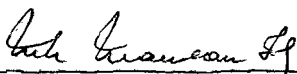


UM ALGORITMO DE DECOMPOSIÇÃO PRIMAL PARA SOLUÇÃO DE UM
PROBLEMA DINÂMICO DE LOCALIZAÇÃO DE P-MEDIANAS E SUA A-
PLICAÇÃO NA PRODUÇÃO DE CARVÃO EM PLANTAÇÃO DE EUCALIPTOS

Geraldo Galdino de Paula Junior

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO
DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.) EM ENGENHARIA
DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

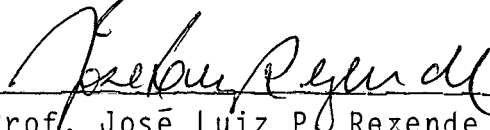
Aprovada por:



Prof. Nelson Maculan Filho
Presidente



Prof. Celso da Cruz C. Ribeiro



Prof. José Luiz P. Rezende



Prof. Laércio Couto



Prof. Paulo Roberto Oliveira

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
NOVEMBRO DE 1986

PAULA JUNIOR, GERRILDO GRLDINO DE

Um algoritmo de decomposição primal para solução de um problema dinâmico de localização de p-medianas e sua aplicação na produção carvão em plantação de eucaliptos. [Rio de Janeiro3 1986.

xii, 258 p. 29,7cm (Coppe-UFRJ, D.Sc. Engenharia de Sistemas e Computação, 1986)

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro. Prog. Engenharia de Sistemas e Computação

1. Otimização 2. Pesquisa Operacional

■ - COPPE/UFRJ II. Título (Série)

UM ALGORITMO DE DECOMPOSIÇÃO PRIMAL PARA SOLUÇÃO DE UM
PROBLEMA DINÂMICO DE LOCALIZAÇÃO DE P-MEDIANAS E SUA
APLICAÇÃO NA PRODUÇÃO DE CARVÃO EM PLANTAÇÃO DE
EUCALIPTOS.

por

Geraldo Galdina de Paula Junior

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO
RIO DE JANEIRO - RJ

1986

A todas as pessoas que eu amo, em especial
a

Maria do Carmo

Eduardo

Fabiano e

Danilo

Agradecimentos

Na elaboração deste trabalho muitas pessoas e instituições colaboraram conosco e nos estimularam. Agradecemos a todas elas e especialmente

ao Professor Nelson Maculan que há mais de uma década nos incentiva? orienta? transmite seus conhecimentos profundos de programação matemática e, sobretudo? sua experiência humana de vida, sua visão liberal e aberta da realidade:

A Coordenação dos Programas de Pós-graduação de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro? pela oportunidade de realizar o Doutorado em Engenharia de Sistemas e Computação;

A Universidade Federal de Viçosa e A CRPES que proporcionaram suporte financeiro para a execução deste trabalho;

ao amigo Dr. Rloisio Rodrigues Pereira que, ao estimular nosso engajamento em trabalhos de pesquisa em Engenharia Florestal? permitiu? a partir de discussões preliminares? o nascimento da idéia central deste trabalho;

aos colegas do Departamento de Matemática/UFV que nos estimularam e ajudaram a vencer as dificuldades iniciais para a realização do programa de treinamento;

aos colegas do Departamento de Engenharia Florestal/UFV com quem discutimos aspectos importantes da parte aplicada deste trabalho;

aos professores e colegas da COPPE que nos incentivaram e nos acompanharam nos difíceis meandros de um curso de doutoramento;

A Sociedade de Investigações Florestais que nos colocou em contato com o meio empresarial onde detectamos profundo interesse pela realização desta pesquisa;

A Banca de Tese que se dispôs a examinar nosso trabalho;

e A minha família que assumiu comigo os sacrifícios inerentes à concretização desta tese.

Resumo da Tese Representada A COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessdrios para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

UM RLGORITMO DE DECOMPOSIÇÃO PRIMRL PARA SOLUÇÃO DE UM PROBLEMA DINÂMICO DE LOCALIZAÇÃO DE P-MEDIANAS E SUA APLICAÇÃO NA PRODUÇÃO DE CARVÃO EM PLANTAÇÃO DE EUCLIPTOS.

Geraldo Galdino de Paula Junior

Novembro - 1986

Orientador: Nelson Maculan

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação.

R elaboração de uma metodologia para solução de um problema dinâmico de localização e sua utilização na implantação de baterias de fornos para produção industrial de carvdo vegetal em reflorestamentos planejados. constituem os pontos centrais deste trabalho. As linhas mestras que orientaram a construção do sistema aqui descrito, são definidas pela montagem do modelo que abstrai da realidade um sistema produtivo específico, e pela construção de algoritmos eficientes para solução do problema subjacente. R modelagem é feita pela imersão do problema de localização não-capacitada de p-medianas num sistema dinâmico de decisões seqüenciais. R solução corresponde ao caminho de custo mínimo na rede dinâmica de recobrimento (rdr). Cada arco da rdr está associado A solução de um subproblema de localização, que é feita através de um algoritmo guloso ligeiramente aprimorado. e de um algoritmo de decomposição primal, baseado na relaxação Lagrangeana convexa do problema mestre do método de particionamento de Benders. Esta heurística, projetada e testada através de experimentos computacionais extensivos, revelou um método poderoso de solução de problemas de localização em redes não-capacitadas. O uso da metodologia desenvolvida, na solução de um caso concreto (com dados reais). demonstrou a grande conveniência do emprego de processos informdticos de engenharia de sistemas na solupdo de problemas de planejamento em economia da produção.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

R PRIMAL DECOMPOSITION ALGORITHM FOR R P-MEDIAN DYNAMIC LOCATION PROBLEM AND ITS APPLICATION TO CHARCOAL PRODUCTION IN EUCLYPT PLANTATION.

Geraldo Galdino de Paula Junior
November - 1986

Chairman: Nelson Maculan

Department: Engenharia de Sistemas e Computação.

SUMMARY

The main proposals in developing this work are the construction of a methodology for solving a specific dynamic location problem and its application in determining sites for charcoal industrial production units in planned reforestations. The basic framework in the system construction is a model of a specific production system and efficient algorithms for subsequent problem solving. The modeling process is accomplished through the immersion of the uncapacitated p-median location problem in a sequential decision-making dynamic system. The solution for the problem is the covering dynamic network minimum-cost path. Each path in this network is an "essential network" partition representation. This essential network is a region (planned forest) abstraction within which the production process is conducted. Each dynamic network arc is associated with the solution of a location subproblem. These solutions are found through a slightly enhanced greedy algorithm and a primal decomposition algorithm based on a convex Lagrangean relaxation of the Benders Master Problem. This heuristic method was extensively tested through a great many randomly generated test instances and revealed a powerful algorithm for the uncapacitated network location model. The methodology developed was applied in solving a real life problem, showing that the use of computer processes in systems engineering is a highly convenient procedure for solving production planning problems.

ÍNDICE

CAPÍTULOS	PÁGINAS
Capítulo I - INTRODUÇÃO.....	1
Capítulo II - REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E UM BREVE HISTÓRICO	6
2.1 - Introdução.....	6
2.2 - O Modelo Básico do Problema de Localiza- ção.....	8
2.3 - R Estrutura Facial do Politopo da Relaxação de Programação Linear do PLS.....	16
2.4 - Relação do PLS com outros Problemas Combinatórios.....	19
2.5 - Complexidade... ..	22
2.6 - Análise Probabilística.....	23
2.7 - Localização com Recobrimento.....	26
2.8 - O Problema Dinâmico de Localização..	28
2.9 - Complementos.....	30
Capítulo III - DEFINIÇÃO DE UM PROBLEMA DINÂMICO DE LOCALI- ZAÇÃO NÃO-CAPACITADO DE P-MEDIANAS, R- TRAVÉS DE UM PROCESSO DE TOMADA DE DECI- SUES SEQUENCIAIS.....	32
3.1 - Introdução.....	32
3.2 - Definição do Problema.....	35
3.3 - R Rede Dinâmica de Recobrimento	40

CAPÍTULOS	PÁGINAS
3.3.1 - Configuração da Rede Dinâmica de Recobrimento a Partir de Planos de Execução do Processo Produtivo na Rede Essencial.....	44
3.3.2 - Cálculo do Caminho Mínimo na Rede Dinâmica de Recobrimento.....	58
3.3.3 - Exemplo.....	62
3.4 - Processo Dinâmico de Decisões Sequenciais com Degeneração de Estágios.....	65
3.5 - Pseudodecisões Vazias e Fantasmas..	66
Capítulo IV - UM ALGORITMO HEURÍSTICO (GULOSO) PARA SOLUÇÃO DOS SUBPROBLEMAS P_t DO PROBLEMA DINÂMICO DE LOCALIZAÇÃO.....	69
4.1 - Introdução.....	69
4.2 - Os Algoritmos Aproximados e as Funções Supermodulares, Modulares e Submodulares.....	72
4.3 - O Algoritmo Guloso: Forma Básica....	80
4.4 - O Algoritmo de Trocas de Teitz e Bart.....	87
4.5 - Complementos.....	97

CAPÍTULOS	PÁGINAS
Capítulo V - SOLUÇÃO DOS SUBPROBLEMAS $P^{d(k)_t}$ DO PROBLEMA DINÂMICO DE LOCALIZAÇÃO, BASEADA NOS PROCEDIMENTOS DE RELAXAÇÃO LAGRANGEANA, NO ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO DE SUBGRADIENTES E NUM MÉTODO HEURÍSTICO DE DECOMPOSIÇÃO PRIMAL.....	104
5.1 - Introdução.....	104
5.2 - Fundamentos da Relaxação Lagrangeana	105
5.3 - Os algoritmos Baseados na Relaxação Lagrangeana como Alternativa para os Procedimentos do Tipo Dual-ascendente na Solução de Problemas de Localização Não-capacitada.....	111
5.4 - Implementação do Algoritmo Padrão Baseado na Relaxação Lagrangeana....	116
5.5 - O Algoritmo de Particionamento de Benders.....	127
5.6 - Um Algoritmo de Decomposição Primal Baseado na Relaxação Lagrangeana da Problema Mestre de Benders para Solução dos Subproblemas $P^{d(k)_t}$ do Problema Dinâmico de Localização....	133
5.6.1 - Relaxação Lagrangeana de (P^M)	136
5.6.2 - Projecção do Vetor $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_K)$ num Subespaço do \mathbb{R}^K	139

CRPÍTULOS	PÁGINAS
5.6.3 - O Algoritmo de Decomposição Primal.....	145
5.6.4 - Experiências Computacionais com o Algoritmo.....	147
 Capítulo VI - APLICAÇÃO: LOCALIZAÇÃO DINÂMICA DE BATERI- AS DE FORNOS PRRR PRODUÇÃO INDUSTRIAL DE CARVÃO VEGETAL EM UMA REGIÃO REFLORESTADA. 153	
6.1 - Introdução.....	153
6.2 - Conceitos Gerais de Exploração Flo- restal.....	156
6.3 - Estudo de um Caso: Elementos de um Projeto de Produção Industrial de Carvão Vegetal.....	158
6.3.1 - Dados Gerais.....	159
6.3.2 - A Praga de Baterias.....	161
6.3.2.1 - Bateria de Fornos.	162
6.3.2.2 - Área da Carvoaria.	164
6.3.3 - Sistemática ou Sequenciamen- to da Condução do Trabalho.....	165
6.3.3.1 - Exploração.....	165
6.3.3.2 - Transporte da le- nha.....	167
6.3.3.3 - Carbonização.....	169
6.3.4 - Quadro de Pessoal.....	169
6.3.5 - Investimentos.....	170

CAPÍTULOS	PÁGINAS
6.3.6 - Outros Itens.....	170
6.4 - Rndlises Locacionais.....	171
6.4.1 - Estimativas da Oferta e De- manda de Madeira.. ..	171
6.4.2 - Estimativas dos Custos Uni- tdrios e dos Custos Fixos...	173
6.4.3 - Ciclo de Corte e Exploração dos Talhões.....	176
6.4.4 - Montagem da Rede Dinâmica de Recobrimento Mínimo.....	176
6.4.5 - Resultados e Discussão das Rndlises Locacionais.....	180
Capitulo VII - EXTENSÕES E CONCLUSÕES.....	196
7.1 - Extensões.....	196
7.2 - Conclusões.....	201
RPÊNDICE A.....	209
RPÊNDICE B.....	214
BIBLIOGRAFIA.....	225

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO.

A formulação de modelos e algoritmos para solução de problemas de planejamento nos setores público e privado da economia, tem permitido, na ausência de sua aplicação imediata ao caso concreto, pelo menos uma compreensão maior do fenômeno estudado, além da percepção de aspectos vitais que conduzem à operação ótima dos sistemas subjacentes. É conhecida a frequente dicotomia entre o trabalho daqueles que exploram os níveis de abstração do problema, procurando ampliar o corpo estabelecido de modelos e técnicas, e a ação dos que praticam a implantação do cenário tecnológico associado, particularmente quando os aspectos de otimização das técnicas utilizadas podem ser considerados em relação ao aparato metodológico da Pesquisa Operacional. Nesse quadro, uma das raras exceções, vem dos problemas de localização de facilidades, que nas duas décadas recentes receberam profunda atenção de pesquisadores, e estimularam o aparecimento de uma série surpreendente de aplicações práticas, veja CORNUEJOLS, FISHER e NEMHRUSER (26, 1977), HAKIMI (66, 1964), e MIRZAIAN (115, 1985), que a seu turno, se constituíram em instrumento relevante de realimentação do processo de investigação teórica. De fato, as soluções conhecidas de inúmeros problemas de localização, em redes ou

não, permitiram expandir o uso eficiente de algumas ferramentas de programação matemática como auxílio no gerenciamento de diversas operações em setores emergentes da economia.

R explosão da crise energética tornou dramática a preocupação com a instalação de facilidades em locais ótimos, o que se aprofunda em decorrência da imposição de racionalidade no consumo de combustível em operações de transporte nas estruturas viárias previamente configuradas e afetadas ao problema.

No que concerne aos resultados da pesquisa teórica? Não se identifica com facilidade um precedente para o respeitável volume de artigos científicos sobre localização que a literatura especializada registra, veja TANSEL, FRANCIS e LOWE (171, 172, 1983), KRIPPON e PRUZAN (96, 1983) e FRANCIS, MCGINNIS e WHITE (49, 1983).

Neste trabalho estendemos a metodologia de solução dos problemas de localização ao planejamento da exploração florestal com vistas à produção industrial de carvão vegetal.

O aproveitamento econômico de florestas para diversos fins, particularmente em relação à produção de carvão vegetal, tem exigido a participação de recursos vultosos, sejam eles humanos, financeiros, de tempo e equipamentos. A manipulação ótima desses meios tem preocupado os responsáveis pela sua administração, dada a complexidade das operações globais demandadas e a ausência de

metodologias adequadas que permitam determinar os níveis de eficiência econômica deste setor. Dentre os inúmeros problemas, destacamos o da localização de pontos na floresta para instalação de baterias de fornos destinadas à produção industrial de carvão vegetal.

As baterias de fornos são infraestruturas dotadas de recursos hídricos, restaurante, dormitórios, residências, escritório, acesso, energia elétrica, centro médico-odontológico, além de um conjunto de fornos dimensionados e dispostos adequadamente. Essas baterias recebem a madeira que é processada e transformada em carvão vegetal. O produto é então fornecido a outros agentes do setor produtivo, basicamente à indústria siderúrgica que o utiliza como redutor na produção do aço.

A implantação dessas baterias incorre em custos fixos decorrentes da construção dos fornos e dos demais componentes da estrutura de produção. Os meios de transporte de madeira-lenha, dos pontos de colheita para as baterias incorrem em custos variáveis, em função da variação das distâncias relativas e das condições de uso das estradas e equipamentos de exploração florestal. Dada a dimensão da região reflorestada, a localização inadequada ou estática no tempo, pode conduzir a aumentos de custos variáveis superiores aos custos fixos de reimplantação (desativação num ponto da floresta e ativação em outro ponto) das baterias.

Este é um trabalho de engenharia de sistemas que produz e utiliza recursos de informática algorítmica para executar procedimentos computacionais ligados

a um sistema dinâmico de decisões seqüenciais, a modelos de programação discreta especializados na solução de problemas de localização não-capacitados, tendo como perspectiva uma aplicação concreta no contexto da engenharia de extração florestal e produção industrial de carvão vegetal em reflorestamentos planejados. Por "sistema" entenderemos aqui uma coleção de objetos que estão relacionados de tal forma que faz sentido imaginá-los como um todo.

A tarefa decorrente da proposta que aqui se faz, é executada nos capítulos seguintes onde, o de número 2, trata de uma revisão bibliográfica e um breve histórico, vistos de um nível relevante de generalidade e de acordo com o interesse central deste trabalho. Nesse capítulo, alguns fatos já conhecidos e de domínio da comunidade científica, são lembrados (acompanhados das devidas referências) com o intuito de permitir a inserção das novas idéias aqui produzidas, tornando-as agora parte integrante deste contexto e constituindo a ampliação pretendida do corpo de conhecimentos técnicos produzidos na elaboração das pesquisas subjacentes. O capítulo III define um modelo de localização através de um sistema dinâmico de decisões seqüenciais. Os capítulos IV e V cuidam da adaptação e construção dos algoritmos utilizados na solução dos subproblemas do problema dinâmico de localização. No capítulo V, é proposto, formulado e testado um algoritmo de decomposição primal, baseado na relaxação Lagrangeana do problema mestre do algoritmo de particionamento de Benders. Lá, assim como no capítulo IV, são executados testes

computacionais extensivos através de problemas simulados e com dados gerados aleatoriamente. No capítulo VI, é feita uma aplicação, do sistema construído aqui, a uma situação concreta com dados extraídos da realidade. Finalmente, no capítulo VII, são propostas algumas extensões do problema estudado? como sugestão para a continuação deste trabalho.

CAPÍTULO II

REVISÃO BIBLIOGRÁFICA E UM BREVE HISTÓRICO.

2.1 - Introdução:

A otimização da localização de pontos para instalação de facilidades pode ser vista como uma subárea de um contexto mais amplo definido pela seleção adequada de configurações em redes, tais como, redes de transporte, de distribuição e de comunicação. Em muitas situações, e quando é apropriado, a análise locacional é considerada, do ponto de vista econômico, como a busca do equilíbrio entre custos fixos de implantação de facilidades e custos variáveis de transporte, entre as facilidades e os pontos atendidos por elas. Isto pode ocorrer com ou sem imposição de restrições sobre o número de facilidades a serem instaladas no cenário objeto de estudo. Os problemas de localização ocupam a atenção dos pesquisadores, já há algum tempo. Um trabalho histórico citado em TANSEL, FRANCIS e LOWE (171, 1983) e HANSEN, LABBE, PEETERS e THISSE (68, 1985), remonta a 1869, onde C. Jordan, sob o título "Sur les assemblages de lignes", analisou automorfismos de formas quadráticas, obtendo a caracterização de "conjunto mediano" de uma Árvore. Porém, só na década de 60

deste século, tais estudos de problemas, modelos e algoritmos de localização assumiram um caráter profissional, consolidando seu início com o trabalho de HAKIMI (66, 1964), sobre localização ótima de centros de comutação e os conceitos de centros e medianas de um grafo. Os resultados obtidos desde então, formam um volume considerável de soluções adequadas As mais diferentes e surpreendentes situações, veja FRANCIS, MCGINNIS e WHITE (49, 1983), TANSEL, FRANCIS e LOWE (171, 172, 1983), HANSEN, LABBE, PEETERS e THISSE (68, 1985), CORNUEJOLS, FISHER e NEMHAUSER (26, 1977), KRARUP e PRUZAN (96, 1983) e WONG (184, 1984) e (185, 1983). Os estudos formulados até o presente são de problemas classificados, resumidamente como Estáticos, Dinâmicos, Não-capacitados, Capacitados, Discretos, Contínuos, Determinísticos, Probabilísticos e Multicritérios. Além destas, existem subclassificações para problemas e modelos, como, por exemplo, problema das p-medianas, dos p-centros, e uma fusão destes dois tipos em problemas de mediantes, veja HANSEN, LABBE, PEETERS e THISSE (68, 1985).

Neste capítulo será feito um pequeno levantamento bibliográfico do que foi desenvolvida até aqui, referente à localização ótima de facilidades, observando parcialmente a classificação apresentada acima, e colocando ênfase nos tópicos mais próximos da pesquisa desenvolvida para este trabalho, cujo relato constitui os capítulos seguintes.

2.2 - O Modelo Básico do Problema de Localização:

O modelo básico do problema simples de localização (PLS) é dado por

$$(M1): \text{ Minimize } Z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_j f_j y_j \quad (2.2.1)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_j x_{ij} = 1, \quad i \in I \quad (2.2.2)$$

$$y_j - x_{ij} \geq 0, \quad i \in I, j \in J \quad (2.2.3)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in I, j \in J \quad (2.2.4)$$

$$y_j \in (0,1), \quad j \in J \quad (2.2.5)$$

onde $I=\{1,\dots,m\}$ é o conjunto de clientes que demandam algum tipo de bem ou serviço e $J=\{1,\dots,n\}$ é o conjunto de facilidades em potencial, isto é, conjunto de pontos candidatos ou elegíveis, para instalação de facilidades, para atendimento dos clientes. O modelo (M1) é de um problema de localização do tipo não-capacitado, estático, discreto? e determinístico. Para se chegar a (M1), explicar o significado das variáveis e parâmetros, e compreender porque a sua simplicidade não acarreta perda na eficiência e no significado de suas soluções, pode-se partir do problema conhecido como capacitada e transformá-lo adequadamente em (M1).

Seja, portanto, o modelo dado por

$$(M2): \text{ Minimize } Z = \sum_i \sum_j (p_j + t_{ij}) \xi_{ij} + \sum_j f_j y_j \quad (2.2.6)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_j \xi_{ij} \geq d_i, \quad i \in I \quad (2.2.7)$$

$$a_j y_j - \sum_i \xi_{ij} \geq 0, \quad j \in J \quad (2.2.8)$$

$$\xi_{ij} \geq 0, \quad i \in I, j \in J \quad (2.2.9)$$

$$y_j \in \{0,1\}, \quad j \in J \quad (2.2.10)$$

onde I e J têm os significados de $(M1)$; p é o custo unitário de operação da facilidade j , incluindo aí os custos variáveis de produção e administração; t_{ij} é o custo unitário de transporte da facilidade j ao cliente i ; f_j é o custo fixo (investimento) de instalação da facilidade j ; e d_i é o número de unidades do bem ou serviço que corresponde à demanda do cliente i .

Com esta formulação procura-se essencialmente, minimizar a relação

(custo de produção) / (eficiência do plano de transporte)

para um conjunto de facilidades que produzem e fornecem um determinado item de consumo.

Na solução, o estado de uma facilidade é designado por "aberto" ou "fechado". Isto é, $y_j = 1$ se a

facilidade j é aberta (instalada e operada), e $y_j = 0$, caso contrário. Se $y_j = 1$, o valor de ξ_{ij} é o número de unidades produzidas na facilidade j e fornecidas ao cliente i , e se $y_j = 0$, teremos $\xi_{ij} = 0$. Assim, temos as $n + m \cdot n$ variáveis do problema, das quais as n variáveis y_j são chamadas de "estratégicas" e as $m \cdot n$ variáveis ξ_{ij} são as variáveis "táticas". Sempre que uma quantidade de item de consumo é enviada a partir de uma facilidade, esta incorre em um custo fixo (facilidade aberta). No modelo (M2) as n restrições (2.2.8), onde os a_j são constantes positivas que atuam como limites superiores para o fluxo máximo que sai da facilidade j , asseguram que os clientes serão atendidos somente a partir de facilidades abertas.

Uma hipótese sempre presente aqui é a de que $p_j \geq 0$ e $t_{ij} \leq 0$ isto é, $p_j + t_{ij} \geq 0$, $i \in I$, $j \in J$. Com isso, nenhuma facilidade envia além da quantidade demandada, o que permite trocar a a_j em (2.2.8) por $\sum_i d_i$. Além disso, as m desigualdades (2.2.7) podem ser trocadas por igualdades. Na ocorrência de algum $p_j + t_{ij}$ negativo, é possível transformar os dados adequadamente com intuito de manter a hipótese de não-negatividade acima. Substitui-se $p_j + t_{ij}$ por $p_j + t_{ij} + \alpha_i$ para todo i, j , onde as constantes α_i são escolhidas de acordo com

$$\alpha_i \geq \max (| p_j + t_{ij} | : p_j + t_{ij} < 0).$$

O único efeito desta transformação será o de aumentar a função objetivo de $\sum_i \alpha_i$, sem contudo, alterar a solução ótima.

Os custos fixos serão considerados sempre não negativos? uma vez que não faz sentido, do ponto de vista prático, considerá-los de outra forma. Mesmo assim, se ocorrer algum $f_j < 0$, este será adicionado à função objetivo que ficará reduzida de uma constante, e no lugar de f_j em (2.2.6), será colocado zero. Com isso, não há perda de generalidade no fato de se trabalhar com a hipótese de todos os f_j serem não negativos. Os custos refletirão adequadamente e de maneira natural a localização, o tamanho e a economia de escala das facilidades.

Para se determinar um conjunto ótimo de ξ_{ij} , a partir de qualquer vetor binário $y = (y_j)$ dado, procede-se da seguinte forma: Seja

$$X = \{ j : y_j = 1 \} \text{ e seja}$$

$$X(i) = \{ j \in X : p_j + t_{ij} = \min_{s \in J} c_p + t_{is} \}.$$

A relação ótima (custo de produção)/(eficiência do plano de transporte) fica determinada em relação ao vetor $y = (y_j)$ dado, se, para todo $i \in I$ e para algum $j \in X(i)$, for feito $\xi_{ij} = d_i$ e, para outros j 's, $\xi_{ij} = 0$. Com isso, a quantidade de soluções distintas possíveis, em termos de variáveis estratégicas, é dada por $\sum_{k=1}^n \binom{n}{k}$, ou seja, $2^n - 1$. Se cada cliente é servido por uma única facilidade, o número total de atribuições distintas possíveis, de clientes a facilidades? é n^m . Basta observar que do primeiro ao último dos m clientes, cada um tem n formas de ser atendido.

Se x_{ij} é a fração da demanda do cliente i , atendida a partir da facilidade j , isto é, se $x_{ij} = (1/d_i) \cdot \xi_{ij}$ temos que

$$d_i (p_j + t_{ij}) x_{ij} = (p_j + t_{ij}) \xi_{ij},$$

$$e \quad c_{ij} = d_i (p_j + t_{ij})$$

é o custo total de atendimento do cliente i a partir da facilidade j . As m restrições $\sum_j \xi_{ij} = d_i, i \in I$, passam a $\sum_j x_{ij} = 1, i \in I$, e trocando a por $\sum_j d_i$ nas n desigualdades $a_j y_j - \sum_i \xi_{ij} \geq 0, j \in J$, vem $\sum_i d_i (y_j - x_{ij}) \geq 0$.

Estas podem ser desagregadas nas $m \cdot n$ restrições do tipo

$$y_j - x_{ij} \geq 0.$$

Com isso, chegamos ao modelo (M1).

Apesar da restrição $x_{ij} \geq 0$ em (M1) não obrigar necessariamente que $x_{ij} \in \{0,1\}$, para todo $i \in I$ e todo $j \in J$, na solução ótima, conforme EFROYMSON e RRY (36, 1966), exatamente m dos x_{ij} serão iguais a 1 e todos os outros iguais a zero. Isto ocorre porque para qualquer especificação inteira dos y_j 's, os x_{ij} ótimos podem ser determinados diretamente permitindo que cada cliente seja atendido pela facilidade (aberta) mais próxima.

O custo total de uma solução ótima em relação a um dado subconjunto $X \subset J$, de facilidades abertas? é, portanto,

$$\sum_{i \in I} \min_{j \in X} c_{ij} + \sum_{j \in X} f_j.$$

Estes fatos reduzem a solução do problema à identificação de um subconjunto $X \subset J$ que minimiza o custo total.

Uma alternativa para as $m \cdot n$ restrições (2.2.3) de (M1) consiste em agregá-las em n restrições da forma

$$\sum_j n_j y_j - \sum_i x_{ij} \geq 0, \quad j \in J, \quad (2.2.11)$$

onde n_j é o número de clientes que podem ser supridos a partir da facilidade j .

O PLS com as restrições fortes (desagregadas) (2.2.3) será designado de PLS forte, PLS-FOR e o PLS com as restrições fracas (agregadas) (2.2.11) será designado por PLS fraco, PLS-FRR. Para um mesmo conjunto de custos, as soluções ótimas do PLS-FOR e PLS-FRA são iguais. Isto é, não altera a solução ótima se forem usadas as restrições (2.2.3) ou (2.2.11). Entretanto, vários algoritmos para solução do YLS foram projetados com base numa ou noutra formulação. Num estudo sobre a aceleração do algoritmo de Benders e critérios para formulação eficiente de modelos alternativos, MAGNANTI e WONG (109, 1981), propuseram um algoritmo que converge (na solução de casos específicos onde há restrição da quantidade de facilidades) com um número exponencial de cortes de Benders quando é utilizada a formulação do PLS-FRA, e com um único corte de Benders, com a formulação do PLS-FOR.

Os algoritmos considerados mais eficientes para o PLS-FOR são os de ERLKOTTER (38, 1978) e BXLDE e KRARUP (11, 1977), baseados num procedimento dual ascendente,

que é uma heurística para a solução da relaxação de programação linear do PLS. A solução dual viável obtida, produz um limite inferior para o ótimo do YLS. As condições das folgas complementares e a solução dual são usadas também para construir uma solução viável do YLS que produz um limite superior para o ótimo. O procedimento dual ascendente é, então, combinado com um algoritmo do tipo separação e avaliação (Branch and Bound), de modo que a solução ótima é sempre encontrada. Os resultados de experiências computacionais são muito impressionantes. As rotinas do tipo dual ascendentes produzem, usualmente, limites muito justos que asseguram uma expansão pequena da árvore de busca do algoritmo de separação e avaliação.

O problema das p -medianas restringe a p o número de instalações a serem abertas numa rede, ao mesmo tempo em que, na solução, procura-se minimizar a soma das distâncias mínimas (ou custos mínimos para percorre-las) da facilidade aos vértices da rede considerada. É um problema do tipo mini-soma.

No problema dos p -centros procura-se minimizar a distância (ou custo para percorrê-la) entre a facilidade e o vértice mais distante dentro da rede. Em outras palavras, minimiza-se as distâncias máximas, ou tempos máximos, ou custos máximos. Enquanto que no problema das p -medianas a solução identifica as medianas da rede, no problema dos p -centros, que é do tipo mini-max, a solução localiza os centros da rede.

O modelo do problema puro das **p**-medianas de uma rede se obtém fazendo $I = J = \{1, \dots, n\}$, acrescentando ao modelo (M1) do PLS a relação que restringe a **p** o número de facilidades a serem instaladas na rede, e suprimindo os custos fixos na função objetivo. Obtém-se:

$$(M3): \quad \text{Minimize } Z = \sum_i \sum_j d_{ij} x_{ij} \quad (2.2.12)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \sum_j x_{ij} = 1, \quad i \in I = J \quad (2.2.13)$$

$$\sum_j x_{jj} = p \quad (2.2.14)$$

$$x_{jj} - x_{ij} \geq 0, \quad i \in I, j \in J \quad (2.2.15)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i \in I, j \in J \quad (2.2.16)$$

onde (d_{ij}) é uma matriz quadrada de ordem n em que cada d_{ij} , $i \neq j$, é a distância (não negativa) entre os vértices i e j da rede, e $d_{ii} = 0$. (x_{ij}) é a matriz de alocação, tal que $x_{ij} = 1$ se o vértice i é alocado à mediana j , e $x_{ij} = 0$, caso contrário.

No problema generalizado de **p**-medianas com custos fixos, além de acrescentar na função objetivo do modelo (M3) a parcela referente aos custos fixos, troca-se a restrição (2.2.14) por

$$1 \leq \sum_j x_{jj} \leq p. \quad (2.2.17)$$

O problema das **p**-medianas foi tratado, entre outros, por

NRRULR, OGBU e SRMUELSSON (120, 1977), GALVÃO (52, 1980), CHRISTOFIDES e BERSLEY (17, 1982), COELHO e CRPITIVO (23, 1984), e MIRZRIRN (115, 1985). O problema dos p-centros foi estudado por HRKIMI (66, 1964), MINIEKR (113, 1977) e outros.

2.3 - R Estrutura Facial do Politopo da Relaxação de Programação Linear do PLS:

Através da investigação das propriedades estruturais do politopo das relaxações forte e fraca de programação linear do PLS, propriedades essas ainda não totalmente conhecidas, ao contrário do que ocorre com outros problemas combinatórios, é possível adquirir uma compreensão maior a respeito da possibilidade de se introduzir restrições adicionais que eliminem todas as soluções ótimas fracionárias e deixem invioladas todas as soluções inteiras viáveis.

Um conjunto do tipo

$$X = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b \}$$

m, n

é chamado de "poliedro", onde $Ax \leq b$ é um sistema de m desigualdades a n variáveis. Um "politopo" é um poliedro limitado? isto é, tal que $-\infty < x_j < \infty$, para todo j , $j=1, \dots, n$.

Conforme ROCKRFELLRR (151, 1970), uma coleção de pontos $x_0, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ é dita "afim independente" se, e somente se, os vetores $(x_1 - x_0), (x_2 - x_0), (x_3 - x_0) \dots$ forem linearmente independentes. Um poliedro X , com, no máximo, $k+i$ pontos afim independentes, tem

m, n

dimensão k .

$\sum_j a_j x_j \leq b_i$ é uma desigualdade "válida" para $X_{m,n}$ se ela é satisfeita para todo $x \in X_{m,n}$.

Uma "face" de $X_{m,n}$ é um subconjunto de soluções viáveis para $Rx \leq b$, que satisfazem algumas das restrições como igualdades, ou seja? é um conjunto

$$f = X_{m,n} \cap \{x : \sum_j a_j x_j = b_i\}.$$

Se $\sum_j a_j x_j \leq b_i$ é uma desigualdade válida para $X_{m,n}$ e se $\sum_j a_j x_j = b_i$ para exatamente k pontos $x \in X_{m,n}$, afim independentes, $(0 \leq k-1 \leq \dim(X_{m,n}) \leq n)$ a igualdade $\sum_j a_j x_j = b_i$ descreve uma face de $X_{m,n}$ de dimensão $k-1$.

Um ponto extremo ou vértice de $X_{m,n}$ é qualquer face sua de dimensão "zero".

Uma aresta de $X_{m,n}$ é qualquer face de $X_{m,n}$ de dimensão "um".

Se a dimensão de $X_{m,n}$ é k , qualquer face de dimensão $k-1$ de $X_{m,n}$ é uma "facet" de $X_{m,n}$.

Em GUIGNERD (64, 1980) é construída uma família de vértices fracionários do politopo da relaxação do PLS-FOR, e são gerados vários cortes válidos para eliminá-los. Prova-se lá que alguns desses cortes são facets. Além disso, famílias de PLS's com grandes falhas (gaps) de dualidade são estudadas? exibindo-se para elas, facets específicas que fecham a falha dual.

CHO, JOHNSON, PADBERG e RRO (20, 1981), CHO, PADBERG e RRO (21, 1981) e CORNUEJOLS e THIZY (29, 1982), também exibem resultados na direção da exploração de outras

propriedades da estrutura facial do politopo da relaxação do PLS.

