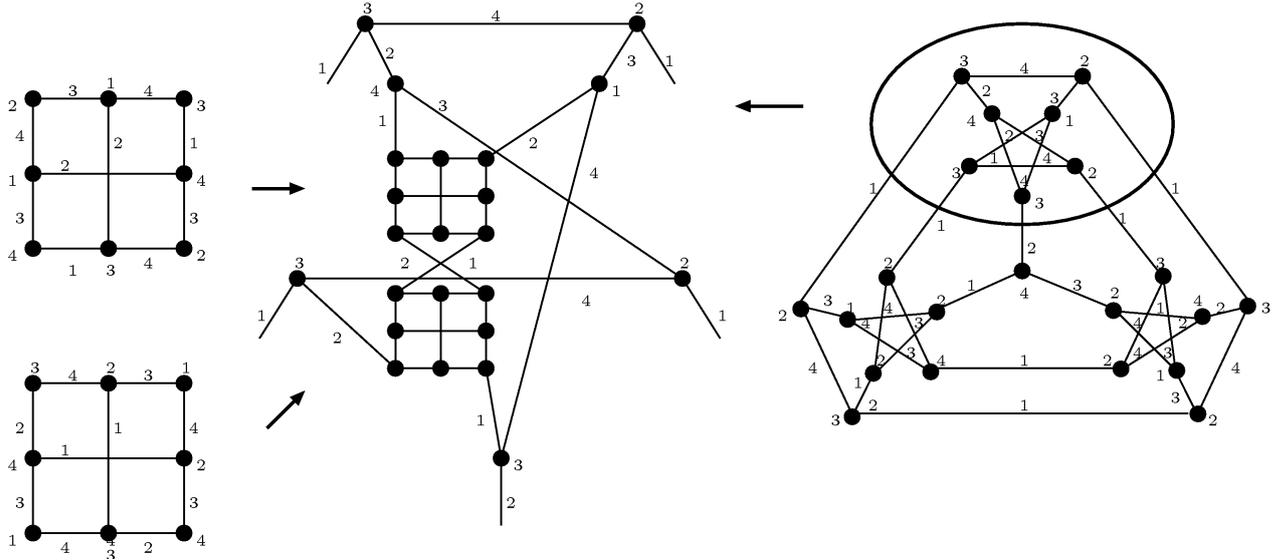


Figura 5.16: Uma 4-coloração total de  $LO_3 \cdot P^2$ .

são extremos de uma mesma aresta de  $E_j^{in}$  em  $LO_3 \cdot P^j$  não possuem a mesma cor. Dessa forma, tem-se a coloração total desta família.

□

**Corolário 29.** Cada snark de  $LO_i \cdot P^j$ ,  $j \geq 1$ ,  $i > 3$  e  $i$  ímpar, construída acima é tipo 1.

**Prova.** Assim como as famílias apresentadas anteriormente, a família  $LO_i \cdot P^j$ , para  $i > 3$ ,  $i$  ímpar e  $j \geq 1$ , é colorida pelo Teorema 19 e pelo Teorema 28. Finalmente, as duas colorações apresentadas nestes teoremas não apresentam conflito. □

### 5.3 Coloração total de $G_i \cdot P^j$

Esta família é obtida de forma análoga às outras, pois é formada pela remoção de duas arestas não adjacentes do snark de Goldberg  $G_i$ ,  $i$  ímpar e  $i \geq 3$  e dois vértices adjacentes de cada grafo de Petersen  $P$ .

Assim,  $G_i \cdot P^j$  terá o seu primeiro membro formado pelo produto interno entre  $G_i$  e o grafo de Petersen. Os demais membros são obtidos pelo produto interno entre o grafo Petersen e o grafo  $G_i \cdot P^{j-1}$ , como nas construções anteriores. A Figura 5.18 nos mostra uma parte do grafo  $G_i$ ,  $i \geq 3$ , efetuando o produto interno com o grafo de Petersen.

