



COPPE/UFRJ

DISTÂNCIAS EM GRAFOS GEOMÉTRICOS ALEATÓRIOS E SUAS
APLICAÇÕES AO PROBLEMA DA LOCALIZAÇÃO EM REDES DE
SENSORES

Rodrigo Simões Camara Leão

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Valmir Carneiro Barbosa

Rio de Janeiro
Julho de 2010

DISTÂNCIAS EM GRAFOS GEOMÉTRICOS ALEATÓRIOS E SUAS
APLICAÇÕES AO PROBLEMA DA LOCALIZAÇÃO EM REDES DE
SENSORES

Rodrigo Simões Camara Leão

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO
LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA
(COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO
PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO
GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E
COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof. Valmir Carneiro Barbosa, Ph.D.

Prof. Fábio Protti, D.Sc.

Prof. Felipe Maia Galvão França, Ph.D.

Prof. José Ferreira de Rezende, Dr.

Prof. Lúcia Maria de Assumpção Drummond, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
JULHO DE 2010

Leão, Rodrigo Simões Camara

Distâncias em Grafos Geométricos Aleatórios e suas Aplicações ao Problema da Localização em Redes de Sensores/Rodrigo Simões Camara Leão. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2010.

X, 65 p.: il.; 29,7cm.

Orientador: Valmir Carneiro Barbosa

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2010.

Referências Bibliográficas: p. 61 – 65.

1. Grafos geométricos aleatórios. 2. Redes de sensores. 3. Localização. I. Barbosa, Valmir Carneiro. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*À esposa mais amada e especial
do mundo, Jeane.
Aos frutos mais lindos deste
amor, Daniel e Mateus.*

Agradecimentos

Antes de tudo, agradeço a Deus, que me deu vida, e vida em abundância.

Todo este trabalho nem teria começado, muito menos terminado, sem a compreensão, o suporte, o apoio, o incentivo, os sacrifícios, a abdicção, o carinho, da minha amada esposa Jeane, que cuidou de tudo que eu não podia dar conta neste período para que eu pudesse me dedicar nestes estudos. Serei eternamente grato por tudo isso. E aos nossos filhos, Daniel e Mateus, ainda que não saibam ler hoje, também quero expressar minha profunda gratidão por terem sido compreensivos muito além do que se poderia esperar de crianças pequenas. A simples presença, carinho e sorriso de vocês três remove qualquer preocupação e me faz lembrar que tem coisas muito mais importantes que trabalho e estudo.

Ao grande amigo e orientador, Prof. Valmir Barbosa, agradeço pela sua constante confiança no sucesso de nossos trabalhos, sempre mais otimista do que eu, pelas idéias inspiradoras, pela paciência em procurar sempre entender o que tento expôr (nem sempre da forma mais clara e concisa), pela compreensão e disposição em aceitar minhas restrições como aluno de tempo parcial e pai de dois filhos. Enfim, por ter agregado tanto em minha formação neste período de estudos que fez tudo isso valer bem mais que um diploma.

Aos Profs. Fábio Protti, Felipe França, José Rezende e Lúcia Drummond, minha gratidão por aceitarem prontamente fazer parte da banca de defesa desta tese, agregando imenso valor a este trabalho.

Ao Banco Nacional de Desenvolvimento Econômico e Social (BNDES), do qual sou funcionário, em especial à Gerente da Área de TI, Flávia Tacques, agradeço pela flexibilização do horário de trabalho para que pudesse me dedicar ao doutorado. Pelo mesmo motivo, agradeço à Justiça Federal de Primeira Instância, na figura do seu Coordenador de Suporte de TI à época, Pergentino Neto, onde trabalhei no período inicial do curso.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

DISTÂNCIAS EM GRAFOS GEOMÉTRICOS ALEATÓRIOS E SUAS
APLICAÇÕES AO PROBLEMA DA LOCALIZAÇÃO EM REDES DE
SENSORES

Rodrigo Simões Camara Leão

Julho/2010

Orientador: Valmir Carneiro Barbosa

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Neste trabalho, estudamos a correlação entre a distância euclidiana e o número de arestas no menor caminho entre dois vértices quaisquer de um grafo geométrico aleatório. Estabelecemos para estes dois parâmetros, através de caracterizações analíticas quando possível, a distribuição de probabilidade associada a cada um deles condicionada a um valor fixo do outro. Validamos todas as predições analíticas através de simulações. Estendemos os resultados por meio de um estudo sobre as distâncias euclidianas de densidade de probabilidade condicional máxima, as quais possuem especial interesse. Como aplicação dos resultados obtidos neste contexto, utilizamos a base teórica estabelecida para abordar um problema clássico: a localização em redes de sensores sem fio. Aprimoramos um dos métodos de localização mais robustos e eficazes encontrados na literatura, o DV-hop. Demonstramos, apoiados em simulações, que nossa versão modificada do DV-hop é superior em acurácia, converge mais rápido para a solução, possui menor necessidade de comunicação e processamento local, sendo mais eficiente no consumo de energia.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

DISTANCES IN RANDOM GEOMETRIC GRAPHS AND THEIR
APPLICATIONS TO THE LOCALIZATION PROBLEM IN SENSOR
NETWORKS

Rodrigo Simões Camara Leão

July/2010

Advisor: Valmir Carneiro Barbosa

Department: Systems Engineering and Computer Science

In this work, we study the correlation between the Euclidean distance and the number of edges on a shortest path between any two vertices in a random geometric graph. For these two parameters, we establish, through analytical characterizations whenever possible, the probability distribution associated with each one of them, conditioned on a fixed value of the other. All analytical predictions are validated through simulations. We also extend our results by means of a study of the Euclidean distances of maximum conditional probability density, which are of special interest. As an application of the results obtained in this context, we profit from the established theoretical groundwork to approach a classic problem: the localization problem in wireless sensor networks. We improve on one of the most robust localization methods in the literature, the DV-hop. We demonstrate, supported by simulations, that our version of DV-hop achieves better accuracy, converges faster to solution, possesses reduced communication and local processing needs, and is more efficient in energy savings.

Sumário

Lista de Figuras	x
1 Introdução	1
1.1 Definições Básicas	3
1.2 Estrutura do Texto	4
2 Distâncias em Grafos Geométricos Aleatórios	6
2.1 Grafos Geométricos Aleatórios	6
2.2 Definição do Problema	7
2.3 Caso $d = 1$	9
2.4 Caso $d = 2$	10
2.5 Caso $d = 3$	11
2.5.1 Base exata	12
2.5.2 Extensão aproximada	21
2.6 Simulações	23
2.6.1 Modelagem do problema	23
2.6.2 Resultados	26
2.7 Estendendo os Resultados	31
2.7.1 Distâncias euclidianas de máxima densidade de probabilidade	31
2.7.2 Avanços na caracterização analítica do coeficiente angular	33
3 Localização em Redes de Sensores	37
3.1 Descrição do Problema	37
3.2 Taxonomia dos Métodos de Localização	40
3.2.1 Tecnologias de Medição	40
3.2.2 Dependência de Medição	41
3.2.3 Mobilidade	42
3.2.4 Organização Computacional	43
3.3 A Necessidade de uma Nova Abordagem	44

4	Uma Nova Abordagem	46
4.1	DV-hop	47
4.2	Aprimorando o DV-hop	49
4.3	Simulação	51
4.3.1	Modelagem do Problema	51
4.3.2	Resultados	54
5	Conclusão	58
	Referências Bibliográficas	61

Lista de Figuras

2.1	Ilustração para o caso $d = 1$	9
2.2	Ilustração para o caso $d = 2$	10
2.3	Regiões (sombreadas) cujas áreas representam o valor de σ_δ^k para $R < \delta \leq 2R$ (a) e $2R < \delta \leq 3R$ (b).	13
2.4	Regiões (sombreadas) onde o vértice k pode ser encontrado com probabilidade não-nula para $R < \delta \leq R\sqrt{3}$ (a), $R\sqrt{3} < \delta \leq 2R$ (b), e $2R < \delta \leq 3R$ (c).	15
2.5	Gráficos de $P_\delta(1)$ e $p_1(\delta)$	26
2.6	Gráficos de $P_\delta(2)$ e $p_2(\delta)$	27
2.7	Gráfico de $P'_\delta(3)$ (conforme Seção 2.5.1).	27
2.8	Gráficos de $P_\delta(3)$ e $p_3(\delta)$ sem a utilização de n' (a,b) e utilizando o n' obtido (c,d).	28
2.9	$P_\delta(d)$ (a) e $p_d(\delta)$ (b) para $d > 3$, com $z = 3\pi$	29
2.10	$P_\delta(d)$ (a) e $p_d(\delta)$ (b) para $d > 3$, com $z = 5\pi$	30
2.11	$\delta_{\max}(d)$ para $d > 3$, com $z = c\pi$, $2 \leq c \leq 8$	32
2.12	γ em função de R para $z = c\pi$, $c \in \{2, 3, \dots, 8\}$	33
2.13	Região (mostrada em cinza-claro) usada para aproximar o valor de γ através do δ que maximiza a área da região.	34
2.14	$f(\delta)$ para $z = c\pi$, $2 \leq c \leq 8$	36
3.1	Exemplo de rede com mais de uma realização.	39
3.2	Exemplo de triangulação.	40
4.1	Exemplo de aplicação do método DV-hop.	49
4.2	Erros de estimativa dos algoritmos DV-hop original e modificado, para $z = 3\pi$ e $z = 5\pi$, com $w = 0,01$ (a), $w = 0,025$ (b), $w = 0,05$ (c), $w = 0,075$ (d) e $w = 0,1$ (e).	56

Capítulo 1

Introdução

As redes de sensores sem fio têm atraído interesse cada vez maior nos últimos anos. O desenvolvimento a passos largos da indústria de microeletrônicos e das telecomunicações impulsiona a utilização dessas redes em cenários antes imaginados apenas como ficção científica. Inúmeras aplicações desse tipo de rede já são uma realidade hoje, desde o emprego militar (vigilância de campo de batalha, rastreamento de inimigo, etc.) à utilização em meteorologia (monitoramento de condições climáticas), biologia (observação de habitat), sismologia (detecção de abalos), manutenção predial (detecção de incêndios), medicina, logística, agricultura, dentre muitas outras [1].

Para grande parte das aplicações de redes de sensores, a informação medida pelo sensor só torna-se útil se associada à localização do mesmo. A localização dos sensores na rede também pode ser necessária para prover serviços mais básicos de rede, como o roteamento geográfico de mensagens [2]. Contudo, o problema da localização em redes de sensores se torna um desafio na medida em que os sensores possuem fortes restrições de tamanho físico, consumo de energia, capacidade de processamento, disponibilidade de memória e custo.

Existem hoje diversos métodos de localização já desenvolvidos. Todos eles sofrem de falta de acurácia em algum nível ou apresentam resultados satisfatórios apenas para determinadas topologias de rede. Este contexto motivou nosso estudo do problema da localização em redes de sensores, visando contribuir com um método robusto que possuísse boa acurácia e menor sensibilidade a erros de medição de distância entre sensores.

Por outro lado, redes de sensores são naturalmente modeladas através de grafos geométricos aleatórios (GGAs), cujos vértices representam os sensores e a adjacência é definida pelo alcance do raio de comunicação dos sensores. A forte relação entre estes conceitos, pouco explorada, despertou nosso interesse

em aprofundar o estudo das características desta classe de grafos, suscitando resultados que por si só já contribuem para o melhor entendimento destes grafos e suas propriedades.

Se considerarmos um GGA cujos vértices são numerosos e estão posicionados uniformemente no espaço unitário, a distância (euclidiana) média entre dois vértices quaisquer desse grafo é constante para determinado número de dimensões (independe do raio, grau médio, etc). Já existem vários estudos sobre este valor [3]. No espaço unidimensional, este valor corresponde à distância média entre dois pontos aleatórios no segmento de reta de comprimento 1, que é $1/3$. Em duas dimensões (dois pontos no quadrado unitário), esta média é $0,521\dots$; em três dimensões (dois pontos no cubo unitário), esta média é $0,661\dots$, e assim por diante.

Logo, a análise relacionada a distâncias entre dois vértices quaisquer deve necessariamente ser atrelada a outro parâmetro envolvendo o mesmo par de vértices. A candidata natural para este papel é a distância em arestas no menor caminho entre os dois vértices. Estudaremos, mais especificamente, as relações entre vértices aleatoriamente dispostos em um círculo de área unitária.

Portanto, este trabalho visa o estudo de dois problemas independentes:

- (i) relação entre as distâncias em GGAs; e
- (ii) localização em redes de sensores.

Apesar da independência entre ambos, o resultado obtido para o primeiro problema servirá de insumo para a nossa abordagem do segundo.

Claramente, há uma escassez de estudos teóricos na literatura para suportar resultados mais fortes para o problema da localização. A partir da perspectiva grafo-teórica da nossa abordagem, construímos uma base mais sólida para a obtenção de algoritmos de localização mais eficientes, em termos de suas complexidades de tempo e mensagens, e com maior acurácia.

Como aplicação deste novo entendimento sobre a relação entre as distâncias em GGAs, empregaremos este conhecimento em um dos mais bem-sucedidos métodos de localização conhecidos, denominado APS (Ad Hoc Positioning System). Em especial, alteraremos o seu principal método de propagação, chamado DV-hop (a ser detalhado no Capítulo 3), comparando os resultados obtidos pela versão original com aqueles alcançados através das alterações propostas (a serem exibidos no Capítulo 4).

Este trabalho inclui ainda uma investigação sobre algumas direções promissoras na obtenção de caracterizações analíticas adicionais relacionadas às

distâncias em GGAs que poderiam futuramente fornecer algoritmos ainda mais eficientes.

A seguir, descreveremos as definições básicas necessárias para melhor compreensão do texto.

1.1 Definições Básicas

Um *sensor* é qualquer unidade autônoma de processamento que efetua medidas no ambiente, utiliza comunicação sem fio (em geral, via sinais de rádio) e possui uma série de limitações, a saber:

- (i) baixo poder de processamento;
- (ii) pouca memória;
- (iii) energia limitada;
- (iv) tamanho reduzido;
- (v) baixo custo (para utilização em larga escala).

Em geral, considera-se alguns sensores especiais, denominados *âncoras*, os quais possuem conhecimento da sua própria localização, seja por utilização de algum dispositivo especial (por exemplo, GPS) ou por pré-configuração manual da sua posição. Estes sensores atuam como ponto de referência na localização dos demais sensores da rede. A possibilidade de utilização de mecanismos especiais nas âncoras, faz com que haja para elas uma tolerância em relação às restrições assumidas para os demais sensores e, por isso, é desejável que uma rede possua o menor número possível de âncoras.

Definimos uma *rede de sensores* por um conjunto de sensores idênticos (a menos das âncoras) sem nenhuma infraestrutura adicional (*ad hoc*) e onde cada sensor é capaz de comunicar-se com todos os demais (rede conexas), seja diretamente, quando um sensor está dentro do raio de comunicação do outro; ou indiretamente, por meio do repasse de informações através da rede. As redes de sensores podem ser caracterizadas pelo número de sensores participantes, pelo raio de comunicação dos sensores e pelo tamanho da área geográfica coberta pela rede. Algumas características físicas, tanto dos sensores quanto do ambiente no qual eles estão, podem influenciar diretamente na comunicação entre os sensores e devem ser consideradas, como a presença de obstáculos

(paredes, árvores, etc), a uniformidade do raio de comunicação e a mobilidade dos sensores.

Um *grafo geométrico aleatório* (GGA) k -dimensional é um grafo onde, para cada um dos n vértices, são associadas coordenadas geométricas aleatórias em \mathbb{R}^k e um vértice é adjacente a outro caso esteja à distância menor que R do outro. Apesar da maior parte dos trabalhos na literatura considerar os vértices em $[0, 1]^2$, que representa um quadrado de área unitária, neste trabalho consideraremos as coordenadas contidas em um círculo de área unitária para evitar as distorções produzidas pelas bordas.

Sejam $p = (p_1, p_2, \dots, p_k)$ e $q = (q_1, q_2, \dots, q_k)$ vértices de um GGA k -dimensional. Chamamos de *distância em arestas* entre p e q , denotando por d_{pq} , o número de arestas no menor caminho entre estes vértices, e de *distância euclidiana* entre p e q , denotando por δ_{pq} , a medida geométrica da distância entre os pontos associados a p e q , cujo valor é dado pela seguinte fórmula:

$$\delta_{pq} = \sqrt{\sum_{i=1}^k (p_i - q_i)^2}.$$

Os mesmos conceitos de distâncias (euclidiana e em arestas) serão empregados com o mesmo significado no contexto de redes de sensores, sempre se referindo ao grafo subjacente à rede.

Para as definições elementares não explícitas no texto, deixamos as seguintes referências: em probabilidade e estatística [4], em teoria dos grafos [5], em grafos geométricos aleatórios [6], em geometria [7].

1.2 Estrutura do Texto

Os demais capítulos deste trabalho estão organizados conforme segue.

No Capítulo 2 será descrito o problema da relação entre a distância em arestas e a distância euclidiana entre dois vértices quaisquer de um GGA. Para os casos de distâncias em arestas mais baixas, serão apresentados resultados analíticos e semi-analíticos (no caso de distância em arestas igual a 3) para os cálculos das distribuições das probabilidades envolvidas em cada caso. O problema será, então, modelado e as predições analíticas serão contrastadas graficamente com os dados obtidos através de extensivas simulações mostrando o comportamento das distribuições para os casos de distâncias em arestas maiores. Adicionalmente, serão fornecidos novos resultados sobre a caracterização das distâncias euclidianas de densidade de probabilidade condicional máxima.

No Capítulo 3 será apresentado o problema da localização em redes de sensores. Será fornecida uma visão geral dos métodos de localização existentes através de uma taxonomia envolvendo diversos aspectos do problema e suas soluções atuais na literatura.

No Capítulo 4 será proposta uma nova abordagem para o problema da localização que envolve o embasamento teórico a ser apresentado no Capítulo 2. O método de localização conhecido como DV-hop será descrito, analisado e aprimorado com base no conhecimento adquirido sobre distâncias em GGAs. Serão apresentados e discutidos os resultados de simulações visando comparar as acurácias do método original com a nossa versão modificada.

No Capítulo 5 serão expostas as conclusões deste trabalho, evidenciando os resultados obtidos e as direções futuras de pesquisa que se abrem com eles.

Capítulo 2

Distâncias em Grafos Geométricos Aleatórios

Neste capítulo estudaremos a correlação da distância euclidiana com a distância em arestas entre dois vértices quaisquer de um grafo geométrico aleatório (GGA). Analisaremos, em especial, os casos com distância em arestas até 3, para os quais serão apresentadas formas analíticas ou semi-analíticas (no caso de distância em arestas igual a 3) de cálculo dessa correlação e os resultados serão confrontados com simulações. Para os casos onde a distância em arestas é maior que 3, mostraremos e discutiremos os resultados das simulações.

Inicialmente, apresentaremos um breve histórico e a motivação para o estudo dos GGAs para, em seguida, definirmos de forma precisa o problema considerado e as notações utilizadas (Seção 2.2). Serão, então, apresentadas soluções para os diferentes casos de distância em arestas, contendo resultados analíticos (Seções 2.3 e 2.4), semi-analíticos (Seção 2.5) e as respectivas simulações (Seção 2.6). Ao final, estenderemos os resultados obtidos para estreitar nosso foco nas distâncias euclidianas de máxima densidade de probabilidade (Seção 2.7.1).

2.1 Grafos Geométricos Aleatórios

Diversas aplicações e problemas têm em comum a propriedade de que cada elemento ou indivíduo só interage com seus pares mais próximos, onde a proximidade pode ser medida e compreendida de diversas formas conforme o cenário. A contaminação por doenças, a interação entre animais de uma região, a similaridade entre diferentes espécies, a comunicação entre os neurônios do cérebro, são apenas alguns exemplos de cenários. Nestes contextos, o modelo de

grafos aleatórios tradicional, desenvolvido por Erdős e Rényi [8], no qual cada ligação (aresta) entre dois elementos (vértices) é independente das demais, não se mostra adequado.

