



COPPE/UFRJ

COLORAÇÕES DE GRAFOS ARCO-CIRCULARES

André Leonardo Korenchandler

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadora: Márcia Rosana Cerioli

Rio de Janeiro
Setembro de 2010

COLORAÇÕES DE GRAFOS ARCO-CIRCULARES

André Leonardo Korenchandler

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof^a. Márcia Rosana Cerioli, D.Sc.

Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.

Prof^a. Cláudia Linhares Sales, Ph.D.

Prof^a. Flavia Bonomo, Dr.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
SETEMBRO DE 2010

Korenchandler, André Leonardo

Colorações de Grafos Arco-Circulares/André Leonardo
Korenchandler. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2010.

X, 60 p.: il.; 29,7cm.

Orientadora: Márcia Rosana Cerioli

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de
Engenharia de Sistemas e Computação, 2010.

Referências Bibliográficas: p. 59 – 60.

1. Problemas de otimização. 2. Coloração. 3.
Grafos arco-circulares. I. Cerioli, Márcia Rosana.
II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE,
Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III.
Título.

Agradecimentos

À Thatiana, cujo incentivo, carinho, dedicação e compreensão serviram como base para a elaboração desta dissertação.

À minha orientadora, professora Márcia Cerioli, por toda a ajuda na elaboração deste trabalho e por ter acreditado em meu potencial desde a iniciação científica, na graduação.

Aos membros da banca por terem aceitado o convite para avaliar este trabalho e pelo valor adicionado ao mesmo devido às suas participações.

Ao CNPq e à FAPERJ pelo suporte financeiro nos períodos de março/2007 a fevereiro/2008 (bolsa de mestrado) e março/2008 a julho/2008 (Bolsa Nota 10), respectivamente. E, finalmente, à CAPES e PESC, pelas condições de trabalho e apoio a participação em eventos.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

COLORAÇÕES DE GRAFOS ARCO-CIRCULARES

André Leonardo Korenchender

Setembro/2010

Orientadora: Márcia Rosana Cerioli

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

O problema da coloração de vértices é um dos problemas clássicos em teoria dos grafos, possuindo aplicações na modelagem de diversos problemas. Em particular, o problema da coloração de vértices de grafos arco-circulares possui aplicações nas áreas de escalonamento de tarefas e otimização de compiladores. Este trabalho apresenta alguns dos principais resultados relativos ao problema da coloração de vértices, bem como novos resultados em duas variantes deste problema: coloração de cliques e λ -coloração, restrito a grafos arco-circulares. Para coloração de cliques é exibido um algoritmo polinomial, enquanto que para λ -coloração é apresentada uma análise dos trabalhos existentes na literatura e é provado que a conjectura do limite superior do quadrado do grau do grafo é verdadeira para grafos arco-circulares.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

COLORINGS OF CIRCULAR-ARC GRAPHS

André Leonardo Korenchender

September/2010

Advisor: Márcia Rosana Cerioli

Department: Systems Engineering and Computer Science

The vertex coloring problem is one of the classic problems in graph theory, having applications in the modeling of several problems. More precisely, the problem of coloring the vertices of a circular-arc graph has applications in job scheduling and compiler optimization problems. This work presents an analysis of some of the main results on the vertex coloring problem, as well as new results on two of its variants: clique-coloring and λ -coloring, restricted to circular-arc graphs. For clique-coloring it is shown a polynomial-time algorithm, while, for λ -coloring an analysis of the previous published results is presented and it is proved that the upper bound of the square of the degree of the graph is valid for circular-arc graphs.

Sumário

Lista de Figuras	ix
1 Introdução	1
2 Definições	4
2.1 Grafos	4
2.2 Grafos de interseção	5
2.2.1 Grafos de intervalo	6
2.2.2 Grafos cordais	7
2.2.3 Grafos arco-circulares	7
2.2.4 Propriedade Helly	9
2.3 Relação entre as classes de grafos	10
3 Coloração de Vértices	11
3.1 Complexidade	12
3.1.1 Definições	12
3.1.2 WPPSG e COLORAÇÃO DE VÉRTICES	13
3.1.3 Algoritmo para k -COLORAÇÃO DE VÉRTICES	16
3.2 Tucker	19
3.2.1 Valencia-Pabon	21
3.3 Conclusões	25
4 Coloração de Cliques	27
4.1 Definições	28
4.2 Limites para $\chi_c(G)$	29
4.3 Algoritmos	34
4.3.1 Preliminares	34
4.3.2 Arco-circular Helly	35
4.3.3 Arco-circular	37
4.4 Conclusões	38

5	λ-Coloração	39
5.1	Calamoneri, Caminit, Olariu e Petreschi	41
5.1.1	Grafos de intervalo	41
5.1.2	Grafos arco-circulares	44
5.1.3	Consertando o algoritmo	45
5.2	Uma nova abordagem	48
5.2.1	Algoritmo	49
5.2.2	Limite para o <i>span</i> de um grafo arco-circular	52
5.2.3	Caso em que $l(\mathcal{M}) = 2$	55
5.3	Conjectura de Griggs e Yeh	55
5.4	Conclusões	56
6	Conclusões	57
	Referências Bibliográficas	59

Lista de Figuras

2.1	Grafo G_1	5
2.2	Exemplo de modelo de intervalo para o grafo G_1	6
2.3	Relação entre vértices em uma ordenação canônica	6
2.4	Ordenação canônica	7
2.5	Um modelo de arcos e seu grafo arco-circular.	8
2.6	Modelo de arcos que não satisfaz a propriedade <i>Helly</i>	9
2.7	Modelos de arcos que não satisfazem a propriedade Helly	10
2.8	Relação entre as classes	10
3.1	Exemplo de transformação de WPPSG em COLORAÇÃO DE VÉRTICES.	14
3.2	Exemplo de modelo de arcos para o grafo K_7 , com $r = 4$	19
3.3	Exemplo de execução do algoritmo 3.2	20
3.4	Prova do limite superior de Tucker	22
3.5	Modelo de arcos $\mathcal{M}_{3,7}$	25
4.1	Um modelo de arcos, seu grafo de interseção e seu modelo reduzido.	29
4.2	Vizinhança/coloração para modelo de arcos não-Helly (caso 1)	33
4.3	Vizinhança/coloração para modelo de arcos não-Helly (caso 2)	34
5.1	Contra-exemplo para o algoritmo 5.2	43
5.2	Contra-exemplo para o algoritmo 5.3	45
5.3	Relação entre arcos A_i, A_l e A_r quando $A_i \cap (A_l \cup A_r) = \emptyset$	46
5.4	Relação entre arcos A_i, A_l e A_r quando $A_i \cap A_l \neq \emptyset, A_i \cap A_r = \emptyset$	47
5.5	Relação entre arcos A_i, A_l e A_r quando $A_i \cap A_l = \emptyset, A_i \cap A_r \neq \emptyset$	48
5.6	Relação entre arcos A_i, A_l e A_r quando $A_i \cap A_l \neq \emptyset, A_i \cap A_r \neq \emptyset$	49

Lista de Algoritmos

3.1	k -COLORAÇÃO DE VÉRTICES(\mathcal{M})	16
3.2	ALGORITMO DE TUCKER(\mathcal{M})	20
4.1	COLORAÇÃO DE CLIQUES CORDAL(\mathcal{M})	35
4.2	COLORAÇÃO DE CLIQUES ARCO-CIRCULAR HELLY(\mathcal{M})	36
4.3	COLORAÇÃO DE CLIQUES ARCO-CIRCULAR(\mathcal{M})	37
5.1	λ -COLORAÇÃO INTERVALO(G, π)	41
5.2	λ -COLORAÇÃO GULOSA INTERVALO(G, π)	42
5.3	λ -COLORAÇÃO GULOSA ARCO-CIRCULAR(\mathcal{M}, p)	44
5.4	λ -COLORAÇÃO ARCO-CIRCULAR(\mathcal{M}, G, v)	50
5.5	MODELO DE INTERVALOS(\mathcal{M}, p)	50

Capítulo 1

Introdução

O problema da **coloração de vértices** é um dos problemas clássicos da teoria de grafos, sendo um dos mais estudados na literatura. Diversos problemas podem ser modelados como um problema de coloração de vértices [6]. Podemos citar, por exemplo, problemas de escalonamento. Nesse tipo de problema, tarefas são representadas por vértices de um grafo, e conflitos entre tarefas são representados por arestas entre os vértices correspondentes. Em uma coloração, cada cor representa um grupo de tarefas que podem ser executadas simultaneamente.

Outra aplicação comum para o problema da coloração de vértices é na área de otimização de compiladores. Em um *loop* utilizado frequentemente durante um programa, algumas variáveis devem ser alocadas em registradores de índice. Nesse caso, o tempo entre o momento que uma dessas variáveis é alocada pela primeira vez, dentro de uma iteração do *loop*, até o momento em que a mesma é utilizada pela última vez, pode ser visto como um arco sobre uma circunferência que representa o tempo gasto por uma iteração deste *loop*. O problema de decidir qual o menor número de registradores necessários para alocar todas as variáveis utilizadas na execução do *loop* é equivalente ao problema de colorir um grafo onde cada vértice corresponde a uma variável e dois vértices são adjacentes quando existe sobreposição no tempo de vida das mesmas [13].

O **grafo de interseção** de uma família de conjuntos é o grafo obtido associando-se exatamente um vértice distinto para cada conjunto e considerando dois vértices adjacentes quando os seus respectivos conjuntos possuem interseção não vazia. Sabe-se que todo grafo pode ser representado como grafo de interseção de alguma família de conjuntos [12]. Entretanto, classes de grafos com propriedades interessantes podem ser obtidas ao restringirmos o tipo de conjunto em que estamos interessados.

Um dos principais motivadores do estudo de classes de grafos é o fato de que diversos problemas, que são difíceis para grafos em geral, se tornam tratáveis quando restritos a elas. Nesse sentido, busca-se delimitar a partir de que ponto um determinado problema pode ser resolvido de forma eficiente. Um exemplo deste tipo

de problema é o problema da coloração dos vértices de um grafo. Não se conhece algoritmo eficiente para encontrar uma coloração ótima dos vértices de um grafo qualquer, mas existem classes de grafos onde é possível fazê-lo, como, por exemplo, a classe dos grafos de intervalo.

A classe dos **grafos de intervalo** é a classe de grafos de interseção obtida quando os conjuntos são intervalos da reta real. Grafos de intervalo possuem propriedades estruturais interessantes, as quais permitem que diversos problemas de otimização possam ser resolvidos eficientemente nos grafos da mesma. Por este motivo, grafos de intervalo são o objeto de diversos estudos.

Com o estudo dos grafos de intervalo surge, naturalmente, uma generalização para os mesmos. Ao considerarmos arcos de uma circunferência ao invés de intervalos da reta real, temos o que chamamos de **grafos arco-circulares**. Esta classe de grafos também possui características estruturais interessantes. No entanto, esta é uma classe mais complexa, dado que, alguns problemas que podem ser resolvidos eficientemente em grafos de intervalo são considerados difíceis nos grafos arco-circulares.

Pelo fato de ser uma generalização da classe dos grafos de intervalo, muitos problemas podem ser resolvidos na classe dos grafos arco-circulares a partir da redução para o mesmo problema na classe dos grafos de intervalo. Um exemplo é o problema de encontrar o maior conjunto independente de um grafo, que pode ser feito a partir de um grafo de intervalo criado com base no grafo original [12].

O reconhecimento, tanto de grafos de intervalo quanto de grafos arco-circulares, pode ser feito em tempo polinomial [12]. Mais detalhes sobre o reconhecimento de grafos arco-circulares podem ser encontrados em [9].

Neste trabalho estudamos o comportamento de alguns problemas de coloração em grafos quando restritos aos grafos arco-circulares. Em particular, são analisados os problemas da coloração de vértices, coloração de cliques e da λ -coloração.

O problema da coloração de cliques é uma variante do problema clássico da coloração de vértices que consiste em atribuir cores aos vértices de um grafo de tal forma que todo conjunto maximal de vértices mutuamente adjacentes possua ao menos dois vértices com cores distintas, enquanto que o problema da λ -coloração é uma restrição do problema clássico da coloração de vértices, onde vértices adjacentes possuem cores, representadas por números, cuja diferença é de pelo menos 2, e vértices à distância 2 entre si possuem cores distintas.

Sobre o problema da coloração de vértices de grafos arco-circulares, apresentamos resultados conhecidos da literatura, a saber: a prova de que o problema é \mathcal{NP} -completo, o algoritmo guloso de coloração, e sua melhoria, onde são determinados limites inferiores e superiores para a quantidade de cores utilizadas na coloração de vértices de um grafo arco-circular. Já para o problema da coloração de cliques

de grafos arco-circulares, apresentamos um algoritmo polinomial exato que resolve o problema, enquanto que para o problema da λ -coloração mostramos que o limite superior proposto em [2] para a maior cor utilizada em uma λ -coloração não está correto, e exibimos um novo limite, também provando que o limite superior conjecturado por Griggs e Yeh é verdadeiro para grafos arco-circulares.

Este texto está organizado da seguinte forma: no capítulo 2 apresentamos as definições básicas e propriedades estruturais das classes relevantes para este trabalho, a saber, grafos cordais, grafos de intervalo e, em especial, grafos arco-circulares, bem como a Propriedade Helly. O capítulo 3 é dedicado ao problema da coloração de vértices. No capítulo seguinte, sobre o problema da coloração de cliques, após uma breve introdução ao problema, apresentamos nossos resultados. O capítulo 5 é dedicado ao problema da λ -coloração de grafos arco-circulares. Finalmente, no capítulo 6, concluímos apresentando um resumo do conteúdo desta dissertação, seguida de uma lista de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Definições

Este capítulo é dedicado às definições e notações básicas utilizadas ao longo desta dissertação.

2.1 Grafos

Neste trabalho consideramos somente grafos finitos e simples. Usualmente denotamos um grafo por $G = (V, E)$, onde V e E são, respectivamente, os conjuntos de vértices e arestas do grafo. Ao longo do texto denotamos por n e m as cardinalidades dos conjuntos V e E , respectivamente. Quando conveniente, denotamos os conjuntos de vértices e arestas de G por $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente.

A notação aqui empregada segue o padrão encontrado na literatura sobre grafos. Em particular, dado um grafo $G = (V, E)$, denotamos por $N_G(v)$ a vizinhança de um vértice $v \in V$, $g_G(v)$ seu grau e $\Delta(G)$ o maior grau dentre os vértices de G , isto é: $N_G(v) = \{u \mid uv \in E(G)\}$, o grau de v é igual a cardinalidade do conjunto $N_G(v)$, e $\Delta(G) = \max_{v \in V} \{g_G(v)\}$. No caso de digrafos, dizemos que o vértice v possui graus de **entrada** e **saída** $g(v)^-$ e $g(v)^+$, respectivamente, ou seja, $g(v)^-$ é a quantidade de arestas do tipo $e = uv$, enquanto $g(v)^+$ é a quantidade de arestas do tipo $e = vu$. Para mais detalhes: [4].

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Um **passeio** $P = (v_1, \dots, v_k)$ em G é uma sequência de vértices de G tal que, para todo par de vértices consecutivos (v_{i-1}, v_i) , $1 < i \leq k$, temos que $v_{i-1}v_i$ é uma aresta de G . Se não admitirmos vértices repetidos em P , então dizemos que P é um **caminho**. O **tamanho** de P é igual ao seu número de arestas, $k - 1$. A **distância** $d_G(u, v)$ entre dois vértices $u, v \in V$ é igual ao tamanho do *menor* caminho em G que começa em u e termina em v . Dois vértices u, v **estão à distância 2** se $d_G(u, v) = 2$.

Seja $G = (V, E)$ um grafo. Dizemos que $C = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ é um **ciclo** em G se $P = (v_1, \dots, v_k)$ é um caminho e $v_1v_k \in E(G)$. Uma **corda** em um ciclo é

uma aresta entre dois vértices não consecutivos em C , e, dizemos que C é um **ciclo induzido** se C não possui cordas.

Seja $D = (V, E)$ um digrafo acíclico. Dizemos que $\pi = (v_1, \dots, v_n)$ é uma **ordenação topológica** dos vértices de D se, para toda aresta $e = v_i v_j$, temos $i < j$.

Um grafo $G = (V, E)$ é **conexo** quando, para todo par de vértices $u, v \in V$, existe um caminho em G que contém ambos. Uma **articulação** em um grafo conexo G é um vértice $v \in V$ tal que o grafo obtido ao removermos v de G não é conexo. Dizemos que G conexo é **biconexo** quando G não possui articulações.

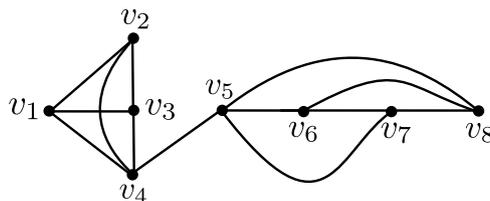


Figura 2.1: Grafo G_1 .

Outro parâmetro de interesse ao longo desta dissertação é o tamanho da maior clique de um grafo G , denotado por $\omega(G)$. Sendo que uma **clique** de um grafo G é um subconjunto de seus vértices que são mutuamente adjacentes. Uma clique é **maximal** se não está propriamente contida em nenhuma outra clique. Na figura 2.1 está ilustrado o grafo G_1 , que possui 8 vértices, 13 arestas, $\Delta(G_1) = 4$ e $\omega(G_1) = 4$.

Quando estiver claro qual é o grafo G que estamos nos referindo, utilizamos simplesmente $E, V, N(v), d(u, v), \Delta$ e ω para denotar $E(G), V(G), N_G(v), d_G(u, v), \Delta(G)$ e $\omega(G)$, respectivamente.

Denotamos por P_k e C_k o caminho e o ciclo de k vértices, respectivamente.

2.2 Grafos de interseção

Um grafo é um **grafo de interseção** se é possível associar ao seu conjunto de vértices uma família de conjuntos tal que existe uma relação um a um entre os vértices e os elementos dessa família de forma que dois vértices são adjacentes se, e somente se, os conjuntos correspondentes possuem interseção não vazia. A esta família damos o nome de **modelo**.

Dado um modelo \mathcal{M} , denotamos por $\Omega(\mathcal{M})$ o grafo de interseção de \mathcal{M} , isto é, ao grafo $G = (V, E)$ com exatamente um vértice em V para cada conjunto de \mathcal{M} e $uv \in E(G)$ se, e somente se, os conjuntos correspondentes a u e v em \mathcal{M} possuem interseção não vazia.

A grande maioria dos resultados desta seção podem ser encontrados em [6] e também em [12].

2.2.1 Grafos de intervalo

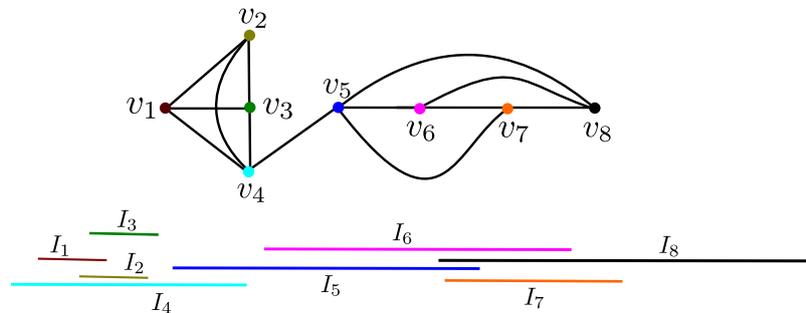


Figura 2.2: Exemplo de modelo de intervalo para o grafo G_1 .

Grafos de intervalo são os grafos de interseção de intervalos da reta real. Mais precisamente, dizemos que um grafo $G = (V, E)$ é um grafo de intervalo quando existe um modelo $\mathcal{M} = (R, \mathcal{I})$ tal que, R é a reta real e, para cada intervalo $I_i \in \mathcal{I}$, existe exatamente um vértice $v_i \in V$ correspondente. Ao modelo \mathcal{M} chamamos de **modelo de intervalo**. Quando nenhum elemento de \mathcal{I} está propriamente contido em outro elemento de \mathcal{I} , dizemos que \mathcal{M} é um **modelo de intervalo próprio**. O grafo G_1 é de intervalo, conforme ilustrado na figura 2.2.

Seja $G = (V, E)$ um grafo de intervalo e $\mathcal{M} = (R, \mathcal{I})$ um de seus modelos de intervalo. Seja $I = (s, t)$ um intervalo de \mathcal{I} . Dizemos que s e t são os **extremos inicial** e **final** de I , respectivamente.

Seja $G = (V, E)$ um grafo e $\pi = (v_1, \dots, v_n)$ uma ordenação dos vértices de G . Dizemos que π é uma **ordenação canônica** de V se, para todo $v_i, v_j, v_k \in V$, com $i < j < k$, vale que se $v_i v_k \in E$ então $v_i v_j \in E$. Uma propriedade interessante é que todo grafo de intervalo admite uma ordenação canônica de seus vértices e, se π é uma ordenação canônica dos vértices de um grafo G , então G é de intervalo, cf. [2].

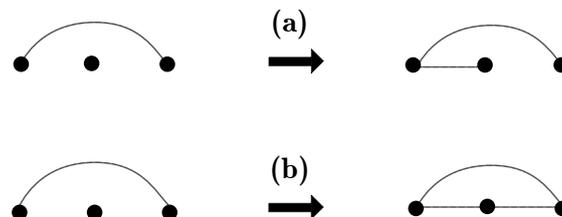


Figura 2.3: Relação entre vértices em uma ordenação canônica: (a) intervalo; (b) intervalo próprio.

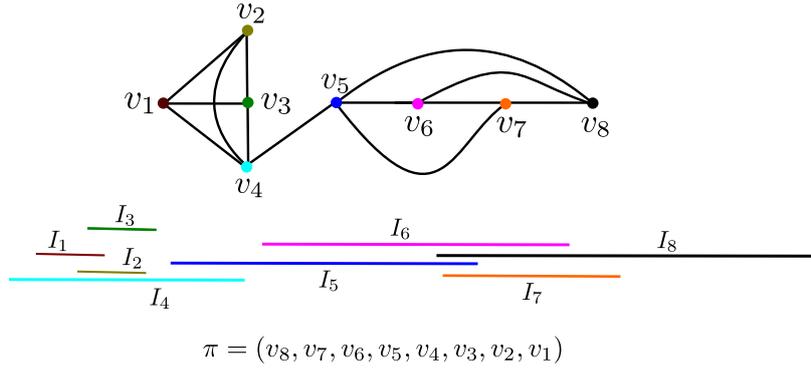


Figura 2.4: Ordenação canônica obtida através do modelo de intervalo do grafo G_1 .