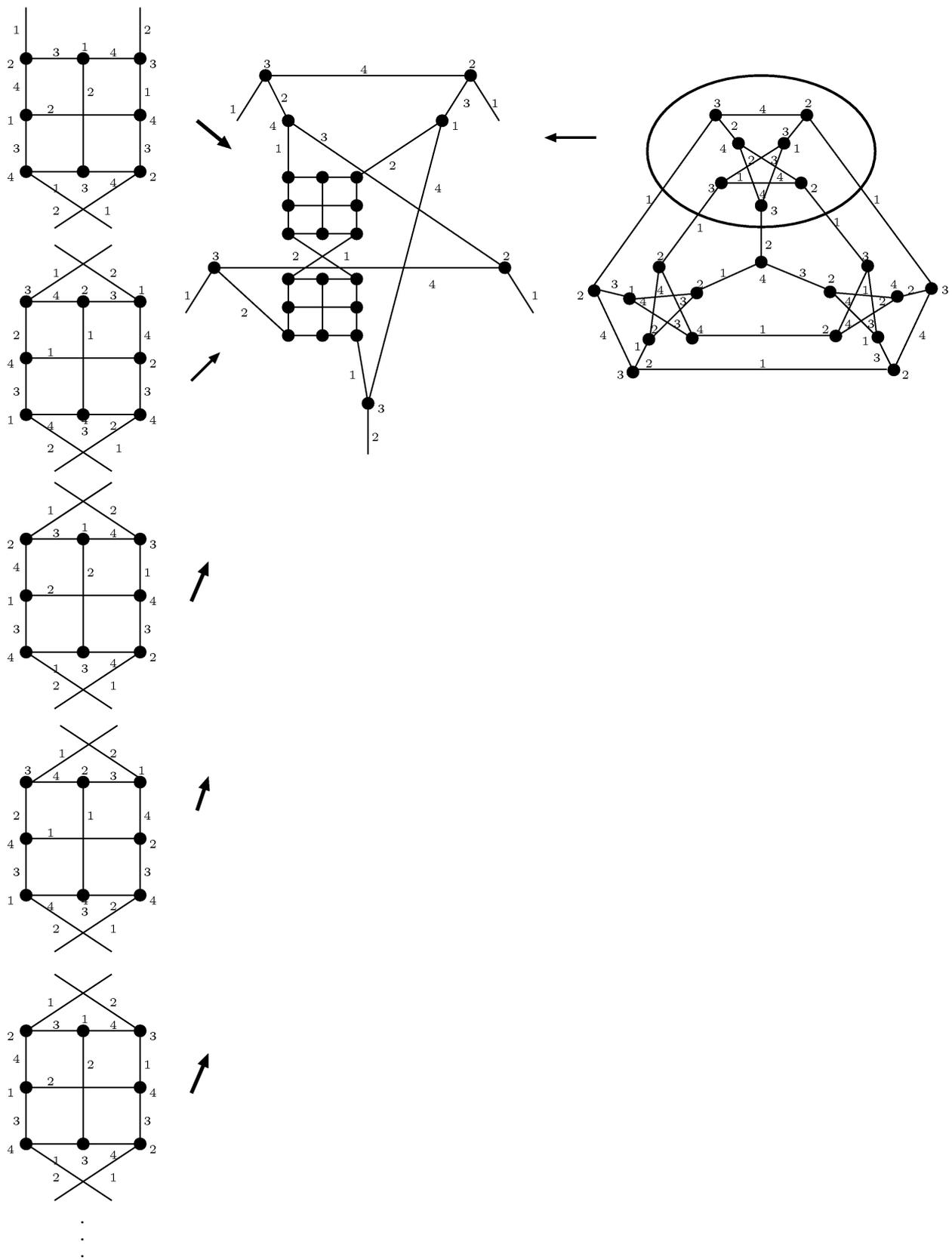


Figura 5.17: Uma 4-coloração total de  $LO_3 \cdot P^j$  para  $j \geq 1$ .

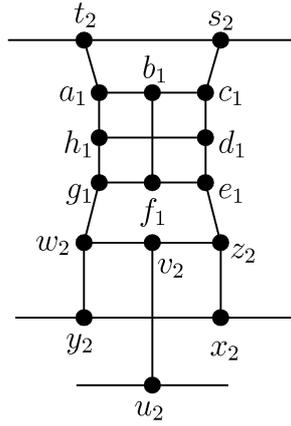


Figura 5.18: Parte do snark  $G_3 \cdot P^1$ .