Foi exatamente para preencher esta lacuna que surgiram os GGAs, nos quais as adjacências dependem exclusivamente da localização espacial dos vértices. Para exemplificar a diferença entre o comportamento dos dois modelos, considere três vértices v_a , v_b e v_c . No modelo tradicional de Erdős-Rényi, a informação de que v_a e v_b são adjacentes e que v_b e v_c também o são, não altera a probabilidade de v_a e v_c serem adjacentes, uma vez que as arestas neste modelo são completamente independentes entre si. Já em um GGA, esta mesma informação inicial aumenta consideravelmente a chance de haver aresta entre v_a e v_c . Apesar de o modelo tradicional de Erdős-Rényi possuir inúmeros resultados e propriedades largamente conhecidas, a dificuldade em lidar com as interdependências das arestas nos GGAs tende a tornar as analogias com o modelo tradicional bastante complexas ou mesmo inviáveis. As provas de resultados a respeito do modelo tradicional tendem a usar métodos combinatórios, ao passo que no contexto dos GGAs as provas geralmente envolvem uma mistura de geometria estocástica e combinatória.

Resultados na literatura sobre GGAs incluem estudos sobre conectividade e transições de fase [9–12], aplicações em teoria da percolação¹ [13] e redes de comunicação sem fio [14, 15]. Os GGAs também podem ser percebidos como uma versão aleatória dos grafos de disco unitário [16].

2.2 Definição do Problema

Seja G um GGA bidimensional formado por n vértices de raio R uniformemente distribuídos sobre um círculo de área unitária. Sejam, ainda, i e j um par de vértices distintos de G escolhidos aleatoriamente. Para o inteiro $d > 0$ e o número real $\delta \geq 0$, usamos $P_\delta(d)$ para denotar a probabilidade de $d_{ij} = d$, condicionada a $\delta_{ij} = \delta$. De forma análoga, usamos $p_d(\delta)$ para denotar a densidade de probabilidade associada a $\delta_{ij} = \delta$, condicionada a $d_{ij} = d$.

Estas duas funções de probabilidade se relacionam na forma natural de combinação entre variáveis aleatórias discretas e contínuas [4]. Note que a variável que representa distância em arestas possui distribuição discreta, en-

¹Estudo do movimento de penetração de um fluxo líquido através de determinado material poroso.

quanto a variável que representa distância euclidiana possui distribuição contínua. Este fato se reflete em nossa diferenciação na notação das funções.

É importante observar que as funções $P_\delta(d)$ e $p_d(\delta)$ possuem uma relação intrínseca pela qual podemos obter uma da outra se assumimos que a primeira é conhecida para todos os valores aplicáveis de d e δ . Esta relação é definida através da *Regra de Bayes* como

$$p_d(\delta) = \frac{P_\delta(d) p(\delta)}{P(d)}, \quad (2.1)$$

onde $p(\delta) > 0$ é a densidade de probabilidade incondicional associada à ocorrência de uma distância euclidiana δ separando dois vértices escolhidos aleatoriamente e $P(d) > 0$ é a probabilidade incondicional da distância em arestas entre eles ser igual a d . Pelo *Teorema da Probabilidade Total*, podemos substituir o denominador por

$$P(d) = \int_{r=0}^{dR} P_r(d) p(r) dr, \quad (2.2)$$

uma vez que $P_r(d) = 0$ para $r > dR$. Sabemos, ainda, que $p(r)$ é dada pela circunferência de raio r :

$$p(r) = 2\pi r. \quad (2.3)$$

Substituindo as Equações (2.2) e (2.3) na Equação (2.1), chegamos à forma final:

$$\begin{aligned} p_d(\delta) &= \frac{P_\delta(d) 2\pi\delta}{\int_{r=0}^{dR} P_r(d) 2\pi r dr} \\ &= \frac{P_\delta(d) \delta}{\int_{r=0}^{dR} P_r(d) r dr}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

É evidente que a Regra de Bayes se aplica nos dois sentidos, ou seja, podemos obter $P_\delta(d)$ a partir de $p_d(\delta)$ e vice-versa. Entretanto, o cálculo de $P_\delta(d)$ se mostrou mais direto do que o de $p_d(\delta)$, razão pela qual utilizaremos a Regra de Bayes sempre na forma descrita na Equação (2.4).

Com essa relação estabelecida, nossa abordagem daqui em diante se concentrará no cálculo de $P_\delta(d)$ para todos os valores pertinentes de d e δ , utilizando a Equação (2.4) para obter $p_d(\delta)$. Para calcular $P_\delta(d)$, fixamos dois vértices a e b tais que $\delta_{ab} = \delta$ e analisamos a relação entre os dois círculos de raio R (um com centro em a e o outro em b). Vale ressaltar que, como o grafo G está definido sobre um círculo unitário, a área de qualquer região deste círculo

automaticamente nos dá a probabilidade de um vértice ao acaso estar nessa região. Também assumimos que todos os efeitos introduzidos pelas bordas do círculo podem ser ignorados de forma segura (a configuração computacional que justifica este fato está descrita na Seção 2.6.1).

A seguir, serão exibidas as soluções analíticas para os casos onde $d \leq 3$.

2.3 Caso $d = 1$

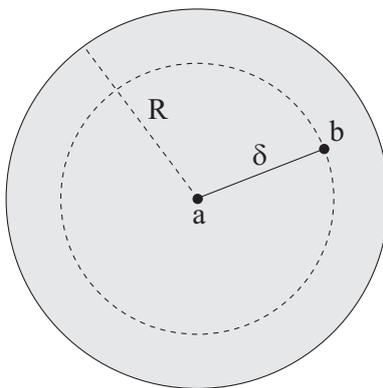


Figura 2.1: Ilustração para o caso $d = 1$.

No caso trivial, onde $d = 1$, representado na Figura 2.1, o valor de $P_\delta(d)$ corresponde à probabilidade de a ser adjacente a b , estando separados um do outro por uma distância euclidiana igual a δ . Pela definição de GGA, b é adjacente a a quando $\delta \leq R$, situação ilustrada na figura pelo posicionamento de b dentro da região sombreada (que, neste caso, coincide com o círculo com centro em a e raio R). Logo, temos:

$$P_\delta(1) = \begin{cases} 1, & \text{se } \delta \leq R; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.5)$$

No caso da inversão da condicional, $p_d(\delta)$ corresponde à probabilidade de um vértice b , adjacente a a , estar à distância euclidiana δ de a . Pela definição de GGA, b só é adjacente a a caso $\delta \leq R$. Logo, para $\delta > R$, temos $p_d(\delta) = 0$. E quando $\delta \leq R$, o valor de $p_d(\delta)$ é proporcional à circunferência de raio δ (que representa os pontos a esta distância de a) sobre a área da circunferência de raio R (que representa o universo de possibilidades para um vértice ser

adjacente a a). Assim, temos:

$$p_1(\delta) = \begin{cases} \frac{2\pi\delta}{\pi R^2} = \frac{2\delta}{R^2}, & \text{se } \delta \leq R; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.6)$$

Note que utilizando as Equações (2.4) e (2.5), para $\delta \leq R$, chegamos ao mesmo resultado:

$$p_1(\delta) = \frac{P_\delta(1) \delta}{\int_{r=0}^R P_r(1) r dr} = \frac{\delta}{\int_{r=0}^R r dr} = \frac{2\delta}{R^2}. \quad (2.7)$$

2.4 Caso $d = 2$

Sabemos que a probabilidade de um vértice qualquer, digamos c , ser adjacente a outros dois vértices, digamos a e b , é igual à área de interseção entre os círculos de raio R com centros em a e b , conforme ilustrado na Figura 2.2. Na figura, a região sombreada representa a área onde c deve estar localizado. Denotaremos por ρ_δ a área de interseção entre dois círculos de raio R cujos centros estão à distância δ entre si, a qual pode ser calculada pela seguinte fórmula [7]:

$$\rho_\delta = \begin{cases} 2R^2 \cos^{-1}(\delta/2R) - \delta\sqrt{R^2 - \delta^2/4}, & \text{se } \delta \leq 2R; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.8)$$

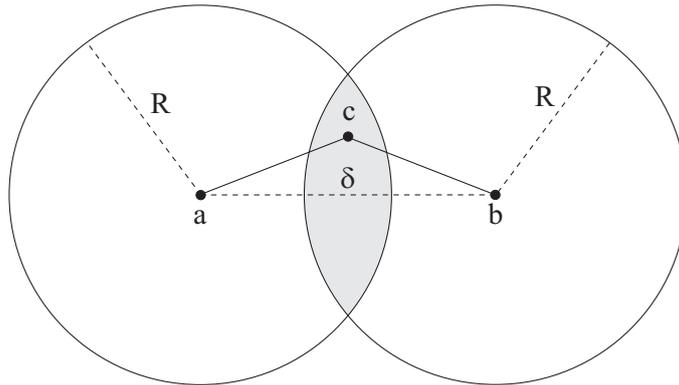


Figura 2.2: Ilustração para o caso $d = 2$.

Obviamente, para que dois vértices estejam à distância em arestas igual a 2, eles não podem ser adjacentes, o que impõe a restrição $\delta > R$. Seja X a variável aleatória que representa o número de vértices adjacentes a a e b

simultaneamente, dado $\delta > R$. Assim, temos:

$$P_\delta(2) = \begin{cases} P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0), & \text{se } \delta > R; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.9)$$

Podemos dizer que o valor de X é determinado pelo número de sucessos (ocorrência de vértices dentro da área de interesse) em uma sequência de $n - 2$ experimentos independentes (escolha das coordenadas de cada vértice de G , com exceção de a e b), onde a probabilidade de cada sucesso é ρ_δ . Logo, X possui distribuição binomial, a qual pode ser expressa conforme segue.

$$P(X = x) = \binom{n-2}{x} \rho_\delta^x (1 - \rho_\delta)^{n-2-x} \quad (2.10)$$

O caso onde não há vértices na área de interseção é dado por:

$$P(X = 0) = (1 - \rho_\delta)^{n-2}. \quad (2.11)$$

De (2.9), temos:

$$P_\delta(2) = \begin{cases} 1 - (1 - \rho_\delta)^{n-2}, & \text{se } \delta > R; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.12)$$

Aplicando a Regra de Bayes (Equação (2.4)) podemos agora inverter a condicional, para o caso onde $\delta > R$:

$$p_2(\delta) = \frac{(1 - (1 - \rho_\delta)^{n-2}) \delta}{\int_{r=R}^{2R} (1 - (1 - \rho_r)^{n-2}) r \, dr}. \quad (2.13)$$

2.5 Caso $d = 3$

O caso onde $d = 3$ se mostra bem mais complexo do que os anteriores. Podemos observar que, neste caso, $d_{ab} = d$, dado $\delta_{ab} = \delta$, se e somente se as três condições abaixo são satisfeitas:

- C1.** $\delta > R$.
- C2.** Não existe nenhum vértice i tal que $\delta_{ai} \leq R$ e $\delta_{bi} \leq R$.
- C3.** Existe ao menos um vértice $k \notin \{a, b\}$, e para k ao menos um vértice $\ell \notin \{a, b, k\}$, tal que $\delta_{ak} \leq R$, $\delta_{k\ell} \leq R$, $\delta_{b\ell} \leq R$, $\delta_{a\ell} > R$ e, ainda, $\delta_{bk} > R$.

Para cada k e ℓ fixos da Condição C3, as três condições descritas são derivadas do requisito que os vértices a , k , ℓ e b , nesta ordem, constituam um menor caminho entre a e b . Neste sentido, a Condição C1 garante que $d > 1$, a Condição C2 assegura que $d > 2$ e a Condição C3 estabelece que $d \leq 3$.

A fim de avançarmos detalhando cada passo, dividimos o cálculo de $P_\delta(3)$ em duas fases. Na primeira fase (Seção 2.5.1), é analisada uma versão simplificada do problema, onde estudamos a probabilidade de um vértice k aleatoriamente escolhido satisfazer a Condição C3. Na segunda fase (Seção 2.5.2), ampliamos este resultado a fim de encontrarmos $P_\delta(3)$ a partir do estudo da fase anterior adicionado das demais restrições elencadas. Vale ressaltar que a primeira fase é totalmente analítica, por isso compõe o que chamamos de *base exata*, enquanto a segunda fase traz elementos empíricos obtidos via simulação, sendo por isso denominada *extensão aproximada*.

2.5.1 Base exata

Se fixarmos um vértice $k \notin \{a, b\}$ para o qual $\delta_{ak} \leq R$ e $\delta_{bk} \geq R$, a probabilidade de a Condição C3 ser satisfeita por k e um ℓ aleatoriamente escolhido é uma função da área de interseção de círculos que varia conforme o caso, dependendo do valor de δ . Há dois casos a serem considerados, como indicado na Figura 2.3.

No primeiro caso, ilustrado na parte (a) da Figura 2.3, temos $R < \delta \leq 2R$ e o vértice ℓ deve ser encontrado na interseção dos círculos de raio R e centros em b e k . No entanto, pela Condição C3, $\delta_{a\ell} > R$ e, portanto, ℓ não pode estar contido no outro círculo de raio R e centro em a . A área de interseção desejada resulta, assim, do cálculo da área de interseção de dois círculos (aqueles com centros em b e k) e subtraindo deste valor a área de interseção entre três círculos (aqueles com centros em a , b e k). A primeira dessas áreas de interseção é dada pela Equação 2.8, com δ_{bk} substituindo δ ; para a segunda área de interseção podemos utilizar o resultado descrito em [17], onde é apresentada uma forma fechada para este cálculo. É importante observar que as expressões para a área de interseção de três círculos só foram publicadas recentemente; sem elas, cremos que a presente análise não seria possível.

O segundo caso, demonstrado na parte (b) da Figura 2.3, é aquele onde $2R < \delta \leq 3R$, e a área de interseção de interesse torna-se simplesmente a dos círculos com centros em b e k , que, conforme já comentado anteriormente, pode ser obtida da Equação 2.8.

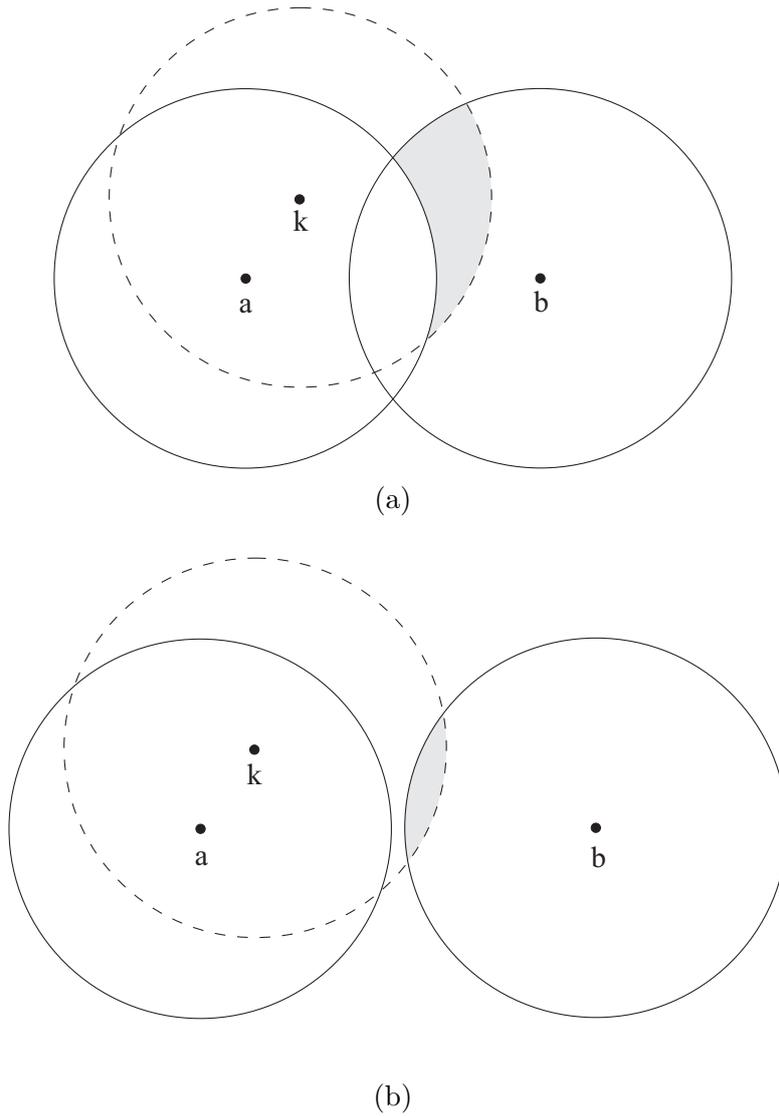


Figura 2.3: Regiões (sombreadas) cujas áreas representam o valor de σ_δ^k para $R < \delta \leq 2R$ (a) e $2R < \delta \leq 3R$ (b).

Em ambos os casos, usamos σ_δ^k para denotar a área resultante. Assim, novamente pela distribuição binomial, a probabilidade de que exista ao menos um ℓ para k fixo é $1 - (1 - \sigma_\delta^k)^{n-3}$.

Prosseguindo nossa análise, devemos ainda descondicionar da posição fixa de k . Seja $P'_\delta(3)$ a probabilidade de um k escolhido aleatoriamente satisfazer a Condição C3 e seja K_δ a região dentro da qual tal vértice pode ser encontrado com probabilidade não-nula. Se x_k e y_k são as coordenadas cartesianas do vértice k , então cada posição possível para k dentro de K_δ contribui para

$P'_\delta(3)$ com a probabilidade infinitesimal $[1 - (1 - \sigma_\delta^k)^{n-3}] dx_k dy_k$. Segue que:

$$P'_\delta(3) = \int_{k \in K_\delta} [1 - (1 - \sigma_\delta^k)^{n-3}] dx_k dy_k. \quad (2.14)$$

A região de interesse K_δ possui limites bem definidos e, portanto, a integral da Equação 2.14 pode ser calculada de forma exata. Há três possibilidades para esta região, apresentadas nas partes (a), (b) e (c) da Figura 2.4 como regiões sombreadas, respectivamente para $R < \delta \leq R\sqrt{3}$, $R\sqrt{3} < \delta \leq 2R$ e $2R < \delta \leq 3R$.

A Figura 2.4 também nos ajuda a obter uma versão mais operacional da expressão para $P'_\delta(3)$, a ser utilizada na Seção 2.6.2. Para tal, estabelecemos um sistema de coordenadas cartesianas cuja origem está posicionada no vértice a , fazendo o eixo das abscissas positivas passar por b . Neste sistema, as regiões sombreadas das partes (a), (b) e (c) da figura são simétricas com relação ao eixo das abscissas. Assim, podemos considerar, para efeito de cálculo, apenas a metade superior das regiões sombreadas e dobrar o seu valor. Se para cada valor de x_k denotarmos por $y_k^-(x_k)$ e $y_k^+(x_k)$ os valores mínimo e máximo, respectivamente, de y_k na metade superior da região sombreada para o valor de δ em questão, então

$$P'_\delta(3) = 2 \int_{x_k=x_k^-}^{x_k^+} \int_{y_k=y_k^-(x_k)}^{y_k^+(x_k)} [1 - (1 - \sigma_\delta^k)^{n-3}] dx_k dy_k, \quad (2.15)$$

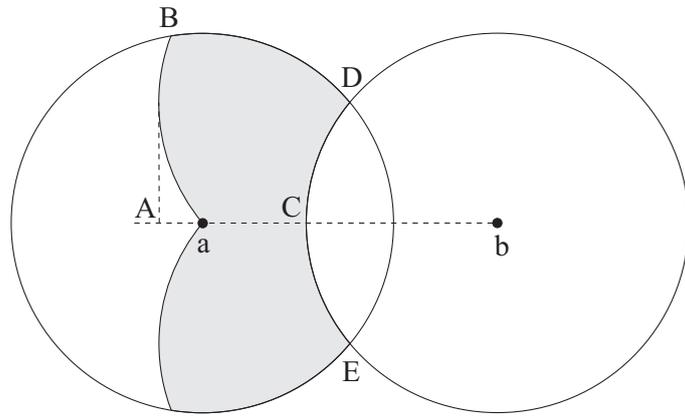
onde x_k^- e x_k^+ limitam os possíveis valores de x_k para o δ dado. Os pontos $A = (x_A, 0)$, $B = (x_B, y_B)$, $C = (x_C, 0)$ e $D = (x_D, y_D)$, exibidos na figura, demarcam as regiões onde o comportamento de y_k varia.

A seguir, dividiremos a análise aprofundada dos limites de K_δ e seus valores nos três casos aplicáveis para δ , sumarizando os resultados ao final na Tabela 2.1.