É interessante observar que, se G é um grafo de intervalo próprio, então existe uma ordenação canônica π tal que, para todo $v_i, v_j, v_k \in V(G)$ tais que $i < j < k$ em π , a existência da aresta $v_i v_k$ força não apenas $v_i v_j \in E(G)$, mas também $v_j v_k \in E(G)$. Além disso, dado um grafo de intervalo G e um de seus modelos de intervalo \mathcal{M} , é fácil obter uma ordenação canônica para $V(G)$: basta ordenar os vértices em ordem decrescente de acordo com o extremo final de seus intervalos correspondentes.

2.2.2 Grafos cordais

Um grafo G é **cordal** se todo ciclo de G com mais de três vértices possui ao menos uma corda. É um fato bem conhecido que todo grafo de intervalo é cordal, pois entre outras caracterizações possíveis, todo grafo cordal é grafo de interseção de subárvores de uma árvore [6].

Seja $G = (V, E)$ um grafo e $\pi = (v_1, \dots, v_n)$ uma ordenação de seus vértices. Se, para todo vértice $v_i \in V$ temos que o conjunto $N(v_i) \cap \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ é uma clique de G , então π é um **esquema de eliminação perfeita** de G .

Grafos cordais podem ser caracterizados da seguinte forma: um grafo é cordal se, e somente se, possui um esquema de eliminação perfeita. A obtenção de um esquema de eliminação perfeita de um grafo cordal pode ser feita em tempo $O(n + m)$ [6].

2.2.3 Grafos arco-circulares

A generalização mais natural para um modelo de intervalo é aquela em que, ao invés de considerarmos intervalos na reta real, passamos a considerar arcos de uma circunferência. Obtemos, nesse caso, o que chamamos de **modelo de arcos**. Dizemos então que um grafo G é **arco-circular**, existe um modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ onde C é a circunferência e \mathcal{A} é a família de arcos em C tal que $G = \Omega(\mathcal{M})$.

Na figura 2.5 está exemplificado um modelo de arcos e seu grafo associado.

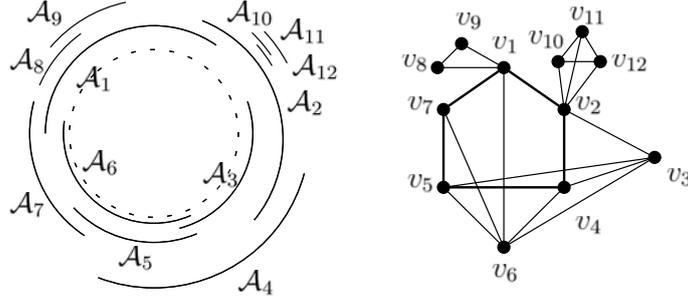


Figura 2.5: Um modelo de arcos e seu grafo arco-circular.

No que segue, $G = (V, E)$ é um grafo arco-circular e $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um de seus modelos de arcos.

Seja $A_i = (s_i, t_i)$ um arco de \mathcal{A} . Dizemos que A_i **cobre** a circunferência C , no **sentido horário**, do ponto s_i ao ponto t_i , também chamados de **extremos** de A_i . Ao extremo s_i damos o nome **extremo inicial** de A_i , enquanto que t_i é chamado de **extremo final** de A_i . O arco $A_i = (s_i, t_i)$ **cobre** um ponto p da circunferência C se $p \in (s_i, t_i)$ e C é **coberto** por \mathcal{A} se, para todo $p \in C$, p é coberto por algum arco $A_j \in \mathcal{A}$. Se p é extremo de algum arco $A_i \in \mathcal{A}$, então dizemos que p é um **extremo de \mathcal{M}** . Assumimos, sem perda de generalidade, que os extremos de \mathcal{M} são todos distintos e, também, que os arcos são abertos, ou seja, $A_i = (s_i, t_i)$ não cobre os seus extremos s_i e t_i . Além disso, nenhum arco sozinho cobre C .

Claramente, se existe algum ponto p da circunferência que não é coberto por nenhum arco, então o modelo de arcos \mathcal{M} pode ser visto como um modelo de intervalo.

Seja $S = (p_1, p_2, \dots, p_{2n})$ uma ordenação para os extremos de \mathcal{M} . Dizemos que S é uma **ordenação circular** dos extremos de \mathcal{M} se, para todo par de extremos consecutivos p_i, p_{i+1} em S (p_{2n} e p_1 também são considerados consecutivos em S), temos que o segmento (p_i, p_{i+1}) não contém nenhum extremo de \mathcal{M} . Isto é, S de fato representa a família de arcos \mathcal{A} . Para o modelo de arcos da figura 2.5, uma possível ordenação circular pode ser dada por $S = (s_1, t_6, t_7, s_8, s_9, t_8, t_9, s_2, t_1, s_{10}, s_{11}, s_{12}, t_{10}, t_{12}, t_{11}, s_3, s_4, t_2, s_5, s_6, t_3, t_4, s_7, t_5)$.

Seja $\mathcal{A}' \in \mathcal{A}$ um conjunto de arcos. Dizemos que \mathcal{A}' é uma **cobertura circular** em \mathcal{M} se, para todo ponto $p \in C$, temos que p é coberto por algum arco de \mathcal{A}' . Denotamos por $l(\mathcal{M})$ a **menor cardinalidade de uma cobertura circular** em \mathcal{M} .

Quando conveniente, podemos denotar um arco $A \in \mathcal{A}$ a partir do seu vértice $v \in V$ correspondente, e vice-versa. Para isso, utilizamos $Arco(v)$ para denotar o arco correspondente ao vértice v e, de forma análoga, denotamos por $Vertice(A)$ o vértice correspondente ao arco A .

De forma similar, para um subconjunto \mathcal{A}' de \mathcal{A} , o conjunto dos vértices correspondentes aos arcos de \mathcal{A}' é dado por $Vertices(\mathcal{A}') = \cup_{A \in \mathcal{A}'} \{Vertice(A)\}$. Analogamente, o conjunto dos arcos correspondentes aos vértices de um subconjunto $V' \subseteq V$, é dado por $Arcos(V') = \cup_{v \in V'} \{Arco(v)\}$.

Seja p um ponto qualquer da circunferência C e A um arco de \mathcal{A} . Denotamos por $\beta(p) = \{A \in \mathcal{A} \mid A \text{ cobre } p\}$. De forma similar, $\beta(A) = \{A' \in \mathcal{A} \mid A' \text{ contém } A\}$. A **carga** de \mathcal{M} é dada por $L(\mathcal{M}) = \max_{p \in C} \{|\beta(p)|\}$, isto é, a carga de \mathcal{M} é a maior quantidade de arcos que cobrem um ponto p qualquer de C .

Seja $A_i = (s_i, t_i)$ um arco de \mathcal{A} e seja $A_l = (s_l, t_l)$ um arco que cobre s_i . Dizemos que A_l é o arco que se **estende mais (menos) à esquerda** de A_i se, para todo arco $A_j = (s_j, t_j) \in \mathcal{A}$ que cobre s_i , temos que, percorrendo a circunferência no sentido anti-horário a partir de s_i , $s_j < s_l$ ($s_j > s_l$). De maneira análoga, A_r é o arco que se **estende mais (menos) à direita** de A_i se, dentre todos os arcos que cobrem t_i , A_r é o que possui o extremo final de maior (menor) valor ao percorrermos C a partir de t_i no sentido horário. Todas essas funções possuem versões análogas quando consideramos modelos de intervalo.

2.2.4 Propriedade Helly

Uma família \mathcal{F} possui a **propriedade Helly** quando toda subfamília de \mathcal{F} cujos membros possuem, dois a dois, interseção não vazia, possui um elemento comum a todos os seus membros. Não é difícil observar que nem todo modelo de arcos possui esta propriedade, como exemplificado na figura 2.6.

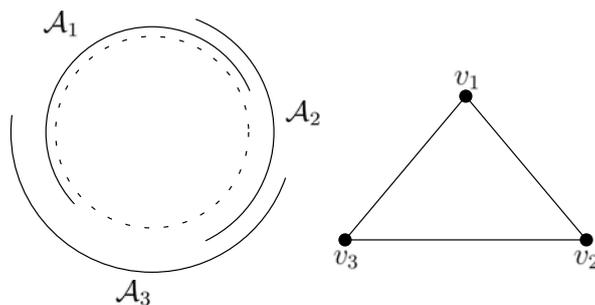


Figura 2.6: Modelo de arcos que não satisfaz a propriedade *Helly*

Quando um modelo de arcos \mathcal{M} possui a propriedade Helly, dizemos que \mathcal{M} é um **modelo de arcos Helly**, ou, simplesmente, \mathcal{M} é Helly. Ao contrário dos modelos de arcos em geral, todo modelo de intervalo é Helly.

Um grafo arco-circular que admite modelo de arcos *Helly* é chamado grafo **arco-circular Helly**. Em um modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$, possuir a propriedade Helly significa que, para toda clique no grafo é possível associar um ponto $p \in C$ tal que

o conjunto de arcos que cobrem p é exatamente aquele que corresponde aos vértices da clique.

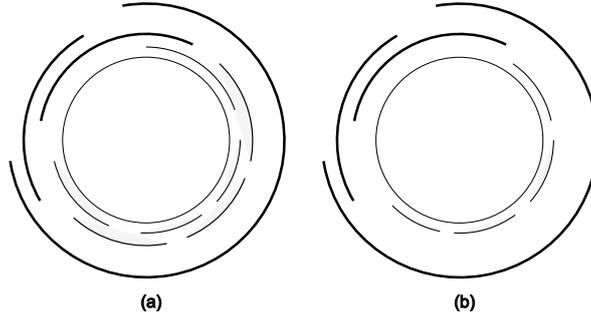


Figura 2.7: Modelos de arcos que não satisfazem a propriedade Helly: (a) $L(\mathcal{M}_1) = \omega(\Omega(\mathcal{M}_1)) = 3$ e (b) $L(\mathcal{M}_2) = 2$, $\omega(\Omega(\mathcal{M}_2)) = 3$.

Quando um modelo \mathcal{M} possui a propriedade Helly, temos que $L(\mathcal{M}) = \omega(\Omega(\mathcal{M}))$, o que não é sempre verificado, em geral. É importante observar, no entanto, que $L(\mathcal{M}) = \omega(\Omega(\mathcal{M}))$ não implica em \mathcal{M} possuir a propriedade Helly. Na figura 2.7 estão exibidos os modelos de arcos \mathcal{M}_1 e \mathcal{M}_2 que não possuem a propriedade Helly, mas que são tais que $L(\mathcal{M}_1) = \omega(\Omega(\mathcal{M}_1))$ e $L(\mathcal{M}_2) \neq \omega(\Omega(\mathcal{M}_2))$, respectivamente.

2.3 Relação entre as classes de grafos

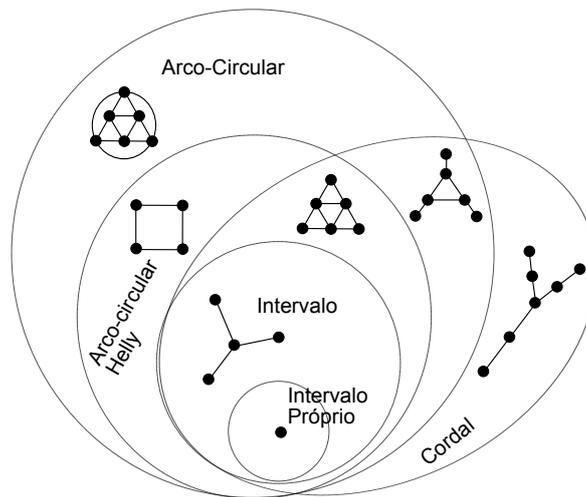


Figura 2.8: Relação entre as classes dos grafos cordais, intervalo e arco-circular.

Na figura 2.8 é exibida a relação de inclusão entre as classes citadas neste capítulo.

Capítulo 3

Coloração de Vértices

COLORAÇÃO DE VÉRTICES é um dos problemas clássicos da teoria de grafos, sendo um dos mais estudados até hoje. Este problema é \mathcal{NP} -completo para grafos em geral, e assim permanece em grafos arco-circulares. Uma **coloração de vértices** é uma atribuição de cores aos vértices de um grafo de tal forma que vértices adjacentes possuam cores distintas. Em sua versão decisão, temos:

Problema: COLORAÇÃO DE VÉRTICES

Instância: Um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro $k > 0$.

Questão: Existe uma função $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que, f é uma coloração de vértices?

O **número cromático** de um grafo G , denotado por $\chi(G)$, é o menor valor k para o qual o grafo G admite resposta SIM no problema COLORAÇÃO DE VÉRTICES. Um grafo G para o qual existe uma coloração $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ é dito **k -colorível**, dizemos que f é uma **k -coloração** dos vértices de G , e que f utiliza k cores. Além disso, se f é uma coloração que utiliza exatamente $\chi(G)$ cores, então dizemos que f é uma coloração **ótima**. O problema da coloração de vértices consiste em encontrar, dado um grafo G , uma tal coloração minimizando o número de cores utilizadas. O problema k -COLORAÇÃO DE VÉRTICES consiste em decidir, dado um grafo G , se o mesmo é k -colorível.

Em seu trabalho pioneiro, de 1975, sobre coloração de vértices em grafos arco-circulares, Tucker [13] mostrou, entre outros resultados, que dado um modelo de arcos \mathcal{M} de um grafo arco-circular G , se $l(\mathcal{M}) \geq 4$, então $\chi(G) \leq \lfloor \frac{3}{2}L(\mathcal{M}) \rfloor$ e que, independentemente do valor de $l(\mathcal{M})$, é sempre verdade que $\chi(G) \leq 2L(\mathcal{M}) - 1$.

Posteriormente, em 1980, Garey, Johnson, Miller e Papadimitrou [5] provaram que COLORAÇÃO DE VÉRTICES é \mathcal{NP} -completo em grafos arco-circulares. No entanto, mostraram que o problema de decidir se um grafo arco-circular G é k -colorível é polinomial, se o valor de k for fixo, isto é, k -COLORAÇÃO DE VÉRTICES é polinomial.

Em 2003, Valencia-Pabon [14], analisou novamente o algoritmo proposto em [13]. Nesta nova análise, o autor provou que se $l(\mathcal{M}) \geq 5$, então o grafo $G = \Omega(\mathcal{M})$ é $\lceil \frac{l(\mathcal{M})-1}{l(\mathcal{M})-2} L(\mathcal{M}) \rceil$ -colorível, melhorando o resultado de Tucker [13].

Neste capítulo são apresentados os resultados encontrados em [13],[5],[14]. Primeiramente mostramos que o problema de colorir os vértices de um grafo arco-circular é \mathcal{NP} -completo. Esta prova nos leva a um algoritmo de tempo polinomial para decidir se um grafo arco-circular G é k -colorível, exibido em seguida. Na seção 3.2 é apresentado e analisado o algoritmo proposto por Tucker [13], bem como os limites superiores para $\chi(G)$ por ele encontrados; finalmente, apresentamos o limite superior para o número cromático provado por Valencia-Pabon [14].

3.1 Complexidade

Analisamos agora a complexidade do problema da coloração de vértices, baseados nos resultados encontrados em [5]. Inicialmente, mostramos que o problema de colorir os vértices de um grafo arco-circular é polinomialmente equivalente a PALAVRA EM PRODUTOS DE GRUPOS SIMÉTRICOS (WPPSG), que consiste em decidir se uma determinada permutação π pode ser obtida a partir da composição de permutações existentes em um determinado conjunto de grupos simétricos. Em seguida, a partir dessa transformação, é derivado um algoritmo $O(nk!k \log k)$ que resolve k -COLORAÇÃO DE VÉRTICES. Finalmente, mostra-se que WPPSG é \mathcal{NP} -completo e, portanto, COLORAÇÃO DE VÉRTICES também é.

3.1.1 Definições

Definimos agora os problemas que serão utilizados na prova de \mathcal{NP} -completude do problema coloração de vértices.

Considere o conjunto $K = \{1, \dots, k\}$. Sejam π_1 e π_2 duas permutações distintas de $K = \{1, \dots, k\}$. O **produto** $\pi_1\pi_2$ é dado por: $\pi_{1,2}(i) = \pi_2(\pi_1(i))$. Denotamos por S_K o **grupo simétrico** de todas as permutações em K . Seja X um subconjunto de K . Denotamos por S_X o subgrupo de S_K contendo exatamente todas as permutações que deixam elementos fora de X em suas posições originais, ou seja: se $i \notin X$, então, para toda permutação $\pi \in S_X$, teremos $\pi(i) = i$.

Podemos então enunciar WPPSG:

Problema: PALAVRAS EM PRODUTOS DE GRUPOS SIMÉTRICOS (WPPSG)

Instância: Inteiro $k > 0$, subconjuntos X_1, \dots, X_m de $K = \{1, \dots, k\}$ e permutação $\pi \in S_K$.

Questão: π pode ser escrito como $\pi = \pi_1\pi_2 \dots \pi_m$, $\pi_i \in S_{X_i}$, $1 \leq i \leq m$?

Para provar que COLORAÇÃO DE VÉRTICES é \mathcal{NP} -completo, Garey *et al.* apresentam uma redução de CAMINHOS DISJUNTOS DIRECIONADOS CONECTANTES (DDCP) ao problema WPPSG, e que por sua vez é \mathcal{NP} -completo, devido ao fato de DDCP ser \mathcal{NP} -completo.

Problema: CAMINHOS DISJUNTOS DIRECIONADOS CONECTANTES (DDCP)

Instância: Digrafo acíclico $D = (V, E)$, ordenações $S = (s_1, \dots, s_k)$ e $T = (t_1, \dots, t_k)$ dos vértices com graus de entrada e saída 0, respectivamente.

Questão: D contém k caminhos disjuntos em vértices, cada um de s_i para t_i , $1 \leq i \leq k$?

3.1.2 WPPSG e COLORAÇÃO DE VÉRTICES

Mostramos, a seguir, como transformar uma instância de WPPSG em uma instância de COLORAÇÃO DE VÉRTICES.

Os autores consideram, em [5] que os arcos do modelo \mathcal{M} são abertos no extremo inicial e fechados no extremo final. Este fato é usado constantemente durante a prova dos teoremas 3.1 e 3.2. Considerar os intervalos como sendo fechados em seu extremo final é equivalente, durante a prova dos teoremas 3.1 e 3.2, a considerar pontos entre extremos consecutivos, ao invés de considerar os extremos de \mathcal{M} em si. No entanto, com o objetivo de simplificar o texto, mantemos a definição original dos autores ao longo desta seção.

Teorema 3.1 (Garey *et al.* [5]) *WPPSG pode ser reduzido, em tempo polinomial, ao problema da coloração de vértices.*

Prova. A prova consiste em, dado uma instância de WPPSG com $K = \{1, \dots, k\}$, X_1, \dots, X_m e $\pi \in S_K$, criar um modelo de arcos \mathcal{M} tal que $\Omega(\mathcal{M})$ é k -colorível se, e somente se, $\pi = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_m$, com $\pi_i \in S_{X_i}$, $1 \leq i \leq m$.

Seja \mathbb{I} uma instância de WPPSG com $K = \{1, \dots, k\}$, subconjuntos X_1, \dots, X_m de K e π uma permutação de S_K e considere o modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, \{\mathcal{A}_1 \cup \dots \cup \mathcal{A}_k \cup \mathcal{D}\})$ construído a partir de \mathbb{I} da seguinte forma: para cada i tal que $1 \leq i \leq k$, construímos $\mathcal{A}_i = \{A_{1,1}, A_{1,2}, A_{1,|ind_i|}\}$ atribuindo ao arco $A_{i,1}$ os extremos i e $k + ind_i[1]$, enquanto os arcos restantes são dados por $A_{i,j} = (k + ind_i[j - 1], k + ind_i[j])$, com $1 < j \leq |ind_i|$, onde $ind_i = \{j \mid i \in X_j\}$. Além disso, construa a família de arcos $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$, onde D_i , $1 \leq i \leq k$, é o arco que começa em $k + ind_i[|ind_i|]$ e termina em $\pi^{-1}(i)$. Na figura 3.1 é exibido um exemplo desta transformação.

$$\begin{aligned}
K &= 5 \\
X_1 &= \{1, 3\} \\
X_2 &= \{3, 4, 5\} \\
X_3 &= \{2, 5\} \\
X_4 &= \{1, 2, 4\} \\
\pi &= \{2, 4, 1, 5, 3\}
\end{aligned}$$

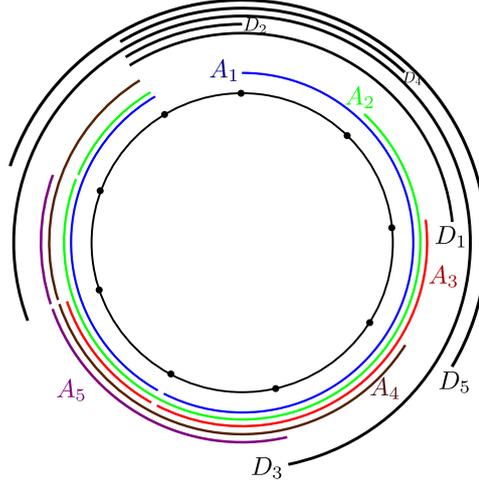


Figura 3.1: Exemplo de transformação de WPPSG em COLORAÇÃO DE VÉRTICES.

Não é difícil verificar que \mathcal{M} pode ser construído em tempo polinomial. Resta então provar que $\Omega(\mathcal{M})$ é k -colorível se, e somente se, $\pi = \pi_1\pi_2 \dots \pi_m$, $\pi_i \in S_{X_i}$, $1 \leq i \leq m$.

Considere o modelo alternativo $\mathcal{M}' = (C', \mathcal{A}')$ obtido a partir de \mathcal{M} , substituindo-se cada arco D_i pelos arcos $D_{i,1} = (k + \text{ind}_i[\text{ind}_i], k + m + 1)$ e $D_{i,2} = (k + m + 1, \pi^{-1}(i))$ e, denote por \mathcal{A}'_i o conjunto formado pelos arcos em $\mathcal{A}_i \cup \{D_{i,1}, D_{\pi^{-1}(i),2}\}$. Claramente todos os pontos da circunferência C' estão cobertos pelos arcos de \mathcal{A}'_i .

Seja $\sigma_p(j)$ uma função que indica, dentre os arcos que cobrem o ponto $p \in C'$, a qual família o arco correspondente ao vértice que recebeu a cor j pertence, isto é: se o vértice que recebeu a cor j corresponde a um arco de \mathcal{A}'_i que cobre p , então $\sigma_p(j) = i$.