Para auxiliar a análise, apresentamos na Figura 5.19 o snark de Goldberg  $G_3$  com as arestas em negrito representando as arestas que serão retiradas para o produto interno com  $P$ .

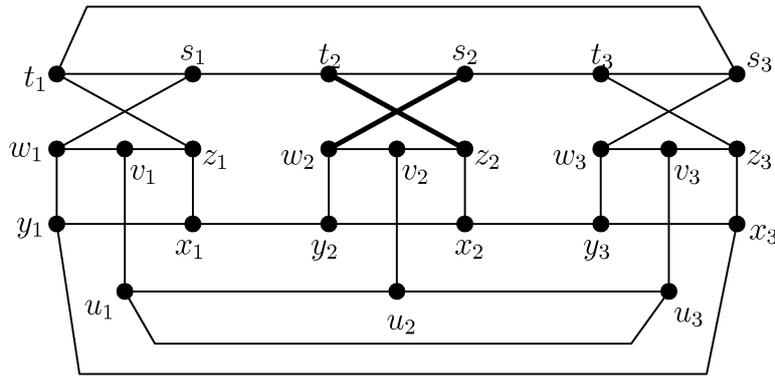


Figura 5.19: Snark  $G_3$  com arestas que serão retiradas.

Sejam  $G_i \cdot P^1, G_i \cdot P^2, \dots, G_i \cdot P^j, i \geq 3, i$  ímpar e  $j \geq 1$  os membros da família. Assim como nas construções das famílias anteriores, utilizaremos o grafo de ligação  $L_j, j \geq 1$  da Figura 5.20.

Para cada  $j \geq 2, G_i \cdot P^j$  é obtido a partir dos grafos  $G_i \cdot P^{j-1}$  e  $L_j$  do mesmo modo que as outras famílias apresentadas neste capítulo. Neste contexto, temos que  $E_j^{out} = \{g_{j-1}w_2, e_{j-1}z_2\}$  e  $E_j^{in} = \{g_{j-1}c_j, e_{j-1}a_j, g_jw_2, e_jz_2\}$ . Veja uma parte do snark  $G_i \cdot P^2$  na Figura 5.21.

**Teorema 30.** *Cada snark da família  $G_i \cdot P^j, j \geq 1, i \geq 3$  e  $i$  ímpar, definida acima, é tipo 1.*

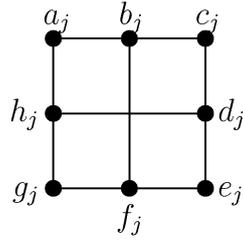


Figura 5.20: Grafo de ligação  $L_j$ .

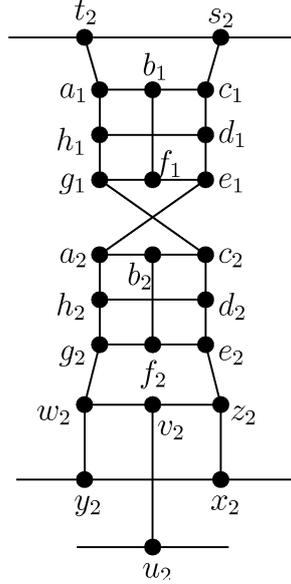


Figura 5.21: Parte do snark  $G_i \cdot P^2$ .

**Prova.** Observe na Figura 3.13 o snark  $G_3$  munido com a 4-coloração total utilizada na Seção 3.2. Obteremos uma 4-coloração para a família  $G_i \cdot P^j$  por indução utilizando sua construção. A base é o grafo  $G_3 \cdot P^1$  munido da 4-coloração total exibida na Figura 5.22.

O grafo  $G_3 \cdot P^j$ , para  $j \geq 2$  é obtido a partir de  $G_3 \cdot P^{j-1}$  e  $L_j$ . Seguindo o procedimento feito para a família  $F_3 \cdot P^j$ , para obter a coloração total  $\pi_j$  de  $G_3 \cdot P^j$ ,  $j \geq 2$ , usaremos as colorações  $\phi'$  e  $\phi$  do grafo de ligação  $L_j$  apresentadas na Figura 5.23.