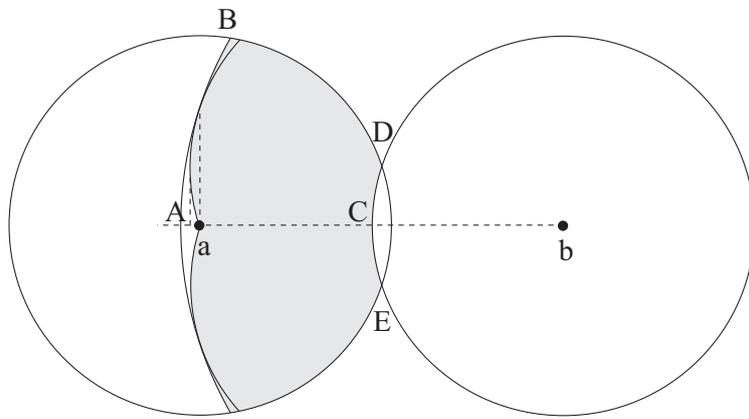
i) Caso $R < \delta \leq R\sqrt{3}$

Neste caso, representado pela parte (a) da Figura 2.4, há interseção entre os círculos de raio R com centros em a e b , e não pode haver k que satisfaça a Condição C3 nesta região. Portanto, devemos desconsiderar esta interseção na região possível para k , como ilustrado na figura, onde a região considerada está sombreada.

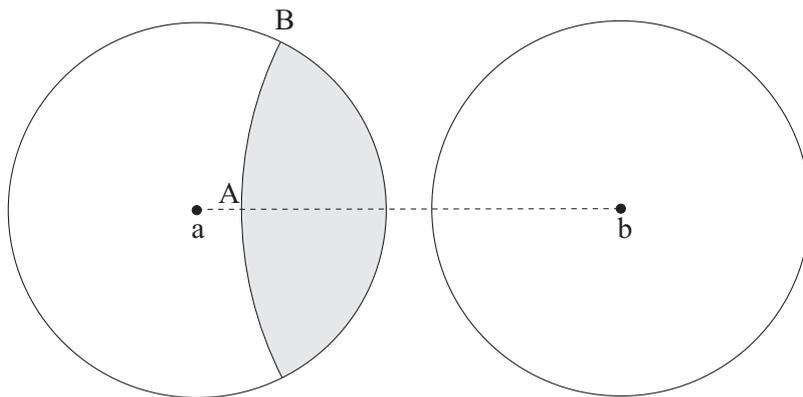
Repare que, neste caso, a borda esquerda da região considerada é limitada pelos círculos de raio R e centros nos pontos D e E . Isto se deve à restrição



(a)



(b)



(c)

Figura 2.4: Regiões (sombreadas) onde o vértice k pode ser encontrado com probabilidade não-nula para $R < \delta \leq R\sqrt{3}$ (a), $R\sqrt{3} < \delta \leq 2R$ (b), e $2R < \delta \leq 3R$ (c).

de que não pode haver ℓ satisfazendo a Condição C3 (em especial, $\delta_{al} > R$) dentro do círculo de raio R e centro em a . Assim, nenhum k que satisfaça a Condição C3 pode estar à distância maior que R do menor arco definido pela circunferência de raio R e centro em a e pelos pontos D e E . Conforme já mencionado, podemos calcular a metade superior da região (onde $y_k \geq 0$) e dobrar o resultado para chegar à área total.

Para $x_A \leq x_k < x_B$, os limites inferior $y_k^-(x_k)$ e superior $y_k^+(x_k)$ de y_k são ambos definidos pela equação do círculo de raio R e centro em D . Quando temos $x_B \leq x_k < 0$, $y_k^-(x_k)$ continua sendo definido pelo círculo de raio R e centro em D , enquanto $y_k^+(x_k)$ passa a ser definido pela equação do círculo de raio R e centro em a . Na região onde $0 \leq x_k < x_C$, $y_k^-(x_k) = 0$ e $y_k^+(x_k)$ continua sendo definido pela equação do círculo com centro em a . E, finalmente, para $x_C \leq x_k \leq x_D$, $y_k^-(x_k)$ é dado pelo círculo de raio R e centro em b , enquanto $y_k^+(x_k)$ permanece definido pelo círculo com centro em a .

ii) Caso $R\sqrt{3} < \delta \leq 2R$

Quando δ cresce além de $R\sqrt{3}$ —e, no ponto de transição entre os casos, o ponto D torna-se colinear com o ponto B e o vértice b —migramos para a parte (b) da Figura 2.4, onde a região sombreada é, desta vez, delimitada à esquerda pelos círculos de raio R e centros em D e E ou pelo círculo de raio $2R$ com centro em b , dependendo do ponto de tangente comum entre cada um destes círculos de raio R e o círculo de raio $2R$. Observe que a projeção de qualquer dos pontos de tangente comum na reta que passa por a e b se dá exatamente sobre a .

Neste caso, a primeira região de x_k considerada deve ser $x_A \leq x_k < 0$, onde $y_k^-(x_k)$ e $y_k^+(x_k)$ são ambos definidos pela equação do círculo de raio R e centro em D . A segunda região é $0 \leq x_k < x_B$, onde $y_k^-(x_k) = 0$ e $y_k^+(x_k)$ é definido pela equação do círculo de raio $2R$ e centro em b . Na terceira região, onde $x_B \leq x_k < x_C$, $y_k^-(x_k) = 0$ e $y_k^+(x_k)$ é dado pela equação do círculo de raio R e centro em a . A região onde $x_C \leq x_k \leq x_D$ tem $y_k^-(x_k)$ definido pela equação do círculo de raio R e centro em b , enquanto $y_k^+(x_k)$ permanece definido pela equação do círculo de raio R e centro em a .

iii) Caso $2R < \delta \leq 3R$

O próximo estágio conduz δ além de $2R$, conforme ilustrado na parte (c) da Figura 2.4. Sabemos que k deve ser adjacente a a , não adjacente a b e estar à distância máxima $2R$ de b ($\delta_{bk} \leq 2R$). Como, neste caso, $\delta > 2R$, então a e b

não possuem interseção naturalmente. Para que k seja adjacente a a , ele deve estar dentro do círculo de a . E, para que k esteja à distância máxima $2R$ de b , k deve estar dentro do círculo de raio $2R$ e centro em b . Portanto, a região possível para k , neste caso, é a interseção entre o círculo de raio R e centro em a e o círculo de raio $2R$ e centro em b .

Neste caso, para $x_A \leq x_k < x_B$, $y_k^+(x_k)$ é dado pela equação do círculo de raio $2R$ e centro em b . E, para $x_B \leq x_k \leq R$, $y_k^+(x_k)$ é dado pela equação do círculo de raio R e centro em a . Em ambos os casos, podemos considerar $y_k^-(x_k) = 0$.

Uma vez definidos os limites da região K_δ , necessitamos, para estabelecermos suas expressões, das equações dos círculos mencionados na análise anterior, as quais compõem o sumário de expressões exibido na Tabela 2.1. Estas equações, conforme já discutido, fazem referência às coordenadas dos pontos A , B , C e D que, por sua vez, também necessitam ser definidas analiticamente, refletindo nos resultados da Tabela 2.2. A seguir, analisamos cada uma das equações referenciadas anteriormente.

Quando dizemos que o limite superior de y_k é dado pelo círculo de raio R e centro em a , isto implica que:

$$\begin{aligned} x_k^2 + y_k^2 &\leq R^2 \\ y_k &\leq \sqrt{R^2 - x_k^2}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

E, no caso de o limite inferior de y_k ser definido pela equação do círculo de raio R e centro em b , temos:

$$\begin{aligned} (x_k - \delta)^2 + y_k^2 &\geq R^2 \\ y_k &\geq \sqrt{R^2 - (x_k - \delta)^2}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Se o limite superior de y_k é definido pela equação do círculo de raio $2R$ e centro em b , temos:

$$\begin{aligned} (x_k - \delta)^2 + y_k^2 &\leq (2R)^2 \\ y_k &\leq \sqrt{4R^2 - (x_k - \delta)^2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Para o cálculo da equação do círculo de raio R e centro em D , necessitamos ainda encontrar as coordenadas x_D e y_D . Ressaltamos que o ponto D só é

definido para os casos onde $\delta \leq 2R$. É fácil verificar que:

$$x_D = \delta/2. \quad (2.19)$$

E para encontrarmos y_D podemos utilizar o triângulo retângulo formado por a , D e o ponto $(\delta/2, 0)$. Daí, concluímos que:

$$\begin{aligned} R^2 &= (\delta/2)^2 + y_D^2 \\ y_D &= \frac{\sqrt{4R^2 - \delta^2}}{2}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Podemos, então, definir a equação do círculo de raio R e centro em D por:

$$\begin{aligned} (x_k - x_D)^2 + (y_k - y_D)^2 &= R^2 \\ y_k^2 - 2y_D y_k + y_D^2 + (x_k - x_D)^2 - R^2 &= 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Como esta equação possui duas soluções (raízes) e é utilizada para definir tanto o limite inferior quanto superior de y_k , a menor raiz desta equação representará o valor mínimo de y_k , ou seja, $y_k^-(x_k)$, enquanto a maior será o valor máximo de y_k , ou seja, $y_k^+(x_k)$.

$$\begin{aligned} y_k &= \frac{2y_D \pm \sqrt{4y_D^2 - 4[y_D^2 + (x_k - x_D)^2 - R^2]}}{2} \\ &= y_D \pm \sqrt{[R^2 - (x_k - x_D)^2]} \\ &= \frac{\sqrt{4R^2 - \delta^2}}{2} \pm \sqrt{[R^2 - (x_k - \delta/2)^2]} \end{aligned}$$

$$y_k^-(x_k) = \frac{\sqrt{4R^2 - \delta^2}}{2} - \sqrt{[R^2 - (x_k - \delta/2)^2]} \quad (2.22)$$

$$y_k^+(x_k) = \frac{\sqrt{4R^2 - \delta^2}}{2} + \sqrt{[R^2 - (x_k - \delta/2)^2]} \quad (2.23)$$

Os valores de x_A , x_B e x_C também precisam ser definidos. Pela Figura 2.4, é fácil verificar que:

$$x_A = \begin{cases} \delta/2 - R, & \text{se } \delta \leq R\sqrt{3}; \\ \delta - 2R, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.24)$$

E, ainda,

$$x_C = \delta - R, \quad (2.25)$$

para $\delta \leq 2R$. Ressaltamos que no caso $\delta > 2R$ o ponto C não é definido.

Já o cálculo de x_B não é tão trivial. Consideremos, inicialmente, os casos onde $\delta \leq 2R$. Note que, nestes casos, esta coordenada é calculada mais facilmente se efetuarmos uma rotação de θ graus no sentido anti-horário no sistema de coordenadas (eixos x e y) que estamos adotando. O ângulo θ é tal que o novo eixo x , que denotaremos x' , passa pelo ponto D . Desta forma, o ponto B pode ser definido no novo sistema de coordenadas como:

$$\begin{aligned} B = (x'_B, y'_B) &= (R/2, \sqrt{R^2 - (R/2)^2}) \\ &= (R/2, \sqrt{3R^2/4}) \\ &= (R/2, R\sqrt{3}/2). \end{aligned} \quad (2.26)$$

A relação entre as coordenadas (x_B, y_B) e (x'_B, y'_B) se traduz em uma transformação bem conhecida da geometria elementar, e é dada pelas equações abaixo:

$$x_B = x'_B \cos \theta - y'_B \sin \theta \quad (2.27)$$

$$y_B = x'_B \sin \theta + y'_B \cos \theta. \quad (2.28)$$

Portanto, podemos escrever:

$$x_B = \frac{R}{2} \cos \theta - \frac{R\sqrt{3}}{2} \sin \theta \quad (2.29)$$

$$y_B = \frac{R}{2} \sin \theta + \frac{R\sqrt{3}}{2} \cos \theta. \quad (2.30)$$

O triângulo formado por a , D e o ponto $(x_D, 0)$ nos permite calcular o cosseno e seno de θ , conforme segue:

$$\cos \theta = \frac{x_D}{R} = \frac{\delta}{2R} \quad (2.31)$$

$$\sin \theta = \frac{y_D}{R} = \frac{\sqrt{4R^2 - \delta^2}}{2R}. \quad (2.32)$$

Aplicando estes valores nas equações das coordenadas de B , obtemos:

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{R}{2} \frac{\delta}{2R} - \frac{R\sqrt{3}}{2} \frac{\sqrt{4R^2 - \delta^2}}{2R} \\ &= \frac{\delta - \sqrt{3(4R^2 - \delta^2)}}{4} \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$\begin{aligned} y_B &= \frac{R}{2} \frac{\sqrt{4R^2 - \delta^2}}{2R} + \frac{R\sqrt{3}}{2} \frac{\delta}{2R} \\ &= \frac{\sqrt{4R^2 - \delta^2} + \delta\sqrt{3}}{4}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Observe que a transição entre as partes (a) e (b) da Figura 2.4 ocorre quando $x_B = 0$, uma vez que este cenário emerge exatamente quando temos $\delta = R\sqrt{3}$, e já que, neste caso, temos:

$$\begin{aligned} x_B &= \frac{\delta - \sqrt{3(4R^2 - \delta^2)}}{4} \\ &= \frac{R\sqrt{3} - \sqrt{3(4R^2 - \delta^2)}}{4} \\ &= \frac{R\sqrt{3} - R\sqrt{3}}{4} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Agora, ao considerarmos o caso onde $\delta > 2R$, observamos que não podemos nos utilizar do cálculo anterior para x_B pela ausência do ponto D neste cenário. No entanto, se utilizarmos o triângulo aBb , podemos obter

$$x_B = R \cos \beta, \quad (2.35)$$

onde β é o ângulo formado pelos lados \overline{aB} e \overline{ab} do triângulo. O valor de $\cos \beta$ pode ser obtido através da aplicação da Lei dos Cosenos, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} (2R)^2 &= R^2 + \delta^2 - 2R\delta \cos \beta \\ \cos \beta &= \frac{R^2 + \delta^2 - (2R)^2}{2R\delta}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

E, através das Equações (2.35) e (2.36), obtemos:

$$\begin{aligned} x_B &= R \frac{R^2 + \delta^2 - (2R)^2}{2R\delta} \\ &= \frac{\delta^2 - 3R^2}{2\delta}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Tabela 2.1: Coordenadas cartesianas que delimitam as metades superiores das regiões sombreadas na Figure 2.4.

δ^-	δ^+	x_k^-	x_k^+	$y_k^-(x_k)$	$y_k^+(x_k)$	Figura
R	$R\sqrt{3}$	x_A	x_B	$y_D - \sqrt{R^2 - (x_k - x_D)^2}$	$y_D + \sqrt{R^2 - (x_k - x_D)^2}$	2.4(a)
		x_B	0	$y_D - \sqrt{R^2 - (x_k - x_D)^2}$	$\sqrt{R^2 - x_k^2}$	
		0	x_C	0	$\sqrt{R^2 - x_k^2}$	
		x_C	x_D	$\sqrt{R^2 - (x_k - \delta)^2}$	$\sqrt{R^2 - x_k^2}$	
$R\sqrt{3}$	$2R$	x_A	0	$y_D - \sqrt{R^2 - (x_k - x_D)^2}$	$y_D + \sqrt{R^2 - (x_k - x_D)^2}$	2.4(b)
		0	x_B	0	$\sqrt{4R^2 - (x_k - \delta)^2}$	
		x_B	x_C	0	$\sqrt{R^2 - x_k^2}$	
		x_C	x_D	$\sqrt{R^2 - (x_k - \delta)^2}$	$\sqrt{R^2 - x_k^2}$	
$2R$	$3R$	x_A	x_B	0	$\sqrt{4R^2 - (x_k - \delta)^2}$	2.4(c)
		x_B	R	0	$\sqrt{R^2 - x_k^2}$	

Tabela 2.2: Coordenadas cartesianas usadas na Tabela 2.1.

δ^-	δ^+	x_A	x_B	x_C	x_D	y_D	Figura
R	$R\sqrt{3}$	$\delta/2 - R$	$(\delta - \sqrt{3(4R^2 - \delta^2)})/4$	$\delta - R$	$\delta/2$	$\sqrt{4R^2 - \delta^2}/2$	2.4(a)
$R\sqrt{3}$	$2R$	$\delta/2 - R$	$(\delta^2 - 3R^2)/2\delta$	$\delta - R$	$\delta/2$	$\sqrt{4R^2 - \delta^2}/2$	2.4(b)
$2R$	$3R$	$\delta - 2R$	$(\delta^2 - 3R^2)/2\delta$				2.4(c)

Todos os valores aplicáveis de x_k^- , x_k^+ , $y_k^-(x_k)$ e $y_k^+(x_k)$ para a Equação (2.15), estão sumarizados na Tabela 2.1, onde δ^- e δ^+ indicam, respectivamente, o limite inferior e superior para δ em cada um dos três casos possíveis. Os dados desta tabela fazem referência às abscissas dos pontos A , B , C e D (x_A , x_B , x_C , x_D , respectivamente) e à ordenada do ponto D (y_D), cujos valores, por sua vez, são exibidos na Tabela 2.2.

2.5.2 Extensão aproximada

Para obtermos $P_\delta(3)$ de $P'_\delta(3)$ é necessário que sejam preenchidos os demais requisitos impostos pelas Condições C2 e C3 apresentadas na Seção 2.5.1. Tais requisitos são:

- (i) inexistência de vértice na interseção dos círculos de raio R e centros em a e b ;

(ii) existência de ao menos um vértice k com as propriedades descritas na Condição C3.

A probabilidade de um vértice qualquer de G não cair na área de interseção de dois círculos de raio R cujos centros estão à distância δ um do outro é $1 - \rho_\delta$. Logo, basta aplicarmos esta probabilidade a todos os $n - 2$ vértices de G (já excluídos a e b) para obtermos a probabilidade do evento (i). Assim, a probabilidade do primeiro evento é simplesmente $(1 - \rho_\delta)^{n-2}$. Em contrapartida, expressar a probabilidade do evento (ii) requer uma cuidadosa aproximação para compensar a falta de independência entre alguns eventos.

Para um vértice $i \notin \{a, b\}$, seja ϵ_i o evento de que a Condição C3 não se satisfaça para $k = i$. Seja ainda $Q_\delta(\epsilon_i)$ a probabilidade de ϵ_i e Q_δ a probabilidade conjunta de todos os $n - 2$ eventos. Claramente, $Q_\delta(\epsilon_i) = 1 - P'_\delta(3)$ para todo i e, para $\delta > R$, $P_\delta(3) = (1 - Q_\delta)(1 - \rho_\delta)^{n-2}$. Portanto, se todos os $n - 2$ eventos fossem independentes entre si, teríamos

$$Q_\delta = \prod_{i \notin \{a, b\}} Q_\delta(\epsilon_i) = [1 - P'_\delta(3)]^{n-2} \quad (2.38)$$

e, conseqüentemente,

$$P_\delta(3) = \begin{cases} \{1 - [1 - P'_\delta(3)]^{n-2}\}(1 - \rho_\delta)^{n-2}, & \text{se } \delta > R; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.39)$$

Entretanto, uma vez que tenhamos a informação de que certo vértice i não satisfaz a Condição C3, imediatamente concluimos ser pouco provável que a condição seja satisfeita para vértices na vizinhança euclidiana de i . Os $n - 2$ eventos introduzidos anteriormente não são, portanto, incondicionalmente independentes entre si, apesar de esperarmos que qualquer grau de dependência existente decaia progressivamente conforme nos afastamos do vértice i .

Seguimos esta intuição para postular a existência de um inteiro $n' < n - 2$ tal que a independência dos n' eventos seja tanto verdadeira quanto suficiente para determinar $P_\delta(3)$ conforme indicado anteriormente, desde que os n' vértices sejam escolhidos aleatoriamente e de maneira uniforme. Mas como esta é exatamente a maneira na qual, por suposição, os vértices de G são posicionados, é suficiente que quaisquer n' vértices sejam selecionados, resultando em:

$$P_\delta(3) = \begin{cases} \{1 - [1 - P'_\delta(3)]^{n'}\}(1 - \rho_\delta)^{n-2}, & \text{se } \delta > R; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.40)$$

De forma similar aos casos anteriores, $p_3(\delta)$ pode ser obtido da Equação (2.4) e é igual a 0 se $\delta \leq R$ ou $\delta > 3R$.

Permanece, obviamente, a necessidade de descobrir n' para validar nosso postulado. Alcançamos este objetivo de forma empírica, através de simulações, conforme discutido na Seção 2.6.

2.6 Simulações

Nesta seção, descreveremos como o problema foi modelado para a condução de simulações computacionais e, para os casos onde $d = 1, 2, 3$, apresentaremos os resultados comparando-os com as predições analíticas contidas nas Seções 2.3, 2.4 e 2.5. Para os cálculos analíticos, utilizamos integração numérica quando não dispomos de uma expressão fechada. Para o caso $d = 3$, também será demonstrado o resultado das simulações para a obtenção do valor de n' . Para os casos onde $d > 3$, demonstramos que boas aproximações podem ser obtidas através de distribuições gaussianas.

