



COPPE/UFRJ

ESTUDO DE JOGOS COMBINATÓRIOS EM GRAFOS E SUA APLICAÇÃO
EM NEUROCIÊNCIA

Telma Silveira Pará

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Luis Alfredo Vidal de
Carvalho
Simone Dantas

Rio de Janeiro
Novembro de 2010

ESTUDO DE JOGOS COMBINATÓRIOS EM GRAFOS E SUA APLICAÇÃO
EM NEUROCIÊNCIA

Telma Silveira Pará

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ
COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE)
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS
REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR
EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof. Luis Alfredo Vidal de Carvalho, D.Sc.

Prof. Simone Dantas, D.Sc.

Prof. Sylvain Gravier, Docteur

Prof. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D.Sc.

Prof. Elie Cheniaux Júnior, D.Sc.

Prof. Sulamita Klein, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

NOVEMBRO DE 2010

Pará, Telma Silveira

Estudo de Jogos Combinatórios em grafos e sua aplicação em Neurociência/Telma Silveira Pará. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2010.

XII, 63 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Luis Alfredo Vidal de Carvalho

Simone Dantas

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2010.

Referências Bibliográficas: p. 59 – 61.

1. Clobber. 2. Jogos Imparciais. 3. Teoria de Grafos. 4. Jogos em Grafos. 5. Transtorno do Déficit de Atenção e Hiperatividade. 6. Funções Executivas. 7. Neuropsicologia. I. Vidal de Carvalho, Luis Alfredo *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*Ao meu esposo, André Marques
e à minha filha, Tamires*

Agradecimentos

A Deus, pela ajuda sempre. Obrigada.

A meus pais, Sebastião e Maria, a vocês dois devo essa conquista! Obrigada!

A minha grande família: meus irmãos Jorge e Celi e meus outros irmãos Maria, Eneida, Rafael, Cláudia, Eduardo e Fernando pelo inestimável suporte, principalmente durante o doutorado sanduíche, e também pela compreensão nas ausências dos eventos familiares.

Aos meus orientadores, Luís Alfredo Vidal de Carvalho e Simone Dantas com quem tive a honra de trabalhar durante esse período, o que me possibilitou ampliar meus conhecimentos para que pudesse alcançar o nível exigido para o doutorado. Muito obrigada!

Ao meu orientador do doutorado sanduíche na França, professor Sylvain Gravier, bem como sua equipe *Math à Modeler* com quem tive o prazer de trabalhar durante os sete meses do intercâmbio. Obrigada pelos momentos agradáveis que passamos juntos e um especial agradecimento aos colegas Marion, Simon, Aline, Nicolas e Nathalie. Merci!

Ao professor Paulo Mattos e ao psicólogo Gabriel Coutinho pelo suporte nos experimentos na clínica.

Um agradecimento especial a Rafael de Souza pelas discussões sobre o Clobber, a Carlos Eduardo Raymundo pelo suporte no tratamento estatístico e a Fernando Mendonça e a minha filha Tamires pela ajuda com algumas figuras no Adobe Illustrator. Obrigada!

Aos membros da banca, professores Celina M. H. de Figueiredo, Elie Cheniaux, e Sulamita Klein.

Aos professores da linha de Algoritmos e Combinatória e aos colegas do doutorado, em especial, Leticia Bueno, Danilo Artigas e Raimundo Macário.

Aos professores, funcionários e alunos da COPPE/PEE pelo apoio, em especial, aos professores Liu Hsu e Ramon R. Costa e aos funcionários Roberto Calvet e Rodrigo Carneiro.

Aos amigos professores da rede FAETEC-RJ, em especial os professores Gustavo Hoyer, Alexandre Santos, Nilza Portela e Andréia Santanna.

Aos amigos que acompanharam este meu percurso, em especial, Tancredo, Carmen, Marco Soares e José Antônio. Obrigada.

Finalmente, agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Projeto COFECUB *Conexidade e Separadores* pelo suporte financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

ESTUDO DE JOGOS COMBINATÓRIOS EM GRAFOS E SUA APLICAÇÃO
EM NEUROCIÊNCIA

Telma Silveira Pará

Novembro/2010

Orientadores: Luis Alfredo Vidal de Carvalho
Simone Dantas

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

O jogo *Impartial Solitaire Clobber (ISC)* é realizado com somente um jogador, e as regras são as seguintes: posicionamos pedras pretas e brancas nos vértices de um grafo. Um movimento consiste em pegar uma pedra e *comer* uma outra pedra da cor oposta, localizada em um vértice adjacente, ocupando o seu lugar. A pedra *comida* é então removida do grafo e é substituída pela que efetuou o movimento. O jogador não é obrigado a alternar jogadas com pedras brancas e pretas e o jogo termina quando ele não consegue mais se movimentar, isto é, não é possível *comer* mais pedras. O objetivo do jogo é o de minimizar o número de pedras que restam no grafo. Esta tese apresenta resultados teóricos do Clobber em Teoria de Grafos e uma análise da aplicação do jogo como substituto ou alternativa aos testes tradicionais de habilidade executiva (Labirinto, WCST, etc), através das medidas de tempo de execução do jogo e do número de acertos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

A STUDY OF COMBINATORIAL GAMES ON GRAPHS AND ITS
APPLICATION IN NEUROSCIENCE

Telma Silveira Pará

November/2010

Advisors: Luis Alfredo Vidal de Carvalho

Simone Dantas

Department: Systems Engineering and Computer Science

The Impartial Solitaire Clobber (ISC) is a one-player game with the following rules: we assign a black or a white stone for each vertex of a given a graph $G = (V, E)$. A move consists in picking up a stone of any color and *clobbering* another one of the opposite color located on an adjacent vertex. The clobbered stone is removed from the graph and it is replaced by the picked one. In the ISC, the player is not forced to alternate black and white captures and the game ends when the player is unable to move. The goal is to find a succession of moves that minimizes the number of the remaining stones. This thesis presents theoretical results of Clobber in Graph Theory and an analysis of its application as a substitute or alternative to the traditional neuropsychological tests for executive functions (MAZE, WCST, etc) by measuring the running time and the number of hits in the game.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
1 Introdução	1
2 Introdução a grafos	6
3 Introdução a Neurociência	13
3.1 Afinal, o que é neurociência?	13
3.2 O TDAH e as funções executivas	14
3.3 Alguns testes neuropsicológicos das funções executivas	18
4 Clobber em Grafos	23
4.1 Clobber em potências de caminho e algumas classes de grafos circulantes	25
5 Clobber em Neurociência	36
5.1 Primeiro Experimento	36
5.1.1 Análise das configurações de jogo	38
5.1.2 Análise multinível	38
5.2 Segundo experimento	45
5.2.1 Análise do Exp2a	47
5.2.2 Análise do Exp2b	50
6 Conclusões e Trabalhos Futuros	56
Referências Bibliográficas	59
A Formulários	62

Lista de Figuras

1.1	Exemplos de Jogos Combinatórios.	3
1.2	Jogo Clobber com uma configuração inicial de pedras pretas e brancas em um tabuleiro retangular xadrez de tamanho 5×6	4
2.1	Um grafo $G = (V(G), E(G))$ e sua representação.	6
2.2	Grafos completos.	7
2.3	Exemplos de (a) G supergrafo de H , (b) H subgrafo de G (c) H' subgrafo induzido de G por $V' = \{0, 1, 2, 3\}$	7
2.4	Exemplos de (a) grafo conexo e (b) grafo desconexo com 3 componentes conexas.	8
2.5	Grafos isomorfos.	8
2.6	Exemplo do grafo circulante $C(12, \{3, 4\})$	9
2.7	Exemplo da potência de ciclo C_7^2 e da potência de caminho P_7^2	9
2.8	O produto cartesiano de dois grafos G_1 e G_2	10
3.1	O cérebro.	16
3.2	Detalhamento do lobo frontal.	16
3.3	Teste de Seleção de Cartas de Winsconsin.	19
3.4	Teste da Torre de Hanói.	19
3.5	Teste da Torre de Londres.	20
3.6	Teste das trilhas A e B.	20
3.7	Teste de Stroop.	21
3.8	Foto de área ativada.	22
4.1	Um exemplo do jogo Clobber.	23
4.2	Uma configuração Φ e sua complementar $\bar{\Phi}$	24

4.3	Regras para jogar nos vértices iniciais.	26
4.4	Casos $n = 4$ e $n = 5$ com $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3) = \circ \circ \bullet \bullet$	27
4.5	Casos $n = 6$ com $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3) = \circ \circ \bullet \bullet$	27
4.6	Casos $n = 4$ e $n = 5$ com $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3) = \circ \circ \bullet \circ$	27
4.7	Casos $n = 6$ com $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3) = \circ \circ \bullet \circ$	27
4.8	Casos $n = 5$ e $n = 6$ com $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3)\Phi(4) = \circ \circ \circ \bullet \circ$	28
4.9	Casos $n = 7$ com $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3)\Phi(4) = \circ \circ \circ \bullet \circ$	28
4.10	Casos $n = 5$ e $n = 6$ com $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3)\Phi(4) = \circ \circ \circ \bullet \bullet$	28
4.11	Casos $n = 7$ com $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3)\Phi(4) = \circ \circ \circ \bullet \bullet$	29
4.12	Casos $ B_2 = 1$ para P_n^2	30
4.13	Casos $ B_2 = 1$ e $ B_3 = 1$ para P_n^2	31
4.14	Casos $ B_2 = 2$ para P_n^2	31
4.15	Caso $ B_2 = 2$ e ($ B_3 = 1$ ou $ B_3 = 2$) para P_n^2	32
4.16	Caso $ B_2 > 2$ para P_n^2	32
4.17	Caso $ B_2 = 2$ e ($ B_3 = 1$ ou $ B_3 = 2$) para $P_n^r, r \geq 3$	33
4.18	Caso $ B_2 > 2$ para $P_n^r, r \geq 3$	33
4.19	O grafo $C(17, \{3, 6\})$ é isomorfo ao $C(17, \{1, 2\})$	34
4.20	Exemplo para $n = 6l + 2, l = 1, d = 3$	35
5.1	Configurações do Clobber utilizadas no primeiro Experimento.	37
5.2	VPC sobre modelo vazio do primeiro experimento	42
5.3	Teste de razão de log-verossimilhança do primeiro experimento	43
5.4	Análise de diagnóstico de resíduos do 1º nível.	44
5.5	Gráfico de Resíduos do 2º nível.	44
5.6	Análise de diagnóstico de resíduos do 2º nível.	45
5.7	Segundo experimento com o jogo Clobber.	46
5.8	Configurações do Clobber utilizadas no segundo experimento.	47
5.9	Teste de Razão de log-verossimilhança do Exp2b.	53
5.10	Análise de diagnóstico de resíduos do 1º nível do Exp2b.	54
5.11	Análise de diagnóstico de resíduos do 2º nível do Exp2b.	54
5.12	Análise de diagnóstico de resíduos do 3º nível do Exp2b.	55

Lista de Tabelas

4.1	Tabela com as possibilidades de Φ	29
5.1	Tabela com os dados da amostra do primeiro experimento.	37
5.2	Tabela com Análise Multinível do primeiro Experimento.	41
5.3	Tabela com os dados da amostra do segundo experimento (Exp2a).	48
5.4	Tabela com os dados da amostra do segundo experimento (Exp2b).	50
5.5	Tabela com Análise Multinível do Experimento 2b.	52
6.1	Tabela Resumo dos Resultados do Clobber.	56

Capítulo 1

Introdução

Como as pessoas aprendem? O que acontece com o nosso cérebro quando adquirimos conhecimentos como nomes, fórmulas, datas? Ou habilidades como ler, dançar, desenhar? Ou, ainda, atitudes como autoconfiança, responsabilidade, otimismo? Vários cientistas estão aprendendo como o cérebro jovem se desenvolve e como o cérebro aprende. Talvez a mais importante das disciplinas voltadas para essa área seja a Neurociência cognitiva. Como ocorre com a maioria dos avanços da ciência, o papel das novas tecnologias tem sido crucial. Técnicas como a neuroimagem funcional que inclui tanto a ressonância magnética funcional (fMRI) quanto a tomografia por emissão de pósitrons (PET) e a espectroscopia no infravermelho próximo (NIR) estão permitindo aos cientistas compreender melhor o funcionamento da mente.

Segundo recentes pesquisas da OCDE (Organização de Cooperação e Desenvolvimento Econômicos), a psicologia cognitiva tem um importante papel a desempenhar pois parece provável que, nos próximos anos, a neurociência cognitiva venha a oferecer respostas confiáveis a importantes questões sobre a aprendizagem humana, tais como:

- Quais os períodos mais receptivos no desenvolvimento do cérebro? Que implicações eles têm para um currículo de aprendizagem relacionado à idade?
- Por que algumas crianças apresentam extrema dificuldade na alfabetização e no aprendizado de matemática?
- Qual o papel da emoção na aprendizagem? Como facilitar a cooperação entre sistema límbico (emocional) e córtex cerebral (cognitivo) do cérebro diante do

desafio da aprendizagem?

A neurociência cognitiva também poderá nos ajudar a compreender a distinção entre nossas diferenças individuais e o que é comum a todos os cérebros. Homens e mulheres, por exemplo, parecem ter cérebros diferentes, mas não se sabe, ao certo, quais as implicações disso. Há diferenças significativas de amadurecimento entre o cérebro de uma criança, de um adolescente e de um adulto. Além disso, nesse primeiro momento, tem sido mais fácil estudar a deficiência (e a capacidade excepcional) do que o *cérebro normal*. Isso não é ruim pois pode ajudar a entender e tratar transtornos neuropsiquiátricos que podem afetar as funções neuropsicológicas.

Segundo Lezak [1], a neuropsicologia é uma ciência voltada para a expressão do comportamento por meio das disfunções cerebrais e ampara-se na avaliação de determinadas manifestações do indivíduo para a investigação do funcionamento cerebral. Uma importante atividade da neuropsicologia é a avaliação neuropsicológica. São diversas as indicações da avaliação neuropsicológica, por exemplo, a formulação de um diagnóstico, o acompanhamento e documentação do estado do paciente, a pesquisa clínica, a confecção de documentos legais, a reabilitação neuropsicológica, etc. Vários testes vêm sendo utilizados como medidas neuropsicológicas, dentre esses testes podemos citar o Teste da Torre de Hanói, da Torre de Londres, de Stroop, Labirintos, Dígitos e Códigos (WISC-III), entre outros. O teste que iremos aplicar é, na verdade, um jogo matemático, mais precisamente classificado como jogo combinatório.

Os Jogos Combinatórios satisfazem as seguintes condições propostas por Berlekamp et al. em [2]:

1. Existem dois jogadores A e B . O jogador A é o primeiro a jogar e B é o segundo a jogar;
2. existem muitas posições e uma posição inicial específica, chamada *posição de início*;
3. a qualquer momento o conjunto de jogadas legais para um jogador está bem definido, é do conhecimento de todos e cabe ao jogador escolher a sua jogada;
4. os jogadores jogam alternadamente, isto é, não existem jogadas simultâneas;

5. os jogadores sabem exatamente qual a situação presente do jogo, ou seja, têm informação completa;
6. não são utilizados dados ou outros dispositivos aleatórios;
7. em um jogo convencional, o jogador que estiver impedido de movimentar-se, perde;
8. as regras são de tal forma que o jogo sempre chegará ao fim porque algum jogador estará impedido de movimentar-se. Esta é a chamada *condição de término*.

São exemplos populares de jogos combinatórios: Xadrez, Dama, Hex, Go e Geography. Veja alguns exemplos desses jogos na Figura 1.1.

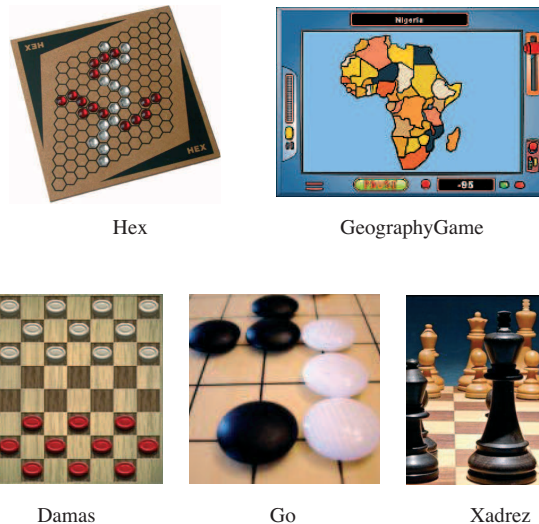


Figura 1.1: Exemplos de Jogos Combinatórios.

Em 2001, um novo jogo combinatório foi apresentado por Albert, Grossman e Nowakowski: o *Clobber* e em 2002, ocorreu o primeiro Torneio Internacional do *Clobber* em Dagstuhl, Alemanha, no Seminário de Algoritmos e Teoria dos Jogos Combinatórios. O *Clobber* é um jogo para dois jogadores [3, 4] no qual pedras pretas e brancas ocupam um subconjunto de quadrados de um tabuleiro xadrez de tamanho $n \times m$. Veja um exemplo na Figura 1.2. Os dois jogadores, Branco e Preto, se movem alternadamente, pegando uma de suas pedras e *comendo* uma pedra do oponente em um quadrado adjacente, horizontalmente ou verticalmente. Esta pedra é removida do tabuleiro e é substituída pela pedra que efetuou o movimento. O Jogo

termina quando um jogador, na sua vez, está impossibilitado de se movimentar, e então, este jogador perde.

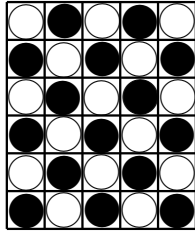


Figura 1.2: Jogo Clobber com uma configuração inicial de pedras pretas e brancas em um tabuleiro retangular xadrez de tamanho 5×6 .

Estudamos o jogo Clobber, tendo como ferramenta de modelagem, a Teoria de Grafos. Esta teoria vem sendo bastante utilizada em diversas áreas da computação, da matemática e da engenharia, sobretudo para a modelagem de problemas de interesse prático, entre eles os jogos. Em particular, estudamos o jogo Clobber em sua versão *Solitaire* (temos apenas um jogador) e *Impartial* (o jogador não é obrigado a alternar jogadas pretas e brancas). Neste trabalho, chamaremos a versão *Impartial Solitaire Clobber* de ISC ou simplesmente Clobber. Estudamos o ISC restrito às classes de grafos conhecidas como potências de caminho, potências de ciclo e grafos circulantes.

Além disso, apresentaremos uma aplicação do jogo Clobber como substituto ou alternativa aos testes tradicionais de Habilidade Executiva (Labirinto, Torre de Hanói, WSCT, etc), através das medidas de tempo de execução do jogo e do número de acertos. Os experimentos com o jogo foram realizados em populações normais e também em populações que sofrem do Transtorno do Déficit de Atenção com Hiperatividade - TDAH.