A 4-coloração total desta família é obtida de forma análoga às famílias anteriores. As arestas  $g_{j-1}w_2$  e  $e_{j-1}z_2$  de  $E_j^{out}$  possuem as cores 3 e 4, respectivamente, assim como as arestas  $g_{j-1}c_j$ ,  $g_jw_2$  e  $e_{j-1}a_j$ ,  $e_jz_2$  de  $E_j^{in}$  possuem as cores 3 e 4, respectivamente.

Na Figura 5.24 apresentamos parte do snark  $G_3 \cdot P^2$  com uma 4-coloração total



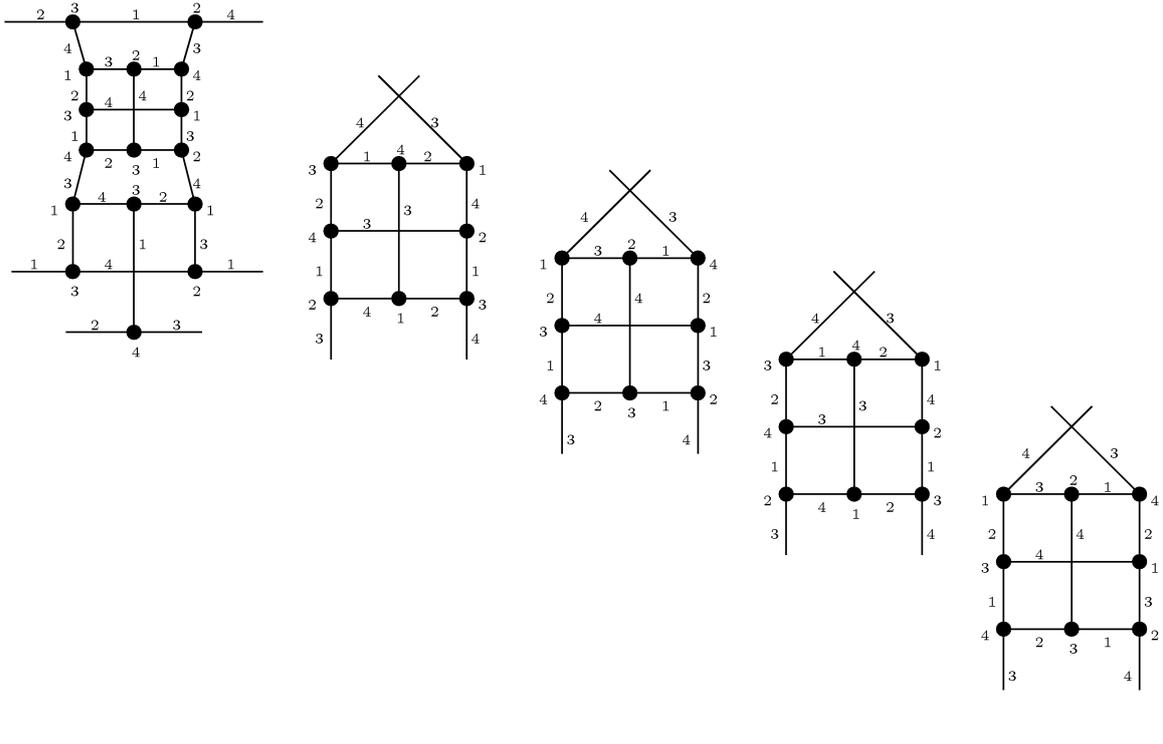


Figura 5.25: Construção da coloração total de  $G_3 \cdot P^j$ .

suem a mesma cor, considerando a construção da coloração da base ou das colorações do grafo de ligação. Finalmente, observamos que os grafos de ligação  $L_j$  foram inseridos no bloco  $B_2$  de  $G_3$ , o que garante a inserção do grafo de ligação  $L_i$  em todos os snarks de Goldberg, sem gerar conflito. Logo, temos o resultado.  $\square$

## 5.4 Considerações finais sobre o bloco de Petersen

Nesta seção confirmamos a necessidade de duas colorações diferentes para o grafo de ligação  $L_j$ ,  $j \geq 1$  nas colorações obtidas para as famílias deste capítulo e para as famílias Blanusa família 1 e 2.