2.6.1 Modelagem do problema

Todas as simulações foram efetuadas com $n = 4000$ e os vértices distribuídos uniformemente em um círculo de área unitária e, portanto, de raio $\sqrt{1/\pi} \approx 0,564$, com centro em $(0, 0)$. O vértice a é sempre posicionado no centro do círculo, no intuito de minimizar o efeito das bordas da região unitária, e todos os resultados referem-se a distâncias até a . O método utilizado para posicionamento dos vértices consiste, para cada vértice, na escolha de dois parâmetros: um raio r no intervalo $[0, 1/\sqrt{\pi}]$, e um ângulo θ no intervalo $[0, 2\pi]$. Para uniformidade, queremos que a probabilidade de escolher um valor x para r seja proporcional a x , já que o comprimento de um círculo é proporcional ao seu raio. Isto é, a densidade para escolha de r é $2\pi r$. Para fazer a escolha aleatória do valor, tomamos a distribuição correspondente (πr^2) , geramos um número aleatório uniforme em $[0, 1]$, e então aplicamos este número à distribuição invertida. Isto é, se z é o número aleatório, então escolhemos $r = \sqrt{z/\pi}$. A escolha de θ é feita uniformemente.

Com os valores de r e θ definidos, as coordenadas (x, y) de cada vértice podem ser obtidas da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{x}{r} \Rightarrow x = r \cos \theta \\ \text{sen } \theta &= \frac{y}{r} \Rightarrow y = r \text{sen } \theta .\end{aligned}\tag{2.41}$$

Para a escolha dos valores de n e R , consideramos a conectividade esperada de um vértice (número esperado de vizinhos do vértice no grafo), que denotamos por z e utilizamos como parâmetro principal. Uma vez que $z = \pi R^2 n$ para n grande, escolhendo um valor para z automaticamente conduz ao valor de R a ser utilizado. Como os grafos geométricos aleatórios são amplamente empregados em modelagem de redes de sensores, convergindo para o nosso propósito de aplicação deste trabalho, torna-se evidentemente mais interessante o estudo de grafos conexos, ou com alta conectividade. Em [12] é demonstrado que um GGA é conexo com alta probabilidade quando $z > 4,52$. Utilizamos os valores $z = 3\pi$ e $z = 5\pi$, que implicam em $R \approx 0,027$ e $R \approx 0,035$, respectivamente, e que garantem a conectividade sem, contudo, tornar o grafo extremamente denso. O valor de n escolhido também é tipicamente encontrado na literatura de redes de sensores (conforme será descrito na Seção 4.3.1).

Para cada valor de z , cada resultado de simulação que apresentamos é uma média sobre 10^6 experimentos independentes. Para cada experimento, montamos a matriz de adjacências do grafo gerado utilizando a definição de GGA, ou seja, se $v_i = (x_i, y_i)$ e $v_j = (x_j, y_j)$ são vértices quaisquer de G , v_i e v_j são adjacentes se e somente se satisfazem à equação abaixo:

$$(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \leq R^2.\tag{2.42}$$

A partir da matriz de adjacências de G , podemos calcular a distância em arestas (d) entre cada vértice e a . Utilizamos o Algoritmo de Dijkstra [18] para esta tarefa.

A fim de representar as possíveis distâncias euclidianas (δ) entre cada vértice e a , subdividimos o intervalo $[0, 1/\sqrt{\pi}]$ em pequenos segmentos de comprimento 10^{-3} . Consideramos que os valores dentro de cada segmento são aproximados pelo ponto médio do próprio segmento.

Assim, definimos uma tabela (matriz) M cujas linhas representam os $n - 1$ valores distintos para d e cujas colunas representam os $1\,000\sqrt{1/\pi}$ segmentos do intervalo $[0, 1/\sqrt{\pi}]$ onde δ pode estar contido. Inicialmente, todos os valores

de M estão zerados e, à medida que os cálculos de d e δ são efetuados para cada vértice, incrementamos a célula que representa o par de valores encontrado.

Ao final da execução deste procedimento em todos os vértices do grafo, dividimos cada célula $M(d, \delta)$ de M pelo resultado da soma dos valores na coluna δ multiplicados pelo comprimento de cada segmento (10^{-3}), normalizando, assim, para valor fixo de δ . Desta forma, obtemos em cada célula $M(d, \delta)$ a probabilidade $P_\delta(d)$. No caso do cálculo de $p_d(\delta)$, efetuamos procedimento similar a este, alterando apenas a forma de normalização, pois, neste caso, dividimos cada célula $M(d, \delta)$ pela soma dos valores na linha d . Assim, as contribuições de cada experimento para $P_\delta(d)$ e $p_d(\delta)$ são computados, respectivamente, por $M(d, \delta) / \sum_{d'} M(d', \delta)$ e $M(d, \delta) / 0,001 \sum_{\delta'} M(d, \delta')$.

O caso onde $d = 3$ requer dois procedimentos de simulação adicionais, um para determinar os dados simulados para $P'_\delta(3)$, outro para determinar n' para uso na obtenção de predições analíticas de $P_\delta(3)$.

O procedimento para obter os dados simulados de $P'_\delta(3)$ fixa um vértice b nas coordenadas $(\delta, 0)$ e executa 10^7 experimentos independentes. A cada experimento, dois vértices são gerados aleatoriamente de maneira uniforme no círculo. Ao final de todos os experimentos, a probabilidade desejada é calculada pela fração de experimentos que resultaram em vértices k e ℓ conforme descritos na Seção 2.5.

A simulação para determinação de n' é conduzida apenas para $\delta = 2R$, caso onde $\rho_\delta = 0$. Este é o valor de δ em torno do qual os resultados da simulação para $P_\delta(3)$ e a predição analítica dada por $1 - [1 - P'_\delta(3)]^{n-2}$ mais diferem (as Figuras 2.8(a) e (b) apresentam os gráficos para este caso, nos quais se pode perceber a incongruência entre as curvas).

Além disso, como veremos em breve, o valor de n' encontrado para este valor de δ é adequado para todos os outros valores também. A simulação neste caso tem como objetivo encontrar o valor de Q_δ e, para isso, realiza 10^9 experimentos independentes. Cada experimento fixa o vértice b em $(\delta, 0)$ e distribui os demais vértices pelo círculo aleatoriamente e de maneira uniforme. A fração de experimentos resultando em nenhum vértice qualificado como k da Seção 2.5 é o valor Q_δ . Fazemos n' ser o $m < n - 2$ que minimiza $|Q_\delta - [1 - P'_\delta(3)]^m|$, onde $P'_\delta(3)$ refere-se à predição analítica. Nossos resultados são $n' = 3\,120$ para $z = 3\pi$ e $n' = 3\,160$ para $z = 5\pi$.

2.6.2 Resultados

A seguir, serão apresentados os resultados das simulações de $P_\delta(d)$ e $p_d(\delta)$, para $d = 1, 2, 3$, confrontados com os resultados analíticos das Seções 2.3 a 2.5. Todos os gráficos apresentados representam a densidade da respectiva probabilidade em função de δ . Note que, no caso de $P_\delta(d)$, o gráfico em função de δ não representa uma distribuição de probabilidades. Entretanto, acreditamos ser mais interessante e reveladora a variação contínua da densidade em função do afastamento progressivo do vértice b em relação ao vértice a (incremento de δ) do que a representação discreta da densidade em função de d . Nas Figuras 2.5 a 2.8, as linhas sólidas representam as previsões analíticas estabelecidas nas Seções 2.3 a 2.5.

Na Figuras 2.5 e 2.6 são apresentados os resultados para os casos onde $d = 1$ e $d = 2$, respectivamente.

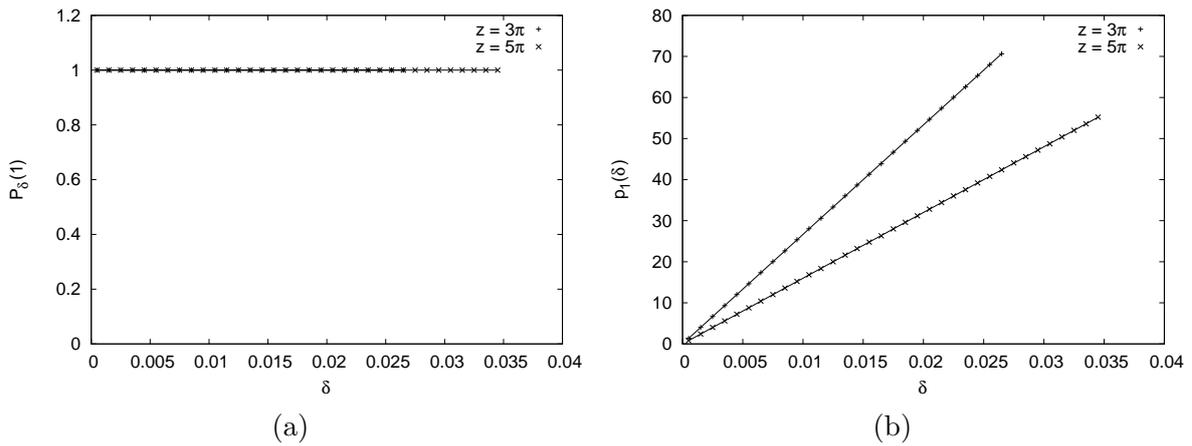


Figura 2.5: Gráficos de $P_\delta(1)$ e $p_1(\delta)$.

Na Figura 2.7 estão os resultados para $P'_\delta(3)$, conforme descrito na Seção 2.5.1. E, na Figura 2.8 são apresentados os resultados para $P_\delta(3)$ e $p_3(\delta)$, conforme Seção 2.5.2.

Todos os casos, não só os mais simples onde $d = 1$ e $d = 2$, mas também aqueles consideravelmente mais complexos de $P'_\delta(3)$ e $P_\delta(3)$, exibem excelente conformidade entre as previsões analíticas, derivadas nas Seções 2.3 a 2.5, e os dados obtidos das simulações. O último destes, em particular, depende do n' determinado empiricamente. A este respeito, fica claro pela Figura 2.8 que, apesar da possibilidade de calcularmos n' para uma maior variedade de valores de δ , fazendo isto apenas para $\delta = 2R$ se mostrou suficiente.

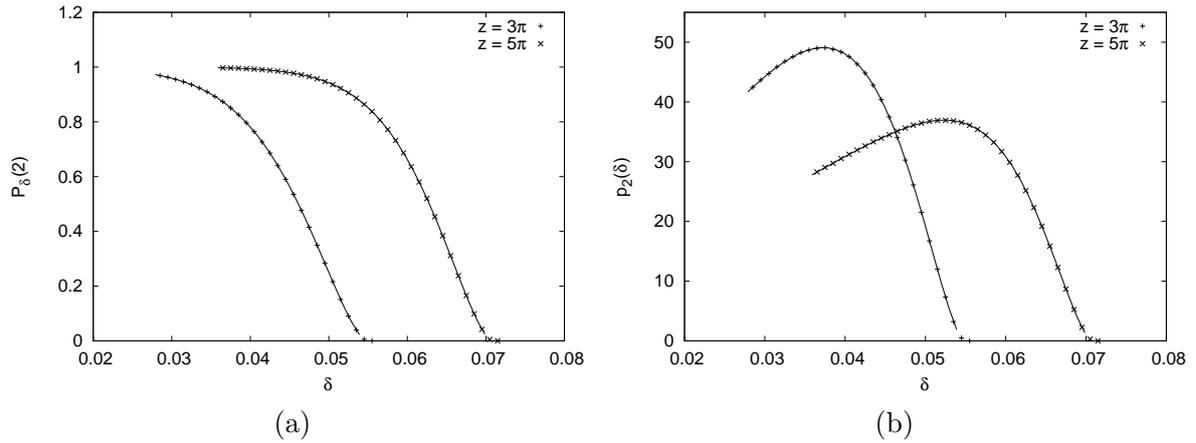


Figura 2.6: Gráficos de $P_\delta(2)$ e $p_2(\delta)$.

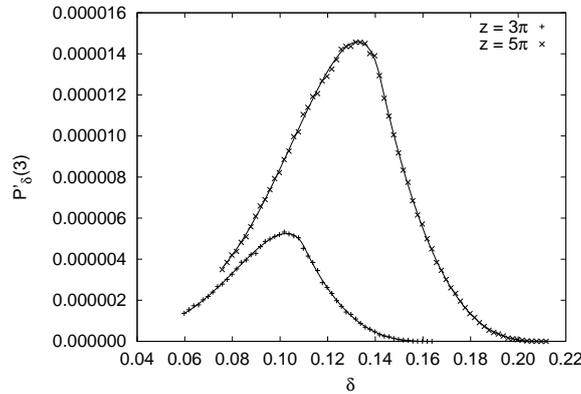


Figura 2.7: Gráfico de $P'_\delta(3)$ (conforme Seção 2.5.1).

As Figuras 2.9 e 2.10 contemplam alguns dos casos onde $d > 3$, para os quais não derivamos nenhuma predição analítica. Os valores de d que as Figuras 2.9 e 2.10 cobrem, respectivamente para $z = 3\pi$ e $z = 5\pi$, são $4, \dots, 20$. Desses, $d = 20$ para $z = 5\pi$ na parte (b) da Figura 2.10 tipifica também o que ocorre para valores maiores de d (omitidos em prol da clareza), que é a forte concentração das densidades de probabilidade na borda do círculo unitário e centro no vértice a . Note que o mesmo ocorre para $z = 3\pi$, mas, graças ao menor R neste caso, este fenômeno surge apenas para valores maiores de d (a partir de 31), omitidos da Figura 2.9 (novamente, em prol da clareza).

Para $4 \leq d \leq 20$ com $z = 3\pi$, e $4 \leq d \leq 18$ com $z = 5\pi$, a parte (b) das Figuras 2.9 e 2.10 também mostram aproximações gaussianas de $p_d(\delta)$. Observe que, para $d = 19, 20$ com $z = 5\pi$, o fenômeno de concentração na borda, já comentado anteriormente, impede uma aproximação razoável por

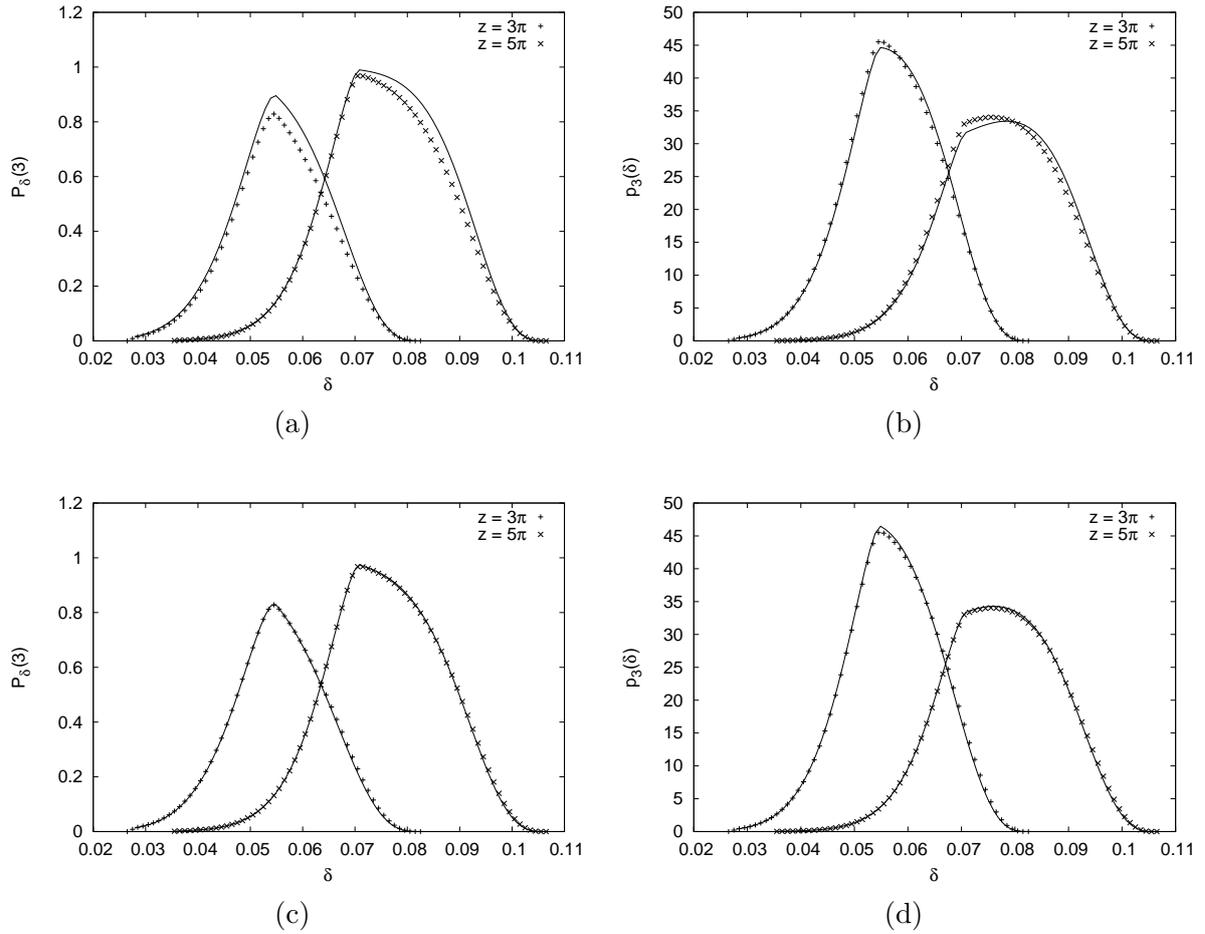
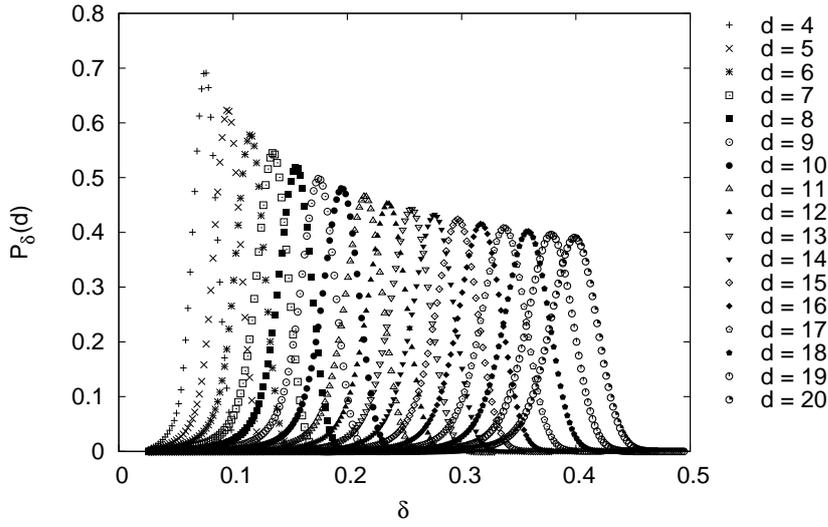


Figura 2.8: Gráficos de $P_\delta(3)$ e $p_3(\delta)$ sem a utilização de n' (a,b) e utilizando o n' obtido (c,d).

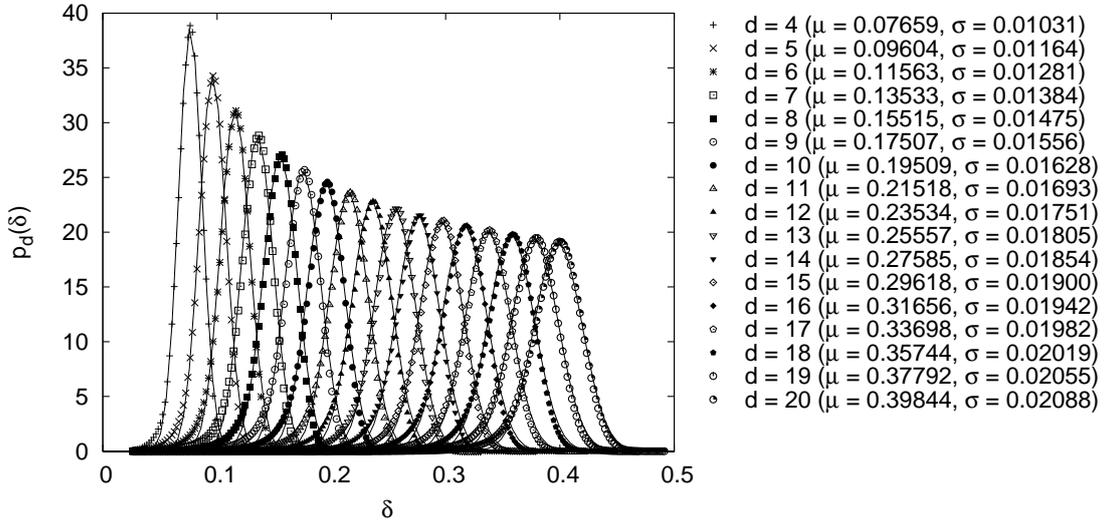
gaussianas. A parte (a) dessas figuras, em contrapartida, contém apenas os respectivos dados de simulação, e ressaltamos que a ausência de aproximações calculadas a partir das gaussianas da parte (a) não se devem por dificuldade teórica. De fato, uma fórmula análoga àquela da Equação (2.4), obtida também da Regra de Bayes e tal que

$$P_\delta(d) = \frac{p_d(\delta)P(d)}{p(\delta)} = \frac{p_d(\delta)P(d)}{\sum_{s=1}^{n-1} p_s(\delta)P(s)}, \quad (2.43)$$

pode, em princípio, ser utilizada tanto para as gaussianas quanto para as densidades concentradas em lugar de $p_s(\delta)$, conforme apropriado para cada s . O que nos impede disso é a falta de uma caracterização de $P(s)$ que não seja baseada apenas em dados de simulação.