É interessante notar que muitos testes computacionais indicam que as relaxações de programação linear para o problema das p-medianas produzem, com grande frequência, aproximações muito boas para os correspondentes modelos de programação inteira. Conforme TOREOAS (179, 1971), SCHRAGE (158, 1975) e ERLKOTTER (38, 1978), as relaxações de programação linear para estes problemas de localização, têm, frequentemente, soluções ótimas. As razões para este fenômeno ainda não são bem compreendidas, embora já existam pesquisas no sentido de esclarecer melhor esta questão. O procedimento dual ascendente provê uma maneira de utilizar as relaxações do PLS. Uma outra forma consiste em resolver diretamente as relaxações de programação linear utilizando o método simplex. SCHRAGE (158, 1975) obteve bons resultados com uma versão especial do algoritmo simplex na solução de relaxações de programação linear do PLS. Uma dificuldade na solução destes problemas surgiu do fato de que os programas lineares com restrições de limites superiores variáveis do tipo $x_{ij} \leq y_j$ (restrição (2.2.3)), são, com grande frequência, muito degeneradas. TODD (177, 1982) propõe uma especialização alternativa do método simplex que contorna o problema da degeneração. Entretanto, não é relatada nenhuma experiência computacional com esse procedimento.

2.4 - Relação do PLS com outros Problemas Combinatórios:

O PLS se relaciona com os problemas do recobrimento (REC), particionamento (PAR) e empacotamento (EMP), que são estruturas bem conhecidas na otimização combinatória.

Sejam $I = \{1, \dots, m\}$ e $J = \{1, \dots, n\}$ dois conjuntos finitos e $A = (a_{ij})$ uma matriz $m \times n$ tal que $a_{ij} \in \{0, 1\}$, para todo $i \in I$ e todo $j \in J$.

$\bar{J} \subset J$ é chamado de "um recobrimento" de I se $\sum_{j \in \bar{J}} a_{ij} \geq 1$, para todo $i \in I$, e $J' \subset J$ é chamado de "um particionamento" (ou recobrimento exato) de I se $\sum_{j \in J'} a_{ij} = 1$, para todo $i \in I$.

$y = (y_j)$ é um vetor cujos componentes são variáveis com o seguinte significado:

$y_j = 1$ se a coluna j está no recobrimento ($j \in \bar{J}$) e $y_j = 0$, caso contrário ($j \notin \bar{J}$). f_j é o custo em que se incorre quando $y_j = 1$.

Através do modelo

$$\text{Minimize } \sum_j f_j y_j \quad (2.4.1)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_j a_{ij} y_j \geq 1, \quad i \in I \quad (2.4.2)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j \in J, \quad (2.4.3)$$

pode-se resolver o problema do recobrimento mínimo

(ponderado); e a correspondente problema do particionamento mínimo (ponderado), pode ser resolvido pelo modelo acima? desde que se troque a restrição (2.4.2) por $\sum_{j \in J} a_{ij} y_j = 1$, $i \in I$, veja SALKIN (157, 1975) e GARFINKEL e NEMHAUSER (56, 1972).

O problema do empacotamento tem como modelo:

$$\text{Maximize } Z = \sum_j f_j y_j \quad (2.4.4)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_j a_{ij} y_j \leq 1, \quad i \in I \quad (2.4.5)$$

$$y_j \in (0,1), \quad j \in J. \quad (2.4.6)$$

As relações do PLS com esses problemas estão na possibilidade de transformá-los um no outro.

Em geral os problemas são classificados a partir do esforço computacional dos algoritmos utilizados na sua solução. Dada uma classe de problemas P , onde n é uma medida adequada do "tamanho" dos problemas na classe? veja LENSTRA, RINNOOY KAN e BOAS (100, 1982), PAULA JUNIOR e BORNSTEIN (133, 1983) e PRPRDIMITRIOU e STEIGLITZ (130, 1982), diz-se que um algoritmo para resolver um problema em P é de "ordem $f(n)$ " (escreve-se $O(f(n))$), se $k \cdot f(n)$ é um limite superior sobre a quantidade de esforço para resolver qualquer problema em P , onde $f(n)$ é uma função de valores reais, e k é alguma constante (geralmente não especificada). $O(f(n))$ é uma medida baseada na "análise do pior caso".

As transformações do PLS em REC, PAR e EMP e vice-versa? que serão utilizadas aqui, são de tempo

polinomial, no sentido de que, quando operadas por um algoritmo adequado, o tempo gasto por este para executar a transformação, é limitado por um polinômio, ou seja, o algoritmo da transformação é $O(p(n))$, onde $p(n)$ é um polinômio e n uma medida do tamanho da instância do problema a ser transformado.

Para ilustrar? será feita a transformação do PLS em PRR. As outras podem ser encontradas em KRRRUP e PRUZAN (96, 1983).

Partindo de (M1), fazendo $\bar{y}_j = 1 - y_j$, e definindo as variáveis de folga $s_{ij} = 1 - x_{ij} - y_j \geq 0$ para todo $i \in I$ e todo $j \in J$, relativos às restrições desagregadas (2.2.3), vem:

$$\text{Minimize } \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} - \sum_j f_j \bar{y}_j + \sum_j f_j \quad (2.4.7)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_j x_{ij} = 1, \quad i \in I \quad (2.4.8)$$

$$x_{ij} + \bar{y}_j + s_{ij} = 1, \quad i \in I, j \in J \quad (2.4.9)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad s_{ij} \geq 0, \quad i \in I, j \in J \quad (2.4.10)$$

$$\bar{y}_j \in \{0,1\}, \quad j \in J \quad (2.4.11)$$

Pela observação de HROYMSON e RAY (36, 1966), que garante? na solução ótima, $x_{ij} = 0$ ou 1 e, conseqüentemente, $s_{ij} = 0$ ou 1 , chegamos ao problema do particionamento mínimo ponderado, trocando as restrições (2.4.10) e (2.4.11) por $x_{ij}, s_{ij}, \bar{y}_j \in \{0,1\}$, o que completa a transformação do PLS em

PAR.

2.5 - Complexidade:

Ao mesmo tempo em que o PLS é um problema bem estruturado e este fato por si só constitua um convite a aplicações de técnicas especializadas na sua solução, ele se equipara aos problemas de programação matemática que exibem toda sorte de dificuldades combinatoriais típicas, que caracterizam a sua intratabilidade. Infelizmente, isto é um indicador de que é altamente improvável a existência de um algoritmo exato de tempo polinomial para resolvê-lo.

COOK (25, 1971) e KARP (86, 1972) introduziram a noção de problema NP-completo, com a qual constroem uma classe de problemas equivalentes, no sentido de que ou "nenhum" dos problemas NP-completos pode ser resolvido por qualquer algoritmo polinomial, ou "todos" esses problemas são solúveis por algum procedimento algorítmico de tempo polinomial. Para maiores detalhes sobre este conceito, veja GRREY e JOHNSON (54, 1979), LENSTRA, RINNOOY KAN e BOAS (100, 1982), PRPRDIMITRIOU e STEIGLITZ (138, 1982) e PAULA JUNIOR e BORNSTEIN (133, 1983). Até o presente não é conhecido nenhum algoritmo polinomial exato que resolva qualquer problema NP-completo, e tem sido amplamente conjecturado que tal algoritmo não existe.

A demonstração de que um problema é NP-completo é feita, simplificada, exibindo uma transformação de tempo polinomial que reduz qualquer instância de um problema NP-completo conhecido a uma instância do

problema em questão. Ou então mostrando que o problema em questão admite como caso particular um problema já demonstrado como sendo NP-completo. Certamente o primeiro problema NP-completo não recebeu uma demonstração seguindo o esquema acima. Em 1971, Cook provou o resultado fundamental de que o problema da realização Booleana (satisfiabilidade) é NP-completo. A partir daí, foi criada uma árvore enorme de centenas de provas de problemas NP-completos. Cada vértice da árvore de problemas NP-completos pode ser usado como ponto de início para novos resultados.

Tanto quanto problemas de otimização, usualmente formulamos problemas de dizer se existe uma solução viável de, digamos, valor mínimo, como o problema de decidir se existe uma solução viável com valor, no máximo, igual a um dado patamar. Se este problema é NP-completo, então o problema de otimização correspondente é dita NP-árduo (NP-hard) no sentido de que ele é pelo menos tão difícil quanto qualquer outro problema NP-completo.

Em CORNUEJOLS, NEMHRUSER e WOLSEY (28, 1983) está a demonstração de que o PLS é um problema NP-árduo.

2.6 - Análise Probabilística:

A análise de algoritmos de otimização preocupa-se, em geral, com os estudos do pior caso, do tempo e espaço gastos por esses métodos. Tal análise leva em conta o tempo consumido por uma instância isolada do problema? e, portanto? os resultados podem ser pessimistas e dar falsa impressão do comportamento do caso médio. Este fato é

sustentado por uma abundância de evidências empíricas. Com isso, a explicação do comportamento dos algoritmos pode ser muito mais de natureza probabilística.

Analise probabilística requer em primeiro lugar a especificação de uma distribuição de probabilidades sobre o conjunto de todas as instâncias do problema. Isto pode não ser muito simples. Por exemplo, vários modelos para gerar grafos aleatórios foram extensivamente investigados, entretanto, para outras estruturas combinatorias, a escolha de um modelo probabilístico razoável é menos óbvia.

Analise probabilística de problemas e algoritmos combinatorios está usualmente longe de ser trivial. As principais razões para isso são a estrutura discreta das instâncias e soluções do problema, bem como a interdependência entre os vários passos de um algoritmo. O que acontece em um nó de uma árvore de busca? por exemplo, depende altamente do que aconteceu em seu predecessor.

Nos anos recentes, tem havido progresso em várias frentes. Uma destas frentes é a "análise probabilística do tempo consumido". Um exemplo deste enfoque é o esforço coletivo para explicar o sucesso do método simplex para a programação linear. Um dos grandes desafios aqui é dar provas rigorosas do consumo de tempo polinomial esperado de vários algoritmos de busca, a fim de confirmar análises informais ou evidências empíricas.

Em segundo lugar existe a área de análise probabilística de erros, onde o erro se refere à diferença (absoluta ou relativa) entre o valor de uma solução aproximada

e o ótimo. O comportamento empírico de heurísticas sugere que o erro do pior caso é raramente encontrado na prática. Além disso, a sua verificação analítica pode ser bastante difícil. Muita pesquisa deste tipo é baseada na análise do valor probabilístico, a terceira área e talvez a mais surpreendente. Muitos problemas difíceis de otimização combinatória, especialmente aqueles com estrutura Euclideana, permitem uma descrição probabilística simples do valor de sua solução ótima em termos dos parâmetros do problema.

A especificação desses problemas inclui um conjunto de pontos no espaço Euclidiano. A análise probabilística dos valores das soluções ótimas e algoritmos aproximados para tais problemas frequentemente começa a partir da hipótese de que os pontos são independentes e uniformemente distribuídos sobre uma região fixa de duas dimensões. Por exemplo, um círculo, um quadrado. Muitos resultados podem ser estendidos a outras distribuições e a dimensões mais altas.

Dois problemas básicos de localização, que se incluem no contexto dos problemas com estrutura Euclideana, são os problemas de p -medianas e de p -centros. A análise assintótica para estes problemas envolve necessariamente uma hipótese sobre a taxa de crescimento de p como uma função de n .

FPSHER e HOCHBAUM (44, 1980) propuseram uma heurística de particionamento que divide um quadrado em quadrados congruentes e resolve o problema ponderado das p -medianas nesses quadrados menores, com o peso de cada quadrado

igual ao número de pontos que ele contém. É mostrado que, do ponto de vista probabilístico, a heurística é assintoticamente ótima, além de fornecer o intervalo ótimo assintótico.

FAPADIMITRIOU (131, 1981) propôs uma heurística, para o problema das p -medianas, que divide a região (rede) em hexágonos regulares. Concluiu, para o caso em que p é $O(n \log n)$, que a heurística é, do ponto de vista probabilístico, assintoticamente ótima. Isto é, ele mostrou que o erro relativo desta heurística tende a zero com probabilidade "um" quando n tende a infinito.

ZEMEL (186, 1985) discute de forma unificada os problemas das p -medianas e p -centros para n pontos espalhados uniformemente numa região arbitrária R do IR^k . Sob hipóteses bem moderadas a respeito desta região, é mostrado, quando p é $O(n \log n)$, que os valores objetivos das versões discreta e contínua destes problemas são quase sempre iguais.

2.7 - Localização com Recobrimento:

Os modelos do PLS e das p -medianas são úteis para situações onde minimizar o custo total de atendimento a clientes é uma consideração importante. Em outras aplicações tais como localização de um corpo de bombeiros, serviços de atendimento ambulatorial, equipamento de socorro para vítimas de acidentes, etc., é apropriado determinar se cada cliente está recebendo um nível adequado de serviços. Uma facilidade provê um serviço adequado ou "coberto"

um cliente se o custo do serviço correspondente é menor que um dado máximo. Por exemplo, um corpo de bombeiros cobriria uma vizinhança particular se o tempo de trajeto (custo de atendimento) entre duas áreas fosse menor do que uma dada limieira (cota). Problemas de localização com recobrimento, envolvem a instalação de facilidades onde o número total de clientes cobertos é uma consideração importante.

Freqüentemente, o modelo usado para o problema de localização com recobrimento parcial de custo mínimo é dado por

$$\text{Minimize } \sum_i a_i x_i + \sum_j f_j y_j \quad (2.7.1)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{j \in N_i} y_j + x_i \geq 1, \quad 1 \leq i \leq m \quad (2.7.2)$$

$$x_i, y_j \in \{0,1\}, \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n \end{matrix} \quad (2.7.3)$$

onde cada N_i representa o conjunto de facilidades elegíveis que cobre o cliente i . A variável $x_i = 1$ se o cliente i "não é" coberto por qualquer facilidade, $x_i = 0$, caso contrário. Também, se o cliente i não é coberto, incorre-se em uma penalidade a_i . Como antes, y_j é 1 ou zero conforme a facilidade j seja ou não instalada, e f_j é o custo fixo de implantação da facilidade j .

Se se incorpora ao modelo uma restrição adicional, limitando o número de facilidades,

$$\sum_j y_j \leq p,$$

o modelo torna-se o da problema de localização com recobrimen-

to máximo de custo mínimo.

Estes problemas foram tratados por PLANE e HENDRICK (144, 1977) e PATEL (132, 1979).

2.8 - O Problema Dinâmico de Localização:

No problema dinâmico de localização procura-se otimizar a implantação de facilidades por estdgos através da seleção adequada de decisbes em um sistema dinâmico de decisdes seqüenciais.

Duas características determinam a necessidade de uma estrutura dinâmica no contexto de uma andlise locacional:

- i) a existência de mudanças temporais nos processos de oferta e demanda, ou nos custos, e
- ii) ganhos significativos provenientes do processo de realocização e redimensionamento de facilidades.

Na dimensão "espacial", construir facilidades menores e mais dispersas, decresce o custo de distribuição (ou atendimento), mas aumenta o custo (fixo) total das facilidades. Na dimensão "temporal", construir facilidades menores também aumenta o custo das facilidades, mas permite adiar desembolsos e até mesmo obter alguma redução no custo total? sobretudo, numa

economia que opera com altos custos financeiros.

O problema de localização temporal de capacidades produtivas para um sistema industrial tem recebido atenção crescente nos últimos anos.

VRN ROY e ERLENKOTTER (155, 1982) formularam um modelo dinâmico particular de localização de facilidades como um problema de otimização combinatória. A formulação permite abrir novas facilidades e fechar as já existentes. Apresentaram também para solução do problema um método de separação e avaliação incorporado ao algoritmo dual ascendente de BILDE e KRARUP (11, 1977) e ERLENKOTTER (38, 1978).

ROODMAN e SCHWRRZ (153, 1975) foram os introdutores da versão não capacitada do problema dinâmico de localização.

ERLENKOTTER (37, 1981) apresentou métodos aproximados para o problema dinâmico de localização, e, além disso, fez uma análise comparativa dos algoritmos introduzidos.

ERLENKOTTER e ROGERS (40, 1977) apresentaram um algoritmo de programação dinâmica com subproblemas de transporte.

Além desses, WESOLOWSKY e TRUSCOTT (182, 1975) também se ocuparam do problema de realocação de facilidades.

2.9 - Complementos:

As aplicações da metodologia de localização são as mais variadas e surpreendentes. Nesse contexto e a título de ilustração, destacam-se o artigo de CORNUEJOLS, FISHER e NEMHRUSER (26, 1977), onde é apresentada uma aplicação sobre localização de contas bancárias em lugares estratégicos que permitem maximizar o tempo de compensação dos cheques emitidos e, portanto, aumentar a disponibilidade diária de fundos de uma dada empresa.

Na análise de agrupamentos onde n entidades são aglomeradas em p grupos mutuamente excludentes, a metodologia locacional é utilizada e os trabalhos de MULVEY e CROWOER (118, 1979) e MULVEY e BECK (117, 1984), são devotados a este assunto.

MIRZIRN (115, 1985) estudou a localização de concentradores que é um problema de rede de comunicação para computadores e que consiste em conectar vários terminais remotos a uma central de processamento através de concentradores estrategicamente localizados.

Além dos trabalhos mencionados até aqui, nas seções anteriores, devem ser citados outros que investigam algoritmos aproximados com comportamento assintótico polinomial. HOCHBRUM (73, 1982), propôs uma heurística $O(n^2)$ para o problema das medianas com custo fixo.

Um algoritmo $O(n^3)$ para os problemas de recobrimento e localização em rede (tipo

árvore), é desenvolvido em KOLEN (94, 1983). Em CORNUEJOLS e THIZY (29, 1982), um procedimento de relaxação Lagrangeana, aplicado ao dual da relaxação de programação linear do PLS é combinado com um algoritmo guloso produzindo uma heurística com grau de exatidão altamente satisfatório.

No domínio dos problemas de localização do tipo "itens múltiplos", onde cada cliente demanda todos os itens e cada facilidade aberta transaciona com um único tipo de item, destacam-se os trabalhos de NEEBE e KHUMÄWÄLR (122, 1981) e KARKAZIS e BOHEY (83, 1981). Neste último é feita uma comparação do desempenho computacional de um enfoque dual-ascendente com um procedimento baseado no dual Lagrangeano.

No contexto dos problemas capacitados, é relevante o trabalho de GEOFFRION e McBRIDE (61, 1978), onde é utilizada a técnica de relaxação Lagrangeana e é incorporado ao modelo um conjunto adicional de restrições. Um procedimento computacional do tipo separação e avaliação, baseado na relaxação Lagrangeana e na técnica de redução da problema por fixação de variáveis, é proposto por CHRISTOFIDES e BERSLEY (18, 1983).

CAPÍTULO III

DEFINIÇÃO DE UM PROBLEMA DINÂMICO DE LOCALIZAÇÃO NÃO-CAPACITADO DE p -MEDIANAS, ATRAVÉS DE UM PROCESSO DE TOMADA DE DECISÕES SEQUÊNCIAIS.

3.1 - Introdução:

Nos problemas de localização de facilidades em redes, é freqüente o caso em que, no decorrer do tempo, não há modificação de posição das estruturas de atendimento instaladas em pontos escolhidos como solução prévia do problema. Estes são os problemas estáticos de localização.

Propomos aqui um problema de localização em que a posição dos pontos utilizados para instalação de facilidades possa variar discretamente com o tempo. As estruturas implantadas com esta possibilidade devem ser portáteis ou permitir sua desativação num ponto e ativação em outro ponto da rede, em período posterior. Este será denominado "problema dinâmico de localização".

No problema estático de localização "puro", procura-se regionalizar a rede em função dos pontos eleitos, definindo um plano ótimo de transporte associado ao processo de oferta e demanda de bens e serviços existentes nos nós da rede.

No problema estático de localização de p -medianas em rede, o objetivo é o mesmo, só que procura-se atingi-lo mantendo controle sobre o número de facilidades (não mais que p) a serem instaladas na rede. É um problema mais restrito.

No problema dinâmico de localização de p -medianas em rede proposto aqui, além da restrição acima, mantém-se um certo controle sobre a regionalização da rede, com características alternativas, seguindo a orientação das peculiaridades do processo produtivo, ou do sistema de consumo, ou de ambos, existentes na região para a qual a rede é uma conveniente abstração. Em alguns casos existe uma pre-regionalização da rede que não pode ser destruída pelo algoritmo. Ele pode, quando muito, superpor outra regionalização, porém sem destruir a previamente existente ou construída por algum processo natural.

A redação da definição do problema tratado aqui será feita em termos genéricos. Entretanto, a formulação apresentada está intimamente ligada à identificação de uma situação particular, porém, concreta, ligada à engenharia de exploração florestal.

Os reflorestamentos, ou florestas cultivadas a partir de um planejamento prévio, para consumo industrial, têm características próprias, provenientes da organização e administração do plantio, das atividades de controle e proteção durante o crescimento, e da forma de aproveitamento econômico durante a extração da madeira.

Há uma regionalização da floresta em termos da idade (ou época) de corte que define uma prioridade natural no processo de extração e isto, necessariamente, tem que ser observado no momento da colheita da madeira. As divisórias (ou fronteiras) entre duas regiões com épocas de corte diferentes, algumas vezes, não são muito nítidas, o que permite uma certa flexibilidade no processo de exploração.

Além disso, tem que ser observada a legislação vigente que normaliza as atividades do setor; a existência de áreas de preservação e de beleza cênica, parques florestais, proteção à fauna, As condições ecológicas ligadas ao relevo, solo e potencial hidrográfico.

A floresta pode ser composta de partes disjuntas e ter várias de suas regiões exploradas sequencial ou simultaneamente. Toda essa diversidade em relação aos setores industriais otimizados até agora com ferramentas de programação matemática, compõe um sistema com características tais que ficam a exigir um tratamento não convencional no tocante à escolha de pontos para instalação dinâmica de carvoarias no interior das florestas.

Toda a metodologia será estudada e apresentada no seu contexto genérico e particularizada para a aplicação a que se destina este trabalho.

Nos casos dos problemas de localização mencionados no início, bem como no estudo desenvolvido aqui, não é levada em consideração a capacidade dos pontos de oferta, nem dos locais de demanda. Estes são conhecidos como problemas não-capacitados, fato que interpreta a capacidade

pseudo-infinita dos centros.

3.2 - Definição do Problema:

Chamaremos de "rede essencial" a uma abstração da região para a qual é conduzida a otimização de instalação de facilidades. Os nós ou vértices da rede essencial são os pontos de demanda e/ou oferta de bens e serviços da região. No tocante à aplicação definida pela localização dinâmica de baterias de fornos, os nós da rede essencial são identificados com os talhões em que uma floresta planejada é dividida e que são áreas reflorestadas de aproximadamente 40 hectares. Esses mesmos talhões podem ser pontos elegíveis para instalação de baterias de fornos.

O conjunto de nós da rede essencial será representado por I e o conjunto de nós elegíveis (candidatos em potencial para instalação de facilidades) por J ($J \subseteq I$).

Chamaremos aqui de "processo produtivo", para fins de descrição e análise do problema, as atividades desenvolvidas para a produção de algum item, incluindo a instalação de facilidades e/ou de transporte de bens entre os pontos de oferta e demanda da rede essencial. As facilidades estarão associadas a um dos dois tipos de pontos. No caso específico da exploração florestal, chamaremos de processo produtivo à instalação de baterias de fornos e/ou transporte de lenha entre os pontos em que ela foi cortada (pontos de oferta) e as baterias de fornos ou carvoarias (pontos de

demanda).

O conjunto I de nós da rede essencial, será particionado, para fins de execução do processo produtivo, em, no máximo, T subconjuntos. A escolha dos subconjuntos que formarão uma partição de I será feita dinamicamente através de um processo de tomada de decisões sequenciais.

Formalizando, temos:

Seja $S = \{1, \dots, T\}$ o conjunto de estágios do sistema dinâmico de decisões sequenciais referido. Cada "estágio" é uma coleção de pontos alternativos de eventual reinício do processo produtivo.

Seja $S_t = \{1, \dots, K(t)\}$ o conjunto dos estados do estágio t . Cada "estado" de um estágio corresponde a um ponto particular da coleção de pontos alternativos que formam o estágio.

k_t é um estado genérico k do estágio t , e $d(k_t)$ é uma "decisão" associada ao estado genérico k do estágio t .

Seja $D = \{d(k_t) : k_t \in S_t, t \in S\}$ um conjunto de decisões admissíveis que podem ser tomadas no estado k do estágio t . Em cada estado é tomada uma decisão sobre a duração (ou extensão) do processo produtivo a partir daquele ponto (estado).

Cada decisão está associada a um "retorno" que corresponde ao custo mínimo de execução do processo produtivo com a duração (ou extensão) proveniente da decisão tomada.

O custo total quando se vai de um estágio a outro é dado por uma "função de transição" aditiva que dá a soma dos custos de execução do processo produtivo nos estágios considerados.

Um mesmo estado e uma mesma decisão podem ocorrer em mais de um estágio? entretanto? o estado poderá ser atingido e a decisão poderá ser tomada uma única vez no decorrer de todo o processo. Em cada estado toma-se uma única decisão.

Definidos o estágio e o estado iniciais, com as correspondentes decisões associadas? diz-se que um estágio a partir do segundo? foi alcançado, quando algum de seus estados foi atingido através de uma decisão tomada no estágio anterior. No processo de tomada de decisões sequenciais aqui definido? nem todos os estágios, na solução, são alcançados necessariamente.

Um estado é dito terminal quando nele não é tomada nenhuma decisão e, portanto, cessa aí o processo decisório.

O problema dinâmico de decisões sequenciais que estamos definindo, consiste em determinar dentro de cada estágio alcançado, o estado mais indicado? e dentro do estado escolhido? se ele não é terminal, determinar a melhor decisão a ser tomada. Em um estado não terminal de um estágio considerado, toma-se uma decisão que vai conduzir a um outro estado de um estágio seguinte (que não é necessariamente o estágio imediatamente seguinte). O processo continua até que se atinja, em algum estágio? o estado terminal.

Seja $\bar{S} \subseteq S$. \bar{S} é o conjunto dos estágios alcançados no decorrer do processo? até que o estado terminal seja atingido.

Para a escolha da melhor partição de I entre partições alternativas? o conjunto I será decomposto em uma coleção de subconjuntos não necessariamente todos disjuntos e cada um deles associado a uma decisão $d(k)$. Assim, $I_t^{d(k)}$ é o subconjunto de I associado à $d(k)$ -ésima decisão do estado k , no estágio t . Com isso, queremos estabelecer um subconjunto $\bar{S} \subseteq S$, tal que

$$I = \bigcup_{t \in \bar{S}} I_t^{d(k)} \quad (3.2.1)$$

$$I_t^{d(k_\alpha)} \cap I_t^{d(k_\beta)} = \emptyset \quad (3.2.2)$$

para todo $\alpha \neq \beta$, $\alpha \in \bar{S}$, $\beta \in \bar{S}$.

Ou seja, queremos escolher na coleção de subconjuntos em que foi decomposto o conjunto I , alguns subconjuntos, de tal maneira a formar uma partição de I . Além disso, o "retorno"

$Z_t^{d(k)}$ da decisão $d(k)$ será dado pela solução do problema

$$P_t^{d(k)} : Z_t^{d(k)} = \text{Min} \sum_{i \in I} d(k) \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in J} f_j y_j \quad (3.2.3)$$

$$S. a \quad \sum_{j \in J} x_{ij} = 1, i \in I_t^{d(k)} \quad (3.2.4)$$

$$1 \leq \sum_{j \in J} y_j \leq p_t^{d(k)} \quad (3.2.5)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq y_j \in (0,1), i \in I_t^{d(k)}, j \in J. \quad (3.2.6)$$

Este é o problema generalizado de localização não-capacitada de p -medianas em rede.

A decisão $d(k)$ tomada no estado k do estágio t , corresponde a transferir o processo produtivo para a sub-rede I_t , cujo custo mínimo de execução, em termos de localização de facilidades e transporte de bens, é dado por

$$Z_{d(k)_t}$$

Além disso, o processo produtivo será executado com a oferta de bens restrita à sub-rede I_t e com as facilidades instaladas em pontos de $J \subseteq I$, em número não superior a p .

$$d(k)_t$$

Se $y_j = 1$ na solução, $j \in J$ será um vértice mediano e nele instalada uma facilidade com custo fixo f_j , destinada a demandar produtos ofertados pelos pontos da sub-rede I_t . $y_j = 0$, caso contrário.

$x_{ij} = 1$, $i \in I_t$, $j \in J$, se a oferta do nó i for destinada a suprir a demanda da facilidade instalada na mediana j ; $x_{ij} = 0$, caso contrário.

c_{ij} é o custo operacional de transporte entre o nó $i \in I_t$ e o nó $j \in J$.

As restrições (3.2.4) garantem, para cada nó $i \in I_t$, alguma facilidade $j \in J$ que o atenda.

A restrição (3.2.5) obriga a escolha de, pelo menos uma, e, no máximo, p medianas na rede essencial para atendimento dos nós da sub-rede I_t , relativa à decisão tomada no estado k do estágio t , no processo

dinâmico de decisões seqüenciais.

As restrições (3.2.6) não permitem o atendimento dos nós $i \in I_t$ por qualquer vértice não mediano da rede essencial.

3.3 - A Rede Dinâmica de Recobrimento (rdr):

Cada um dos valores $Z_{d(k)_t}$, custos das decisões $d(k)_t$, provenientes da solução de cada um dos problemas $P_{d(k)_t}$, será associado a um arco de uma rede orientada $r_{d r}$.

$$r_{d r} = (f, s, V, A, g),$$

que chamaremos aqui "rede dinâmica de recobrimento". Esta rede tem as seguintes características

- i) Existe um único nó inicial f (fonte), e existe um único nó terminal s (sumidouro).
- ii) V é o conjunto de nós ou vértices da rede, e $A \subset V \times V$ o conjunto de arcos.
- iii) g é uma função de custo (dos arcos da rede)

$$g : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(i, j) \longmapsto g_{ij}$$

onde g_{ij} é o custo do arco (i, j) da rdr.

iv) Um caminho na rdr é uma seqüência (i_1, i_2, \dots, i_n) de pelo menos dois nós com a seguinte propriedade

" (i_r, i_{r+1}) é um arco orientado para $r = 1, \dots, n-1$ ".

O arco orientado (i, j) emana do nó i e termina no nó j .

v) Todo arco da rdr faz parte de um caminho que leva do nó inicial ao nó terminal. Ou seja, todos os nós da rdr têm sucessores, com exceção do nó terminal? e todos os nós têm antecessores, com exceção do nó inicial.

vi) Entre dois nós da rdr existe, no máximo, um arco.

vii) A rdr é acíclica e finita.

Se $Z_{d(k)_t}$ é associado ao arco (i, j) da rdr ,
então $g_{ij} = \sum_t Z_{d(k)_t}$.

Cada caminho na rdr está associado a uma partição de I em, no máximo, T subconjuntos I_t .

Cada caminho, e, portanto, cada partição de I , terá um custo dado por

$$Z = \sum_{t \in \bar{S}} Z_{d(k)_t},$$

para algum $\bar{S} \subset S$, e onde Z é o custo de um arco do caminho considerado, ou o custo de um membro I_t da partição considerada.

O problema dinâmico de decisões sequenciais pode ser transferido para a rdr se observarmos que:

- i) O primeiro estágio é constituído do nó fonte que é também o seu único estado. As decisões deste único estado do primeiro estágio são todos os arcos que emanam do nó fonte da rdr.
- ii) O segundo estágio é constituído do conjunto de todos os nós atingidos por arcos (decisões) que emanam do primeiro estágio. Cada um desses nós é um estado do segundo estágio. De cada estado do segundo estágio emana um conjunto de arcos que são as decisões deste estado.
- iii) E assim por diante, o terceiro estágio é constituído dos nós atingidos por arcos que emanam de nós do segundo estágio, cada nó é um estado deste estágio e cada estado tem seu conjunto de decisões admissíveis, como antes.
- iv) O processo evolue até que num dado estágio, é alcançado o estado terminal (nó sumidouro). Este

estado terminal 9 atingido através de uma decisão (arco) tomada num estágio anterior. Neste estado terminal não é tomada nenhuma decisão e, portanto, cessa aí o processo decisório do sistema dinâmico de decisões seqüenciais, associado à rdr.

- v) O nó fonte da rdr associado ao estado inicial, corresponde ao início do processo produtivo e o nó sumidouro, associado ao estado terminal, corresponde ao término do processo produtivo na rede essencial.

Na rdr ocorre o fluxo de transferência da processo produtivo executado nas sub-redes $I_t^{d(k)}$ da rede essencial.

O problema de encontrar a melhor partição de I entre partições alternativas dadas, após ter determinado para cada membro $I_t^{d(k)}$ de cada partição alternativa o melhor plano de atendimento de seus nós, por (não mais que) p medianas da rede essencial, se reduz agora a encontrar na rdr o caminho de custo mínimo. Este é o caminho de recobrimento de custo mínimo do processo produtivo executado na rede essencial.

3.3.1 - Configuração da Rede Dinâmica de Recobrimento a Partir de Planos de Execução do Processo Produtivo na Rede Essencial:

As configurações ou desenhos da rdr estão vinculadas a algum plano de execução do processo produtivo na rede essencial. Cada plano de execução do processo produtivo está ligado a uma certa "ordem", "prioridade" ou "organização" de transferência do processo produtivo de uma sub-rede para outra, ou grupo de outras sub-redes. Obedecida a ordem de transferência referida, são possíveis vários caminhos para executá-la. O que se busca a partir das várias possibilidades, é o melhor caminho (ou caminho ótimo) de transferência do processo produtivo entre as sub-redes I_t da rede essencial cujos nós são os elementos de I . O processo produtivo pode ser executado em grupos de sub-redes de forma simultânea ou sequencial.

Agora, serão apresentados alguns exemplos de como configurar a rdr a partir de um plano de execução do processo produtivo, o que vai ilustrar também todo o sistema dinâmico de tomada de decisões sequenciais que está sendo definido. Isso será feito com os olhos voltados para a aplicação a que se destina esta formulação de processo dinâmico.