Observe que qualquer k -coloração dos vértices de $G' = \Omega(\mathcal{M}')$ pode ser descrita pela composição das funções σ_p , $1 \leq p \leq k + m + 1$. Além disso, como para todo extremo p de \mathcal{M}' , temos que $|\beta(p)| = k$, a função σ_p pode ser vista como sendo uma permutação dos elementos de K . Assumimos, então, sem perda de generalidade, que $\sigma_1(i) = i$ para todo $1 \leq i \leq k$, ou seja, para todo $v = \text{Vertice}(D_{\pi^{-1}(i),2})$, v recebe a cor i .

Uma propriedade interessante, devido a forma como o modelo \mathcal{M}' é construído, é que os arcos $D_{i,1}$ e $D_{\pi^{-1}(i),2}$, ambos pertencentes à \mathcal{A}'_i , possuem interseção não vazia com os $k - 1$ arcos $(k + m + 1, j)$, tal que $i + 1 \leq j \leq k$, e $(j, k + \text{ind}_j[1])$, com $1 \leq j \leq i - 1$ e, portanto, seus vértices correspondentes possuem a mesma cor em qualquer k coloração, isto é, $\sigma_1 = \sigma_2 = \dots = \sigma_{k+1}$.

Mostramos agora como construir σ_{p+1} a partir de σ_p , para $k + 1 \leq p < k + m + 1$. Claramente, se $\sigma_p(j) = i$ e o arco de \mathcal{A}'_i contém $p + 1$, então $\sigma_{p+1}(j) = i$. Considere

então que $\sigma_p(j) \neq \sigma_{p+1}(j)$. Por construção, se $i \in X_r$, então existe um arco em \mathcal{A}'_i que termina em $k+r$. Logo, $\sigma_{p+1}(j) = i$, onde $i \in X_{p-k}$ e podemos, portanto, escrever $\sigma_{p+1} = \sigma_p \pi_{p-k}$, onde π_{p-k} é uma permutação de S_{p-k} . Como consequência, temos que as permutações σ_{k+m+1} que podem ser obtidas a partir de k -colorações de G' são exatamente aquelas do tipo $\pi = \pi_1 \pi_2 \dots \pi_m$, onde $\pi_i \in S_{X_i}$.

Pelo exposto acima temos que, para que uma coloração f de G' seja de fato uma coloração em $G = \Omega(\mathcal{M})$, precisamos que, para todo $1 \leq i \leq k$, $f(\text{Vertice}(D_{i,1})) = f(\text{Vertice}(D_{i,2}))$. Isto equivale a dizer que é condição necessária para uma coloração de G' ser também uma coloração em G termos $\sigma_{k+m+1}^{-1}(i) = \sigma_1^{-1}(\pi^{-1}(i))$, o que implica em $\sigma_{k+m+1}^{-1} = \pi^{-1}$ e $\sigma_{k+m+1} = \pi$. Consequentemente, π pode ser obtida a partir de $S_{X_1} \dots S_{X_m}$ se, e somente se, G é k -colorível. ■

Teorema 3.2 (Garey et al. [5]) COLORAÇÃO DE VÉRTICES *pode ser reduzido, em tempo polinomial, à WPPSG.*

Prova. Seja $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um modelo de arcos, $k > 0$ um número inteiro e m o maior valor de um extremo de \mathcal{M} . Assuma, sem perda de generalidade que, para todo extremo p de \mathcal{M} , temos $|\beta(p)| = k$.

Seja $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$ o conjunto dos k arcos de \mathcal{A} que contém o ponto 1 da circunferência C . Considere o modelo de arcos $\mathcal{M}' = (C', \mathcal{A}')$ construído de acordo com a seguinte regra: para cada arco $A = (s, t)$ de $\mathcal{A} \setminus \{D_1, \dots, D_k\}$, A' será dado por $A' = (k+s, k+t)$; para cada arco $D_i = (s, t)$, tal que D que contém o ponto 1, serão acrescentados a \mathcal{A}' os arcos $D_{i,1} = (k+s, i)$ e $D_{i,2} = (i, k+t)$. Não é difícil verificar que em qualquer k coloração de $G' = \Omega(\mathcal{M}')$ teremos $\text{Vertice}(D_{i,1})$ e $\text{Vertice}(D_{i,2})$ com a mesma cor e, portanto, $G = \Omega(\mathcal{M})$ é k -colorível se, e somente se, G' também for.

Observe que, estruturalmente, \mathcal{M}' é muito parecido com o modelo de arcos construído ao longo da prova do teorema 3.1. Mostramos agora como obter uma instância de WPPSG a partir de \mathcal{M}' . Para tal, particionamos \mathcal{A}' , assim como feito em 3.1, em subfamílias $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_k, \mathcal{D}'$, da seguinte forma: \mathcal{D}' é o conjunto formado pelos arcos que contém o ponto 1, enquanto $\mathcal{A}_i = \{A_{i,1}, \dots, A_{i,|\mathcal{A}_i|}\}$ é tal que $A_{i,1}$ é o arco que começa no ponto i e, para todo par de arcos consecutivos $A_{i,j}, A_{i,j+1}$ em \mathcal{A}_i , temos que o extremo final de $A_{i,j}$ é o extremo inicial de $A_{i,j+1}$ e \mathcal{A}_i é maximal com relação a esta propriedade em $\mathcal{A}' \setminus (\mathcal{D} \cup \mathcal{A}_1 \cup \dots \cup \mathcal{A}_{i-1})$.

A construção da instância de WPPSG passa a ser trivial: $K = \{1, \dots, k\}$, $i \in X_j$, $1 \leq j \leq m$ se, em \mathcal{A}_i existir algum arco com extremo final $k+j$. A permutação π é dada por $\pi(j) = i$ se e somente se o arco D_j possui extremo final i .

A verificação de que esta transformação está correta segue os mesmos argumentos da prova da transformação de WPPSG em COLORAÇÃO DE VÉRTICES. ■

Como consequência imediata dos teoremas 3.1 e 3.2, obtemos:

Corolário 3.3 (Garey *et al.* [5]) WPPSG e COLORAÇÃO DE VÉRTICES são polinomialmente equivalentes.

3.1.3 Algoritmo para k -COLORAÇÃO DE VÉRTICES

É interessante observar que, a partir das provas dos teoremas 3.1 e 3.2, é possível obter um algoritmo de tempo polinomial (algoritmo 3.1) para decidir se um grafo arco-circular G , descrito por um de seus modelos de arcos, é k -colorível.

Algoritmo 3.1 k -COLORAÇÃO DE VÉRTICES(\mathcal{M})

Entrada: Modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$.

Saída: Resposta SIM se, e somente se, $G = \Omega(\mathcal{M})$ for k -colorível.

- 1: $K = \{1, \dots, k\}$;
 - 2: $m \leftarrow$ maior número inteiro utilizado como extremo em \mathcal{M} ;
 - 3: considere os conjuntos X_1, \dots, X_m conforme obtidos ao aplicarmos a transformação do teorema 3.2 ao modelo de arcos \mathcal{M} .
 - 4: $\pi_I \leftarrow$ permutação identidade $\{\pi(i) = i, \text{ para todo } i\}$
 - 5: $P_0 \leftarrow \{I\}$
 - 6: **para** $i \leftarrow 0$ até $m - 1$ **faça**
 - 7: **para** cada $\pi_1 \in P_i$ **faça**
 - 8: **para** cada $\pi_2 \in S_{X_{i+1}}$ **faça**
 - 9: adicione $\pi_1\pi_2$ a P_{i+1} ;
 - 10: **se** $\pi_1\pi_2 \in P_i$ **então**
 - 11: $P_i \leftarrow P_i \setminus \pi_1\pi_2$;
 - 12: **se** $\pi \in P_m$ **então**
 - 13: resposta SIM;
 - 14: **senão**
 - 15: resposta NÃO;
-

O algoritmo 3.1 segue o que é feito nas provas dos teoremas 3.1 e 3.2 e, portanto, está correto e podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3.4 *Seja \mathcal{M} um modelo de arcos e $k > 0$ um número inteiro. Então é possível decidir se $G = \Omega(\mathcal{M})$ é k -colorível em tempo polinomial.*

Prova. A transformação da instância de COLORAÇÃO DE VÉRTICES em uma instância de WPPSG pode ser feita em tempo $O(nk)$. A multiplicação de duas permutações de tamanho k pode ser feita em $O(k)$. Considere então o momento em que o algoritmo 3.1 está calculando P_{i+1} . Observe que, se temos $\pi_1 \in P_i$ e $\pi_2 \in S_{X_{i+1}}$ tais que $\pi_1\pi_2 = \pi' \in P_i$, então não precisamos calcular nenhum dos produtos envolvendo π' . Isso significa que o algoritmo sempre gera permutações novas e são realizadas, durante a construção de P_{i+1} , $O(k!)$ multiplicações. Além disso, assumimos que cada permutação π está associada a um índice $I(\pi)$, com $1 \leq I(\pi) \leq k!$ de tal forma que

é possível calcular $I(\pi)$ e $I^{-1}(j)$ em tempo $O(k \log k)$. Com isso, o laço principal (passos 7 a 11) irá executar em tempo $O(k!k \log k)$, dando uma complexidade de tempo $O(nk!k \log k)$ para o algoritmo como um todo. ■

Este resultado é interessante pois mostra que, em certo sentido, COLORAÇÃO DE VÉRTICES é mais fácil quando nos restringimos a grafos arco-circulares, pois é possível decidir em tempo polinomial se um grafo arco-circular é k -colorível, se k for fixo, ao contrário do que acontece com grafos em geral, onde k -COLORAÇÃO DE VÉRTICES é \mathcal{NP} -completo para qualquer k fixo tal que $k \geq 3$.

Infelizmente, como mostrado a seguir, WPPSG é \mathcal{NP} -completo e, portanto, o problema da coloração de vértices continua \mathcal{NP} -completo mesmo quando o grafo fornecido é arco-circular.

Teorema 3.5 (Garey et al. [5]) WPPSG é \mathcal{NP} -completo.

Prova. A prova é feita a partir da redução de DDCP à WPPSG. Seja \mathbb{I} uma instância de DDCP com $D = (V, E)$, $S = (s_1, \dots, s_n)$ e $T = (t_1, \dots, t_n)$. Para cada aresta uv de E , construa as arestas $e' = uw$ e $e'' = wv$, onde w é um novo vértice adjacente apenas a u e v . Claramente esta modificação não afeta a existência dos caminhos desejados. Seja $D' = (V', E')$ o grafo induzido pelas arestas criadas.

Seja v_1, \dots, v_q uma ordenação topológica para os vértices de D' e seja $B(i)$ o conjunto dos vértices que antecedem v_i na ordenação topológica. Assuma, sem perda de generalidade, que os vértices de S são os n primeiros na ordenação, enquanto os vértices de T são os n últimos.

Construímos a instância de WPPSG da seguinte forma:

$$X_j = \begin{cases} \{n+j\} \cup B(n+j) & \text{se } 1 \leq j \leq q-n \\ \{1, \dots, q-n\} & \text{se } j = m = q-n+1 \end{cases}$$

$$\pi(i) = \begin{cases} q-n+i & \text{se } 1 \leq i \leq n \\ i-n & \text{se } n+1 \leq i \leq q \end{cases}$$

Intuitivamente, a ideia por trás desta transformação é representar, a partir da permutação π e dos produtos entre as permutações de S_{X_i} , cada movimentação nos caminhos de cada s_i a seu respectivo t_i . Inicialmente, começa-se com a permutação identidade. Ao aplicarmos uma permutação $\pi_i \in S_{X_i}$, criando a permutação $\pi = \pi_1, \dots, \pi_i$, estamos mudando apenas índices que correspondem ao vértice v_{k+i} e seus antecessores imediatos (ou seja, vértices adjacentes a v_{k+i}). O objetivo, então, é chegar a uma permutação final onde $\pi(i) = q-n+i$, para $1 \leq i \leq n$, ou seja: cada vértice de s_i estará na posição correspondente a t_i .

Suponha que existam n caminhos direcionados disjuntos que ligam cada $s_i \in S$ a seu respectivo destino $t_i \in T$ e seja E' o conjunto das arestas que fazem parte

destes caminhos. Como os caminhos são disjuntos em vértices, cada aresta pertence a exatamente um dos n caminhos. Para construir $\pi = \pi_1 \dots \pi_m$, siga o seguinte procedimento: para escolher π_j , com $1 \leq j < m$, são consideradas duas possibilidades; na primeira delas, quando existe aresta $e = v_i v_{n+j}$, π_j é a permutação obtida ao trocarmos i com $n+j$ na permutação identidade; a outra possibilidade é não existir tal aresta e , nesse caso, π_j é a própria permutação identidade. Pelo fato dos vértices estarem indexados por uma ordenação topológica, é fácil verificar que estamos realmente "andando para frente", e indo de $s_i \in S$ para $t_i \in S$, com $1 \leq i \leq n$. Finalmente, para π_m , qualquer rearranjo dos rótulos em $V' \setminus \{t_1, \dots, t_k\}$ pode ser feito e, portanto, teremos que de fato $\pi \in P = S_{X_1} \dots S_{X_m}$.

Suponha agora que $\pi \in P = S_{X_1} \dots S_{X_m}$ e considere o processo de rearranjo dos rótulos em D' . Inicialmente temos que $\pi(i) = i$ para $1 \leq i \leq n$ e sabemos que, ao final do processo, temos $\pi(i) = q - n + i$, ou seja: $s_i \in S$ tem como rótulo inicial ele próprio, terminando com rótulo $t_i \in T$. Mostramos agora que o processo de rearranjo dos rótulos sempre se dá a partir de arestas de G' . E, não apenas isso, mas também que o rótulo de s_i é movimentado apenas pelas arestas do caminho que conecta s_i a t_i .

Suponha, por absurdo, que durante o j -ésimo rearranjo dos rótulos i é movido e essa troca não corresponde a uma aresta de D' . Por construção, temos que X_j é o primeiro conjunto que contém $n+j$ e, portanto, $\pi(i) \neq n+j$ antes de aplicarmos π_j . Portanto, π_j irá trocar i de algum antecessor imediato de v_{n+j} a outro. Isso significa que v_{n+j} possui mais de um antecessor e, portanto, é um vértice de D . Não apenas isso, mas todo antecessor imediato u de v_{n+j} possui apenas uma aresta saindo, a aresta $e = uv_{n+j}$. Observe que, portanto, u não é antecessor de nenhum outro vértice de D' e isso implica em $\pi(i)$ não mudar em π_{j+1}, \dots, π_m , contradizendo $\pi(i) = q - n + i$. Logo, todo rearranjo envolvendo i , com $1 \leq i \leq n$ corresponde a movimentações em arestas de D' .

Para provar que os caminhos gerados serão disjuntos, basta observar que o único momento em que um rótulo i , com $1 \leq i \leq q$ pode ser movido para $n+j$ é no j -ésimo rearranjo dos rótulos. Portanto os caminhos devem ser disjuntos em vértices. ■

Como consequência imediata do teorema 3.5 e do corolário 3.3, temos o seguinte teorema, com relação a complexidade do problema COLORAÇÃO DE VÉRTICES:

Teorema 3.6 COLORAÇÃO DE VÉRTICES é \mathcal{NP} -completo, mesmo quando restrito a grafos arco-circulares.

3.2 Tucker

Nesta seção apresentamos os limites superiores propostos por Tucker em [13] para o número cromático de um grafo arco-circular em função da carga do modelo de arcos considerado. O primeiro é obtido através da análise do modelo de arcos fornecido, enquanto o segundo limite superior é obtido por um algoritmo guloso para coloração de vértices de um grafo arco-circular.

Apresentamos agora o primeiro limite obtido por Tucker:

Teorema 3.7 (Tucker [13]) *Seja $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um modelo de arcos de G . Então $\chi(G) \leq 2L(\mathcal{M}) - 1$.*

Prova. Seja $p \in C$ tal que $|\beta(p)| < L(\mathcal{M})$. Considere o modelo de arcos $\mathcal{M}' = (C, \mathcal{A}')$ com $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \setminus \beta(p)$. Claramente \mathcal{M}' é um modelo de intervalo e, portanto, $\chi(G') = L(\mathcal{M}') \leq L(\mathcal{M})$, onde $G' = \Omega(\mathcal{M}')$. Logo, se atribuirmos $|\beta(p)|$ novas cores distintas aos vértices em $Vertices(\beta(p))$, iremos obter uma coloração de G com $L(\mathcal{M}') + |\beta(p)|$ cores. Como $L(\mathcal{M}') \leq L(\mathcal{M})$ e $|\beta(p)| < L(\mathcal{M})$, estaremos utilizando no máximo $2L(\mathcal{M}) - 1$ cores, conforme desejado. ■

Teorema 3.8 (Tucker [13]) *Existe um modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ para o qual, $\omega(G) = 2L(\mathcal{M}) - 1$, onde $G = \Omega(\mathcal{M})$.*

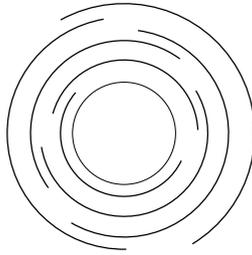


Figura 3.2: Exemplo de modelo de arcos para o grafo K_7 , com $r = 4$

Prova. Considere o modelo de arcos para o grafo completo K_{2r-1} , $r \geq 2$: $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$, com $A_i = (2i - 1, 2(i + r - 1))$. Na figura 3.2 está exemplificado o modelo de arcos para o grafo K_7 . Não é difícil verificar que $L(\mathcal{M}) = r$ e, que $\chi(K_{2r-1}) = 2r - 1 = 2L(\mathcal{M}) - 1$, conforme queremos demonstrar. ■

Tucker, ainda em [13], propõe um algoritmo guloso (algoritmo 3.2), para coloração dos vértices de um grafo arco-circular dado pelo seu modelo e, com isto, estabelece um novo limite superior para o número cromático de um grafo arco-circular em função da carga de seu modelo, para grafos com cobertura circular de tamanho pelo menos 4.

Algoritmo 3.2 ALGORITMO DE TUCKER(\mathcal{M})

Entrada: Modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$.

Saída: Coloração f dos vértices de $G = \Omega(\mathcal{M})$.

- 1: $cmax \leftarrow 1$;
 - 2: Seja $p \in C$ tal que $|\beta(p)| = L(\mathcal{M})$;
 - 3: $A_1 \leftarrow$ arco que se estende menos à esquerda de p ;
 - 4: $f(\text{Vertice}(A_1)) \leftarrow 1$;
 - 5: **para** $i \leftarrow 2$ até n **faça**
 - 6: Seja $A_i = (s_i, t_i)$ o primeiro arco, dentre os arcos cujos vértices correspondentes ainda não foram coloridos, que começa logo após t_{i-1} ;
 - 7: **se** $A_i \cap A_j \neq \emptyset$, para algum $A_j, j < i$ tal que $f(\text{Vertice}(A_j)) = cmax$ **então**
 - 8: $cmax \leftarrow cmax + 1$;
 - 9: $f(\text{Vertice}(A_i)) \leftarrow cmax$;
-

Para o correto entendimento das provas que serão feitas a seguir, algumas novas definições precisam ser introduzidas.

Considere uma execução do algoritmo 3.2 tendo como entrada um modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ e seja $A_1 = (s, t)$ conforme definido no algoritmo.

Dizemos que o algoritmo completou k rodadas quando o mesmo já atravessou k vezes o ponto s , e definimos o conjunto T_i como sendo o conjunto dos arcos cujos vértices foram coloridos durante a rodada i . Ou seja, ou o último arco de T_i contém s ou s está contido no intervalo que começa no extremo final do último arco de T_i e termina no extremo inicial do primeiro arco de T_{i+1} . Além disso, chamamos de $\mathcal{M}_i = (C, \mathcal{A}_i)$ o modelo de arcos obtido a partir dos arcos em T_1, \dots, T_i .

Seja k a maior cor atribuída a algum vértice durante a execução do algoritmo 3.2. Para cada $i \leq k$, chamamos de A_i o arco correspondente ao primeiro vértice que recebeu a cor i .

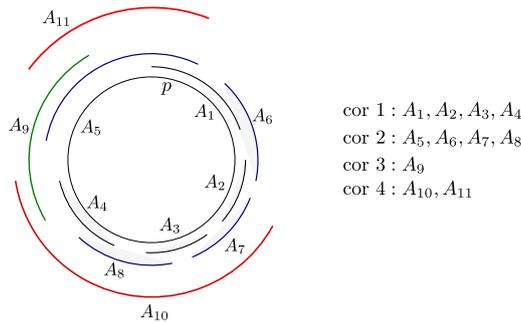


Figura 3.3: Exemplo de execução do algoritmo 3.2

Na figura 3.3 pode ser visto um exemplo de execução do algoritmo 3.2, bem como os conjuntos acima definidos. Para esta execução, temos que $T_1 = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$, $T_2 = \{A_6, A_7, A_8, A_9\}$ e $T_3 = \{A_{10}, A_{11}\}$.

Com base nesse algoritmo, Tucker prova o seguinte teorema:

Teorema 3.9 (Tucker [13]) *Seja $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um modelo de arcos de G . Se $l(\mathcal{M}) \geq 4$, então $\chi(G) \leq \lfloor \frac{3}{2}L(\mathcal{M}) \rfloor$.*

Prova. A prova é por indução em $L = L(\mathcal{M})$. Claramente, se $L(\mathcal{M}) = 1$, então $\chi(G) = 1$ e o resultado vale trivialmente. Suponha então que o teorema vale para qualquer modelo de arcos \mathcal{M} com $L(\mathcal{M}) < L$.

Sejam $A_1 = (s_1, t_1), \dots, A_n = (s_n, t_n)$ os arcos de \mathcal{A} , conforme rotulados pelo algoritmo 3.2. Considere o momento em que o algoritmo completa a primeira rodada. Seja $A_d = (s_d, t_d)$ o arco rotulado pelo algoritmo neste momento. Caso não exista arco contendo s_1 ao final da primeira rodada, A_d será o arco cujo vértice foi rotulado primeiro entre os arcos de T_2 . Considere agora o momento em que o algoritmo visita novamente o ponto s_d pela primeira vez e seja A_e o arco rotulado neste momento (ou, o primeiro arco a ser rotulado após o algoritmo visitar s_d , caso nenhum dos arcos contendo s_d possa ser rotulado nesse momento). Seja A_f o arco rotulado pelo algoritmo ao final da segunda rodada (observe que A_e e A_f podem ser o mesmo arco, caso A_d não contenha s_1 ou A_e contenha s_1).

Seja $\mathcal{M}'_i = (C, \mathcal{A}'_i)$ o modelo de arcos com $\mathcal{A}'_i = \mathcal{A} \setminus \{A_1, \dots, A_i\}$. Não é difícil verificar que $L(\mathcal{M}'_d) < L(\mathcal{M})$. Além disso, $L(\mathcal{M}'_f) \leq L(\mathcal{M}) - 2$. Logo, pela hipótese de indução, temos que $G_f = \Omega(\mathcal{M}'_f)$ é $\frac{3}{2}L(\mathcal{M}'_f)$ -colorível. Resta então provar que é possível colorir os vértices correspondentes aos arcos em $\mathcal{A}' = \{A_1, \dots, A_f\}$ com 3 cores.