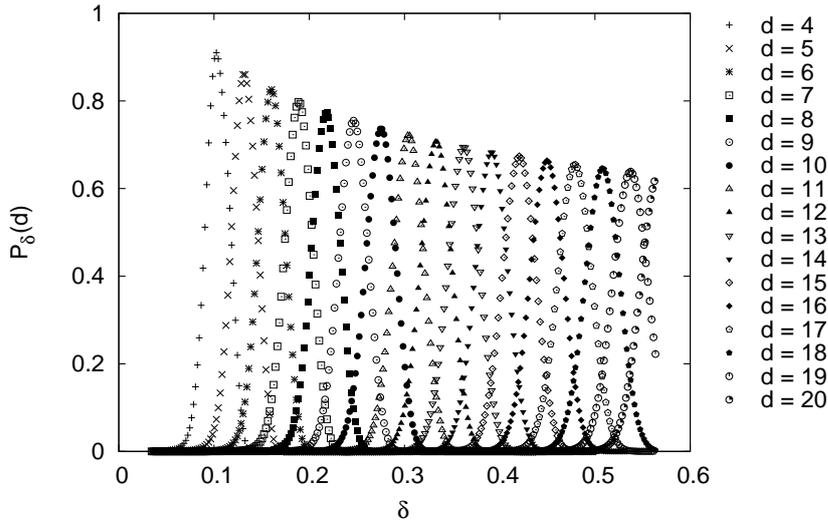
(a)



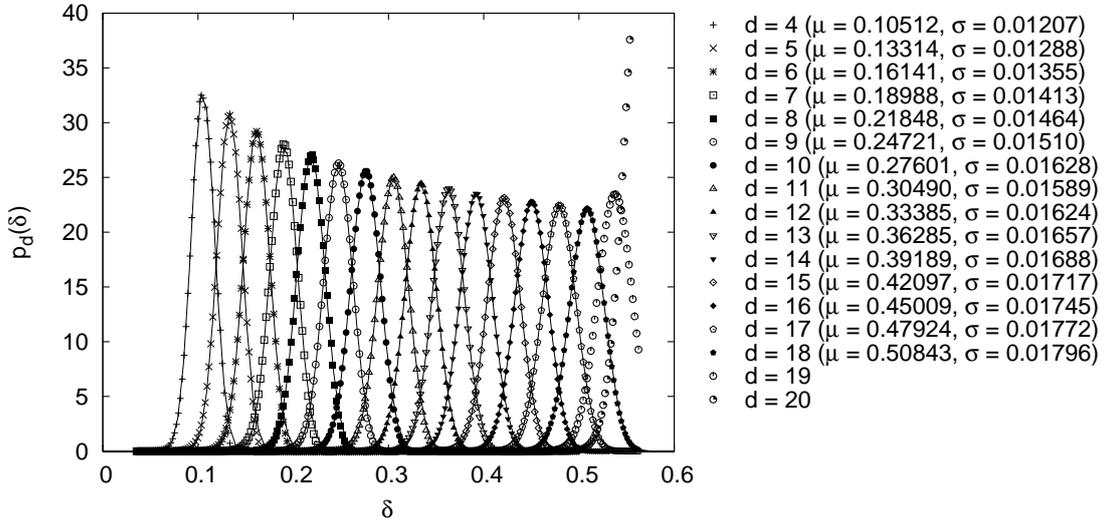
(b)

Figura 2.9: $P_\delta(d)$ (a) e $p_d(\delta)$ (b) para $d > 3$, com $z = 3\pi$. Linhas sólidas na parte (b) representam as gaussianas que mais se aproximam de $p_d(\delta)$, cada uma de média μ e desvio padrão σ , conforme indicado.

Ainda com relação às Figuras 2.9 e 2.10, uma das possíveis interpretações para a boa aproximação de $p_d(\delta)$ por gaussianas remete ao *Teorema do Limite Central* em sua forma clássica [4]. Para isso, devemos enxergar δ como o valor da variável aleatória que representa a distância euclidiana média até o vértice a a partir de todos os vértices que estão à distância em aresta d de a . O aparecimento de $p_d(\delta)$ como uma gaussiana para $d > 3$ indicar que, para



(a)



(b)

Figura 2.10: $P_\delta(d)$ (a) e $p_d(\delta)$ (b) para $d > 3$, com $z = 5\pi$. Linhas sólidas na parte (b) representam as gaussianas que mais se aproximam de $p_d(\delta)$, cada uma de média μ e desvio padrão σ , conforme indicado.

cada valor de d , as distâncias euclidianas desses vértices até a são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Enquanto sabemos que esta propriedade não vale para os valores mais baixos de d como consequência do posicionamento aleatório uniforme dos vértices no círculo unitário (menores distâncias euclidianas até a são menos prováveis de ocorrer para o mesmo valor de d), esta característica começa a surgir quando d é aumentado.

2.7 Estendendo os Resultados

Nesta seção, estenderemos os resultados anteriores sobre a distribuição de probabilidade das distâncias em GGAs para abordarmos a questão da distância euclidiana mais provável quando a respectiva distância em arestas é conhecida. Este assunto tem grande relevância na nossa abordagem do problema da localização em redes de sensores, como veremos adiante, e a caracterização analítica desta relação entre distâncias será tratada.

2.7.1 Distâncias euclidianas de máxima densidade de probabilidade

Nossa premissa central neste trabalho é que o conhecimento sobre $p_d(\delta)$ tem um papel importante no problema da localização em redes de sensores. Para demonstrar este fato, voltamos nosso foco para o valor de δ para o qual, dado d , $p_d(\delta)$ é máximo. Denotaremos este valor por $\delta_{\max}(d)$. A razão pela qual nos concentramos em $\delta_{\max}(d)$, ainda que essencialmente heurística, reflete o fato de que qualquer intervalo de δ suficientemente estreito atinge a probabilidade máxima precisamente quando centrado em $\delta_{\max}(d)$. Em outras palavras, as distâncias euclidianas representadas por $\delta_{\max}(d)$, adicionadas ou subtraídas das pequenas variações definidas pelo intervalo, são as distâncias mais prováveis de ocorrer para dois vértices aleatoriamente escolhidos que estejam a d arestas um do outro.

O uso que faremos deste conhecimento será discutido no Capítulo 4. Como discutimos anteriormente, dependendo do valor de d , a estimativa de δ dado d é obtida analiticamente, semi-analiticamente ou por simulações. Os resultados a seguir são direções promissoras no sentido de obter tais estimativas de forma puramente analítica, independentemente do valor de d . No caso deste caminho consolidar-se por pesquisas futuras, a alternativa a ser sugerida no Capítulo 4 para um novo método de localização dispensaria a necessidade de qualquer simulação prévia.

Para uma conectividade esperada z , observamos através das mesmas simulações cujos resultados estão na Seção 2.6.2, apenas abrangendo uma gama maior de valores de z ($2\pi, 3\pi, \dots, 8\pi$), que $\delta_{\max}(d)$ cresce linearmente com d , desde que $d > 3$. Esse comportamento está ilustrado na Figura 2.11, onde os parâmetros a e b que fornecem o melhor ajuste da equação $ad + b$ aos dados também são exibidos para cada z .

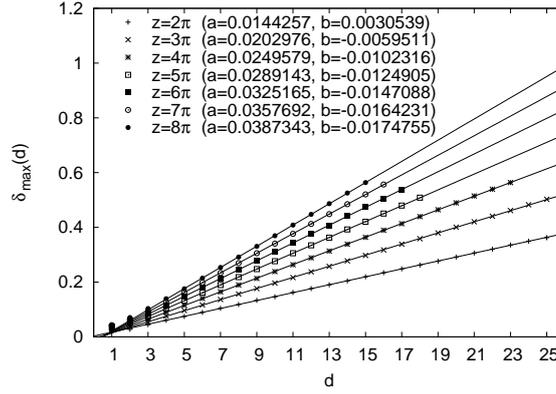


Figura 2.11: $\delta_{\max}(d)$ para $d > 3$, com $z = c\pi$, $2 \leq c \leq 8$. Linhas sólidas representam as funções lineares $ax + b$ que melhor se ajustam aos dados de simulação para $d > 3$, cada uma com parâmetros a e b conforme indicado.

Seja γ a diferença entre as distâncias euclidianas de densidade de probabilidade máxima para dois valores subsequentes d e $d+1$ de distância em arestas e o valor específico de z considerado; isto é, $\gamma = \delta_{\max}(d+1) - \delta_{\max}(d)$. A linearidade de $\delta_{\max}(d)$ em relação a d implica que γ é, de fato, a inclinação a dado z . Além disso, se considerarmos os valores mais baixos de d , vemos na Figura 2.11 que $\delta_{\max}(d)$ em todos os casos está posicionado ligeiramente acima das retas. Este comportamento é ainda mais pronunciado quando caminhamos a partir de $d = 3$ em direção a $d = 1$. Mas $\delta_{\max}(1) = R$, seguindo o mais simples dos casos analíticos na Seção 2.3, assim temos $\gamma \leq R$ independentemente do valor de d . Também ressaltamos que, para $d = 2$ e $d = 3$, estar apenas ligeiramente acima da aproximação linear pode ser facilmente interpretado como uma consequência da forma (ligeiramente) não-gaussiana de $p_d(\delta)$ nestes casos (conforme as Figuras 2.6 e 2.8).

Podemos extrair ainda mais informação desses dados de simulação quando representamos γ em função do raio de comunicação R . Isto é mostrado na Figura 2.12, onde uma excelente aproximação por uma função linear é novamente revelada. Tal função estabelece uma correlação direta entre as distâncias euclidianas de máxima densidade de probabilidade e o raio R , para $d > 3$.

A seguir, nos voltamos para uma breve investigação sobre formas de inferir analiticamente esta dependência linear.

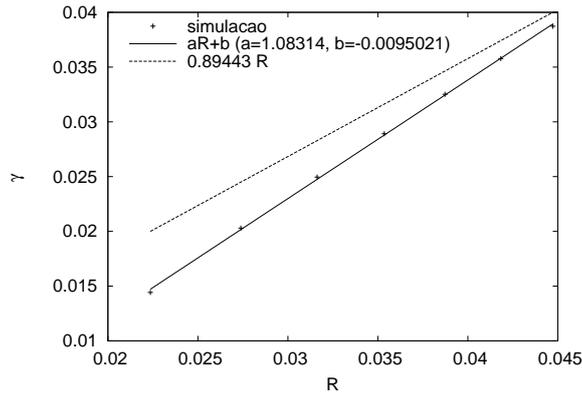


Figura 2.12: γ em função de R para $z = c\pi$, $c \in \{2, 3, \dots, 8\}$. As retas representam a função linear $aR+b$ que melhor se ajusta aos dados da simulação, com parâmetros a e b conforme indicado, e a aproximação linear derivada na Seção 2.7.2.

2.7.2 Avanços na caracterização analítica do coeficiente angular

É possível aproximarmos a inclinação γ , a qual é constante para n e z fixos, analiticamente. Dado um vértice no centro da região circular, digamos v_0 , consideramos, para $d > 4$, três vértices v_{d-1} , v_d e v_{d+1} para os quais as seguintes propriedades são verdadeiras. A primeira é que v_{d-1} , v_d e v_{d+1} estão, respectivamente, a $d-1$, d e $d+1$ arestas de v_0 . A segunda propriedade é que as distâncias euclidianas separando v_{d-1} , v_d e v_{d+1} de v_0 são, respectivamente, $\delta_{\max}(d-1)$, $\delta_{\max}(d)$ e $\delta_{\max}(d+1)$; em outras palavras, estas são precisamente as distâncias euclidianas, a partir de v_0 , de densidade de probabilidade máxima para a respectiva distância em arestas.

Conforme os resultados empíricos discutidos acima, os quais indicam um crescimento constante na distância euclidiana para cada aresta adicional no caso de densidades de probabilidade máximas, façamos $\delta < R$ ser tal que $\delta = \delta_{\max}(d) - \delta_{\max}(d-1) = \delta_{\max}(d+1) - \delta_{\max}(d)$, e assumamos que as distâncias euclidianas de v_{d-1} para v_d e de v_d para v_{d+1} são as mesmas e iguais a δ . Consequentemente, v_0 , v_{d-1} , v_d e v_{d+1} são necessariamente colineares.

Omitindo v_0 , esta situação é representada na Figura 2.13, na qual os vértices v_{d-1} , v_d e v_{d+1} são exibidos com seus círculos de comunicação. Observe que a região cinza-escuro, representando a interseção dos círculos de comunicação de v_{d-1} e v_{d+1} , é a região onde os vizinhos em comum de v_{d-1} e v_{d+1} podem ser encontrados uma vez que as posições de v_{d-1} e v_{d+1} estão fixas. E pelo fato de a região circular contendo todos os n vértices possuir área unitária, a área da

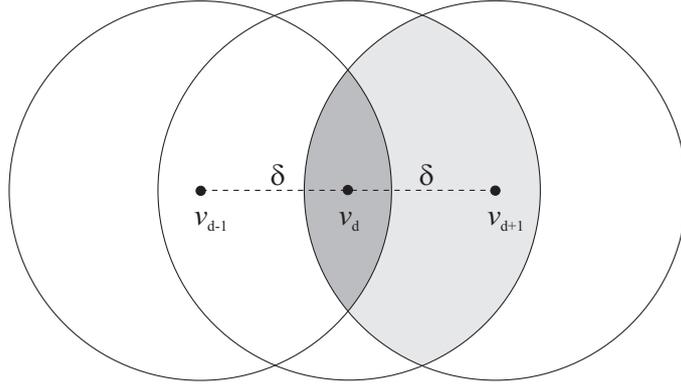


Figura 2.13: Região (mostrada em cinza-claro) usada para aproximar o valor de γ através do δ que maximiza a área da região.

região cinza-escuro é a probabilidade de um vértice escolhido ao acaso ser um desses vizinhos. Da mesma forma, dadas as posições de v_{d-1} , v_d e v_{d+1} , a área da região cinza-claro na Figura 2.13 é a probabilidade de um vértice escolhido ao acaso ser vizinho tanto de v_d quanto de v_{d+1} , mas não ser vizinho de v_{d-1} .

Assumimos que essa última probabilidade descreva a maioria dos vértices que estão à distância em arestas $d + 1$ de v_0 e estendemos um caminho com d arestas a partir de v_0 passando por v_{d-1} e v_d . Usamos este cenário para obter um valor aproximado para γ . Mais especificamente, variando δ enquanto se mantém v_d equidistante de v_{d-1} e v_{d+1} e colinear com eles, faz com que a área da região cinza-claro se altere. Selecionamos o valor de δ que maximiza essa área para representar γ .

Obviamente, a área em questão pode ser expressa como a diferença entre duas outras áreas: a área de interseção entre os círculos com centros em v_d e v_{d+1} , e a área de interseção entre os círculos com centros em v_{d-1} e v_{d+1} . Podemos utilizar a Equação 2.8 para este cálculo e, assim, representar a área da região cinza-claro da Figura 2.13 por:

$$\begin{aligned}
 f(\delta) &= \rho_\delta - \rho_{2\delta} \\
 &= \left[2R^2 \cos^{-1}(\delta/2R) - \delta\sqrt{R^2 - \delta^2/4} \right] - \\
 &\quad \left[2R^2 \cos^{-1}(\delta/R) - 2\delta\sqrt{R^2 - (2\delta)^2/4} \right].
 \end{aligned}$$

O gráfico desta função é exibido na Figura 2.14 para diversos valores de conectividade esperada z , ajudando a entender melhor seu comportamento. Claramente, para cada valor de z , $f(\delta)$ tem um máximo único, o qual pode ser encontrado igualando a zero a derivada de $f(\delta)$ com relação a δ . Para $\delta \leq R$,

esta derivada é

$$f'(\delta) = \rho'_\delta - \rho'_{2\delta},$$

onde

$$\begin{aligned} \rho'_\delta &= 2R^2 \frac{d}{d\delta} \left[\cos^{-1}(\delta/2R) \right] - \frac{d}{d\delta} \left[\delta \sqrt{R^2 - \delta^2/4} \right] \\ &= \frac{-2R^2}{\sqrt{1 - \delta^2/4R^2}} \frac{d}{d\delta} [\delta/2R] - \delta \frac{d}{d\delta} \left[\sqrt{R^2 - \delta^2/4} \right] - \sqrt{R^2 - \delta^2/4} \\ &= \frac{-R}{\sqrt{1 - \delta^2/4R^2}} - \frac{\delta^2}{4\sqrt{R^2 - \delta^2/4}} - \sqrt{R^2 - \delta^2/4} \\ &= -\sqrt{4R^2 - \delta^2} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \rho'_{2\delta} &= 2R^2 \frac{d}{d\delta} \left[\cos^{-1}(\delta/R) \right] - 2 \frac{d}{d\delta} \left[\delta \sqrt{R^2 - \delta^2} \right] \\ &= \frac{-2R^2}{\sqrt{1 - \delta^2/R^2}} \frac{d}{d\delta} [\delta/R] - 2 \left[\delta \frac{d}{d\delta} (\sqrt{R^2 - \delta^2}) + \sqrt{R^2 - \delta^2} \right] \\ &= \frac{-2R}{\sqrt{1 - \delta^2/R^2}} - 2 \left[\frac{\delta^2}{\sqrt{R^2 - \delta^2}} - \sqrt{R^2 - \delta^2} \right] \\ &= -4\sqrt{R^2 - \delta^2}, \end{aligned}$$

assim:

$$f'(\delta) = -\sqrt{4R^2 - \delta^2} + 4\sqrt{R^2 - \delta^2}.$$

Igualando $f'(\delta)$ a zero, obtemos γ , que é o valor de δ que maximiza $f(\delta)$:

$$\begin{aligned} 4\sqrt{R^2 - \gamma^2} &= \sqrt{4R^2 - \gamma^2} \\ 16(R^2 - \gamma^2) &= 4R^2 - \gamma^2 \\ 12R^2 &= 15\gamma^2 \\ \gamma &= R\sqrt{4/5} \approx 0,89443R. \end{aligned}$$

Este resultado está presente na Figura 2.12 junto com o melhor ajuste da aproximação linear aos dados de simulação. Apesar de estar claro que as duas retas se desviam uma da outra, particularmente nas conectividades esperadas mais baixas (menores valores de R), a aproximação de γ por $0,89443R$ representa um importante primeiro passo na quantificação das dependências lineares que, pelos dados de simulação exibidos nas Figuras 2.11 e 2.12, são intrínsecas

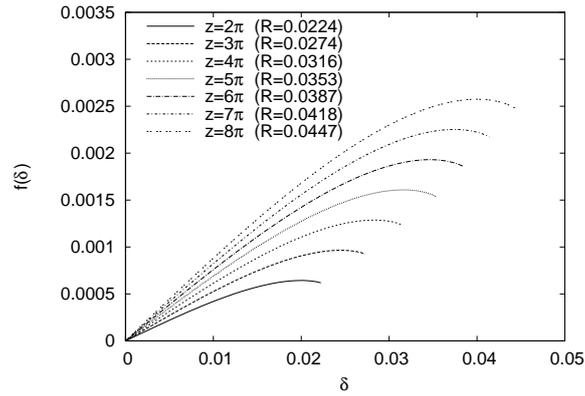


Figura 2.14: $f(\delta)$ para $z = c\pi$, $2 \leq c \leq 8$.

ao relacionamento entre distâncias euclidianas de densidade de probabilidade máxima e distâncias em arestas.