A tese está dividida da seguinte forma: no Capítulo 2 apresentaremos uma introdução aos conceitos de Teoria dos Grafos utilizados nos estudos do Clobber; no Capítulo 3 apresentaremos uma introdução aos conceitos de Neurociência e neuropsicologia, com a apresentação de alguns testes neuropsicológicos; no Capítulo 4 estudamos o Clobber e mostramos que qualquer configuração não-monocromática de pedras pode ser reduzida a uma única pedra para uma potência de caminho P_n^r , $r \geq 3$; para todas as potências de ciclo C_n^r , $r \geq 2$; e para algumas classes de grafos circulantes; no Capítulo 5 apresentamos os resultados da aplicação do jogo Clobber

em escolas e em uma clínica privada. Finalmente, no Capítulo 6, apresentamos as conclusões, os problemas em aberto e algumas perspectivas de trabalhos futuros.

Capítulo 2

Introdução a grafos

Neste capítulo, apresentamos conceitos básicos de Teoria dos grafos e Complexidade Computacional que serão utilizados no decorrer do trabalho. Como referência utilizamos os livros de Bondy e Murty [5], Cormen et al. [6], Garey and Johnson [7] e de Szwarcfiter [8], bem como os artigos de Campos et al. [9], Dorbec et al. [10], Meidanis [11] e Heuberger [12].

Um **grafo** $G = (V(G), E(G))$ é um conjunto finito não-vazio $V(G)$ e um conjunto $E(G)$ de pares não-ordenados de elementos distintos de $V(G)$. Os elementos de $V(G)$ são os **vértices** e os de $E(G)$ são as **arestas** de G , respectivamente. Cada aresta e será denotada pelo par de vértices vw . Neste caso, os vértices v e w são os extremos da aresta e , sendo denominados **adjacentes**. Veja na Figura 2.1 a representação de um grafo.

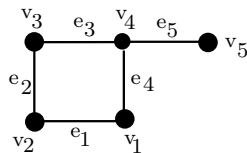


Figura 2.1: Um grafo $G = (V(G), E(G))$ e sua representação.

Representamos, neste trabalho, $|V(G)| = n$ e $|E(G)| = m$. Um grafo contém arestas **paralelas** (ou **múltiplas**) se possui arestas diferentes compartilhando os mesmos extremos. Uma aresta uv é um **laço** (ou **loop**) se $u = v$. Um grafo é **simples** se não contém laços nem arestas múltiplas. Neste trabalho consideraremos apenas grafos simples, o que denotaremos apenas por grafos. Um grafo é dito **completo**, denotado por K_n , se todos os seus vértices são dois a dois adjacentes. Veja alguns

exemplos de grafos completos na Figura 2.2.

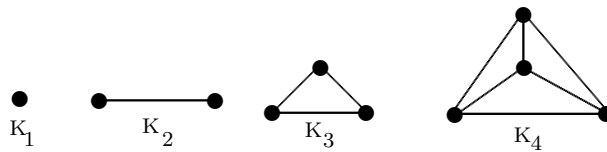


Figura 2.2: Grafos completos.

Um grafo H é um **subgrafo** de G ($H \subseteq G$) se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Quando $H \subseteq G$, mas $H \neq G$ ($H \subset G$), então H é **subgrafo próprio** de G . Se H é um subgrafo de G , então G é um **supergrafo** de H . Se H é um subgrafo de G e $V(G) = V(H)$, dizemos que H é um **subgrafo gerador** de G . Seja $V' \subseteq V$. O **subgrafo de G induzido por V'** , denotado por $G[V']$, é o subgrafo cujo conjunto de vértices é V' e cujo conjunto de arestas é o conjunto de todas as arestas de G que tem ambos os extremos em V' . Neste caso, dizemos que V' **induz** $G[V']$. Veja exemplo da Figura 2.3 no qual o grafo G é supergrafo do grafo H e o grafo H' é um subgrafo induzido de G pelo conjunto de vértices $V' = \{0, 1, 2, 3\}$.

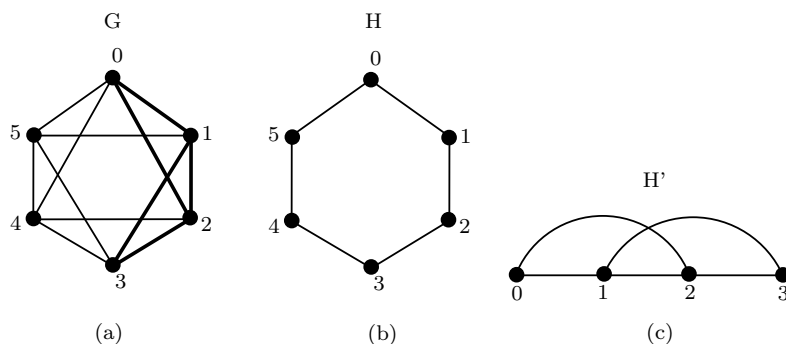


Figura 2.3: Exemplos de (a) G supergrafo de H , (b) H subgrafo de G (c) H' subgrafo induzido de G por $V' = \{0, 1, 2, 3\}$.

Denomina-se **clique** de um grafo G a um subconjunto de vértices de G que induz um grafo completo.

Uma sequência de vértices v_1, v_2, \dots, v_k tal que $v_i v_{i+1} \in E$, $1 \leq i \leq k - 1$ é denominado **caminho** de v_1 a v_k . Um **ciclo** é um caminho $v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1}$, onde $v_1 = v_{k+1}$, $k \geq 3$.

Um caminho que contenha cada vértice do grafo exatamente uma vez é chamado de **Hamiltoniano**.

Dois vértices u e v de G são ditos **conexos** se existe um caminho do vértice u ao vértice v em G . Existe uma **partição** de V em subconjuntos não-vazios V_1, V_2, \dots, V_w tais que dois vértices u e v estão conectados, se e somente se, ambos u e v pertencerem ao mesmo conjunto V_i . Os subgrafos $G[V_1], G[V_2], \dots, G[V_w]$ são chamados de componentes de G . Se G tem somente uma componente, G é conexo (veja Figura 2.4(a)), do contrário, G é **desconexo** (veja Figura 2.4(b)).

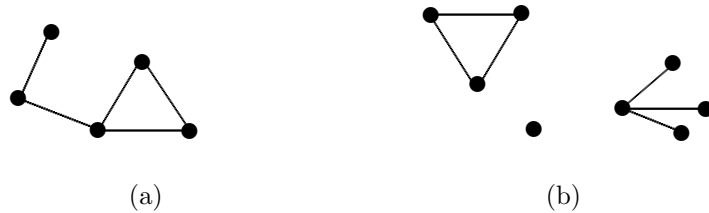


Figura 2.4: Exemplos de (a)grafo conexo e (b)grafo desconexo com 3 componentes conexas.

Um grafo $G = (V(G), E(G))$ é dito **bipartido** se existe uma bipartição de $V(G)$ em dois subconjuntos V_1 e V_2 tal que toda aresta e em $E(G)$ tem exatamente um extremo em V_1 e um extremo em V_2 .

Dois grafos G e H são chamados de **isomorfos** se existe uma bijeção $\varphi : G \rightarrow H$ tal que u e v são adjacentes em G se e somente se os vértices $\varphi(u)$ e $\varphi(v)$ são adjacentes em H . Na Figura 2.5, o mapeamento $\varphi(u) = a; \varphi(v) = c; \varphi(w) = e; \varphi(x) = b; \varphi(y) = d$ e $\varphi(z) = f$ é um isomorfismo entre G e H .

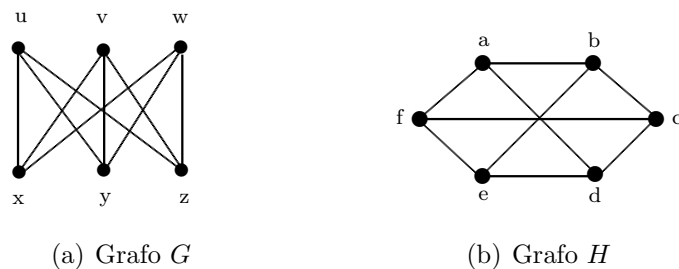


Figura 2.5: Grafos isomorfos.

Seja $k \neq 0$, um inteiro fixo. Dois inteiros a e b são ditos **congruentes módulo k** , denotamos $a \equiv b \pmod{k}$, se e somente se $k \mid a - b$, ou, equivalentemente, se existe um inteiro q tal que $a = b + kq$.

A **r -potência de caminho P_n^r** é o grafo cujo conjunto de vértices é $\{0, \dots, n - 1\}$ e cujas arestas ij são tais que $1 \leq |i - j| \leq r$, $i, j \in \{0, \dots, n - 1\}$. Um **grafo circulante $C(n, A)$** , $A \subseteq \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\}$, é o grafo cujo conjunto de

vértices é $\{0, \dots, n - 1\}$ e cujas arestas ij são tais que $(|i - j| \bmod n) \in A$. Adotamos $0, 1, \dots, n - 1$ como uma ordenação cíclica, no sentido horário, dos rótulos dos vértices de $G = C(n, A)$. Veja um exemplo na Figura 2.6.

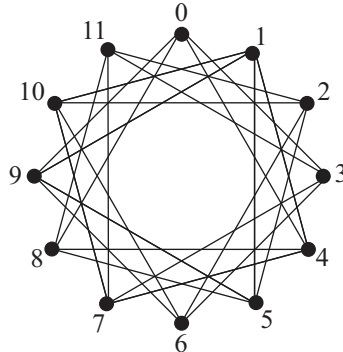


Figura 2.6: Exemplo do grafo circulante $C(12, \{3, 4\})$.

Em particular, um grafo circulante $G = C(n, \{d_1, \dots, d_r\})$ é uma **potência de ciclo** quando $d_1 = 1$, $d_i = d_{i-1} + 1$, $d_r < \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Este grafo também é representado por C_n^r . Um grafo completo com n vértices é o grafo circulante $C(n, \{1, 2, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\})$ e um ciclo com n vértices é o grafo $C(n, \{1\})$. Verificamos que o grafo P_n^r é um subgrafo da potência de ciclo C_n^r . Veja um exemplo na Figura 2.7.

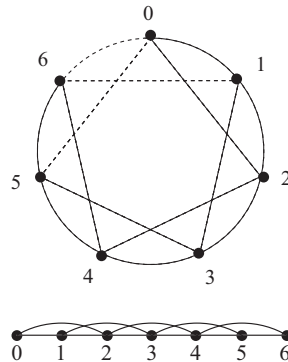


Figura 2.7: Exemplo da potência de ciclo C_7^2 e da potência de caminho P_7^2 .

Os grafos circulantes possuem as seguintes propriedades apresentadas no Lema 1 e no Teorema 2.

Lema 1 (Meidanis, 2009 [11]). *Seja $G = C(n, \{d_1, \dots, d_k\})$, $d_i \leq \lfloor n/2 \rfloor$. Então, para cada d_i , o subgrafo induzido $C(n, d_i)$ é composto por $\text{mdc}(n, d_i)$ componentes conexas, cada uma sendo um ciclo de tamanho $n/\text{mdc}(n, d_i)$.* □

Teorema 2 (Heuberger, 2003 [12]). *Seja $G = C(n, \{d_1, \dots, d_k\})$, um grafo circulante conexo. Então G é bipartido se e somente se d_1, \dots, d_k são ímpares e n é par.* \square

Dados dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, o **produto cartesiano** $G_1 \square G_2$ é o grafo $G = (V, E)$ onde $V = V_1 \times V_2$ e $(u_1u_2, v_1v_2) \in E$ se e somente se $u_1 = v_1$ e $(u_2, v_2) \in E_2$, ou $u_2 = v_2$ e $(u_1, v_1) \in E_1$. Veja um exemplo Figura 2.8.

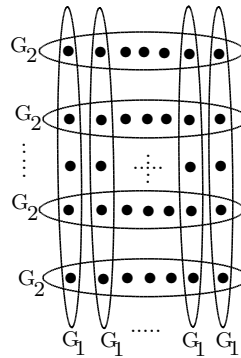


Figura 2.8: O produto cartesiano de dois grafos G_1 e G_2 .

Um grafo de **Hamming** é um produto cartesiano múltiplo de cliques. Os grafos $K_2 \square K_3$ e $K_4 \square K_5 \square K_2$ são exemplos de grafos de Hamming. Os **Hipercubos**, definidos por $\square^n K_2$, constituem uma classe bastante conhecida de grafos de Hamming.

Sejam P_{n_1} e P_{n_2} dois caminhos. Um **grafo grade** (ou **grid graph**) com n vértices ($n = n_1 \times n_2$) é o produto cartesiano $P_{n_1} \square P_{n_2}$.

Seja S um conjunto e $S' \subseteq S$. O conjunto S' é **maximal** em relação a uma propriedade P , se S' satisfaz a propriedade P e não existe subconjunto S'' de S tal que $S'' \supset S'$ que também satisfaz P . De forma análoga, define-se também conjunto **minimal** em relação a uma certa propriedade.

Faremos agora uma introdução aos problemas de decisão e à complexidade computacional. Um **algoritmo** corresponde a uma sequência de ações executáveis para a obtenção de uma solução para um determinado tipo de problema. A complexidade se traduz como a medida de eficiência dos algoritmos.

Denomina-se passo de um algoritmo α à computação de uma instrução do programa P que o implementa. A **complexidade local** do algoritmo α é o número total de passos necessários para a computação completa de P , para uma certa entrada. Define-se **complexidade assintótica** de um algoritmo como sendo um li-

mite superior da sua complexidade local, para uma certa entrada suficientemente grande. Para exprimir analiticamente a complexidade utiliza-se a **notação O**. A complexidade assintótica de um algoritmo não é única, pois a entradas diferentes podem corresponder números de passos diferentes. Define-se, então, a **complexidade de pior caso**, (ou simplesmente **complexidade**) de um algoritmo como o valor máximo entre todas as suas complexidades assintóticas, para entradas de tamanho suficientemente grandes.

Por exemplo, seja P um problema algorítmico, cuja entrada possui tamanho $n > 0$ e g uma função real positiva da variável n . Diz-se que $\Omega(g)$ é um limite inferior de P quando qualquer algoritmo α que resolva P requer pelo menos $\mathbf{O}(g)$ passos. Isto é, se $\mathbf{O}(f)$ for a complexidade (pior caso) de α então g é $\mathbf{O}(f)$. Por exemplo, se $\Omega(n^2)$ for um limite inferior para P , não poderá existir algoritmo que o resolva em $\mathbf{O}(n)$ passos. Um algoritmo é eficiente quando a sua complexidade for um polinômio no tamanho de sua entrada.

Há certas classes gerais de problemas algorítmicos. Por exemplo, existem os **Problemas de Decisão**, os de **Localização** e os de **Otimização**. Num problema de decisão, o objetivo consiste em decidir a resposta SIM ou NÃO a uma questão. Num problema de localização, o objetivo é localizar uma certa estrutura S que satisfaça um conjunto de propriedades dadas. Se as propriedades a que S deve satisfazer envolverem critérios de otimização, então o problema torna-se de otimização.

Considere um problema de decisão Π . Se Π for solúvel através da aplicação de algum processo, então necessariamente existe uma justificativa para a solução de Π . Essa justificativa pode ser representada por um determinado conjunto de argumentos, os quais, quando interpretados convenientemente, podem atestar a veracidade da resposta SIM ou NÃO dada ao problema.

A classe **P** de problemas de decisão é aquela que compreende precisamente aqueles problemas que admitem um algoritmo polinomial. A classe **NP** é aquela que compreende todos os problemas de decisão Π , tais que existe uma justificativa à resposta SIM para Π cujo passo de reconhecimento pode ser realizado por um algoritmo polinomial no tamanho de entrada de Π .

Dizemos que dois problemas Π_1 e Π_2 são equivalentes se $\Pi_1 \propto \Pi_2$ e $\Pi_2 \propto \Pi_1$, onde a relação \propto indica que Π_1 pode ser transformado polinomialmente em Π_2 .

As classes de problemas de “maior dificuldade” dentre todos em NP são agrupados em uma classe especial chamada de **NP-completo**. Um problema de decisão Π é NP-completo quando as duas seguintes condições forem ambas satisfeitas:

1. $\Pi \in \text{NP}$
2. todo problema de decisão $\Pi' \in \text{NP}$ satisfaz $\Pi' \leq \Pi$

Observe que a segunda condição implica que todo problema da classe NP pode ser transformado polinomialmente no problema Π NP-completo. Ou seja, se um problema NP-completo Π puder ser resolvido em tempo polinomial então todo problema de NP admite também algoritmo polinomial (e como consequência, nesta hipótese, $P=NP$). Vale, portanto, $\Pi \in P$ se e somente se $P=NP$. Isto justifica o fato de que a classe NP-completo corresponde aos problemas de maior dificuldade entre os pertencentes a NP. Caso somente a segunda condição da definição de NP-completo seja considerada (não importando se a primeira é ou não satisfeita), o problema Π é denominado **NP-difícil**. Logo, a dificuldade de um problema NP-difícil não é menor do que a de um NP-completo.

Capítulo 3

Introdução a Neurociência

Nesta seção, faremos uma breve introdução à neurociência com ênfase no TDAH e nas funções executivas. Apresentaremos também alguns testes neuropsicológicos que auxiliam no diagnóstico do TDAH. Como referência utilizamos os livros de Mattos [13] e Lezak [1] e os artigos de Saboya et al. [14], de Verdejo-Garcia e Bechara [15], entre outros.

3.1 Afinal, o que é neurociência?

A **neurociência** é o termo dado às disciplinas biológicas que estudam o sistema nervoso, tanto o normal quanto o patológico, especialmente a anatomia e a fisiologia do cérebro inter-relacionando-as com a teoria da informação, a semiótica, a lingüística e demais disciplinas que explicam o comportamento, o processo de aprendizagem e cognição humana, bem como os mecanismos de regulação orgânica.

Tanto do ponto de vista histórico como teórico, não podemos deixar de considerar as contribuições da cibernética. Hoje, a neurociência computacional é a área da neurociência que tem por objetivo propor modelos matemáticos e computacionais para simular e entender a função e os mecanismos do sistema nervoso. A neurociência é uma prática interdisciplinar, resultado da interação de diversas áreas do saber ou disciplinas científicas como, por exemplo neurobiologia, neurofisiologia, neuropsicologia, estendendo-se essa aplicação a distintas especialidades médicas como por exemplo: neuropsiquiatria, neuroendocrinologia, neuroepidemiologia, etc.

A **neuropsicologia** é uma interface ou aplicação da psicologia e da neurologia, que estuda as relações entre o cérebro e o comportamento humano. Dedicar-se praticamente a investigar como diferentes disfunções cerebrais se associam a déficits em diversas áreas da cognição humana. Entre as principais contribuições desse ramo do conhecimento estão os resultados de pesquisas científicas para elaborar intervenções em casos de lesão cerebral quando se verifica o comprometimento da cognição e de alguns aspectos do comportamento. Atualmente, com os avanços da tecnologia, como a ressonância magnética funcional, é possível realizar estudos dos circuitos cerebrais envolvidos nas funções cognitivas.