Considere a seguinte atribuição de cores aos vértices em $Vertices(\mathcal{A}')$: atribua a cor 1 aos vértices correspondentes aos arcos em $\{A_1, \dots, A_{d-1}\}$; cor 2 aos vértices correspondentes aos arcos em $\{A_d, \dots, A_{e-1}\}$; e, finalmente, cor 3 aos vértices restantes. Pela própria construção do algoritmo, o único conflito de cores possível é entre os vértices $v_e = Vertice(A_e)$ e $v_f = Vertice(A_f)$. Suponha, por absurdo, que v_e e v_f são adjacentes. Nesse caso, A_d deverá conter s_1 (pois, caso contrário, $A_e = A_f$ e não há problema com a coloração) e, portanto, irá possuir interseção com A_f no ponto s_1 . Pelo fato de $A_e \cap A_f \neq \emptyset$ e pela forma como os arcos foram rotulados, temos que o segmento (s_1, s_d) é coberto por A_f . Logo, A_d, A_e e A_f cobrem C e $l(\mathcal{M}) \leq 3$, um absurdo. Logo, $\chi(G) \leq \lfloor \frac{3}{2}L(\mathcal{M}) \rfloor$.

Na figura 3.4 estão ilustrados os casos em que A_e e A_f são distintos, bem como o caso em que $A_e \cap A_f \neq \emptyset$. ■

3.2.1 Valencia-Pabon

Valencia-Pabon, em [14], faz uma nova análise do número de cores utilizadas pelo algoritmo 3.2, generalizando o resultado do teorema 3.9.

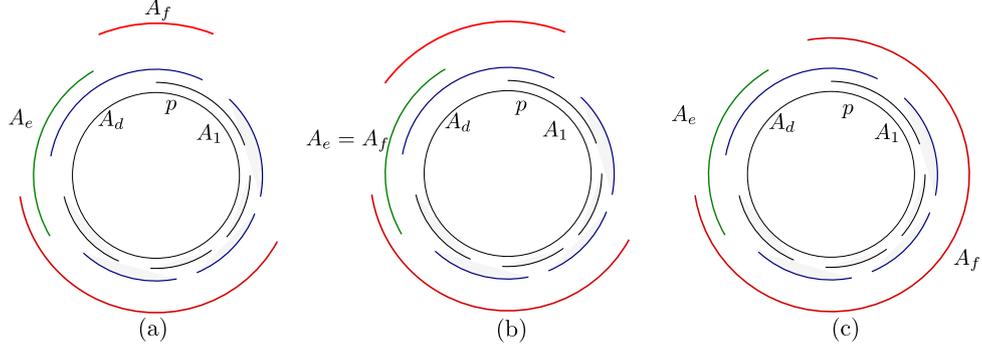


Figura 3.4: Exemplos dos casos citados na prova do teorema 3.9: (a) $A_e \neq A_f$, (b) $A_e = A_f$ e (c) $A_e \cap A_f \neq \emptyset$.

Assumimos, sem perda de generalidade, que dado um modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$, temos que $|\beta(p)| = L(\mathcal{M})$, para todo $p \in C$ tal que p não é um extremo de \mathcal{M} . Observe que isso pode ser feito pois, para qualquer ponto p tal que $|\beta(p)| < L(\mathcal{M})$, podemos adicionar $L(\mathcal{M}) - |\beta(p)|$ arcos da forma (p_1, p_2) , onde p_1 e p_2 são extremos consecutivos na ordenação circular dos extremos de \mathcal{A} que contém p , sem que isso altere o número cromático de $G = \Omega(\mathcal{M})$.

Considere novamente a família de arcos e a coloração dada pelo algoritmo 3.2. A seguir são enunciados três lemas importantes para a prova do teorema principal desta seção:

Lema 3.10 (Valencia-Pabon [14]) *Para todo $i > 1$, temos $A_i \cap A_{i-1} \neq \emptyset$.*

Prova. Segue da observação que, se não for o caso, então existe um arco $A \in \mathcal{A}$ tal que $A \cap A_i \neq \emptyset$, $f(\text{Vertice}(A)) = f(\text{Vertice}(A_{i-1}))$ e A começa antes de A_{i-1} , contradizendo $\text{Vertice}(A_{i-1})$ ser o primeiro a receber a cor $i - 1$. ■

Lema 3.11 (Valencia-Pabon [14]) *Para cada $i, i \geq 1$, seja $\mathcal{M}'_i = (C, \mathcal{A}'_i)$ o modelo de arcos com $\mathcal{A}'_i = \mathcal{A} \setminus \{T_1, \dots, T_i\}$. Então $L(\mathcal{M}'_i) \leq L(\mathcal{M}) - i$.* ■

Prova. A prova é por indução em i . Claramente, se $i = 1$, então o lema é válido. Provaremos, então, que o lema vale para todo $i > 1$. Seja $j > 1$ o primeiro valor para o qual o lema não vale. Por hipótese, temos que $L(\mathcal{M}'_{j-1}) \leq L(\mathcal{M}) - (j - 1)$. Basta, portanto, provar que, na rodada j , estaremos diminuindo em pelo menos uma unidade a carga de \mathcal{M}'_j . Considere os arcos em T_j e seja $p \in C$ um ponto tal que $|\beta(p)| = L(\mathcal{M}'_{j-1})$.

Seja S a ordenação circular dos extremos de \mathcal{M}'_j e sejam p_1 e p_2 os dois extremos consecutivos em S tais que $p \in (p_1, p_2)$. Claramente, temos que p_1 é o extremo inicial de algum arco, enquanto p_2 é um extremo final (caso contrário, teríamos $|\beta(p)| < L(\mathcal{M}'_{j-1})$). Sejam $A', A'' \in T_j$ arcos tais que A' é último arco a terminar

antes de p_1 em T_j e A'' é o primeiro arco de A_j que começa após p_1 . Seja A o arco que contém p_1 como extremo inicial. Pela suposição inicial, sabemos que $A \notin T_j$. Além disso, nenhum arco em T_j contém o segmento (p_1, p) . Temos então que A' não contém p_1 . Além disso, A começa antes de A'' e não contém o extremo final de A' . Logo, A deveria ter sido escolhido pelo algoritmo no momento em que A'' foi rotulado e $A \in T_j$, um absurdo. Portanto, o lema vale. ■

Do lema 3.11, podemos obter o seguinte corolário:

Corolário 3.12 *Seja $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um modelo de arcos tal que $l(\mathcal{M}) \geq 5$. Então, o algoritmo 3.2, quando \mathcal{M} é dado como entrada, tem no máximo $L(\mathcal{M})$ rodadas.*

Lema 3.13 *Para cada $i, 1 \leq i \leq l - 2$, o algoritmo 3.2 utiliza no máximo $i + 1$ cores para colorir os vértices em $Vertices(\mathcal{A}_i)$.*

Prova. Claramente, se $i = 1$, o lema vale. Suponha então que o lema vale para todo $j < i \leq l - 2$. Provaremos então que o resultado vale para $j = i$. Seja A_i o arco de T_{i-1} correspondente ao vértice que primeiro recebeu a cor i dentre todos os de $Vertices(T_{i-1})$ e seja A_i^f o último arco de T_{i-1} . Pela hipótese de indução, estes arcos existem, pois o contrário implicaria em utilizarmos apenas $i - 1$ cores para colorir vértices em $\Omega(\mathcal{M}_{i-1})$, tornando o resultado válido.

Seja A_{i+1} o arco de T_i correspondente ao primeiro vértice que recebeu a cor $i + 1$, dentre aqueles em $Vertices(T_i)$. Pelo lema 3.10, sabemos que A_i e A_{i+1} possuem interseção não vazia. Seja A_{i+1}^f o último arco de T_i e suponha, por absurdo, que a cor $i + 1$ não possa ser atribuída ao vértice $Vertex(A_{i+1}^f)$. Claramente, nesse caso, temos que A_{i+1}^f contém s_1 , pois sabemos que $A_{i+1} \cap A_{i+1}^f \neq \emptyset$ (lema 3.10). Consequentemente, temos que os arcos $A_2, \dots, A_i, A_{i+1}, A_{i+1}^f$ formam uma cobertura circular de \mathcal{M} e $l(\mathcal{M}) \leq i + 1 \leq l - 1$, um absurdo. Logo, o lema vale. ■

A partir dos lemas 3.11 e 3.13, é possível generalizar o resultado do teorema 3.9:

Teorema 3.14 (Valencia-Pabon [14]) *Seja $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um modelo de arcos de G . Se $l(\mathcal{M}) = l \geq 5$, então $\chi(G) \leq \lceil \frac{l-1}{l-2} L(\mathcal{M}) \rceil$.*

Prova. A prova é por indução em $L(\mathcal{M}) = L$. Claramente, se $L = 1$, então o teorema vale trivialmente. Suponha então que o teorema vale para quando $L(\mathcal{M}) < L$.

Pelo lema 3.11 e pelo fato de termos no máximo L rodadas no algoritmo 3.2, é fácil verificar que, se $l - 2 > L$, então $\chi(G) \leq L + 1$ e o teorema vale. Considere então que $l - 2 < L$.

Seja $\mathcal{M}' = (C, \mathcal{A}')$ o conjunto de arcos já considerados pelo algoritmo 3.2 ao término de $l - 2$ rodadas. Pelo lema 3.13, sabemos que terão sido utilizadas no

máximo $l - 1$ cores para colorir os vértices de $\Omega(\mathcal{M}')$. Seja $\mathcal{M}'' = (C, \mathcal{A}'')$ o modelo de arcos com $\mathcal{A}'' = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$. Pelo lema 3.11, temos que $L(\mathcal{M}'') \leq L(\mathcal{M}) - (l - 2)$. Pela hipótese de indução, o algoritmo 3.2 irá utilizar no máximo $\lceil \frac{l-1}{l-2}(L(\mathcal{M}) - (l - 2)) \rceil$ cores para colorir os vértices de $\Omega(\mathcal{M}'')$.

Não é difícil verificar que, para todo grafo $G = (V, E)$, se $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, são subgrafos de G , induzidos por V_1 e V_2 , respectivamente, se V_1 e V_2 formam uma partição do conjunto V , então $\chi(G) \leq \chi(G_1) + \chi(G_2)$.

Portanto, para colorir G , serão utilizadas não mais do que

$$(l - 1) + \left\lceil \frac{l - 1}{l - 2}(L(\mathcal{M}) - (l - 2)) \right\rceil = \left\lceil \frac{(l - 1)L(\mathcal{M}) - (l - 1)(l - 2) + (l - 1)(l - 2)}{l - 2} \right\rceil$$

cores, o que nos dá o limite desejado de $\lceil \frac{l-1}{l-2}L(\mathcal{M}) \rceil$ cores. ■

Podemos também escrever o limite para o número cromático de um grafo arco-circular G em função do tamanho do maior arco do modelo \mathcal{M} fornecido, onde o tamanho de um arco A é a quantidade de extremos de $\mathcal{M} \setminus A$, cobertos por ele, mais 2.

Corolário 3.15 (Valencia-Pabon [14]) *Seja $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um modelo de arcos. Para todo $k \geq 3$, se o tamanho do maior arco em \mathcal{A} é de no máximo $2n/k$, então o algoritmo 3.2 irá utilizar no máximo $\lceil \frac{k}{k-1}L(\mathcal{M}) \rceil$ cores para colorir $\Omega(\mathcal{M})$.*

Prova. Segue do fato de que, nesse caso, $l(\mathcal{M}) \geq k + 1$. ■

Além de generalizar o limite superior para o número cromático obtido por Tucker, Valencia-Pabon mostra que o limite de $\lceil \frac{l-1}{l-2}L(\mathcal{M}) \rceil$ é muito próximo de justo:

Teorema 3.16 (Valencia-Pabon [14]) *Para qualquer $l \geq 3$, ímpar e $L \geq 2$, par, existe um grafo arco-circular G com modelo de arcos \mathcal{M} tal que $l(\mathcal{M}) = l$, $L(\mathcal{M}) = L$ e $\chi(G) = \lceil \frac{l}{l-1}L \rceil$.*

Prova. considere o seguinte modelo de arcos $\mathcal{M}_{r,l} = (C, \mathcal{A})$, para qualquer $r \geq 1$ e $l \geq 3$, ímpar: $\mathcal{A} = \{A_1^1, \dots, A_1^r, \dots, A_l^1, \dots, A_l^r\}$ e, para $1 \leq i \leq l$, $1 \leq j \leq r$, $A_i^j = (i, i + 2 \pmod l)$. Claramente temos $L(\mathcal{M}_{r,l}) = 2r = L$ e $l(\mathcal{M}_{r,l}) = l$. Na figura 3.5 está ilustrado o modelo $\mathcal{M}_{3,7}$. Segundo Valencia-Pabon [14], Stahl prova que toda r -tupla-coloração de um ciclo C_l precisa de pelo menos $2r + 1 + \lfloor \frac{2r-2}{l-1} \rfloor$ cores. Uma r -tupla-coloração é uma coloração de vértices em que atribuímos r cores distintas a cada vértice e, além disso, vértices adjacentes não possuem cores em comum. Com base nesse resultado, não é difícil verificar que colorir os vértices

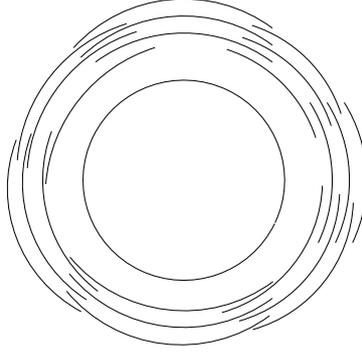


Figura 3.5: Modelo de arcos $\mathcal{M}_{3,7}$

de $G_{r,l} = \Omega(\mathcal{M}_{r,l})$ é equivalente a resolver o problema da r -tupla-coloração nesse mesmo grafo. Desta forma, teremos

$$\chi(G_{r,l}) \leq L + 1 + \left\lfloor \frac{L-2}{l-1} \right\rfloor = \frac{(L+1)(l-1) + L-2}{l-1} = \left\lceil \frac{l}{l-1} L \right\rceil,$$

conforme queremos demonstrar. ■

Conforme observado em [14], não é razoável esperar que o limite superior dado pelo teorema 3.14, dado um modelo \mathcal{M} com $l(\mathcal{M}) = l$ e $L(\mathcal{M}) = L$, possa ser diminuído para $\lfloor \frac{l-1}{l-2} L \rfloor$ pois se \mathcal{M} é o modelo de um ciclo com pelo menos 5 vértices, teremos $L = 2$, $l = n$ e $\lfloor \frac{l-1}{l-2} L \rfloor = 2$, enquanto o número cromático de todo ciclo ímpar é 3.

Valencia-Pabon mostra, então, que o limite de fato é justo, conforme demonstrado a seguir.

Teorema 3.17 (Valencia-Pabon [14]) *O limite do teorema 3.14 é justo.*

Prova. Pelo teorema 3.16, sabemos que o problema da r -tupla-coloração de um ciclo ímpar com l vértices pode ser representado pelo problema da coloração de vértices do grafo $\mathcal{M}_{r,l}$. Tome então $l = 2k + 1$ para $r \geq 1$ e algum $1 \leq r \leq k - 1$. Claramente o número cromático desse grafo será $\lceil \frac{l-1}{l-2} L \rceil = \lceil \frac{4kr}{2k-1} \rceil = \lceil \frac{2r(2k-1)+2r}{2k-1} \rceil = 2r + 1$. ■

3.3 Conclusões

Tucker, em 1975, provou que todo grafo arco-circular G , dado por um de seus modelos de arcos \mathcal{M} é $2L(\mathcal{M}) - 1$ colorível e mostrou que existem grafos arco-circulares para os quais esse limite é atingido. No mesmo trabalho, Tucker mostrou que se $l(\mathcal{M}) \geq 4$, então G é $\frac{3}{2}L(\mathcal{M})$ -colorível. Valencia-Pabon [14], estendeu esse resultado para $\lceil \frac{l-1}{l-2} L(\mathcal{M}) \rceil$, onde $l = l(\mathcal{M}) \geq 5$. No mesmo trabalho, Valencia-Pabon mostrou que esse resultado é o melhor possível, ou seja: o limite é justo.

É interessante observar que, nos casos em que $l(\mathcal{M})$ vale 2 ou 3, não é possível calcular, a priori, quantas cores serão utilizadas na coloração obtida pelo algoritmo guloso de Tucker. No caso particular em que $l(\mathcal{M}) = 3$, não há muito o que ser feito: como visto na prova do teorema 3.8 existem modelos de arcos com cobertura circular de tamanho 3 para os quais o número cromático do grafo correspondente é exatamente igual a $2L(\mathcal{M}) - 1$. Tal constatação nos leva a acreditar que dificilmente será possível obter um limite superior para o número cromático, de forma similar ao feito por Valencia-Pabon, para o caso em que $l(\mathcal{M}) = 2$.

Analisamos também o trabalho de Garey, Johnson, Miller e Papadimitriou [5], onde os autores provam que o problema da coloração de vértices é \mathcal{NP} -completo. Como consequência dessa prova, os autores mostram que decidir se um grafo arco-circular é k -colorível pode ser feito em tempo polinomial, se k for fixo.

Capítulo 4

Coloração de Cliques

COLORAÇÃO DE CLIQUES é uma variante de COLORAÇÃO DE VÉRTICES onde a restrição sobre as cores está sobre o conjunto de cliques do grafo. Dado um grafo, uma **coloração de cliques** é uma atribuição de cores à seus vértices de forma que toda clique maximal não-trivial possua pelo menos dois vértices coloridos com cores distintas. O problema da coloração de cliques consiste em encontrar, dado um grafo G , uma tal coloração minimizando número de cores utilizadas. Em sua versão decisão, temos:

Problema: COLORAÇÃO DE CLIQUES

Instância: Um grafo $G = (V, E)$ e um inteiro $k > 0$.

Questão: Existe uma função $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ tal que f é uma coloração de cliques?

O **número clique-cromático** de um grafo G , denotado por $\chi_c(G)$, é o menor valor k para o qual o grafo G admite resposta SIM no problema COLORAÇÃO DE CLIQUES. Um grafo G para o qual existe uma coloração de cliques $f : V \rightarrow \{1, \dots, k\}$ é dito **k -clique-colorível**, dizemos que f é uma **k -coloração de cliques** de G e, que f utiliza k cores. Dizemos que uma coloração de cliques f de um grafo G que utiliza exatamente $\chi_c(G)$ cores é uma coloração de cliques **ótima**. O problema k -COLORAÇÃO DE CLIQUES consiste em decidir, dado um grafo G , se o mesmo é k -clique-colorível.

Há semelhanças entre coloração de cliques e coloração de vértices. De fato, toda coloração de vértices é também, por definição, uma coloração de cliques. Além disso, COLORAÇÃO DE CLIQUES em grafos sem triângulos é exatamente COLORAÇÃO DE VÉRTICES nesta mesma classe. No entanto, em alguns aspectos, coloração de cliques e colorações de vértices diferem radicalmente. Em particular, o número clique-cromático de um subgrafo, mesmo que induzido, pode ser maior que o do grafo original. É interessante observar também que bastam duas cores para colorir uma clique de tamanho arbitrário, o que nos impede de obter qualquer limite inferior

para χ_c com base no tamanho da maior clique, diferentemente do que acontece para o número cromático.

COLORAÇÃO DE CLIQUES é \mathcal{NP} -difícil para grafos perfeitos, mas pode ser resolvido em tempo polinomial para grafos planares [8]. O problema da 2-coloração de cliques foi estudado por Bacsó *et al.* em [1]. Não é difícil verificar que grafos cordais sempre admitem uma 2-coloração de cliques, conforme mostrado na seção 4.3. Em particular, todo grafo de intervalo é 2-clique-colorível.

Nesse capítulo mostramos que, dado um modelo de arcos \mathcal{M} , o grafo $G = \Omega(\mathcal{M})$ é 3-clique-colorível e, também, exibimos um algoritmo polinomial para encontrar uma coloração de cliques ótima do grafo.

A estratégia utilizada para tratar do problema da coloração de cliques em grafos arco-circulares consiste em: inicialmente mostramos que todo grafo arco-circular é 3-clique-colorível; em seguida, analisamos o caso em que o modelo fornecido possui a propriedade Helly; finalmente, é analisado o caso em que o modelo não possui esta propriedade. Em ambos os casos é mostrado como encontrar uma clique-coloração ótima para o grafo em questão.

O capítulo está dividido da seguinte forma: na seção que segue são apresentadas as definições necessárias para o entendimento do texto; na seção 4.2 são apresentados os resultados obtidos para COLORAÇÃO DE CLIQUES em grafos arco-circulares; finalmente, na seção 4.3, é exibido um algoritmo de tempo polinomial que resolve o problema.

Os resultados discutidos neste capítulo foram apresentados no V LAGOS, em Gramado/Novembro/2009 [3].

4.1 Definições

Seja $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um modelo de arcos de um grafo G e $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$. Dizemos que os arcos de \mathcal{A}' são **removíveis**, ou, alternativamente, \mathcal{A}' é um **conjunto de arcos removíveis**, se existe um arco $A_i \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}'$ tal que as seguintes propriedades valem simultaneamente:

- Todo arco $A' \in \mathcal{A}'$ está propriamente contido em A_i ;
- O grafo de interseção do modelo de arcos $\mathcal{M}' = (C, \mathcal{A}')$ é conexo;
- Para todo $A \in \mathcal{A} \setminus (\mathcal{A}' \cup \{A_i\})$ e $A' \in \mathcal{A}'$, temos que $A \cap A' = \emptyset$.

De forma equivalente, dizemos que \mathcal{A}' é um conjunto de arcos removíveis se, e somente se, o vértice v_i , correspondente ao arco A_i é uma articulação de G , os vértices correspondentes aos arcos de $\mathcal{A}' \cup \{A_i\}$ induzem um componente biconexo em G e A_i contém todo arco $A' \in \mathcal{A}'$.