### 5.4.1 Coloração do grafo de ligação $L_j$ , $j \geq 1$

Com o estudo das colorações totais destas famílias, foram encontrados impedimentos na coloração total do grafo de ligação com 4 cores. Apresentaremos agora algumas das restrições encontradas ao colorirmos este grafo.

Problema 1: Se os vértices de grau 2 do grafo de ligação  $L_j$ ,  $j \geq 1$ , forem livres

da cor  $i$ ,  $i = 1, 2, 3, 4$ , não será possível obter uma 4-coloração total para o grafo de ligação, pois cada vértice deste bloco deve ter a cor  $i$  representada, ou seja, deve possuir a cor  $i$ ; ou alguma de suas arestas adjacentes deve possuir a cor  $i$ . Como consequência, as arestas  $b_j f_j$  e  $d_j h_j$  devem possuir a cor  $i$ , além disso, teremos um ciclo para colorir com 3 cores e como o ciclo possui 8 vértices, este não pode ser colorido com apenas 3 cores e isto pode ser verificado em [47].

Problema 2: Se colorirmos dois vértices que compartilham um mesmo vértice vizinho como mostra a Figura 5.26, com cores 1 e 2; e além disso, colorirmos as semiarestas que possuem estes vértices como extremos, com cores 2 e 1 respectivamente, não é possível obter uma 4-coloração total para o grafo de ligação, pois restarão apenas 2 cores (as cores 3 e 4) para 3 elementos do grafo.

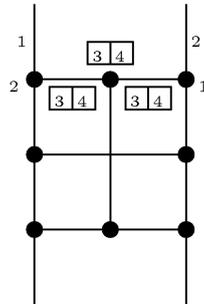


Figura 5.26: Problema 2.

Problema 3: Se colorirmos as semiarestas com as cores 1 e 2 como mostra a Figura 5.27 e além disso, colorirmos os dois dos quatro vértices extremos destas arestas com uma mesma cor 3, como mostra a Figura 5.28, novamente, não é possível obter uma 4-coloração total para o grafo de ligação, pois não terá cor disponível para algum elemento do grafo.

Problema 4: Como consequência dos Problemas 2 e 3, não é possível obter uma 4-coloração total para o grafo de ligação de forma que cores diferentes sejam atribuídas a vértices que são extremos de semiarestas coloridas com a mesma cor. Assim, para obtermos as colorações das famílias construídas neste capítulo, foram necessárias duas colorações diferentes para o mesmo grafo de ligação, caso contrário, não teríamos como juntar grafos ligação de tal forma que tivéssemos vértices vizinhos munidos de cores diferentes.

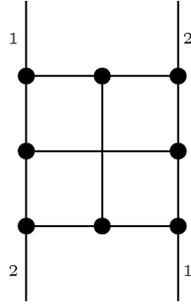


Figura 5.27: Problema 3.

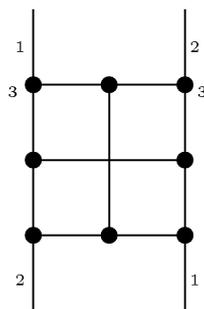


Figura 5.28: Problema 3.

# Capítulo 6

## Conclusão e trabalhos futuros

### 6.1 Conclusão

Apresentamos neste trabalho uma pesquisa sobre a classe dos snarks, focando na coloração total destes grafos. Através das bibliografias encontradas sobre esta classe, foi possível estudarmos famílias de snarks que haviam sido descobertas a partir da década de 70, e foi possível ainda, obtermos novas famílias a partir do produto interno entre snarks.

Deve ser notado que foi preciso buscar bibliografias sobre os snarks para obtermos as regras de formação das famílias conhecidas. Como a bibliografia é bastante antiga, foi difícil encontrar na internet os artigos essenciais para a pesquisa. No entanto, conseguimos reunir neste trabalho alguns resultados que já eram conhecidos sobre a coloração total dos snarks, como a coloração total das famílias snark-flor e Goldberg, obtidas por Campos em [11] e Campos, Dantas e Mello em [12]. Além disso, com o auxílio do computador, Cavicchioli et al [15] mostrou que todos os snarks de ordem menor do que 30 são tipo 1.