Segundo Santana et al.[16], a **cognição** humana tem sido o centro de diversas investigações no campo da psicologia do desenvolvimento. Este debate tem se situado em torno de grandes paradigmas: piagetiano, neo-piagetiano, processamento informacional, contextual e biológico-maturacional (neurociência cognitiva). Adotaremos como definição de cognição aquela apresentada pela abordagem biológico-maturacional. Esta definição é sustentada pela neurociência cognitiva que, apesar de apresentar algumas nuances, enfatiza basicamente que o processo da mudança cognitiva ocorre devido à dotação genética e à maturação cerebral. Considera-se, por exemplo, que a maturação do lobo frontal influencia na noção de permanência de objeto e que a mente constitui-se por módulos mentais inatos.

3.2 O TDAH e as funções executivas

O **TDAH** é um transtorno neurobiológico, de causas genéticas, que aparece na infância e frequentemente acompanha o indivíduo por toda a sua vida. Ele se caracteriza por sintomas de desatenção, inquietude e impulsividade. Ele é chamado às vezes de **DDA** (Distúrbio do Déficit de Atenção). Em inglês, também é chamado de **ADD**, **ADHD** ou de **AD/HD**.

Para Mattos [13], é comum dizer que as pessoas com TDAH “vivem no mundo da lua”. São crianças que não conseguem ficar paradas, correm de um lado para outro, estão sempre pensando em outra coisa (ou em um monte de outras coisas...), detestam coisas monótonas e repetitivas, além de serem impulsivas no seu dia-a-dia. São pessoas que vivem trocando de interesses e planos e têm dificuldades em

levar as coisas até o fim. Ainda segundo Mattos [13], eles podem ter problemas na sua vida acadêmica (em geral as queixas começam na escola, mas isso não é obrigatório), bem como nas suas vidas profissional, social e familiar. Segundo a Associação Médica Americana, o TDAH é um dos transtornos mais bem estudados na medicina e os dados gerais sobre sua validade são muito mais convincentes que a maioria dos transtornos mentais e até mesmo que muitas condições médicas.

Segundo Saboya et al. [14], são numerosas as manifestações de comprometimento do TDAH, envolvendo a vida social, familiar, afetiva, conjugal, acadêmica e profissional. Subjacentes a esse elenco de impactos funcionais negativos, algumas dificuldades cognitivas pontuais podem também estar presentes, em especial as alterações das funções executivas.

Segundo Verdejo-Garcia e Bechara [15], as funções executivas são um conjunto de habilidades implicadas na geração, supervisão, regulação, execução e no ajuste de condutas adequadas para alcançar objetivos complexos, especialmente aqueles que requerem uma abordagem nova e criativa. Os objetivos abordados pelas funções executivas podem ser tanto de natureza cognitiva como de índole sócio-emocional e requerem ter em conta tanto as consequências imediatas como os resultados a médio e longo prazo das condutas selecionadas. Através de pacientes com lesões que afetam o córtex frontal (veja a Figura 3.1), verificou-se que essa região é o principal substrato neuroanatômico destas habilidades. Porém, no contexto da diversidade funcional do córtex frontal se abre um debate crucial sobre a natureza das funções executivas: se elas constituem um construto unitário ou se elas são um sistema de processamento múltiplo com distintos componentes independentes ainda que inter-relacionados. Atualmente, o debate se inclina mais para segunda hipótese [15]. Porém quais são e como se organizam os processos que formam as funções executivas? A esse respeito, a evidência empírica vem de duas aproximações metodológicas: o estudo neuropsicológico de pacientes com lesões focais em distintas regiões do lobo frontal e a análise fatorial dos testes neuropsicológicos que medem funções executivas [14].

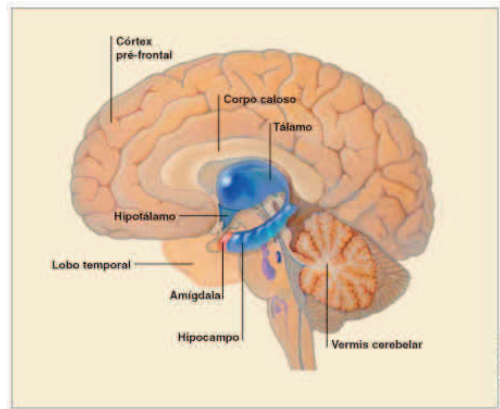


Figura 3.1: O cérebro.

Veja na Figura 3.2 um detalhamento do córtex pré-frontal onde foram utilizadas diferentes cores para separar o que é córtex pré-frontal, sistema límbico e áreas motora e pré-motora - essas duas últimas fazem parte do lobo frontal, mas não entram na área pré-frontal, sendo também menos importantes para as funções executivas.

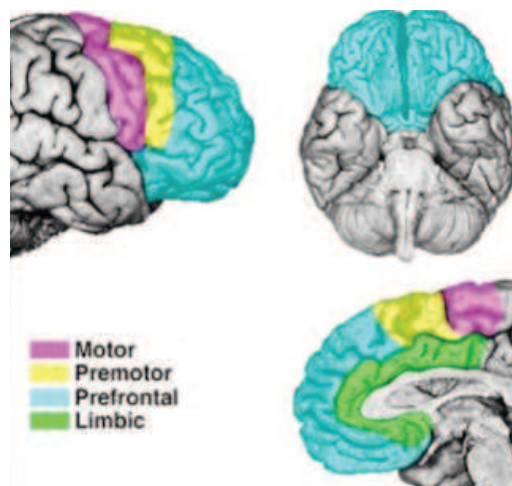


Figura 3.2: Detalhamento do lobo frontal.

Embora a presença de déficits de funções executivas seja frequentemente encontrada em pessoas que têm o TDAH, tais déficits não são necessários nem suficientes para prever a presença do transtorno. No entanto, o comprometimento funcional é mais grave em pessoas que têm o TDAH com disfunção executiva do que naqueles sem disfunção executiva [14]. A validade clínica do comprometimento dos principais âmbitos da vida no TDAH tem sido bastante investigada. Por associar-se a manifestações objetivas, como notas baixas e queixas de comportamento na escola, perda

de objetos, acidentes e traumas, esse tipo de comprometimento funcional é frequentemente reconhecido pelo avaliador, familiares, pessoas do convívio e pelo próprio paciente. No entanto, sua ocorrência deve ser ativamente investigada por meio de entrevista clínica e instrumentos complementares, como escalas de avaliação e testes neuropsicológicos. Desta forma, o comprometimento neuropsicológico do TDAH - e sua validade ecológica - figura como um aspecto importante a ser pesquisado mais detalhadamente [14]. O exame neuropsicológico de quem tem o TDAH traz alguns benefícios ao processo diagnóstico, apesar de não ser necessário para este, podendo ajudar o clínico em três questões fundamentais:

1. corroborar o diagnóstico;
2. buscar explicações alternativas para os sintomas apresentados;
3. identificar condições comórbidas¹ importantes de serem tratadas.

As funções executivas podem ser divididas entre quatro subconjuntos: **volição**, planejamento, ação intencional e o desempenho efetivo. A **volição** é a capacidade de estabelecer objetivos. Para essa formulação intencional, é necessária a motivação e consciência de si e do ambiente. O **planejamento** é a capacidade de organizar e prever ações para atingir um objetivo. A habilidade de planejar requer capacidade de tomar decisões, desenvolver estratégias, estabelecer prioridades e controlar impulsos. A **ação intencional** é a efetivação de um objetivo e planejamento, gerando uma ação produtiva. Para isso, é necessário que se inicie, mantenha, modifique ou interrompa um conjunto complexo de ações e atitudes integrada e organizada. O **desempenho efetivo** é a capacidade de automonitorar, auto-dirigir e auto-regular a intensidade, o ritmo e outros aspectos qualitativos do comportamento e da ação, ou seja, é um controle funcional.

A síndrome disexecutiva é caracterizada pela incapacidade das funções executivas em processar e elaborar ações adaptadas. Essa disfunção pode se apresentar com uma ou várias dificuldades práticas que impactam o cotidiano, como comprometimento da atenção sustentada, dificuldade em iniciar tarefas, empobrecimento

¹Comorbidade - A presença de doença(s), além da doença em estudo, que pode(m) alterar o efeito de interesse no estudo.

da estimativa de tempo, dificuldade de alternar de uma tarefa para outra ou lidar concomitantemente com distintas tarefas que variam em grau de relevância e prioridade, déficits no controle de impulsos e impaciência, problemas de planejamento, distração, pouco *insight*, inquietação, agressividade, problemas de sequência cronológica, problemas de inibição de resposta e labilidade² motivacional [14].

Vários testes vêm sendo utilizados como medidas neuropsicológicas, sobretudo para identificação da síndrome disexecutiva, dentre esses testes, temos o Teste da Torre de Hanói, Torre de Londres, de Stroop, Labirintos (*Mazes*), Dígitos e Códigos (WISC-III), entre outros. O mesmo teste (ou testes baseados no mesmo princípio) podem medir funções diferentes. A seguir, mostraremos alguns deste testes.

3.3 Alguns testes neuropsicológicos das funções executivas

Teste de Seleção de Cartas de Wisconsin (WCST)

O Teste de Classificação de Cartas de Wisconsin (WCST- Wisconsin) tem como objetivo avaliar o raciocínio abstrato e a habilidade para trocar estratégias cognitivas como resposta a eventuais modificações ambientais. Pode ser considerada uma medida da função executiva, que requer habilidade para desenvolver e manter estratégias de solução de problemas que implicam trocas de estímulos. O WCST frequentemente é utilizado como teste do funcionamento frontal e pré-frontal. Desta maneira, qualquer alteração ou sintoma psicológico que desorganize as Funções Executivas total ou em parte se torna sensível a este instrumento de avaliação. Veja um exemplo na Figura 3.3.

²Instabilidade emocional; tendência de passar alternadamente e com certa frequência por estados de alegria e de melancolia.

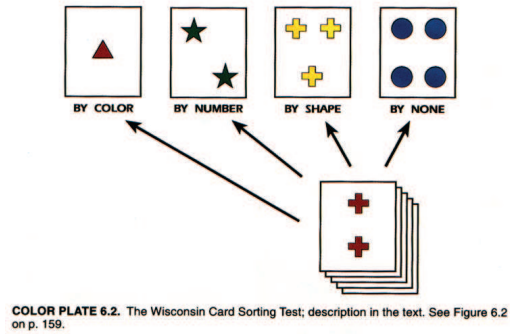


Figura 3.3: Teste de Seleção de Cartas de Winsconsin.

Testes da Torre de Hanói e Torre de Londres

A Torre de Hanói (TOH) é um instrumento neuropsicológico no qual o sujeito determina a ordem de movimentos necessários para colocar quatro cilindros coloridos de acordo com a posição inicial. As condições para a realização dos movimentos são de mover os cilindros um de cada vez, e não pode ter um cilindro em cima do outro em tamanho menor. Veja um exemplo na Figura 3.4.

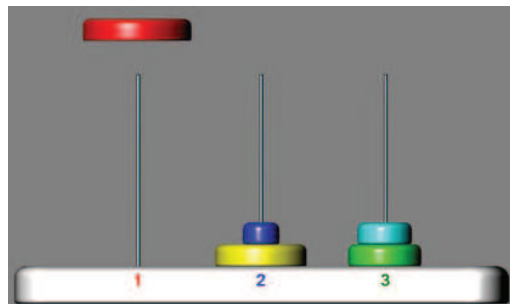


Figura 3.4: Teste da Torre de Hanói.

A Torre de Londres (TOL) envolve a transposição de três esferas de cores diferentes (vermelha, azul, e verde), a partir de uma posição fixa, de largada (*start position*), para 12 posições-alvo (*goal states*). As esferas são manipuladas, uma a uma, por três hastes verticais de comprimentos diferentes afixadas à base, de modo que a mais curta sustenta apenas uma esfera e a mais longa até três esferas (veja a Figura 3.5). Segundo Souza et al. [17], ao sujeito cabe reproduzir as configurações-alvo com o número mínimo de ações, o que lhe é dito de antemão, movendo uma esfera de cada vez. Uma resposta correta significa que a solução foi alcançada com o número mínimo de ações.

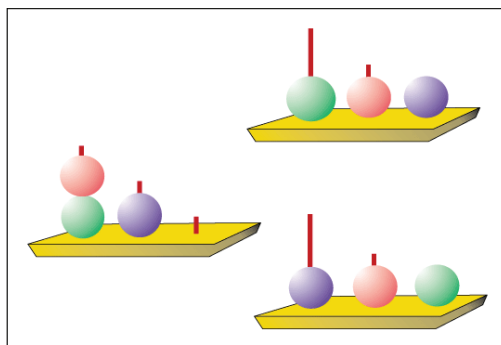
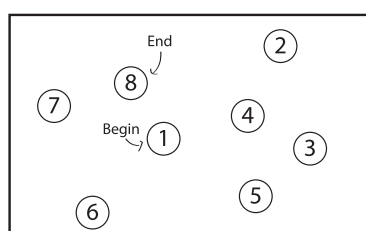


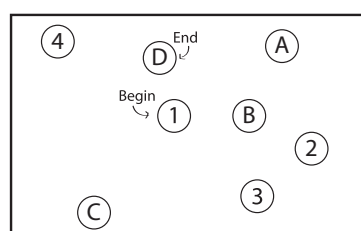
Figura 3.5: Teste da Torre de Londres.

Teste das trilhas (A e B)

O Teste das trilhas é aplicado nas formas A e B. Em ambas é apresentado um treino curto. Na forma A, o treino consiste em 8 círculos com números cardinais. O teste, em si, possui 25 círculos, numerados de 1 a 25, distribuídos ao acaso, que devem ser unidos em uma linha contínua, ou seja, sem o examinado tirar o lápis do papel. Ou seja, deve-se pedir ao examinado que ligue os números na ordem crescente sem tirar o lápis do papel. Na forma B, 13 números e 12 letras devem ser unidos alternadamente (1-A; 2-B, etc). A forma B também possui um treino que tem início com 1-A e segue até 4-B, ou seja, é pedido ao examinado que faça os pares número e letra, seguindo a sequência. É relevante que ambos os testes tenham as indicações de início e fim nos círculos correspondentes. O teste é encerrado após 3 erros ou cinco minutos. Veja a Figura 3.6.



(a) Teste das trilhas A



(b) Teste das trilhas B

Figura 3.6: Teste das trilhas A e B.

Teste de Stroop

Stroop Color-World Test (SCWT), mais conhecido pelos psicólogos como teste de Stroop surgiu nos Estados Unidos na década de 1930, desenvolvido pelo norte-

americano John Ridley Stroop, e é considerado um teste padrão na avaliação neuropsicológica. Um dos modelos do teste consiste na apresentação ao paciente de uma cartela que possui pequenos retângulos com cores variadas, como azul, preto, vermelho e verde, por exemplo. A pessoa tem de dizer ao avaliador, o mais rápido possível, as cores que ele vê nos retângulos. Em seguida, uma outra cartela apresenta palavras escritas, como azul, preto, verde e vermelho. A diferença é que as palavras são grafadas com cores diferentes de seu significado, ou seja, a palavra 'verde' pode estar escrita com letras azuis; a 'vermelha', com letras pretas, e a palavra 'azul', com letras verdes. Veja um exemplo na Figura 3.7. O objetivo é avaliar a atenção seletiva, a capacidade de manter a meta em uma atividade e inibir a tendência de fornecer respostas impulsivas, além da velocidade no processamento de informações. Embora seja pouco sensível, o teste ainda é muito usado.



Figura 3.7: Teste de Stroop.

A Figura 3.8 apresenta um estudo com o paradigma de Stroop demonstrando que, enquanto o grupo controle ativava regiões do córtex cingulado anterior, as pessoas com o TDAH ativavam outras regiões inesperadas, como a região da ínsula.

Dorsal Anterior Cingulate Cortex* Fails to Activate in ADHD

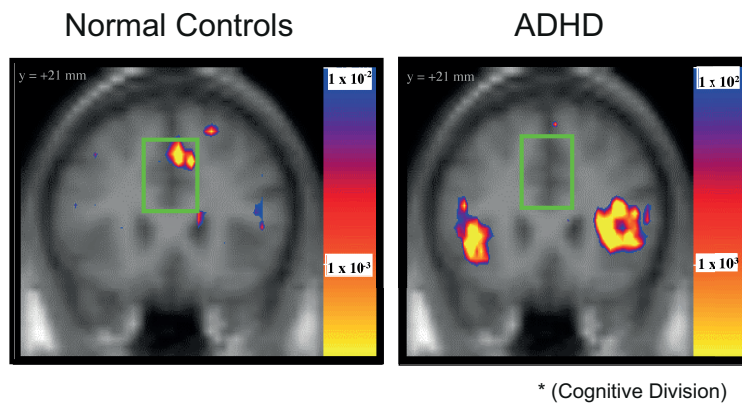


Figura 3.8: Foto de área ativada.

A questão primordial quanto aos testes de habilidade executiva está no fato de que muitas das vezes estes testes não são capazes de captar as disfunções existentes, devido à natureza extremamente complexa destas habilidades executivas (planejamento, tomada de decisão, ação produtiva, auto-regulação, entre outros). Por isso, há a necessidade de introduzir testes mais sofisticados e complexos para a detecção de disfunções no âmbito destas habilidades. É nesse sentido que introduzimos o jogo Clobber como uma possível alternativa aos testes tradicionais mencionados anteriormente, onde acreditamos, possa auxiliar no diagnóstico do TDAH, bem como nos transtornos relacionados a habilidades executivas. O objetivo da escolha do jogo Clobber se deve ao fato de inserirmos um novo teste neuropsicológico e de verificarmos se os resultados teóricos obtidos eram percebidos de forma intuitiva pelos indivíduos.

Capítulo 4

Clobber em Grafos¹

O Impartial Solitaire Clobber (ISC), nesta tese chamado de Clobber, é um jogo realizado com somente um jogador, e as regras são as seguintes: dado um grafo $G = (V, E)$, para cada vértice $v \in V$, posicionamos uma pedra preta ou branca. Um movimento consiste em pegar uma pedra de qualquer cor localizada em um vértice v e “comer” uma outra da cor oposta, localizada em um vértice adjacente a v , ocupando o seu lugar. O vértice v é então removido do grafo. O jogador não é obrigado a alternar jogadas com pedras brancas e pretas, e o jogo termina quando ele não consegue mais se movimentar, isto é, não é possível comer mais pedras. O objetivo do jogo é minimizar o número de pedras que restam no grafo. Na Figura 4.1 apresentamos um exemplo do jogo Clobber, onde o número nas setas representa a ordem do movimento. Por conveniência, durante esta tese, podemos frequentemente dizer que “o vértice v_1 come o vértice v_2 ”, ao invés de falar de suas correspondentes pedras.