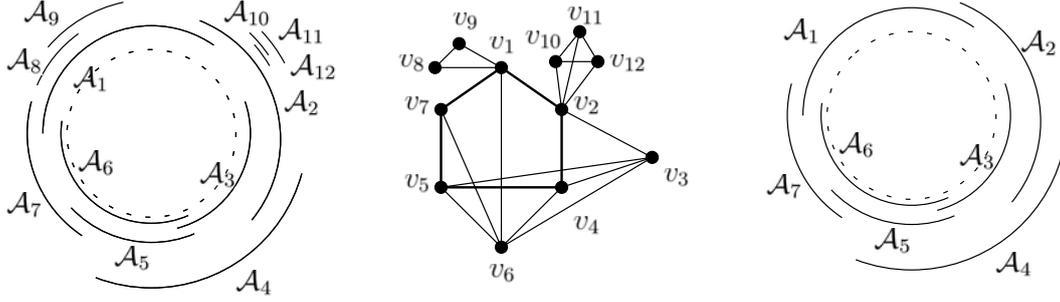


Figura 4.1: Um modelo de arcos, seu grafo de interseção e seu modelo reduzido.

Um modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ que não possui arco removível é chamado de **modelo reduzido** e $G = \Omega(\mathcal{M})$ de **grafo reduzido**. Na figura 4.1 está exemplificado um modelo de arcos, seu grafo de interseção e seu modelo reduzido.

4.2 Limites para $\chi_c(G)$

Nesta seção são detalhados os resultados por nós obtidos sobre coloração de cliques para grafos arco-circulares. Inicialmente provamos que todo grafo arco-circular admite uma 3-coloração de cliques e que o número clique-cromático de um grafo arco-circular é exatamente igual ao número clique-cromático de seu grafo reduzido; em seguida, estudamos o caso em que o modelo de arcos fornecido possui a propriedade Helly e, finalmente, analisamos caso em que tal o modelo não possui tal propriedade.

Teorema 4.1 *Se $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ é um modelo de arcos e $G = \Omega(\mathcal{M})$, então G é 3-clique-colorível.*

Prova. Seja $S = (p_1, \dots, p_{2n})$ a ordenação circular dos extremos de \mathcal{M} . Seja $p \in C$ um ponto que está estritamente entre dois extremos consecutivos p_k e p_{k+1} , em S , tal que para todo par de arcos $A_i, A_j \in \mathcal{A}$, temos que $p_k \neq s_i$ e $p_{k+1} \neq t_j$. Considere o conjunto $\beta(p)$. Se $\beta(p) = \emptyset$, então G é um grafo de intervalo e, portanto, 3-clique-colorível. Considere, então, o caso em que $\beta(p)$ não é vazio. Observe que $\text{Vertices}(\beta(p))$ não é uma clique maximal em G , pois os arcos de $\beta(p)$ contém ou o extremo p_k ou o extremo p_{k+1} . Considere, então, o modelo de arcos $\mathcal{M}' = (C, \mathcal{A} \setminus \beta(p))$. Por definição, \mathcal{M}' não cobre toda a circunferência C e, portanto, \mathcal{M}' é um modelo de intervalo.

Como \mathcal{M}' é um modelo de intervalo temos que $G' = \Omega(\mathcal{M}')$ é 2-clique-colorível. Seja f' uma 2-coloração de cliques de G' , que utiliza cores 1 e 2. Crie uma coloração de cliques $f : V \rightarrow \{1, 2, 3\}$ para G da seguinte forma: se v é vértice de G' , então $f(v) = f'(v)$; caso contrário, $f(v) = 3$. Como os vértices correspondentes aos arcos

de $\beta(p)$ não são uma clique maximal, temos que toda clique maximal de G que possua algum desses vértices não será monocromática. Além disso, qualquer outra clique maximal é também clique maximal em G' e, portanto, também não será monocromática. Conseqüentemente, f é uma 3-coloração de cliques para G . ■

Teorema 4.2 *Seja $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um modelo de arcos, $\mathcal{A}' \in \mathcal{A}$ um conjunto de arcos removíveis e $A_i \in \mathcal{A}$ o arco que contém propriamente os arcos de \mathcal{A}' . Se $G = \Omega(\mathcal{M})$, $\mathcal{M}' = (C, \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}')$ e $G' = \Omega(\mathcal{M}')$, então $\chi_c(G) = \chi_c(G')$.*

Prova. Toda clique maximal de G' é também clique maximal de G , logo, $\chi_c(G') \leq \chi_c(G)$. Seja f' uma $\chi_c(G')$ -coloração de cliques de G' e considere, sem perda de generalidade, que $f'(v_i) = 1$, onde $v_i = \text{Arco}(A_i)$. Considere a seguinte função f : para todo vértice v de G' , $f(v) = f'(v)$; para todo outro vértice v , $f(v) = 2$. A análise de que f é uma coloração de cliques de G é análoga a feita no teorema 4.1. Logo, $\chi_c(G) \leq \chi_c(G')$ e, portanto, $\chi_c(G) = \chi_c(G')$. ■

Corolário 4.3 *Se \mathcal{M} é um modelo de arcos, \mathcal{M}' o seu modelo reduzido, $G = \Omega(\mathcal{M})$ e $G' = \Omega(\mathcal{M}')$, então $\chi_c(G) = \chi_c(G')$.*

Prova. Segue imediatamente ao aplicarmos o teorema 4.2 a cada conjunto de arcos removíveis de \mathcal{M} . ■

No teorema que segue, mostramos que um grafo arco-circular é 3-clique-cromático se, e somente se, seu grafo reduzido for um ciclo ímpar de tamanho pelo menos 5. Para isso, analisamos o caso em que o modelo de arcos possui a propriedade Helly. Em seguida fazemos a análise do caso complementar.

Teorema 4.4 *Seja $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um modelo de arcos Helly, reduzido, e $G = \Omega(\mathcal{M})$. $\chi_c(G) \leq 2$ se, e somente se, G não é um ciclo ímpar induzido de tamanho pelo menos 5.*

Prova. (\Rightarrow) Suponha que $\chi_c(G) \leq 2$. Então, claramente, G não pode ser um ciclo ímpar induzido de tamanho pelo menos 5, pois nesse caso G seria 3-clique-cromático.

(\Leftarrow) Suponha que G não é um ciclo ímpar induzido de tamanho pelo menos 5. Se G for um grafo cordal, então $\chi_c(G) \leq 2$. Suponha, então, que G não é cordal. Nesse caso temos que G possui ao menos um ciclo induzido de tamanho maior ou igual a 4. Seja $C_k = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ um ciclo induzido de G , $k \geq 4$. Assim, temos que os arcos correspondentes aos vértices de C_k cobrem C .

Consideraremos então duas possibilidades para o grafo G :

- Nenhuma clique maximal de G possui tamanho menor que 3: como \mathcal{M} possui a propriedade Helly, sabemos que, para toda clique K_i , existe pelo menos

um ponto $p_i \in C$ tal que os arcos que contém p_i são exatamente aqueles correspondentes aos vértices de K_i . Logo, pelo fato dos arcos correspondentes aos vértices de C_k cobrirem C e $|K_i| \geq 3$ para toda clique maximal K_i de G , temos que sempre existem vértices $v' \in K_i \setminus C_k$ e $v'' \in K_i \cap C_k$, respectivamente. Consequentemente, ao atribuirmos a cor 1 aos vértices de C_k e a cor 2 para os vértices restantes, obtemos uma 2-coloração de cliques de G .

- Existe pelo menos uma clique maximal de tamanho 2 em G : seja $e = v_i v_j$ uma aresta de G que é clique maximal. Observe que e é, necessariamente uma aresta de C_k , pois todo par de vértices adjacentes e que não pertencem a C_k são simultaneamente adjacentes a pelo menos um vértice de C_k ; outra possibilidade seria e possuir exatamente um vértice em C_k , o que contradiz o fato de G ser um grafo reduzido.

Sejam $P = \{P_1, \dots, P_p\}$ e $Q = \{Q_1, \dots, Q_q\}$, os conjuntos de todos os caminhos maximais de G tais que as arestas desses caminhos são cliques maximais e de componentes conexos do grafo induzido por $E(G) \setminus E(P)$, respectivamente.

Denotaremos por v'_i e v''_i os vértices de Q_i cujos respectivos intervalos possuem o menor e maior extremos, respectivamente. Pelo fato de \mathcal{M} ser um modelo reduzido, v'_i e v''_i são vértices distintos e são vértices de C_k , pois em caso contrário teríamos que os arcos correspondentes a vértices em $V(Q_i) \setminus \{v'_i\}$ seriam removíveis. Além disso, toda clique maximal de Q_i é também maximal em G , possui ao menos 3 vértices e pelo menos um desses vértices pertence a C_k . Provaremos então que existem ao menos duas 2-coloração de cliques, f e f' , para os vértices de Q_i tais que $f(v'_i) = f(v''_i)$ e $f'(v'_i) \neq f'(v''_i)$, respectivamente.

Para o primeiro caso, observe que colorindo os vértices de $V(Q_i) \cap C_k$ com a cor 1 e todos os outros com a cor 2, obteremos uma 2-coloração de cliques para Q_i .

Construiremos agora uma 2-coloração de cliques f' para Q_i tal que $f'(v'_i) \neq f'(v''_i)$. Para isso, considere a seguinte atribuição de cores para os vértices de Q_i :

$$f(v) = \begin{cases} 1 & \text{se } v \in C_k \setminus \{v''_i\} \text{ ou } N(v) \cap C_k = \{v''_i\} \\ 2 & \text{em qualquer outro caso} \end{cases}$$

Analisando as possibilidades para as cliques maximais de Q_i , é fácil verificar que nenhuma delas é monocromática.

Para obter uma 2-coloração de cliques para G , baseado no exposto acima, basta seguir os seguintes procedimentos:

1. Obtenha uma coloração de cliques ótima para cada caminho $P_i \in P$;
2. Para cada componente $Q_i \in Q$, compare a cor dos vértices v'_i e v''_i . Atribua a Q_i uma das duas colorações de cliques descritas anteriormente.

É importante observar que, no caso em que $|P| = 1$ e $|P_1| = 2$, teremos que v'_1 e v''_1 serão adjacentes e, nesse caso, o grafo induzido por Q_1 será o próprio grafo G . No entanto, a atribuição de cores continuará uma coloração de cliques, pois estamos colorindo primeiro os vértices em $P_1 = (v'_1, v''_1)$; nesse caso v'_1 e v''_1 estarão recebendo cores distintas, forçando assim, em Q_1 , que os vértices sejam coloridos utilizando a coloração que atribui $f(v'_1) \neq f(v''_1)$.

Não é difícil verificar que este procedimento irá gerar, de fato, uma 2-coloração de cliques para G .

Como consequência imediata do descrito acima temos que, se \mathcal{M} é um modelo de arcos Helly, reduzido, e G não é um ciclo induzido, ímpar, de tamanho pelo menos 5, então $\chi_c(G) \leq 2$. ■

Finalmente, exibimos como encontrar uma coloração de cliques ótima quando o modelo \mathcal{M} não possui a propriedade Helly. Não apenas isso, será mostrado também que nesse caso serão usadas exatamente 2 cores.

Teorema 4.5 *Seja $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um modelo de arcos que não possui a propriedade Helly e $G = \Omega(\mathcal{M})$. Então $\chi_c(G) \leq 2$.*

Prova. Como \mathcal{M} não é Helly, basta considerarmos dois casos [7]:

- *Dois arcos $A_i, A_j \in \mathcal{A}$ cobrem completamente C : sejam v_i e v_j os vértices correspondentes a A_i e A_j , respectivamente. Claramente, $N(v_i) \cup N(v_j) = V(G)$. Logo, basta atribuir a cor 1 a $v \in N(v_j)$ e a cor 2 aos vértices restantes. A análise de que esta é uma 2-coloração de cliques é trivial. A figura 4.2 exemplifica a relação entre v_i, v_j e os vértices restantes do grafo, bem como a coloração aqui proposta;*
- *Três arcos $A_i, A_j, A_k \in \mathcal{A}$ cobrem completamente C , mas, quando tomados dois a dois, nenhum deles o faz: sejam v_i, v_j e v_k os vértices correspondentes a A_i, A_j e A_k , respectivamente, e considere a seguinte atribuição de cores f aos vértices de G :*

$$f(v) = \begin{cases} 1 & \text{se } v \in \{v_i, v_j\} \\ 1 & \text{se } v \in N(v_k) \setminus (N(v_i) \cup N(v_j)) \\ 1 & \text{se } v \in (N(v_k) \cap N(v_i)) \setminus N(v_j) \\ 2 & \text{em qualquer outro caso} \end{cases}$$

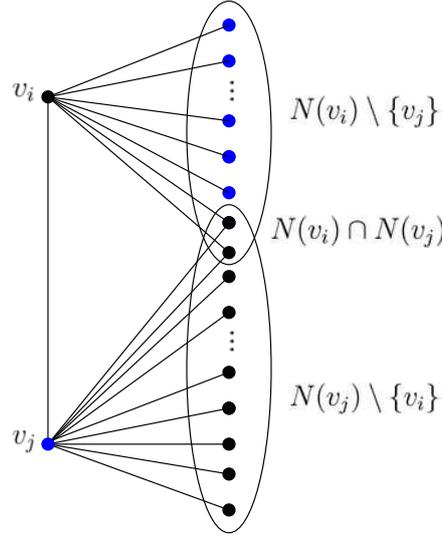


Figura 4.2: Vizinhança/coloração para modelo de arcos não-Helly (caso 1)

Na figura 4.3 está diagramada a relação entre as vizinhanças dos vértices e as cores atribuídas para os vértices das mesmas.

Seja K uma clique maximal de G e suponha, por absurdo, que K é monocromática. Analisaremos agora as possíveis configurações para os vértices de K :

- $v_i \in K$: apenas v_j e vértices de $(N(v_k) \cap N(v_i)) \setminus N(v_j)$ possuem a mesma cor que v_i . Portanto, ou $K = \{v_i, v_j\}$, contradizendo a maximalidade de K , ou K contém, além de v_i , apenas vértices do conjunto $(N(v_k) \cap N(v_i)) \setminus N(v_j)$ e, conseqüentemente, $v_k \in K$. No entanto, $f(v_k) \neq f(v_i)$, contradizendo o fato de K ser monocromática;
- $v_j \in K$: além de v_i , apenas vértices em $N(v_k) \setminus (N(v_i) \cup N(v_j))$ e $(N(v_k) \cap N(v_i)) \setminus N(v_j)$ possuem a mesma cor que v_j . Logo, pelo fato de K ser monocromática, temos que $K = \{v_i, v_j\}$. No entanto, $K \cup \{v_k\}$ também é clique em G , contradizendo a maximalidade de K ;
- $v_k \in K$: nesse caso tanto v_i quanto v_j não pertencem a K . Além disso, se $v \in K$ e $v \neq v_k$, então $v \in N(v_k) \cap N(v_j)$. Logo, se existir $v \in K$ tal que $v \neq v_k$, então $v_j \in K$, contradizendo o fato de K ser monocromática;
- $\{v_i, v_j, v_k\} \cap K = \emptyset$: nesse caso K deve possuir vértices de $(N(v_i) \cap N(v_j)) \setminus N(v_k)$, $(N(v_j) \cap N(v_k)) \setminus N(v_i)$ e de $(N(v_k) \cap N(v_i)) \setminus N(v_j)$ (caso contrário ao menos um vértice dentre v_i, v_j e v_k faria parte de K), o que contradiz a hipótese inicial de K ser monocromática.

Portanto, K não é monocromática e f é uma 2-coloração de cliques para G .

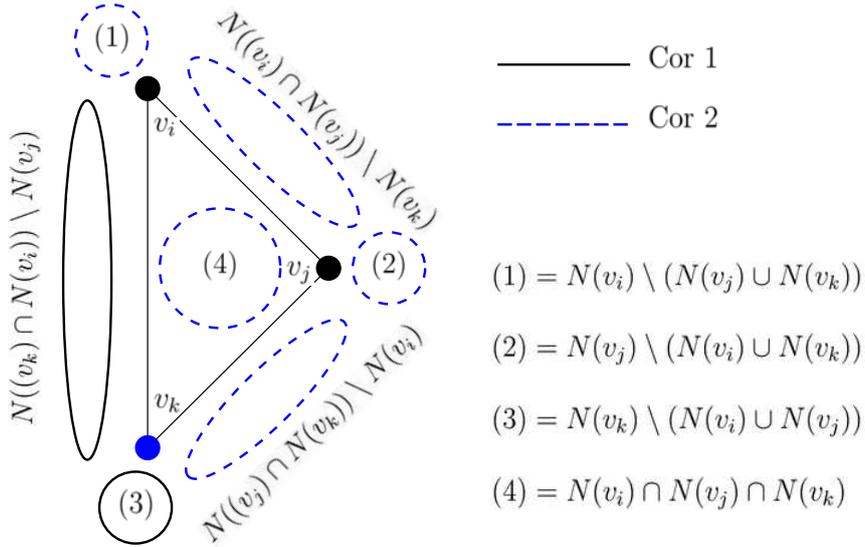


Figura 4.3: Vizinhança/coloração para modelo de arcos não-Helly (caso 2)

Logo, se \mathcal{M} não possui a propriedade Helly, então $\chi_c(G) = 2$. ■

Como consequência imediata dos teoremas 4.4 e 4.5, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 4.6 *Um grafo arco-circular G é 3-clique-cromático se o seu grafo reduzido for um ciclo induzido de tamanho ímpar com pelo menos 5 vértices. Caso contrário, G é 2-clique-cromático.*

4.3 Algoritmos

Com base nos resultados obtidos na seção anterior, desenvolvemos algoritmos de tempo polinomial para o problema da coloração de cliques restrito a grafos arco-circulares, tanto em sua versão de decisão quanto de otimização. Nesta seção são exibidos e analisados tais algoritmos. No caso particular da versão de decisão do problema, a complexidade de tempo do algoritmo exibido é linear no tamanho do grafo em questão. Também será exibido o algoritmo de coloração de cliques para grafos cordais. Este último, no entanto, não será analisado detalhadamente.

O algoritmo 4.3, para coloração de cliques de grafos arco-circulares, derivado dos teoremas discutidos na seção 4.2, possui como sub-rotinas os algoritmos de coloração de cliques de grafos arco-circulares com modelo Helly e grafos cordais, que estão descritos nos algoritmos 4.2 e 4.1, respectivamente.

4.3.1 Preliminares

Apresentamos agora algoritmos de coloração de cliques para caminhos, ciclos e grafos cordais. Estes algoritmos não são examinados em detalhes. No entanto,

são apresentados neste capítulo por serem utilizados no algoritmo de coloração de cliques de grafos arco-circulares Helly.

Dizemos que f é uma **coloração de cliques canônica** de um caminho $P = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ se f for da forma: $f(v_i) = 1$, quando i é ímpar, e $f(v_i) = 2$, quando i é par. De forma análoga, a coloração de cliques canônica de um ciclo $C_k = (v_1, v_2, \dots, v_k)$, $k > 3$, é dada por: $f(v_i) = 1$, se i é ímpar e $i \neq k$, $f(v_i) = 2$, se i é par. No caso de ciclos ímpares v_k recebe a cor 3 ao invés da cor 1.

No procedimento que segue está descrito o algoritmo de coloração de cliques de grafos cordais:

Algoritmo 4.1 COLORAÇÃO DE CLIQUES CORDAL(\mathcal{M})

Entrada: Grafo cordal $G = (V, E)$.

Saída: Coloração de cliques f , ótima, do grafo $G = \Omega(\mathcal{M})$.

- 1: $\pi = (v_1, \dots, v_n) \leftarrow$ esquema de eliminação perfeita de G ;
 - 2: **para** $i \leftarrow n$ até 1 **faça**
 - 3: **se** $N(v_i) \cap (v_{i+1}, \dots, v_n) \neq \emptyset$ **então**
 - 4: Seja $v \in N(v_i) \cap (v_{i+1}, \dots, v_n)$
 - 5: **se** $f(v) = 1$ **então**
 - 6: $f(v_i) \leftarrow 2$;
 - 7: **senão**
 - 8: $f(v_i) \leftarrow 1$;
 - 9: **senão**
 - 10: $f(v_i) \leftarrow 1$;
-

4.3.2 Arco-circular Helly

A prova do teorema 4.4 nos fornece um algoritmo (algoritmo 4.2) para colorir as cliques de um grafo arco-circular Helly, a partir de um de seus modelos de arcos Helly.

Corolário 4.7 *Se $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ é um modelo de arcos Helly, então o algoritmo 4.2 produz uma coloração de cliques ótima para $G = \Omega(\mathcal{M})$.*

Prova. O algoritmo segue os procedimentos descritos no teorema 4.4, e portanto está correto. ■

Teorema 4.8 *O algoritmo 4.2 possui complexidade de tempo polinomial.*

Prova. A verificação de se $G = \Omega(\mathcal{M})$ é cordal pode ser feita em tempo linear [6]. Além disso, os algoritmos de redução do modelo de arcos e de coloração de grafos cordais são, claramente, polinomiais.

Algoritmo 4.2 COLORAÇÃO DE CLIQUES ARCO-CIRCULAR HELLY(\mathcal{M})

Entrada: Modelo de arcos, Helly, $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$.

Saída: Coloração de cliques f , ótima, do grafo $G = \Omega(\mathcal{M})$.

```
1:  $G \leftarrow \Omega(\mathcal{M})$ 
2: se  $G$  for cordal então
3:    $f \leftarrow$  COLORAÇÃO DE CLIQUES CORDAL( $G$ );
4: senão
5:    $\mathcal{M}' \leftarrow$  REDUZ MODELO ARCO-CIRCULAR( $\mathcal{M}$ )
6:   se  $G'$  for um ciclo induzido, ímpar, com pelo menos 5 vértices então
7:      $f \leftarrow$  clique-coloração canônica de  $G'$ 
8:   senão
9:     Seja  $C_k$  um ciclo induzido com pelo menos 4 vértices;
10:    se Existe  $e \in E(G)$  tal que  $e$  é clique maximal então
11:      Sejam  $P \leftarrow \{P_1, \dots, P_p\}$  e  $Q \leftarrow \{Q_1, \dots, Q_q\}$  os conjuntos descritos no
      teorema 4.4;
12:      Atribua a  $f$  a coloração descrita no teorema 4.4;
13:    senão
14:      para cada  $v \in V(G')$  faça
15:        se  $v \in C_k$  então
16:           $f(v) \leftarrow 1$ ;
17:        senão
18:           $f(v) \leftarrow 2$ ;
19:      para cada  $\mathcal{A}' \in \mathcal{A}$  tal que  $\mathcal{A}'$  é removível faça
20:        Seja  $A_i$  o arco que contém todos os arcos de  $\mathcal{A}'$ ;
21:        Seja  $v_i$  o vértice correspondente a  $A_i$ ;
22:        para cada  $v$  tal que  $v$  corresponde a  $\mathcal{A}' \in \mathcal{A}'$  faça
23:           $f(v) \leftarrow 3 - f(v_i)$ 
```

A obtenção de um ciclo induzido com pelo menos 4 vértices pode ser feito em tempo $O(n + m^2)$ [10]. Decidir se existe uma aresta que é clique maximal também é polinomial, podendo ser realizado em tempo linear. Finalmente, a separação do grafo nos componentes P e Q consiste em detectar componentes conexas de um grafo, o que requer tempo $O(n + m)$. Todos os outros procedimentos são claramente polinomiais. ■

4.3.3 Arco-circular

O algoritmo 4.3, para coloração de cliques de grafos arco-circulares, já considerando tanto modelos de arcos Helly, quanto os que não o são, é exibido a seguir:

Algoritmo 4.3 COLORAÇÃO DE CLIQUES ARCO-CIRCULAR(\mathcal{M})

Entrada: Modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$.