Também é curioso observar que, ainda que não sejam conhecidas caracterizações analíticas melhores do que a que derivamos aqui, um recente trabalho demonstrou que, em $\delta_{\max}(d)$, distâncias euclidianas e distâncias em arestas são assintoticamente proporcionais entre si [19], em acordo com nosso resultado.

Capítulo 3

Localização em Redes de Sensores

Neste capítulo será apresentado um estudo conciso sobre o problema da localização em redes de sensores. Descreveremos, em especial, os métodos já conhecidos para resolução do problema e discutiremos os principais desafios que ainda permanecem mesmo nos métodos mais sofisticados, além de explicitarmos a escassez de estudos teóricos para sustentar soluções de maior acurácia. As informações aqui contidas, além de apresentarem o atual nível de maturidade da literatura sobre o tema através de um abrangente levantamento, servirão como insumo e motivação para a nova abordagem do problema, a ser apresentada no Capítulo 4.

3.1 Descrição do Problema

Dada uma rede de sensores geograficamente distribuídos por determinado espaço, o problema da localização consiste em descobrir a exata posição dos sensores segundo algum sistema de coordenadas global. O sistema de coordenadas utilizado pode ser relativo (definido pelas posições relativas dos sensores) ou absoluto (\mathbb{R}^2 , \mathbb{R}^3 , coordenadas geográficas, etc.). Podemos ter ainda diferentes precisões e até simbologias dependendo da aplicação. Por exemplo, pode-se desejar conhecer se o foco de incêndio em uma casa está na cozinha ou na sala, enquanto em outras aplicações talvez seja necessária a latitude e longitude de determinado alvo militar, ou ainda, a cidade para a qual uma determinada ave migratória se dirigiu.

A utilização do *sistema de posicionamento global* (GPS) é uma solução que poderia ser cogitada. Entretanto, a natureza dos sensores e as aplicações

destas redes, já comentadas no Capítulo 1, inviabilizam a utilização de um GPS acoplado a cada sensor, pelas seguintes razões:

- (i) um sensor deve possuir dimensões reduzidas, em geral, bem menores do que qualquer dispositivo GPS disponível atualmente;
- (ii) o custo de um dispositivo GPS impediria sua utilização em larga escala nos sensores (muitas aplicações prevêm utilização de centenas ou milhares de unidades);
- (iii) o alto consumo de energia de um dispositivo GPS reduziria drasticamente a autonomia de um sensor;
- (iv) a acurácia do GPS é da ordem de metros, e podemos ter aplicações onde o raio de atuação dos sensores é da ordem de centímetros;
- (v) a necessidade de visão direta com os satélites do sistema GPS inviabilizaria aplicações em ambientes fechados, subaquáticos, subterrâneos, debaixo de densa folhagem, com condições climáticas desfavoráveis, etc.

A quantidade de sensores em uma rede e os métodos de distribuição dos sensores (ex: lançados por aeronave que sobrevoa a área a ser monitorada), também muitas vezes impede a configuração manual da posição de cada sensor, ou mesmo a sua disposição em topologias regulares ou bem definidas. Assim, os sensores devem ser capazes de inferir a própria localização através da troca de informações com os sensores que estão dentro do seu raio de atuação.

Em geral, como forma de referência mínima para um sistema de coordenadas, algumas poucas âncoras (já definidas no Capítulo 1) são dispostas na rede. Apesar de haver alguns resultados na literatura prevendo uma disposição planejada ou regular das âncoras [20], de uma forma geral nada é assumido sobre a localização delas.

Algumas dificuldades são inerentes ao problema da localização e não é difícil compreender por que nenhum método é capaz de garantir de forma inequívoca a posição exata de todos os sensores em qualquer tipo de rede. Certos empecilhos são teóricos e outros de ordem prática (tecnológica); citaremos exemplos de ambos os tipos a seguir.

Um dos entraves teóricos é a multiplicidade de realizações de uma mesma rede, isto é, de mapeamentos de coordenadas para cada sensor dadas as distâncias entre eles. A Figura 3.1 ilustra duas realizações de uma mesma rede, onde um dos sensores pode estar tanto na posição v_3 quanto em v'_3 . Note que

as distâncias entre os sensores é mantida em ambas as situações. Existe uma extensa pesquisa sobre teoria de *rigidez* em redes de sensores, que diz respeito às propriedades que garantem solução única para a localização [21, 22]. No entanto, não abordaremos este assunto em profundidade, uma vez que nos preocuparemos com algoritmos distribuídos para o problema, onde nenhuma entidade da rede possui o conhecimento total da rede (necessário para análises de rigidez).

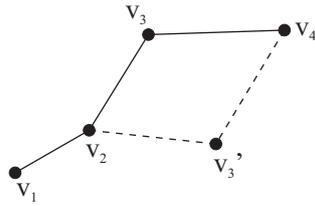


Figura 3.1: Exemplo de rede com mais de uma realização.

O número necessário de âncoras é outro fator a ser considerado para soluções satisfatórias do problema. É evidente que quanto mais âncoras a rede possui, mais fácil se torna a localização. No entanto, pelas razões já citadas anteriormente, o cenário torna-se cada vez menos factível. Sabe-se, por geometria elementar, que são necessários ao menos $d + 1$ pontos de referência para localizar de forma única um outro ponto em \mathbb{R}^d . A Figura 3.2 ilustra um exemplo no \mathbb{R}^2 , onde um ponto v_4 (sensor comum) obtém sua localização a partir das distâncias (euclidianas) δ_{41} , δ_{42} e δ_{43} a três outros pontos de referência v_1 , v_2 e v_3 (âncoras). Este processo é chamado de *triangulação* e é a base da maioria dos algoritmos de localização. Alguns algoritmos utilizam uma extensão da triangulação, chamada *multilateração*, na qual múltiplas (mais de três) referências, em geral não confiáveis, são utilizadas para estimar a posição desejada.

A grande maioria dos algoritmos de localização faz uso da medida direta da distância entre sensores vizinhos. Existem diversas tecnologias conhecidas para efetuar esta medição (a serem descritas na Seção 3.2) e todas elas possuem certo grau de imprecisão. Dependendo do algoritmo utilizado, estes erros podem acumular-se de tal forma que o resultado torna-se inútil.

Outro fator complicador é que a suposição de um raio de comunicação uniforme, largamente utilizada pelos algoritmos na literatura, pode ser bem distante da realidade. Na prática, interferências, obstáculos e outros fatores podem contribuir para a formação de raios bastante disformes. Poucos traba-

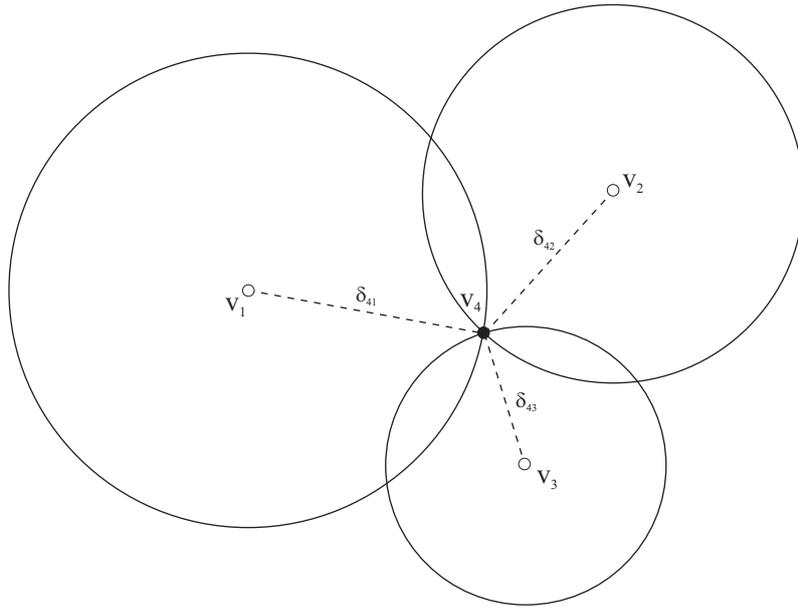


Figura 3.2: Exemplo de triangulação. A posição de v_4 pode ser inferida a partir das distâncias para as âncoras v_1 , v_2 e v_3 .

Até hoje trataram deste problema, e as heurísticas que procuram contornar esta questão possuem, em geral, desempenho inferior em redes densas quando comparadas às que ignoram o problema [23].

3.2 Taxonomia dos Métodos de Localização

A seguir, classificaremos os diversos métodos de localização encontrados na literatura segundo vários aspectos. Esta organização ajuda na compreensão da grande gama de soluções existentes para o problema da localização.

3.2.1 Tecnologias de Medição

A grande maioria dos métodos de localização utiliza alguma forma de medir a distância entre o sensor e seus vizinhos diretos para efetuar triangulação. Alguns, mais sofisticados, se utilizam da combinação de diversas tecnologias de medição em busca de uma maior acurácia.

A forma mais utilizada atualmente para medição de distâncias em redes de sensores é a *atenuação*. A razão para a larga utilização deste método é o aproveitamento da própria infraestrutura de comunicação via rádio dos sensores para fazer a medição. Sabe-se que a intensidade de um sinal de rádio emitido decresce conforme a distância entre o emissor e o receptor aumenta. O

decrécimo relativo à intensidade original é chamado de atenuação. A função de correlação entre a atenuação do sinal de rádio e a distância percorrida é bem conhecida (a intensidade do sinal decai a um fator proporcional ao inverso do quadrado da distância). Logo, conhecendo a intensidade original do sinal, o receptor é capaz de inferir sua distância do transmissor a partir do sinal recebido. Experiências têm mostrado que este método possui baixa acurácia por sofrer de diversos problemas (reflexão, refração, caminhos múltiplos, etc.) em ambientes fechados ou com obstáculos [24]. São exemplos deste tipo de tecnologia o RADAR [25] e o SpotON [24].

Outra tecnologia de medição bastante difundida é o *tempo de chegada*. Este método é similar ao da atenuação, mas neste caso o parâmetro utilizado é o tempo de propagação do sinal do transmissor até o receptor. A velocidade de propagação de diversos tipos de onda é conhecida. No entanto, como as velocidades de propagação de ondas de luz (como laser) e de rádio são bem maiores do que a das ondas acústicas (ultra-som, em geral), estas últimas são mais largamente utilizadas devido à restrição dos sensores na precisão de medição de tempo. Esta restrição também implica na baixa acurácia deste método quando empregado em cenários de redes densas, com distâncias mais curtas entre os sensores. Um aprimoramento deste método fez surgir o método da *diferença do tempo de chegada*, no qual o transmissor inicialmente envia um sinal de rádio, aguarda um intervalo fixo de tempo e envia um sinal acústico [26, 27]. O receptor, então, pode calcular sua distância até o transmissor pela observação da diferença de tempo entre as recepções dos dois sinais. Esta variante tem se mostrado um dos métodos de maior acurácia, apesar da necessidade de *hardware* adicional (microfone e alto-falante), além de calibração. O sistema Cricket [28] é um exemplo de utilização desta tecnologia.

Diferentemente das técnicas anteriores que mediam distâncias entre os sensores, o método do *ângulo de chegada* utiliza um conjunto de antenas para medir o ângulo pelo qual o sinal do transmissor chega ao receptor. Os ângulos podem ser combinados com estimativas de distâncias ou outros ângulos para derivarem posições. A grande desvantagem desta tecnologia é o custo de implementação e manutenção do *hardware* requerido. Um dos trabalhos pioneiros na abordagem deste método está em [29].

3.2.2 Dependência de Medição

Conforme comentamos na Seção 3.2.1, diversos métodos de localização pressupõem alguma técnica de medição da distância euclidiana (ou ângulo) entre

sensores vizinhos e utilizam estas estimativas para o cálculo da posição esperada do sensor; chamaremos tais métodos de *dependentes de medição*. Em contrapartida, existem resultados na literatura sobre esquemas de localização que não se utilizam desta medição ou abstraem-na completamente; são os chamados métodos *independentes de medição*.

Devido ao *hardware* especial, geralmente necessário para a medição, os métodos dependentes de medição costumam ter maior custo em comparação com aqueles independentes de medição. Outra grande vantagem dos métodos independentes de medição é a insensibilidade aos erros inerentes às medições.

Todos os trabalhos citados na Seção 3.2.1 são exemplos de métodos dependentes de medição. Poucos trabalhos na literatura abordam métodos independentes de medição. Dentre eles, o estudo em [20] foi um dos primeiros, e considera sensores âncoras divulgando suas posições aos vizinhos na rede. Os sensores vizinhos, utilizando a informação das âncoras, estimam a própria posição como o centróide¹ do polígono definido pelas posições recebidas das âncoras. Como as âncoras, neste caso, só fornecem a informação aos vizinhos, para uma boa estimativa é necessária uma quantidade considerável de âncoras, o que é indesejável. Para contornar este problema, um outro método chamado DV-hop [30] procura repassar a informação das âncoras para todos os sensores através da própria rede, mantendo a contagem dos saltos (*hops*) a cada sensor pelo caminho. Os sensores calculam as suas posições baseados nas localizações das âncoras, na contagem de saltos no menor caminho para cada âncora e na distância euclidiana média por salto, a qual é obtida pela comunicação entre as âncoras (este método será detalhado na Seção 4.1). Outro exemplo de método independente de medição, muito similar ao DV-hop, é o Amorphous [31], onde a grande diferença é que a estimativa da distância euclidiana média por salto é inferida através de comunicação entre sensores vizinhos (e não das âncoras, como no DV-hop), e para o cálculo é considerado que a densidade de sensores é previamente conhecida.

3.2.3 Mobilidade

Quanto à mobilidade, as redes de sensores podem ser estáticas ou dinâmicas. Existem aplicações que justificam ambos os cenários. Um exemplo de emprego de rede estática é a monitoração de condições geológicas (sismografia,

¹Em geometria, *centróide* ou *baricentro* refere-se ao centro de massa de um objeto, definido pela interseção de todos os hiperplanos que dividem o objeto em duas partes de igual momento sobre o hiperplano.

etc.), enquanto o rastreamento de veículos ou animais são exemplos de redes dinâmicas. A grande maioria dos estudos atuais considera apenas redes estáticas. Um argumento geralmente utilizado pelos que tratam o problema desta forma é que o método de localização poderia ser executado periodicamente para prover a nova localização dos sensores móveis, e o resultado seria como uma fotografia de um determinado instante no tempo. Evidentemente, este argumento não se sustenta para determinadas aplicações. No entanto, alguns estudos mais recentes não só tratam as redes dinâmicas como se beneficiam do movimento dos sensores para melhorar a acurácia dos resultados obtidos [32, 33].

3.2.4 Organização Computacional

Quanto à organização computacional, podemos classificar os métodos de localização (mais especificamente, os seus algoritmos) em *centralizados* e *distribuídos*.

Os algoritmos centralizados de localização são projetados para executarem em uma máquina central com grande disponibilidade de recursos computacionais. Os sensores coletam os dados do ambiente e os repassam a uma estação base para análise, que retorna as posições computadas de volta à rede. Algoritmos centralizados superam a limitação computacional dos sensores admitindo o custo de comunicação no transporte dos dados entre a rede e uma estação base. Note que a estação base não é necessariamente estática e, em geral, de fato não o é. A maioria das implementações centralizadas prevê algum tipo de coleta por sobrevôo da área monitorada ou base que se move por entre os sensores. Por outro lado, há estudos que prevêem uma estação base fixa e os sensores repassam seus dados através da rede. Esta última abordagem claramente sobrecarrega os nós próximos às estações e torna-se inviável para redes muito grandes. O tipo de processamento que é executado na máquina centralizada varia, mas os principais exemplos utilizam programação semi-definida [34] e escalonamento multidimensional (MDS) [35].

Já os algoritmos distribuídos são projetados para executarem localmente nos sensores da rede, utilizando paralelismo intenso e comunicação entre os sensores para compensar a falta de poder computacional. Em geral, estes algoritmos utilizam apenas uma porção dos dados para resolverem o problema da localização de forma independente, produzindo uma aproximação do algoritmo centralizado correspondente onde todos os dados seriam considerados e utilizados para resolver todas as posições simultaneamente.

Há duas abordagens importantes para a localização distribuída. Um primeiro grupo de algoritmos distribuídos utiliza o artifício de sensores âncoras, onde a rede inicia com um pequeno número deles, alguns sensores conseguem medir a distância até as âncoras mais próximas e, em geral, passam a atuar também como âncoras para ajudar os demais sensores da rede a se localizarem. São exemplos deste grupo de algoritmos o APIT [36] e o DV-hop [30]. Um segundo grupo de algoritmos aborda o problema da localização tentando otimizar uma métrica global sobre a rede de forma distribuída. Geralmente, estes algoritmos dividem a rede em pequenas regiões que se sobrepõem, e cada uma destas regiões busca criar um mapa local ótimo. Após este processo as regiões procuram fundir os mapas locais em um único mapa global. Este método não é muito robusto devido ao acúmulo dos erros de medição na combinação dos mapas. Exemplos deste tipo de abordagem podem ser encontrados em [33, 37].

3.3 A Necessidade de uma Nova Abordagem

Fica claro pela análise da literatura que nenhum algoritmo ou método de localização existente é claro favorito dentre os demais. Existem métodos que proporcionam maior acurácia e precisão sob certas condições em comparação aos demais. Vários fatores devem ser considerados na comparação, como por exemplo:

- (i) densidade de sensores;
- (ii) densidade de âncoras;
- (iii) topologia da rede (isotropia);
- (iv) presença de obstáculos ou irregularidades no terreno;
- (v) distribuição dos erros de medição (para métodos dependentes de medição).

Também podemos afirmar que mesmo os métodos mais sofisticados ainda sofrem de falta de acurácia, principalmente sob condições adversas (baixa densidade de sensores e âncoras, topologia irregular, medição imprecisa, etc.).

A insensibilidade a erros de medição provê maior robustez e é uma grande vantagem dos métodos independentes de medição. Dentre estes, os algoritmos baseados em contagem de saltos, em especial, são completamente livres de infraestrutura (ad hoc) e distribuídos, tornando-os ainda mais promissores.

Infelizmente, tais métodos ainda apresentam baixa acurácia, particularmente em redes esparsas ou irregulares. Acreditamos que a fraqueza destes métodos reside na estimativa grosseira da distância euclidiana por salto.

Torna-se patente, a partir da revisão da literatura sobre o tema, a carência de estudos teóricos para suportar métodos mais robustos, de maior acurácia e melhor desempenho. Trilhando nessa direção, abordaremos no Capítulo 4 o método DV-hop, considerado um dos mais bem sucedidos algoritmos para localização, à vista dos novos resultados teóricos apresentados no Capítulo 2.

Capítulo 4

Uma Nova Abordagem

Neste capítulo abordaremos o problema da localização em redes de sensores sob uma nova ótica, fazendo uso dos resultados apresentados no Capítulo 2 para aprimorar o DV-hop, um dos métodos mais eficientes encontrados na literatura. A união do sólido embasamento teórico sobre GGAs, desenvolvido previamente neste trabalho, com a aplicabilidade prática de um método de localização com acurácia e desempenho superiores é o objetivo deste capítulo.

O material apresentado no Capítulo 2 é relevante por si só, uma vez que ajuda a elucidar alguns aspectos sobre GGAs que são ainda pouco compreendidos. Nosso principal interesse nele, entretanto, advém do fato de que, mesmo sem o conteúdo da Seção 2.7.2, o qual é de uma natureza mais especulativa, é fornecida uma base importante para o imediato desenvolvimento de uma nova técnica para resolução do problema da localização em redes de sensores sem fio.

De fato, pode-se perceber claramente que praticamente qualquer método para resolver esse problema pode em princípio se beneficiar daquele material, uma vez que uma fase inicial comum à maioria dos métodos, como apontado em [38], é a tentativa de determinar as distâncias euclidianas de qualquer sensor até às âncoras. Esta fase é, em geral, seguida por outra na qual as posições de sensores desconhecidas são estimadas a partir da informação sobre distâncias euclidianas disponível, em geral, através de multilateração. Uma possível terceira fase de refinamento das localizações pode ser executada para resultados mais precisos.

Nosso foco aqui será a primeira dessas fases e a exploração do conhecimento sobre distâncias euclidianas de densidade de probabilidade máxima, discutido na Seção 2.7. Desta forma, assumimos que o processo de distribuição dos sensores é tal que pode ser considerado uniformemente aleatório e, ainda, que

todos os sensores possuem raio de comunicação adequadamente aproximados por uma região circular de raio R com centro no sensor.