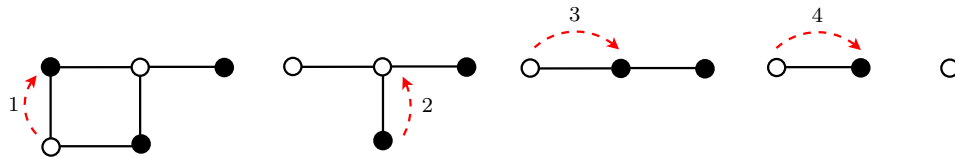


Figura 4.1: Um exemplo do jogo Clobber.

Definimos Φ uma **configuração** de um grafo $G = (V, E)$ como um mapeamento $\Phi : V \rightarrow \{\bullet, \circ\}$. Uma configuração Φ de G é dita **monocromática** se cada

¹Resultados publicados em [18].

vértice de G recebe a mesma cor, i.e., $\Phi(v) = \circ$ (resp. $\Phi(v) = \bullet$) para cada $v \in V$. Caso contrário, Φ é **não-monocromática**. Por exemplo, a configuração **checkerboard** (ou **alternada**) $\circ\bullet\circ\bullet\circ\bullet\circ\bullet$ é uma configuração não monocromática. Se existir uma sucessão de movimentos que deixe no máximo k pedras no grafo, dizemos que (G, Φ) é k -**reduzível**. O **valor de reducibilidade** $rv(G, \Phi)$ é o menor inteiro k para o qual (G, Φ) é k -reduzível. Dada uma configuração Φ , a configuração complementar $\bar{\Phi}$ é obtida da seguinte forma: para todo $v \in V$, se $\Phi(v) = \circ$ (respectivamente $\Phi(v) = \bullet$) então $\bar{\Phi}(v) = \bullet$ (respectivamente $\bar{\Phi}(v) = \circ$). Veja um exemplo na Figura 4.2. Verificamos claramente que (G, Φ) é k -reduzível se, e somente se, $(G, \bar{\Phi})$ é k -reduzível. Consequentemente, os resultados encontrados para (G, Φ) se aplicam a entrada $(G, \bar{\Phi})$.

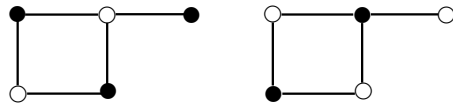


Figura 4.2: Uma configuração Φ e sua complementar $\bar{\Phi}$.

A seguir, mostramos a prova apresentada em [19] de que o PROBLEMA CLOBBER é um problema NP-completo. Esta prova consiste na redução do problema de decisão CAMINHO HAMILTONIANO ao PROBLEMA CLOBBER. Estes dois problemas são apresentados abaixo:

PROBLEMA CAMINHO HAMILTONIANO

Instância: um grafo $G = (V, E)$

Questão: G contém um caminho Hamiltoniano?

PROBLEMA CLOBBER - ISC

Instância: (G, Φ) , onde G é um grafo e Φ é um mapeamento $\Phi : V \rightarrow \{\bullet, \circ\}$ dos vértices de G que atribui a cada vértice uma pedra preta ou branca

Questão: (G, Φ) é 1-reduzível?

De forma a reduzir o PROBLEMA CAMINHO HAMILTONIANO ao PROBLEMA CLOBBER, precisamos construir, em tempo polinomial, uma instância particular (G, Φ) do PROBLEMA CLOBBER a partir de uma instância genérica $G' = (V', E')$

do PROBLEMA CAMINHO HAMILTONIANO. Seja (G, Φ) a instância particular do PROBLEMA CLOBBER tal que $G = G'$ e $\Phi(v) = \bullet$, para algum vértice $v \in V(G)$, e $\Phi(u) = \circ$, para todo $u \in V(G) \setminus \{v\}$. Essa configuração é claramente 1-reduzível se e somente se existe um caminho Hamiltoniano entre o vértice v e algum outro vértice de $V(G)$. Como o PROBLEMA DE CAMINHO HAMILTONIANO foi provado ser NP-Completo para grafos em geral [7], e em particular para grafos grade (i.e., subgrafos induzidos da grade) [20], o PROBLEMA CLOBBER é um problema NP-completo considerando estes grafos.

O Clobber vem sendo investigado por vários autores [4, 10, 19, 21, 22]. Demaine et al. [4] estudaram o Clobber em grades retangulares com configurações alternadas. Algumas questões extremas foram investigadas por Blondel et al. [22], por exemplo, dado um grafo G , qual o valor máximo de $rv(G, \Phi)$ dentre todas as configurações não-monocromáticas? Os autores provaram que para um caminho (respectivamente para um ciclo) de tamanho n , este valor é $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ (respectivamente $\lceil \frac{n}{3} \rceil$) [22]. O valor de reducibilidade de qualquer configuração em um caminho ou em um ciclo de tamanho n pode ser computado em tempo linear $O(n)$ [22], já em uma árvore, existe um algoritmo com complexidade $O(n^3)$ [21]. Em [10], Dorbec et al. provaram que qualquer configuração em um grafo *Hamming* é 1-reduzível, exceto para hipercubos que são 2-reduzíveis.

Neste capítulo, mostramos que o jogo Clobber com uma configuração não-monocromática Φ pode ser reduzido a uma única pedra, quando G é uma potência de caminho P_n^r , $r \geq 3$; quando G é uma potência de ciclo C_n^r , $r \geq 2$; e também quando G pertence a algumas subclasses de grafos circulantes. Além disso, provamos que, considerando-se $r = 2$, (P_n^r, Φ) é 2-reduzível.

4.1 Clobber em potências de caminho e algumas classes de grafos circulantes

Seja Φ uma configuração não-monocromática. Os resultados a seguir, Lemas 3 e 5, estabelecem que (P_n^2, Φ) é 2-reduzível. Em ambos os lemas, consideramos $n \geq 4$. O caso não-monocromático onde $n = 2$ é trivial e os casos não-monocromáticos onde $n = 3$ são apresentados na Figura 4.3. Em todos os resultados, consideramos

$0, 1, \dots, n-1$ como a ordem da esquerda para direita dos rótulos dos vértices de P_n^r , $r \geq 2$.

Lema 3. *Seja Φ uma configuração não-monocromática de P_n^2 , onde os quatro primeiros vértices são não-monocromáticos, então (P_n^2, Φ) é 1-reduzível.*

Demonstração. Seja Φ uma configuração de P_n^2 tal que os quatro primeiros vértices sejam não-monocromáticos, isto é, $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3)$ é diferente de $\circ\circ\circ\circ$ e $\bullet\bullet\bullet\bullet$. Provaremos, por indução em n , que (P_n^2, Φ) é 1-reduzível. Se $n \leq 2$, então vemos claramente que o Lema 3 é verdadeiro. A partir de agora faremos referência à Figura 4.3, onde x representa um vértice já removido do grafo após uma jogada e o número nas setas indica a ordem do movimento.

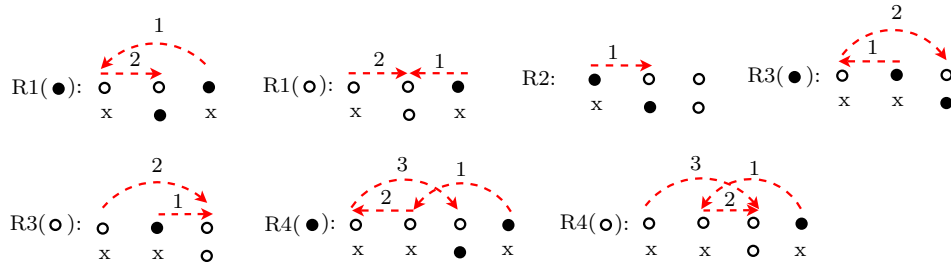


Figura 4.3: Regras para jogar nos vértices iniciais.

Primeiramente, vamos assumir $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2) = \bullet\circ\circ$. Aplicamos a regra $R2$. Este movimento leva a uma configuração Φ' em P_{n-1}^2 que satisfaz $\Phi'(0) \neq \Phi'(1)$ e concluímos pela hipótese de indução. Agora vamos assumir que $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2) = \circ\bullet\circ$. Se $\Phi(3) = \bullet$, então aplicamos $R3(\circ)$. Caso contrário, se $\Phi(3) = \circ$, aplicamos $R3(\bullet)$. Em ambos os casos, concluímos pela hipótese de indução.

Agora considere $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2) = \circ\circ\bullet$. Seja $n \geq 7$. Suponha que $\Phi(3) = \bullet$. Se $\Phi(4)\Phi(5)\Phi(6) \neq \circ\circ\circ$, então aplique $R1(\circ)$. Mova a pedra do vértice 1 para o vértice 3 e aplique a hipótese de indução. Se $\Phi(4)\Phi(5)\Phi(6) = \circ\circ\circ$, então aplique $R1(\bullet)$. Mova a pedra do vértice 4 para o vértice 3. Mova a pedra do vértice 1 para o vértice 3, do 3 para o 5 e concluímos pela hipótese de indução. A solução para os casos onde $n = 4$, $n = 5$ e $n = 6$ é apresentada nas Figuras 4.4 e 4.5.

Agora suponha $\Phi(3) = \circ$. Se $\Phi(4)\Phi(5)\Phi(6) \neq \bullet\bullet\bullet$, então aplique $R1(\bullet)$. Mova a pedra do vértice 1 para o vértice 3 e aplique a hipótese de indução. Se $\Phi(4)\Phi(5)\Phi(6) = \bullet\bullet\bullet$, então aplique $R1(\circ)$. Mova a pedra do vértice 4 para o vértice 3. Mova a pedra do vértice 1 para o vértice 3, do 3 para o 5 e concluímos novamente

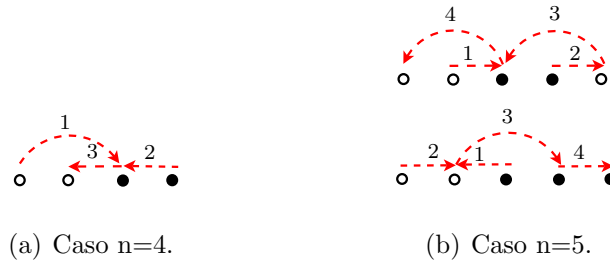


Figura 4.4: Casos $n = 4$ e $n = 5$ com $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3) = \circ \circ \bullet \bullet$.

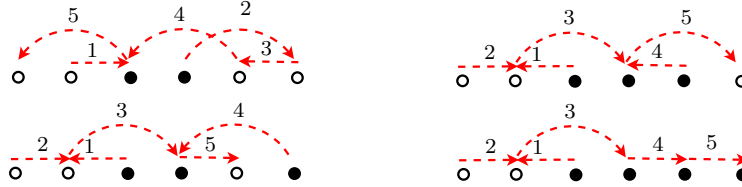


Figura 4.5: Casos $n = 6$ com $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3) = \circ \circ \bullet \bullet$.

pela hipótese de indução. Os casos onde $n = 4$, $n = 5$ e $n = 6$ são apresentados nas Figuras 4.6 e 4.7.

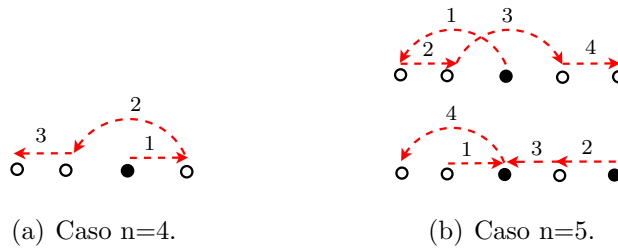


Figura 4.6: Casos $n = 4$ e $n = 5$ com $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3) = \circ \circ \bullet \circ$.

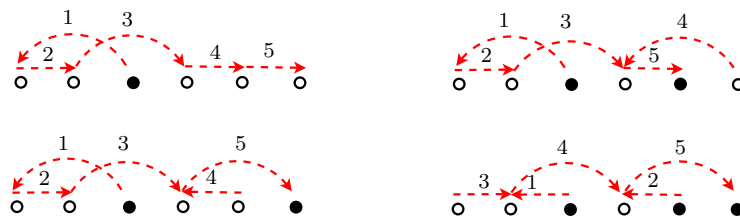


Figura 4.7: Casos $n = 6$ com $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3) = \circ \circ \bullet \circ$.

Finalmente, assumamos $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2) = \circ \circ \circ$. Por hipótese, temos $\Phi(3) = \bullet$. Seja $n \geq 8$. Suponha que $\Phi(4) = \circ$. Se $\Phi(5)\Phi(6)\Phi(7) \neq \bullet \bullet \bullet$, então aplique $R4(\bullet)$. Mova a pedra do vértice 2 para o 4 e aplicamos a hipótese de indução. Se $\Phi(5)\Phi(6)\Phi(7) = \bullet \bullet \bullet$, então aplique $R4(\circ)$. Mova a pedra do vértice 5 para o vértice 4. Mova a pedra do vértice 2 para o 4 e do 4 para o 6, e conclua pela aplicação da hipótese de indução. Os casos onde $n = 5$, $n = 6$ e $n = 7$ são apresentados na Figuras 4.8 e 4.9.

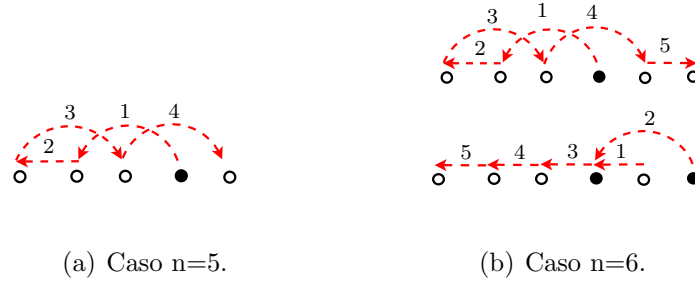


Figura 4.8: Casos $n = 5$ e $n = 6$ com $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3)\Phi(4) = \circ \circ \circ \bullet \circ$.

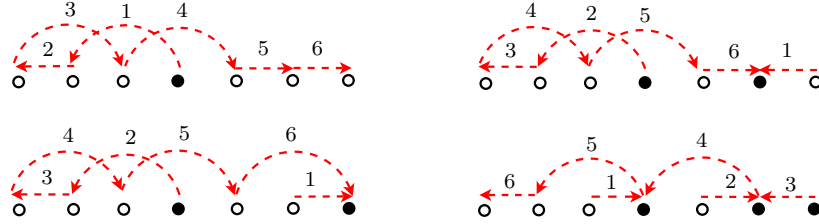


Figura 4.9: Casos $n = 7$ com $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3)\Phi(4) = \circ \circ \circ \bullet \circ$.

Agora suponha $\Phi(4) = \bullet$. Se $\Phi(5)\Phi(6)\Phi(7) \neq \circ \circ \circ$, então aplique $R4(\circ)$. Mova a pedra do vértice 2 para o vértice 4 e aplicamos a hipótese de indução. Se $\Phi(5)\Phi(6)\Phi(7) = \circ \circ \circ$, então aplique $R4(\bullet)$. Mova a pedra do vértice 5 para o vértice 4. Mova a pedra do vértice 2 para o vértice 4 e do 4 para o 6, e aplicamos a hipótese de indução. Finalizamos a prova verificando os casos onde $n = 5$, $n = 6$ e $n = 7$ representados nas Figuras 4.10 e 4.11. \square

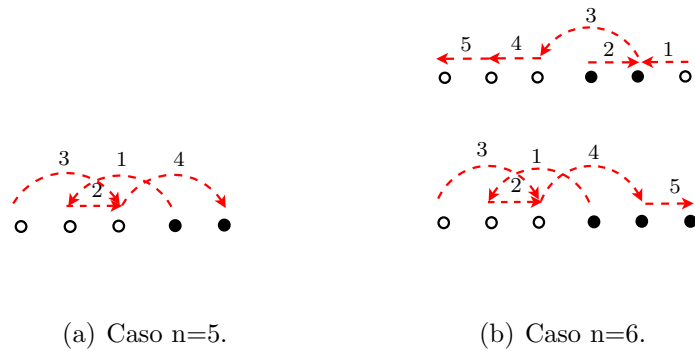


Figura 4.10: Casos $n = 5$ e $n = 6$ com $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3)\Phi(4) = \circ \circ \circ \bullet \bullet$.

Como as potências de caminho P_n^r são subgrafos geradores das potências de ciclo C_n^r , $r \geq 2$, então, dada uma configuração não-monocromática Φ de C_n^r , é sempre possível encontrar um subgrafo P_n^2 em C_n^r , $r \geq 2$, cuja configuração possui os quatro primeiros vértices são não-monocromáticos. Aplicando o Lema 3, concluímos que todas as potências de ciclo C_n^r , $r \geq 2$, são 1-redutíveis. O Corolário 4 a seguir

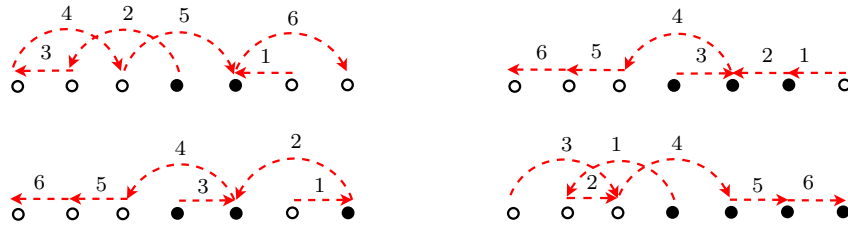


Figura 4.11: Casos $n = 7$ com $\Phi(0)\Phi(1)\Phi(2)\Phi(3)\Phi(4) = \circ \circ \circ \bullet \bullet$.

estende este resultado para uma subclasse de grafos circulantes.

Corolário 4. *Seja Φ uma configuração não-monocromática de $G = C(n, A)$, $\{1, 2\} \subseteq A$, então (G, Φ) é 1-redutível.*

□

O mesmo argumento não é válido para potências de caminho com configurações não-monocromáticas onde os quatro primeiros vértices são monocromáticos. De fato, (P_n^2, Φ) não é sempre 1-redutível. Veja, por exemplo, o grafo P_{10}^2 com configuração $\bullet \bullet \bullet \bullet \circ \circ \circ \circ \circ \circ$. Pelo Lema 3, resolvemos todos os casos da Tabela 4.1 com exceção das linhas 1 e 16. Estes casos foram estudados no Lema 5 a seguir.