Saída: Coloração de cliques ótima f do grafo $G = \Omega(\mathcal{M})$.

```

1: se  $\mathcal{M}$  é Helly então
2:    $f \leftarrow$  COLORAÇÃO DE CLIQUES ARCO-CIRCULAR HELLY( $\mathcal{M}$ );
3: senão
4:    $G \leftarrow \Omega(\mathcal{M})$ ;
5:   se Existem arcos  $A_i, A_j \in \mathcal{A}$  tais que  $C$  é coberto por  $\{A_i, A_j\}$  então
6:     Sejam  $v_i$  e  $v_j$  os vértices correspondentes a  $A_i$  e  $A_j$ , respectivamente;
7:     para cada  $v \in V(G)$  faça
8:       se  $v \in N(v_j)$  então
9:          $f(v) \leftarrow 1$ ;
10:      senão
11:         $f(v) \leftarrow 2$ ;
12:   senão
13:     Sejam  $A_i, A_j, A_k \in \mathcal{A}$  arcos que cobrem  $C$  tais que, tomados dois a dois,
        não o façam;
14:     Sejam  $v_i, v_j$  e  $v_k$  os vértices correspondentes a  $A_i, A_j$  e  $A_k$ , respectivamente;
15:     para cada  $v \in V(G)$  faça
16:       se  $v \in \{v_i, v_j\}$  ou  $v \in N(v_k) \setminus (N(v_i) \cup N(v_j))$  ou
         $v \in (N(v_k) \cap N(v_i)) \setminus N(v_j)$  então
17:          $f(v) \leftarrow 1$ ;
18:       senão
19:          $f(v) \leftarrow 2$ ;

```

Este algoritmo segue exatamente o que é descrito pelos teoremas 4.4 e 4.5, logo, temos:

Corolário 4.9 *Se $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ é um modelo de arcos, então o algoritmo 4.3 produz uma coloração de cliques ótima para $G = \Omega(\mathcal{M})$.*

Analisamos agora a complexidade de tempo do algoritmo:

Teorema 4.10 *O algoritmo 4.3 possui complexidade de tempo polinomial no tamanho de sua entrada.*

Prova. Seja $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ o modelo de arcos utilizado como instância para o algoritmo 4.3 e $G = \Omega(\mathcal{M})$. A verificação realizada na linha 1 pode ser feita em tempo $O(n + m)$ [7] e o procedimento executado na linha 2 também pode ser realizado em tempo polinomial (teorema 4.8).

Observe que as verificações realizadas nas linhas 5 e 13 podem ser realizadas em tempo $O(n^2)$ e $O(n^3)$, respectivamente. Já no laço aninhado que começa na linha 16 e termina na linha 19 é gasto $O(n)$ por iteração e, portanto, $O(n^2)$ no total.

Como todos os passos analisados possuem complexidade polinomial no tamanho da entrada, o algoritmo 4.3 é, de fato, polinomial. ■

4.4 Conclusões

Neste capítulo estudamos o problema da coloração de cliques em grafos arco-circulares. Este problema têm sido estudado por diversos pesquisadores, dentre os quais podemos citar [8] e [1]. Até então, não era conhecida a complexidade deste problema na classe dos grafos arco-circulares. Mostramos neste capítulo que todo grafo arco-circular é 3-clique-colorível e exibimos, também, um algoritmo que encontra em tempo polinomial uma coloração de cliques ótima para o mesmo.

É interessante observar que um grafo arco-circular pode possuir um número exponencial de cliques, o que pode dificultar a verificação de se uma atribuição de cores é, de fato, uma coloração de cliques. No entanto, o algoritmo aqui exibido utiliza propriedades estruturais do modelo de arcos que garantem a coloração de cliques e, conseqüentemente, não há a necessidade dessa verificação.

Este trabalho foi apresentado no V LAGOS, e um resumo estendido (em inglês) do mesmo pode ser encontrado em [3].

Capítulo 5

λ -Coloração

$L(h, k)$ -COLORAÇÃO é uma restrição do problema clássico de coloração de vértices onde, além da restrição com relação à cor de vértices adjacentes, há também restrição sobre as cores de vértices à distância dois. Mais precisamente, temos que $f : V \rightarrow \{0, \dots, r\}$ é uma $L(h, k)$ -**coloração** quando as cores de dois vértices adjacentes possuem diferença em pelo menos h unidades, enquanto vértices à distância dois possuem cores cuja diferença é de pelo menos k . Considerando que as cores são elementos de um conjunto ordenado, o objetivo do problema é minimizar a maior cor utilizada na $L(h, k)$ -coloração. Observe que uma coloração f é uma coloração de vértices se, e somente se, f é uma $L(1, 0)$ -coloração. Em sua versão decisão, temos:

Problema: $L(h, k)$ -COLORAÇÃO

Instância: Um grafo $G = (V, E)$ e inteiro $r > 0$

Questão: Existe uma função $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots, r\}$ tal que f é um $L(h, k)$ -coloração?

O **span** de uma $L(h, k)$ -coloração f é igual ao valor da maior cor utilizada por f . Denotamos por $\lambda_{h,k}(G)$ o *menor* valor λ para o qual o grafo G possui resposta SIM no problema da $L(h, k)$ -coloração. Um grafo G para o qual existe uma $L(h, k)$ -coloração f com *span* r é dito r - $L(h, k)$ -**colorível**, e dizemos que f é uma r - $L(h, k)$ -**coloração** para o grafo G . Dizemos que uma $L(h, k)$ -coloração f de um grafo G que possui *span* igual a $\lambda_{h,k}(G)$ é uma $L(h, k)$ -coloração **ótima**. No caso particular em que $h = 2$ e $k = 1$, temos o problema conhecido como λ -COLORAÇÃO; nesse caso, denotamos por $\lambda(G)$ o *span* de uma λ -coloração ótima de G .

Este problema foi originalmente definido por Griggs e Yeh, tendo como motivação principal a modelagem de atribuição de frequências de transmissores em redes de rádio. Neste contexto, uma rede é representada por um grafo onde temos um vértice para cada transmissor, e arestas indicam dois transmissores que trocam mensagens entre si. Busca-se, nesse caso, minimizar interferências entre estes transmissores, o

que é obtido atribuindo frequências (cores) distintas a transmissores que se comunicam com algum transmissor em comum, além de atribuir frequências suficientemente distantes para transmissores que se comunicam diretamente, cf. [11].

Griggs e Yeh, em seu trabalho pioneiro, conjecturaram ser sempre possível, para todo grafo, atribuir uma λ -coloração com *span* não maior que o quadrado do número máximo de arestas incidentes a algum de seus vértices, isto é, para todo grafo G com pelo menos 3 vértices, $\lambda(G) \leq \Delta^2$. Esta é uma das principais questões relacionadas a este problema, sendo foco de estudo desse capítulo. Por outro lado, é claro que $\lambda(G) \geq \Delta(G) + 1$, para todo grafo G , pois os vértices em $N(v)$ não podem ter cores repetidas e, se $g(v) = \Delta(G)$, Δ cores devem ser usadas em $N(v)$. Além disso, a cor de v proíbe ao menos uma cor além da dele, o que contabiliza $\Delta + 2$ cores e $\lambda(G) \geq \Delta(G) + 1$.

Assim como o problema da coloração de vértices, λ -COLORAÇÃO é \mathcal{NP} -completo para grafos em geral, e assim permanece em diversas classes, tais como grafos bipartidos [11]. No entanto, a complexidade de λ -COLORAÇÃO para grafos arco-circulares ainda é desconhecida. Em [11] é encontrada uma lista de algumas classes de grafos conhecidas e a complexidade deste problema para as mesmas.

Em um trabalho recente, Calamoneri, Caminit, Olariu e Petreschi [2] estudam o problema da $L(h, k)$ -coloração em grafos de co-comparabilidade, intervalo e arcos-circulares. Neste trabalho, os limites superiores para o *span* de uma λ -coloração ótima, obtidos para grafos de intervalo e arco-circulares são de $\min\{2\Delta, 4(\omega - 1), \Delta + 2(\omega - 1)\}$ e $\min\{2\Delta + 2\omega, 6\omega - 4, \Delta + 4\omega - 2\}$, respectivamente. Infelizmente, conforme mostramos ao longo deste capítulo, existem erros em [2] que invalidam não apenas alguns desses limites, mas também todo o resultado obtido para grafos arco-circulares.

Neste capítulo, em um primeiro momento, fazemos a análise do trabalho proposto em [2], mostrando contra-exemplos para os limites apresentados e também apontando onde estão os erros que levaram aos contra-exemplos.

Em seguida, propomos uma nova abordagem para obtenção de uma solução deste problema em grafos arco-circulares. Assim como no algoritmo proposto em [2], a ideia básica consiste em, dado um modelo de arcos \mathcal{M} de um grafo arco-circular G , encontrar uma λ -coloração para um de seus subgrafos e então fazer uma extensão da λ -coloração de forma que a mesma também seja uma λ -coloração para o grafo como um todo e respeite um limite de cores que possa ser determinado a priori. Em particular, mostramos que todo grafo arco-circular é $(2\Delta + \epsilon(\mathcal{M}))$ - λ -colorável, onde ϵ é uma função sobre o modelo de arcos tal que $1 \leq \epsilon(\mathcal{M}) \leq 2(\Delta - 1)$ e que, se o modelo fornecido for próprio, então $\lambda(G) \leq 3\Delta + 1$. Mostramos também que a conjectura de Griggs e Yeh é verdadeira para a classe dos grafos arco-circulares.

5.1 Calamoneri, Caminit, Olariu e Petreschi

Nesta seção analisamos os algoritmos propostos por Calamoneri, Caminit, Olariu e Petreschi, em [2], onde são exibidas maneiras de obter λ -colorações em grafos de intervalo e arco-circulares tais que os *spans* λ obtidos são tais que $\lambda \leq \min\{2\Delta, \Delta + 2(\omega - 1), 4(\omega - 1)\}$ e $\lambda \leq \min\{2\Delta + 2\omega, 6\omega - 4, \Delta + 4\omega - 2\}$, para grafos de intervalo e arco-circulares, respectivamente.

Inicialmente, são discutidos os algoritmos propostos para λ -coloração de grafos de intervalo, e será mostrado que um dos algoritmos não funciona corretamente.

Em seguida analisamos o caso da λ -coloração de grafos arco-circulares, onde a ideia básica do algoritmo proposto consiste em reduzir o problema ao de obter uma λ -coloração um grafo de intervalo e, então, expandir a coloração obtida para uma λ -coloração no grafo original. Novamente, mostramos que os algoritmos propostos não resolvem o problema conforme desejado: ora o limite dado para o *span* é inválido, ora a atribuição de cores obtida não é uma λ -coloração.

5.1.1 Grafos de intervalo

O primeiro limite exibido em [2] baseia-se fortemente no fato de grafos de intervalo admitirem uma ordenação canônica de seus vértices. Utilizando-se deste fato, o algoritmo 5.1 mostra como encontrar uma λ -coloração de um grafo de intervalo G com *span* igual a 2Δ .

Algoritmo 5.1 λ -COLORAÇÃO INTERVALO(G, π)

Entrada: Grafo de intervalo G e ordenação canônica $\pi = (v_0, \dots, v_{n-1})$ de $V(G)$.

Saída: λ -coloração de G com *span* 2Δ .

- 1: seguindo a ordenação π , atribua aos vértices de G as cores na sequência $0, 2, \dots, 2\Delta, 1, 3, \dots, 2\Delta - 1$, voltando a utilizar a cor 0 após a utilização da cor $2\Delta - 1$; { ou seja, $cor(v_0) = 0, cor(v_1) = 2$, etc. }
-

Teorema 5.1 (Calamoneri et al. [2]) *Seja G um grafo de intervalo e $\pi = (v_0, \dots, v_{n-1})$ uma ordenação canônica de G . O algoritmo 5.1, quando aplicado a G , obtém uma λ -coloração f , cujo *span* é igual a 2Δ .*

Prova. O *span* de f é igual a 2Δ por construção. Suponha, por absurdo, que a atribuição de cores não é uma λ -coloração e sejam $v_i, v_j \in V$, $i < j$, dois vértices para os quais há falha na λ -coloração. Temos dois casos possíveis:

- $d(v_i, v_j) = 1$ e $f(v_j) \in \{f(v_i) - 1, f(v_i), f(v_i) + 1\}$. Como sabemos que $i < j$, então não é o caso de termos $f(v_i) = f(v_j)$, pois isso implicaria em termos pelo

menos 2Δ vértices entre v_i e v_j na ordenação canônica (dois vértices possuem a mesma cor na coloração se, e somente se, existem $2k\Delta$ vértices entre eles, para algum $k > 0$, inteiro). Claramente também não é o caso de $f(v_i) = 0$, pois o mesmo implicaria em $f(v_j) = 1$ e $g(v_i) > \Delta$. No entanto, qualquer outro caso implica em existir ao menos $\Delta - 1$ vértices entre v_i e v_j em π , o que significa que v_i é adjacente a pelo menos $\Delta + 1$ vértices (como G é conexo, existe ao menos um vértice anterior a v_i em π que é adjacente a v_i), um absurdo.

- $d(v_i, v_j) = 2$ e $f(v_i) = f(v_j)$. Seja $v_k \in V$ um vértice adjacente tanto a v_i quanto a v_j . Pela forma como a coloração é construída, temos que $(j - i) \equiv 0 \pmod{2\Delta + 1}$. Entretanto, isso implica em termos pelo menos Δ vértices entre v_i e v_k ou entre v_k e v_j . Ambos os casos contradizem $g(v) \leq \Delta$, para todo $v \in V$.

Como em ambos os casos chegamos a uma contradição, f é, de fato, uma λ -coloração de G . ■

Corolário 5.2 *Seja G um grafo de intervalo e $\pi = (v_0, \dots, v_{n-1})$ uma ordenação canônica de G . Se $g(v_0) \neq \Delta$, então $\lambda(G) \leq 2\Delta - 1$.*

Prova. Segue do fato de que o único vértice que pode ter Δ vértices adjacentes o sucedendo em uma ordenação canônica é o vértice de grau Δ quando o mesmo é o primeiro da ordenação. Logo, ao aplicarmos o algoritmo 5.1, mas limitando a sequência de cores a $2\Delta - 1$, obtemos uma $(2\Delta - 1) - \lambda$ -coloração para G . ■

Algoritmo 5.2 λ -COLORAÇÃO GULOSA INTERVALO(G, π)

Entrada: Grafo de intervalo G e ordenação canônica $\pi = (v_0, \dots, v_{n-1})$ de $V(G)$.

Saída: λ -coloração de G com $span \min\{4(\omega - 1), \Delta + 2(\omega - 1)\}$.

- 1: **para** $i \leftarrow 0$ até $n - 1$ **faça**
 - 2: Atribua a v_i a menor cor permitida considerando seus vizinhos/vértices a distância 2 já coloridos;
-

Considere agora o algoritmo 5.2. Segundo [2], este algoritmo fornece um limite para o $span$ da λ -coloração de um grafo de intervalo G no valor de $\min\{4(\omega - 1), \Delta + 2(\omega - 1)\}$. Mostramos a seguir que este limite de fato está correto quando G é um grafo de intervalo próprio, podendo, no entanto, não ser válido para um grafo de intervalo qualquer. Em seguida, analisamos a prova dada para este algoritmo em [2], mostrando em que ponto a mesma está incorreta.

Observe que um dos valores depende apenas do valor de ω . No entanto, se considerarmos o grafo estrela (figura 5.1), temos $\omega = 2$, o que nos dá o valor 4 para

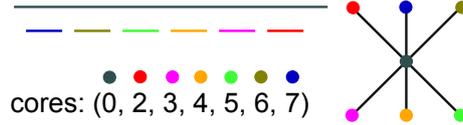


Figura 5.1: Contra-exemplo para o algoritmo 5.2 proposto por Calamoneri et al.[2]. (a) Modelo de intervalo; (b) Grafo correspondente e sua λ -coloração ótima

o *span* do mesmo, independente do número de vértices do grafo. Como sabemos, qualquer λ -coloração de um grafo G possui *span* maior ou igual a $\Delta + 1$, que nesse caso é igual a n . Além disso, todo grafo estrela é de intervalo e, conseqüentemente, o limite não vale para qualquer grafo de intervalo. Um exemplo de grafo estrela, seu modelo de intervalo e a coloração obtida podem ser vistos na figura 5.1.

É importante observar, no entanto, que o limite para o *span* da coloração obtida pelo algoritmo 5.2 está correto quanto a $\lambda \leq \Delta + 2(\omega - 1)$. O erro está apenas no limite $\lambda \leq 4(\omega - 1)$. Conforme mostramos a seguir, este último limite é válido para grafos de intervalo próprios.

Teorema 5.3 *Seja $G = (V, E)$ um grafo de intervalo próprio e $\pi = (v_0, \dots, v_{n-1})$ uma ordenação canônica de seus vértices. Então o algoritmo 5.2 irá produzir uma λ -coloração cujo *span* está limitado por $\min\{4(\omega - 1), \Delta + 2(\omega - 1)\}$.*

Prova. Considere o passo do algoritmo 5.2 em que o vértice v_i tem sua cor atribuída. Sejam D_i^1, D_i^2 os conjuntos dos vértices já visitados pelo algoritmo e que estão a distância um e dois de v_i , respectivamente.

Seja v_{min}^1 o vértice adjacente a v_i de menor índice. Pelo fato de π ser uma ordenação canônica, temos que v_{min}^1 é adjacente a todo vértice v_j adjacente a v_i tal que $min < j < i$. Pelo mesmo argumento, se v_j, v_l com $j, l < i$ são adjacentes a v_i , então $v_j v_l \in E(G)$. Logo, $D_i^1 \cup \{v_i\}$ é uma clique em G .

Considere agora $v_j^2 \in D_i^2$. Pelas propriedades da ordenação canônica, sabemos que v_{min}^1 é, necessariamente, adjacente a v_j^2 . Isso se dá pelo fato de que o mesmo deverá ser adjacente a algum vértice v_l tal que $min \leq l < i$ adjacente a v_i e, portanto, também será adjacente a v_{min}^1 . Além disso, $j < min$, pois o contrário implicaria em $v_j^2 \in D_i^1$ (propriedade da ordenação canônica de um grafo de intervalo próprio). Logo, $D_i^2 \cup \{v_{min}^1\}$ é uma clique em G .

Sabemos, então que v_{min}^1 é adjacente a todos os vértices em D_i^1 e D_i^2 e, portanto, $|D_i^1| + |D_i^2| \leq \Delta$. Além disso, ambos estão limitados por $\omega - 1$, da onde obtemos os seguintes limites:

- Cada vértice em D_i^1 proíbe até 3 cores;
- Cada vértice em D_i^2 proíbe 1 cor;

- $cor(v_i) \leq \Delta + 2(\omega - 1)$ (limitando D_i^1 por ω e $|D_i^1| + |D_i^2|$ por Δ) ou;
- $cor(v_i) \leq 4(\omega - 1)$.

Logo, o *span* obtido pelo algoritmo será menor ou igual a $\min\{4(\omega - 1), \Delta + 2(\omega - 1)\}$. ■

Em [2] os autores consideram que o conjunto D_i^2 é uma clique mesmo no caso em que o grafo de intervalo não é próprio. Claramente, nesse caso, isso não será sempre verdadeiro, como o grafo da figura 5.1 deixa bem exemplificado. Portanto, é ao assumirem que D_i^2 sempre será uma clique, que os autores são levados ao erro no cálculo do limite para o *span* da coloração dada pelo algoritmo.

5.1.2 Grafos arco-circulares

Analisamos agora o algoritmo proposto em [2] para λ -coloração de grafos arco-circulares. O algoritmo consiste em, dado um modelo de arcos de um grafo arco-circular G , remover alguns arcos do mesmo, obtendo assim um modelo de intervalo. Ao grafo de interseção deste modelo de intervalo, que é um subgrafo de G , é aplicado um dos algoritmos discutidos anteriormente. Em seguida, a coloração é expandida de forma a contemplar todos os vértices do grafo. Mostramos que, dependendo do modelo de arcos fornecido, o algoritmo pode não gerar uma λ -coloração.

O algoritmo 5.3 descreve este procedimento. Segundo [2], o *span* da coloração encontrada é limitado por $2\Delta + 2\omega$ caso, no passo 3, seja utilizado o algoritmo 5.1; caso utilize-se o algoritmo 5.2, o *span* da coloração é limitado por $\min\{6\omega - 4, \Delta + 4\omega - 2\}$.

Algoritmo 5.3 λ -COLORAÇÃO GULOSA ARCO-CIRCULAR(\mathcal{M}, p)

Entrada: Modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ do grafo $G = \Omega(\mathcal{M})$ e ponto $p \in C$.

Saída: λ -coloração de G .

- 1: $\mathcal{A}' \leftarrow$ conjunto de arcos contendo p ;
 - 2: $\mathcal{M}' \leftarrow (R, \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}')$;
 - 3: Encontre uma λ -coloração para os vértices de $G' = \Omega(\mathcal{M}')$. Seja λ' o *span* desta λ -coloração;
 - 4: **para** cada $A_i \in \mathcal{A}'$ **faça**
 - 5: Atribua a $Vertice(A_i)$ a menor cor c disponível tal que $\lambda' + 2 \leq c \leq \lambda' + 2|A_i|$;
-

Infelizmente não há como garantir que a atribuição de cores obtida pelo algoritmo 5.3 é sempre uma λ -coloração. De fato, existe um modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ e um ponto $p \in C$ para o qual o algoritmo 5.3 não gera uma λ -coloração.