Inicia-se com a rede essencial pre-regionalizada, conforme a figura (3.3.1). No caso da exploração florestal, cada sub-rede tem um atributo de

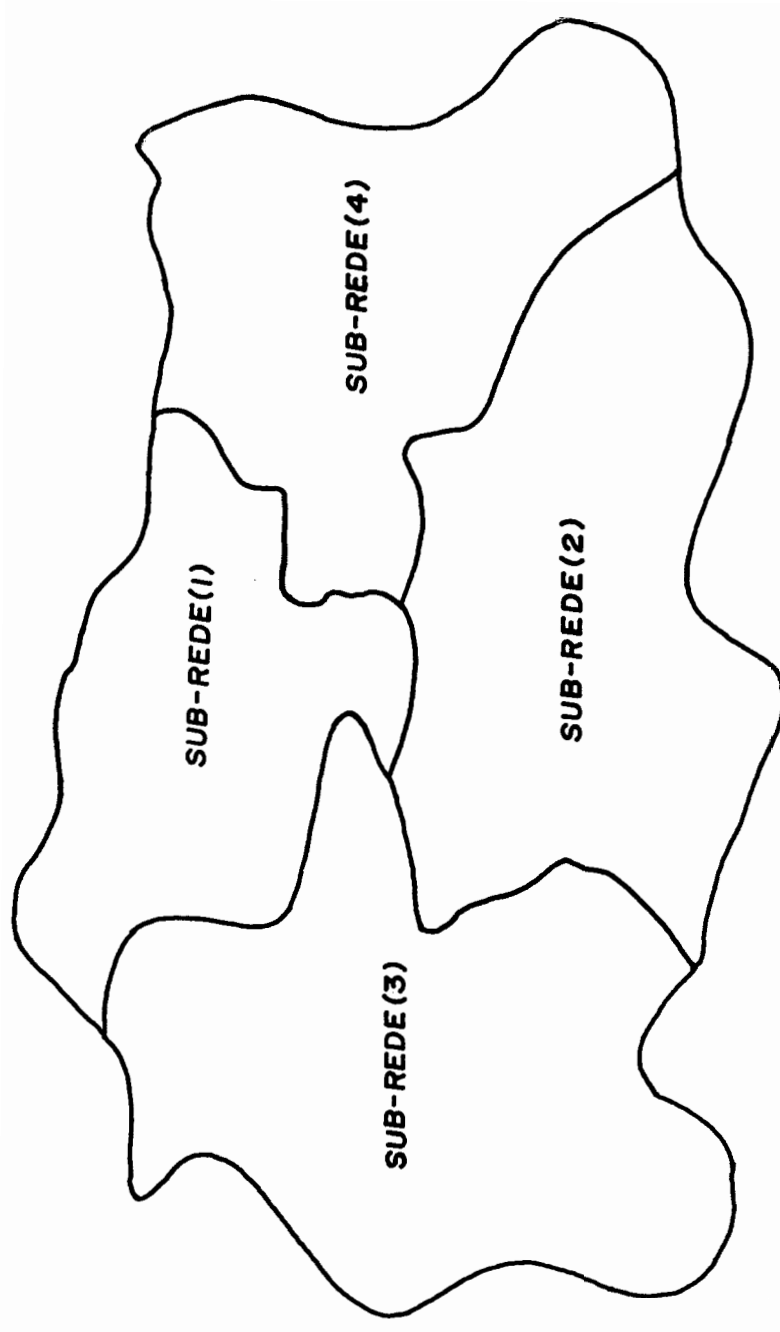


FIGURA 3.3.1
UMA REDE ESSENCIAL, OU MAPA DA REGIÃO OBJETO
DO PROCESSO PRODUTIVO

homogeneidade, de acordo com a mesma **época** de corte da madeira. Duas sub-redes, como a (3) e a (4), por **exemplo**, podem ter também a mesma época de **exploração**. **1** **disso**, a linha **divisória** entre duas regibas pode não ser tão **rígida**, conforme mostra a figura. Os **números** entre **parênteses** definem a "ordem" ou "prioridade" de **execução** do processo produtivo. **Aqui**, o interesse está em instalar facilidades para atender a região (1) ou a (2) ou (3). **Ou ainda**, as regibas (1) e (2) juntas, ou (1), (2) e (3), ou (2) e (3), ou (4), etc. Com **isso**, pretende-se dizer que uma facilidade que atendeu a uma região num dado período pode ou não atender a **outras** em períodos seguintes. No caso de **instalação** de baterias de fornos para produzir carvão vegetal a partir da lenha colhida nas várias **subregiões** representadas pelas **sub-redes**, pode-se **ter**, por **exemplo**, duas baterias ativas no primeiro **período**, **produzindo** carvão a partir da madeira colhida na região (sub-rede) (1). No segundo **período**, uma das **duas** baterias é desativada e somente a outra continua **produzindo**, **agora**, **porém**, a partir da oferta de madeira da **região-sub-rede** (2). No terceiro **período**, esta bateria continua **operando**, **porém**, **agora**, é instalada uma nova bateria para produzir junto com a **antiga**, a partir da lenha vindo das regibas (sub-redes) (3) e (4), que têm a mesma **época** de corte. E assim por diante.

Na tabela (3.3.1) estão os **estágios**, os estados de cada **estágio**, as decisões de cada estado e as **sub-redes** para as quais se transfere o processo produtivo, a partir das **decisões** associadas.

Na figura (3.3.2) está a rede **dinâmica** de

Tabela 3.3.1

ESTÁGIOS	ESTADOS (NÓS)	DECISÕES (ARCOS)	SUB-REDES
1	1	(1,2)	(1)
		(1,3)	(1)+(2)
		(1,4)	(1)+(2)+(3)
2	2	(2,3)	(2)
		(2,4)	(2)+(3)
		(2,5)	(2)+(3)+(4)
	3	(3,4)	(3)
		(3,5)	(3)+(4)
		(4,5)	(4)
3	3	(3,4)	(3)
		(3,5)	(3)+(4)
	4	(4,5)	(4)
	5*
4	4	(4,5)	(4)
	5*

(*) estado terminal.

recobrimento configurada a partir dos elementos da tabela (3.3.1).

É fácil ver que qualquer caminho na rdr da figura (3.3.2) constitui uma **partição** da rede essencial. O caminho de recobrimento de custo **mínimo** estard associado à melhor **partição** da rede essencial.

O **vértice** ou **nó 1**, é o **vértice fonte**, associado ao **único** estado do primeiro **estágio**. O **vértice 5** é o **nó sumidouro** (**estado terminal**). Nele **ndo** é tomada **nenhuma decisão**. Os estados (nós) 3 e 4 **estão** nos **estágios 2** e 3. A decisão associada ao arco (3,4) pode ser tomada no estado 3 do **estágio 2**, ou do **estágio 3**, mas nunca em ambos.

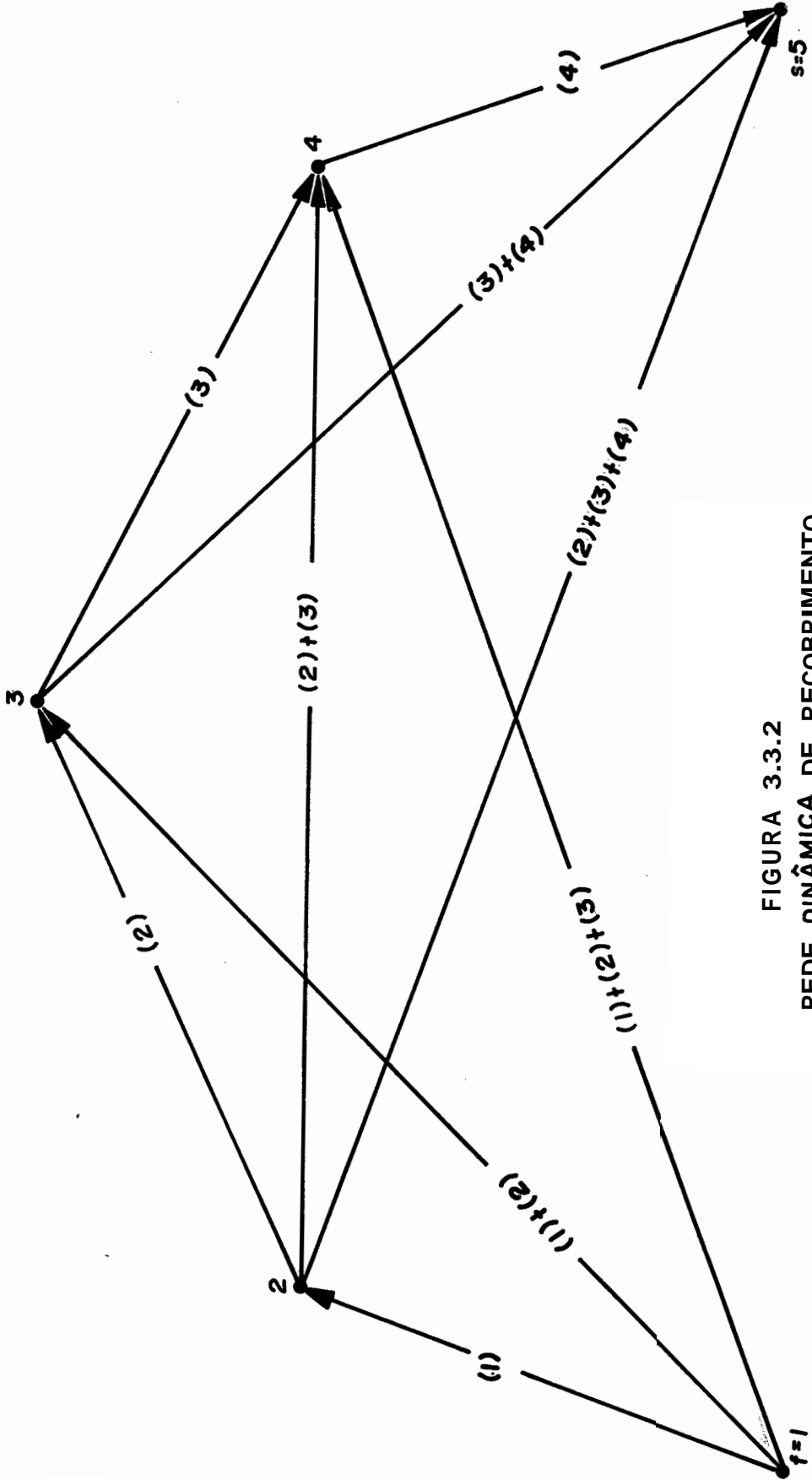


FIGURA 3.3.2
REDE DINÂMICA DE RECOBRIMENTO

Dizemos que uma rede (f, s, V, A, g) é uma "rede em camadas" quando

$$V = \bigcup_{i=1}^n V_i \quad \text{e} \quad A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n-1} (V_i \times V_{i+1}),$$

onde cada V_i é uma camada de nbs da rede.

Na figura (3.3.3) está representada uma rede em camadas.

Um outro exemplo de configuração da rdr pode ser dado a partir da rede essencial colocada na figura (3.3.4). Os componentes da estrutura dinâmica do problema estão na tabela (3.3.2). E a correspondente rede dinâmica de recobrimento, para este caso, está na figura (3.3.5). Neste, a $rdr = (f, s, V, A, g)$ é uma rede em camadas. Ou seja, é uma rede onde $V = \bigcup_{i=1}^4 V_i$ e cada V_i é uma camada de nós associada ao estágio i do processo decisório. Além disso, $A \subseteq \bigcup_{i=1}^3 (V_i \times V_{i+1})$, contém as decisões projetadas para este sistema.

Um outro desenho da rdr surge quando se procura tirar proveito da flexibilidade das linhas divisórias entre duas regiões (sub-redes) da rede essencial. Neste caso, existem fronteiras alternativas entre as regiões-sub-redes. Veja a figura (3.3.6). Nela, as linhas pontilhadas refletem as divisórias alternativas. Na tabela (3.3.3) estão os elementos do processo dinâmico de decisões seqüenciais, e na figura (3.3.7), a rede dinâmica de recobrimento correspondente.

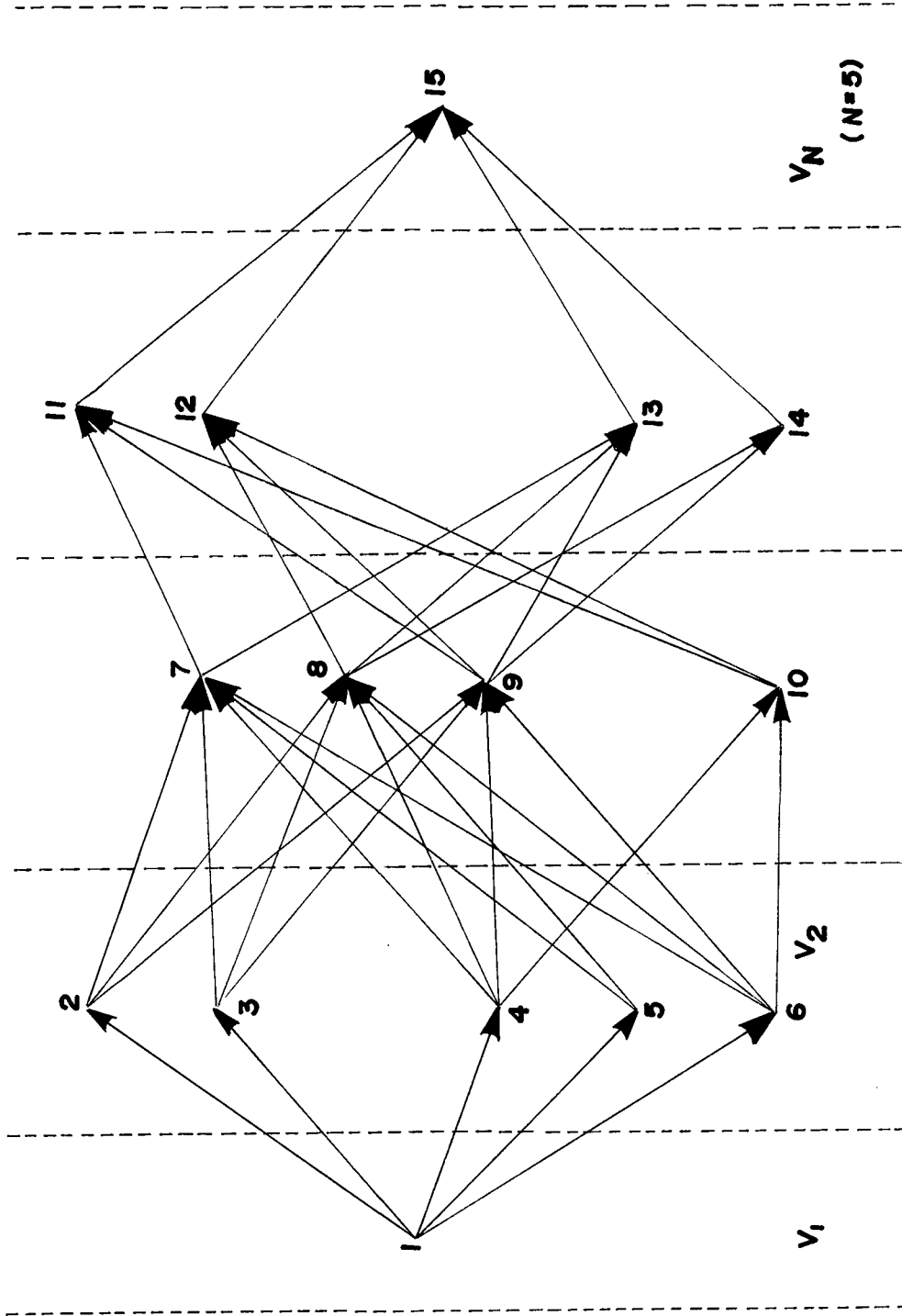


FIGURA 3.3.3
UMA REDE EM CAMADAS

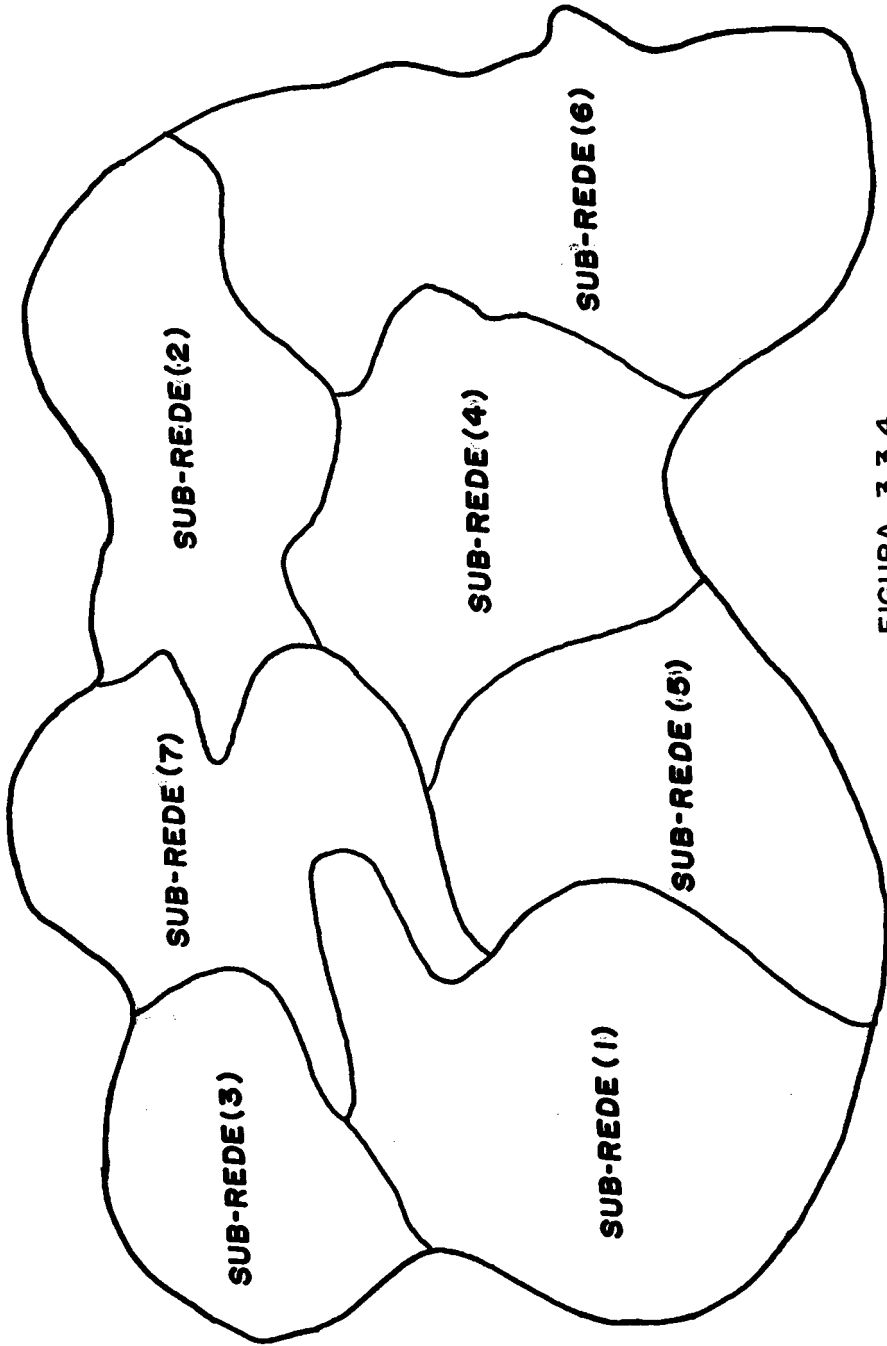


FIGURA 3.3.4

Tabela 3.3.2

ESTÁGIOS	ESTADOS (NÓS)	DECISÕES (ARCOS)	SUB-REDES
1	1	(1,2)	(1)
		(1,3)	(1)+(2)
		(1,4)	(1)+(2)+(3)
2	2	(2,5)	(2)+(3)+(4)
		(2,6)	(2)+(3)+(4)+(5)
		(2,7)	(2)+(3)+(4)+(5)+(6)
	3	(3,5)	(3)+(4)
		(3,6)	(3)+(4)+(5)
		(3,7)	(3)+(4)+(5)+(6)
		(4,5)	(4)
	4	(4,6)	(4)+(5)
		(4,7)	(4)+(5)+(6)
		(5,8)	(5)+(6)+(7)
3	6	(6,8)	(6)+(7)
		(7,8)	(7)

A rede essencial pode ter sido projetada a partir de componentes conexos, como nos casos da figura (3.3.8). Neste caso, os estágios, estados e decisões, podem ser definidos como um subconjunto (3.3.2) e a rdr poderia ser configurada como na figura (3.3.2).

Outras configurações são possíveis, além disso, planos alternativos de execução do processo produtivo que dariam origem a vários desenhos da rdr para o mesmo problema, são igualmente possíveis.

É, portanto, razoável, explorar várias configurações da rdr, através da criação de um instrumento de análise para ajudar na atividade de planejamento, como auxílio no processo de tomada de decisão.

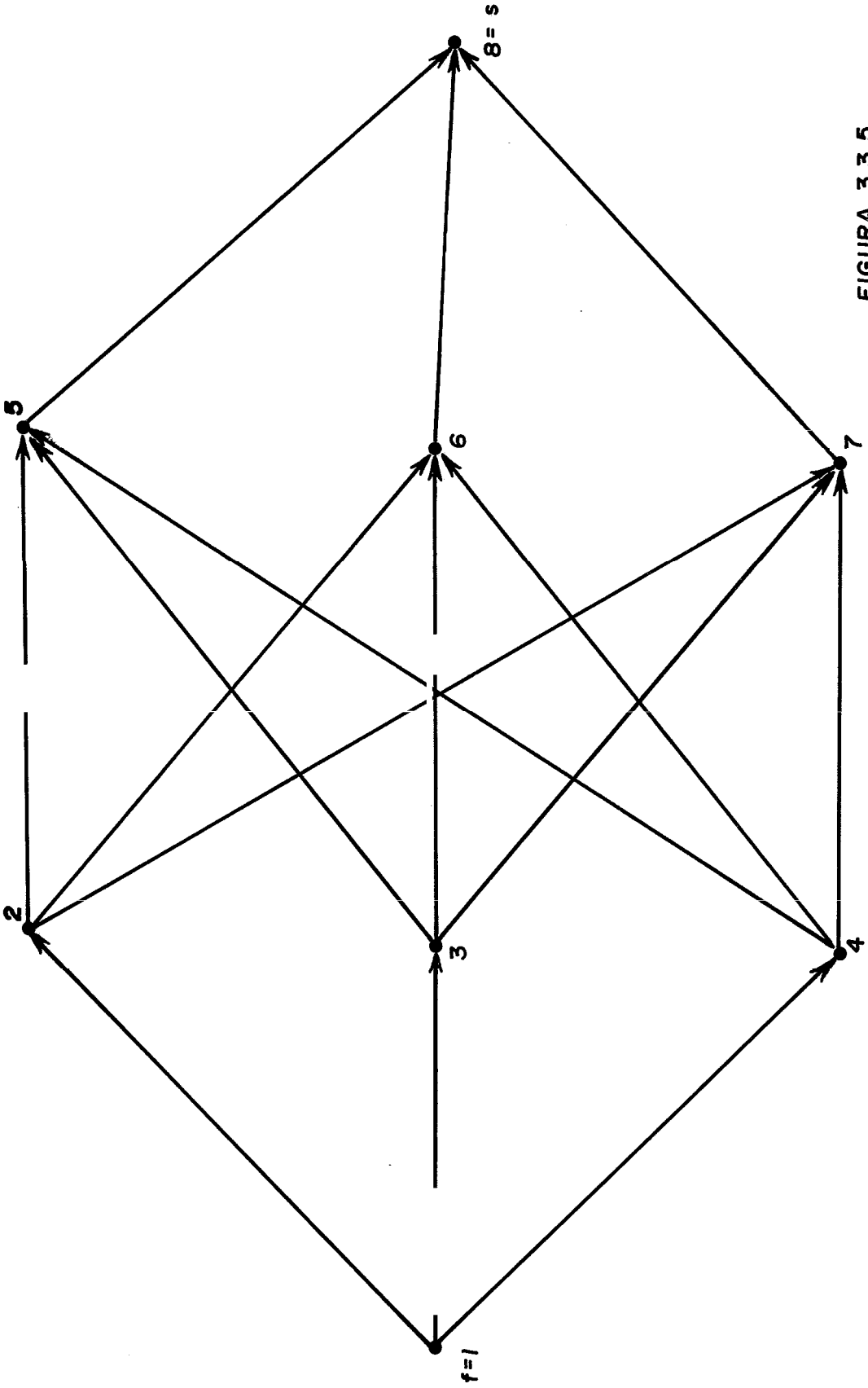


FIGURA 3.3.5

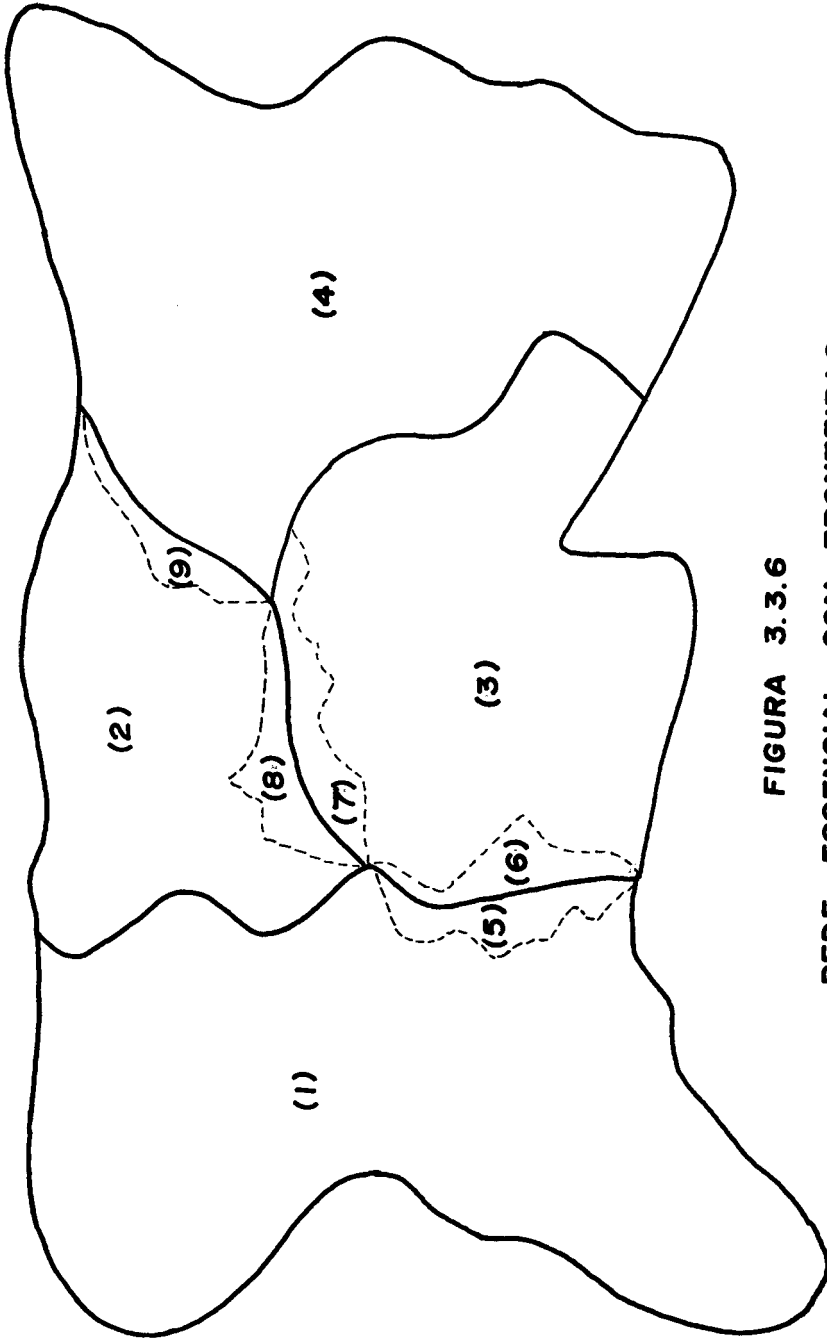


FIGURA 3.3.6
REDE ESSENCIAL COM FRONTEIRAS
ALTERNATIVAS ENTRE SUB-
REDES

Tabela 3.3.3

ESTÁGIOS	ESTADOS (NÓS)	DECISÕES (ARCOS)	SUB-REDES
1	1	(1,2)	(1)
		(1,3)	(1)+(5)
		(1,4)	(1)+(5)+(6)
		(1,5)	(1)+(5)+(6)+(3)
		(1,6)	(1)+(5)+(6)+(3)+(7)
		(1,7)	(1)+(5)+(6)+(3)+(7)+(8)
		(1,8)	(1)+(5)+(6)+(3)+(7)+(8)+(2)
2	2	(2,5)	(5)+(6)+(3)
		(2,6)	(5)+(6)+(3)+(7)
		(2,7)	(5)+(6)+(3)+(7)+(8)
	3	(3,5)	(6)+(3)
		(3,6)	(6)+(3)+(7)
	4	(3,7)	(6)+(3)+(7)+(8)
		(4,5)	(3)
	5	(4,6)	(3)+(7)
		(4,7)	(3)+(7)+(8)
	6	(5,8)	(7)+(8)+(2)
		(5,9)	(7)+(8)+(2)+(9)
		(6,8)	(8)+(2)
		(6,9)	(8)+(2)+(9)
		(7,8)	(2)
(7,9)		(2)+(9)	
(8,10)		(9)+(4)	
9	(9,10)	(4)	
3	5	(5,8)	(7)+(8)+(2)
	6	(5,9)	(7)+(8)+(2)+(9)
	7	(6,8)	(8)+(2)
	8	(6,9)	(8)+(2)+(9)
	9	(7,8)	(2)
	10*	(7,9)	(2)+(9)
4	8	(8,10)	(9)+(4)
	9	(8,10)	(9)+(4)
	10*	(9,10)	(4)
	10*

(*) estado terminal.

Se, por um lado, a solução dinâmica de um problema de localização pode ser efetuada até mesmo para um problema de porte muito grande, já que ele é decomposto em subproblemas menores, por outro lado, a configuração da rdr

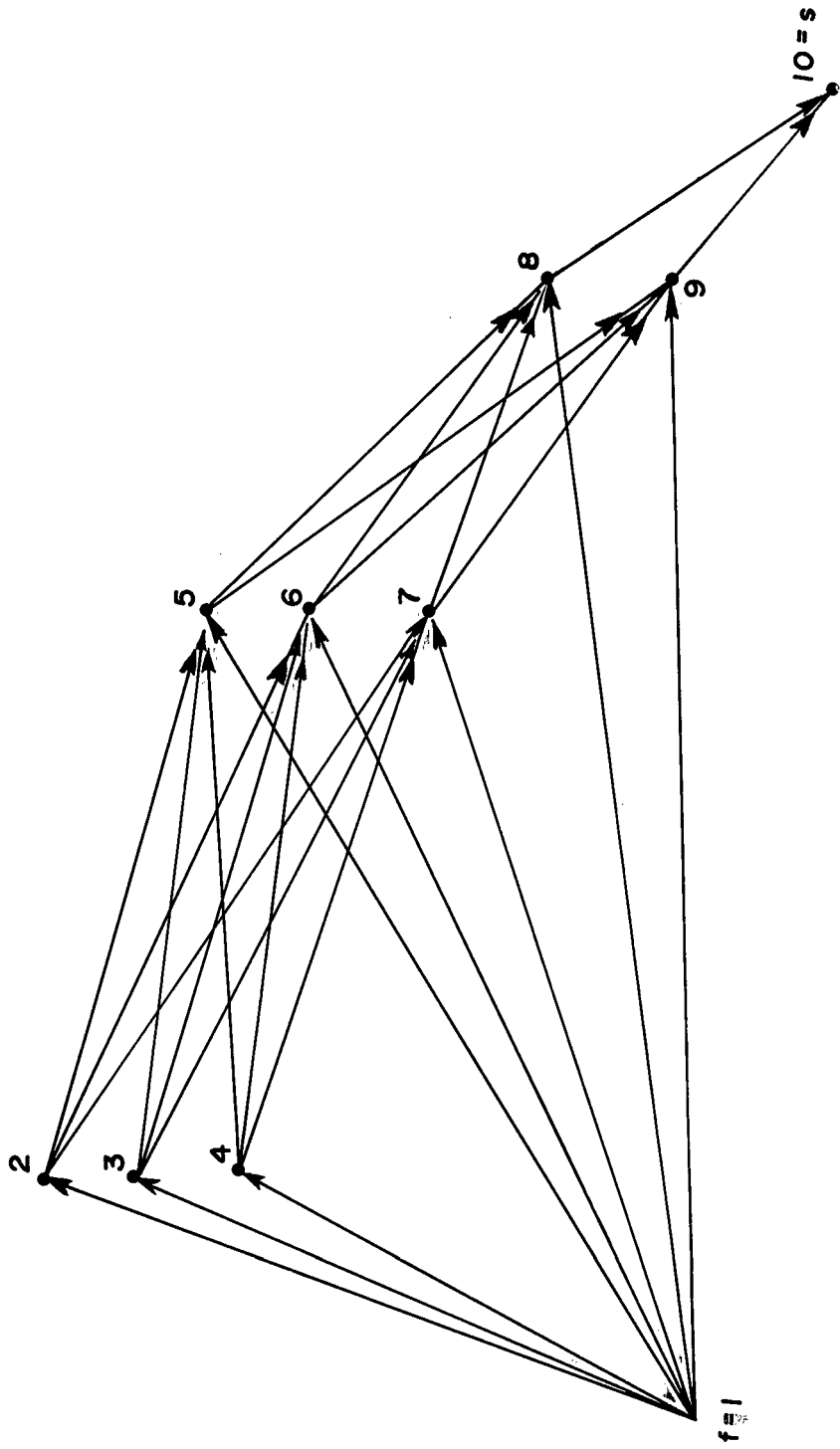


FIGURA 3.3.7

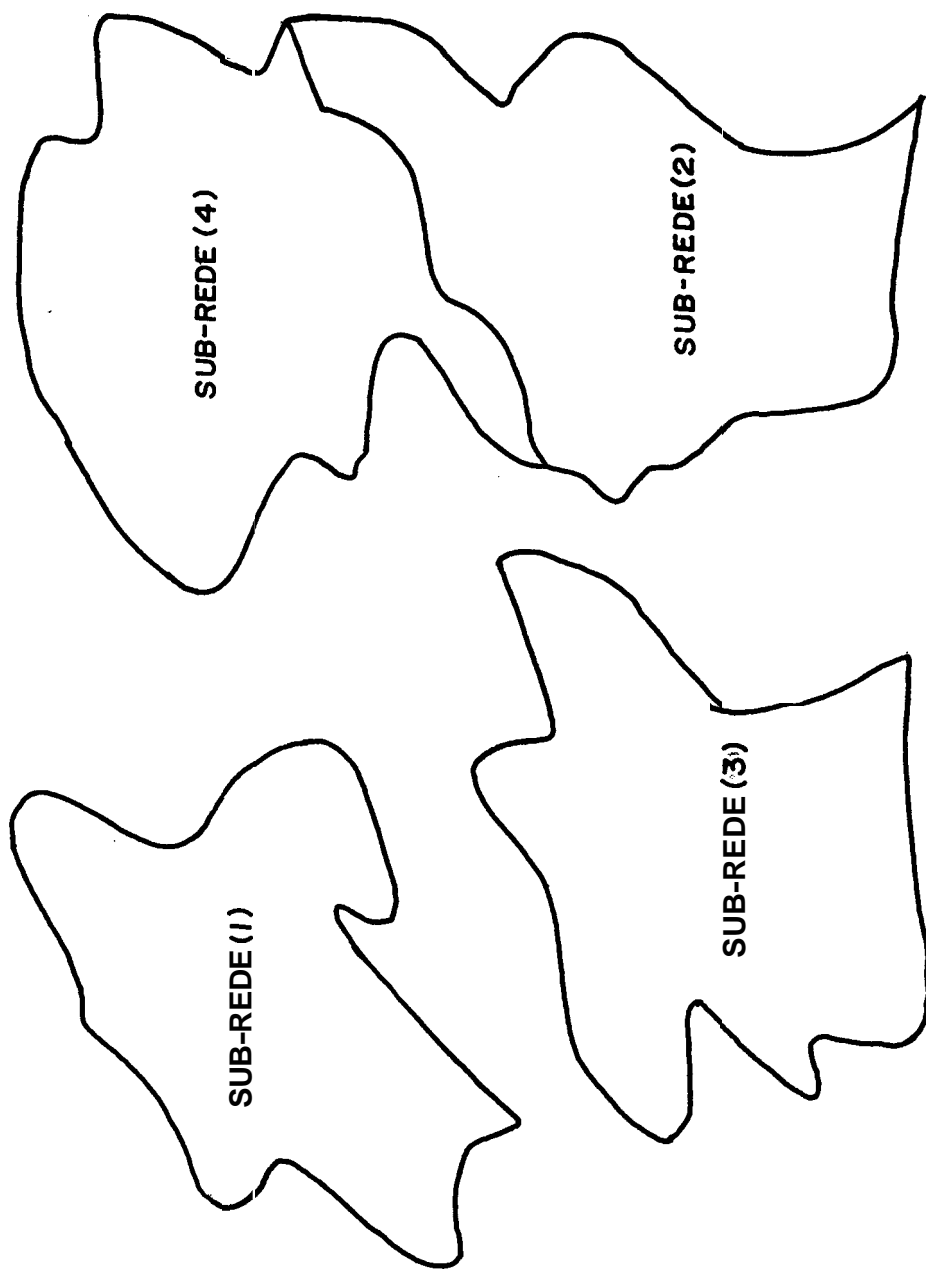


FIGURA 3.3.8
REDE ESSENCIAL PROJETADA A PARTIR DE COMPONENTES
CONEXAS

pode ser de um feitiço tal que torna-se penoso resolver o problema. Veja a rede dinâmica de recobrimento da figura (3.3.9). Antes de estabelecer seu caminho mínimo, é necessário resolver 79 subproblemas de localização, e por mais eficiente que seja o algoritmo, ele estará diante de uma tarefa de alto custo computacional. Entretanto a habilidade do planejador, usuário de um sistema como o que está sendo proposto aqui, pode contornar dificuldades como esta e chegar a uma configuração factível.