Casos	$\Phi(0)$	$\Phi(1)$	$\Phi(2)$	$\Phi(3)$
1	○	○	○	○
2	○	○	○	●
3	○	○	●	○
4	○	○	●	●
5	○	●	○	○
6	○	●	○	●
7	○	●	●	○
8	○	●	●	●
9	●	○	○	○
10	●	○	○	●
11	●	○	●	○
12	●	○	●	●
13	●	●	○	○
14	●	●	○	●
15	●	●	●	○
16	●	●	●	●

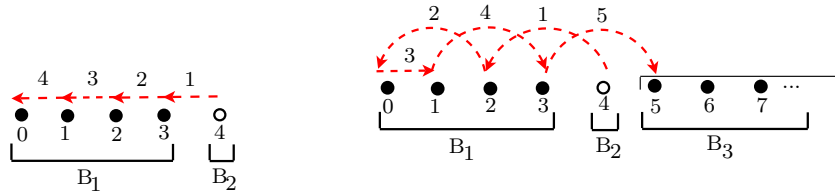
Tabela 4.1: Tabela com as possibilidades de Φ .

Lema 5. *Seja Φ uma configuração não-monocromática de P_n^2 , onde os quatro primeiros vértices são monocromáticos, então (P_n^2, Φ) é 2-redutível.*

Demonstração. Seja Φ de uma configuração de P_n^r composta por quatro blocos monocromáticos maximais B_1, B_2, B_3 e B_4 tal que $|B_1| \geq 4$ e $|B_i| \geq 0$, para $i \in \{2, 3, 4\}$. Sem perda de generalidade, assumimos que $\Phi(v) = \bullet$, para todo $v \in B_1 \cup B_3$; e $\Phi(u) = \circ$, para todo $u \in B_2 \cup B_4$. A partir de agora, faremos referência às Figuras 4.12 a 4.18. Representamos por $(v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow v_3 \rightarrow \dots \rightarrow v_{i-1} \rightarrow v_i)$ a sequência de movimentos (jogada) da pedra do vértice v_1 para o vértice v_2 , do v_2 para o v_3, \dots , do vértice v_{i-1} para o vértice v_i . Nesta demonstração consideraremos $|B_1| = 4$. O caso $|B_1| > 4$ é análogo.

Propriedade 6. *Se $|B_2| = 1$ então (P_n^2, Φ) é 1-redutível.*

Demonstração da Propriedade: Seja $|B_2| = 1$. Se $|B_3| = 0$ (i.e. $n = 5$), então mova a pedra branca de B_2 de forma a comer todas as pedras de B_1 para a esquerda até o vértice 0 (veja Figura 4.12(a)). Observamos que se $|B_3| = 0$, então $|B_4| = 0$, pois B_2 é um bloco monocromático maximal. Se $|B_3| \geq 2$, então temos a seguinte jogada: $(4 \rightarrow 2 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5)$. Encontramos uma configuração Φ' onde os quatro primeiros vértices são não-monocromáticos e concluímos pela aplicação do Lema 3 no grafo restante (veja Figura 4.12(b)).



(a) $|B_3| = 0$.

(b) $|B_3| \geq 2$.

Figura 4.12: Casos $|B_2| = 1$ para P_n^2 .

Agora considere $|B_3| = 1$. Se $|B_4| = 0$ (i.e. $n = 6$), então mostramos que P_n^2 é 1-redutível através da seguinte jogada: $(4 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0)$. Veja Figura 4.13(a). Se $|B_4| = 1$, então realize as seguintes jogadas $(6 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2)$ e $(0 \rightarrow 2 \rightarrow 4)$, representadas na Figura 4.13(b). Se $|B_4| > 1$, então as jogadas serão: $(7 \rightarrow 5 \rightarrow 3 \rightarrow 1 \rightarrow 2)$ e $(0 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8)$. Encontramos uma configuração Φ' onde os quatro primeiros vértices são não-monocromáticos e concluímos

pela aplicação do Lema 3 no grafo restante (veja Figura 4.13(c)). □

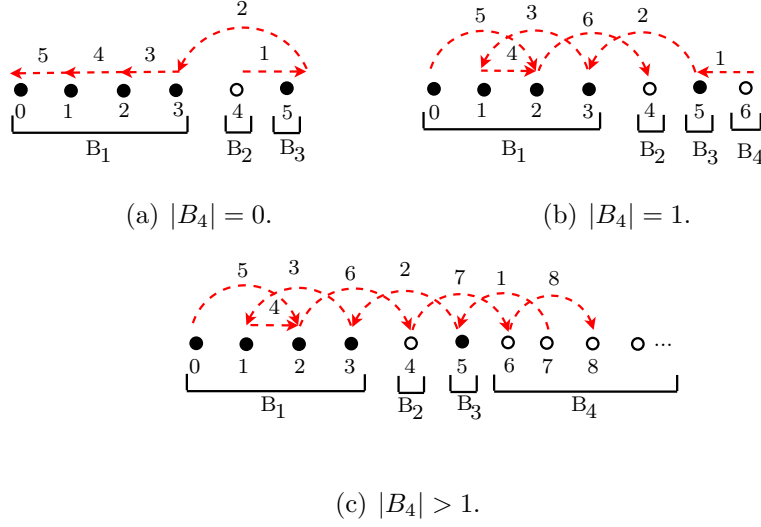


Figura 4.13: Casos $|B_2| = 1$ e $|B_3| = 1$ para P_n^2 .

Propriedade 7. Se $|B_2| = 2$ e $|B_3| \neq 1, 2$ então (P_n^2, Φ) é 1-redutível.

Demonstração da Propriedade: Seja $|B_2| = 2$. Se $|B_3| = 0$ (i.e. $n = 6$), então temos as seguintes jogadas: $(3 \rightarrow 4)$ e $(5 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0)$. Veja a Figura 4.14(a). Se $|B_3| > 2$, então temos a seguinte jogada: $(7 \rightarrow 6)$ e $(5 \rightarrow 3 \rightarrow 0 \rightarrow 1 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 8)$. Encontramos uma configuração Φ' onde os quatro primeiros vértices são não-monocromáticos e concluímos pela aplicação do Lema 3 no grafo restante (veja Figura 4.14(b)). □

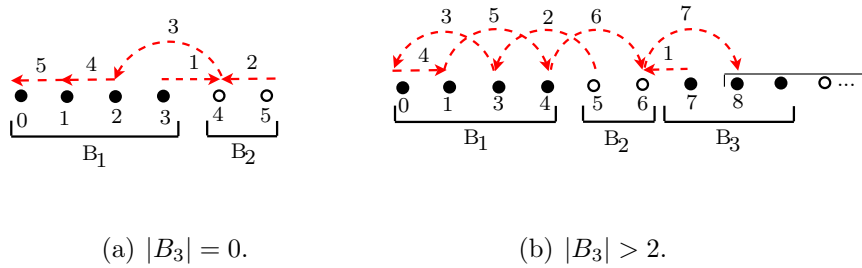


Figura 4.14: Casos $|B_2| = 2$ para P_n^2 .

Propriedade 8. Se $|B_2| = 2$ e ($|B_3| = 1$ ou $|B_3| = 2$) então (P_n^2, Φ) é 2-redutível.

Demonstração da Propriedade: Seja $|B_2| = 2$. Considere o grafo P_n^2 e a seguinte jogada: $(3 \rightarrow 4)$ e $(5 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0)$. Se $|B_3| = 1$ ou $|B_3| = 2$, a partir do vértice 6, encontramos um configuração Φ' onde os quatro primeiros vértices são

não-monocromáticos e concluímos pela aplicação do Lema 3 no grafo restante, a partir do vértice 6 (veja Figura 4.15). \square

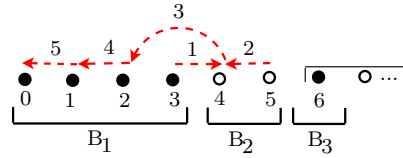


Figura 4.15: Caso $|B_2| = 2$ e ($|B_3| = 1$ ou $|B_3| = 2$) para P_n^2 .

Propriedade 9. *Se $|B_2| > 2$ então (P_n^2, Φ) é 2-redutível.*

Demonstração da Propriedade: Considere as seguintes jogadas: $(4 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 0)$ e $(3 \rightarrow 5)$. Visto que $|B_2| > 2$, a partir do vértice 5, encontramos uma configuração Φ' onde os quatro primeiros vértices são não-monocromáticos e concluímos pela aplicação do Lema 3 no grafo restante, a partir do vértice 5 (veja Figura 4.16).

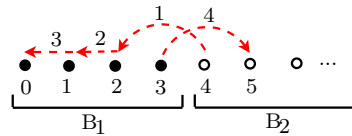


Figura 4.16: Caso $|B_2| > 2$ para P_n^2 .

Isso conclui a prova do Lema 5. \square

Teorema 10. *Seja Φ uma configuração de P_n^r , $r \geq 3$, (P_n^r, Φ) é 1-redutível.*

Visto que P_n^2 é um subgrafo de P_n^r , $r \geq 3$, então quando os quatro primeiros vértices são não monocromáticos, pelo Lema 3, P_n^r , $r \geq 3$ é 1-redutível. Pelo Lema 5, os únicos casos que precisamos analisar são os encontrados nas Propriedades 8 e 9, que tratamos a seguir.

Considere a configuração da Propriedade 8 ($|B_1| \geq 4$, $|B_2| = 2$ e ($|B_3| = 1$ ou $|B_3| = 2$)), e as seguintes jogadas: $(4 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 2)$, $(3 \rightarrow 5)$ e $(2 \rightarrow 5)$. Como $|B_3| = 1$ ou $|B_3| = 2$, a partir do vértice 5, encontramos uma configuração Φ' onde os quatro primeiros vértices são não-monocromáticos e concluímos pela aplicação do Lema 3 no grafo restante (veja Figura 4.17).

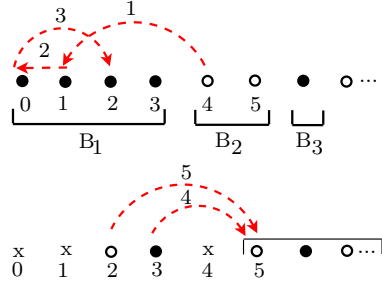


Figura 4.17: Caso $|B_2| = 2$ e ($|B_3| = 1$ ou $|B_3| = 2$) para P_n^r , $r \geq 3$.

Considere a configuração da Propriedade 9 ($|B_1| \geq 4$ e $|B_2| > 2$), e as seguintes jogadas: $(4 \rightarrow 1 \rightarrow 0 \rightarrow 2)$ e $(3 \rightarrow 2 \rightarrow 5)$. A partir do vértice 5, encontramos uma configuração Φ' onde os quatro primeiros vértices são não-monocromáticos e concluímos pela aplicação do Lema 3 no grafo restante (veja Figura 4.18). \square

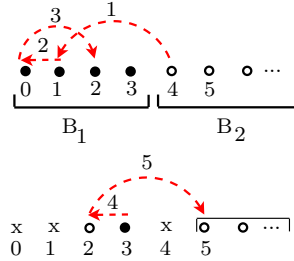


Figura 4.18: Caso $|B_2| > 2$ para P_n^r , $r \geq 3$.

O próximo resultado baseia-se na propriedade de grafos circulantes apresentada no Lema 1.

Teorema 11. *Seja Φ uma configuração não-monocromática do grafo circulante $G = C(n, A)$ com $\{d, 2d\} \subseteq A$ e $\gcd(n, d) = 1$, então (G, Φ) é 1-redutível.*

Demonstração. Visto que $\gcd(n, d) = 1$, pelo Lema 1, G é composto de apenas uma componente conexa e vamos mostrar que $G = C_n^2$. Considere uma nova enumeração dos vértices de $C(n, A)$ tal que todo vértice que estiver a distância d em G estará a distância 1 no novo grafo e todo vértice que estiver a distância $2d$ em G , estará a distância 2 no novo grafo. Portanto, todo $C(n, \{d, 2d\})$ com $\gcd(n, d) = 1$ é isomorfo a $C(n, \{1, 2\})$. Agora vamos considerar dois vértices adjacentes x_i, x_{i+1} de $C(n, \{1, 2\})$ tal que $\Phi(x_i) \neq \Phi(x_{i+1})$ e vamos cortar $C(n, \{1, 2\})$ ao longo da aresta $x_{i-1}x_i$ de forma a obter um subgrafo P_n^2 , cuja configuração contém os quatro primeiros vértices não-monocromáticos $x_i x_{i+1} x_{i+2} x_{i+3}$. Concluímos a prova pela aplicação do Lema 3. Veja um exemplo na Figura 4.19. \square

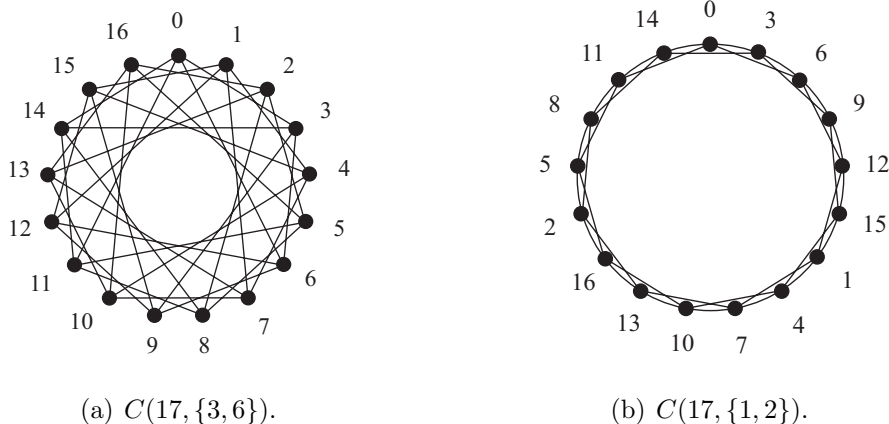


Figura 4.19: O grafo $C(17, \{3, 6\})$ é isomorfo ao $C(17, \{1, 2\})$.

Além disso, mostramos a seguir que existem configurações de grafos circulares que não são 1-redutíveis.

Seja G um grafo bipartido com bipartição (S_0, S_1) . Seja o conjunto S_0 (respectivamente S_1) definido como branco (respectivamente preto), e seja Φ uma configuração em G . Uma pedra de G é dita *conflitante* se sua cor difere da cor do conjunto a que pertence. Denotamos por $\delta(G, \Phi)$ o seguinte parâmetro:

$$\delta(G, \Phi) = \text{número de pedras} + \text{número de pedras conflitantes}$$

Demaine et al. [4] mostraram que $\delta(G, \Phi) \pmod 3$ nunca muda durante o jogo e provaram o seguinte teorema.

Teorema 12 (Demaine et al., 2004 [4]). *Se uma configuração Φ de um grafo bipartido G é tal que $\delta(G, \Phi) \equiv 0 \pmod 3$, então (G, Φ) não é 1-redutível.* \square

Isto implica que qualquer configuração Φ de um grafo bipartido G tal que (G, Φ) é 1-redutível satisfaz $\delta(G, \Phi) \not\equiv 0 \pmod 3$. Baseado em configurações alternadas e usando δ , provamos a seguinte proposição:

Proposição 13. *Seja $G = C(n, \{1, d\})$ um grafo circulante, com n par e d ímpar, então existem configurações não-monocromáticas Φ de G tais que (G, Φ) não é 1-redutível.*

Demonstração. Verificamos, pelo Teorema 2, que $G = C(n, \{1, d\})$, com n par e d , ímpar é bipartido. Dependendo do valor de n , mostramos que (G, Φ) não é 1-redutível.

- (i) Se $n = 6l$, $l > 0$, então, seja Φ uma configuração alternada. Neste caso, não temos pedras conflitantes, então $\delta(G, \Phi) = n$. Verificamos que $\delta(G, \Phi) \equiv 0 \pmod{3}$.
- (ii) Se $n = 6l + 2$, $l > 0$, então seja Φ' uma configuração definida por $\Phi'(i) = \Phi(i)$ para todo $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tal que $\Phi'(0) = \Phi(1)$. Neste caso, temos uma pedra conflitante. Logo, $\delta(G, \Phi') = n + 1 \equiv 0 \pmod{3}$. Veja um exemplo na Figura 4.20.
- (iii) Se $n = 6l + 4$, $l > 0$, então seja Φ' a configuração definida por $\Phi'(i) = \Phi(i)$ para todo $i \in \{2, \dots, n-1\}$ tal que $\Phi'(1) = \Phi(2)$ e $\Phi'(0) \neq \Phi(2)$. Agora temos duas pedras conflitantes. Portanto, $\delta(G, \Phi') = n + 2 \equiv 0 \pmod{3}$.

Nestes três casos, pelo Teorema 12, $(C(n, \{1, d\}), \Phi)$ não é 1-redutível. □

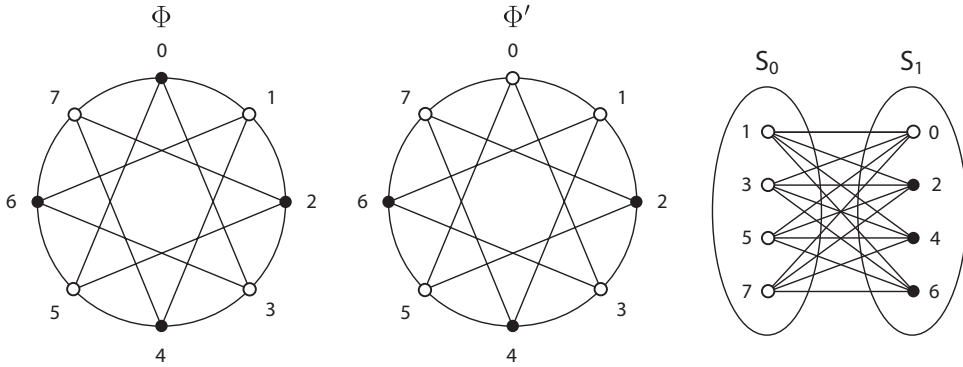


Figura 4.20: Exemplo para $n = 6l + 2$, $l = 1$, $d = 3$.

Capítulo 5

Clobber em Neurociência

Apresentaremos agora os dois experimentos que foram feitos com o jogo Clobber. As análises dos dois experimentos foram realizadas para testar a hipótese de diferença nas configurações de jogo e se as variáveis idade, sexo, tempo de realização do jogo e escolaridade influenciam no desempenho dos indivíduos.

5.1 Primeiro Experimento

A amostra consistiu de 27 estudantes universitários saudáveis, sendo 24 do sexo masculino e 3 do sexo feminino, de 20 ± 3 anos. Com relação a amostra, foram excluídos os alunos que não realizaram todas as configurações dos jogos (nessa amostra, 1 aluno). Veja na Tabela 5.1 a análise descritiva dos dados da amostra.

O primeiro experimento com o Clobber realizou-se com alunos do segundo período de informática da Universidade Federal Fluminense. Foram aplicadas seis configurações de jogo, J1 a J6 (veja a Figura 5.1), onde consideramos o tempo de resolução dos jogos e o número de respostas corretas.