Considere o modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ da figura 5.2 e seja p um ponto pertencente ao segmento (t_6, s_1) da circunferência C . Claramente, o único arco que contém

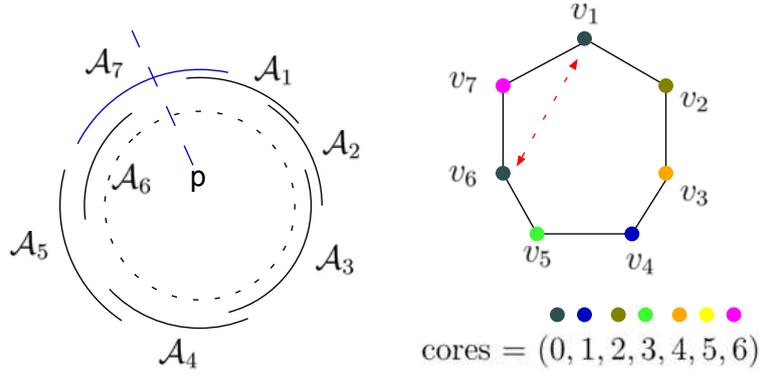


Figura 5.2: Exemplo de grafo em que o algoritmo 5.3 não funciona corretamente.

p é o arco A_7 , e o grafo de interseção do modelo de intervalo $\mathcal{M}' = (C, \mathcal{A} \setminus \{A_7\})$ obtido ao removermos A_7 de \mathcal{A} será colorido conforme a figura 5.2, caso a ordenação canônica dos vértices seja $\pi = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6)$ e o algoritmo 5.1 seja utilizado. Observe que, apesar de não haver problemas na coloração quando consideramos apenas o grafo de intervalo correspondente ao modelo \mathcal{M}' , quando consideramos o grafo original os vértices v_1 e v_6 possuem cores conflitantes, pois os mesmos estão a uma distância 2 no grafo original mas possuem distância maior em $\Omega(\mathcal{M}')$.

É válido ressaltar que o limite de $6\omega - 4$ para o *span* deve ser descartado de imediato, pois o mesmo é baseado em um resultado inválido para grafos de intervalo.

No que segue, mostramos que é possível utilizar o algoritmo 5.3 para obter uma λ -coloração de um grafo arco-circular, desde que façamos algumas pequenas modificações no algoritmo original. Além disso, o limite obtido para o *span* será diferente, pois a análise original feita em [2] não é válida para o algoritmo modificado.

5.1.3 Consertando o algoritmo

A modificação no algoritmo 5.3 consiste em utilizar, para obter a λ -coloração do subgrafo de intervalo, o algoritmo 5.2, mas agora considerando as distâncias entre vértices no grafo original, e não mais no grafo de intervalo apenas. Ou seja: aplica-se o algoritmo 5.2 ao grafo de intervalo construído pelo algoritmo 5.3, mas, durante a atribuição de cores, considera-se a distância entre vértices como no grafo original; com isso, a atribuição de cores será, de fato, uma λ -coloração. Não é difícil verificar que, no grafo arco-circular original, com essa modificação, uma λ -coloração é obtida. Fazemos então uma nova análise do *span* da coloração construída pelo algoritmo 5.2, já considerando as modificações propostas.

Teorema 5.4 *Seja $G = (V, E)$ um grafo arco-circular, $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um de seus modelos de arcos, p um ponto da circunferência C e $\mathcal{A}' = \beta(p)$. Ao aplicarmos em*

$\mathcal{M}' = (R, \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}')$ o algoritmo 5.2, considerando as distâncias entre vértices em G , o span da λ -coloração obtida será de no máximo $2(\omega - 1) + 2\Delta - |\mathcal{A}'|$.

Prova. Considere o passo do algoritmo em que o vértice v_i está sendo colorido, sejam D_i^1 e D_i^2 conforme definidos anteriormente e $G' = \Omega(\mathcal{M}')$. Claramente, $|D_i^1| \leq \omega(G') - 1$, pois dois vértices de G' são adjacentes em G se, e somente se, também são em G' .

Nesse caso, $D_i^2 = D_i^2(G) \cup D_i^2(G')$, onde $D_i^2(G')$ é o conjunto dos vértices a distância 2 de v_i em G' e $D_i^2(G)$ é o conjunto dos vértices a distância 2 de v_i apenas em G . Analisamos a seguir o quanto pode variar no tamanho de D_i^2 em função da relação de $Arco(v_i)$ com os arcos em \mathcal{A}' .

Sejam $A_l, A_r \in \mathcal{A}'$ os arcos que se estendem mais à esquerda e à direita de p em \mathcal{M} dentre os arcos de \mathcal{A}' . É fácil observar que se $v_j \in D_i^2(G)$, então $Arco(v_j) \cap (A_l \cup A_r) \neq \emptyset$. Seja $A_i = Arco(v_i)$ e considere as seguintes relações possíveis entre A_i, A_l e A_r :

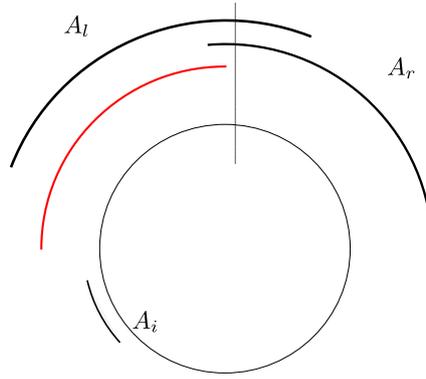


Figura 5.3: Relação entre arcos A_i, A_l e A_r quando $A_i \cap (A_l \cup A_r) = \emptyset$: $D_i^2(G) = \emptyset$. Em vermelho está representado o segmento que contém arcos cujos vértices correspondentes estão a distância 2 de v_i e já foram coloridos no momento em que o algoritmo visita v_i .

- $A_i \cap (A_l \cup A_r) = \emptyset$: nesse caso temos, claramente, $D_i^2(G) = \emptyset$ e $|D_i^2| \leq \Delta - 1$ (figura 5.3).
- $A_i \cap A_l \neq \emptyset, A_i \cap A_r = \emptyset$: por construção da ordenação canônica, sabemos que, para todo vértice v_j a uma distância 2 de v_i tal que $j < i$, vale que $Arco(v_j) \in (t_i, p)$. Logo, todo vértice de $D_i^2(G')$ é adjacente a $v_l = Vertice(A_l)$ e, portanto, $|D_i^2| \leq g(v_l) - (|\mathcal{A}'| - 1) - 1 \leq \Delta - |\mathcal{A}'|$ (figura 5.4).
- $A_i \cap A_l = \emptyset, A_i \cap A_r \neq \emptyset$: seja v_{min} o vértice de G' de menor índice que é adjacente a v_i e seja $A_{min} = Arco(v_{min})$. Se $t_r > t_{min}$, teremos, assim como no caso anterior, que todo vértice a uma distância 2 de v_i em G' também é

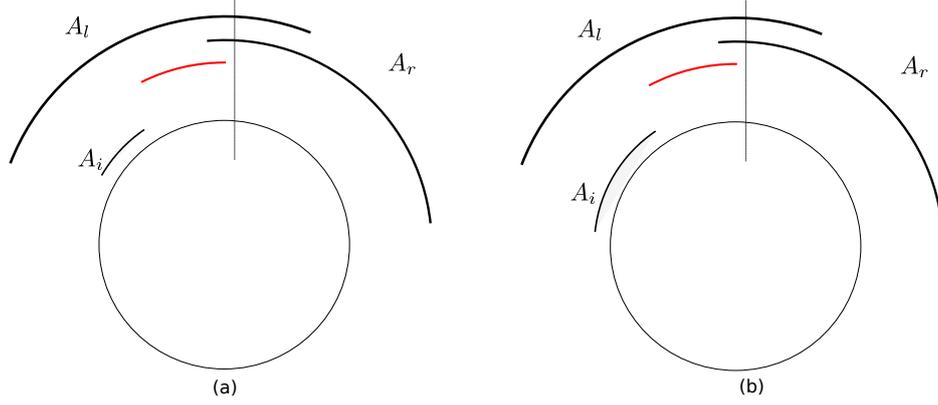


Figura 5.4: Relação entre arcos A_i, A_l e A_r quando $A_i \cap A_l \neq \emptyset$, $A_i \cap A_r = \emptyset$: $D_i^2(G') \subseteq D_i^2(G)$. Em vermelho está representado o segmento que contém arcos cujos vértices correspondentes estão a distância 2 de v_i e já foram coloridos no momento em que o algoritmo visita v_i .

adjacente a v_r em G , e, portanto, $|D_i^2| \leq \Delta - |\mathcal{A}'|$; Por outro lado, se $t_r < t_{min}$, teremos $|D_i^2(G')| \leq \Delta - 1$, enquanto $D_i^2(G)$ irá conter vértices cujos arcos terminam após s_r . No pior caso, quando v_r não é adjacente a nenhum vértice de índice maior que i , teremos $|D_i^2(G)| \leq g(v_r) - (|\mathcal{A}'| - 1) - 1 \leq \Delta - |\mathcal{A}'|$. Considerando ambos os limites, temos: $|D_i^2| \leq 2\Delta - |\mathcal{A}'| - 1$ (figura 5.5).

- $A_i \cap A_l \neq \emptyset, A_i \cap A_r \neq \emptyset$: caso $A_i \cap (s_l, p) \neq \emptyset$ teremos uma situação análoga à quando $A_i \cap A_l \neq \emptyset$ e $A_i \cap A_r = \emptyset$. Logo, temos $t_l \in A_i$ e, no pior caso, $|D_i^2(G')| \leq \Delta - 1$ e $D_i^2(G) \subset N(v_l)$, da onde podemos concluir que $|D_i^2(G)| \leq \Delta - |\mathcal{A}'|$. Novamente, considerando ambos os limites, temos: $|D_i^2| \leq 2\Delta - |\mathcal{A}'| - 1$ (figura 5.6).

Temos então, no pior caso, que v_i irá possuir no máximo $2\Delta - |\mathcal{A}'| - 1$ vértices uma distância 2 dele já coloridos.

Sabemos que cada vértice adjacente a v_i irá proibir até 3 cores, enquanto vértices a uma distância 2 irão proibir uma cor cada. Logo, temos que $f(v_i) \leq 3|D_i^1| + |D_i^2(G')| + |D_i^2(G)|$. Pelo que foi discutido acima, temos: $|D_i^1| \leq \omega - 1$, $|D_i^1| + |D_i^2(G')| \leq \Delta$, $|D_i^2(G)| \leq \Delta - |\mathcal{A}'|$. Logo, utilizando contas análogas às realizadas na prova do teorema 5.3, chegamos ao seguinte valor para o *span* da λ -coloração: $\lambda \leq 2(\omega - 1) + 2\Delta - |\mathcal{A}'|$. ■

Com relação a corretude do algoritmo 5.3, com base no exposto acima, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 5.5 *A coloração obtida pelo algoritmo 5.3 é uma λ -coloração quando o mesmo utiliza como sub-rotina o algoritmo 5.2.*

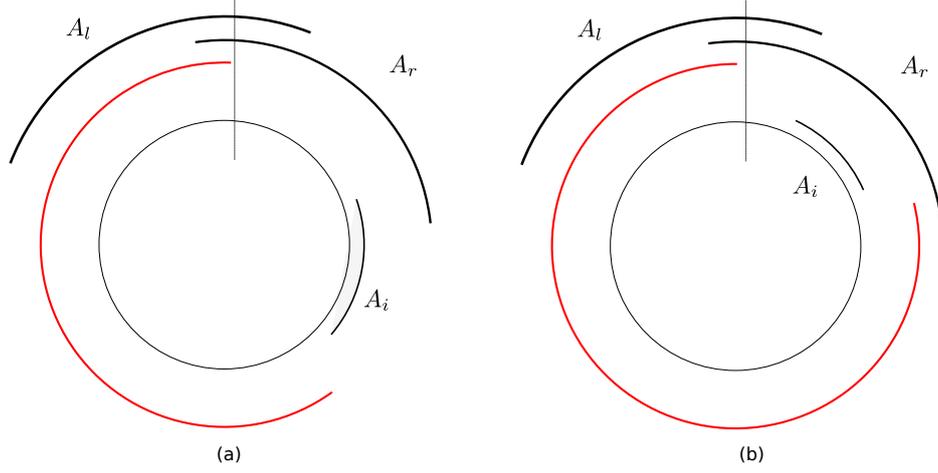


Figura 5.5: Relação entre arcos A_i, A_l e A_r quando $A_i \cap A_l = \emptyset$, $A_i \cap A_r \neq \emptyset$: $D_i^2(G) \subseteq N[v_r]$. Em vermelho está representado o segmento que contém arcos cujos vértices correspondentes estão a distância 2 de v_i e já foram coloridos no momento em que o algoritmo visita v_i .

Prova. Observe que, ao utilizarmos o algoritmo 5.2, estamos respeitando as restrições de cores tanto por vértices adjacentes quanto por distância 2. Além disso, para os vértices correspondentes a arcos removidos, estamos utilizando apenas cores novas, sempre espaçadas de 2 e começando a partir do *span* obtido durante a coloração do subgrafo de intervalo mais 2. Logo, a atribuição de cores é uma λ -coloração. ■

Teorema 5.6 *Seja G um grafo arco-circular, $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um de seus modelos de arcos, $p \in C$ um ponto da circunferência e $\mathcal{A}' = \beta(p)$. O *span* da coloração construída pelo algoritmo 5.3, quando utilizado em conjunto com o algoritmo 5.2, é de no máximo $2(\omega - 1) + 2\Delta + |\mathcal{A}'|$.*

Prova. Segue do fato do grafo de intervalo obtido possuir *span* de no máximo $2(\omega - 1) + 2\Delta - |\mathcal{A}'|$ e por estarmos adicionando $2|\mathcal{A}'|$ cores novas quando expandimos a coloração para o grafo todo. ■

5.2 Uma nova abordagem

Nesta seção apresentamos uma nova abordagem para o problema da λ -coloração em grafos arco-circulares. A ideia básica por trás desse novo algoritmo é a mesma: transformar o modelo de arcos em um modelo de intervalo, colorir os vértices do grafo correspondente e então resolver conflitos que possam ter sido causados pela coloração do grafo de intervalo.

Este algoritmo trata o caso em que $l(\mathcal{M}) \geq 3$, onde \mathcal{M} é o modelo fornecido como entrada para o algoritmo. O caso em que $l(\mathcal{M}) = 2$ é tratado na subseção

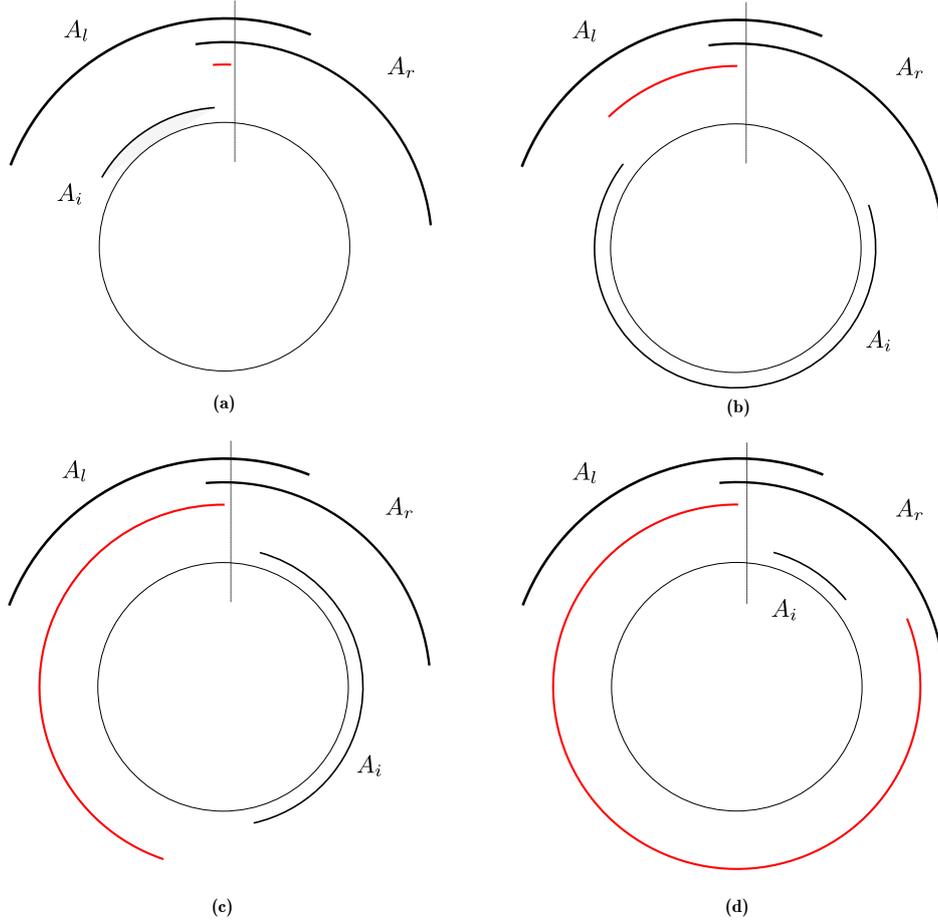


Figura 5.6: Relação entre arcos A_i , A_l e A_r quando $A_i \cap A_l \neq \emptyset$, $A_i \cap A_r \neq \emptyset$. (a), (b) $D_i^2(G') \subseteq D_i^2(G) \subseteq N[v_i]$; (c) $D_i^2(G) \subseteq N[v_i]$; (d) $D_i^2(G) \subseteq N[v_i]$ ou $D_i^2(G') = \emptyset$ e $D_i^2(G) \subseteq N[v_i] \cup N[v_r]$. Em vermelho está representado o segmento que contém arcos cujos vértices correspondentes estão a distância 2 de v_i e já foram coloridos no momento em que o algoritmo visita v_i .

seguinte. Consideramos também, sem perda de generalidade, que $\Delta > 2$, pois todo grafo com $\Delta = 2$ (ciclos e caminhos) é 4- λ -colorível e, portanto, para estes grafos, a conjectura de Griggs e Yeh é verdadeira.

5.2.1 Algoritmo

O algoritmo proposto 5.4 é utilizado para obtenção de um novo limite superior para $\lambda(G)$. Durante o mesmo, o termo conflito é utilizado para indicar um par de vértices para os quais a atribuição de cores não é válida em uma λ -coloração.

Como sub-rotinas, utilizamos os algoritmos 5.5 e 5.1. Analisamos agora a corretude do algoritmo proposto. O algoritmo 5.5 é responsável pela transformação de um modelo de arcos em um modelo de intervalo, dado um ponto da circunferência.

No que segue, $G = (V, E)$ é um grafo arco-circular e $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um de seus modelos de arcos. Além disso, v é um vértice tal que $A = Arco(v) = (s, t)$ é um

Algoritmo 5.4 λ -COLORAÇÃO ARCO-CIRCULAR(\mathcal{M}, G, v)

Entrada: Modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, A)$ do grafo G e vértice v de G , tal que $Arco(v)$ é próprio.

Saída: λ -coloração f de G .

- 1: $A = (s, t) \leftarrow Arco(v)$
 - 2: $\mathcal{A}' \leftarrow$ conjunto de arcos contendo s ;
 - 3: $\mathcal{M}' \leftarrow$ MODELO DE INTERVALOS(\mathcal{M}, s);
 - 4: $G' \leftarrow \Omega(\mathcal{M}')$;
 - 5: encontre uma λ -coloração f para G' ; {utilize o algoritmo 5.1, com a ordenação canônica obtida a partir de \mathcal{M}' }
 - 6: $\lambda \leftarrow span$ de f ; { $\lambda \leq 2\Delta(G) - 1$ }
 - 7: $Y \leftarrow \{y \in V \setminus Vertices(\mathcal{A}') \mid \text{existe } x \in Vertices(\mathcal{A}') \text{ tal que } xy \in E(G')\}$;
 - 8: $Z \leftarrow N[v] \setminus (Vertices(\mathcal{A}') \cup Y)$;
 - 9: $U \leftarrow \{u \in V \mid d_G(u, x) = 2, d_{G'}(u, x) > 2, x \in Vertices(\mathcal{A}')\}$;
 - 10: **para** cada $u \in U$ **faça**
 - 11: **se** u conflita com algum vértice em $Vertices(\mathcal{A}')$ **então**
 - 12: $f(u) \leftarrow \lambda + f(u) + 2$;
 - 13: **para** cada $z \in Z$ **faça**
 - 14: **se** z conflita com algum vértice em $Vertices(\mathcal{A}')$ **então**
 - 15: $f(z) \leftarrow \lambda + f(z) + 2$;
 - 16: **para** cada $y \in Y$ **faça**
 - 17: **se** y conflita com algum vértice $z \in Z$ **então**
 - 18: atribua a y a menor cor par c , $\lambda + 1 \leq c \leq 2\Delta(G) + 2|\mathcal{A}'|$, disponível ou, caso não seja possível, atribua a y a menor cor disponível; {O objetivo aqui é, primeiramente, esgotar as cores dentro do intervalo $\lambda + 1$ a $2\Delta(G) + 2|\mathcal{A}'|$, para, só então, permitir a utilização de qualquer outra cor. Com isso, buscase minimizar a quantidade de cores novas criadas neste passo.}
-

Algoritmo 5.5 MODELO DE INTERVALOS(\mathcal{M}, p)

Entrada: Modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ e ponto $p \in C$.

Saída: Modelo de intervalo $\mathcal{M}' = (R, \mathcal{I})$, construído a partir da abertura do modelo \mathcal{M} no ponto p

- 1: $\mathcal{I} \leftarrow \emptyset$
 - 2: **para** cada $A = (s, t) \in \mathcal{A}$ **faça**
 - 3: **se** $p \in (s, t)$ **então**
 - 4: $I = (s, p)$
 - 5: **senão**
 - 6: $I = (s, t)$
 - 7: $\mathcal{I} \leftarrow \mathcal{I} \cup \{I\}$
 - 8: retorna $\mathcal{M}' \leftarrow (C \setminus p, \mathcal{I})$
-

arco próprio de \mathcal{M} , ou seja, A é um arco tal que $\beta(A) = \emptyset$, e $\mathcal{A}' = \beta(s)$. Considere também os conjuntos Y , Z e U conforme definidos no algoritmo 5.4.