3.3.2 - Cálculo do Caminho Mínimo na Rede Dinâmica de Recobrimento:

Montada a rede deseja-se conhecer o seu caminho ótimo. Antes de introduzir o procedimento para calculá-lo, alguns preliminares serão apresentados.

Uma "política" na rede especifica para cada nó (estado) i , (i diferente do nó terminal), um arco orientado (decisão) que emana do nó i .

Uma política é chamada de "ótima para o nó i " se, com os arcos (decisões) que ela designar é possível construir um caminho ótimo que leva do nó i ao nó terminal.

Uma política que é ótima para todo nó da rede é chamada de "uma política ótima na rede".

Estas definições permitem introduzir o "princípio de otimalidade de Bellman", BELLMAN (9, 1957).

"Existe na rede uma política que é ótima

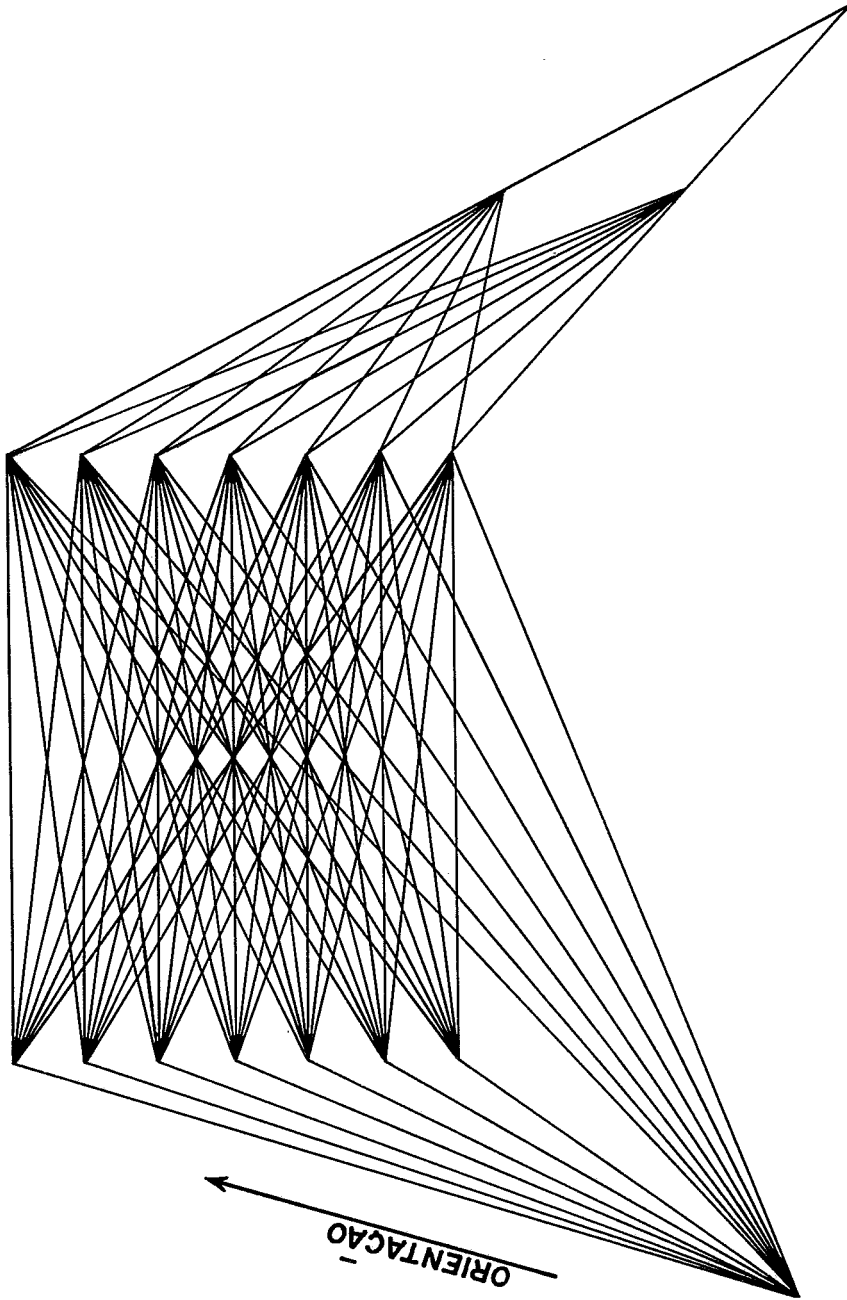


FIGURA 3.3.9

para cada nó (estado) e que tem a seguinte propriedade: não importa quais sejam o nó (estado) e o arco (decisão) iniciais? os arcos (decisões) restantes devem constituir uma política ótima em relação ao nó (estado) resultante da primeira decisão".

Este princípio tem uma outra versão. Antes de introduzi-la, veja o seguinte:

Diz-se que o caminho do nó i ao nó i da rdr contém a caminho (i_r, \dots, i_s) , sempre que $1 \leq r < s \leq k$.

Agora, o princípio de otimalidade tem a forma :

"Se (i_r, \dots, i_s) é um subcaminho de um caminho ótimo (estd contido em um caminho ótimo) da rdr , então ele é um caminho ótimo do nó i_r ao nó i_s na rdr "

O princípio de otimalidade estd intimamente relacionado à seguinte equação funcional:

$$h_i = \begin{cases} \min_{j \in I(i)} \{ g_{ij} + h_j \}, & i \text{ diferente do nó terminal} \\ 0, & i \text{ igual ao nó terminal?} \end{cases} \quad (3.3.1)$$

onde

h_j é o custo do caminho mínimo do nó j até o nó terminal da rdr .

• g_{ij} é o custo do arco (i,j) da rdr .

• $g_{ij} + h_j$ é o custo do caminho do nó i ao nó terminal? passando pelo arco (i,j) da rdr .

• $\Gamma(i)$ é o conjunto dos nós sucessores do nó i .

É fácil ver que $h_i \leq g_{ij} + h_j$, para todo $i \neq$ nó terminal, e que algum $j \in \Gamma(i)$ satisfaz a equação (3.3.1).

Quando todos os subproblemas P estão resolvidos* isto é, quando se conhece $g_{ij} = Z_{ij}^t$ para todos os arcos da rdr , ou o custo de todas as decisões do processo dinâmico de decisões seqüenciais, a equação 3.3.1 é utilizada para estabelecer* recursivamente, uma relação entre todos os subproblemas e o problema global, dando a sua solução.

O sistema que estamos analisando* pertence à família dos processos dinâmicos de decisões sequenciais que têm horizontes de planejamento definidos. Esses processos dinâmicos podem ser analisados indutivamente, do fim do horizonte de planejamento para o seu início. Além disso, são processos determinísticos, no sentido de que sua evolução não é afetada pelo acaso. Também* possuem a característica de representarem problemas de decisão envolvendo trocas entre custos imediatos e custos futuros.

Os nós da rdr , que é uma rede acíclica, são sempre numerados de tal forma que, para todo arco orientado (i,j) , se tenha $i < j$. Isto facilita o uso da equação (3.3.1), permitindo o cálculo dos h_i para i 's decrescentes, começando de $i = s$ (nó sumidouro) e terminando com $i = f$ (nó fonte).

A solução miope (ou gulosa) para o problema

de caminho mínimo na rdr pode estar longe da **solução ótima**, uma vez que ela escolhe para cada nó **i**, o arco (decisão) **(i,j)** de menor **custo**, que emana deste nó (estado). Este tipo de **solução** desconsidera o **nó** (estado) onde termina o **arco**, ou a que decisão conduz no próximo estdgio.

3.3.3 - Exemplo:

Considere a rdr da figura (3.3.10). Ela corresponde à **solução** do problema **dinâmico de localização** de **p**-medianas ($1 \leq p \leq 2$) numa rede essencial através de $T = 4$ **estágios**, incluindo aí o estdgio terminal - **condição** de fronteira - (ou **seja**, o estdgio que **só contém** o estado **terminal**, onde cessa o processo **decisório**).

Em cada arco **(i,j)** está indicado o custo $g_{ij} = Z_{d(k)}^t$ da **decisão** $d(k)$ correspondente à **transferência** do processo produtivo para a sub-rede $I_t^{d(k)}$ da rede essencial.

Na tabela (3.3.4) estão os **cálculos** para determinar o caminho **mínimo** da rede da **figura** (3.3.10) o caminho **mínimo**, além de indicar a melhor **partição** da rede essencial, **indicar também**, o custo global de **execução** do processo produtivo.

Antes desta fase, já terão sido indicadas as facilidades? a **quantidade delas**, bem como o esquema de atendimento utilizado no processo produtivo.

Como **observação final**, deve ser dito que os custos fixos das facilidades indicadas **uma** ou mais vezes num

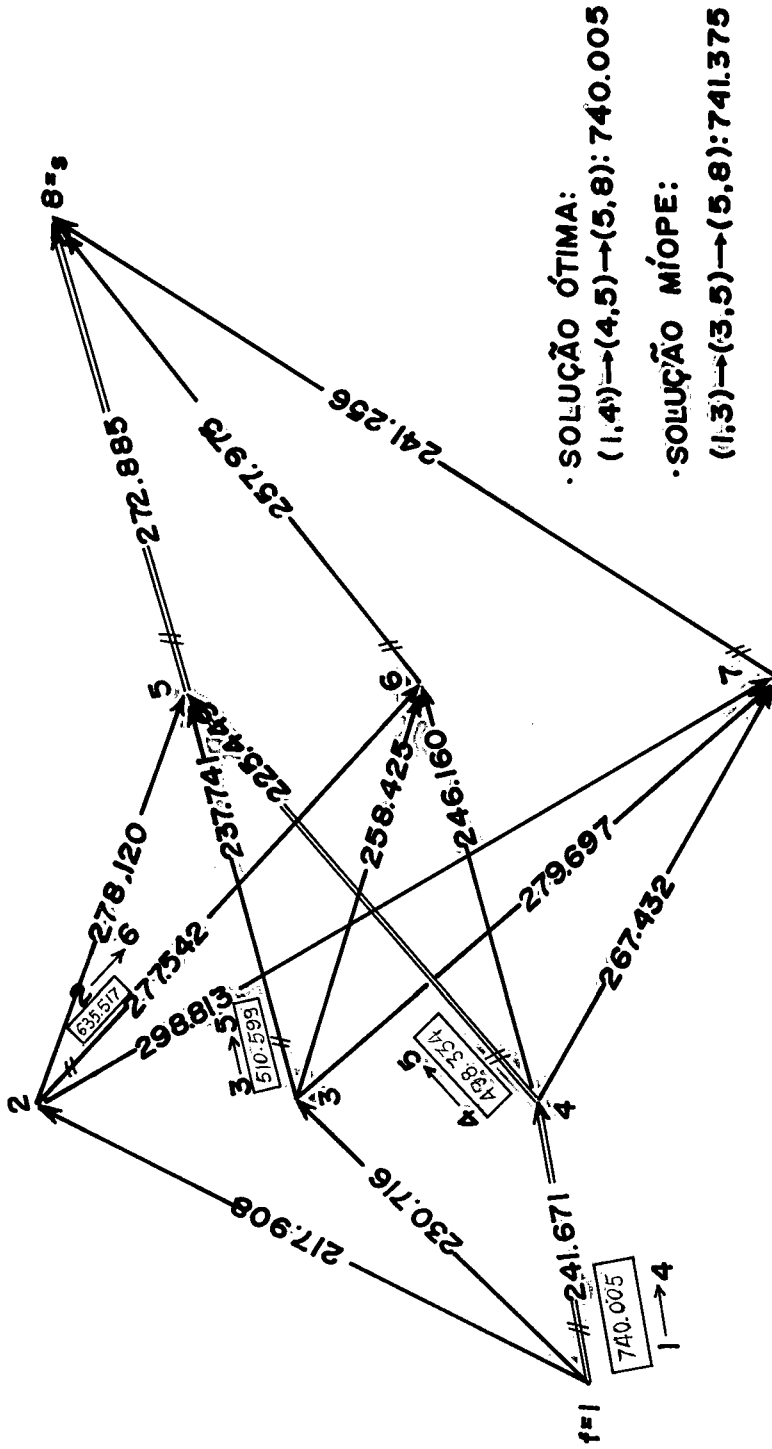


FIGURA 3.3.10

Tabela 3.3.4

$$h_8 = 0$$

$$h_5 = 272.885$$

$$h_6 = 257.975$$

$$h_7 = 241.256$$

$$h_4 = \min \left\{ \begin{array}{l} 225.449 + 272.885 = 498.334 \quad 4 \rightarrow 5 \\ 246.160 + 257.975 = 504.135 \\ 267.432 + 241.256 = 508.688 \end{array} \right.$$

$$h_3 = \min \left\{ \begin{array}{l} 237.714 + 272.885 = 510.599 \quad 3 \rightarrow 5 \\ 258.425 + 257.975 = 516.400 \\ 279.697 + 241.256 = 520.953 \end{array} \right.$$

$$h_2 = \min \left\{ \begin{array}{l} 278.120 + 272.885 = 551.005 \\ 277.542 + 257.975 = 535.517 \quad 2 \rightarrow 6 \\ 298.813 + 241.256 = 540.069 \end{array} \right.$$

$$h_1 = \min \left\{ \begin{array}{l} 217.908 + 535.517 = 753.425 \\ 230.716 + 510.599 = 741.315 \\ 241.671 + 498.334 = 740.005 \quad 1 \rightarrow 4 \end{array} \right.$$

mesmo caminho da rdr, serão "pagos" uma única vez. Ou seja, as facilidades selecionadas para atendimento de uma ou mais sub-redes de uma mesma partição da rede essencial? serão construídas uma única vez, e, portanto? obviamente? terão seu custo de instalação amortizado uma única vez.

3.4 - Processo Dinâmico de Decisões Seqüenciais com Degeneração de Estágios:

Um sistema dinâmico de decisões seqüenciais sofre um processo de degeneração de estágios quando, na solução, o estado terminal é atingido fora do estágio terminal.

Quando ocorre o processo de degeneração, os estágios seguintes Aquele em que foi alcançado o estado terminal, não são atingidos. Esses estágios não atingidos? são os estágios degenerados do processo dinâmico. Na ocorrência de degeneração de estágios~ a solução é feita com os estágios iniciais que vdo do primeiro, até aquele estágio onde foi atingido o estado terminal.

O sistema dinâmico de decisões seqüenciais apresentado aqui, pode sofrer o processo de degeneração de estágios, entretanto? temos o seguinte

Teorema 3.4.1:

Se a rdr é uma rede em camadas, associada ao modelo dinâmico de decisões seqüenciais, então, ocorre o processo de degeneração de estágios.

Demonstração: Obvia.

Na ocorrência de degeneração de estágios, o penúltimo estágio, dentre os atingidos, tem a capacidade de superposição. Ele se sobrepõe aos estágios seguintes (no caso, aos estágios degenerados do processo dinâmico de decisões seqüenciais).

5.5 - Pseudodecisões Vazias e Fantasmas:

No contexto dos sistemas dinâmicos de decisões seqüenciais que estamos definindo? outros conceitos como os de pseudodecisões vazias e fantasmas? podem ser introduzidos. Tais conceitos conferem maior flexibilidade ao processo de modelagem, como ficará caracterizado no capítulo VI, que será dedicado a uma aplicação concreta. Na condução de experimentos com um modelo, pode surgir a necessidade de eliminar decisões (o que, através destes novos conceitos, corresponde a transformar decisões "reais" em pseudodecisões "fantasmas" ou em pseudodecisões "vazias") do processo dinâmico. Eliminar uma decisão, corresponde a retirar na rdr o arco correspondente, o que dá lugar ao conceito de pseudodecisão fantasma. Uma pseudodecisão vazia é uma decisão de

custo zero. Ela **não** corresponde a qualquer **evolução** do processo produtivo? sua **função** é meramente **conectar** duas **decisões**: as que lhe **são** antecessora e sucessora. Na **rd** o arco correspondente a uma **decisão** varia **não** é eliminado.

Na figura (3.3.11), que é a rede dinâmica de recobrimento de um dado sistema dinâmico de **decisões seqüenciais**, os arcos como (3,7) e (8,12) correspondem a pseudodecisões vazias. O arco (5,10), que foi retirado da rede, corresponde a uma **pseudodecisão** fantasma.

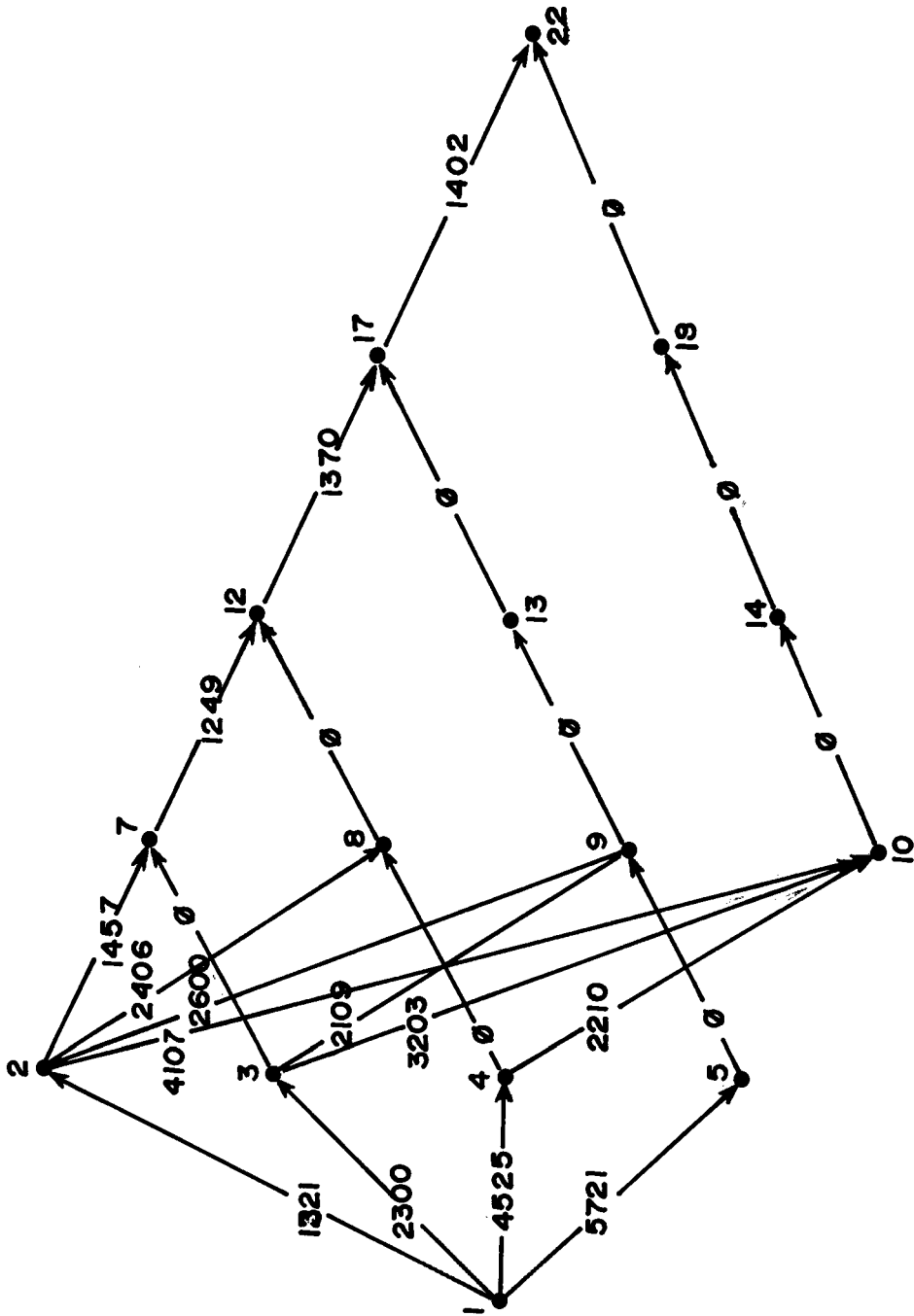


FIGURA 3.3.11

CAPÍTULO IV

UM ALGORITMO HEURÍSTICO (GULOSO) PARA SOLUÇÃO DOS
 SUBPROBLEMAS $P_{d(k)_t}$ DO PROBLEMA DINÂMICO DE LOCALIZAÇÃO.

4.1 - Introdução:

Neste capítulo são iniciados o exame e a construção dos algoritmos utilizados na solução dos subproblemas $P_{d(k)_t}$, do problema de localização definido no capítulo III e modelado por um sistema dinâmico de decisões seqüenciais. Especificamente neste quarto capítulo será apresentado o algoritmo guloso padrão para problemas de localização e proposto um aperfeiçoamento de seu desempenho através da aceleração de seus passos computacionais.

Alguns algoritmos que produzem soluções ótimas, denominados algoritmos ótimos exatos, são eficientes, outros não. Certos algoritmos exatos, atuando sobre instâncias de tamanho considerável, requerem um tempo de execução proibitivo, inviabilizando a sua utilização prática na solução de problemas de grande porte. Em situações assim, uma alternativa válida é a construção de heurísticas que alicerçam sua correção em bases intuitivas, produzem soluções aproximadas e, algumas vezes, até mesmo soluções ótimas. A

avaliação dessas heurísticas passa, quase sempre? pela análise da qualidade das soluções que elas produzem, bem como pelo exame das condições sob as quais elas atingem o ótimo.

Se a heurística tem um bom desempenho para muitas instâncias do problema, conservando dentro de limites toleráveis a margem de erro decorrente do seu uso, fica caracterizada. uma excelente razão para preferi-la em lugar de algoritmos ótimos de alto custo computacional, que requerem um longo tempo de execução na solução dos problemas.

Muitos algoritmos procuram pela melhor solução através de uma seqüência de ações locais ótimas. Em algumas circunstâncias isto leva a bom termo, em outras não. No problema da árvore geradora mínima de um grafo, veja PRPRDIMITRIOU e STEIGLITZ (130, 1982), se é feita a seleção do arco de tamanho mínimo adjacente a uma componente conexa que não forma ciclo, chega-se à solução ótima através da aplicação sucessiva deste procedimento. Por outro lado, se o caminho mínimo, veja GONDRRN e MINOUX (63, 1984), HU (77, 1982), CHRISTOFIDES (16, 1975), do nó origem ao nó alvo, em uma rede como a da figura 4.1.1, é calculado selecionando o arco de tamanho mínimo adjacente ao nó alcançado, a solução nem sempre é ótima, como pode ser concluído da figura 4.1.1

O algoritmo heurístico guloso, que procura pela melhor solução global através de escolhas locais e criteriosas na vizinhança dos pontos, será usado para resolver os subproblemas P_t sob duas grandes motivações:

$$d(k)_t$$

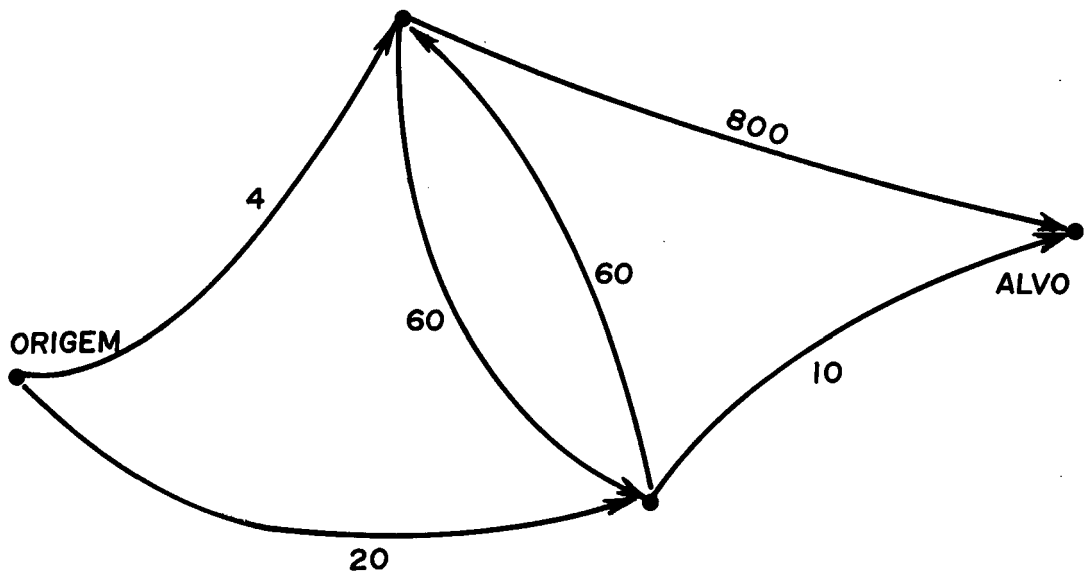


FIGURA 4.1.1

- i) No caso de problemas de porte muito grande, cujas soluções não podem ser obtidas por outro processo mais elaborado (relaxação, decomposição, separação e avaliação, etc.)
- ii) Mesmo quando esses problemas podem ser resolvidos por procedimentos bem elaborados? a solução inicial precisa ser produzida por outro algoritmo. Nesse caso, a heurística gulosa é uma opção excelente para prover a solução inicial (limite ou cota superior para a solução ótima).

4.2 - Os Algoritmos Aproximados e as Funções Supermodulares, Modulares e Submodulares:

O projeto de algoritmos aproximados para solução de modelos de localização é feito sob a luz de certas propriedades interessantes que este conjunto de problemas possui. Esta seção relaciona algumas das propriedades que caracterizam os problemas de localização como membros de uma classe de questões combinatórias que podem ser formuladas pela minimização das chamadas funções supermodulares de conjuntos.

Seja τ um conjunto de subconjuntos (partes) de $J = \{1, \dots, n\}$. Seja $Z : \tau \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que se $W \in \tau$ (isto é, $W \subset J$),

$$Z(W) = \begin{cases} \sum_{i \in I} d_i(k) \min_{j \in W} c_{ij} + \sum_{j \in W} f_j, & \text{se } W \neq \emptyset \\ \infty, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (4.2.1)$$

W é um subconjunto de facilidades abertas cujo valor objetivo é dado por (4.2.1). Seja $X \in \tau$ tal que $W \subset X \subset J$, com $Z(X)$ definida como $Z(W)$ em (4.2.1). Se os conjuntos W e X são ampliados pela união com outro conjunto $Y \in \tau$, tal que $X \cap Y = \emptyset$, tem-se? para qualquer $j \in J$, que

$$\begin{aligned} \min_{j \in W} c_{ij} - \min_{j \in W \cup Y} c_{ij} &= \max \{ 0, \min_{j \in W} c_{ij} - \min_{j \in Y} c_{ij} \} \geq \\ &\geq \max \{ 0, \min_{j \in X} c_{ij} - \min_{j \in Y} c_{ij} \} = \end{aligned}$$

$$= \min_{j \in X} c_{ij} - \min_{j \in X \cup Y} c_{ij}. \quad (4.2.2)$$

De (4.2.1), tira-se, para $W \neq \emptyset$, que

$$\sum_{i \in I} d_i(k) \min_{j \in W} c_{ij} = Z(W) - \sum_{j \in W} f_j,$$

e, com auxílio da relação (4.2.2), tem-se

$$\begin{aligned} Z(W) - \sum_{j \in W} f_j - (Z(W \cup Y) - \sum_{j \in W} f_j - \sum_{j \in Y} f_j) &\geq \\ \geq Z(X) - \sum_{j \in X} f_j - (Z(X \cup Y) - \sum_{j \in X} f_j - \sum_{j \in Y} f_j), \end{aligned}$$

o que acarreta

$$Z(W) - Z(W \cup Y) \geq Z(X) - Z(X \cup Y) \quad (4.2.3)$$

Definição 4.2.1:

Uma função $Z : \tau \rightarrow \mathbb{R}$, onde τ é um conjunto de subconjuntos de $J = \{1, \dots, n\}$, é dita **supermodular** se ela tem a propriedade dada pela relação (4.2.3).

Os conceitos de função modular e submodular obtém-se trocando o sinal \geq , na relação (4.2.3), respectivamente, por $=$ e \leq .

No estudo das funções contínuas um conceito de grande valia para a otimização é o de função convexa. A supermodularidade de funções de conjunto pode ser vista como a contrapartida combinatorial (ou discreta) do conceito de convexidade de funções contínuas. De fato, se f é uma função convexa, $f''(x) \geq 0$. Portanto, $f'(x)$ é não-decrescente, isto

é,

$$x_1 \leq x_2 \implies f'(x_1) \leq f'(x_2),$$

ou

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_2 + h) - f(x_2)}{h}$$

de onde se tira

$$f(x_1) - f(x_1 + h) \geq f(x_2) - f(x_2 + h),$$

que é uma relação parecida com (4.2.3).

Outra propriedade que caracteriza a supermodularidade de funções de conjuntos é dada por

$$Z(X) + Z(V) \leq Z(X \cup V) + Z(X \cap V), \quad (4.2.4)$$

para todo $X, V \in \tau$, cuja demonstração de equivalência com (4.2.3), para o caso submodular, está em NEMHRUSER e WOLSEY (124, i257 1978).

Algumas observações são pertinentes:

- i) O valor $Z(W)$ na relação (4.2.1), em geral, não é igual ao seu mínimo, em virtude da presença dos custos fixos. Definindo por $\bar{Z}(W)$ o mínimo de Z , tem-se

$$\begin{aligned} \bar{Z}(W) &= \min_{W' \subseteq W} \left\{ \sum_{i \in I} d(k_t) \min_{j \in W'} c_{ij} + \sum_{j \in W'} f_j : W' \neq \emptyset \right\} = \\ &= \min_{W' \subseteq W} Z(W'). \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

A função $\bar{Z} : \tau \rightarrow \mathbb{R}$, definida por (4.2.5) acima, não é supermodular conforme mostra o contra-exemplo abaixo.

i \ j	1	2	3	4	5
1	1000	0	1000	1000	0
2	1000	1000	0	1000	0
3	0	1	1	2	1000
f_j	0	1	1	0	0

$$X = \{1, 2, 3, 4\}, \quad Y = \{2, 3, 4, 5\}, \quad \bar{Z}(X) = 2, \quad \bar{Z}(Y) = 2,$$

$$\bar{Z}(X \cup Y) = 0 \text{ e } \bar{Z}(X \cap Y) = 3.$$

$$\bar{Z}(X) + \bar{Z}(Y) = 4 > \bar{Z}(X \cup Y) + \bar{Z}(X \cap Y),$$

e, portanto, \bar{Z} não é supermodular.

ii) Negar simplesmente a supermodularidade, não implica, por si, a modularidade ou submodularidade de funções de conjuntos.

iii) Se um elemento $j' \in J - W$ é incluído em $W \subset J$, tem-se que

$$\bar{Z}(W) - \bar{Z}(W \cup \{j'\}) \geq 0, \quad (4.2.6)$$

para todo $W \subset J$ e $j' \in J - W$.

A desigualdade (4.2.6) permite a seguinte

Definição 4.2.2

Uma função \bar{Z} de conjunto que satisfaz a relação (4.2.6) é dita não-crescente.

Não é possível estabelecer a desigualdade (4.2.6) para

$$Z(W) - Z(W \cup \{j'\}).$$

O subproblema $F_{d(k)_t}$ do problema dinâmico de localização, pode ser resolvido pela determinação de um subconjunto $W \subset J$ que minimiza $Z(W) = \sum_{i \in I} \min_{j \in W} c_{ij} + \sum_{j \in W} f_j$,

sujeito a $1 \leq |W| \leq p$. (4.2.7)

Este problema tem uma forma de maximização, e a referência que se faz aqui a este modelo é motivada pela ocorrência de um desvio patológico na clássica simetria entre as versões de minimização e maximização.

Representando por $I_t = \{1, \dots, m\}$ um conjunto de pontos da rede, que ofertam um item primário, deseja-se instalar algumas facilidades para executar a transformação dos bens primários ofertados. $J = \{1, \dots, n\}$ é o conjunto dos pontos elegíveis para instalação de facilidades, dos quais deseja-se escolher p pontos. Além disso, cada ponto de oferta terá seu produto processado por uma única facilidade e não se impede que cada facilidade processe o produto procedente de vários pontos de oferta. ℓ_{ij} o lucro obtido da transformação do produto ofertado no ponto i , ser executada numa facilidade instalada no ponto j . (Em geral, ℓ_{ij} calculado levando-se em conta todos os custos operacionais de

de transporte, armazenagem, etc.). O custo fixo da instalação de uma facilidade no ponto j é representado por f_j (considerado independente da dimensão da facilidade j). Com isso, o problema de localização consiste em determinar um subconjunto $W \subset J$ de facilidades? tal que $1 \leq |W| \leq p$ que maximiza o lucro. Assim, o modelo recebe a redação:

$$\max_{W \subset J} C Z(W) = \sum_{i \in I} d_i(k) \max_{t, j \in W} \ell_{ij} - \sum_{j \in W} f_j, \quad 1 \leq |W| \leq p \quad (4.2.8)$$

Os subproblemas $F_{d_i(k)}$, quando colocados na forma de minimização, são mais adequados no tratamento da questão proposta aqui? uma vez que os custos envolvidos no processo são, na prática, mais visíveis, habituais e dispõem de uma clara metodologia de cálculo. Entretanto, a forma de maximização, apresentada acima, permite levantar algumas questões interessantes e seu uso aqui não é além da oportunidade que representa, de abordar tais questões. A transformação de uma forma na outra (maximização em minimização e vice-versa) é possível através de atos corriqueiros, e um algoritmo desenhado para resolver uma delas pode naturalmente resolver a outra. Neste sentido, os dois problemas são perfeitamente simétricos (ou mesmo equivalentes). Infelizmente, tal simetria não se estende a análise dos algoritmos projetados para solução dos problemas. Relativamente aos modelos de minimização são inválidos os limites obtidos para o algoritmo guloso quando este é analisado para problemas na forma de maximização. Além disso,

em virtude do problema de encontrar um conjunto de localizações com valor $Z(W)$, satisfazendo $Z(W) \leq r \cdot Z$, ser NP-árduo, para qualquer $r > 1$, fixo, (veja demonstração em FISHER (46, 1980)), é improvável que qualquer heurística polinomial, para resolver o problema de minimização, não seja arbitrariamente ruim no pior caso. Para transpor a dificuldade relacionada a um tipo único de limite, válido tanto para problemas de maximização quanto de minimização, CORNUEJOLS, FISHER e NEMHRUSER (26, 1977), propuseram uma medida alternativa de desempenho que restaura, em certo sentido, a simetria das duas formas do problema. A nova medida compara o erro da heurística com o erro máximo possível, ao invés de compará-lo ao valor ótimo do problema.