Veja a seguir na Tabela 5.1, a análise descritiva dos dados da amostra. Nesta tabela, a frequência indica o número de ocorrências para uma dada variável. Por exemplo, na amostra do experimento 1, dos 27 indivíduos, 88,9% são homens e 11,1% são mulheres. Nas variáveis de resultados dos jogos, nos quais “0” representa fracasso e “1” sucesso, apenas na configuração J4 nenhum dos indivíduos conseguiu alcançar o objetivo. As configurações J1 e J2 apresentaram frequências parecidas também, indicando uma possível similaridade entre estas duas configurações de jogo.

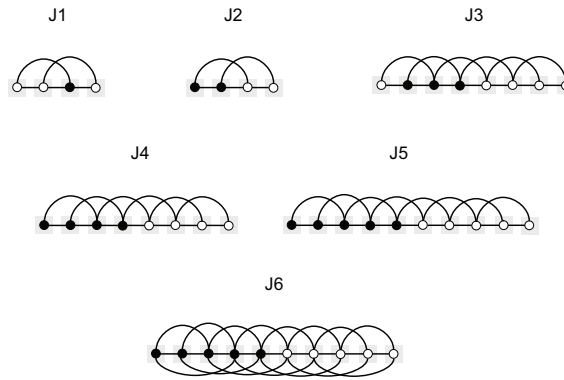


Figura 5.1: Configurações do Clobber utilizadas no primeiro Experimento.

Variável	Frequência	Porcentagem
Sexo		
Masc	24	88,9
Fem	3	11,1
Idade		
17	1	3,7
18	6	22,2
19	13	48,1
20	4	14,8
21	2	7,4
22	1	3,7
Resultados J1		
0	3	11,1
1	24	88,9
Resultados J2		
1	27	100,0
Resultados J3		
0	7	25,9
1	20	74,1
Resultados J4		
0	25	92,6
1	2	7,4
Resultados J5		
0	24	88,9
1	3	11,1
Resultados J6		
0	5	18,5
1	22	81,5
Número de acertos		
1	1	3,7
2	4	14,8
3	4	14,8
4	14	51,9
5	3	11,1
6	1	3,7

Tabela 5.1: Tabela com os dados da amostra do primeiro experimento.

5.1.1 Análise das configurações de jogo

Para responder a hipótese de que a diferença nas configurações de jogo influenciam o desempenho dos indivíduos, utilizamos o Teste Q de Cochran já que o Teste de McNemar não atende porque considera dois grupos. Segundo Po-cinho et al. [23], o Teste de McNemar para duas amostras pode ser esten-dido para aplicação a pesquisas que envolvem mais de duas amostras. Essa ex-tensão, que constitui o Teste Q de Cochran para k amostras relacionadas, pro-porciona um método para comparar se três ou mais conjuntos corresponden-tes de frequências ou proporções diferem entre si significativamente. A cor-respondência pode basear-se em características relevantes dos diferentes in-divíduos ou no fato de os mesmos indivíduos serem observados sob condições di-ferentes. O Teste Q de Cochran adapta-se especialmente ao caso em que os da-dos se apresentam numa escala nominal ou sob a forma de informação ordinal di-cotomizada. Para o primeiro experimento, cada uma das k amostras relacionadas corresponde a cada uma das seis configurações de jogo (ou seja, J1 a J6).

A análise dos dados foi pareada ou de controle sistemático, ou seja, todos os indivíduos foram expostos às mesmas condições, mesmo cenário, etc. O tratamento dos dados foi feito utilizando o software estatístico R (“The R Project for Statistical Computing”) [24]. Os testes paramétricos, que se baseiam na distribuição normal dos dados, seriam os mais adequados devido ao tamanho amostral (pequeno) e às características das variáveis. Foram feitas comparações múltiplas implementadas em código R.

De acordo com os p valores de comparações múltiplas do Teste Q de Cochran, podemos dizer que a configuração J1 é similar a J2 (p -valor=0,0833); a configuração J1 é similar a J3 (p -valor=0,1025); a configuração J1 é similar a J6 (p -valor=0,4142); a configuração J3 é similar a J6 (p -valor=0,3173) e a configuração J4 é similar a J5 (p -valor=0,5637).

5.1.2 Análise multinível

Na estatística tradicional as respostas são independentes, isto é, cada linha, que corresponde a resposta dos jogos de um aluno não é influenciado pelos demais. Atu-almente isso mudou visto que existem outras situações, por exemplo, notas de alunos

de matemática em escola pública no Rio de Janeiro tendem a ser diferentes que notas de alunos de escola pública do Ceará, bem como de outros estados. Assim, cada estado seria um nível hierárquico que guarda um grau de correlação dos alunos daquele estado. Dentro de cada estado, temos o nível da escola e dentro de cada escola temos o nível da sala de aula e dentro da sala temos os alunos. Nos modelos multiníveis existe um grau de dependência entre as observações. Desta forma, usaremos o modelo de Regressão Logística Multinível com intercepto aleatório. O intercepto aleatório considera que estamos ignorando o efeito de uma variável sobre a configuração do jogo (não consideramos a inclinação da curva).

No nosso problema, a variável resposta, ou seja, o resultado de cada aluno em uma das configurações de jogo, é binária (sucesso e fracasso). Então, por esse ponto de vista, a melhor estratégia seria utilizar a regressão logística tendo como variável resposta o resultado do jogo. Como variável do segundo nível, temos as configurações do jogo (J1 a Jn) e como variável do primeiro nível, as co-variáveis relacionadas ao aluno (tempo, idade e sexo). Porém, existem seis configurações diferentes de jogo no primeiro experimento e quatro configurações no segundo, sendo que cada indivíduo respondeu a todas as configurações, o que invalida a utilização da regressão logística tradicional que é caracterizada por apenas uma variável dependente. Resumindo, utilizamos os seguintes níveis:

1º nível configuração do jogo (J1 a Jn)

2º nível aluno (tempo de execução do jogo, idade, sexo)

Como uma premissa para a utilização da modelagem multinível, torna-se necessário avaliar a proporção da variância que é explicada por cada um dos níveis do modelo proposto. Caso o modelo de regressão multinível tenha como variável resposta, uma variável contínua, caracterizando uma regressão linear multinível, o critério utilizado para avaliação da variância explicada por cada um dos níveis é o Coeficiente de Correlação Intraclasse (ICC). Entretanto, como nosso modelo tem como variável resposta uma variável binária (resultado do jogo), a abordagem do ICC [25] não pode ser utilizada.

Goldstein [26] propôs uma abordagem alternativa para computar a proporção de variância explicada, em cada um dos níveis, para dados discretos, chamada Co-

eficiente de Partição da Variância (VPC) [27]. Foi feita uma modelagem aninhada (*nested*) começando pelo modelo vazio que é um modelo sem nenhuma co-variável e que representa:

Modelo 1 Idade

Modelo 2 Modelo 1 + Sexo

Modelo 3 Modelo 2 + tempo gasto em cada configuração de jogo

Modelo 4 Modelo 3 + número de acertos nos jogos

Iremos avaliar qual destes modelos se ajusta melhor aos dados. E a partir deste modelo escolhido, faremos a análise de diagnóstico. O teste estatístico escolhido para isso é o Teste de Razão de Log-verossimilhança [28].

Após a análise dos modelos verificamos que no Modelo 1, a idade não foi estatisticamente significativa (p -valor=0,181). Em relação ao Modelo 2, o sexo também não apresenta significância estatística (p -valor=0,452). No Modelo 3, as variáveis idade e tempo gasto no Jogo 1 (T1) foram significativas (p -valores= 0,0318 e 0,0143, respectivamente), enquanto no Modelo 4, apenas o número total de acertos foi significativo (p -valor<0.001).

Veja na Tabela 5.2, os resultados do VPC e da razão de chance (*odds ratio*) para os modelos propostos.

Variável	Modelo vazio $VPC = 46,6\%$	Modelo 1 $VPC = 23,7\%$ OR ajustado (IC 95)	Modelo 2 $VPC = 21,6\%$ OR ajustado (IC 95)	Modelo 3 $VPC = 0,12\%$ OR ajustado (IC 95)	Modelo 4 $VPC = 67,8\%$ OR ajustado (IC 95)
Idade		1,344(0,871 – 2,073)	1,356(0,877 – 2,098)	1,869 (1,056-3,309)	1,047(0,413 – 2,654)
Sexo					
Masculino			1**	1**	1**
Feminino			1,735(0,412 – 7,302)	1,363(0,182 – 10,183)	1,11(0,036 – 0,338)
Tempo					
T1				1,018 (1,003-1,032)	0,998(0,971 – 1,026)
T2				0,973(0,938 – 1,008)	0,992(0,936 – 1,051)
T3				1,005(0,999 – 1,01)	1,001(0,993 – 1,008)
T4				1(0,997 – 1,003)	1(0,996 – 1,004)
T5				1(0,998 – 1,003)	1(0,996 – 1,004)
T6				1,001(0,997 – 1,004)	1(0,995 – 1,005)
Número de acertos					0,037 (0,009-0,152)

Tabela 5.2: Tabela com Análise Multinível do primeiro Experimento.

** Categoria de referência

Definimos **Razão de Chances** (**Razão de produtos cruzados**, ou **Razão de odds** ou **odds ratio** ou **OR**), onde um odd de um evento é uma medida do tipo razão onde o numerador apresenta a probabilidade p de ocorrência de um evento e o denominador representa o complemento da probabilidade deste evento ($odds = p \div (1 - p)$). O odds ratio pode ser entendido como a razão de dois odds. Assim temos: $OR = \frac{p_1(1-p_1)}{p_0(1-p_0)}$. Esta estimativa é utilizada para variáveis dicotômicas, por exemplo, no nosso caso, sucesso e fracasso, onde p_1 representaria a probabilidade de fracasso e p_0 , a probabilidade de sucesso.

```
> summary(mod.vazio)
Generalized linear mixed model fit by the Laplace
approximation
Formula: resj ~ 1 + (1 | j)
Data: expl1
      AIC   BIC logLik deviance
135.4 141.6 -65.69   131.4
Random effects:
Groups Name      Variance Std.Dev.
j      (Intercept) 6.2156   2.4931
Number of obs: 162, groups: j, 6

Fixed effects:
              Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)    0.7944     1.0614   0.748   0.454
```