Por outro lado, foram obtidos novos resultados também sobre a coloração total dos grafos snarks. Dentre estes resultados, foram determinadas as colorações das famílias Loupekhine, Blanusa famílias 1 e 2,  $F_i \cdot P^j$ ,  $LO_i \cdot P^j$  e  $G_i \cdot P^j$ , para  $i \geq 3$  e  $j \geq 1$ .

## 6.2 Trabalhos futuros

Temos como proposta de trabalho os seguintes tópicos:

- Mostrar que os snarks triviais são triviais para a coloração total, da forma abordada na Seção 2.3, parte sobre coloração total;
- Buscar o menor snark que seja tipo 2, caso exista, solucionando o problema proposto por Cavicchioli et al [15].
- Provar que o produto interno entre dois snarks tipo 1 gera um novo snark também tipo 1, caso isto seja verdade;
- Estudar outras operações entre snarks que gerem novos snarks, a fim de que se consiga uma caracterização para esta classe de grafos;
- Encontrar novos resultados sobre a coloração total para esta classe e com isto, fortalecer o estudo geral sobre a coloração total em grafos.

# Referências Bibliográficas

- [1] G. M. ADELSON-VELSKII AND V. K. TITOV, *On edge 4-chromatic cubic graphs (in russian)*, Voprosy Kibernetiki, 1 (1973), pp. 5–14.
- [2] K. APPEL AND W. HAKEN, *Every planar map is four colorable*, Illinois J. Math, 21 (1977), pp. 429–490.
- [3] ———, *The solution of the four-color map problem*, Sci. Amer., 237 (1977), pp. 108–121.
- [4] M. BEHZAD, *Graphs and their chromatic numbers*, PhD thesis, Michigan State University, 1965.
- [5] M. BEHZAD, G. CHARTRAND, AND J. K. COOPER JR, *The colour numbers of complete graphs*, Journal of the London Mathematical Society, 42 (1967), pp. 226–228.
- [6] N. L. BIGGS, E. K. LLOYD, AND R. J. WILSON, *Graph Theory 1736–1936*, Clarendon Press, 1976.
- [7] D. BLANUSA, *Problem cetiriju boja (in russian)*, Glasnik Mat. Fiz. Astr. Ser. II, 1 (1946), pp. 31–42.
- [8] J. BONDY AND U. MURTY, *Graph Theory*, Springer Publishing Company Incorporated, New York, 2008.
- [9] R. L. BROOKS, *On colouring the nodes of a network*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 37 (1941), pp. 194–197.
- [10] P. J. CAMERON, A. G. CHETWYND, AND J. J. WATKINS, *Decomposition of snarks*, J. Graph Theory, 11 (1987), pp. 13–19.

- [11] C. N. CAMPOS, *O problema da coloração total em classes de grafos*, PhD thesis, Universidade Estadual de Campinas, 2006.
- [12] C. N. CAMPOS, S. DANTAS, AND C. P. MELLO, *The total chromatic number of the infinite families of Flower and Goldberg snarks 1*. Submetido para Discrete Mathematics, 2010.
- [13] L. CARROL, *The Hunting of the Snark*, Macmillan, 1876.
- [14] A. CAVICCHIOLI, M. MESCHIARI, B. RUINI, AND F. SPAGGIARI, *A survey on snarks and new results: products, reducibility and a computer search*, J. Graph Theory, 28(2) (1998), pp. 57–86.
- [15] A. CAVICCHIOLI, T. E. MURGOLO, B. RUINI, AND F. SPAGGIARI, *Special classes of snarks*, Acta Applicandae Mathematicae, 76 (2003), pp. 57–88.
- [16] A. G. CHETWYND AND R. WILSON, *Snarks and supersnarks*, Wiley Interscience, New York, 1981, pp. 215–241.
- [17] P. H. DA SILVA AND S. DANTAS, *Coloração total dos grafos snarks*, CNMAC 2009, (2009).
- [18] C. M. H. DE FIGUEIREDO, J. MEIDANIS, AND C. P. DE MELLO, *Coloração em grafos*, JAI'97, (1997).
- [19] B. DESCARTES, *Network-colourings*, Math. Gazette, 32 (1948), pp. 67–69.
- [20] S. FIORINI AND R. WILSON, *Edge-colourings of graphs*, Research Notes in Maths, 16 (1977), pp. 42–50.
- [21] M. GARDNER, *Mathematical games: Snarks, Boojums and other conjectures related to the four-color-map theorem*, Scientific American, 234 No. 4 (1976), pp. 126–130.
- [22] M. R. GAREY AND D. S. JOHNSON, *Computers and intractability: a guide to the theory of NP-completeness*, Freeman, San Francisco, 1979.
- [23] M. K. GOLDBERG, *Construction of class 2 graphs with maximum vertex degree 3*, J. Comb. Theory Ser. B, 31 (1981), pp. 282–291.