Com efeito, uma medida de desvio relativo para uma heurística, em um problema de maximização, é dada por

$$\sigma = \frac{Z - \underline{Z}}{Z}, \quad (4.2.9)$$

onde \underline{Z} é um limite inferior da solução ótima Z . Esta medida é apropriada quando $Z > 0$, caso em que $0 \leq \sigma \leq 1$. Em geral, quando se faz a análise do pior caso de uma heurística, procura-se mostrar que $\sigma \leq \epsilon < 1$, para todos os problemas dentro de uma certa classe. Isto equivale a dizer que a razão Z / \underline{Z} é limitada por um valor positivo $1/(1 - \epsilon)$. Entretanto, o erro dado por σ é inadequado na medida em que não se pode exigir $Z > 0$ para um problema de minimização. Neste caso, se tal exigência se consumasse, a transformação do problema para a forma de maximização produziria $Z < 0$.

Além disso, se uma constante δ fosse

adicionada a cada elemento de uma linha da matriz $L = (l_{ij})$, o valor objetivo de cada solução viável seria acrescido de δ , sem que isso alterasse a execução da heurística. Neste caso, a medida σ , seria agora dada por

$$\sigma = (Z - \underline{Z}) / (Z + \delta), \quad (4.2.10)$$

que pela escolha apropriada de δ , pode ser feita tão grande ou tão pequena quanto desejado, desde que $Z \neq \underline{Z}$. Ou seja, tem-se assim uma medida sensível a mudanças de escala dos dados.

Em vista das dificuldades relatadas, CORNUEJOLS, FISHER e NEMHAUSER, propuseram a medida

$$\rho = \frac{Z - \underline{Z}}{Z - Z_*}, \quad (4.2.11)$$

onde Z_* é um valor de referência adequadamente escolhido para o problema. $Z - Z_*$ pode ser visto como o pior desvio absoluto possível para uma heurística, relativo ao pior desvio atingível.

Considerando que $Z_* \leq Z \leq \bar{Z} \leq Z^*$, pode-se definir uma medida de erro para o caso de um limite superior (problema de minimização) por

$$\rho' = (\bar{Z} - Z) / (Z^* - Z).$$

Observa-se que $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \rho' \leq 1$, $\rho = 0$, se, e somente se $Z = \underline{Z}$; e $\rho' = 0$, se, e somente se, $Z = \bar{Z}$.

Para valores de referência podem ser usados os seguintes:

$$Z_* = \sum_i \min_j c_{ij} - \sum_j f_j$$

$$Z^* = \sum_i \max_j c_{ij} + \sum_j f_j.$$

4.3 - O Algoritmo Guloso - Forma Básica:

A heurística Gulosa a ser utilizada aqui atuará sobre os subproblemas $P_t^{d(k)}$ do problema dinâmico de localização, na forma de minimização, colocados como

$$P_t^{d(k)} = \min_{W \subset J} \{Z(W) = Z(W) = \sum_{i \in W} d_t(k)_i \min_{j \in W} c_{ij} + \sum_{j \in W} f_j\} \quad \text{e } 1 \leq |W| \leq p \}. \quad (4.3.1)$$

A forma básica do algoritmo será aquela de CORNUEJOLS, FISHER e NEMHRUSER (26, 1977).

Algoritmo A

Passo 1: (início)

Faça $W^* = \phi$, $k = 1$ e $a_i^k = N(\infty)$, para todo $i \in I$.

Passo 2:

Seja $\gamma_j^k = \sum_{i \in I} d_t(k)_i \min \{c_{ij} + f_j, a_i^k\}$, para todo $j \in F$, $j \notin W^*$.

Passo 3:

Determine um índice s , tal que $s \in F$, $s \notin W^*$ e

$$U = \min_{s \in F, s \notin W^*} \gamma_s^k.$$

Passo 4:

*
*
*
*
*

Faça $W := W \cup \{s\}$. Se $k = p$, vá ao passo 6;
se $k < p$, vá ao passo 5.

Passo 5:

Faça $k := k + 1$ e seja $\alpha_i^k = \min \left(c_{is} + f_s, a_i^{k-1} \right)$,
para $i \in I - t$. Vá ao passo 5.

Passo 6: (término)

Faça $Q = \bigcup_s U_s$ e FARE.

No algoritmo acima, temos que

$I - t$ é o conjunto de nós da sub-rede;

p é o número máximo de pontos (nós) necessários (que devem ser eleitos) para instalação de facilidades;

F é o conjunto de pontos elegíveis, onde é possível instalar alguma facilidade;

W^* é o conjunto mediano, um subconjunto de F ($W^* \subset F$);

W é o conjunto de facilidades possíveis (pontos elegíveis) fora da solução, isto é, o subconjunto de F que não está em W^* ;

Q é a solução de custo mínimo para suprir (atender) os clientes associados aos nós da rede (é o valor da função objetivo ou custo do processo de atendimento resultante da solução);

$N(\infty)$ é um número muito grande:

c_{ij} é o custo operacional de transporte entre os nós i e j ;

γ_j^k é o valor potencial de Q se a facilidade j é adicionada à W durante a iteração k ;

U_s^k é o valor de Q resultante da adição a W^a do nó s ;

α_i é a distancia ponderada do nó i à mediana mais próxima.

Um experimento computacional com 100 casos, gerados aleatoriamente, foi conduzido com este algoritmo, com o objetivo de analisar seu desempenho, em termos de tempo de execução, comparativamente a outros algoritmos de mesma natureza que serão examinados aqui. O algoritmo foi programado em linguagem FORTRAN e submetido a um computador Burroughs B6800. A tabela 4.3.1 mostra o comportamento do algoritmo para o conjunto de problemas utilizados.

Tabela 4.3.1

Experiência Computacional com o Algoritmo Guloso (forma básica), na
 Solução dos Subproblemas $P_{d(k)'}^t$ do Problema Dinâmico de Localização.

PROB. N°S	NÚMERO DE		ESTÁGIOS	SUBCORS	TEMPO DOS SUBPROBLEMAS (segs)		
	N°S ELEGÍVEIS	DE			MIN	MÉDIO	MAX
001	42	42	3	15	0.0449	0.0633	0.0783
002	48	48	3	15	0.0654	0.0813	0.0980
003	49	37	3	15	0.0324	0.0490	0.0640
004	50	50	3	15	0.0113	0.0906	0.1906
005	54	54	3	15	0.0820	0.1025	0.1239
006	43	43	3	15	0.0468	0.0661	0.0853
007	56	56	3	15	0.0120	0.1108	0.2186
008	60	60	3	15	0.1010	0.1270	0.1511
009	51	51	3	15	0.0703	0.0940	0.1202
010	66	66	3	15	0.0190	0.1587	0.2993
011	70	70	3	15	0.1444	0.1802	0.2034
012	60	60	3	15	0.1044	0.1333	0.1540
013	77	77	3	15	0.0486	0.2149	0.3848
014	80	80	3	15	0.2050	0.2431	0.2850
015	69	69	3	15	0.1482	0.1773	0.2055
016	84	84	3	15	0.0767	0.2600	0.4345
017	88	88	3	15	0.2387	0.2857	0.3261
018	78	78	3	15	0.1890	0.2202	0.2495
019	96	96	3	15	0.1281	0.3438	0.5569
020	99	99	3	15	0.3154	0.3500	0.3943
021	88	88	3	15	0.2487	0.2855	0.3298
022	120	120	3	15	0.2563	0.5255	0.7906
023	140	140	3	15	0.6097	0.6926	0.7619
024	138	138	3	15	0.6264	0.6840	0.7308
025	160	160	3	15	0.5883	0.9109	1.2844

Tabela 4.3.1

(continuação)
 Experiência Computacional com o Algoritmo Guloso (forma básica), na
 Solução dos Subproblemas P_t do Problema Dinâmico de Localização.
 $d(k)$'s

PROB.	NOS	NOS ELEGIVEIS	ESTAGIOS	SUBPROBS	TEMPO DOS SUBPROBLEMAS (secs)		
					MIN	MÉDIO	MAX
026	165	165	3	15	0.8629	0.9642	1.0374
027	164	164	3	15	0.8220	0.9303	1.0872
028	180	180	3	15	0.7310	1.1171	1.5759
029	195	195	3	15	1.2381	1.3035	1.3597
030	188	188	3	15	1.1117	1.1760	1.2444
031	209	209	3	15	1.0162	1.4331	1.8355
032	210	210	3	15	1.3595	1.4473	1.5246
033	204	204	3	15	1.3218	1.3906	1.5859
034	220	220	3	15	1.1460	1.5790	2.0034
035	221	221	3	15	1.4982	1.5912	1.6693
036	212	212	3	15	1.3774	1.4686	1.5432
037	225	225	3	15	1.2230	1.6587	2.1001
038	228	228	5	16	0.0636	0.8486	1.9659
039	226	226	5	16	0.0641	0.8439	1.9649
040	240	240	5	16	0.2539	0.9953	2.0399
041	250	240	5	16	0.0679	0.9794	2.3050
042	248	240	5	16	0.0672	0.9771	2.2837
043	264	240	5	16	0.2488	1.0739	2.2230
044	270	240	5	16	0.0674	1.0528	2.5120
045	263	188	5	16	0.0544	0.8193	1.9743
046	280	188	5	16	0.1954	0.9147	2.0107
047	286	188	5	16	0.0523	0.8810	2.1051
048	276	188	5	16	0.0527	0.8356	1.9706
049	290	188	5	16	0.1937	0.9056	1.9184
050	300	188	5	16	0.0522	0.8990	2.1373

Tabela 4.3.1

(continuação)
 Experiência Computacional com o Algoritmo Guloso (forma básica), na
 Solução dos Subproblemas F_t do Problema Dinâmico de Localização.
 $d(k)$'s

PROB.	NOS	NOS ELEGIVEIS	ESTÁGIOS	SUBPROES	NÚMERO DE	TEMPO DOS SUBPROBLEMAS (secs)		
						MIN	MÉDIO	MAX
051	288	188	5	16	188	0.0522	0.8622	2.0268
052	308	188	5	16	188	0.1941	0.9555	2.0283
053	319	188	5	16	188	0.0526	0.9529	2.2504
054	310	188	5	16	188	0.0527	0.9311	2.2086
055	324	188	5	16	188	0.1951	1.0341	2.2183
056	325	188	5	16	188	0.0524	0.9816	2.3356
057	318	188	5	16	188	0.0521	0.9574	2.2982
058	336	188	5	16	188	0.1939	1.0407	2.2670
059	338	188	5	16	188	0.0523	1.0102	2.4024
060	336	188	5	16	188	0.0523	1.0076	2.4149
061	350	167	5	16	167	0.1807	0.9813	2.1341
062	351	167	5	16	167	0.0469	0.9539	2.2677
063	340	167	5	16	167	0.0076	0.1427	0.3351
064	360	167	5	16	167	0.1718	0.9824	2.1442
065	372	167	5	16	167	0.0462	0.9809	2.3345
066	366	167	5	16	167	0.0461	0.9704	2.3053
067	377	167	5	16	167	0.1731	1.0271	2.2422
068	384	167	5	16	167	0.0467	1.0276	2.4287
069	378	167	5	16	167	0.0465	1.0209	2.4286
070	392	167	5	16	167	0.1734	1.0853	2.4003
071	400	132	5	16	132	0.0393	0.8804	2.1167
072	406	132	5	16	132	0.0371	0.8788	2.0520
073	429	132	5	16	132	0.1374	0.9573	2.1414
074	440	132	5	16	132	0.0372	0.9519	2.3338
075	432	132	5	16	132	0.0373	0.9443	2.2872

Tabela 4.3.1

Experiência Computacional com o Algoritmo Guloso (forma básica), na
 Solução dos Subproblemas F do Problema Dinâmico de Localização.
 (continuação)
 $d(k) > 's$
 ω

PROB.	NÓS	NÓS ELEGÍVEIS	ESTÁGIOS	SUBPROBS	TEMPO DOS SUBPROBLEMAS (segs)		
					MIN	MÉDIO	MAX
076	456	132	5	16	0.1414	1.0271	2.3537
077	468	132	5	16	0.0370	1.0265	2.5332
078	468	132	5	16	0.0368	0.9857	2.4126
079	481	132	4	12	0.1385	1.2118	3.0037
080	494	132	4	12	0.0369	1.1904	3.1162
081	488	132	4	12	0.0308	0.9897	2.6022
082	507	110	4	12	0.1129	1.0582	2.6104
083	520	110	4	12	0.0309	1.0685	2.8625
084	534	110	4	12	0.0076	0.2525	0.6624
085	550	110	4	12	0.1142	1.1519	2.8835
086	560	110	4	12	0.0308	1.1217	2.9595
087	558	110	4	12	0.0309	1.1254	2.9223
088	576	110	4	12	0.1150	1.1888	2.9479
089	589	110	4	12	0.0307	1.1792	3.0941
090	594	110	4	12	0.0309	1.1727	3.0720
091	600	93	5	16	0.0979	0.9176	2.1150
092	605	93	5	16	0.0265	0.9502	2.5316
093	618	93	5	16	0.0261	0.9377	2.2844
094	640	93	5	16	0.0968	0.9921	2.4593
095	650	93	5	16	0.0266	0.9829	2.3459
096	648	93	5	16	0.0263	0.9702	2.5721
097	487	93	5	16	0.0975	0.7437	1.7241
098	675	93	5	16	0.0271	1.0120	2.4092
099	658	93	5	16	0.0393	1.4611	3.4978
100	522	93	5	16	0.0306	1.1528	3.0430

4.4 - O Algoritmo de Trocas de Teitz e Bart:

A idéia central de um algoritmo de trocas neste contexto, está no fato de se procurar um limite superior melhor para a solução ótima, trocando um ponto, nó ou vértice que está na solução (que foi localizado - eleito - como uma mediana), por outro fora da solução.

TEITZ e BART (1975, 1968), que detêm a paternidade do processo, propõem um algoritmo com esta característica. A sua adaptação ao problema aqui proposto, está no algoritmo abaixo.

Algoritmo B:

Passo 1: (início)

Seja Q a solução produzida pelo guloso (algoritmo A) e seja W o conjunto dos p pontos eleitos como medianas da rede $R=(V,X)$, relativas a $I^t \in V$.
 Seja $k = 1$, $g = \delta = 0$, $y = |F| - p$, $\bar{Q} = Q$ e $W = F - W$.

Passo 2:

Determine os nós u e v de W , tais que

$$\alpha_i^k = c_{iu} + f_u = \min_{j \in W} \{ c_{ij} + f_j \}, \quad i \in I^t$$

$$\beta_i^k = c_{iv} + f_v = \min_{\substack{j \in W \\ j \neq u}} \{ c_{ij} + f_j \}, \quad i \in I^t$$

Passo 3:

- Se $g = y$, vd ao passo 6;
- Se $g < y$, faça $g = g + 1$ e vd ao passo 4.

Passo 4:

Seja s o g -ésimo nó em W , isto é, faça $s = W_g^*$.
 Encontre, para s , algum nó $t \in W$, que satisfaça

$$U_{st} = \min_{j \in W} \left(\sum_{i \in A} (\min(c_{is} + f_s, \alpha_i) - \alpha_i) + \sum_{i \in B} (\min(c_{is} + f_s, \beta_{3-i} - \alpha_i)) \right)$$

onde

$$A = \{ i \in I \mid d(k)_{it} : c_{ij} + f_j > \alpha_i \}$$

$$B = \{ i \in I \mid d(k)_{it} : c_{ij} + f_j = \alpha_i \}.$$

Passo 5:

- Se $U_{st} \geq 0$, vd ao passo 3;
- Se $U_{st} < 0$, faça $k = k + 1$,

$Q = Q + U_{st}$, troque s e t , isto é, faça

$$W = (W - \{t\}) \cup \{s\}$$

$$W = (W - \{s\}) \cup \{t\}.$$

Faça $W_g = t$ e vd ao passo 2.

Passo h : (término)

Faça $\delta = \delta + 1$

Se $\bar{Q} > Q$, faça $Q = \bar{Q}$, $g = 0$ e vá ao passo 3;

. Se $\bar{Q} = Q$, PARE.

No algoritmo B

a_i^k e β_i^k são os custos ponderados do nó i em relação, respectivamente, A mediana mais próxima e A segunda mediana mais próxima, na k -ésima iteração;

δ é um contador de ciclos de trocas.

U_{st} é o indicador de trocas. No passo 4, o melhor U_{st} é escolhido, considerando os p vértices $j \in W$. Portanto, U_{st} é avaliado após p avaliações dos dois somatórios da expressão de U_{st} . Cada vez que os dois somatórios da expressão de U_{st} são avaliados, são estabelecidos (montados) os conjuntos A e B, que têm, no máximo, $\binom{d(\ell)}{d(\ell)}$ elementos. Assim, o passo 4 requer $O(p \binom{d(\ell)}{d(\ell)})$ avaliações para construir os conjuntos A e B, e $O(p)$ de outras avaliações menores para o cálculo de U_{st} em si. No próximo algoritmo, as operações correspondentes a este passo são executadas no passo 2 de forma nitidamente aprimorada, uma vez que o conjunto A é criado uma única vez, e somente parte da expressão de U_{st} é avaliada p vezes em cada iteração do algoritmo.

Assim, modificando o passo 4 e adaptando os demais, temos o

Algoritmo C

Passo 1: (início)

a) Seja Q a solução produzida pelo guloso (algoritmo R) e seja W o conjunto dos p pontos eleitos como medianas da rede $R(V, X)$, relativos a $I^t \subset V$.
Sejam $k = g = h = 1$, $y = |F| - p$ e $W = F - W$.

b) Determine os nós u e v de W , tais que

$$\alpha_i^1 = c_{iu} + f_u = \min_{j \in W} \{c_{ij} + f_j\}, \quad i \in I^t$$

$$\beta_i^1 = c_{iv} + f_v = \min_{\substack{j \in W \\ j \neq u}} \{c_{ij} + f_j\}, \quad i \in I^t$$

Passo 2:

Seja s o g -ésimo nó em W , isto é, faça $s = W_g$.
Encontre, para s , algum nó $t \in W$, que satisfaça

$$U_{st} = \sum_{i \in A} (c_{is} + f_s - \alpha_i^k) + \min_{j \in W} \left(\sum_{i \in B} (\min \{c_{is} + f_s, \beta_i^k\} - \alpha_i^k) \right)$$

onde

$$A = \{ i \in I^t : c_{is} + f_s < \alpha_i^k \}$$

$$B = \{ i \in I^t : c_{is} + f_s \geq \alpha_i^k \text{ e } c_{ij} + f_j = \alpha_i^k \}$$

Passo 3:

- Se $U_{st} \geq 0$, vá ao passo 5;
- Se $U_{st} < 0$, faça $k = k + 1$ e $Q = Q + U_{st}$;
- Troque s e t , isto é, faça

$$W^* = (W - \{t\}) \cup \{s\}$$
 e

$$W = (W - \{s\}) \cup \{t\};$$
- Faça $W_g = t$, $h = 0$ e vá ao passo 4.

Passo 4:

Para cada $i \in I$ temos que α_i^k e β_i^k são os custos da mediana mais próxima e da segunda mediana mais próxima, respectivamente, em relação ao nó i . Atualize os seus valores de acordo com os critérios seguintes:

- 4a.1) Se $c_{it} + f_t > a_i^{k-1}$ então faça

$$a_i^k = \min \{c_{is} + f_s, a_i^{k-1}\}.$$

Seja $x \in W^*$ a mediana do nó i tal que

$$c_{ix} + f_x = a_i^k, \text{ então}$$

- 4a.2) Se $c_{is} + f_s \leq \alpha_i^{k-1}$, faça $\beta_i^k = \alpha_i^{k-1}$, ou

- 4a.3) Se $c_{is} + f_s > \alpha_i^{k-1}$ e $c_{it} + f_t > \beta_i^{k-1}$,

faça

$$\beta_i^k = \min \{c_{is} + f_s, \beta_i^{k-1}\}, \text{ ou}$$

- 4a.4) Se $c_{is} + f_s > a_i^{k-1}$ e $c_{it} + f_t = \beta_i^{k-1}$,

faça

$$\beta_i^k = \min_{\substack{j \in W \\ j \neq x}} \{c_{ij} + f_j\}.$$

- 4b.1) Se $c_{it} + f_t = a_i^{k-1}$, então faça

$$\alpha_i = \min_{R} \{c_{is} + f_s, \beta_i^{k-1}\}.$$

Seja $x \in W$ a mediana do nó i , tal que

$$c_{ix} + f_x = a_i^k, \text{ então}$$

- 4b.2) Se $c_{is} + f_s \leq \beta_i^{k-1}$, faça $\beta_i^k = \beta_i^{k-1}$, ou

- 4b.3) Se $c_{is} + f_s > \beta_i^{k-1}$, faça

$$\beta_i^k = \min_{\substack{j \in W \\ j \neq x}} \{c_{ij} + f_j\}.$$

Passo 5: (término)

- Se $h = y$, PARE.

Se $h < y$, faça $h = h + 1$, $g = g + 1$ e vá ao passo 2.

A tabela 4.4.1 dá o desempenho relativo, em termos de tempo de execução, do algoritmo de trocas com a modificação do passo 4 de E (algoritmo C) e do algoritmo B (de

Tabela 4.4.1

Experiência Computacional e Análise Comparativa dos Algoritmos de Trocas de Teitz e Bart e de Trocas Acelerado, na Solução dos Subproblemas F_t(k)'s

TEMPO
DOS
SUBPROBLEMAS
(segs)

PROB.	NOS	NOS ELEGÍVEIS	ESTÁGIOS	SUBPROBS	Alg. Teitz e Bart			Alg. Trocas Acelerado		
					MIN	MEDIO	MAX	MIN	MEDIO	MAX
001	42	42	5	15	0.00561	0.00703	0.00789	0.00031	0.00037	0.00041
002	48	48	3	15	0.00934	0.01016	0.01088	0.00054	0.00059	0.00060
003	49	37	5	15	0.00771	0.00907	0.01012	0.00248	0.00404	0.00537
004	50	50	5	15	0.00543	0.03020	0.06731	0.00156	0.00431	0.00987
005	54	54	3	15	0.00821	0.01024	0.02700	0.00102	0.00701	0.01029
006	43	43	5	15	0.00497	0.00621	0.00848	0.00092	0.00104	0.00707
007	56	56	3	15	0.00520	0.00740	0.00810	0.00096	0.00240	0.00800
008	60	60	3	15	0.00982	0.01007	0.01481	0.00231	0.00630	0.01240
009	51	51	5	15	0.00878	0.01160	0.01320	0.00051	0.00067	0.00072
010	66	66	5	15	0.00237	0.00621	0.00947	0.00039	0.00051	0.00087
011	70	70	3	15	0.01804	0.02048	0.03952	0.00336	0.00621	0.00948
012	60	60	3	15	0.01739	0.03421	0.05200	0.00320	0.00540	0.00900
013	77	77	5	15	0.00896	0.01027	0.01541	0.00124	0.00243	0.00542
014	80	80	3	15	0.04821	0.06249	0.09143	0.01134	0.01350	0.01621
015	69	69	3	15	0.01851	0.02247	0.04857	0.00308	0.00691	0.00942
016	84	84	5	15	0.01060	0.01847	0.02031	0.00249	0.00629	0.00891
017	88	88	3	15	0.03978	0.04081	0.06522	0.00442	0.01360	0.01631
018	78	78	5	15	0.02361	0.03208	0.05507	0.00326	0.00581	0.00927
019	96	96	5	15	0.00236	0.00467	0.00703	0.00029	0.00121	0.00482
020	99	99	5	15	0.00741	0.00926	0.01051	0.00123	0.00459	0.00722
021	88	88	5	15	0.03437	0.04139	0.06291	0.00633	0.00841	0.01009
022	120	120	3	15	0.03202	0.05792	0.08443	0.00442	0.00739	0.00910
023	140	140	5	15	0.11241	0.13427	0.16290	0.02072	0.04179	0.08793
024	138	138	5	15	0.10468	0.13300	0.16001	0.01744	0.01910	0.02021
025	160	160	5	15	0.11766	0.18218	0.20029	0.02942	0.06073	0.32110

Tabela 4.4.1

(continuação)

Experiência Computacional e Análise Comparativa dos Algoritmos de Trocas de Teitz e Bart e de Trocas Acelerado, na Solução dos Subproblemas $P_d(k)$'s

TEMPO
DOS
SUBPROBLEMAS
(segs)

PROB.	NÓS	NÓS ELEGÍVEIS	ESTÁGIOS	SUBPROBS	Alg. Teitz e Bart			Alg. Trocas Acelerado		
					MIN	MÉDIO	MAX	MIN	MÉDIO	MAX
026	165	165	3	15	0.20545	0.24723	0.31436	0.03951	0.04129	0.05614
027	164	164	3	15	0.19513	0.25129	0.29870	0.03564	0.17912	0.21400
028	180	180	3	15	0.13352	0.81802	1.22471	0.02438	0.05410	0.12209
029	195	195	3	15	0.23057	0.32426	0.51009	0.04212	0.09122	0.10947
030	188	188	3	15	0.30056	0.61790	0.98070	0.07135	0.10207	0.64025
031	209	209	3	15	0.18978	0.34295	0.87926	0.04505	0.08470	0.15423
032	210	210	3	15	0.25318	0.29342	0.32250	0.00110	0.01549	0.04310
033	204	204	3	15	0.24143	0.82450	1.22473	0.04496	0.08915	0.15414
034	220	220	3	15	0.27204	0.31944	0.93498	0.07356	0.09240	0.12426
035	221	221	3	15	0.40506	0.89020	1.42755	0.07543	0.09124	0.10276
036	212	212	3	15	0.35317	0.44503	0.46482	0.06588	0.10349	0.13671
037	225	225	3	15	0.22339	0.34910	1.81420	0.05303	0.08940	0.17210
038	228	228	5	16	0.01719	0.06142	0.12124	0.00465	0.02142	0.09150
039	226	226	5	16	0.01193	0.03146	0.06988	0.00314	0.00628	0.01029
040	240	240	5	16	0.06028	0.29710	1.00814	0.01393	0.07120	0.84002
041	250	240	5	16	0.01240	0.02915	0.04112	0.00232	0.00421	0.00627
042	248	240	5	16	0.04544	0.08249	0.10250	0.01228	0.06102	0.09045
043	264	240	5	16	0.06727	0.09642	0.11490	0.01558	0.03298	0.06480
044	270	240	5	16	0.01255	0.03791	0.06925	0.00240	0.00640	0.00921
045	263	188	5	16	0.01470	0.02794	0.04213	0.00393	0.00654	0.01023
046	280	188	5	16	0.03569	0.06100	0.09452	0.00727	0.00987	0.01027
047	286	188	5	16	0.01414	0.02109	0.05788	0.00298	0.00642	0.00962
048	276	188	5	16	0.00963	0.01040	0.02530	0.00170	0.00614	0.00996
049	290	188	5	16	0.03538	0.07945	0.19870	0.00626	0.01221	0.15070
050	300	188	5	16	0.02372	0.24297	0.56245	0.00878	0.07146	0.15799

Tabela 4.4.1

(continuação)
 Experiência Computacional e Análise Comparativa dos Algoritmos de Trocas de Teitz e Bart e de Trocas Acelerado, na Solução dos Subproblemas P d(k)'s t

TEMPO
 DOS
 SUBPROBLEMS
 (segs)

PROB.	NÓS	NÓS ELEGÍVEIS	ESTÁGIOS	SUBPROBS	Alg. Teitz e Bart			Alg. Trocas Rcelerada		
					MIN	MED	MAX	MIN	MEDIO	MAX
051	288	188	5	16	0.01339	0.02987	0.04210	0.00318	0.00649	0.01210
052	308	188	5	16	0.03545	0.06215	0.09873	0.00958	0.01025	0.01548
053	319	188	5	16	0.01596	0.03249	0.86106	0.00418	0.00610	0.00985
054	310	188	5	16	0.01067	0.03244	0.07492	0.00236	0.00545	0.00983
055	324	188	5	16	0.04976	0.07247	0.09550	0.01669	0.02610	0.06046
056	325	188	5	16	0.01589	0.02142	0.03940	0.00538	0.00727	0.01022
057	318	188	5	16	0.01328	0.03246	0.06237	0.00295	0.00578	0.00976
058	336	188	5	16	0.06468	0.09112	0.10204	0.01692	0.05406	0.09124
059	338	188	5	16	0.01609	0.04139	0.07295	0.00357	0.00642	0.00985
060	336	188	5	16	0.01586	0.03420	0.06129	0.00529	0.00817	0.01294
061	350	167	5	16	0.05562	0.07941	0.09873	0.01233	0.02910	0.03147
062	351	167	5	16	0.01564	0.03420	0.07219	0.00409	0.00703	0.00991
063	340	167	5	16	0.00255	0.00548	0.00985	0.00059	0.00176	0.00209
064	360	167	5	16	0.04496	0.06127	0.09874	0.00839	0.01002	0.02492
065	372	167	5	16	0.01179	0.04295	0.08481	0.00398	0.00649	0.00989
066	366	167	5	16	0.01206	0.83422	0.07490	0.00267	0.00721	0.01263
067	377	167	5	16	0.04071	0.86919	0.10295	0.01065	0.04129	0.09210
068	384	167	5	16	0.01416	0.03430	0.06108	0.00287	0.00621	0.01029
069	378	167	5	16	0.01225	0.02975	8.03100	0.80313	0.00649	0.00908
070	392	167	5	16	0.03973	0.06147	0.09558	0.01074	0.02948	0.06150
071	400	132	5	16	0.00987	0.01321	0.02410	0.00207	0.00547	0.00921
072	486	132	5	16	0.01237	0.03417	0.06928	0.00375	0.00654	0.01028
073	429	132	5	16	0.03087	0.06495	0.09876	0.01078	0.04091	0.08520
074	440	132	5	16	0.00961	0.01072	0.01810	0.00293	0.00562	0.00996
075	432	132	5	16	0.01440	0.02789	0.05472	0.00329	0.08642	0.01127

Tabela 4.4.1

Experiência Computacional e Análise Comparativa dos Algoritmos de Trocas de Partículas e Busca de Trocas Acelerado, no Solução dos Subproblemas F_w(k)'s

PROB.	NOS	NOS ELEGIVEIS	ESTAGIOS	SUBPROBS	Alg. Teitz e Bart			Alg. Trocas Acelerado		
					MIN	MEDIO	MAX	MIN	MEDIO	MAX
076	456	132	5	16	0.04340	0.07510	0.09879	0.00997	0.01247	0.02978
077	468	132	5	16	0.00874	0.01026	0.02870	0.00247	0.00641	0.00906
078	468	132	5	16	0.00814	0.01247	0.03791	0.00272	0.00579	0.00901
079	481	132	4	12	0.04673	0.06219	0.09426	0.01031	0.04128	0.09215
080	494	132	4	12	0.00816	0.01402	0.01804	0.00272	0.00404	0.00906
081	488	132	4	12	0.00841	0.01244	0.02101	0.00187	0.00279	0.00641
082	507	110	4	12	0.02955	0.06149	0.09287	0.00986	0.01246	0.03472
083	520	110	4	12	0.01072	0.01941	0.02705	0.00231	0.00545	0.00904
084	534	110	4	12	0.00205	0.00507	0.00941	0.00056	0.00092	0.00143
085	550	110	4	12	0.02915	0.05700	0.09016	0.00981	0.01014	0.02098
086	560	110	4	12	0.00811	0.01027	0.02540	0.00249	0.00621	0.00943
087	558	110	4	12	0.00937	0.01428	0.03211	0.00207	0.00842	0.01729
088	576	110	4	12	0.02943	0.04790	0.08087	0.00685	0.00901	0.01024
089	589	110	4	12	0.00621	0.00942	0.01076	0.00133	0.00532	0.00912
090	594	110	4	12	0.00725	0.00931	0.01279	0.00237	0.00482	0.00877
091	600	93	5	16	0.02969	0.04006	0.08710	0.00990	0.01021	0.02540
092	605	93	5	16	0.00678	0.00935	0.01244	0.00241	0.00545	0.00921
093	618	93	5	16	0.00792	0.01012	0.01847	0.00261	0.00546	0.00926
094	640	93	5	16	0.02578	0.04712	0.08915	0.00657	0.00949	0.01273
095	650	93	5	16	0.00696	0.00841	0.01002	0.00232	0.00621	0.00910
096	648	93	5	16	0.00882	0.01095	0.02230	0.00206	0.00672	0.00940
097	487	93	5	16	0.02157	0.04713	0.08112	0.00719	0.00919	0.01142
098	675	93	5	16	0.00909	0.01407	0.02705	0.00232	0.00576	0.00914
099	658	93	5	16	0.01209	0.05401	0.09027	0.00282	0.00469	0.00941
100	522	93	5	16	0.00742	0.00979	0.01243	0.00346	0.00561	0.00971

TEMPO
DOS
SUBPROBLEMAS
(segs)

Teitz e Bart). Os testes foram executados sobre **instâncias** do problema em que predominam valores baixos de p . Entretanto, testes isolados mostraram com mais nitidez, que o desempenho do algoritmo C melhora **em relação** ao desempenho do algoritmo B para valores crescentes de p . Isto se deve ao fato de que **enquanto** no algoritmo B, cada um dos p testes de troca requer $O(2|I - t|^{d(l)})$ comparações e $O(2|I - t|^{d(l)})$ de outras operações elementares (adições e subtrações), no algoritmo C, as operações são executadas num único lance, exigindo ao todo $O(3|I - t|^{d(l)} + p)$ comparações. Observemos que o nível de complexidade destas operações, praticamente permanece para valores crescentes de p .

4.5 - Complementos:

No algoritmo guloso (forma **básica**), observa-se que, nas iterações onde $k > 1$, somente alguns, digamos r nós, $r < |I - t|^{d(l)}$, são reexaminados após a inclusão da k -ésima mediana no conjunto das medianas escolhidas. Este fato dá um espaço para uma construção aprimorada do algoritmo A, onde na $(k+1)$ -ésima iteração, o passo 2 pode ser executado só para os r nós reexaminados, com intuito de lhes atribuir uma mediana melhor do que aquela que lhes foi atribuída até agora. Com isso? é possível obter um algoritmo com desempenho melhor que o guloso (algoritmo A), sobretudo nos casos em que $|I - t|^{d(l)}$, $|J|$ e p são grandes. Quando k tende para p , r decresce **monotonicamente**, o que garante uma **convergência** mais rápida do algoritmo. O algoritmo D, abaixo, incorpora estas características.

Algoritmo D

Passo 1: (início)

$$W^* = \phi, k = 1, Y = \phi, \alpha_{\bar{i}}^0 = 0 \text{ e } \alpha_{\bar{i}}^1 = N(\infty),$$

para todo $\bar{i} \in I \quad t \quad d(k)$

$\gamma_{\bar{j}}^0 = \gamma_{\bar{j}}^1 = 0, j \in F$. Faça $Y = Y \cup \{i\}$, para

todo $\bar{i} \in I \quad t \quad d(k)$.

Passo 2:

Calcule

$$\gamma_{\bar{j}}^k = \sum_{i \in Y} \min \{c_{ij} + f_j, \alpha_{\bar{i}}^k\} + \gamma_{\bar{j}}^{k-1} - \sum_{i \in Y} \min \{c_{ij} + f_j, \alpha_{\bar{i}}^{k-1}\},$$

para toda $j \in F, j \notin W$.

Passo 3:

Determine um índice (nó) s , tal que $s \in F, s \notin W^*$ e

$$U_s = \min_{j \notin W} \gamma_{\bar{j}}^k.$$

Passo 4:

Faça $W^* = W^* \cup \{s\}$. Se $k = p$, vá ao passo 6; se $k < p$, faça $Y = \phi$ e vá ao passo 5.

Passo 5:

Faça $k = k + 1$ e seja

$$a_{\bar{i}}^k = \min_{i \in I} \{c_{is} + f_s, a_{\bar{i}}^{k-1}\}, i \in I \quad t \quad d(k)$$

Se $c_{is} + f_s \leq a_{\bar{i}}^{k-1}$, então faça, para esses i 's de

$I \quad t \quad d(k)$, $Y = Y \cup \{i\}$, e volte ao passo 2.