Lema 5.7 *Sejam $u \in U$ e $x \in Vertices(\mathcal{A}')$ dois vértices tais que $f(u) = f(x)$ e $d_G(u, x) = 2$ mas $d_{G'}(u, x) > 2$. Então, ao executarmos o passo 12 do algoritmo 5.4 o conflito será removido e nenhum outro conflito será criado.*

Prova. Sejam f e λ a coloração obtida no passo 5 do algoritmo 5.4 e seu *span*, respectivamente. Claramente, como $f(x) \leq \lambda$, temos que o conflito entre u e x está sendo resolvido. Resta provar que novos conflitos não são criados. Seja A_r o arco que se estende mais à direita de t . Pelo fato de A ser um arco próprio, temos que $A_r \notin \mathcal{A}'$. Logo, se $d_G(u, x) = 2$ e $d_{G'}(u, x) > 2$, então temos que $Arco(u) \cap A_r \neq \emptyset$. Por definição, portanto, temos que todo vértice $u' \in U$ é adjacente a $Vertice(A_r)$ em G' e irá possuir cor diferente daquela atribuída a u . Isto significa que ao atribuímos $f(u) = f(u) + \lambda + 2$ estamos utilizando uma cor nova. Por outro lado, o deslocamento no valor da cor é igual para todos os vértices, o que implica em não estarmos diminuindo a diferença entre cores e, conseqüentemente, criando conflitos. Portanto, a afirmação inicial vale. ■

Lema 5.8 *Sejam $z \in Z$ e $x \in Vertices(\mathcal{A}')$ dois vértices tais que a atribuição de cores f obtida no passo 5 do algoritmo 5.4 seja conflitante. Então, ao executarmos o passo 15 do algoritmo 5.4, o conflito será removido e nenhum outro conflito será criado.*

Prova. A prova é análoga à do lema 5.7. ■

Lema 5.9 *Sejam $y \in Y$ e $z \in Z$ dois vértices tais que a atribuição de cores obtida no passo 5 do algoritmo 5.4 seja conflitante. Então, ao executarmos o passo 18 do algoritmo 5.4, o conflito será removido e nenhum outro conflito será criado.*

Prova. Vale por construção, dado que é atribuída a y a menor cor disponível (ou seja, que não é incompatível com a cor atribuída aos outros vértices).

Lema 5.10 *Seja $u \in V \setminus (Y \cup Z \cup U)$ um vértice de G . Então, na coloração obtida no passo 5 do algoritmo 5.4, u não possui conflitos.*

Prova. Sabemos, pelo fato de A ser um arco próprio, que se $|N_G[u]| > |N_{G'}[u]|$, então $Arco(u) \cap Arco(v) \neq \emptyset$, e $u \in Z \cup Vertices(\mathcal{A}')$, um absurdo. Suponha então, por absurdo, que existe um vértice $v_i \in V$ tal que $d_G(u, v_i) = 2$ e $d_{G'}(u, v_i) > 2$ com $f(u) = f(v_i)$ e seja $v_j \in V$ um vértice tal que $uv_j \in E(G)$ e $v_jv_i \in E(G)$. Sabemos que $v_j \in Vertices(\mathcal{A}')$ ou $v_i \in (\mathcal{A}')$, pois o contrário implicaria em uv_j e v_jv_i existirem em G' . Além disso, não é o caso em que $uv_j \notin E(G')$, pois o

mesmo implicaria em $|N_G[u]| > |N'_G[u]|$. Observe que, se $v_j \in \text{Vertices}(\mathcal{A}')$, então $u \in Y$, um absurdo. Logo, $v_i \in \text{Vertices}(\mathcal{A}')$, implicando em $u \in U$, contradizendo a hipótese inicial de $u \notin (Y \cup Z \cup U)$ ■

Com base nos lemas acima, temos:

Teorema 5.11 *Seja $G = (V, E)$ um grafo arco-circular, $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um de seus modelos de arcos e $v \in V$ um vértice tal que $\text{Arco}(v)$ é próprio. A coloração f construída pelo algoritmo 5.4 é uma λ -coloração.*

Prova. Pelo lema 5.10, sabemos que vértices que possuam cores conflitantes ao final do passo 5 estão contidos nos conjuntos Y , Z , U e $\text{Vertices}(\mathcal{A}')$. Pelos lemas 5.7, 5.8 e 5.9, sabemos que a correção de conflitos realizada nos passos 12, 15 e 18 estão corretas. Não é difícil verificar que todo vértice $u \in U$ que possua conflito de cor pela restrição em vértices adjacentes, irá pertencer a Z e, portanto, terá seu conflito resolvido. Além disso, não existem mais conflitos a serem resolvidos. Logo, f é, de fato, uma λ -coloração de G . ■

5.2.2 Limite para o *span* de um grafo arco-circular

Analisamos, nesta subseção, o *span* da λ -coloração de G construída pelo algoritmo 5.4.

No modelo de intervalo criado pelo algoritmo 5.4, os intervalos correspondentes a arcos em $Y \cup \text{Vertices}(\mathcal{A}')$ são os que possuem maior extremo direito e, assim, serão os primeiros na ordenação canônica usada na obtenção da λ -coloração de G' . Além disso, o vértice correspondente ao arco se estende mais a esquerda de $\text{Arco}(v)$ possui, por definição, interseção não vazia com todos os arcos em $\text{Arcos}(Y)$ e \mathcal{A}' . Logo, existem no máximo Δ vértices em $Y \cup \text{Vertices}(\mathcal{A}')$ e, portanto, temos:

Corolário 5.12 *Seja $x \in (Y \cup \text{Vertices}(\mathcal{A}'))$ um vértice. Ao final do passo 5 do algoritmo 5.4, $f(x)$ será par.*

Lema 5.13 *Seja $y \in Y$ um vértice e seja $u \in V \setminus \text{Vertices}(\mathcal{A}')$ um vértice adjacente a y . Então, ao final do passo 5 do algoritmo 5.4, se $f(u) < 2|\mathcal{A}'|$, então $f(u)$ será ímpar.*

Prova. Como $uy \in E(G')$, sabemos que a distância entre os mesmos na ordenação canônica é de no máximo Δ . Além disso, $u \notin \text{Vertices}(\mathcal{A}')$. Claramente, se $f(u) > f(y)$, então não há nada a ser provado. Suponha então que $f(u) \leq f(y)$. Temos duas possibilidades:

- u é anterior a y na ordenação canônica. Nesse caso, temos $2|\mathcal{A}'| \leq f(u) < f(y)$ e o teorema vale;

- y é anterior a u na ordenação canônica. Suponha, por absurdo, que $f(u)$ é par. Conforme descrito no algoritmo 5.1, para que isso aconteça, todas as Δ cores ímpares deverão ser utilizadas antes. No entanto, como $uy \in E(G')$, isso implicaria em $g(y) > \Delta$, um absurdo. Logo, se $f(u) < 2|\mathcal{A}'|$, então $f(u)$ é ímpar e o teorema vale. ■

Essencialmente, o que o lema 5.13 nos diz é que, vértices em U que tiverem sua cor alterada para um valor maior que $2\Delta(G) - 1$ não impedem a utilização de uma cor par no intervalo $\lambda + 1$ a $2\Delta(G) + 2|\mathcal{A}'|$, pois os mesmos possuem cor ímpar e estarão a distância maior ou igual a 2 de vértices de Y que tiverem sua cor alterada no passo 17.

Como consequência imediata, temos o seguinte corolário:

Corolário 5.14 *Seja $y \in Y$ um vértice de G e seja $u \in V$ um vértice adjacente a y . Então, $f(u) \in \{0, 2, \dots, 2(|\mathcal{A}'| - 1)\}$, se, e somente se, $u \in \text{Vertices}(\mathcal{A}')$.*

Pelo fato do algoritmo utilizar um arco próprio para a construção do modelo de intervalo do grafo G' , o conjunto dos vértices para o qual a λ -coloração pode falhar (nos passos intermediários do algoritmo), está limitado os vértices v , sua vizinhança e vértices à distância 2 do mesmo. Por esse fato, temos:

Corolário 5.15 *Seja k a quantidade de vértices que tiveram suas cores modificadas nos passos 15 e 18 do algoritmo 5.4. Então $k \leq g(v) - |\mathcal{A}'| + 1$.*

Lema 5.16 *Seja k_2 a quantidade de vértices de Y que, durante a execução do algoritmo 5.4 receberam cor c maior que $2\Delta + 2|\mathcal{A}'|$. Então $k_2 \leq g(v) - 2|\mathcal{A}'|$.*

Prova. Seja $y \in Y$ um vértice de G e seja c uma cor não utilizada, par, tal que $2\Delta \leq c \leq 2\Delta + 2|\mathcal{A}'|$. Observe que, pelo corolário 5.14 se $u \in U$ teve sua cor modificada no passo 12 do algoritmo 5.4, então $uy \notin E(G)$. Logo, u não cria impedimentos para a utilização de c por parte de y . O mesmo vale para qualquer vértice cuja cor foi modificada durante o passo 15. Logo, no momento em que o algoritmo 5.4 tenta atribuir a cor c a um vértice $y \in Y$ pela primeira vez, essa atribuição é válida.

Como temos $|\mathcal{A}'| + 1$ cores pares c tais que $2\Delta \leq c \leq 2\Delta + 2|\mathcal{A}'|$ e, sabendo que um vértice z cuja cor foi modificada no passo 15 não irá forçar a modificação da cor de y no passo 18, temos que o número de vértices com cor maior que $2\Delta + 2|\mathcal{A}'|$ será, de fato no máximo $g(v) - 2|\mathcal{A}'|$. ■

Utilizando o lema acima, temos:

Teorema 5.17 *Seja $G = (V, E)$ um grafo arco-circular, $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um de seus modelos de arcos e v um vértice tal que $\text{Arco}(v)$ é próprio. O span da λ -coloração f construída pelo algoritmo 5.4 é de no máximo $2\Delta + 2|\mathcal{A}'| + \max\{0, 2(g(v) - 2|\mathcal{A}'|)\}$.*

Prova. Seja λ o span de f . Pelo corolário 5.2, sabemos que, ao final do passo 5 do algoritmo 5.4, $\lambda \leq 2\Delta - 1$ (basta verificar que na ordenação canônica do grafo de intervalo utilizado, v_0 não será um vértice de grau Δ). Além disso, $f(x) < 2|\mathcal{A}'|$ para todo $x \in \text{Vertices}(\mathcal{A}')$. Logo, a cor atribuída a um vértice nos passos 12 e 15 estará limitada a $2\Delta + 2|\mathcal{A}'| - 1$. Pelo lema 5.16, sabemos que no máximo $g(v) - 2|\mathcal{A}'|$ vértices recebem cor maior que $2\Delta + 2|\mathcal{A}'|$. Esses vértices utilizarão, no pior caso $2(g(v) - 2|\mathcal{A}'|)$ cores e, portanto, o teorema vale. ■

Considere agora a seguinte função ϵ sobre os arcos de um modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$. Seja $A = (s, t)$ e $v = \text{Vertice}(A)$. A função $\epsilon(A)$ será dada por:

$$\epsilon(A) = \begin{cases} 0 & \text{se } A \text{ não for próprio} \\ \min\{|\beta(s)|, |\beta(t)|\} & \text{se } \max\{|\beta(s)|, |\beta(t)|\} > \frac{\Delta}{2} \\ \max\{|\beta(s)|, |\beta(t)|\} & \text{em qualquer outro caso.} \end{cases}$$

De maneira similar, dado um modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$, definimos $\epsilon(\mathcal{M})$ da seguinte forma: $\epsilon(\mathcal{M}) = \min_{A \in \mathcal{A}} \{2\epsilon(A) + 2\max\{0, (g(\text{Vertice}(A)) - 2\epsilon(A))\}\}$. Assumimos, sem perda de generalidade, que se $A = (s, t)$ é um arco tal que $\epsilon(\mathcal{M}) = 2\epsilon(A) + 2\max\{0, (g(\text{Vertice}(A)) - 2\epsilon(A))\}$, então \mathcal{M} é tal que $|\beta(s)| = \epsilon(A)$. Basta observar que, se não for o caso, o modelo obtido ao percorrermos \mathcal{M} no sentido anti-horário irá satisfazer tal propriedade.

Reescrevemos, então, o teorema 5.17 da seguinte forma:

Teorema 5.18 *Seja $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um modelo de arcos. Então, $G = \Omega(\mathcal{M})$ é $(2\Delta + \epsilon(\mathcal{M}))$ - λ -colorível.*

Prova. Basta observar que esse será o limite superior para o span obtido ao utilizarmos o algoritmo 5.4 com parâmetros \mathcal{M} , G e $\text{Vertice}(A)$, onde A é um arco de \mathcal{A} tal que $\epsilon(\mathcal{M}) = 2\epsilon(A) + 2\max\{0, (g(\text{Vertice}(A)) - 2\epsilon(A))\}$. ■

É interessante observar que, quando o modelo de arcos $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ é próprio, sempre existirá um arco A , pertencente ao conjunto de arcos \mathcal{A} , tal que $\epsilon(A) = \lfloor \frac{\Delta}{2} \rfloor$ e, portanto, $\epsilon(\mathcal{M}) \leq \Delta + 1$, nos dando o seguinte corolário:

Corolário 5.19 *Seja G um grafo arco-circular próprio. Se Δ é ímpar, então G $(3\Delta + 1)$ - λ -colorível. Caso contrário, G é 3Δ - λ -colorível.*

5.2.3 Caso em que $l(\mathcal{M}) = 2$

É importante observar que o algoritmo 5.4 pode não funcionar quando $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ é tal que $l(\mathcal{M}) = 2$. Nesse caso a função ϵ pode ficar indefinida. Mostramos então como obter uma 2Δ - λ -coloração para $G = \Omega(\mathcal{M})$.

Teorema 5.20 *Seja $\mathcal{M} = (C, \mathcal{A})$ um modelo de arcos tal que $l(\mathcal{M}) = 2$. Se $G = (\Omega(\mathcal{M}))$, então G é 2Δ - λ -colorível.*

Prova. Sejam A_1 e A_2 dois arcos de \mathcal{A} que cobrem C e $v_1, v_2 \in V(G)$ seus vértices correspondentes, respectivamente. Claramente temos que $N(v_1) \cup N(v_2) = V(G)$. Assuma, sem perda de generalidade, que $|N(v_1) \setminus N(v_2)| \geq |N(v_2) \setminus N(v_1)|$. Considere, então, a seguinte atribuição de cores f para os vértices de G : para cada vértice v de $N(v_1) \setminus N(v_2)$ atribua a v a menor cor par não utilizada; $f(v_1) = 2|N(v_1) \setminus N(v_2)|$; $f(v_2) = f(v_1) + 2$; aos vértices em $N(v_2) \setminus N(v_1)$, atribua a menor cor ímpar disponível; finalmente, aos vértices em $N(v_1) \cap N(v_2)$, atribua a menor cor disponível.

Não é difícil verificar que f descrita acima é uma λ -coloração, pois vértices em $N(v_1) \setminus N(v_2)$ estão no máximo à distância 2 de vértices em $N(v_2) \setminus N(v_1)$. Além disso, temos que $\Delta \geq |N(v_1) \setminus N(v_2)| + |N(v_1) \cap N(v_2)| = |N(v_1)|$. Como a maior cor utilizada é a cor $2|N(v_1)|$, temos que G é 2Δ - λ -colorível. ■

5.3 Conjectura de Griggs e Yeh

Griggs e Yeh conjecturaram que todo grafo com pelo menos 3 vértices é Δ^2 - λ -colorível. Ao longo deste capítulo, mostramos que, dado um modelo de arcos \mathcal{M} tal que $l(\mathcal{M}) = 2$, o grafo de interseção do mesmo é 2Δ - λ -colorível e, portanto Δ^2 - λ -colorível, pois $\Delta \geq 3$. Já considerando modelos para os quais $l(\mathcal{M}) > 2$, o algoritmo 5.4 sempre encontra uma λ -coloração que possui *span* menor que 4Δ e, portanto, todo grafo arco-circular com $\Delta \geq 4$ também é Δ^2 - λ -colorível. Resta, portanto, analisar o caso em que $l(\mathcal{M}) > 2$ e $\Delta = 3$, o que é feito a seguir:

Lema 5.21 *Seja G um grafo arco-circular com $\Delta = 3$. Então G é $(2\Delta + 1)$ - λ -colorível.*

Prova. Segue da observação de que o conjunto \mathcal{A}' possuirá exatamente um arco e, portanto, no máximo 2 conflitos poderão existir: um entre o vértice correspondente ao arco de \mathcal{A}' e algum vértice de $N(v) \cup \{v\}$ e outro entre um vértice de $N(v) \cup \{v\}$ e um vértice de Y , que receberá a cor 2Δ . ■

Consequentemente, temos:

Corolário 5.22 *Todo grafo arco-circular G é Δ^2 - λ -colorível.*

5.4 Conclusões

Neste capítulo analisamos os algoritmos propostos por Calamoneri *et al.*, em [2], para o problema da λ -coloração em grafos arco-circulares e de intervalo. Mostramos que, dependendo do grafo dado como instância para os algoritmos, o resultado obtido pode não respeitar o limite de cores desejado ou até mesmo não ser uma λ -coloração. Durante esta análise, mostramos em que pontos os algoritmos propostos estão incorretos, bem como propomos forma de corrigi-los.

Além desta análise, propomos também um algoritmo para a obtenção de um limite superior para o *span* da λ -coloração de um grafo arco-circular. Com o algoritmo proposto, provamos que todo grafo arco-circular é $(2\Delta + \epsilon(\mathcal{M}))$ - λ -colorível. Em particular, quando o modelo de arcos fornecido é próprio, mostramos que o *span* da coloração construída pelo algoritmo proposto será de, no máximo, $3\Delta + 1$. Finalmente, mostramos que a conjectura de Griggs e Yeh para o problema da λ -Coloração é verdadeira para grafos arco-circulares.

Capítulo 6

Conclusões

Este trabalho teve como objetivo principal apresentar, de maneira sistemática, resultados relacionados à problemas de colorações de grafos arco-circulares. Em particular, estudamos três problemas de coloração: COLORAÇÃO DE VÉRTICES, COLORAÇÃO DE CLIQUES e λ -COLORAÇÃO. Para o primeiro, apresentamos alguns dos principais resultados encontrados na literatura, enquanto para os outros dois os resultados são, em sua maior parte, inéditos.

Para o problema da coloração de vértices, analisado no capítulo 3, exibimos a prova de que o mesmo é \mathcal{NP} -completo [5]. Em seguida, analisamos o algoritmo guloso de coloração proposto por Tucker [13]. Com base nesse algoritmo é possível obter um limite para o número de cores necessárias para colorir um grafo arco-circular: se $l(\mathcal{M}) > 3$, então o grafo arco-circular correspondente a \mathcal{M} é $\frac{3}{2}L(\mathcal{M})$ -colorível. Finalmente, estudamos uma nova análise do algoritmo de Tucker, feita por Valencia-Pabon [14], onde é mostrado que se $l(\mathcal{M}) \geq 5$, então o algoritmo de Tucker irá utilizar no máximo $\lceil \frac{l(\mathcal{M})-1}{l(\mathcal{M})-2} L(\mathcal{M}) \rceil$ cores.

No capítulo 4, estudamos o problema da coloração das cliques de um grafo arco-circular. Até então este era um problema cuja complexidade era desconhecida. Mostramos que sempre é possível colorir as cliques de um grafo arco-circular com 3 cores e caracterizamos quais são os grafos que precisam exatamente de 3 cores em uma coloração de cliques. Como consequência, exibimos um algoritmo de tempo polinomial que encontra uma coloração de cliques ótima de um grafo arco-circular, desde que seja fornecido um de seus modelos de arcos. Os resultados deste capítulo foram apresentados no V LAGOS, realizado na cidade de Gramado - RS, em 2009.

Por último, no capítulo que segue, estudamos o problema da λ -coloração. Este problema foi definido inicialmente por Griggs e Yeh, que conjecturaram ser sempre possível atribuir uma λ -coloração a um grafo utilizando no máximo a cor Δ^2 . Neste capítulo, analisamos os algoritmos propostos em [2], que nos fornecem limites para a maior cor utilizada em uma λ -coloração de um grafo arco-circular. Mostramos que os algoritmos propostos não estão corretos e fornecemos sugestões de como

corrigi-los. Propomos também um novo algoritmo para a obtenção de tal limite. Como consequência, mostramos que a conjectura de Griggs e Yeh é verdadeira para grafos arco-circulares. Além disso, mostramos que todo grafo arco-circular próprio é $(3\Delta + 1)$ - λ -colorível.

Este estudo deixa algumas questões em aberto. Dentre tais questões, podemos citar:

- É possível obter um algoritmo de tempo linear para resolver o problema da coloração de cliques, em grafos arco-circulares?
- Os limites apresentados para o *span* de uma λ -coloração de um grafo arco-circular são justos? Ou seja, existe algum grafo arco-circular para o qual é necessário utilizar tantas cores quanto o algoritmo 5.4 utiliza?
- O problema da λ -coloração é \mathcal{NP} -completo quando restrito a grafos arco-circulares?

Referências Bibliográficas

- [1] BACSÓ, G., GRAVIER, S., GYÁRFÁS, A., *et al.*, Coloring the maximal cliques of graphs, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, v. 17, n. 3, pp. 361–376, 2004.
- [2] CALAMONERI, T., CAMINITI, S., PETRESCHI, R., *et al.*, On the $L(h, k)$ -labeling of co-comparability graphs and circular-arc graphs, *Networks*, v. 53, n. 1, pp. 27–34, 2009.
- [3] CERIOLI, M., KORENCHENDLER, A., Clique-coloring circular-arc graphs, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 35, pp. 287–292, 2009.
- [4] CORMEN, T. H., LEISERSON, C. E., RIVEST, R. L., *et al.*, *Introduction to Algorithms*. 2 ed. Cambridge, MIT Press, 2001.
- [5] GAREY, M. R., JOHNSON, D. S., MILLER, G. L., *et al.*, The complexity of coloring circular arcs and chords, *SIAM Journal on Algebraic and Discrete Methods*, v. 1, n. 2, pp. 216–227, 1980.
- [6] GOLUBIC, M. C., *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. New York, Academic Press, 1980.
- [7] JOERIS, B., LIN, M., MCCONNELL, R., *et al.*, Linear-time recognition of Helly circular-arc models and graphs, *Algorithmica*. A ser publicado.
- [8] KRATOCHVÍL, J., TUZA, Z., On the complexity of bicoloring clique hypergraphs of graphs, *Journal of Algorithms*, v. 45, n. 1, pp. 40–54, 2002.
- [9] LIN, M. C., SZWARCFITER, J. L., Characterizations and recognition of circular-arc graphs and subclasses: a survey, *Discrete Mathematics*, v. 309, n. 18, pp. 5618–5635, 2009.
- [10] NIKOLOPOULOS, S. D., PALIOS, L., Detecting holes and antiholes in graphs, *Algorithmica*, v. 47, n. 2, pp. 119–138, 2007.

- [11] POSNER, D. F. D., *L(2, 1)-Colorações: Algoritmos e Limites Superiores em Classes de Grafos*. Dissertação de Mestrado, PESC/COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil, 2009.
- [12] SPINRAD, J. P., *Efficient Graph Representation*. Toronto, Fields Institute Monographs, 2003.
- [13] TUCKER, A., Coloring a family of circular arcs, *SIAM Journal on Applied Mathematics*, v. 29, n. 3, pp. 493–502, 1975.
- [14] VALENCIA-PABON, M., Revisiting Tucker’s algorithm to color circular arc graphs, *SIAM Journal on Computing*, v. 32, n. 4, pp. 1067–1072, 2003.