Tal qual em [38], estamos interessados em algoritmos genuinamente distribuídos que possam ser empregados em redes de sensores sem fio de larga escala. Além disso, tais algoritmos devem ser, ao máximo possível, independentes de infraestrutura global, tolerantes a falhas e erros de medição de distâncias, e requerer pouco processamento e mínima comunicação. Consideraremos redes estáticas ou com pouca mobilidade e, neste último caso, assumiremos que os algoritmos fornecem a configuração da rede em um determinado instante no tempo e sucessivas execuções podem ser necessárias.

4.1 DV-hop

Uma vez estabelecidas estas características, há poucos métodos que podem ser considerados como opções válidas. O mais significativo, conforme mencionado anteriormente, é o método descrito por Dragos Niculescu e Badri Nath [30], chamado *Ad hoc Positioning System*(APS) cujo objetivo era prover coordenadas absolutas em uma rede de sensores onde as âncoras não são capazes de se comunicarem diretamente com todos os sensores. Assim, a alternativa viável era a propagação da informação das âncoras através da rede. Uma vez que um sensor obtém estimativa para ao menos três âncoras, ele é capaz de estimar sua própria posição por multilateração.

Para o APS, são definidos alguns algoritmos de propagação da informação que circula a respeito das âncoras, configurando a primeira fase do método. Dentre estes algoritmos, o único que pode ser considerado independente de medição é o denominado DV-hop, onde “DV” é uma referência ao algoritmo de roteamento *Distance Vector*, no qual cada nó da rede só se comunica com os nós vizinhos trocando informações contendo estimativas sobre a rede já obtidas até o momento.

No DV-hop, cada âncora difunde sua posição que será propagada através da rede juntamente com um contador de saltos, iniciado com o valor 1 e incrementado por cada sensor que repassa a informação. Os sensores mantêm armazenado o valor mínimo do contador para cada âncora cuja informação foi recebida ignorando novas informações com valor do contador maior do que aquele já armazenado para determinada âncora. Através deste mecanismo, todos os sensores da rede, incluindo as âncoras, obtêm o número de saltos no menor caminho entre o próprio sensor e todas as âncoras.

Após este procedimento, cada âncora v_i estima a distância euclidiana média δ_{salto}^i de um único salto no menor caminho utilizando a seguinte fórmula:

$$\delta_{\text{salto}}^i = \frac{\sum_{v_j} \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}}{\sum_{v_j} d_{ij}}, \quad (4.1)$$

onde os somatórios são efetuados para toda âncora v_j da rede, a âncora v_i possui coordenadas (x_i, y_i) , e d_{ij} representa o número de saltos no menor caminho entre v_i e v_j .

Uma vez calculada a distância euclidiana média de um salto no menor caminho, as âncoras propagam esta estimativa através da rede. Como todos os sensores possuem o número de saltos no menor caminho para cada âncora, eles multiplicam este valor pela média das estimativas recebidas. Desta forma, a cada estimativa recebida o sensor pode corrigir a distância média de um salto e recalculá-la para todas as distâncias euclidianas para todos os sensores da rede. Com o cálculo da distância euclidiana estimada para diversas âncoras, cada sensor pode estimar sua própria posição através de multilateração.

No DV-hop as estimativas são propagadas na rede de forma controlada, isto é, uma vez que um sensor recebeu uma estimativa e a repassou, ele não repassará mais nenhuma estimativa subsequente. Esta política garante que a maioria dos sensores receberá apenas uma estimativa e, em geral, da âncora mais próxima. Esta propagação controlada ajuda a manter as estimativas localizadas na vizinhança das âncoras pelas quais foram geradas, considerando assim as possíveis assimetrias ou irregularidades da rede. Não obstante, o DV-hop ainda sofre de falta de acurácia em topologias de rede altamente irregulares [38].

A fim de ilustrar o método, considere o exemplo da Figura 4.1. Nela, v_1 , v_2 e v_3 são âncoras e v_4 é um sensor comum. Note que o menor caminho entre v_1 e v_2 possui 2 saltos; entre v_1 e v_3 temos 6 saltos; e entre v_2 e v_3 há 5 saltos. Pelas distâncias indicadas na figura, temos:

$$\begin{aligned} \delta_{\text{salto}}^1 &= \frac{40 + 100}{2 + 6} = 17,50 \\ \delta_{\text{salto}}^2 &= \frac{40 + 75}{2 + 5} = 16,42 \\ \delta_{\text{salto}}^3 &= \frac{75 + 100}{5 + 6} = 15,90. \end{aligned}$$

Estas estimativas serão propagadas na rede. Como a propagação é controlada, o sensor v_4 provavelmente só receberá a estimativa da âncora mais próxima,

no caso v_2 . Observe que os menores caminhos entre v_4 e as âncoras v_1 , v_2 e v_3 possuem 3, 2 e 3 saltos, respectivamente. Logo, v_4 poderá calcular:

$$\delta_{41} = 3 \times 16,42 = 49,26$$

$$\delta_{42} = 2 \times 16,42 = 32,84$$

$$\delta_{43} = 3 \times 16,42 = 49,26,$$

onde δ_{ij} é a distância euclidiana estimada entre v_i e v_j . Estes valores serão, então, utilizados para calcular a posição estimada de v_4 através de multilateração.

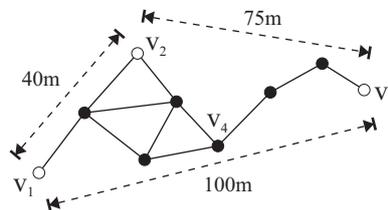


Figura 4.1: Exemplo de aplicação do método DV-hop.

Uma abordagem similar foi utilizada por Savarese et al. em [39], onde o método foi chamado de Hop-TERRAIN. Como o Hop-TERRAIN contribuiu com somente algumas pequenas mudanças no DV-hop e este último foi publicado primeiro, nos referiremos somente ao DV-hop daqui em diante.

O DV-hop é, em geral, considerado como um dos métodos mais robustos, estáveis e precisos para estimar distâncias euclidianas, sendo ainda completamente insensível a erros de medição de distância [36, 38].

4.2 Aprimorando o DV-hop

Claramente, a principal fraqueza do DV-hop é a sua confiança, em cada sensor, sobre uma única estimativa de distância euclidiana a ser associada com cada aresta dos caminhos mais curtos. Pelo fato de essa estimativa se basear apenas em contagem de saltos e distância euclidiana relativa a uma única âncora, aplicá-la aos menores caminhos a todas as âncoras tende a causar problemas de acurácia. É exatamente neste ponto onde os resultados discutidos no Capítulo 2 entram para auxiliar a aprimorar o DV-hop. Neste sentido, podemos modelar a rede de sensores como um grafo geométrico aleatório (GGA). Note

que o conceito de contagem de saltos em redes de sensores é equivalente à distância em arestas em GGAs. Portanto, devem ser consideradas novamente as definições da Seção 2.2. Nosso objetivo no aprimoramento do DV-hop é obter ganhos tanto em acurácia quanto em desempenho.

O novo algoritmo inicia da mesma forma que o DV-hop original, isto é, fazendo cada âncora difundir sua própria localização junto com um contador de saltos e inundando a rede através dos sensores repassadores. Daí em diante, entretanto, o algoritmo é consideravelmente simplificado. Uma vez que um sensor comum obteve a contagem de d saltos para alguma âncora, ele pode utilizar o valor $\delta_{\max}(d)$, conforme estabelecido na Seção 2.7.1, para estimar a distância euclidiana para aquela âncora.

Uma vantagem imediata em proceder desta forma é que eliminamos a necessidade das âncoras estimarem distâncias euclidianas referentes a um salto no menor caminho e, com isso, a necessidade de qualquer disseminação adicional além das iniciais. Ademais, conforme discutiremos na Seção 4.3.2, a acurácia resultante é melhorada em comparação à versão original do DV-hop.

Além do ganho em acurácia na maioria dos cenários, a ser discutido adiante, nossas modificações no DV-hop se traduzem em várias vantagens práticas. Em primeiro lugar, reduzimos o processamento local, tanto nas âncoras quanto nos sensores comuns. Esta redução advém do fato de que, como mencionamos, não há mais necessidade de as âncoras computarem suas estimativas nem de os sensores comuns recalcularem suas estimativas de distâncias euclidianas até as âncoras a cada informação disseminada por alguma âncora que os alcança.

Adicionalmente, a eliminação de um estágio inteiro do algoritmo original, a grosso modo, reduz pela metade a necessidade de comunicação, já que a segunda difusão de informação das âncoras é completamente eliminada. Esta forte redução nas necessidades de comunicação tem impacto direto na redução do tempo de resolução do problema, uma vez que a latência da comunicação entre sensores supera em muito o tempo de acesso a memória local. Tudo isso implica, ainda, em significativa economia de energia, pois o envio de mensagens consome a maior parte da energia de um sensor. A importância dessas reduções torna-se aparente à vista das análises comparativas efetuadas em [36] e [38] que mostram que, a não ser pelo grande dispêndio de comunicação (de fato, um dos maiores quando comparados a outros métodos independentes de medição), o DV-hop tem ótimo desempenho, especialmente em redes uniformemente distribuídas e altamente conexas.

Naturalmente, o preço a ser pago quando adotamos a nova versão para o DV-hop é que, em uma fase preparatória, os valores de $\delta_{\max}(d)$ a serem utilizados devem ser computados, provavelmente através de simulações dependendo do valor de d . Além disso, a preparação depende dos valores de n e z . Esta, contudo, parece ser uma questão simples, uma vez que o conhecimento do tamanho da rede e conectividade esperada pode ser considerado como parte do processo de distribuição dos sensores, podendo, assim, ser assumido como conhecido desde o início. Apenas no caso de redes pequenas, uma alta taxa de falhas nos sensores, que alteraria n após a distribuição dos mesmos, poderia influir nos resultados.

4.3 Simulação

Conduzimos extensivas simulações computacionais no intuito de compararmos a acurácia do DV-hop original com a da sua versão modificada, a qual utiliza as distâncias euclidianas de densidade de probabilidade máxima descritas na Seção 2.7.1. A acurácia é dada em termos do erro estimado total, isto é, a distância euclidiana média entre as localizações reais e estimadas de cada sensor. A seguir, descrevemos como modelamos o problema para as simulações.

4.3.1 Modelagem do Problema

Podemos modelar a rede de sensores como um GGA e nos aproveitarmos diretamente dos resultados do Capítulo 2. No entanto, nosso estudo sobre GGAs assume que todas as distâncias consideradas são relativas a um vértice v_0 localizado no centro da região unitária. Já nosso estudo sobre redes de sensores e o problema da localização trata de distâncias entre qualquer par de sensores e, por esta razão, não assumimos a existência de um sensor localizado exatamente no centro da região circular. Assim, as distâncias euclidianas consideradas no estudo sobre GGAs variam até o comprimento do raio do círculo unitário. Entretanto, a análise sobre redes de sensores deve permitir que sensores estejam diametralmente opostos na região circular.

Descrevemos aqui como fazemos para compatibilizar estes dois cenários. Primeiramente, consideramos todos os sensores da rede contidos em uma região circular quatro vezes menor do que aquela utilizada no Capítulo 2. O raio da última região é então igual ao diâmetro da primeira, assim todas as distâncias euclidianas de interesse têm agora o mesmo alcance em ambos os cenários. Como a área da região menor (a dos sensores) é $1/4$, a fórmula que deriva R

de z e n torna-se $R = (1/2)\sqrt{z/\pi n}$. A fim de utilizarmos os mesmos valores de z e R nos dois casos, fazemos o número de sensores ser, neste capítulo, quatro vezes menor que o número de vértices no GGA considerado no Capítulo 2. Em suma, todo este esquema funciona como se derivássemos certas propriedades de distâncias euclidianas em uma região circular e depois as aplicássemos em outra região circular, contida na primeira, porém quatro vezes menor que ela.

Portanto, aqui utilizamos $n = 1\,000$ sensores, incluídas as âncoras, dispostos aleatoriamente de maneira uniforme. Seguindo os parâmetros do Capítulo 2, utilizamos $z = 3\pi$ e $z = 5\pi$, implicando, respectivamente, que $R \approx 0,027$ e $R \approx 0,035$. Relembramos que ambos os valores de z estão significativamente acima da transição de fase que faz surgir a componente conexa gigante do grafo, a qual ocorre em $z \approx 4,52$ [12], apesar de valores mais baixos também ocorrerem na prática [40]. Em todos os nossos experimentos, então, as redes são conexas com alta probabilidade.

É esperado que o desempenho, tanto do DV-hop quanto de nossa modificação, dependa da quantidade de âncoras presentes na rede. Assim, outro parâmetro que devemos levar em consideração é a densidade de âncoras w , dada pela fração de n que o número de âncoras representa. Utilizamos $w = 0,01, 0,025, 0,05, 0,075, 0,1$. Para $n = 1\,000$, esses cenários implicam em um número de âncoras de, respectivamente, 10, 25, 50, 75 e 100. Ressaltamos que o conjunto de valores escolhidos para a conectividade esperada z e densidade de âncoras w estão em conformidade com os valores típicos encontrados na literatura [36, 38].

A implementação do algoritmo DV-hop nas simulações foi efetuada conforme descrito a seguir. Para cada valor de z e w , cada resultado da simulação que apresentamos é uma média sobre 10^5 rodadas de execução. Em cada rodada, a distância euclidiana entre todo par de sensores é calculada, assim como a distância em arestas entre eles (usando o algoritmo de Dijkstra). Em seguida, para cada âncora, a distância euclidiana correspondente a um salto no menor caminho é calculada. E a estimativa de distância euclidiana por salto particular de cada sensor comum da rede é derivada pela média destas mesma estimativas calculadas pelas k âncoras mais próximas no grafo. Utilizamos $k = 3, 4, 5, 6$, uma vez que ao menos 3 âncoras são necessárias para efetuar a multilateração em \mathbb{R}^2 e valores acima de 6 se mostraram irrelevantes, conforme comentado mais adiante. Finalmente, a posição estimada de cada sensor é derivada através de multilateração sobre as k distâncias euclidianas para âncoras da rede. Os erros de estimativa de posição são calculados e acumulados por to-

das as rodadas. Após todas as rodadas, o erro médio de estimativa de posição, que é a nossa medida de acurácia, é calculado.

Observe que esta implementação do DV-hop resulta na melhor acurácia possível para o algoritmo, uma vez que usamos precisamente as âncoras mais próximas e dispensamos a necessidade de tratamento de atrasos ou perdas que poderiam ocorrer em um cenário real. Note ainda que, em não considerarmos a latência das comunicações e as possíveis perdas ou falhas de transmissão, privilegiamos o DV-hop original, uma vez que ele possui maior dependência de envio de mensagens em comparação com nossa versão modificada e, por isso, seria o maior prejudicado em um cenário desfavorável no que tange à confiabilidade e ao desempenho das comunicações na rede.

Note também que o processo de multilateração para um sensor comum envolve a linearização e solução de um sistema de equações para a interseção de k círculos, um para cada uma das k âncoras. Cada círculo possui centro na âncora correspondente e raio igual à distância euclidiana entre a âncora e o sensor em questão. Voltando aos exemplos das Figuras 3.2 e 4.1, a partir das posições conhecidas (x_j, y_j) e das distâncias estimadas δ_{4j} de um sensor comum v_4 até as k âncoras v_j , onde $j = 1, \dots, k$ e, no caso das figuras citadas, $k = 3$, derivamos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned}(x_1 - x_4)^2 + (y_1 - y_4)^2 &= \delta_{41}^2 \\(x_2 - x_4)^2 + (y_2 - y_4)^2 &= \delta_{42}^2 \\(x_3 - x_4)^2 + (y_3 - y_4)^2 &= \delta_{43}^2.\end{aligned}$$

Este sistema pode ser linearizado subtraindo a última equação das $k - 1$ primeiras:

$$\begin{aligned}x_1^2 - x_3^2 - 2(x_1 - x_3)x_4 + y_1^2 - y_3^2 - 2(y_1 - y_3)y_4 &= \delta_{41}^2 - \delta_{43}^2 \\x_2^2 - x_3^2 - 2(x_2 - x_3)x_4 + y_2^2 - y_3^2 - 2(y_2 - y_3)y_4 &= \delta_{42}^2 - \delta_{43}^2.\end{aligned}$$

Reordenando os termos, chegamos a um sistema linear de equações na forma matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$, onde:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2(x_1 - x_3) & 2(y_1 - y_3) \\ 2(x_2 - x_3) & 2(y_2 - y_3) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} x_1^2 - x_3^2 + y_1^2 - y_3^2 + \delta_{43}^2 - \delta_{41}^2 \\ x_2^2 - x_3^2 + y_2^2 - y_3^2 + \delta_{43}^2 - \delta_{42}^2 \end{bmatrix}.$$

Este sistema pode ser resolvido através da abordagem padrão por matrizes:

$$\begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \end{bmatrix} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

Em casos excepcionais, a matriz inversa não pode ser calculada e a multilateração falha (tais casos foram desconsiderados na simulação).

Cabem aqui algumas considerações sobre a arquitetura de *software* utilizada na simulação. Para as operações com matrizes, utilizamos o pacote de bibliotecas em linguagem Fortran90 denominado LAPACK (*Linear Algebra PACKage* [41]), o qual fornece rotinas para resolução de sistemas de equações lineares, soluções utilizando o método dos mínimos quadrados, problemas com autovalores, inversão e transposição de matrizes, etc. O LAPACK, por sua vez, se utiliza de chamadas de mais baixo nível ao pacote denominado BLAS (*Basic Linear Algebra Subprograms* [42]), que implementa algoritmos eficientes para as operações matriciais. A fim de obtermos o melhor desempenho com o BLAS nas máquinas de simulação, utilizamos um gerador automatizado de implementação otimizada do BLAS para a arquitetura de computação específica daquelas máquinas, denominado ATLAS (*Automatically Tuned Linear Algebra Software* [43]), o qual provê interface em linguagem C para as rotinas de álgebra linear do BLAS e do LAPACK. Sem estes recursos de *software* a execução das simulações consumiria um tempo consideravelmente maior, inviabilizando possivelmente o número elevado (10^5) de rodadas de execução empregado.

A versão modificada proposta para o algoritmo DV-hop é tratada de forma similar, exceto, evidentemente, que agora não é mais necessário calcular nenhuma distância euclidiana. Em vez disso, para cada sensor comum, a estimativa da distância euclidiana para cada uma das k âncoras mais próximas é assumida como sendo $\delta_{\max}(d)$, onde d é a distância em arestas entre o sensor e a âncora. Distâncias euclidianas são, assim, buscadas diretamente em um vetor indexado por d que é específico para os valores de n e z em uso, conforme explicado anteriormente.

4.3.2 Resultados

Os resultados da simulação são exibidos na Figura 4.2, onde cada gráfico corresponde a um valor específico de w e contém quatro conjuntos de valores

(linhas no gráfico) para o erro de estimativa, um para cada algoritmo (o original e o modificado) combinado com cada um dos valores de z em uso (3π e 5π). Todos os gráficos são apresentados em função de k , o número de âncoras usadas na multilateração de cada sensor. A representação dos gráficos em função de k ressalta a acentuada transição de fase que ocorre quando $k > 3$, que casualmente coincide com os achados em [36]. Além dessa transição de fase, mostra-se ineficaz o aumento de k para valores acima de 5, pois os ganhos obtidos em acurácia tornam-se insignificantes. Observamos também uma grande variância entre as rodadas quando $k = 3$, que explica o comportamento aparentemente instável dos resultados quando comparados entre si neste valor de k . Por isso, daqui em diante, nos concentraremos somente nos resultados para $k > 3$.

Estes resultados indicam que o algoritmo DV-hop modificado alcança melhor acurácia que a versão original, e que a diferença aumenta quando a rede possui menor número de âncoras (isto é, valores menores de w). De fato, para um valor fixo de k , nota-se que os dois algoritmos somente atingem níveis de acurácia equivalentes quando permitimos que a versão original execute com número de âncoras significativamente maior. Por exemplo, para $k = 4$, o nível de acurácia obtido quando executamos a versão modificada com $w = 0,01$ (10 âncoras) só começa a ser atingido pela versão original quando a executamos com $w = 0,025$ (25 âncoras), ou seja, um número de âncoras 150% maior. Ressaltamos, ainda que as modificações efetuadas no DV-hop o tornaram mais insensível a variações na densidade de âncoras.