Passo 6: (término)

Faça $Q = U_5$ e PARE.

Na busca que empreendemos para encontrar o melhor processo de solução dos subproblemas $P_{d(k)_t}$, o algoritmo D foi programado em FORTRRN e os resultados emitidos (em termos de tempo de execução) estão na tabela 4.5.1, onde figuram também, para fins de comparação, os resultados do algoritmo R. Os casos analisados não refletem bem as características comparáveis dos algoritmos porque o baixo valor de p , presente em todos os problemas resolvidos? inibiu? em parte, o aparecimento das características diferenciadoras. Entretanto, o melhor desempenho do algoritmo D, para os problemas utilizados? mesmo assim? fica avaliado. Alguns testes isolados para instâncias do problema em que p tinha valores relativamente grandes, mostraram, com mais nitidez, a superioridade do algoritmo D. Além desses, foram realizados testes comparativos de iniciação dos algoritmos H e C, utilizando os algoritmos R e D. Mais uma vez o algoritmo D exibiu um desempenho melhor e ficou caracterizado que a solução dos subproblemas $F_{d(k)_t}$, feita pelo algoritmo D é, em termos de heurísticas gulosas, e ao nível das análises que executamos, a mais eficiente.

Os problemas gerados aleatoriamente, têm custos variáveis (de transporte) com distribuição uniforme e custos fixos com distribuição normal, conforme dados do APÊNDICE A.

Tabela 4.5.1

Experiência Computacional e Análise Comparativa dos Algoritmos A e D (Guloso - forma básica e Guloso Acelerado) na Solução dos Subproblemas P_w , do Problema Dinâmico de Localização. $d(k) \cdot s$

TEMPO
DOS
SUBPROBLEMAS
(segs)

PROB.	NÓS	NÓS ELEGÍVEIS	ESTÁGIOS	SUBPROBS	Algoritmo A				Algoritmo D			
					MIN	MÉDIO	MAX	MIN	MÉDIO	MAX		
001	42	42	3	15	0.0449	0.0633	0.0783	0.0014	0.0171	0.0190		
002	48	48	3	15	0.0654	0.0813	0.0980	0.0242	0.0262	0.0337		
003	49	37	3	15	0.0324	0.0490	0.0640	0.0147	0.0196	0.0228		
004	50	50	3	15	0.0113	0.0906	0.1906	0.0026	0.0614	0.0903		
005	54	54	3	15	0.0820	0.1025	0.1239	0.0215	0.0541	0.0892		
006	43	43	3	15	0.0468	0.0661	0.0853	0.0075	0.0091	0.0127		
007	56	56	3	15	0.0120	0.1108	0.2186	0.0021	0.0070	0.0142		
008	60	60	3	15	0.1010	0.1270	0.1511	0.0207	0.0479	0.0841		
009	51	51	3	15	0.0703	0.0940	0.1202	0.0181	0.0342	0.0926		
010	66	66	3	15	0.0190	0.1587	0.2993	0.0041	0.0092	0.0143		
011	70	70	3	15	0.1444	0.1802	0.2034	0.0303	0.0541	0.0927		
012	60	60	3	15	0.1044	0.1333	0.1540	0.0179	0.0645	0.0981		
013	77	77	3	15	0.0486	0.2149	0.3848	0.0076	0.0098	0.0107		
014	80	80	3	15	0.2050	0.2431	0.2850	0.0527	0.0842	0.1002		
015	69	69	3	15	0.1482	0.1773	0.2055	0.0381	0.0624	0.1029		
016	84	84	3	15	0.0767	0.2600	0.4345	0.0136	0.0459	0.0921		
017	88	88	3	15	0.2387	0.2857	0.3261	0.0615	0.0931	0.1029		
018	78	78	3	15	0.1890	0.2202	0.2495	0.0361	0.0625	0.1074		
019	96	96	3	15	0.1281	0.3438	0.5569	0.0330	0.0679	0.0906		
020	99	99	3	15	0.3154	0.3500	0.3943	0.0598	0.0947	0.1142		
021	88	88	3	15	0.2487	0.2855	0.3298	0.0472	0.0621	0.1075		
022	120	120	3	15	0.2563	0.5255	0.7906	0.0523	0.0749	0.1103		
023	140	140	3	15	0.6097	0.6926	0.7619	0.1297	0.1649	0.1771		
024	138	138	3	15	0.6264	0.6840	0.7308	0.1188	0.3476	0.6091		
025	160	160	3	15	0.5883	0.9109	1.2844	0.1196	0.2112	0.4210		

Tabela 4.5.1

(continuação)

Experiência Computacional e Análise Comparativa dos Algoritmos A e D (Guloso - forma básica e guloso acelerado) na Solução dos Subproblemas P_t, do Problema Dinâmico de Localização.

$d(k)$'s
 TEMPO
 DOS
 SUBPROBLEMAS
 (segs)

PROB.	NÓS	NÓS ELEGÍVEIS	ESTÁGIOS	SUBPROBS	Algoritmo A			Algoritmo D		
					MIN	MÉDIO	MAX	MIN	MÉDIO	MAX
026	165	165	3	15	0.8629	0.9642	1.0374	0.1804	0.6410	0.9021
027	164	164	3	15	0.8220	0.9303	1.0872	0.2115	0.5298	0.9002
028	180	180	3	15	0.7310	1.1171	1.5759	0.1252	0.6810	0.9894
029	195	195	3	15	1.2381	1.3035	1.3597	0.2348	0.6243	0.9870
030	188	188	3	15	1.1117	1.1760	1.2444	0.1903	0.5290	0.8276
031	209	209	3	15	1.0162	1.4331	1.8355	0.2610	0.5470	0.8725
032	210	210	3	15	1.3595	1.4473	1.5246	0.2841	0.6425	1.0021
033	204	204	3	15	1.3218	1.3906	1.5859	0.2508	0.5421	0.9733
034	220	220	3	15	1.1460	1.5790	2.0034	0.2951	0.4290	1.0029
035	221	221	3	15	1.4982	1.5912	1.6693	0.3862	0.9210	1.0021
036	212	212	3	15	1.3774	1.4686	1.5432	0.2147	0.6194	0.9278
037	225	225	3	15	1.2230	1.6587	2.1001	0.2554	0.8217	1.1490
038	228	228	5	16	0.0636	0.8486	1.9659	0.0165	0.1842	0.6421
039	226	226	5	16	0.0641	0.8439	1.9649	0.0167	0.0349	0.0623
040	240	240	5	16	0.2539	0.9953	2.0399	0.0483	0.6430	1.3212
041	250	240	5	16	0.0679	0.9794	2.3050	0.0106	0.5410	1.1017
042	248	240	5	16	0.0672	0.9771	2.2837	0.0147	0.5412	1.1210
043	264	240	5	16	0.2488	1.0739	2.2230	0.0472	0.1372	1.0279
044	270	240	5	16	0.0674	1.0528	2.5120	0.0175	0.8422	1.0313
045	263	188	5	16	0.0544	0.8193	1.9743	0.0094	0.1007	0.2075
046	280	188	5	16	0.1954	0.9147	2.0107	0.0506	0.2348	0.9196
047	286	188	5	16	0.0523	0.8810	2.1051	0.0107	0.2001	1.0211
048	276	188	5	16	0.0527	0.8356	1.9706	0.0131	0.0479	0.0921
049	290	188	5	16	0.1937	0.9056	1.9184	0.0408	0.1250	0.5672
050	300	188	5	16	0.0522	0.8990	2.1373	0.0085	0.0149	0.8721

Tabela 4.5.1

(continuação)
 Experiência Computacional e Análise Comparativa dos Algoritmos A e D (Guloso - forma básica e
 e Guloso Acelerado) na Solução dos Subproblemas P_t, do Probama Dinâmico de Localização.
 d(k)'s

TEMPO
 DOS
 SUBPROBLEMAS
 (segs)

PROB.	NOS	NOS ELEGÍVEIS	ESTÁGIOS	SUBPROES	Algoritmo A			Algoritmo D		
					MIN	MEDIO	MAX	MIN	MEDIO	MAX
051	288	188	5	16	0.0522	0.8622	2.0268	0.0081	0.0589	1.2172
052	308	188	5	16	0.1941	0.9555	2.0283	0.0493	0.1327	1.6475
053	319	188	5	16	0.0526	0.9529	2.2504	0.0109	0.0801	1.0091
054	310	188	5	16	0.0527	0.9311	2.2086	0.0082	0.0749	1.0021
055	324	188	5	16	0.1951	1.0341	2.2183	0.0370	0.1407	1.3070
056	325	188	5	16	0.0524	0.9816	2.3356	0.0089	0.0141	0.9100
057	318	188	5	16	0.0521	0.9574	2.2982	0.0134	0.1294	0.6420
058	336	188	5	16	0.1939	1.0407	2.2670	0.0512	0.1972	1.1105
059	338	188	5	16	0.0523	1.0102	2.4024	0.0107	0.2141	1.7921
060	336	188	5	16	0.0523	1.0076	2.4149	0.0082	0.0579	0.9895
061	350	167	5	16	0.1807	0.9813	2.1341	0.0308	0.0601	0.2720
062	351	167	5	16	0.0469	0.9539	2.2677	0.0098	0.0179	1.0027
063	340	167	5	16	0.0076	0.1427	0.3351	0.0020	0.0421	1.3005
064	360	167	5	16	0.1718	0.9824	2.1442	0.0269	0.1492	1.0282
065	372	167	5	16	0.0462	0.9809	2.3345	0.0088	0.0921	1.4200
066	366	167	5	16	0.0461	0.9704	2.3053	0.0097	0.0941	1.0250
067	377	167	5	16	0.1731	1.0271	2.2422	0.0444	0.1396	1.0742
068	384	167	5	16	0.0467	1.0276	2.4287	0.0097	0.1070	1.2124
069	378	167	5	16	0.0465	1.0209	2.4286	0.0119	0.0941	0.9507
070	392	167	5	16	0.1734	1.0853	2.4003	0.0275	0.1245	1.2116
071	400	132	5	16	0.0393	0.8804	2.1167	0.0080	0.1008	0.9783
072	406	132	5	16	0.0371	0.8788	2.0520	0.0095	0.1201	1.0720
073	429	132	5	16	0.1374	0.9573	2.1414	0.0237	0.1422	1.0074
074	440	132	5	16	0.0372	0.9519	2.3338	0.0064	0.1499	1.2126
075	432	132	5	16	0.0373	0.9443	2.2872	0.0076	0.0847	1.0791

Tabela 4.5.1

(continuação)

Experiência Computacional e Análise Comparativa dos Algoritmos A e D (Guloso - forma básica e guloso acelerado) na Solução dos Subproblemas P_t , do Problema Dinâmico de Localização. $d(k)$'s

TEMPO
DOS
SUBPROBLEMAS
(segs)

PROB.	NÓS	NºS ELEGÍVEIS	ESTÁGIOS	SUBPROBS	Algoritmo A			Algoritmo D		
					MIN	MÉDIO	MAX	MIN	MÉDIO	MAX
076	456	132	5	16	0.1414	1.0271	2.3537	0.0363	0.1794	1.0219
077	468	132	5	16	0.0370	1.0265	2.5332	0.0078	0.1642	1.4432
078	468	132	5	16	0.0368	0.9857	2.4126	0.0059	0.1796	1.3207
079	481	132	4	12	0.1385	1.2118	3.0037	0.0356	1.0210	1.9403
080	494	132	4	12	0.0369	1.1904	3.1162	0.0070	0.4908	1.9142
081	488	132	4	12	0.0308	0.9897	2.6022	0.0065	0.5423	1.0026
082	507	110	4	12	0.1129	1.0582	2.6104	0.0194	0.1422	1.0798
083	520	110	4	12	0.0309	1.0685	2.8625	0.0080	0.1424	1.2190
084	534	110	4	12	0.0076	0.2525	0.6624	0.0012	0.0084	0.0105
085	550	110	4	12	0.1142	1.1519	2.8835	0.0187	0.1407	1.2407
086	560	110	4	12	0.0308	1.1217	2.9595	0.0059	0.6210	1.5420
087	558	110	4	12	0.0309	1.1254	2.9223	0.0059	0.0179	1.4142
088	576	110	4	12	0.1150	1.1888	2.9479	0.0295	0.4219	1.0273
089	589	110	4	12	0.0307	1.1792	3.0941	0.0054	1.0290	2.2140
090	594	110	4	12	0.0309	1.1727	3.0720	0.0061	0.1179	1.9870
091	600	93	5	16	0.0979	0.9176	2.1150	0.0205	0.5447	1.3249
092	605	93	5	16	0.0265	0.9502	2.5316	0.0058	0.1720	1.7230
093	618	93	5	16	0.0261	0.9377	2.2844	0.0053	0.5789	1.6154
094	640	93	5	16	0.0968	0.9921	2.4593	0.0245	0.1904	1.4246
095	650	93	5	16	0.0266	0.9829	2.3459	0.0046	0.5213	1.0203
096	648	93	5	16	0.0263	0.9702	2.5721	0.0037	0.1077	1.0492
097	487	93	5	16	0.0975	0.7437	1.7241	0.0231	0.2410	0.9947
098	675	93	5	16	0.0271	1.0120	2.4092	0.0048	0.1070	1.0021
099	658	93	5	16	0.0393	1.4611	3.4978	0.0079	1.0708	1.9775
100	522	93	5	16	0.0306	1.1528	3.0430	0.0067	0.1072	1.9421

CAPÍTULO V

SOLUÇÃO DOS SUBPROBLEMAS $P_{d(k)_t}$ DO PROBLEMA DINÂMICO DE LOCALIZAÇÃO, BASEADA NOS PROCEDIMENTOS DE RELAXAÇÃO LAGRANGEANA, NO ALGORITMO DE OTIMIZAÇÃO DE SUBGRADIENTES E NUM MÉTODO HEURÍSTICO DE DECOMPOSIÇÃO PRIMAL.

5.1 - Introdução:

Com o intuito de resolver os subproblemas $P_{d(k)_t}$ através de recursos mais elaborados do ponto de vista algorítmico, na seção 5.6 deste capítulo, é proposta (como contribuição) uma heurística baseada na relaxação Lagrangeana do problema mestre do procedimento de decomposição de Benders, especializado na solução de problemas de localização não-capacitada. R inovagdo trazida por este método está na introdução de um tipo de relaxação que chamaremos de "convexa", uma vez que ela é feita a partir de uma combinação linear de restrições que utiliza um conjunto de multiplicadores $h_k \geq 0$, $k=1, \dots, K$, com a propriedade $\sum_k h_k = I$. Além disso, a relaxação tem um caráter dinâmico. Uma vez que o número de restrições a partir das quais se relaxa o problema? não é necessariamente o mesmo? de uma iteração do algoritmo para a iteração seguinte. Os experimentos

computacionais executados com este algoritmo mostram um procedimento poderoso, tanto no sentido da eficiência computacional quanto no da qualidade das soluções produzidas. A ocorrência de falhas duais é restrita a casos muito raros, conforme ficou constatado nas experiências computacionais exaustivas que foram realizadas. A construção deste algoritmo, bem como a análise de seu desempenho são precedidos de pequenos levantamentos sobre os fundamentos dos procedimentos baseados na relaxação Lagrangeana e nos algoritmos de otimização de subgradientes e decomposição de Benders. Com intuito de executar uma análise comparativa entre o algoritmo proposto aqui e outro que utiliza alguns recursos parecidos, é feita uma implementação da heurística baseada na relaxação Lagrangeana, usando a forma proposta por NARULA, OGHU e SRMUELSSON (120, 1977) e CORNUEJOLS, FISHER e NEMHRUSER (26, 1977).

5.2 - Fundamentos da Relaxação Lagrangeana:

Os algoritmos eficientes baseados na metodologia da relaxação Lagrangeana e projetados para problemas com estruturas especiais, são, de um lado, responsáveis pela atualidade do assunto e, de outro, legítimos promotores de estímulo a inúmeras pesquisas que procuram, ao lado de resultados teóricos importantes, aplicações concretas surpreendentes.

Iniciadas com os multiplicadores de Lagrange, as idéias subjacentes à relaxação evoluíram com os conceitos de dualidade e permitem hoje o projeto de algoritmos excelentes para solução de problemas discretos, NP-completos, de otimização, com alto nível de eficiência. O ponto central da metodologia da relaxação Lagrangeana está na substituição do problema original por outro com menos restrições e mais variáveis e que seja, sobretudo, de solução mais fácil. Em muitos casos, as soluções produzidas são aproximações para o ótimo, ou então, são cotas (limites) inferiores (problema de minimização) para a solução ótima. De qualquer forma, o método constitui uma alternativa para as relaxações de programação linear, de problemas discretos, que geram cotas para os algoritmos do tipo separação e avaliação.

Conforme MACULAN (107, 1983), o trabalho de LORIE e SAVAGE (101, 1955) é a primeira aplicação publicada dos métodos de relaxação Lagrangeana utilizados na solução de problemas de otimização combinatória. O termo "relaxação Lagrangeana" foi inventado por GEOFFRION (59, 1974), para o enfoque que nasceu com os trabalhos de HELD e KARP (69, 1970) e (70, 1971), para a solução do problema do caixeiro viajante através de uma associação inteligente do problema Lagrangeano com a idéia de árvore geradora mínima. Outras aplicações da metodologia surgiram e continuam a aparecer nos diversos campos da programação matemática. Recentemente, RIBEIRO (148, 1983) projetou algoritmos de busca do caminho mínimo, com restrições, utilizando relaxação Lagrangeana; MACULAN (108, 1983) utilizou o método na solução do problema da mochila 0-1;

e MULVEY e CROWDER (118, 1979) utilizaram o processo para resolver problemas de análise de grupamentos.

Definição 5.2.1:

Um problema (P_2) é uma relaxação do problema (P_1) , se $V(P_1) \subset V(P_2)$, onde $V(P)$ é o conjunto de soluções viáveis do problema (P) , e

$$\text{Mínimo}_{x \in V(P_2)} f_2(x) \leq \text{Mínimo}_{x \in V(P_1)} f_1(x),$$

onde $f_P(x)$ é a função objetiva do problema (P) .

A idéia geral da relaxação Lagrangeana aplicada a modelos de programação discreta? consiste em decompor o conjunto de restrições (5.2.2) do problema dado por

$$(P) \quad \text{Minimize } f(x) = cx \quad (5.2.1)$$

$$\text{Sujeito a } Ax \geq b \quad (5.2.2)$$

$$x \geq 0 \quad (5.2.3)$$

$$x_j \in Z, j \in J, \quad (5.2.4)$$

em dois subconjuntos de restrições (5.2.6) e (5.2.7), como na problema

$$(P') \quad \text{Minimize } f(x) = cx \quad (5.2.5)$$

$$\text{Sujeito a } A_1 x \geq b_1 \quad (5.2.6)$$

$$A_2 x \geq b_2 \quad (5.2.7)$$

$$x \geq 0 \quad (5.2.8)$$

$$x_j \in Z, j \in J, \quad (5.2.9)$$

onde as variáveis e parâmetros têm os significados usuais e dimensões adequadas, e passar ao problema relaxado

$$(RL_\lambda) \quad \text{Minimize } cx + \lambda (b_1 - A_1 x) \quad (5.2.10)$$

$$\text{Sujeito a } A_2 x \geq b_2 \quad (5.2.11)$$

$$x \geq 0 \quad (5.2.12)$$

$$x_j \in Z, j \in J, \quad (5.2.13)$$

onde λ é um vetor não negativa adequado. O problema (RL_λ) é a relaxação Lagrangeana de (P) em relação ao conjunto de restrições $A_1 x \geq b_1$ e a $\lambda \geq 0$. A decomposição das restrições de (P) em dois grupos, $A_1 x \geq b_1$ e $A_2 x \geq b_2$, é feita a partir da suposição de que $A_2 x \geq b_2$ tem uma estrutura especial e que as restrições $A_1 x \geq b_1$, eventualmente complicam a solução do problema. Observa-se facilmente, de acordo com a definição 5.2.1, que toda solução viável de (P) é também viável para (RL_λ) e, já que $b_1 - A_1 x \leq 0$, teremos

$$cx + \lambda (b_1 - A_1 x) \leq cx = f(x),$$

para todo $\lambda \geq 0$, o que mostra os valores objetivos de (RL_λ)

como cotas inferiores para os valores correspondentes de (P).

Alguns resultados de dualidade são decisivos no contexto da relaxação Lagrangeana, já que a escolha do melhor $\lambda \geq 0$, ou seja, aquele que produz a cota inferior mais forte, para a solução ótima, será feita através da solução do problema dual na forma que será definida abaixo.

Partimos do problema primal

$$(P) \quad \text{Minimize } f(x) \quad (5.2.14)$$

$$\text{Sujeito a } g(x) \leq 0 \quad (5.2.15)$$

$$x \in X, \quad (5.2.16)$$

onde $X \subset \mathbb{R}^n$, $g(x) = (g_1(x), \dots, g_m(x))$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$. Além disso, por hipótese, X é não-vazio e convexo, e as funções definidas nele são convexas.

O dual de (P) em relação a todas as restrições g é definido por

$$(D) \quad \text{Maximize } \left\{ \inf_{x \in X} f(x) + \lambda g(x) \right\}, \quad \lambda \geq 0, \quad (5.2.17)$$

onde $\lambda \in \mathbb{R}^m$. GEOFFRION (58, 1971) mostra a equivalência entre esta definição de dual e o dual clássico conhecido da programação linear. O maximando de (D),

$$\psi(\lambda) = \inf_{x \in X} \{ f(x) + \lambda g(x) \},$$

é uma função côncava.

Os problemas (P) e (D) têm sempre valores objetivos ótimos, que podem até mesmo ser $\pm \infty$. Certamente, se eles não têm soluções viáveis, seus valores objetivos não

serão finitos, a partir da convenção usual de que se $X = \emptyset$, então $\inf X = +\infty$ e $\sup X = -\infty$.

Um par (x^*, λ^*) , com $x^* \in X$ e $\lambda^* \geq 0$, satisfaz as condições de atimalidade para (P), se

$$(a) \quad x^* \text{ minimiza } f(x) + \lambda^* g(x) \text{ em } X \quad (5.2.18)$$

$$(b) \quad \lambda^* g(x^*) = 0 \quad (5.2.19)$$

$$(c) \quad \lambda^* \geq 0 \quad (5.2.20)$$

$$(d) \quad g(x^*) \leq 0 \quad (5.2.21)$$

As condições de otimalidade são suficientes para que x^* seja ótimo em (P).

Definição 5.2.2:

Um vetor $\gamma \in \mathbb{R}^n$ é um subgradiente da função convexa $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, no ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, se

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \gamma(x - \bar{x}), \quad (5.2.22)$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Usualmente f é não diferenciável. Isto acarreta a necessidade de um conceito que generalize aquele de gradiente de uma função diferenciável. É exatamente esse o papel do subgradiente. O conjunto dos subgradientes de qualquer função f , em \bar{x} , que é representado por $\partial f(\bar{x})$, é a subdiferencial de f em \bar{x} . Trata-se de um conjunto convexo e fechado.

5.3 - Os Algoritmos Baseados na Relaxação Lagrangeana como alternativa para os Procedimentos do Tipo Dual-ascendente na Solução de Problemas de Localização Não-capacitada:

Tomando a relaxação de programação linear do PLS-FOR e do PLS-FRA, isto é, substituindo as restrições de integralidade $y_j \in \{0,1\}$ por $y_j \in [0,1]$, para todo $j \in J$, obtemos as relaxações forte e fraca, RFOR e RFRA, de programação linear do PLS. Seus duais serão referidos por DFOR e DFRA, respectivamente. Estas relaxações provêm a base para muitos algoritmos bem sucedidos na solução do PLS.

Os algoritmos do tipo dual-ascendente, como o de ERLINKOTTER (38, 1978), por exemplo, para solução de problemas de localização não-capacitada, basicamente procuram uma solução inteira para o problema, tentando minimizar a falha dual $Z^P - Z^d \geq 0$, através da redução de violações das folgas complementares. O algoritmo dual de Erlenkotter é baseado no DFOR, que é dado por

$$\text{Maximize } Z^d = \sum_i \sigma_i \quad (5.3.1)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_i \pi_{ij} \leq f_j, \quad j \in J \quad (5.3.2)$$

$$\sigma_i - \pi_{ij} \leq c_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J \quad (5.3.3)$$

$$\pi_{ij} \geq 0, \quad i \in I, \quad j \in J. \quad (5.3.4)$$

O método dual-ascendente produz uma solução dual candidata e uma solução primal inteira candidata. Se estas soluções satisfazem todas as condições das folgas complementares, elas são ótimas. Caso contrário, tenta-se melhorar as soluções através de um procedimento de ajustamento dual. Se o dual-ascendente e o procedimento de ajustamento não produzem ainda uma solução ótima inteira, recorre-se a um algoritmo de separação e avaliação que usa como cotas inferiores, as soluções providas por estes procedimentos.

GALVAO e ROTHSTEIN (53, 1981) propõem um algoritmo baseado no dual da RFOR correspondente? para resolver o problema das *p*-medianas com custos fixos. O dual da RFOR do referido problema é dado por

$$\text{Maximize } Z = \sum_i \sigma_i + p \sigma_{n+1} \quad (5.3.5)$$

$$\text{Sujeito a } o_j + \sigma_{n+1} - \sum_{i \neq j} \pi_{ij} \leq f_j, \quad j \in I=J \quad (5.3.6)$$

$$\sigma_i + \pi_{ij} \leq c_{ij}, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad i \neq j \quad (5.3.7)$$

$$\pi_{ij} \leq 0, \quad i \in I, \quad j \in J, \quad i \neq j \quad (5.3.8)$$

$$\sigma_{n+1} \leq 0 \quad (5.3.9)$$

Os algoritmos baseados no processo dual-ascendente são famosos por sua eficiência computacional. Entretanto, demonstramos no próximo teorema que as cotas geradas pelos procedimentos baseados na relaxação Lagrangeana são melhores.

Dado o problema

$$(P) \quad \text{Minimize} \quad \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_j f_j y_j \quad (5.3.10)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \sum_j x_{ij} = 1, \quad i \in I \quad (5.3.11)$$

$$\sum_j y_j \leq p \quad (5.3.12)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq y_j, \quad i \in I, j \in J \quad (5.3.13)$$

$$y_j \in (0,1), \quad j \in J \quad (5.3.14)$$

a problema definido por (5.3.5) a (5.3.9) é o dual da **relaxação** de (P) que se **obtem** trocando as **restrições** de integralidade por $y_j \geq 0$, para todo $j \in J$. Como $c_{ij} \geq 0$, para todo $i \in I, j \in J$, as **restrições** (5.3.11) ^{i_j} podem ser **trocadas** por

$$\sum_j x_{ij} \geq 1, \quad i \in I. \quad (5.3.15)$$

Definição 5.3.1:

Chamamos de "total" a **relaxação** Lagrangeana feita sobre todas as **restrições** (5.3.12), (5.3.13) e (5.3.15) do problema (P), e chamamos de "parcial" a **relaxação** Lagrangeana feita somente sobre as **restrições** (5.3.15).

O próximo teorema mostra que os limites gerados pela relaxação parcial são mais justos do que aqueles gerados pela relaxação Lagrangeana total, o que é intuitivamente esperado. Ou seja, os limites gerados pelos algoritmos baseados no DFOR, não são melhores do que aqueles gerados pela relaxação Lagrangeana usual.

Teorema 5.3.1:

O dual da RFOR, dado por (5.3.5) a (5.3.9), é proveniente de uma relaxação Lagrangeana total, e se $Z(x, y, \sigma, \pi)$ e Z^P são, respectivamente, os valores objetivos do DFOR e da relaxação Lagrangeana parcial de (P) sobre (5.3.15), então

$$\text{Mínimo } Z(x, y, \sigma, \pi) \leq \text{Mínimo } Z^P$$

Demonstração:

Substituindo em (P) as restrições (5.3.15) no lugar de (5.3.11) e tomando a relaxação Lagrangeana em relação a todas as restrições (5.3.12), (5.3.13) e (5.3.15) e às variáveis $a_i, \pi_{ij}, i=1, \dots, n$ e $j=1, \dots, n$, e σ_{n+1} , obtemos

$$\begin{aligned} Z(x, y, \sigma, \pi) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^n f_j y_j + \sum_{i=1}^n \sigma_i \left(1 - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_{ij} - x_{ii} \right) + \sigma_{n+1} \left(p - \sum_{j=1}^n g_j \right) - \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \pi_{ij} (x_{ij} - y_j) = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (c_{ij} - \sigma_i - \pi_{ij}) x_{ij} + \sum_{j=1}^n (-\sigma_j - \sigma_{n+1} + \sum_{i=1}^n \pi_{ij} + f_j) y_j + \sum_{i=1}^n \sigma_i + p \sigma_{n+1} \end{aligned}$$

$$j \text{ d que } c_{ij} = c_{ji} = 0,$$

$$\sum_{j=1}^n \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sigma_j x_{ij} = \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sigma_j x_{ij}, \quad \sum_{j=1}^n \sigma_j x_{jj} = \sum_{i=1}^n \sigma_i x_{ii} = \sum_{j=1}^n \sigma_j y_j \quad e$$

$$\sum_{j=1}^n \sigma_j = \sum_{i=1}^n \sigma_i.$$

Seja agora o problema

$$(P)_d: \quad \text{Max } (Z' = \text{Min } Z(x, y, \sigma, \pi))$$

$$\begin{aligned} x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ \sigma_i &\geq 0, \quad i=1, \dots, n \\ \sigma_{n+1} &\leq 0 \\ \pi_{ij} &\leq 0, \quad i=1, \dots, n, \quad j=1, \dots, n, \quad i \neq j. \end{aligned}$$

$$\text{Se } c_{ij} - \sigma_i - \pi_{ij} \geq 0 \quad e \quad -\sigma_j - \sigma_{n+1} + \sum_{i \neq j} \pi_{ij} + f_j \geq 0,$$

temos que

$$Z' = \text{Min } Z(x, y, \sigma, \pi) = \sum_i \sigma_i + p \sigma_{n+1},$$

caso contrário,

$$Z' = \text{Min } Z(x, y, \sigma, \pi) = -\infty.$$

Assim, o problema $(P)_d$ pode ser estabelecido como o problema dado por (5.3.5) a (5.3.9).

Com isso, vemos que enquanto o problema (5.3.5) a (5.3.9) é obtido a partir de uma "relaxação total" de (P) , o problema relaxado em relação a somente um grupo de restrições de (P) , como (5.3.15) - "relaxação parcial" - é,

pela **definição 5.2.1**, obviamente, tal que

$$Z' = \underset{\substack{x \geq 0 \\ Y \geq 0}}{\text{Min}} Z(x, y, \sigma, \pi) \leq \underset{P}{\text{Min}} Z .$$

Os argumentos trazidos aqui mostram que os procedimentos construídos a partir da **relaxação** Lagrangeana (parcial) são uma alternativa atraente - do ponto de vista das cotas geradas - em **relação** aos algoritmos do tipo **dual-ascendente** que atuam sobre uma **relaxação** Lagrangeana total.

5.4 - Implementação do Algoritmo **Padrão** Baseado na **Relaxação** Lagrangeana:

R fim de proceder a **análises comparativas**, foi feita uma **implementação** do algoritmo de **localização** de **p**-medianas baseado nas formas de **relaxação** dadas por **NARULA, OGBU** e **SRMUELSSON (120, 1977)**. **CORNUEJOLS, FISHER** e **NEMHAUSER (26, 1977)** e **CHRISTOFIOES** e **BERSLEY (17, 1982)**.

Seja o problema (P) dado por

$$\text{Minimize } \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_j f_j y_j \quad (5.4.1)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_j x_{ij} \geq 1, \quad i \in I \quad (5.4.2)$$

$$1 \leq \sum_j y_j \leq p \quad (5.4.3)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq y_j, \quad i \in I, \quad j \in J \quad (5.4.4)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j \in J. \quad (5.4.5)$$

onde, na restrição (5.4.2), é usado o sinal \leq (uma vez que os c_{ij} 's, assim como os f_j 's, são não negativos). Tomando a relaxação Lagrangeana de (P) em relação às m restrições (5.4.2), e ao vetor $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_m)$, $\sigma_i \geq 0$, $i=1, \dots, m$, vem:

$$\begin{aligned} \text{Minimize } Z(x, a) = & \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_j f_j y_j + \\ & + \sum_i \sigma_i (1 - \sum_j x_{ij}) \end{aligned} \quad (5.4.6)$$

$$\text{Sujeito a } 1 \leq \sum_j y_j \leq p \quad (5.4.7)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq y_j, \quad i \in I, j \in J \quad (5.4.8)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j \in J. \quad (5.4.9)$$

A função (5.4.6) pode ser escrita como

$$Z(x, \sigma) = \sum_j (\sum_i (c_{ij} - \sigma_i) x_{ij} + f_j y_j) + \sum_i \sigma_i.$$

Baseado nas relações (5.4.8), observamos que, para um vetor σ fixo, os valores ótimos x_{ij} satisfazem a

$$x_{ij} = \begin{cases} y_j & \text{se } c_{ij} - \sigma_i \leq 0 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para cada $j \in J$, definimos

$$\psi_j(\sigma) \equiv \sum_i \min \{0, c_{ij} - \sigma_i\} + f_j.$$

Assim, qualquer conjunto de y_j 's ótimos resolve o problema

$$\text{Minimize } Z = \sum_j \psi_j(\sigma) y_j \quad (5.4.10)$$

$$\text{Sujeito a } 1 \leq \sum_j y_j \leq P \quad (5.4.11)$$

$$y_j \in \{0,1\}, j \in J. \quad (5.4.12)$$

Existe um procedimento simples para resolver o problema (5.4.10) a (5.4.12) acima.

Seja $J = \{1, \dots, n\}$

e seja $J(a) = \{j \in J : \psi_j(a) \leq \text{083}\}$.

$J(o)$ contém os vértices candidatos a medianas da rede, associados a um dado o . Definimos $J(\sigma)$, isto é, o conjunto de, no máximo, p medianas associadas ao a dado, por

a) $J(\sigma) = J(\sigma)$, se $1 \leq |J(\sigma)| \leq p$;

b) $J(\sigma)$ é o conjunto dos índices correspondentes aos p menores $\psi_j(\sigma)$ se $|J(\sigma)| > p$;

c) $J(\sigma)$ é um conjunto unitário cujo elemento corresponde ao índice do menor $\psi_j(\sigma)$, se $|J(\sigma)| = 0$.

Com isso, a solução do problema definido por (5.4.10) a (5.4.12) é dada por

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{se } j \in J(\sigma) \\ 0, & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e, portanto, os valores dos x_{ij} , associados a um certo σ , são dados por:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } y_j = 1 \text{ e } c_{ij} - \sigma_i \leq 0 \\ 0, & \text{se } y_j = 0 \text{ ou } c_{ij} - \sigma_i > 0. \end{cases}$$

E o valor ótimo, $Z(\sigma)$, da função Lagrangeana (5.4.6), é

$$Z(\sigma) = \sum_{j \in J(\sigma)} \psi_j(\sigma) + \sum_j \sigma_j.$$

Assim, foi calculado $Z(\sigma)$ para σ fixo. Agora, o próximo passo consiste em determinar um vetor σ que resolva o problema:

$$Z^*(\sigma) = \text{Max}_{\sigma \geq 0} Z(\sigma). \quad (5.4.13)$$

O problema (5.4.13) é conhecido como dual Lagrangeano, e foi resolvido pelo método de otimização de subgradientes, que gera uma seqüência $\sigma^0, \sigma^1, \sigma^2, \dots$, a qual, sob certas condições, converge a uma solução ótima de (5.4.13), embora $Z(\sigma^0), Z(\sigma^1), Z(\sigma^2), \dots$, não seja uma seqüência monótona crescente.