- [24] D. A. HOLTON AND J. SHEEHAN, *The Petersen Graph*, Press Syndicate of the University of Cambridge, 1993.
- [25] I. HOLYER, *The NP-completeness of edge - coloring*, SIAM J. Comput., 10, No 4 (1981), pp. 718–720.
- [26] R. ISAACS, *Infinite families of nontrivial trivalent graphs which are not Tait colorable*, The American Mathematical Monthly, 82 (1975), pp. 221–239.
- [27] ———, *Loupekhine’s snarks: a bifamily of non-Tait-colorable graphs*, Tech. Rep. 263, Dpt. of Math. Sci., The Johns Hopkins University, Maryland, U.S.A., 1976.
- [28] A. KEMPE, *On the geographical problem of the four colours*, Amer. J. Math., 2 (1879), pp. 193–200.
- [29] D. KÖNIG, *Über graphen und ihre anwendung auf determinantentheorie und mengenlehre*, Mathematische Annalen, 77 (1916), pp. 453–465.
- [30] J. PETERSEN, *Sur le théoreme de Tait*, Intermed. Math., 15 (1898), pp. 225–227.
- [31] M. PREISSMANN, *Sur les colorations des aretes des graphes cubiques*, PhD thesis, L’ Université Scientifique et Médicale de Grenoble, 1981.
- [32] M. PREISSMANN, *Snarks of order 18*, Discrete Math., 42 (1982), pp. 125–126.
- [33] R. C. READ AND R. J. WILSON, *An Atlas of Graphs*, Oxford University Press, 1998.
- [34] N. ROBERTSON, D. P. SANDERS, P. D. SEYMOUR, AND R. THOMAS, *A new proof of the four colour theorem*, Electron. Res. Announc. Amer. Math. Soc., 2 (1996), pp. 17–25.
- [35] M. ROSENFELD, *On the total chromatic number of a graph*, Israel Journal of Mathematics, 9 (1971), pp. 396–402.
- [36] A. SÁNCHEZ-ARROYO, *Determining the total colouring number is NP-hard*, Discrete Math., 78 (1989), pp. 315–319.

- [37] G. SZEKERES, *Polyhedral decompositions of cubic graphs*, Bull. Austral. Math. Soc., 8 (1973), pp. 367–387.
- [38] J. L. SZWARCFITER, *Grafos e algoritmos computacionais*, Editora Campus, 1986.
- [39] P. G. TAIT, *Remarks on the colouring of maps*, Proc. Royal Soc. Edin., 10 (1878–80), p. 729.
- [40] L. VAUX, *Théorie des graphes: flots circulaires*, PhD thesis, Ecole Normale Supérieure de Lyon, 2002.
- [41] N. VIJAYADITYA, *On total chromatic number of a graph*, Journal of the London Mathematical Society, 3 (1971), pp. 405–408.
- [42] V. G. VIZING, *On an estimate of the chromatic class of a  $p$ -graph*, Metody Diskret. Analiz., 3 (1964), pp. 25–30.
- [43] J. J. WATKINS, *Snarks*, vol. 576, 1st China-USA International Conference Jinan, 1986, 1989, pp. 606–622.
- [44] J. J. WATKINS AND R. WILSON, *A survey of snarks*, Wiley Interscience, New York, 1991, pp. 1129–1144.
- [45] R. WILSON, *Graphs, colourings and the four-colour theorem*, Oxford University Press, USA, 2002.
- [46] WOLFRAM, *Snarks*. <http://mathworld.wolfram.com/Snark.html>, 2009.
- [47] H. P. YAP, *Total Colourings of Graphs*, vol. 1623, Springer, 1996.