Figura 5.2: VPC sobre modelo vazio do primeiro experimento

De acordo com o Teste de Razão de Log-verossimilhança (veja a Figura 5.3), os Modelos 3 e 4 são os melhores (p -valor=0,04532 e p -valor<0,001, respectivamente). Os valores destacados na Figura 5.3 foram os mais significativos. As estimativas de razão de chances (*odds ratio*) para os dois modelos é a seguinte: verificamos que a variável idade (Modelo 3) e a variável tempo do Jogo 1 (T1) foram estatisticamente significativas para o resultado dos jogos. Se aumentarmos em um ano a idade do aluno, eu aumento em aproximadamente 1,8 vezes a probabilidade de sucesso no jogo. No Modelo 3, à medida que aumento o tempo do Jogo 1 (T1) em um segundo, eu aumento em aproximadamente 1,018 a probabilidade de acerto no jogo. Isso pode sugerir que o individuo que levou mais tempo para executar o jogo, elaborou mais e portanto teve mais chance de sucesso. Em se tratando de função executiva, verificamos que os indivíduos que realizaram mais rápido cada jogo foi mais impulsivo, ou seja, teve menos planejamento. Segundo Malloy-Diniz et al. [29], um dos tipos de impulsividade está relacionado com a falta de planejamento.

```
#####
#Teste da razão de log-verossimilhança
#####
> anova(mod.vazio, mod1, mod2, mod3, mod4)
Data: exp11
Models:
mod.vazio: resj ~ 1 + (1 | j)
mod1: resj ~ idade + (1 | j)
mod2: resj ~ idade + as.factor(sexo) + (1 | j)
mod3: resj ~ idade + as.factor(sexo) + T1 + T2 + T3 + T4 + T5 + T6 +
      (1 | j)
mod4: resj ~ idade + as.factor(sexo) + T1 + T2 + T3 + T4 + T5 + T6 +
      tacertos + (1 | j)
-----
      Df      AIC      BIC    logLik   chisq  Chi Df Pr(>Chisq)
mod.vazio  2 135.387 141.56 -65.693      1     1 0.18711
mod1       3 135.646 144.91 -64.823  1.7402     1 0.46487
mod2       4 137.112 149.46 -64.556  0.5341     1 0.46487
mod3      10 136.253 167.13 -58.126 12.8595     6 0.04532 *
mod4      11  86.836 120.80 -32.418 51.4172     1 7.468e-13 ***
-----
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

Figura 5.3: Teste de razão de log-verossimilhança do primeiro experimento

Neste caso, o Modelo 4 seria o que melhor se ajustou aos dados. Porém, o Modelo 4 não é o mais interessante (mesmo sendo mais completo) porque existe uma grande correlação entre o número total de acertos e o resultado do jogo nas configurações (J1 a J6). Desta forma, devido à essa grande correlação, não podemos usar este modelo. Conforme apresentado na Tabela 5.2 com as estimativas de OR em todos os modelos, os coeficientes estimados para as variáveis de tempo de cada jogo no Modelo 3 passaram a ter um pior desempenho no Modelo 4. Desta forma, o Modelo 3 foi o escolhido por ser o mais indicado para o nosso caso e a partir deste modelo foi realizada a análise de diagnóstico. dados.

Análise de diagnóstico do primeiro experimento

No diagnóstico de resíduos do 1º nível (nível dos alunos), a análise do gráfico mostrou que os erros estão normalmente distribuídos (veja Figura 5.4), indicando em torno de 10 possíveis valores de **outliers**, ou seja, valores que estão fora da margem de -2 a +2 desvio padrão.

Segundo a análise do gráfico da Figura 5.5, a configuração de jogo número 3 (J3) e número 6 (J6) foram as que melhor se adequaram aos dados. Isso pode significar, no caso de J3, um aprendizado nas configurações anteriores (J1 e J2) possibilitando um melhor resultado em J3. Quando o indivíduo se depara com J4 e J5 que possuem níveis de dificuldade maiores, há uma queda no desempenho, voltando a se recuperar na configuração 6 (J6) pois, provavelmente, em J4 e J5 ele treinou mais, testou mais soluções.

Gráfico de diagnóstico para os resíduos do 1º nível

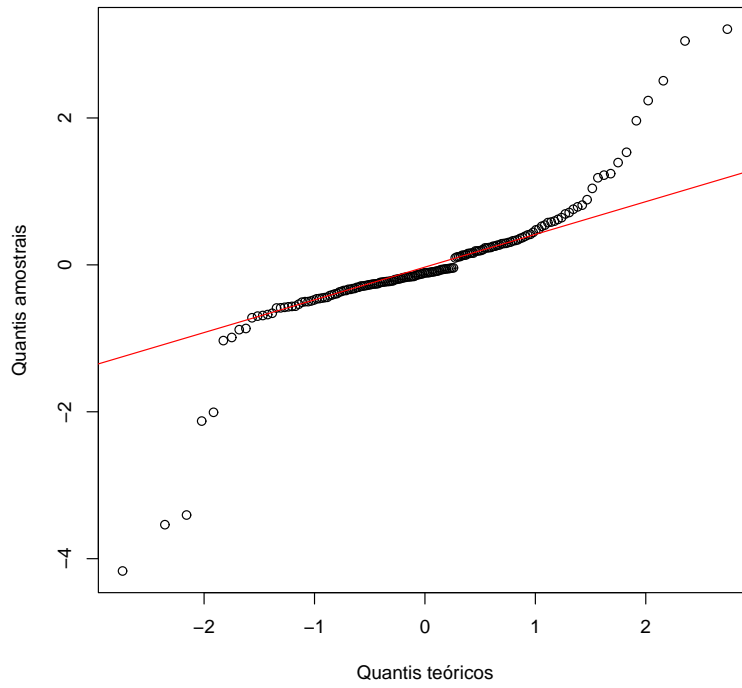


Figura 5.4: Análise de diagnóstico de resíduos do 1º nível.

Gráfico de resíduos do 2º nível

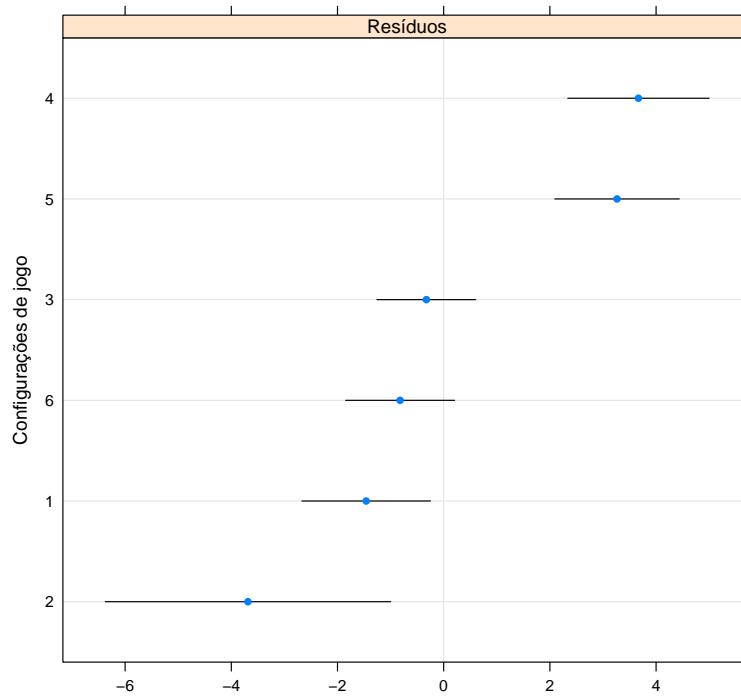


Figura 5.5: Gráfico de Resíduos do 2º nível.

No diagnóstico de resíduos do 2º nível, as configurações de jogo apresentaram uma distribuição próxima da normal (veja Figura 5.6).

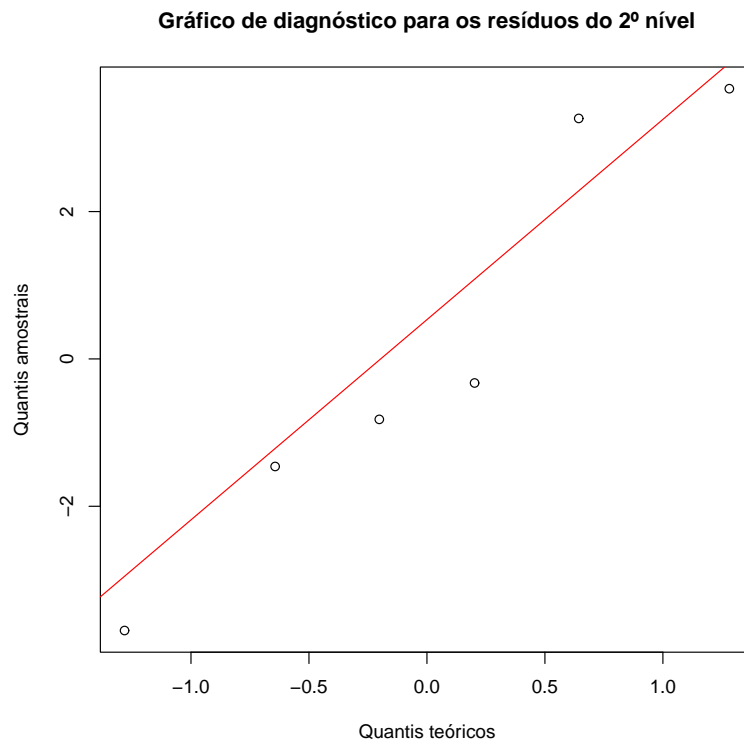


Figura 5.6: Análise de diagnóstico de resíduos do 2º nível.

5.2 Segundo experimento

Foram feitas aplicações do jogo Clobber em uma amostra (veja a Figura 5.7) composta por dois grupos: o primeiro grupo de alunos de escolas públicas nos níveis Fundamental, Médio e Superior e o segundo grupo de pacientes com TDAH (grupo Teste) e sem o TDAH (grupo controle) da Clínica de Psiquiatria coordenada pelo professor Paulo Mattos, no Rio de Janeiro.

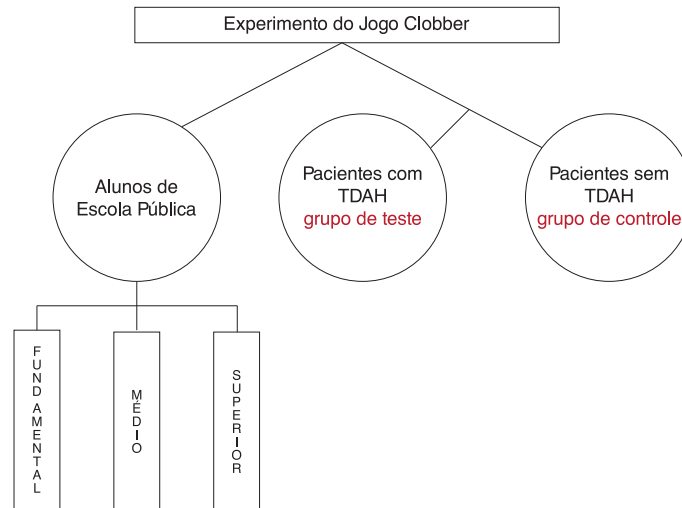


Figura 5.7: Segundo experimento com o jogo Clobber.

Apresentamos o jogo Clobber aos alunos de escolas públicas através da aplicação de uma oficina realizada durante o período letivo, com duração de duas horas. Para o desenvolvimento desta parte experimental, descrevemos a metodologia e alguns aspectos éticos com relação ao experimento.

Metodologia e Aspectos Éticos

Foram encaminhados os formulários TCLE (Termo de Consentimento Livre e Esclarecido) aos responsáveis, no caso de alunos menores de idade e após o consentimento dos pais foi aplicada a Oficina. Os responsáveis também preencheram um questionário IBGE. Os alunos são provenientes de Instituições do Ensino Fundamental I e II da Escola Estadual de Ensino Fundamental República, do Ensino Médio da Escola Técnica Estadual Adolpho Bloch/FAETEC-RJ e do Ensino Superior da Universidade Federal Fluminense. A oficina teve duração máxima de duas horas. Os alunos participaram da oficina com toda a turma e cada aluno, individualmente, resolveu as configurações do jogo Clobber propostas. Apresentamos na Figura 5.8 as configurações de jogo (J1 a J4) que foram utilizadas no experimento.

Observe que neste segundo experimento utilizamos apenas quatro das seis configurações anteriores pois observamos o desgaste dos alunos na oficina do primeiro experimento, bem como o tempo que dispunhamos para aplicação da oficina (apenas duas horas).

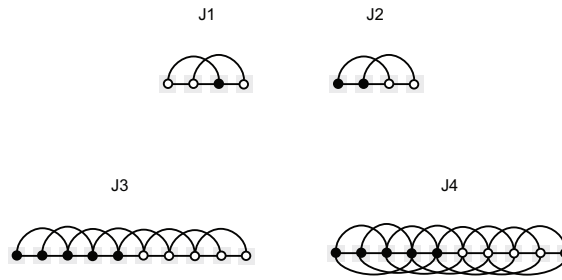


Figura 5.8: Configurações do Clobber utilizadas no segundo experimento.

O segundo grupo contou com 8 pacientes com TDAH (grupo Teste) e 07 sem TDAH (Grupo Controle) provenientes da clínica. Dada a natureza da intervenção, com relação ao primeiro grupo da amostra, não houve qualquer risco para os alunos que participaram do trabalho e não houve, por parte dos pais ou responsáveis, qualquer custo financeiro. Todas as instituições envolvidas concordaram com a realização da oficina. Todo o processo realizou-se nas dependências do colégio ou instituição de ensino a que o aluno pertencia, em horário acordado com a direção da escola e com o professor da turma, o que não interferiu nas atividades agendadas. Somente participaram da oficina, as crianças que desejaram e que tiveram autorização dos pais e/ou responsáveis (veja Termo TCLE, em Anexos). Os alunos que não quiseram ou cujos responsáveis não concordaram com a participação do seu/sua filho(a) na pesquisa, não foram prejudicado(a)s. Com relação ao segundo grupo da amostra, o estudo foi aprovado pela Comissão de Ética do Instituto de Psiquiatria da Universidade Federal do Rio de Janeiro (Protocolo No. 14 liv2/07).

Neste experimento estamos levando em conta o tempo de resolução de cada configuração de jogo, o número de acertos nos jogos e também o número de pedras deixadas ao final do jogo. Esta análise foi subdividida em dois experimentos: chamaremos **Experimento2a** ou **Exp2a** o experimento que testará se a hipótese de ter ou não o TDAH influencia no resultado do jogo. E chamaremos **Experimento2b** ou **Exp2b** a análise dos alunos com relação à escolaridade.

5.2.1 Análise do Exp2a

Conforme o primeiro experimento, faremos primeiramente a análise com relação à proporção de acertos nas configurações de jogo, de acordo com os grupos teste e controle. Veja na Tabela 5.3 a análise descritiva dos dados da amostra. Nesta

tabela, 46,7% do total da amostra faz parte do grupo controle (sem o TDAH) e 53,3% faz parte do grupo teste (com o TDAH). Com relação à variável Idade, 20% dos indivíduos tem 9 anos, 6,7% tem 10 anos, etc. Com relação ao número de acertos, 66,7% dos indivíduos conseguiram acertar uma configuração de jogo, enquanto que apenas 13,3% dos indivíduos conseguiram acertar 2 configurações e assim por diante.

Variável	Frequencia	Porcentagem
Grupo		
Controle	7	46,7
Teste	8	53,3
Sexo		
Masc	11	73,3
Fem	4	26,7
Idade		
9	3	20,0
10	1	6,7
11	3	20,0
12	1	6,7
14	3	20,0
15	4	26,7
Resultados J1		
0	6	40,0
1	9	60,0
Resultados J2		
0	5	33,3
1	10	66,7
Resultados J3		
0	11	73,3
1	4	26,7
Resultados J4		
0	15	100,0
Número de acertos		
1	10	66,7
2	2	13,3
3	3	20,0

Tabela 5.3: Tabela com os dados da amostra do segundo experimento (Exp2a).

Faremos primeiramente a análise com relação à proporção de acertos nas configurações do jogo, de acordo com os grupos controle e teste.

Grupo Controle

Com relação à proporção de acertos nas configurações do jogo, a prova de Q de Cochran para as 4 configurações de jogo foi estatisticamente significativa, con-

afirmando que há uma diferença nas respostas de cada uma delas. De acordo com os p valores de comparações múltiplas do Teste Q de Cochran, podemos dizer que: a configuração J1 é similar a J2 (p -valor=0,5637); a configuração J2 é similar a J3 (p -valor=0,0833) e a configuração J3 é similar a J4 (p -valor=0,1573).

Grupo Teste

A prova de Q de Cochran para as 4 configurações de jogo não foi estatisticamente significativa, o que indica que não há diferença nas respostas de cada uma delas. Não houve necessidade de realizar comparações múltiplas.

A justificativa pode estar associada ao fato de que o grupo controle também possuía queixas, o que significa que embora esse grupo não possua diagnóstico psiquiátrico do TDAH, eles possuem desempenho acadêmico ruim.

Agora faremos a análise multinível com relação ao tempo de execução do jogo, idade, sexo e número de pedras restantes de quem tem e de quem não tem o TDAH.

Análise multinível do Exp2a

Para esse caso propomos os seis modelos a seguir.

Modelo 1 Idade

Modelo 2 Modelo 1 + Sexo

Modelo 3 Modelo 2 + tempo gasto em cada configuração de jogo

Modelo 4 Modelo 3 + número de pedras deixadas

Modelo 5 Modelo 4 + número de acertos nos jogos

Modelo 6 Número de acertos nos jogos

Nenhum dos modelos anteriores apresentaram variáveis com significância estatística em relação ao resultado do jogo comparado com os grupos controle e teste. O Modelo 6 indicou que a variável número de acertos está mais correlacionada com o resultado do jogo. Foi realizado o teste exato de Fisher (amostra pequena) para verificar se existia associação entre o grupo teste (ter ou não o transtorno) e cada configuração de jogo. Os testes também não apontaram para significância estatística. Entretanto a configuração J1 ficou próxima de ter significância (p -valor=0,1189). Talvez se a amostra fosse maior as estatísticas apontassem alguns resultados mais favoráveis.

5.2.2 Análise do Exp2b

Na Tabela 5.4 apresentamos a análise descritiva dos dados da amostra. Por exemplo, com relação à variável sexo, temos que 58,6% dos indivíduos são do sexo masculino e 41,4% são do sexo feminino. Com relação à variável Idade, 38,7% dos indivíduos têm menos de 15 anos, 45,9% têm entre 15 e 19 anos, etc. Com relação à variável escolaridade, 18% dos indivíduos estão no nível Ensino Fundamental I (EF-I), 25,2% dos indivíduos estão no Ensino Fundamental II (EF-II), e assim por diante.

Variável	Frequência	Porcentagem
Sexo		
Masc	65	58,6
Fem	46	41,4
Faixa etária		
<15	43	38,7
15-19	51	45,9
20-24	13	11,7
25-30	4	3,6
Escolaridade		
EF-I	20	18,0
EF-II	28	25,2
EM	25	22,5
ES	38	34,2
Resultados J1		
0	31	27,9
1	80	72,1
Resultados J2		
0	38	34,2
1	73	65,8
Resultados J3		
0	77	69,4
1	34	30,6
Resultados J4		
0	80	72,1
1	31	27,9
Número de acertos		
0	15	13,5
1	31	27,9
2	26	23,4
3	21	18,9
4	18	16,2

Tabela 5.4: Tabela com os dados da amostra do segundo experimento (Exp2b).

A prova de Q de Cochran para as 4 configurações de jogo foi estatisticamente significativa, confirmando que há uma diferença nas respostas de cada uma delas.

De acordo com os p valores de comparações múltiplas do Teste Q de Cochran, obtemos os seguintes resultados: para o Ensino Fundamental I, a configuração J1 é similar a J2 (p -valor=0,2482); a configuração J2 é similar a J4 (p -valor=0,0588) e a configuração J3 é similar a J4 (p -valor=0,5637). Para o Ensino Fundamental II, a configuração J1 é similar a J2 (p -valor=0,7055); a configuração J3 é similar a J4 (p -valor=0,1025). Para o Ensino Médio, a configuração J1 é similar a J2 (p -valor=0,2059) e a configuração J3 é similar a J4 (p -valor=0,1797). Para o Ensino Superior, a configuração J1 é similar a J2 (p -valor=0,4142) e a configuração J3 é similar a J4 (p -valor=0,3657).

Análise Multinível do Exp2b

Com relação a análise de Regressão Logística Multinível, para esse caso, propomos os seis modelos a seguir.

Modelo 1 Idade

Modelo 2 Modelo 1 + Sexo

Modelo 3 Modelo 2 + tempo gasto em cada configuração de jogo

Modelo 4 Modelo 3 + número de pedras deixadas

Modelo 5 Modelo 4 + número de acertos nos jogos

Modelo 6 Sexo + T3 + Pedras J1 + Pedras J2

Esse Modelo 6 foi concebido a partir das variáveis mais significativas dos modelos anteriores. Novamente iremos avaliar qual destes modelos se ajusta melhor aos dados, e a partir deste modelo escolhido, faremos a análise de diagnóstico. O teste estatístico escolhido para isso é o Teste de Razão de Log-verossimilhança [28]. Após a análise dos modelos, obtemos os seguintes resultados:

Verificamos que no Modelo 1, a idade não foi estatisticamente significativa (p -valor=0,181). Em relação ao Modelo 2, o sexo foi significativo (p -valor=0,0044). No Modelo 3, a variável sexo foi significativa (p -valor= 0,0169). No Modelo 4, as pedras deixadas em J1 e em J2 foram significativas (ambas com p -valor<0,001) e finalmente, no Modelo 5, o número total de acertos foi significativo (p -valor <0,001).

Na Tabela 5.5, apresentamos o cálculo do VPC para o segundo nível.

Variável	Modelo vazio	Modelo 1	Modelo 2	Modelo 3	Modelo 4	Modelo 5	Modelo 6
	$VPC\ 3^\circ = 18\%$ $VPC\ 2^\circ = 17,8\%$	$VPC\ 3^\circ = 16,4\%$ $VPC\ 2^\circ = 21,5\%$	$VPC\ 3^\circ = 16,5\%$ $VPC\ 2^\circ = 0,8\%$	$VPC\ 3^\circ = 19,4\%$ $VPC\ 2^\circ = 15,5\%$	$VPC\ 3^\circ = 8,1\%$ $VPC\ 2^\circ = 0,5\%$	$VPC\ 3^\circ = 23,1\%$ $VPC\ 2^\circ = 0\%$	$VPC\ 3^\circ = 7,8\%$ $VPC\ 2^\circ = 7,8\%$
Idade		1,083(0,964 – 1,217)	1,074(0,955 – 1,208)	1,034(0,92 – 1,163)	1,011(0,912 – 1,134)	0,987(0,898 – 1,085)	
Sexo							
Masculino			1	1	1	1	
Feminino			2,003 (1,241-3,232)	1,812 (1,113-2,952)	1,213(0,691 – 2,13)	0,997(0,489 – 2,031)	1,272(0,739 – 2,19)
Tempo							
T1				1,003(0,999 – 1,007)	1,003(0,999 – 1,007)	0,998(0,993 – 1,004)	
T2				1,001(0,994 – 1,007)	1,002(0,995 – 1,009)	01,001(0,992 – 1,01)	
T3				1,005(0,997 – 1)	0,999(0,998 – 1,001)	1(0,999 – 1,002)	
T4				1(0,999 – 1,001)	0,999(0,997 – 1,001)	1(0,999 – 1,002)	
Número de pedras deixadas							
PedrasJ1					3,878 (2,13-7,06)	1,049(0,526 – 2,092)	4,389 (2,418-7,964)
PedrasJ2					7,215 (2,838-18,338)	0,989(0,353 – 2,769)	9,765 (4,01-23,775)
PedrasJ3					1,131(0,959 – 1,334)	0,973(0,805 – 1,175)	
PedrasJ4					0,989(0,971 – 1,007)	1,003(0,983 – 1,024)	
Número de acertos						0,078 (0,043-0,141)	

Tabela 5.5: Tabela com Análise Multinível do Experimento 2b.

OBS.: Para todos os modelos OR ajustado (IC 95%).

Apesar do teste de Teste Razão de Log-Verossimilhança, indicar que o Modelo 5 é o melhor, por questão de parcimônia, foi escolhido o Modelo 6 pois o mesmo apresentou menos variáveis correlacionadas em relação ao Modelo 5 (Veja na Figura 5.9).