5.4.1 - O Algoritmo de Otimização de Subgradientes:

Passo 1: (início)

Determine Z^0 usando um algoritmo guloso como no capítulo IV. Faça $Z^k = -N(\infty)$, $k = 0$, $a = z^k$ e

$$a_j = \min_{i \in I} \{c_{ij} : c_{ij} > 0\}, \quad j \in J.$$

Passo 2:

Resolva o problema Lagrangeano dado por (5.4.6) a 5 9 para o vetor a atual. $Z^k(a)$ é o valor ótimo e $J^k(a)$ é o conjunto mediano associado à presente solução. Faça

$$Z^k = \max_{\inf} \{ Z^k, Z(\sigma^k) \}.$$

Passo 3:

Calcule o custo da solução viável associada a $J^k(\sigma^k)$, P

por $Z^* = \sum_{i \in I} \min_{j \in J^k(\sigma^k)} c_{ij} + \sum_{j \in J^k(\sigma^k)} f_j$, e

faça $Z^{k+1} = \min_{\sup} \{ Z^k, Z^* \}$.

Passo 4: (primeira regra de parada)

Calcule a falha dual F , dada por

$$F = 100 \times \frac{Z_{\sup} - Z_{\inf}}{Z_{\inf}}.$$

Se $F \leq \epsilon$, onde $\epsilon > 0$ é uma constante adequadamente pequena e previamente estabelecida, PFIRE. Caso contrário, vá ao passo 5.

Passo 5:

Defina o vetor γ^k de subgradientes, associado ao σ^k presente, por

$$\gamma_i^k = 1 - \sum_{j \in J(\sigma^k)} x_{ij}^k, \text{ para todo } i \in I.$$

x_{ij}^k é a solução do problema Lagrangeano dado por (5.4.6) a (5.4.9), associada a σ^k .

Passo 6: (segunda regra de parada)

Se $\gamma_i^k = 0$ para todo $i \in I$, PFIRE. Caso contrário, vá ao passo 7.

Passo 7: (terceira regra de parada)

Atualize a k :

- i) para as n primeiras iterações faça $a_k = 2$;
- ii) para as $n/2$ iterações seguintes utiliza-se $a_k/2$. Use este critério sucessivamente até que o contador de iterações atinja um valor s previamente estabelecido;
- iii) daí em diante, divida a_k por 2 a cada s iterações, até que ele atinja um valor suficientemente pequeno. Quando isso ocorrer, PFIRE.

Se não ocorrer a **condição de parada**, vá ao passo 8.

Passo 8:

Calcule o tamanho do passo 8, por

$$\alpha_k = \frac{Z^k - Z(\sigma^k)}{\|\gamma^k\|^2}$$

e atualize o vetor σ de multiplicadores de Lagrange, por

$$\sigma_i^{k+1} = \max \left\{ 0, \sigma_i^k + \theta \gamma_i^k \right\},$$

para todo $i \in I$. **Faça $k = k + 1$** e volte ao passo 5.

No algoritmo **acima**, existem **três** regras de parada. No passo 4, o algoritmo **para** se for fechada a falha dual. Nesse **caso**, **obtem-se** uma **solução ótima** para o problema **original**. Se a parada ocorrer no passo 6, **obtem-se também uma solução ótima** com a **anulação** do vetor de **subgradientes**. **Finalmente**, no passo 7, o algoritmo **para** deixando disponíveis os limites inferior e superior para a **solução ótima** do problema.

O algoritmo foi programado em linguagem **FORTRAN** para a **condução** de **experiências** computacionais na **solução** dos subproblemas F_t do problema **dinâmico** de **localização**. A tabela 5.4.1 mostra seu desempenho em termos de tempo para 100 casos **examinados**, quando foi utilizado um **computador** Burroughs **B6800**.

Tabulo N.4.1

Experiência Computacional com o Algoritmo de Otimização de Subgradientes, Baseado na Metodologia da Relaxação Lagrangeana, para Solução dos Subproblemas P_t , do Problema Dinâmico de Localização. $d(k)$'s

PROB.	NÚMERO DE		ESTÁGIOS	SU[PROBS]	TEMPO DOS SUBPROBLEMAS (secs)		
	NÓS	NÓS ELEGÍVEIS			MIN	MEDIO	MAX
001	42	42	3	15	0.0403	0.0906	0.3689
002	48	48	3	15	0.0462	0.0940	0.3706
003	49	37	3	15	0.0936	0.4494	1.5368
004	50	50	3	15	0.0147	1.8414	8.5954
005	54	54	3	15	0.2202	2.0450	4.6626
006	43	43	3	15	0.2039	0.8520	2.3915
007	56	56	3	15	0.0160	1.0630	3.4882
008	60	60	3	15	0.2638	1.4566	5.1945
009	51	51	3	15	0.1269	1.5847	3.5231
010	66	66	3	15	0.0633	3.5762	9.4729
011	70	70	3	15	2.0072	3.5375	7.0566
012	60	60	3	15	0.2952	2.5944	5.2200
013	77	77	3	15	0.1725	1.9292	7.9340
014	80	80	3	15	0.9228	3.1410	7.2397
015	69	69	3	15	0.4878	4.2797	6.9654
016	84	84	3	15	0.1362	4.4635	15.1142
017	88	88	3	15	0.7162	3.7226	7.6156
018	78	78	3	15	0.3108	1.3710	7.3807
019	96	96	3	15	0.5402	7.2641	21.6122
020	99	99	3	15	0.4094	2.7910	13.0286
021	88	88	3	15	1.1509	6.2202	10.5425
022	120	120	3	15	0.5122	13.1249	35.4045
023	140	140	3	15	3.6055	21.2069	34.6815
024	138	138	3	15	3.3995	19.5689	32.8825
025	160	160	3	15	14.9727	37.7003	65.6871

Tabela 5.4.1

(continuação)
 Experiência Computacional com o Algoritmo de Otimização de Subgradientes, Baseado na Metodologia da Relaxação Lagrangeana, para Solução dos Subproblemas P_t , do Problema Dinâmico de Localização. $d(k)$'s

PROB.	NOS	NOS ELEGIVEIS	ESTAGIOS	SUBPROES	TEMPO DOS SUBPROBLEMAS (segs)		
					MIN	MEDIO	MAX
026	165	165	3	15	3.2680	33.0167	49.4317
027	164	164	3	15	29.4468	41.3431	55.1170
028	180	180	3	15	3.4091	25.3924	59.0908
029	195	195	3	15	5.9561	48.2408	70.9199
030	188	188	3	15	29.9654	50.8956	74.6169
031	209	209	3	15	6.9701	55.0230	93.2292
032	210	210	3	15	3.6679	45.9967	99.6859
033	204	204	3	15	4.4194	19.2697	84.0409
034	220	220	3	15	3.9415	45.2909	95.6368
035	221	221	3	15	66.7165	79.4655	103.2555
036	212	212	3	15	38.0821	62.4892	98.3796
037	225	225	3	15	45.5426	98.3063	146.5416
038	228	228	5	16	0.0720	36.8452	155.5476
039	226	226	5	16	0.0663	17.3925	109.5206
040	240	240	5	16	0.2089	19.0097	52.5501
041	250	240	5	16	0.0403	23.7415	137.2360
042	248	240	5	16	0.0413	46.0560	191.7413
043	264	240	5	16	0.3197	50.1473	189.3469
044	270	240	5	16	0.0713	51.8695	225.4944
045	263	188	5	16	0.0703	35.5833	169.8724
046	280	188	5	16	0.2821	30.2999	125.3603
047	286	188	5	16	0.0325	7.8525	54.6789
048	276	188	5	16	0.0981	42.3366	152.9973
049	290	188	5	16	1.1166	45.3194	176.2968
050	300	188	5	16	0.1609	41.9200	186.7168

Tabela 5.4.1

(continuação)
 Experiência Computacional com o Algoritmo de Otimização de
 Subgradientes, Baseado na Metodologia da Relaxação
 Lagrangeana, para Solução dos Subproblemas P_t , do
 Problema Dinâmico de Localização. $d(k)$'s

PROB.	NOS	NOS ELEGIVEIS	ESTAGIOS	SUBPROBS	TEMPO DOS SUBPROBLEMAS (secs)		
					MIN	MÉDIO	MAX
051	288	188	5	16	0.0321	49.7188	194.0716
052	308	188	5	16	0.7725	55.1204	195.2788
053	319	188	5	16	0.0568	28.3537	144.4289
054	310	188	5	16	0.0649	33.0817	174.2054
055	324	188	5	16	1.1579	52.1187	188.6498
056	325	188	5	16	0.0637	39.3399	248.3792
057	318	188	5	16	0.0318	36.6839	235.6018
058	336	188	5	16	0.8251	45.3892	184.1044
059	338	188	5	16	0.0320	61.8243	238.7425
060	336	188	5	16	0.0572	54.9836	267.7561
061	350	167	5	16	0.0744	39.5933	239.1507
062	351	167	5	16	0.0534	63.2116	264.9945
063	340	167	5	16	0.0109	8.6252	48.1781
064	360	167	5	16	0.3813	47.5849	182.0813
065	372	167	5	16	0.0541	53.7420	291.1539
066	366	167	5	16	0.0288	58.3836	214.5503
067	377	167	5	16	0.3060	43.6830	209.2958
068	384	167	5	16	0.0619	53.2613	242.0845
069	378	167	5	16	0.0286	66.5331	304.5283
070	392	167	5	16	0.1547	66.1202	218.5211
071	400	132	5	16	0.0673	62.4108	225.5845
072	406	132	5	16	0.0737	47.7214	219.6431
073	429	132	5	16	0.8395	52.9142	261.1626
074	440	132	5	16	0.0555	71.1171	301.1842
075	432	132	5	16	0.0243	64.7435	302.7109

Tabela 5.4.1

(continuação)

Experiência Computacional com o Algoritmo de Otimização de Subgradientes, Baseado na Metodologia da Relaxação Lagrangeana, para Solução dos Subproblemas P_t , do Problema Dinâmico de Localização. $d(k)$'s

PROB.	NOS	NOS ELEGIVEIS	ESTÁGIOS	SUEPROBS	TEMPO DOS SUBPROBLEMAS (segs)		
					MIN	MÉDIO	MAX
076	456	132	5	16	0.5211	56.9705	337.1536
077	468	132	5	16	0.1106	59.9583	355.1019
078	468	132	5	16	0.0230	66.2988	377.9454
079	481	132	4	12	0.9751	116.7537	505.7901
080	494	132	4	12	0.0652	116.8779	544.8546
081	488	132	4	12	0.0577	84.3231	386.5069
082	507	110	4	12	0.1494	7.7713	30.7819
083	520	110	4	12	0.0442	107.6403	449.5875
084	534	110	4	12	0.0109	18.7163	134.1911
085	550	110	4	12	0.2032	125.9851	471.0928
086	560	110	4	12	0.0165	3.7022	11.9779
087	558	110	4	12	0.0340	79.6329	501.2014
088	576	110	4	12	0.1535	127.7492	618.1473
089	589	110	4	12	0.0548	123.7936	395.5941
090	594	110	4	12	0.0337	126.4187	717.7466
091	600	93	5	16	0.1781	28.8876	112.5064
092	605	93	5	16	0.0174	91.7313	389.7736
093	618	93	5	16	0.0530	90.5020	456.5168
094	640	93	5	16	0.1848	88.4409	372.2016
095	650	93	5	16	0.0354	92.8385	479.5072
096	648	93	5	16	0.0596	112.2507	492.4116
097	487	93	5	16	0.0884	55.4181	258.0905
098	675	93	5	16	0.0514	112.1405	519.4408
099	658	93	5	16	0.0187	96.9174	513.2898
100	522	93	5	16	0.0320	109.3792	649.6578

5.5 - O Algoritmo de Particionamento de Benders:

Na seção 5.6 será desenvolvido um algoritmo de decomposição primal baseado na relaxação Lagrangeana do problema mestre do método de particionamento de Benders. Aqui serão dados alguns aspectos do algoritmo de BENDERS (10, 1962), principalmente aqueles ligados à solução de problemas de localizagdo.

A técnica de Benders consiste em utilizar a teoria da dualidade para resolver qualquer problema de programação mista através da solução de seu correspondente problema inteiro. A dificuldade inicial com esta estratégia surgiu da impossibilidade prática de se obter todas as restrições do problema inteiro, uma vez que cada restrição requer a especificação do valor numérico de um ponto extremo ou raio extremo do poliedro convexo associado ao problema. A infinidade de pontos e raios extremos corresponderia uma infinidade de restrições, refletindo portanto uma dificuldade computacional até então intransponível. O algoritmo de Benders contorna o obstáculo, resolvendo o problema inteiro após a geração de somente parte das restrições. O método opera resolvendo sucessivamente um problema linear e um inteiro. A solução do programa linear produz um ponto ou raio extremo e, portanto, uma única restrição para o problema de programação inteira: seu valor objetivo ótimo fornece um limite (cota) superior para o ótimo do problema misto. Por sua vez, o programa inteiro fornece uma rota inferior não decrescente (pois os programas inteiros são sucessivamente mais restritos

que os anteriores) para o ótimo do problema misto. A solução ótima do problema misto é obtida quando as duas cotas coincidem. Deve ser observado que o problema inteiro coincidiria com o problema misto, se ele tivesse todas as restrições.

Várias experiências, utilizando o método de Benders foram conduzidas com sucesso na solução de diversos tipos de problemas, como, por exemplo, sequenciamento de máquinas ferroviárias, roteamento de aeronaves e veículos, etc. GEOFFRION e GILLES (60, 1974) utilizaram o algoritmo de Benders na solução de problemas de distribuição de itens múltiplos. Tais problemas aparecem no projeto de sistemas industriais de distribuição e são definidos pela localização ótima de facilidades (intermediárias de distribuição) entre as indústrias produtoras e os consumidores finais. A decomposição de Benders aplicada ao modelo de programação mista forneceu resultados surpreendentes na solução de um caso com 17 classes de itens, 14 indústrias, 45 centros elegíveis de distribuição e 121 zonas consumidoras, conforme relata o artigo. MAGNANTI e WONG (109, 1981) propuseram uma metodologia para aperfeiçoar o desempenho da decomposição de Benders. Introduziram uma técnica para acelerar a convergência do algoritmo, através da seleção criteriosa de ótimos alternativos dos subproblemas de Benders, para gerar as restrições denominadas no artigo de "cortes fortes" ou "cortes ótimos de Pareto". Além disso, mostraram como formular adequadamente programas mistos: introduziram critérios para comparar vários modelos de

programação mista e escolher a formulação mais adequada para prover cortes fortes de Benders. Todo esse desenvolvimento partiu da constatação de que as implementações diretas do algoritmo, em muitos casos, convergem lentamente.

Seja o problema misto dado por

$$\text{Minimize } c x + f y \quad (5.5.1)$$

$$\text{Sujeito a } R x + B y \geq b \quad (5.5.2)$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \quad (5.5.3)$$

$$y \text{ inteiro.} \quad (5.5.4)$$

Para um dado y , digamos \bar{y} , o problema acima é escrito como um programa linear dado por

$$\text{(PRIMAL)} \quad \text{Minimize } c x \quad (5.5.5)$$

$$\text{Sujeito a } A x \geq b - B \bar{y} \quad (5.5.6)$$

$$x \geq 0, \quad (5.5.7)$$

onde a constante $f\bar{y}$ deve ser adicionada ao valor objetivo após a solução do problema acima.

O dual do problema definido por (5.5.5) a (5.5.7) é:

$$\text{(DUAL)} \quad \text{Maximize } u(b - B\bar{y}) \quad (5.5.8)$$

$$\text{Sujeito a } u R \leq c \quad (5.5.9)$$

$$u \geq 0. \quad (5.5.10)$$

Observe que o poliedro convexo

$$V = \{ u \geq 0 : u R \leq c \}$$

independe de \bar{y} . Com isso, o máximo de $u(b - B\bar{y})$, com $u \in V$,

ocorre em um ponto extremo de V ou cresce ilimitadamente ao longo de um dos raios extremos de V , qualquer que seja o valor de \bar{u} . Representando por u^k , $k=1, \dots, K$, os pontos extremos e por v^q , $q=1, \dots, Q$, os raios extremos do poliedro V temos que o máximo da função objetivo $u(b - By)$, é ilimitado, se para algum \bar{u} , existir um q , tal que

$$v^q (b - By) > 0. \quad (5.5.11)$$

Também, se o máximo de $u(b - By)$, $u \in V$, cresce ilimitadamente, é porque para algum y , existe um q , para o qual a direção v satisfaz (5.5.11). Com isso,

$$v^q (b - By) \leq 0, \quad q=1, \dots, Q \quad (5.5.12)$$

são as condições necessárias e suficientes para a existência de soluções do problema misto, uma vez que, pela teoria da dualidade, as soluções viáveis do problema primal, dado por (5.5.5) a (5.5.7), são dependentes de que o dual (5.5.8) a (5.5.10) seja um problema limitado. Assim, o dual (5.5.8) a (5.5.10) pode ser escrito como

$$\text{Maximize } \sum_{k=1, \dots, K}^k u (b - By) \quad (5.5.13)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{q=1, \dots, Q}^q v (b - By) \leq 0 \quad (5.5.14)$$

O problema misto torna-se

$$\text{Minimize } \left(\left(\text{Máximo}_{k=1, \dots, K} u^k (b - B y) \right) + f y \right) \quad (5.5.15)$$

$$\text{Sujeito a } v^q (b - E y) \leq 0, \quad q=1, \dots, Q \quad (5.5.16)$$

$$y \geq 0 \quad (5.5.17)$$

$$y \text{ inteiro.} \quad (5.5.18)$$

Fazendo $Z = \left(\text{Máximo}_{k=1, \dots, K} u^k (b - B y) \right) + f y$, vem

$$Z \geq u^k (b - B y) + f y, \text{ para } k=1, \dots, K.$$

Assim, o problema misto é equivalente ao problema inteiro dado por

$$\text{Minimize } Z \quad (5.5.19)$$

$$\text{Sujeito a } Z \geq u^k (b - B y) + f y, \quad k=1, \dots, K \quad (5.5.20)$$

$$0 \geq v^q (b - B y), \quad q=1, \dots, Q \quad (5.5.21)$$

$$y \geq 0 \text{ e inteiro.} \quad (5.5.22)$$

O problema acima é conhecido como problema mestre de Benders. Se V é vazio, o dual dado por (5.5.8) a (5.5.10) não tem solução viável, e, portanto, o problema misto não tem solução ótima finita.

O algoritmo de particionamento de Benders é formulado com base nas seguintes observações:

- i) Para um vetor inteiro fixo, $y \geq 0$, o problema dual (5.5.8) a (5.5.10), é mais restrito que o problema misto original. A sua solução ótima (máxima), adicionada a $f\bar{y}$, é um "limite superior" sobre a solução ótima do problema misto.
- ii) A solução do dual (5.5.8) a (5.5.10) produz um ponto extremo ou a direção de um raio extremo de V . Portanto, produz uma desigualdade (restrição) para o problema inteiro (5.5.19) a (5.5.22).
- iii) O problema inteiro, (5.5.19) a (5.5.22), resolvido com a restrição adicionada em (ii), produz um "limite inferior" para o problema misto, já que esse problema inteiro é menos restrito do que o problema misto (basta lembrar que o problema inteiro coincidiria com o problema misto se aquele estivesse completo com todas as restrições).
- iv) O problema inteiro (5.5.19) a (5.5.22) produz uma solução inteira, $\bar{y} \neq 0$, para o dual (5.5.8) a (5.5.18), que novamente resolvido, fornece um ponto extremo ou raio extremo de V para o problema inteiro, bem como um limite superior para o problema misto.
- v) Quando os dois limites coincidirem a solução ótima foi encontrada e o processo termina.

Em LRSDON (98, 1970) o método é mais detalhado e em SALKIN (157, 1975) está descrita a prova da convergência do algoritmo.

Nã próxima seção formulamos um algoritmo baseado na relaxação Lagrangeana do problema mestre do algoritmo de Benders, especializado na solução de problemas de localização não-capacitada.

5.6 - Um Algoritmo de Decomposição Primal Baseado na Relaxação Lagrangeana Convexa do Problema Mestre de Henders para Solução dos Subproblemas P_t do Problema Dinâmico de Localização:

O termo "convexo", aqui associado à relaxação Lagrangeana, introduz uma inovação no uso da metodologia, uma vez que a relaxação é feita a partir de uma combinação linear convexa de restrições do problema. Ou seja, os coeficientes λ utilizados como multiplicadores são tais que $\sum_{k=1}^C \lambda_k = 1$ e $\lambda_k \geq 0$, $k=1, \dots, K$. Ou ainda, os coeficientes utilizados em cada iteração são os componentes de um vetor λ , projetado no simplex $\{(\lambda_1, \dots, \lambda_K) : \sum_{k=1}^K \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0, k=1, \dots, K\}$. Além disso, outro aspecto inovador que será observado, é o caráter dinâmico da própria relaxação Lagrangeana utilizada, uma vez que, no decorrer das iterações, o problema é relaxado iterativamente em relação às restrições ou cortes de Benders gerados nas iterações sucessivas. Os vetores λ de coeficientes

ou multiplicadores são projecções de vetores, sucessivamente, em subespaços do $\mathbb{R}^K, \mathbb{R}^{K+1}, \dots$, para $K > 0$.

Dado o problema

$$(P) \quad \text{Minimize} \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in J} f_j y_j \quad (5.6.1)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \sum_{j \in J} x_{ij} \geq 1, \quad i \in I \quad (5.6.2)$$

$$1 \leq \sum_{j \in J} y_j \leq p \quad (5.6.3)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq y_j \in \{0,1\}, \quad i \in I, j \in J, \quad (5.6.4)$$

temos que para um vetor \bar{y} fixo, que satisfaça a

$$1 \leq \sum_{j \in J} \bar{y}_j \leq p,$$

(P) se transforma no problema de programação linear dado por

$$(P)_L \quad \text{Minimize} \quad \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} x_{ij} \quad \left(+ \sum_{j \in J} f_j \bar{y}_j \right) \quad (5.6.5)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \sum_{j \in J} x_{ij} \geq 1, \quad i \in I \quad (5.6.6)$$

$$-x_{ij} \geq -\bar{y}_j, \quad i \in I, j \in J \quad (5.6.7)$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i \in I, j \in J. \quad (5.6.8)$$

O dual de (P)_L é o problema

$$(P)_D \quad \text{Maximize} \quad \sum_{i \in I} u_i - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \bar{y}_j v_{ij} + \sum_{j \in J} f_j \bar{y}_j \quad (5.6.9)$$

$$\text{Sujeito a} \quad u_i - v_{ij} \leq c_{ij}, \quad i \in I, j \in J \quad (5.6.10)$$

$$u_i \geq 0, \quad i \in I \quad (5.6.11)$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad i \in I, j \in J \quad (5.6.12)$$

Sejam $A = \{j : \bar{y}_j = 1\}$ o conjunto dos pontos elegíveis "abertos" e

$F = \{j : \bar{y}_j = 0\}$ o conjunto dos pontos elegíveis "fechados".

A solução de (P)_D, veja LRSDON (98, 1970) e MQGNRNTI e WONG (109, 1981), é dada por

$$\bar{u}_i = c_{i,j(i)} = \min \{c_{ij} : j \in A\}, \quad i \in I$$

$$\bar{v}_{ij} = 0, \quad j \in A, \quad i \in I$$

$$\bar{v}_{ij} = \max \{0, \bar{u}_i - c_{ij}\}, \quad j \in F, \quad i \in I$$

produzindo um limite superior dado por

$$Z_{\text{sup}} = \sum_{i \in I} c_{i,j(i)} + \sum_{j \in A} f_j. \quad (5.6.13)$$

O problema mestre do algoritmo de Benders, onde foi omitida a restrição relativa aos raios extremos (o problema é finito desde que se garanta pelo menos um $\bar{y}_j = 0$, pois o problema sendo não capacitado? uma única facilidade aberta poderá atender a todos os clientes), é dado por:

$$(P)_M \quad \text{minimize } Z \quad (5.6.14)$$

$$\text{Sujeito a } Z \geq \sum_{i \in I} \bar{u}_i^k - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \bar{v}_{ij}^k y_j + \sum_{j \in J} f_j y_j \quad (5.6.15)$$

$$\text{para } k=1, \dots, K \quad \sum_{j \in J} y_j \geq 1 \quad (5.6.16)$$

$$y_j \in \{0,1\}, \quad j \in J \quad (5.6.17)$$

5.6.1 - Relaxação Lagrangeana de (P_M) :

Dado $\bar{h} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_K)$, obtemos sua projeção em algum subespaço do \mathbb{R}^K tal que o vetor $h = (h_1, \dots, h_K)$ resultante esteja a uma distância mínima de $\bar{\lambda}$ e seja tal que

$$\sum_{k=1}^{K^1} \lambda_k = 1, \quad \lambda_k \geq 0, \quad k=1, \dots, K^1.$$

Utilizando esse vetor λ relaxamos o problema (P_M) na sua restrição (5.6.15) e obtemos

$$(RLP_M) \quad Z = \text{Min}_{RLP} Z + \sum_{k=1}^{K^1} \lambda_k \left(\sum_i u_i^k - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} y_{ij} v_{ij}^k + \sum_{j \in J} f_j y_j - Z \right) \quad (5.6.18)$$

$$\text{Sujeito a} \quad 1 \leq \sum_{j \in J} y_j \leq p \quad (5.6.19)$$

$$y_j \in \{0, 1\}, \quad j \in J. \quad (5.6.20)$$

Desenvolvendo a relação (5.6.18), temos:

$$\begin{aligned} Z = \text{Min}_{RLP} Z + \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{K^1} \lambda_k u_i^k - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{k=1}^{K^1} h_k v_{ij}^k y_{ij} + \left(\sum_{k=1}^{K^1} \lambda_k \right) \sum_{j \in J} f_j y_j - \\ - \left(\sum_{k=1}^{K^1} \lambda_k \right) Z = \text{Min}_y \sum_{j \in J} \left(f_j - \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{K^1} h_k v_{ij}^k \right) y_{ij} + \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{K^1} \lambda_k u_i^k \end{aligned} \quad (5.6.21)$$

$$\text{Sujeito a} \quad 1 \leq \sum_{j \in J} y_j \leq p, \quad y_j \in \{0, 1\}, \quad j \in J. \quad (5.6.22)$$

A solução do problema (5.6.21) e (5.6.22) acima é construída criando a função

$$\rho_j(\lambda) = f_j - \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{K^1} \lambda_k v_{ij}^k, \quad j \in J,$$

e o problema

$$\text{Minimize} \quad \sum_{j \in J} \rho_j(\lambda) y_j \quad (5.6.23)$$

$$\text{Sujeito a} \quad 1 \leq \sum_{j \in J} y_j \leq P \quad (5.6.24)$$

$$y_j \in (0,1), \quad j \in J, \quad (5.6.25)$$

que é o mesmo problema dado por (5.4.10) a (5.12) cuja solução, que também resolve (RLP)_M, é obtida como na seção 5.4.

Assim, o problema (RLP)_M foi resolvido dado um $\lambda \geq 0$. Além disso, temos que

$$Z_{\text{RLP}} \leq Z, \quad \lambda \geq 0. \quad (5.6.26)$$

Ou seja, Z_{RLP} é um limite inferior para o valor objetivo de

(P)_M. Queremos agora escolher o $\bar{\lambda} \geq 0$ que, depois de projetado no vetor $\lambda \geq 0$, tal que $\sum_k \lambda_k = 1$, produza o melhor limite inferior para (P)_M. Ou seja, queremos resolver o problema (dual Lagrangeano)

$$(D) \quad Z_D = \text{Max}_{\lambda} Z_{\text{RLP}}(\lambda)$$

$$\text{Sujeito a} \quad \lambda \geq 0,$$

onde

$$Z_{\text{RLP}}(\lambda) = \text{Min}_y \sum_{j \in J} f_j y_j + \lambda \left(\sum_{i \in I} \bar{u}_i - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \bar{v}_{ij} y_j \right) \quad (5.6.27)$$

$$\text{S. a} \quad 1 \leq \sum_{j \in J} y_j \leq P \quad (5.6.28)$$

$$y_j \in (0,1), \quad j \in J. \quad (5.6.29)$$

Definição 5.6.1:

Uma função $f: \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}$, côncava, tem um subgradiente ξ em $\bar{\lambda}$ se

$$f(\lambda) \leq f(\bar{\lambda}) + \xi(\lambda - \bar{\lambda}),$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}^K$.

Teorema 5.6.1:

Se $X(\tilde{\lambda}) = \{ \bar{y} : \bar{y} \text{ minimiza } Z_{\text{RLP}}^M(\tilde{\lambda}) \}$, então

$$\sum_{i \in I} \bar{u}_i - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \bar{v}_{ij} \bar{y}_j \quad (5.6.30)$$

é um subgradiente de $Z_{\text{RLP}}^M(\lambda)$ em $\tilde{\lambda}$, para todo $\bar{y} \in X(\tilde{\lambda})$.

Demonstração:

$$\begin{aligned} \bar{y} \in X(\tilde{\lambda}) \implies Z_{\text{RLP}}^M(\tilde{\lambda}) &= \sum_{j \in J} f_j \bar{y}_j + \tilde{\lambda} \left(\sum_{i \in I} \bar{u}_i - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \bar{v}_{ij} \bar{y}_j \right) \\ \text{e } Z_{\text{RLP}}^M(\lambda) &\leq \sum_{j \in J} f_j \bar{y}_j + \lambda \left(\sum_{i \in I} \bar{u}_i - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \bar{v}_{ij} \bar{y}_j \right) = \\ &= Z_{\text{RLP}}^M(\tilde{\lambda}) + \left(\sum_{i \in I} \bar{u}_i - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \bar{v}_{ij} \bar{y}_j \right) (\lambda - \tilde{\lambda}). \end{aligned}$$

Com isso, a solução do problema (D) pode ser feita utilizando o algoritmo de otimização de subgradientes. Assim, dado um vetor $\bar{\lambda}^0$ inicial, os seguintes são obtidos a partir de

$$\bar{\lambda}^{t+1} = \bar{\lambda}^t + \theta_t s_t, \quad (5.6.31)$$

onde

$$s_t = \sum_{i \in I} \bar{u}_i + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \bar{v}_{ij} \bar{y}_j,$$

θ_t , chamado de "tamanho do passo", é dado por

$$\theta_t = \alpha_t (Z_t - Z_{\text{RLP}}^M(\bar{\lambda}^t)) / \|s_t\|^2 \quad (5.6.32)$$

onde λ^t é a projeção de $\bar{\lambda}^t$ tal que $\sum_k \lambda_k^t = 1$,

$$Z_{RLP}^t(\lambda) = \sum_j f_j \bar{y}_j + \lambda \left(\sum_i \bar{u}_i - \sum_i \sum_j \bar{v}_{ij} \bar{y}_j \right), \quad (5.6.33)$$

$0 < \alpha_t \leq 2$, e pode ser usado como Z_S a cota (limite) superior de P_D já calculada anteriormente, em (5.6.13).

5.6.2 - Projeção do Vetor $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_K)$ num Subespaço do \mathbb{R}^K :

O problema de encontrar a projeção de \bar{X} no simplex $\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_K) : \sum_k \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, K \}$, de tal forma que o vetor resultante esteja a uma distancia mínima do vetor \bar{X} dado, pode ser resolvido através do:

Teorema 5.6.2:

Dado $\bar{X} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_K)$, $\bar{x}_k \geq 0$, $k=1, \dots, K$, se a sua projeção em um subespaço do \mathbb{R}^K produz um vetor $X = (x_1, \dots, x_K)$, $x_k \geq 0$, $k=1, \dots, K$, a uma distância mínima de \bar{X} , tal que $\sum_{C=1}^K \lambda_C = 1$, então

$$\lambda_C^* = \max \left\{ \bar{x}_C - \alpha^*, 0 \right\}, \quad k=1, \dots, K \quad \text{onde}$$

$$\alpha^* = \left(-1 + \sum_{k=r_0+1}^K \bar{x}_k \right) / (K - r_0) \quad e$$

$$r_0 = \max_{r/r < K} \left\{ r : \bar{x}_{r+1} + \dots + \bar{x}_K - 1 > (K - r) \bar{x}_r \right\}.$$

Demonstração 1:

Dado $\bar{\lambda}$, encontrar λ^* que resolva o problema

$$\text{Minimize } 1/2 \| \lambda - \bar{\lambda} \|^2 \quad (5.6.34)$$

$$\text{Sujeito a } e^T \lambda = 1 \quad (5.6.35)$$

$$\lambda \geq 0, \quad (5.6.36)$$

onde $e^T = (1, \dots, 1)$.

Na figura 5.6.1, para $\lambda \in \mathbb{R}^2$, temos:

- i) $t \perp r$
- ii) O ponto $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*)$ cai na região viável.
- iii) Como encontrar λ^* ?

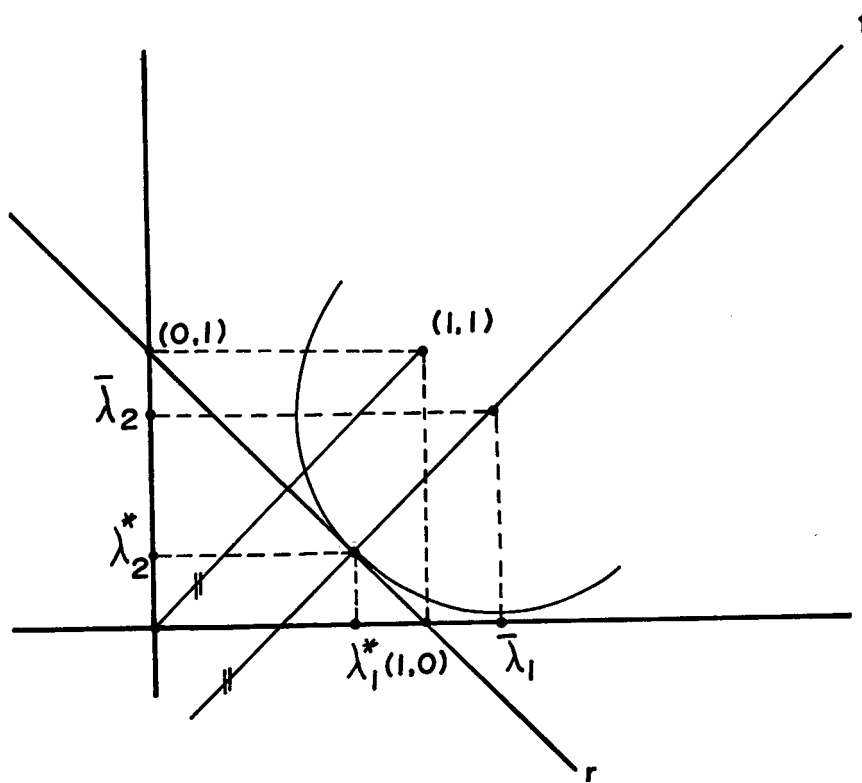


FIGURA 5.6.1

a) Os pontos λ sobre a reta t podem ser escritos da seguinte forma:

$$\lambda = \bar{\lambda} - \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad a \in \mathbb{R}. \quad (5.6.37)$$

b) O ponto λ^* é a interseção de t com r , isto é, λ^* terá que satisfazer (5.6.37) e (5.6.35) simultaneamente.