Nossos resultados também confirmam que, conforme esperado, em ambas as versões do algoritmo a acurácia melhora com o aumento da conectividade esperada. Este fato pode ser constatado pela observação de que, em redes com alta conectividade esperada, as k âncoras mais próximas de um sensor estão a menos saltos dele, resultando em melhores estimativas da distância euclidiana e, portanto, menores erros na localização. Enquanto a razão deste fato é clara para o caso do DV-hop original, para a versão modificada do algoritmo é uma consequência de como as densidades de probabilidade mostradas nas Figuras 2.5, 2.6, 2.8, 2.9 e 2.10 tornam-se mais concentradas em torno das médias para menores valores de d , o que faz a utilização de $\delta_{\max}(d)$ ser mais precisa nestes casos.

Também é interessante observar que ambas as versões do algoritmo tornam-se insensíveis a mudanças na conectividade esperada quando introduzimos mais

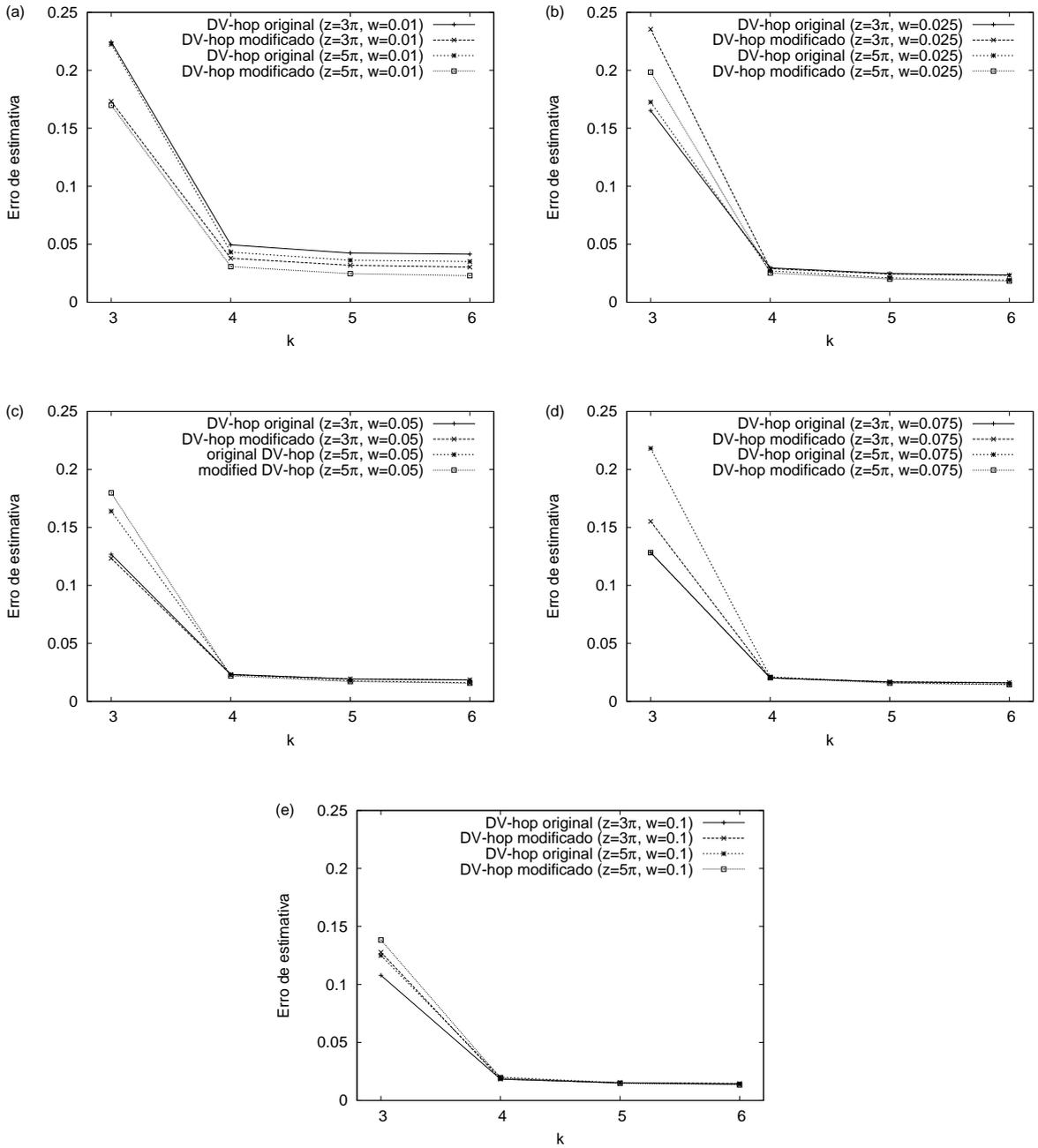


Figura 4.2: Erros de estimativa dos algoritmos DV-hop original e modificado, para $z = 3\pi$ e $z = 5\pi$, com $w = 0,01$ (a), $w = 0,025$ (b), $w = 0,05$ (c), $w = 0,075$ (d) e $w = 0,1$ (e).

âncoras na rede. Isto pode ser notado comparando os valores do gráfico da Figura 4.2(a) com as linhas quase indistinguíveis da Figura 4.2(e).

Capítulo 5

Conclusão

Este trabalho abordou dois problemas relevantes, a princípio desconexos, mas que guardam profundas relações intrínsecas.

O primeiro problema abordado, de cunho mais teórico, foi o da correlação entre as distâncias em arestas e euclidianas em um grafo geométrico aleatório (GGA) bidimensional com distribuição uniforme dos vértices. Foram derivadas analiticamente as densidades de probabilidade $p_d(\delta)$ de dois vértices aleatoriamente escolhidos estarem à distância euclidiana δ condicionadas à distância em arestas entre os mesmos vértices ser igual a d , para $d = 1$ e $d = 2$. Para o caso onde $d = 3$, os cálculos foram feitos de forma semi-analítica, através de um parâmetro (n') obtido via simulação. O mesmo foi feito para as distribuições de probabilidade inversa $P_\delta(d)$, isto é, de que dois vértices aleatoriamente escolhidos estão à distância em arestas d uma vez que se encontram à distância euclidiana δ , para $d = 1, 2, 3$. Conduzimos simulações computacionais, cujos resultados obtidos foram contrastados com as previsões analíticas e mostraram excelente congruência. Para os casos onde $d > 3$, os resultados da simulação mostraram, apoiados pelo Teorema do Limite Central, que $p_d(\delta)$ é aproximadamente gaussiana.

Ainda sobre este problema, estudamos o comportamento dos pontos de máximo de $p_d(\delta)$ e verificamos, através de simulações, que o ponto de densidade máxima cresce linearmente conforme aumentamos d , para $d > 3$. Mostramos, ainda, que a inclinação (coeficiente angular γ) desta função linear varia também linearmente em função do raio de comunicação R . Este comportamento estabelece uma correlação direta entre a interdependência das distâncias euclidianas com as distância em arestas e o valor de R . Fornecemos uma aproximação inicial para a caracterização analítica de γ que, além do fato de não serem conhecidas aproximações melhores, abre caminho na direção de um melhor

entendimento das interdependências entre as distâncias e a própria estrutura dos GGAs.

O estudo e os resultados apresentados para este problema, mesmo isoladamente, já constituem importante contribuição para a ativa área de pesquisa sobre GGAs, a qual tem recebido cada vez mais atenção justamente pelo fato de servirem como excelente modelo de redes sem fio.

O segundo problema apresentado foi o da localização em redes de sensores. Esta é uma área de intensa atividade de pesquisa e relativamente recente. Apesar da vasta literatura e dos inúmeros avanços, resumidos e organizados no Capítulo 3, os métodos de localização existentes ainda proporcionam baixa acurácia ou desempenho razoável apenas sob fortes condições, permanecendo como um problema desafiador pelas restrições tanto práticas quanto teóricas inerentes ao problema. Neste trabalho, abordamos a questão sob uma nova ótica a partir dos resultados sobre distâncias em GGAs obtidos no Capítulo 2. O método de localização proposto, o qual se baseia no já conhecido e bem-sucedido método DV-hop, possui diversas características desejáveis, como a independência de medição e o funcionamento completamente distribuído e *ad hoc*. Mostramos que o aproveitamento do conhecimento adquirido sobre $p_d(\delta)$ e, em especial, sobre as distâncias euclidianas de densidade de probabilidade condicional máxima $\delta_{\max}(d)$ possui um papel preponderante no estabelecimento de novos níveis de qualidade na estimativa de localização.

Demonstramos, através de extensas simulações que contrastam o resultado da versão original do DV-hop com a nossa versão, que o novo método proposto apresenta grandes vantagens em relação ao original. A principal delas é a maior acurácia da nova versão mesmo na presença de menor número de âncoras, isto é, a nossa versão atinge níveis de acurácia que a versão original só alcança com número significativamente maior de pontos de referência de posição conhecida. Além disso, a versão modificada torna desnecessária a fase de cálculos de estimativas de distância euclidiana por salto no menor caminho e, por consequência, elimina a necessidade de recálculos de posição localmente nos sensores a cada nova estimativa recebida de alguma âncora. Esta característica atenua fortemente a principal fraqueza do DV-hop original em relação aos demais métodos já desenvolvidos: a alta complexidade de mensagens, isto é, a alta utilização de comunicação entre os sensores. Adicionalmente, a eliminação desta fase e dos cálculos locais, reflete-se em uma convergência mais rápida à solução final do algoritmo, o que é altamente desejável, em especial, em redes dinâmicas. Com a redução do processamento local e da necessidade

de comunicação, o consumo de energia dos sensores também se torna mais eficiente quando introduzimos as modificações apresentadas.

É interessante observar que os problemas aqui estudados são geralmente discutidos em áreas distintas do conhecimento. Os GGAs são comumente abordados por pesquisadores das áreas de Teoria dos Grafos, Combinatória, Probabilidade e Estatística ou Matemática Discreta em geral. Já o problema da localização em redes de sensores está inserido no escopo de Sistemas Distribuídos, Redes de Computadores, Telecomunicações e Robótica. A ligação entre estes diferentes “mundos” é não só edificante para estes dois campos da ciência, como particularmente estimulante pela interseção do forte e sólido embasamento teórico com a vasta aplicabilidade e contribuição prática para a sociedade. Os resultados práticos superiores que obtivemos para o problema da localização enfatizam a relevância dos estudos teóricos apresentados sobre distâncias em GGAs.

Os resultados constantes nesta tese geraram dois artigos distintos em conferências internacionais. O primeiro [44] concentra-se nos achados sobre a correlação entre distâncias em GGAs. O segundo [45] acrescenta o estudo sobre distâncias euclidianas de densidade máxima e apresenta os resultados da aplicação do conhecimento sobre GGAs no contexto do problema da localização em redes de sensores.

Este trabalho abriu muitas direções para trabalhos futuros. Pela perspectiva grafo-teórica, uma expressão analítica mais precisa para γ , a partir do número de vértices e a conectividade esperada do grafo, possivelmente até uma expressão exata, seria de grande interesse. Além do valor teórico, tal expressão poderia eliminar totalmente a necessidade de qualquer simulação prévia para empregar o método de localização proposto. A caracterização analítica dos parâmetros das gaussianas, que surgiram como densidades de probabilidade condicional nos casos onde $d > 3$, também merece atenção em futuras pesquisas e poderia ser uma alternativa para obter de forma mais precisa os pontos de máximo destas funções. Uma expressão analítica para n' , derivado neste trabalho através de simulação e utilizado nas expressões de probabilidade no caso onde $d = 3$, também seria interessante.

Pela perspectiva da aplicação de localização de sensores, a investigação de algoritmos adaptativos ou heurísticas para suportar redes altamente irregulares ou esparsas mantendo boa acurácia, através de adequada exploração do fundamento teórico, nos parece um caminho promissor.

Referências Bibliográficas

- [1] ESTRIN, D., GIROD, L., POTTIE, G., et al. “Instrumenting the world with wireless sensor networks”. In: *Proc. IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, v. 4, pp. 2033–2036, 2001.
- [2] KARP, B., KUNG, H. T. “GPSR: greedy perimeter stateless routing for wireless networks”. In: *Proc. ACM International Conference on Mobile Computing and Networking*, pp. 243–254, 2000.
- [3] BAILEY, D. H., BORWEIN, J. M., CRANDALL, R. E. “Box Integrals”, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, v. 206, n. 1, pp. 196–208, 2007.
- [4] TRIVEDI, K. S. *Probability and Statistics with Reliability, Queuing and Computer Science Applications*. 2 ed. New York, NY, John Wiley & Sons, 2002.
- [5] BONDY, J. A., MURTY, U. S. R. *Graph Theory with Applications*. 1 ed. New York, NY, North Holland, 1976.
- [6] PENROSE, M. *Random Geometric Graphs*. 1 ed. New York, NY, Oxford University Press, 2003.
- [7] WEISSTEIN, E. W. *CRC Concise Encyclopedia of Mathematics*. 2 ed. Boca Raton, FL, Chapman & Hall/CRC, 2002.
- [8] ERDŐS, P., RÉNYI, A. “On the Evolution of Random Graphs”, *Publications of the Mathematical Institute of the Hungarian Academy of Sciences*, v. 5, pp. 17–61, 1960.
- [9] APPEL, M. J. B., RUSSO, R. P. “The Connectivity of a Graph on Uniform Points in $[0, 1]^d$ ”, *Statistics and Probability Letters*, v. 60, pp. 351–357, 1996.

- [10] APPEL, M. J. B., RUSSO, R. P. “The Maximum Vertex Degree of a Graph on Uniform Points in $[0, 1]^d$ ”, *Advances in Applied Probability*, v. 29, pp. 567–581, 1997.
- [11] APPEL, M. J. B., RUSSO, R. P. “The Minimum Vertex Degree of a Graph on Uniform Points in $[0, 1]^d$ ”, *Advances in Applied Probability*, v. 29, pp. 582–594, 1997.
- [12] DALL, J., CHRISTENSEN, M. “Random Geometric Graphs”, *Physical Review E*, v. 66, n. 016121, 2002.
- [13] MEESTER, R., ROY, R. *Continuum Percolation*. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1996.
- [14] GUPTA, P., KUMAR, P. R. “Critical power for asymptotic connectivity in wireless networks”. In: McEneaney, W. M., Yin, G., Zhang, Q. (Eds.), *Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications: A Volume in Honor of W.H. Fleming*, Birkhäuser Boston, pp. 547–566, Boston, MA, 1998.
- [15] MCDIARMID, C. “Random Channel Assignment in the Plane”, *Random Structures and Algorithms*, v. 22, n. 2, pp. 187–212, 2003.
- [16] CLARK, B. N., COLBOURN, C. J., JOHNSON, D. S. “Unit Disk Graphs”, *Discrete Mathematics*, v. 86, pp. 165–177, 1990.
- [17] FEWELL, M. P. *Area of common overlap of three circles*. Technical Note DSTO-TN-0722, Australian Department of Defense, 2006.
- [18] CORMEN, T. H., LEISERSON, C. E., RIVEST, R. L., et al. *Introduction to Algorithms*. 2 ed. Cambridge, MA, The MIT Press, 2001.
- [19] BRADONJIĆ, M., ELSÄSSER, R., FRIEDRICH, T., et al. “Efficient broadcast on random geometric graphs”. In: *Proc. Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, pp. 1412–1421, 2010.
- [20] BULUSU, N., HEIDEMANN, J., ESTRIN, D. “GPS-less Low-cost Outdoor Localization for Very Small Devices”, *IEEE Personal Communications*, v. 7, n. 5, pp. 28–34, 2000.
- [21] ASPNES, J., EREN, T., GOLDENBERG, D., et al. “A Theory of Network Localization”, *IEEE Transactions on Mobile Computing*, v. 5, n. 12, pp. 1663–1678, 2006.

- [22] EREN, T., GOLDENBERG, D., WHITLEY, W., et al. “Rigidity, computation, and randomization in network localization”. In: *Proc. International Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies*, pp. 2673–2684, 2004.
- [23] JI, X., ZHA, H. “Sensor positioning in wireless ad-hoc sensor networks with multidimensional scaling”. In: *Proc. International Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies*, pp. 2652–2661, 2004.
- [24] HIGHTOWER, J., WANT, R., BORRIELLO, G. *SpotON: An Indoor 3D Location Sensing Technology Based on RF Signal Strength*. UW CSE 00-02-02, University of Washington, Department of Computer Science and Engineering, Seattle, WA, 2000.
- [25] BAHL, P., PADMANABHAN, V. “RADAR: An in-building RF-based user location and tracking system”. In: *Proc. International Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies*, pp. 775–784, 2000.
- [26] GIROD, L., ESTRIN, D. “Robust range estimation using acoustic and multimodal sensing”. In: *Proc. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, v. 3, pp. 1312–1320, 2001.
- [27] VARGA, A. “The OMNeT++ discrete event simulation system”. In: *Proc. European Simulation Multiconference*, 2001.
- [28] PRIYANTHA, N., CHAKRABORTY, A., BALAKRISHNAN, H. “The Cricket location-support system”. In: *Proc. ACM International Conference on Mobile Computing and Networking*, pp. 32–43, 2000.
- [29] NICULESCU, D., NATH, B. “Ad Hoc Positioning System (APS) using AoA”. In: *Proc. International Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies*, v. 3, pp. 1734–1743, 2003.
- [30] NICULESCU, D., NATH, B. “DV Based Positioning in Ad hoc Networks”, *Journal of Telecommunication Systems*, v. 22, pp. 267–280, 2003.
- [31] NAGPAL, R. *Organizing a Global Coordinate System from Local Information on an Amorphous Computer*. A.I. Memo 1666, MIT A.I. Laboratory, 1999.

- [32] HU, L., D.EVANS. “Localization for mobile sensor networks”. In: *Proc. ACM International Conference on Mobile Computing and Networking*, pp. 45–57, 2004.
- [33] MOORE, D., LEONARD, J., RUS, D., et al. “Robust distributed network localization with noisy range measurements”. In: *Proc. International Conference on Embedded Networked Sensor Systems*, pp. 50–61, 2004.
- [34] DOHERTY, L., GHAOUI, L. E., PISTER, K. S. J. “Convex position estimation in wireless sensor networks”. In: *Proc. International Annual Joint Conference of the IEEE Computer and Communications Societies*, v. 3, pp. 1655–1663, 2001.
- [35] SHANG, Y., RUML, W., ZHANG, Y., et al. “Localization from mere connectivity”. In: *Proc. ACM International Symposium on Mobile Ad Hoc Networking and Computing*, pp. 201–212, 2003.
- [36] HE, T., HUANG, C., BLUM, B., et al. “Range-free localization schemes in large scale sensor networks”. In: *Proc. ACM International Conference on Mobile Computing and Networking*, pp. 81–95, 2003.
- [37] MEERTENS, L., FITZPATRICK, S. *The Distributed Construction of a Global Coordinate System in a Network of Static Computational Nodes from Inter-node Distances*. Technical Report KES.U.04.04, Kestrel Institute, 2004.
- [38] LANGENDOEN, K., REIJERS, N. “Distributed Localization in Wireless Sensor Networks: a quantitative comparison”, *Computer Networks*, v. 43, pp. 499–518, 2003.
- [39] SAVARESE, C., RABAEY, J., LANGENDOEN, K. “Robust positioning algorithms for distributed ad-hoc wireless sensor networks”. In: *Proc. USENIX Technical Annual Conference*, pp. 317–328, 2002.
- [40] RÖMER, K., MATTERN, F. “The Design Space of Wireless Sensor Networks”, *IEEE Wireless Communications*, v. 11, n. 6, pp. 54–61, December 2004.
- [41] ANDERSON, E., BAI, Z., BISHOF, C., et al. *LAPACK Users’ Guide*. 2 ed. Philadelphia, PA, SIAM, 1995.

- [42] DONGARRA, J., CROZ, J. D., DUFF, I., et al. “A Set of Level 3 Basic Linear Algebra Subprograms”, *ACM Transactions on Mathematical Software*, v. 16, n. 1, pp. 1–17, 1990.
- [43] WHALEY, R., DONGARRA, J. “Automatically Tuned Linear Algebra Software”. In: *Proc. IEEE/ACM Conference on Supercomputing*, p. 38, 1998.
- [44] LEÃO, R. S. C., BARBOSA, V. C. “Approximate conditional distributions of distances between nodes in a two-dimensional sensor network”. In: Fiems, D., Horváth, G. (Eds.), *Analytical and Stochastic Modeling Techniques and Applications*, Springer-Verlag, pp. 324–338, Berlin, Germany, 2009.
- [45] LEÃO, R. S. C., BARBOSA, V. C. “Exploiting the distribution of distances between nodes to efficiently solve the localization problem in wireless sensor networks”. In: *Proc. ACM Workshop on Performance Monitoring and Measurement of Heterogeneous Wireless and Wired Networks*, 2010. A ser publicado.