```
##### Tabela de resultados do exp2b #####
> anova(mod.vazio, mod1, mod2, mod3, mod4, mod5, mod6)
Data: exp2b1
Models:
mod.vazio: resj ~ 1 + (1 | esc) + (1 | j)
mod1: resj ~ idade + (1 | esc) + (1 | j)
mod2: resj ~ idade + as.factor(sexo) + (1 | esc) + (1 | j)
mod6: resj ~ as.factor(sexo) + T3 + pedrasj1 + pedrasj2 + (1 | esc) +
(1 | j)
mod3: resj ~ idade + as.factor(sexo) + T1 + T2 + T3 + T4 + (1 | esc) +
(1 | j)
mod4: resj ~ idade + as.factor(sexo) + T1 + T2 + T3 + T4 + pedrasj1 +
pedrasj2 + pedrasj3 + pedrasj4 + (1 | esc) + (1 | j)
mod5: resj ~ idade + as.factor(sexo) + T1 + T2 + T3 + T4 + tacertos +
pedrasj1 + pedrasj2 + pedrasj3 + pedrasj4 + (1 | esc) + (1 |
j)
-----
Df      AIC      BIC  logLik      Chisq Chi Df Pr(>Chisq)
mod.vazio  3 473.11 485.40 -233.56      1.4763   1  0.224357
mod1       4 473.64 490.02 -232.82      8.0385   1  0.004579 **
mod2       5 467.60 488.08 -228.80     58.9462   2 1.585e-13 ***
mod6       7 412.65 441.32 -199.33     0.0000   2  1.000000
mod3       9 467.15 504.01 -224.57     58.4080   4 6.265e-12 ***
mod4      13 416.74 469.98 -195.37    126.3224   1 < 2.2e-16 ***
-----
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
>
```

Figura 5.9: Teste de Razão de log-verossimilhança do Exp2b.

As estimativas de razão de chances (*odds ratio*) para o Modelo 6 é a seguinte: verificamos que as variáveis número de pedras deixadas nos Jogos 1 e 2 foram estatisticamente significativas. Se aumentarmos a quantidade de pedras deixadas, diminuímos a probabilidade de sucesso no jogo. Como citado anteriormente, a análise de diagnóstico será feita sobre o modelo 6.

Análise de Diagnóstico do Exp2b

No diagnóstico de resíduos do 1º nível (nível dos alunos), a análise do gráfico mostrou que os erros estão normalmente distribuídos, indicando em torno de 8 possíveis *outliers* (veja o gráfico da Figura 5.10).

No diagnóstico de resíduos do 2º nível, o Ensino fundamental I obteve desempenho próximo ao do Ensino Superior, enquanto que o Ensino Médio foi o que se adequou melhor aos dados. O Ensino Fundamental II foi o que obteve o pior desempenho (veja o gráfico da Figura 5.11).

No diagnóstico de resíduos do 3º nível, as configurações de jogo J1 e J2 foram semelhantes e as configurações J3 e J4 também o foram (veja o gráfico da Figura 5.12).

Gráfico de diagnóstico para os resíduos do 1º nível

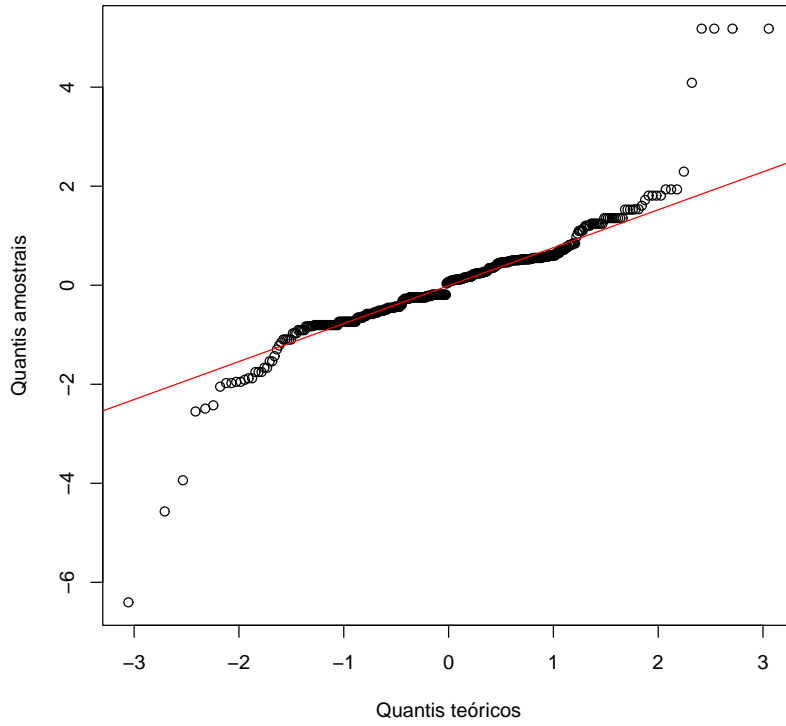


Figura 5.10: Análise de diagnóstico de resíduos do 1º nível do Exp2b.

Gráfico de resíduos do 2º nível

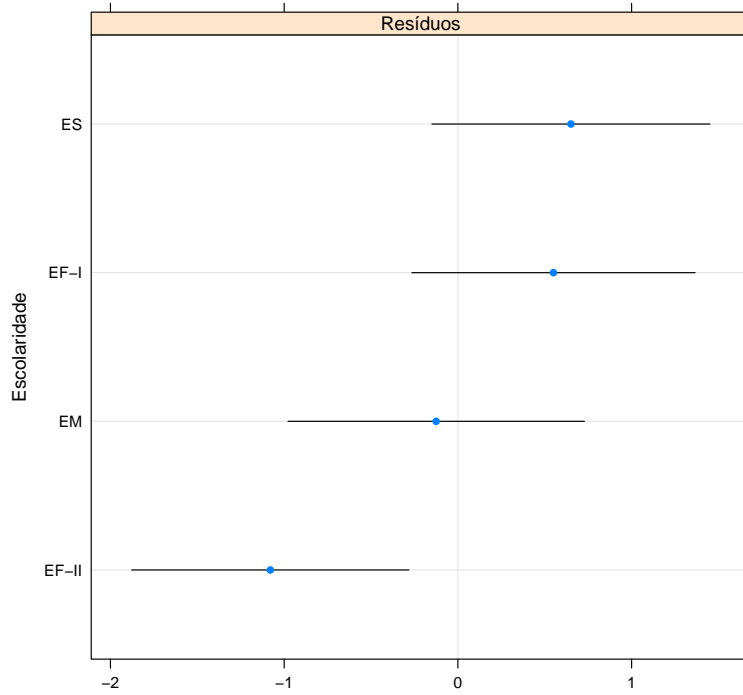


Figura 5.11: Análise de diagnóstico de resíduos do 2º nível do Exp2b.

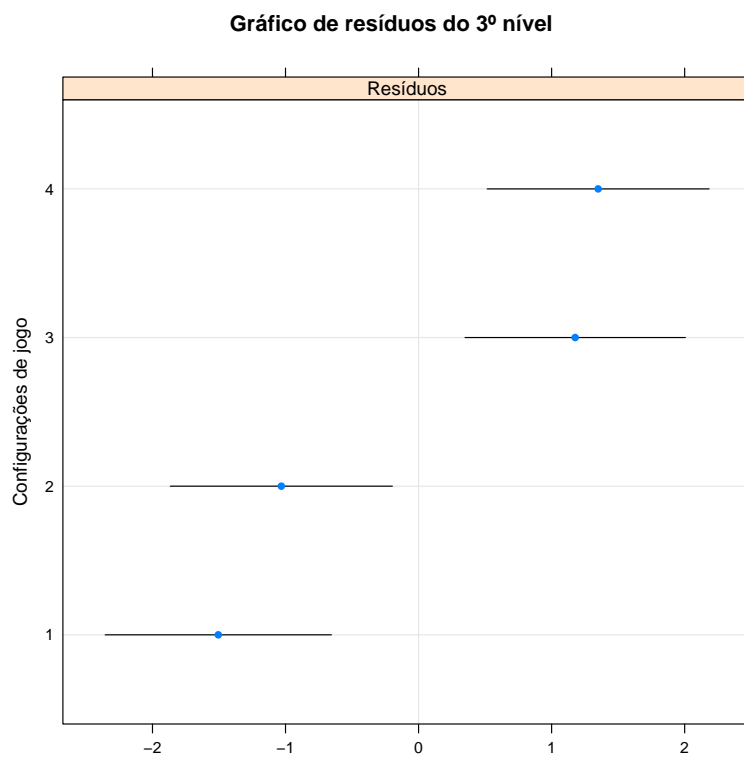


Figura 5.12: Análise de diagnóstico de resíduos do 3º nível do Exp2b.

Capítulo 6

Conclusões e Trabalhos Futuros

Com relação aos resultados teóricos do jogo Clobber, estudamos os limites de reducibilidade do Clobber jogado em algumas classes de grafos circulantes. Verificamos que os melhores limites superiores para $rv(G, \Phi)$ estão resumidos na Tabela 6.1.

Classes de Grafos	Limites	$rv(G, \Phi)$	Referência
Potências de Caminho P_n^r	$r = 1$ $r = 2$ $r \geq 3$	$\leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$ ≤ 2 ≤ 1	Blondel et al. [22] Lema 5 Teorema 10
Potências de Ciclo C_n^r	$r = 1$ $r \geq 2$	$\leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$ ≤ 1	Blondel et al. [22] Corolário 4
Grafos Circulantes $C(n, A)$, $A = \{d_1, \dots, d_k\}$	$\{d, 2d\} \in A$ e $\gcd(n, d) = 1$ n par, d_1, \dots, d_k ímpar	≤ 1 $\min\{2 - 2 A , \lceil \frac{n}{3} \rceil\}$	Teorema 11 [19] e [22]
Cliques K_n	$n \geq 3$	≤ 1	Dorbec et al. [10]
Hamming graphs exceto hipercubos e $K_2 \square K_3$		≤ 1	Dorbec et al. [10]
Hipercubos Q_n	$n > 1$	≤ 2	Dorbec et al. [10]

Tabela 6.1: Tabela Resumo dos Resultados do Clobber.

Finalmente, concluimos com os seguintes problemas em aberto.

Problema 1. *Seja $G = C(n, \{1, d\})$ um grafo circulante, com $d > 2$, d par e n par, existe configuração não-monocromática Φ de G tal que (G, Φ) não é 1-reduzível?*

Problema 2. *Dada uma configuração não monocromática Φ de $G = C(n, \{d_1, d_2\})$, existe constante k tal que $rv(G, \Phi) \leq k$?*

Parte dos resultados teóricos do Clobber foram apresentados no Congresso LA-GOS'2009 (V Latin-American Algorithms, Graphs and Optimization Symposium) em Gramado, Rio Grande do Sul no ano de 2009 e estão publicados no artigo “Impartial Solitaire Clobber played on Powers of Paths”, do periódico *Electronic Notes in Discrete Mathematics* [18]. Uma versão mais completa do trabalho apresentado no Congresso foi submetida ao periódico *Discrete Applied Mathematics*.

Com relação à aplicação do jogo Clobber em neurociência, as evidências encontradas apontam para a possibilidade de utilização do jogo como teste de habilidade executiva, sobretudo se aumentarmos a escala de forma a identificar o momento de estabilização de desempenho. Os resultados do primeiro experimento do jogo Clobber foram publicados nos Anais do XXVIII CBP (Congresso Brasileiro de Psiquiatria) que se realizou em outubro de 2010, no Ceará, na categoria Poster.

Quanto aos trabalhos futuros, o primeiro seria comparar o Clobber com outros testes neuropsicológicos com o objetivo de identificar a(s) função(ões) que ele avalia, ou seja, identificar o(s) construto(s) neuropsicológico(s) que ele avalia. Outra possibilidade é a de realizar um estudo comparativo dos resultados obtidos no Clobber com as “queixas” de quem sofre de TDAH, sobretudo no desempenho acadêmico.

Um outro trabalho que está em andamento é a construção de uma plataforma para abrigar o jogo. Neste sistema, o indivíduo poderá jogar o Clobber e os seus resultados serão armazenados (os resultados obtidos em cada configuração de jogo), bem como o tempo que ele levou para realizá-las, facilitando a etapa de captação dos dados para posterior análise.

Finalmente, uma outra vertente que não foi explorada, mas que fica bastante evidente, é o potencial de utilização do Clobber, bem como de outros jogos combinatorios, na educação a fim de melhorar o ensino-aprendizado de estruturas abstratas como os conceitos matemáticos. Recentes pesquisas parecem confirmar o fato de que as ciências, em particular, a matemática, não são muito populares entre os jovens. Uma forma de melhorar o ensino da matemática hoje seria trazendo a matemática para o dia-a-dia desses jovens. Uma possibilidade seria aplicar uma abordagem diferenciada, a abordagem da pesquisa em matemática. Esta a abordagem consistiria em apresentar situações aos estudantes (situações de pesquisa) baseadas em problemas próximos aos problemas de pesquisa atuais. Essas situações utilizariam a Teoria

de Grafos como ferramenta de modelagem, pois ela vem sendo utilizada sobretudo para a modelagem de problemas de interesse prático, entre eles os jogos.

Referências Bibliográficas

- [1] LEZAK, M. D., *Neuropsychological Assesment*. Oxford University Press, 1995.
- [2] BERLEKAMP, E. R., CONWAY, J. H., GUY, R. K., *Winning ways for your mathematical plays*. v. 1. Academic Press, 2001.
- [3] ALBERT, M., GROSSMAN, J., NOWAKOWSKY, R. J., et al., “An Introduction to Clobber”, *Integers, Journal of Combinatorial Number Theory*, v. 5(2), pp. 1–12, 2005.
- [4] DEMAINE, E. D., DEMAINE, M. L., FLEISCHER, R., “Solitaire Clobber”, *Theoretical Computer Science*, v. 313, pp. 325–338, 2004.
- [5] BONDY, J. A., MURTY, U. S. R., *Graph theory*. Springer, 2008.
- [6] CORMEN, T. H., LEISERSON, C. E., RIVEST, R. L., et al., *Algoritmos: Teoria e Prática*. Elsevier, 2002.
- [7] GAREY, M. R., JOHNSON, D. S., *Computers and Intractability: a guide to the theory of NP-completeness*. WH Freeman and Co., 1979.
- [8] SZWARCFITER, J. L., *Grafos e Algoritmos Computacionais*. Campus, Rio de Janeiro, 1986.
- [9] CAMPOS, C. N., DANTAS, S., MELLO, C. P., “Colouring clique-hypergraphs of circulant graphs”, *Eletronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 30, pp. 189–194, 2008.
- [10] DORBEC, P., DUCHÊNE, E., GRAVIER, S., “Solitaire Clobber played on Hamming graphs”, *Integers, Journal of Combinatorial Number Theory*, v. 8(1), G03, pp. 1–21, 2008.

- [11] MEIDANIS, J., “Edge coloring of cycle powers is easy”, unpublished manuscript, 1998, available at <http://www.ic.unicamp.br/meidanis>. Last visited 22/09/2009.
- [12] HEUBERGER, C., “On planarity and colorability of circulant graphs”, *Discrete Mathematics*, v. 268, pp. 153–169, 2003.
- [13] MATTOS, P., *No Mundo da Lua: Perguntas e respostas sobre transtorno do déficit de atenção com hiperatividade em criança, adolescentes e adultos*. Casa Leitura Médica, 8a. ed., 2008.
- [14] SABOYA, E., SARAIVA, D., PALMINI, A., et al., “Disfunção executiva como uma medida de funcionalidade em adultos com TDAH”, *Jornal Brasileiro de Psiquiatria*, v. 56(1), pp. 30–33, 2007.
- [15] VERDEJO-GARCÍA, A., BECHARA, A., “Neuropsicología de las funciones ejecutivas”, *Psicothema*, v. 22, pp. 227–235, 2010.
- [16] SUELY DE MELO SANTANA, S. D. M., ROAZZI, A., DIAS, M., “Paradigmas do desenvolvimento cognitivo: uma breve retrospectiva”, *Estudos de Psicologia, janeiro-abril*, v. 11, pp. 71–78, 2006.
- [17] SOUZA, R. O., IGNÁCIO, F. A., CUNHA, F. C. R., et al., “Contribuição à Neuropsicologia do Comportamento Executivo : Torre de Londres e teste de Wisconsin em indivíduos normais”, *Arquivos de Neuro-Psiquiatria vol.59 no.3A São Paulo Sept. 2001*, v. 59, pp. 526–531, 2001.
- [18] PARÁ, T., GRAVIER, S., DANTAS, S., “Impartial Solitaire Clobber played on Powers of Paths”, *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, v. 35, pp. 257–262, 2009. Submitted to *Discrete Applied Mathematics*.
- [19] DUCHÊNE, E., GRAVIER, S., MONCEL, J., “Solitaire Clobber on graphs”, *RAIRO, Theoretical Informatics and Applications*, v. 43, pp. 463–482, 2009.
- [20] ITAÍ, A., PAPADIMITRIOU, C. H., SZWARCFITER, J. L., “Hamilton paths in grid graphs”, *SIAM Journal of Computing*, v. 11, pp. 676–686, 1982.

- [21] BEAUDOU, L., DUCHÊNE, E., GRAVIER, S., “A Survey about Solitaire Clobber”, *Submitted*.
- [22] BLONDEL, V. D., KERCHOVE, C. D., HENDRICKX, J. M., et al., “Solitaire Clobber as an Optimization Problem on Words”, *Integers, Journal of Combinatorial Number Theory*, v. 8(1), G04, pp. 1–12, 2008.
- [23] M., P., DE FIGUEIREDO, J. P., “Estatística e Bioestatística”, Apostila, disponível em Disponível em: <http://bio-livros.blogspot.com/2009/02/apostila-estatistica-e-bioestatistica.html>. Acesso em 11. out. 2010.
- [24] R Development Core Team, R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, *R: A language and environment for statistical computing*, versão 2.11.1 ed., 2010.
- [25] STREINER, D. L., NORMAN, G. R., *Health measurement scales. A practical guide to their development and use..* Oxford University Press, 3rd ed., 2003.
- [26] GOLDSTEIN, H., *Multilevel Statistical Models*. Wiley, 3 ed., 2002.
- [27] RASBASH, J., STEELE, F., BROWNE, W., et al., *A User’s Guide to MLwiN v. 2.0*, University of Bristol, 2004.
- [28] HOSMER, D. W., LEMESHOW, S., *Applied Logistic Regression*. Wiley, 2nd edition, 2000.
- [29] MALLOY-DINIZ, L., FUENTES, D., BORGES LEITE, W., et al., “Impulsive behavior in adults with attention deficit hyperactivity disorder: Characterization of attentional, motor and cognitive impulsiveness”, *Journal of the International Neuropsychological Society*, v. 13, pp. 693698, 2007.
- [30] NOWAKOWSKY, R. J., *Games of No Chance*. Cambridge University Press, 1998.

Apêndice A

Formulários

TCLE (Termo de Consentimento Livre e Esclarecido)	61
---	----

**FORMULÁRIO DE CONSENTIMENTO INFORMADO LIVRE E ESCLARECIDO
PARA PARTICIPAÇÃO EM PESQUISA CLÍNICA**

Pesquisador responsável: Telma Silveira Pará – Tel: 2562-7211 e Cel: 81233655

PROJETO DE PESQUISA: OFICINA DO JOGO CLOBBER

Eu, abaixo assinado, responsável pelo(a) menor

declaro ter lido e/ou ouvido a leitura do presente termo e estar ciente do que se segue:

1- que voluntariamente autorizo a participação do meu/minha filho(a) neste projeto de pesquisa realizado por Telma Silveira Pará, da instituição Universidade Federal do Rio de Janeiro – COPPE – Programa de Engenharia de Sistemas e Computação;

2- que esta pesquisa tem por objetivo a aplicação de um jogo matemático e a aplicação de um questionário aos pais. A pesquisa visa à identificação de como este tipo de jogo pode ajudar os alunos a melhorar o raciocínio lógico, sobretudo na identificação de estruturas abstratas em matemática. Os dados coletados serão tratados estatisticamente pelo pesquisador;

3- que os estudantes participarão individualmente de uma oficina com a pesquisadora, onde serão apresentados ao aluno situações de jogo para que o aluno tente resolver. Será computado o tempo que o aluno leva para a solução de cada situação de jogo proposta;

4- que poderão ser aplicados exames mais completos sobre os mesmos aspectos acima mencionados, caso haja necessidade;

5- que todo esse processo será realizado nas dependências do colégio ou instituição de ensino a que o aluno pertence, em horário acordado com a Direção da Escola e com o professor da turma, o que não interferirá nas atividades agendadas;

6- que só participarão do trabalho as crianças que desejarem e que tiverem autorização dos pais e/ou responsáveis;

7- que não haverá qualquer risco para os escolares que participarem do trabalho;

8- que não haverá, por parte dos pais ou responsáveis, qualquer custo financeiro;

9- que caso eu não concorde com a participação do meu/minha filho(a) na pesquisa, ele(a) não será prejudicado(a);

10- que os resultados das avaliações realizadas e as ações dela decorrentes poderão ser explicados a mim sempre que disponíveis e por mim solicitados;

11- que todos os dados obtidos na pesquisa referentes ao meu/minha filho(a) serão mantidos em anonimato pelos autores;

12- que quaisquer dúvidas sobre a pesquisa poderão ser obtidas com o pesquisador responsável COPPE Bloco H - I. Fundão ou pelo telefone citado acima.

Rio de Janeiro, _____ de _____ de _____.

Nome do responsável pelo menor estudante

Assinatura

Telefone(s) para contato: _____ / _____