Logo, chamando de α o valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ para o qual

$$\lambda^* = \bar{\lambda} - \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

temos:

1) Satisfazendo (5.6.35), ou seja? e $\lambda = 1$:

$$e \left(\bar{\lambda}_1 - \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 1, \text{ ou } \bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 - 2\alpha = 1$$

e daí,

$$\alpha = \left(\bar{\lambda}_1 + \bar{\lambda}_2 - 1 \right) / 2$$

2) Satisfazendo (5.6.37):

$$\lambda_1^* = \bar{\lambda}_1 - \alpha \quad e \quad \lambda_2^* = \bar{\lambda}_2 - \alpha,$$

temos que, se $\bar{\lambda}_1 - \alpha \geq 0$ e $\bar{\lambda}_2 - \alpha \geq 0$, a solução ótima foi encontrada. Caso contrário, se $\bar{\lambda}_2 - \alpha < 0$ (ou $\bar{\lambda}_1 - \alpha < 0$), então a solução ótima será, como na figura 5.6.2, $\lambda_1^* = 1$ e $\lambda_2^* = 0$,

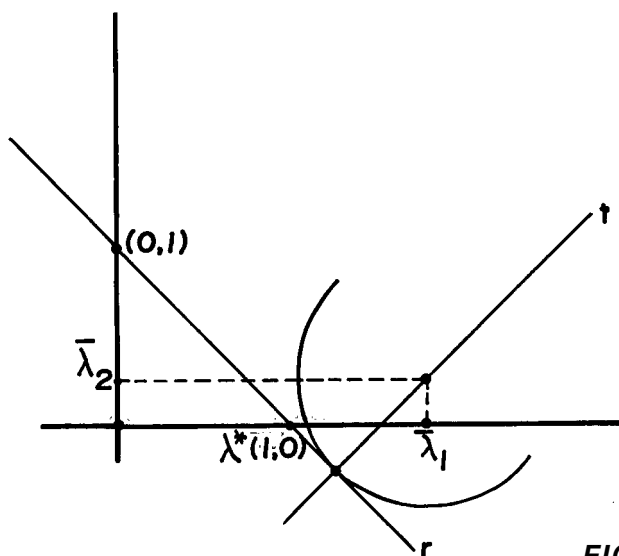


FIGURA 5.6.2

ou, como na figura 5.6.3, $X_1^* = 0$ e $X_2^* = 1$

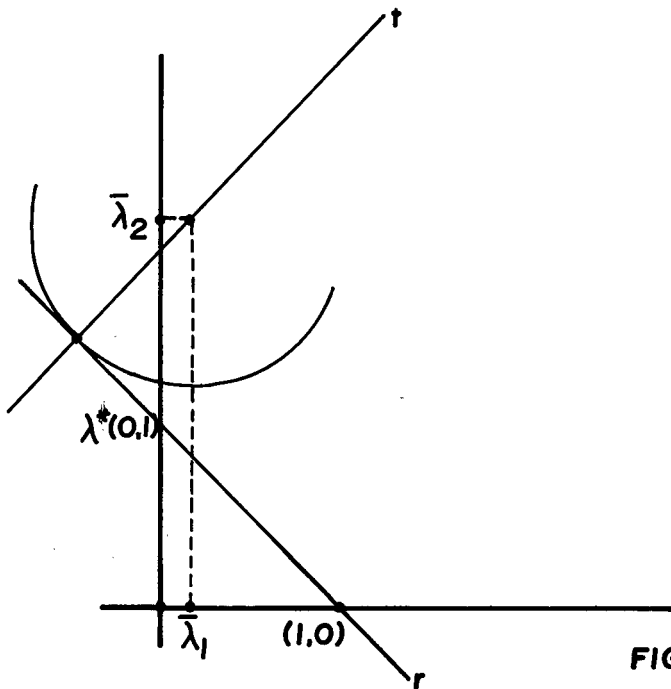


FIGURA 5.6.3

Generalização: $X \in \mathbb{R}^K$

Outra vez a^* é o valor de $a \in \mathbb{R}$ tal que

$$e^T (\bar{\lambda} - \alpha^* e) = 1$$

$$e^T \bar{\lambda} - K \alpha^* = 1, \quad K \alpha^* = e^T \bar{\lambda} - 1, \text{ portanto}$$

$$\alpha^* = (1/K) \left(-1 + \sum_{j=1}^K \bar{\lambda}_j \right)$$

1) Se $\lambda_j^* = \bar{\lambda}_j - \alpha^* \geq 0$, $j=1, \dots, K$, então $\lambda_j^* = \lambda_j$ é a solução ótima.

2) Caso contrário, seja $Q \subset \{1, \dots, K\} = X$, tal que $\lambda_j^* < 0$, para $j \in Q$. Nessa hipótese, faz-se

$$\cdot X_j^* = 0, \text{ para } j \in Q, \quad (|Q| = r_0),$$

$$\cdot \alpha^* = \frac{1}{K-r_0} \left(-1 + \sum_{j \in X-Q} \bar{\lambda}_j \right), \quad e$$

$$\cdot \lambda_j^* = \bar{\lambda}_j - \alpha^*, \text{ para } j \in X - Q.$$

Demonstração 2:

Dado $\bar{A} = (\bar{A}_1 \dots \bar{A}_K)$ encontrar $A^* = (A_1^*, \dots, \lambda_K^*)$ que resolva

$$\text{Minimize } (1/2) \|\lambda - \bar{\lambda}\|^2 \quad (5.6.38)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{k=1}^K \lambda_k = 1 \quad (5.6.39)$$

$$\lambda_k \geq 0, \quad k=1, \dots, K \quad (5.6.40)$$

• A função $f: \mathbb{R}^K \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(\lambda) = (1/2) \|\lambda - \bar{\lambda}\|^2$ é convexa.

• Associando multiplicadores w_1, w_2, \dots, w_K respectivamente. As restrições

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k = 1 \quad (\alpha)$$

$$\lambda_k \geq 0 \quad (w_k), \quad k=1, \dots, K,$$

temos, pelas condições de Kuhn-Tucker, que

$$\lambda_k - \bar{\lambda}_k = w_k - \alpha, \quad w_k \geq 0, \quad \lambda_k w_k = 0, \quad k=1, \dots, K. \quad (5.6.41)$$

$$\text{Fazendo } \lambda_k(\alpha) = \max\{\bar{\lambda}_k - \alpha, 0\} \quad (5.6.42)$$

$$\text{e } w_k(\alpha) = \max\{-(\bar{\lambda}_k - \alpha), 0\}, \quad (5.6.43)$$

as condições de Kuhn-Tucker são satisfeitas para

$$\lambda^* = \lambda(\alpha) \quad (\lambda(\alpha) \geq 0) \quad \text{e} \quad w = w(\alpha)$$

Agora, para se chegar à solução do problema, basta encontrar o valor particular de α (digamos α^*) para o qual se tenha

$$\sum_{k=1}^K \lambda_k(\alpha) = 1.$$

A função $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, dada por

$$\psi(\alpha) = \sum_{k=1}^K \lambda_k(\alpha) = \sum_{k=1}^K \max\{\bar{\lambda}_k - \alpha, 0\}$$

é não crescente e, além disso, $\{\psi(\alpha) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}_+$.

As coordenadas de h podem estar, ou não, ordenadas. Se não estiverem ordenadas procede-se à sua ordenação. Se estiverem ordenadas, ou seja, se

$$\bar{\lambda}_1 \leq \bar{\lambda}_2 \leq \dots \leq \bar{\lambda}_K, \quad \text{temos que:}$$

- $\psi(\alpha)$ é linear em cada intervalo $[\bar{\lambda}_r, \bar{\lambda}_{r+1}]$, para cada $r=1, \dots, K-1$.
- O valor de $\psi(\alpha)$ para $\alpha = \bar{\lambda}_r$, $r=1, \dots, K$, é dado por

$$\psi(\alpha) = \sum_{k=1}^K \lambda_k(\alpha) = \sum_{k=1}^K \max\{\bar{\lambda}_k - \alpha, 0\} = \sum_{k=r+1}^K (\bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_r),$$

ou seja, no somatório acima, a parte antes de $r+1$ (para $k < r+1$), é zero.

Da restrição $\sum_{k=1}^K \lambda_k(\alpha^*) = 1$ e de qualquer $\bar{\lambda}_1 < \alpha^*$, temos que

$$\lambda_r(\alpha^*) = 0 \quad (\text{pois } \bar{\lambda}_r - \alpha^* < 0) \quad \text{e} \quad \sum_{k=1}^K (\bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_r) > 1,$$

pois substituindo $-\bar{\lambda}_r > -\alpha^*$ no desenvolvimento

$$1 = \sum_{k=1}^K \lambda_k(\alpha^*) = \sum_{k=r+1}^K (\bar{\lambda}_k - \alpha^*) < \sum_{k=r+1}^K (\bar{\lambda}_k - \bar{\lambda}_r),$$

chegamos à desigualdade. Assim, $\lambda_r(\alpha^*) = 0$ para $r=1, \dots, r_0$,

$$\text{onde } r_0 = \max_{r/r < K} \{ r : \bar{\lambda}_{r+1} + \dots + \bar{\lambda}_K - 1 > (K-r) \bar{\lambda}_r \} \quad (5.6.44)$$

Com isso, o α^* procurado pode ser escolhido, de tal forma a satisfazer

$$\sum_{k=r_0+1}^K \lambda_k^* (\alpha_k^*) = \sum_{k=r_0+1}^K (\bar{\lambda}_k - \alpha_k^*) = 1 \quad (5.6.45)$$

Ou seja, $\sum_{k=r_0+1}^K \bar{\lambda}_k - (K-r_0) \alpha^* = 1$, o que produz

$$\alpha^* = (-1 + \sum_{k=r_0+1}^K \bar{\lambda}_k) / (K-r_0). \quad (5.6.46)$$

5.6.3 - O Algoritmo de Decomposição Primal:

Passo 1: (início)

Estabeleça um vetor viável $\bar{y} \in \{0,1\}$, faça $Z = N(\infty)$,
 $Z_l = -N(\infty)$, $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_0$, $k = 1$.

Passo 2: (programação linear)

Resolva

$$Z_D = \text{Max} \sum_{i \in I} u_i - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \bar{y}_{ij} v_{ij} + \sum_{j \in J} f_j \bar{y}_j$$

S. a $u_i - v_{ij} \leq c_{ij}$, $i \in I, j \in J$

$$u_i \geq 0, \quad i \in I$$

$$v_{ij} \geq 0, \quad i \in I, j \in J$$

através de

$$\bar{u}_i = c_{i,j(i)} = \min \{c_{ij} : j \in A\}, \quad i \in I$$

$$\bar{v}_{ij} = 0, \quad j \in A, \quad i \in I$$

$$\bar{v}_{ij} = \max \{0, \bar{u}_i - c_{ij}\}, \quad j \in F, \quad i \in I$$

$$Z_D = \sum_{i \in I} c_{i,j(i)} + \sum_{j \in A} f_j.$$

Troque Z_S por Z_D se $Z_S > Z_D$.

Passo 3: (projeção de $\bar{\lambda} \geq 0$)

$$\lambda = \text{proj}_{\substack{K \\ \mathbb{R}}}(\bar{\lambda})$$

Passo 4: (Relaxação Lagrangeana do problema mestre e aplicação do método de otimização de subgradientes)

$$Z_{RLP} = \text{Min}_M \sum_{j \in J} (f_j - \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^K \lambda_k \frac{v_{ij}^k}{v_{ij}^k}) y_j + \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^K \lambda_k u_i^k$$

S. a

$$1 \leq \sum_{j \in J} y_j \leq p$$

$$y_j \in (0,1)$$

$$Z(\tilde{\lambda}) = \text{Max}_{\lambda \geq 0} Z_{RLP}(\lambda)$$

Troque Z_ℓ por $Z(\tilde{\lambda})$ se $Z_\ell < Z(\tilde{\lambda})$,

Passo 5: (término)

se $Z_\ell < Z_S$, faça $k = k + 1$, calcule um novo vetor

$\bar{\lambda} \in \mathbb{R}^K$ e vá ao passo S.

se $Z_e = Z_S$, \bar{y} é ótimo, e \bar{x} pode ser obtido, produzindo a solução final

$$y \leftarrow \bar{y}$$

$$x \leftarrow \bar{x}$$

$$Z_{(P)} \leftarrow cx + fy = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} c_{ij} \bar{x}_{ij} + \sum_{j \in J} f_j \bar{y}_j$$

5.6.4 - Experiências Computacionais com o Algoritmo:

A heurística projetada foi programada em FORTRAN e o mesmo conjunto de problemas utilizado anteriormente (veja dados de geração no APÊNDICE A) foi submetido ao procedimento. A tabela 5.6.1 traz, lado a lado? os tempos gastos pelo algoritmo da seção 5.4 e pelo método de decomposição primal projetado aqui.

O desempenho da heurística foi surpreendente e mostrou um comportamento curioso. Na medida em que crescia o tamanho dos problemas? melhorava a eficiência relativa do processo de decomposição. Para os problemas menores? o algoritmo da seção 5.4 é melhor em relação ao conjunto de problemas utilizado. Entretanto? os tempos médios de solução dos subproblemas $P_{d(k)_t}$ são claramente favoráveis ao algoritmo projetado nesta seção. Os tempos máximos gastos na solução dos subproblemas, também conferem a

Tabela 5.6.1

Experiência Computacional e Análise Comparativa dos Algoritmos de Otimização de Subgradientes e Decomposição Primal, Baseado na Relaxação Lagrangeana do Problema Mestre de Benders, para Solução dos Subproblemas P_t , do Problema Dinâmico de Localização.

PROB.	NÓS	NÓS ELEGÍVEIS	ESTÁGIOS	SUBPROES	Alg. Otimiz. Subgrad.			Alg. de Decomp. Primal		
					MIN	MÉDIO	MAX	MIN	MÉDIO	MAX
001	42	42	3	15	0.0906	0.3689	0.0403	0.0401	0.0604	0.2472
002	48	48	3	15	0.0462	0.3706	0.0462	0.0571	0.0720	0.3001
003	49	37	3	15	0.0936	1.5368	0.0936	0.0940	0.2549	0.9027
004	50	50	3	15	0.0147	1.8414	0.0147	0.0122	1.3291	6.4528
005	54	54	3	15	0.2202	2.0450	0.2202	0.3142	1.9470	2.7199
006	43	43	3	15	0.2339	0.8420	0.2339	0.1907	0.6213	1.9600
007	56	56	3	15	0.0160	1.0630	0.0160	0.0508	1.0024	2.9057
008	60	60	3	15	0.2638	1.4566	0.2638	0.2887	1.4301	4.3029
009	51	51	3	15	0.1269	1.5847	0.1269	0.1101	1.3017	2.8722
010	66	66	3	15	0.0633	3.5762	0.0633	0.0455	2.9112	7.2980
011	70	70	3	15	2.0072	3.5375	2.0072	2.1084	2.8809	6.1105
012	60	60	3	15	0.2952	2.5944	0.2952	0.2704	1.9403	4.3941
013	77	77	3	15	0.1723	1.9292	0.1723	0.1825	1.8187	6.9129
014	80	80	3	15	0.9228	3.1410	0.9228	0.9741	3.1070	6.7143
015	69	69	3	15	0.4878	4.2797	0.4878	0.5037	4.2105	6.9160
016	84	84	3	15	0.1362	4.4635	0.1362	0.1488	4.4502	13.2991
017	88	88	3	15	0.7162	3.7226	0.7162	0.6443	3.2118	6.9708
018	78	78	3	15	0.3108	1.3710	0.3108	0.2957	1.0072	6.0294
019	96	96	3	15	0.5402	7.2641	0.5402	0.6103	7.3482	20.9491
020	99	99	3	15	0.4094	2.7910	0.4094	0.4789	1.9980	12.9772
021	88	88	3	15	1.1509	6.2202	1.1509	1.1400	5.8721	9.2138
022	120	120	3	15	3.1222	13.1249	3.1222	0.6944	12.9186	33.2126
023	140	140	3	15	3.6055	21.2069	3.6055	2.7648	19.8751	31.6199
024	138	138	3	15	3.3995	19.5689	3.3995	2.2143	17.2144	30.0029
025	160	160	3	15	14.9727	37.7003	14.9727	12.1269	34.8106	61.3942

TEMPO
DOS
SUBPROBLEMAS
(segs)

Tabela 5.6.1

(continuação)
 Experiência Computacional e Análise Comparativa dos Algoritmos de Otimização de Subgradientes
 e Decomposição Primal, Baseado na Relaxação Lagrangeana do Problema Mestre de Benders, para
 Solução dos Subproblemas F_t , do Problema Dinâmico de Localização.

PROB.	NOS	NOS ELEGÍVEIS	ESTÁGIOS	SUEPROES	Alg. Optimiz. Subgrad.			Alg. de Decomp. Primal		
					MIN	MÉDIO	MAX	MIN	MÉDIO	MAX
026	165		3	15	33.0167	49.4317	2.4515	30.9274	47.2190	
027	164		3	15	29.4468	41.3431	55.1170	28.5159	54.7091	
028	180		3	15	3.4091	25.3924	59.0908	3.4127	50.3552	
029	195		3	15	5.9561	48.2408	70.9199	5.7279	64.2154	
030	188		3	15	29.9654	50.8956	74.6169	27.6213	69.4241	
031	209		3	15	6.9701	55.0230	93.2292	7.6891	89.4078	
032	210		3	15	3.6679	45.9967	99.6859	3.5721	91.5203	
033	204		3	15	4.4194	19.2697	84.0409	5.2147	79.4783	
034	220		3	15	3.9415	45.2909	95.6368	3.8186	91.6470	
035	221		3	15	66.7165	79.4655	103.2555	59.4324	98.8194	
036	212		3	15	38.0821	62.4892	98.3796	36.4112	58.8327	
037	225		3	15	45.5426	98.3063	146.5416	41.2129	90.2042	
038	228		5	16	0.0720	36.8452	155.5476	1.9407	35.2147	
039	226		5	16	0.0663	17.3925	109.5206	0.9661	16.9591	
040	240		5	16	0.2089	19.0097	52.5501	1.1012	17.4003	
041	250		5	16	0.0403	23.7415	137.2360	1.4502	21.2107	
042	248		5	16	0.0413	46.0560	191.7413	0.9781	44.8293	
043	264		5	16	0.3197	50.1473	189.3469	0.2974	46.2182	
044	270		5	16	0.0713	51.8695	225.4944	0.6861	48.4987	
045	263		5	16	0.0703	35.5833	169.8724	1.0243	33.2149	
046	280		5	16	0.2821	30.2999	125.3603	0.3640	28.1249	
047	286		5	16	0.0325	7.8525	54.6789	1.4170	7.2125	
048	276		5	16	0.0981	42.3366	152.9973	0.1426	40.2197	
049	290		5	16	1.1166	45.3194	176.2968	1.1201	42.3049	
050	300		5	16	0.1609	41.9200	186.7168	0.2986	40.2128	

TEMPO
 DOS
 SUBPROBLEMAS
 (segs)

NÚMERO
 DE

Tabela 5.6.1

(continuação)
 Experiência Computacional e Análise Comparativa dos Algoritmos de Otimização de Subgradientes e Decomposição Primal, Baseado na Relaxação Lagrangeana do Problema Mestre de Benders, para Solução dos Subproblemas P_t , do Problema Dinâmico de Localização.

PROB.	NÓS	NÓS ELEGÍVEIS	ESTÁGIOS	SUBPROBS	NÚMERO DE			TEMPO DOS SUBPROBLEMAS (secs)			Alg. de Decomp. Primal		
					Alg. Otimiz.	Subgrad.	MAX	MÉDIO	MIN	MÉDIO	MAX		
051	288	188	5	16	0.0321	49.7188	194.0716	0.6412	43.8912	187.914R			
052	308	188	5	16	0.7725	55.1204	195.2788	0.7238	50.1504	190.2184			
053	319	188	5	16	0.0568	28.3537	144.4289	0.1349	26.8183	140.7290			
054	310	188	5	16	0.0649	33.0817	174.2054	0.1290	31.9184	169.1080			
055	324	188	5	16	1.1579	52.1187	188.6498	1.1221	50.1997	184.2521			
056	325	188	5	16	0.0637	39.3399	248.3792	0.0814	36.4189	243.8112			
057	318	188	5	16	0.0318	36.6839	235.6018	0.0498	34.2938	230.7082			
058	336	188	5	16	0.8251	45.3892	184.1044	0.7935	41.1215	180.1209			
059	338	188	5	16	0.0320	61.8243	238.7425	0.1249	59.7108	233.2110			
060	336	188	5	16	0.0572	54.9836	267.7561	0.0568	50.4312	260.2122			
061	350	167	5	16	0.0744	39.5933	239.1507	0.1249	36.4174	231.8910			
062	351	167	5	16	0.0534	63.2116	264.9945	0.0791	61.4712	258.2148			
063	340	167	5	16	0.0109	8.6252	48.1781	0.0740	8.7154	46.9042			
064	360	167	5	16	0.3813	47.5849	182.0813	0.2122	41.3970	178.2124			
065	372	167	5	16	0.0541	53.7420	291.1539	0.1621	50.9412	288.9115			
066	366	167	5	16	0.0288	58.3836	214.5503	0.0212	51.9877	206.4112			
067	377	167	5	16	0.3060	43.6830	209.2958	0.2987	39.4241	198.8183			
068	384	167	5	16	0.0619	53.2613	242.0845	0.0740	50.4190	238.2411			
069	378	167	5	16	0.0286	66.5331	304.5283	0.1020	63.2114	208.4147			
070	392	167	5	16	0.1547	66.1202	218.5211	0.1498	62.2940	215.8914			
071	400	132	5	16	0.0673	62.4108	225.5845	0.0914	61.2124	221.4942			
072	406	132	5	16	0.0737	47.7214	219.6431	0.6983	43.1227	214.9879			
073	429	132	5	16	0.8395	52.9142	261.1626	0.7412	46.2148	254.4143			
074	440	132	5	16	0.0555	71.1171	301.1842	0.0614	69.2790	296.2114			
075	432	132	5	16	0.0243	64.7435	302.7109	0.1847	60.8912	296.819R			

Tabela 5.6.1

(continuação)
 Experiência Computacional e Análise Comparativa dos Algoritmos de Otimização de Subgradientes e Decomposição Primal, Baseado na Relaxação Lagrangeana do Problema Mestre de Benders, para Solução dos Subproblemas P_t , do Problema Dinâmico de Localização.

PROB.	NOS	NOS ELEGIVEIS	ESTAGIOS	SUEPROBS	Alg. Otimiz. Subgrad.			Alg. de Decomp. Primal				
					MIN	MEDIO	MAX	MIN	MEDIO	MAX		
076	456	132	5	16	56.9705	337.1536	0.5211	51.9880	321.1536	0.4991	51.9880	321.1536
077	468	132	5	16	59.9583	355.1019	0.1106	50.8912	348.1217	0.1094	50.8912	348.1217
078	468	132	5	16	66.2988	377.9454	0.0230	64.1209	373.4910	0.0397	64.1209	373.4910
079	481	132	4	12	116.7537	505.7901	0.9751	112.4118	498.8712	0.8542	112.4118	498.8712
080	494	132	4	12	116.8779	544.8546	0.0652	110.2021	538.4910	0.0587	110.2021	538.4910
081	488	132	4	12	84.3231	386.5069	0.0577	80.3048	380.4987	0.0621	80.3048	380.4987
082	507	110	4	12	7.7713	30.7819	0.1494	6.9247	28.4112	0.1249	6.9247	28.4112
083	520	110	4	12	107.6403	449.5875	0.0442	103.8112	440.3128	0.0728	103.8112	440.3128
084	534	110	4	12	18.7163	134.1911	0.0109	15.8943	129.4190	0.0423	15.8943	129.4190
085	550	110	4	12	125.9851	471.0928	0.2032	18.6112	132.2021	0.2049	18.6112	132.2021
086	560	110	4	12	3.7022	11.9779	0.0165	3.6927	9.8412	0.2749	3.6927	9.8412
087	558	110	4	12	79.6329	501.2014	0.0340	73.7910	493.2170	0.0290	73.7910	493.2170
088	576	110	4	12	127.7492	618.1473	0.1535	123.4928	611.4712	0.1312	123.4928	611.4712
089	589	110	4	12	123.7936	395.5941	0.0548	120.3032	386.4032	0.0418	120.3032	386.4032
090	594	110	4	12	126.4187	717.7466	0.0337	119.3280	712.2710	0.0420	119.3280	712.2710
091	600	93	5	16	28.8876	112.5064	0.1781	21.9230	103.4957	0.1431	21.9230	103.4957
092	605	93	5	16	91.7313	389.7736	0.0174	88.1554	380.4110	0.0179	88.1554	380.4110
093	618	93	5	16	90.5020	456.5168	0.0530	87.1290	49.7883	0.0490	87.1290	49.7883
094	640	93	5	16	88.4409	372.2016	0.1848	81.3279	366.9147	0.1542	81.3279	366.9147
095	650	93	5	16	92.8385	479.5072	0.0354	89.1213	468.2890	0.0854	89.1213	468.2890
096	648	93	5	16	112.2507	492.4116	0.0596	105.8910	487.2130	0.0584	105.8910	487.2130
097	487	93	5	16	55.4181	258.0905	0.0884	51.8912	253.1849	0.0729	51.8912	253.1849
098	675	93	5	16	112.1405	519.4408	0.0514	105.2412	508.4190	0.0637	105.2412	508.4190
099	658	93	5	16	96.9174	513.2898	0.0187	91.8419	506.4998	0.0304	91.8419	506.4998
100	522	93	5	16	109.3792	649.6578	0.0320	101.2032	625.6112	0.1226	101.2032	625.6112

TEMPO
 DOS
 SUBPROBLEMAS
 (segs)

NUMERO
 DE

este algoritmo um desempenho melhor. A superioridade da heurística pode estar ligada a alguma característica especial dos problemas gerados. Porém, ainda não foi possível descobrir tal característica, ou corrigir algum vício eventual na geração dos λ 's, entretanto, acreditamos que este tempo não cresce muito com o tamanho do problema. Outras pequenas experiências foram realizadas com base em ligeiras variações, mas os resultados não foram suficientemente significativos para justificar um aprofundamento do que estamos relatando. Ainda não foi examinado o comportamento do método quando conectado a um procedimento do tipo separação e avaliação para fechar as falhas duas nos raros casos em que elas ocorreram.

CAPÍTULO VI

APLICAÇÃO: LOCALIZAÇÃO DINÂMICA DE BRTERIAS DE FORNOS PRRR
PRODUÇÃO INDUSTRIAL DE CARVÃO VEGETRL EM UMR REGIÃO
REFLORESTRDR.

6.1 - Introdução:

R produção de carvdo vegetal, em escala industrial, cresce rapidamente e sua demanda como insumo na fabricação de aços especiais? na indústria siderúrgica brasileira? tem gerado um segmento expressivo do setor produtivo da economia nacional. R produção de carvdo vegetal a partir de reflorestamentos planejados tem sido uma imposição nos últimos anos devido à redução dos bosques naturais, à exigência de homogeneidade do produto? além da crescente demanda total de carvdo. O estado de Minas Gerais dispõe de uma drea reflorestada com eucalipto, em torno de 1,7 milhbes de hectares, sendo que, em 1983, mais de 400 mil hectares jd haviam ultrapassado a idade de corte, conforme PEREIRR e REZENDE (142, 1983).

Os recursos humanos, financeiros, de equipamento, tempo e espaço, para gerar e aproveitar economicamente esse potencial, constituem investimentos, cuja administração requer uma metodologia específica que tenha na eficiência seu maior pressuposto.

Na **condução** da explorapdo desse **potencial**, **além** dos problemas técnicos e ecológicos? **uma** série de **questões**, de **natureza econômica**, **tem** surgido **com** a **mesma** velocidade de crescimento da **produção** agregada.

Os **avanços** de **natureza** técnica obtidos até **aqui**, no sentido do melhor **aproveitamento** de **recursos** e produtos florestais? **são** sensíveis sobretudo no campo das **técnicas** silviculturais e do manejo florestal. A primeira com estudos de adaptabilidade de **espécies** de **eucalipto**, preparo do solo e **fertilização**, **épocas** de plantio e corte? **etc.**, buscando com isso o aumento da produtividade florestal e a consequente **diminuição** da idade de corte. O **manejo** florestal **aperfeiçoa** a operacionalizapdo das técnicas de **colheita**, **através** do abate ou **derrubada**, **desgalhamento**, **desdobramento**? **enleiramento**, carga e descarga do material **lenhoso**, executando **assim**, a **exploração** programada e controlada dos **recursos** florestais.

Dentre as **questões** de **natureza econômica**, abordadas **até aqui**, destacam-se aquelas ligadas à **determinação** da idade econômica de **corte**, com base em estudos do valor presente do capital investido; análises de **custo/benefício** de reflorestamentos; modelagem de **decisões** de **economia** florestal que **incluem**, por **exemplo**, a **integração** das **indústrias** produtora e **consumidora** de **carvão** vegetal; análise dos efeitos da compra e venda de terras, **formação** de **estoques**, **aquisição** de carvão **produzido** por terceiros; e análise **econômica** dos sistemas de carga? transporte e descarga de carvão vegetal.

Em TAUBE NETTO (174, 1984) é apresentado um modelo de **programação** linear para **planejamento** de florestas de

eucaliptos, com a função de auxiliar a empresa nas decisões de plantar? cortar, reformar, rebrotar, vender ou implantar projetos florestais, num horizonte de vários anos, durante o qual, os contratos de suprimento anuais de madeira devem ser obedecidos. de tal maneira que o lucro total atual, ao longo do horizonte, seja maximizado.

WEINTRAUB, GUITRRT e KOHN (180, 1983), estudaram o planejamento de investimentos em indústrias florestais através da modelagem de decisões que envolvem grandes inversões de capital, enfrentadas por uma indústria. Através de um modelo de programação inteira? de dados e da estrutura de uma empresa particular, são analisadas as decisões de investimentos? para as quais as informações silviculturais originais são agregadas. Este modelo interage com outro de planejamento de atividades florestais mais detalhado.

SCHREUDER, BARE, BRIGGS e ROISE (159, 1984), otimizaram, através de um modelo de programação dinâmica, a densidade (metros lineares por hectare) e tipo de estradas para colheita do produto florestal, o efeito do tamanho e formato dos talhões sobre o sistema de transporte? a ordem de colheita em relação ao sistema viário endógeno da floresta e o sistema de extração que maximiza o retorno, dentre outros.

PAULA JUNIOR e PEREIRA (135, 1980), analisaram, através de um modelo de programação linear, os sistemas de carga e descarga (manual ou mecânico) de carvão vegetal, bem como o transporte usando sacaria ou gaiola. em

caminhões de dois, três e quatro eixos, nas épocas de chuva e na seca, usando várias estradas alternativas? dentre as quais algumas não operavam em épocas chuvosas.

Neste capítulo será feito um estudo de localização dinâmica de baterias e fornos para produção de carvão vegetal numa região reflorestada, usando a metodologia desenvolvida nos capítulos anteriores. Os dados utilizados são de uma situação concreta, embora de tamanho reduzido? o que a torna adequada por se destinar a uma ilustração acadêmica.

6.2 - Conceitos Gerais de Exploração Florestal:

A exploração de recursos florestais - feita por empresas especializadas - depende de autorização prévia do IBDF (Instituto Brasileiro de Desenvolvimento Florestal) e obriga a reposição de espécies florestais adequadas à fauna e à flora, observando o que dispõe a legislação vigente? as peculiaridades regionais e o que determina as repartições oficiais locais.

Os projetos de reflorestamento incentivados que o IBDF autoriza devem ter, no mínimo, 200 hectares? e é permitida uma prognose de produtividade de, no máximo, 70 estéreos de lenha por hectare/ano.

As indústrias usuárias de produtos florestais, a serem instaladas? devem planejar sua localização em função dos distritos florestais. No estabelecimento desses distritos são considerados os zoneamentos econômico e ecológico? área total necessária para fornecimento de matéria-

prima? topografia, solo? recursos hídricos, infraestrutura viária, energia elétrica? localização provável de outras indústrias (siderúrgica, de papel e celulose, cimenteira, cerâmica, etc.) e os maciços florestais existentes.

As regiões de preservação permanente e preservação paisagística devem ser conservadas? tendo em vista a existência de áreas de beleza cênica, monumentos naturais, parques florestais e áreas com função de cinturão verde.

O nível de produtividade das florestas depende muito da qualidade do solo e do padrão de tecnologia adotado na implantação e formação da floresta. Dentre as técnicas usadas? buscando aumentar a produtividade das florestas de eucalipto, destacam-se a fertilização, melhoramento genético, espaçamento, tratamentos culturais e técnicas de aproveitamento integral da madeira.

Com a crescente demanda de madeira no Brasil e considerando o avanço das técnicas de silvicultura e que no setor florestal os custos financeiros são elevados, já existe uma grande preocupação com a redução da idade econômica de corte das florestas planejadas de eucaliptos, plantadas para fins energéticos ou de produção de carvão vegetal, que não necessitam de madeira de grandes dimensões.

Várias atividades são conduzidas durante o desenvolvimento de um projeto de reflorestamento. Dentre estas, tem-se a "reforma" de área que é realizada em talhões com baixa produtividade ou que apresentem muitas falhas; o "interplântio" que é uma técnica utilizada para proceder ao plantio de mudas da mesma espécie nas falhas da brotação; e o

"adensamento" que é o aumento do número de plantas por unidade de área. Estas técnicas, e outras? fazem parte do "manejo florestal" que cuida do planejamento e controle da produção de madeira* ou seja, que trata da condução programada da floresta? objetivando a produção sustentada de madeira e outros produtos florestais? obtendo o rendimento máximo por unidade de área, sem descuidar dos aspectos de proteção das condições de equilíbrio do ecossistema.

Na execução de um projeto de reflorestamento são feitos acompanhamentos da evolução quantitativa do produto florestal. O crescimento volumétrico, o incremento médio anual (IMA) e o incremento corrente do ano (ICA), são parâmetros que indicam a evolução quantitativa no decorrer dos anos de execução do projeto.

6.3 - Estudo de um Caso: Elementos de um Projeto de Produção Industrial de Carvão Vegetal:

Serão introduzidos aqui os elementos básicos de um projeto de produção de carvão vegetal. Será dado maior destaque ao aspecto da localização das praças de carvoejamento, o que constitui o objetivo central deste capítulo. Na verdade, o que se pretende, é complementar um projeto de produção de carvão com informações produzidas pela análise que utiliza uma metodologia de localização dinâmica de carvoarias em reflorestamentos planejados. Em vista disso, o estudo locacional aqui desenvolvido, embora receba maior destaque, será conduzido como um adendo de um projeto maior. A

análise que se segue corresponde ao estudo econômico da implantação de unidades simplificadas de produção de carvão. As carvoarias projetadas devem operar com uma soma total de aproximadamente 70 a 90 fornos recuperáveis de 5,30m de diâmetro, e a sistemática de exploração florestal e produção de carvão vegetal adotada, é aquela em uso corrente na empresa que forneceu os dados e outras informações.

Os custos de transporte para fins de uso no modelo de localização, não perdem a sua atualidade, uma vez que eles refletem basicamente as distâncias relativas entre talhões (ou blocos de talhões). Naturalmente, quando mudam seu valor nominal, os valores antigos continuam guardando? para esse fim e sem considerar a influência de possíveis modificações na relação (custo de mão-de-obra/custo de transporte), a mesma coerência dos novos valores.

6.3.1 - Dados Gerais:

A área estudada está localizada na região de Rio Pardo de Minas, estado de Minas Gerais, reflorestada com *Eucalyptus grandis*, entre e inclusive os anos de 1976 e 1981, com área plantada ao redor de 8 mil hectares, conforme figura 6.3.1.

Devido à evolução das técnicas de plantação e à grande variação da fertilidade do solo estes plantios apresentam diferentes produtividades, dependendo da tecnologia utilizada e também das condições climáticas do ano em que foram plantados. Será considerada aqui uma produção média de 70 st/ha, independente da localização e da idade dos plantios.

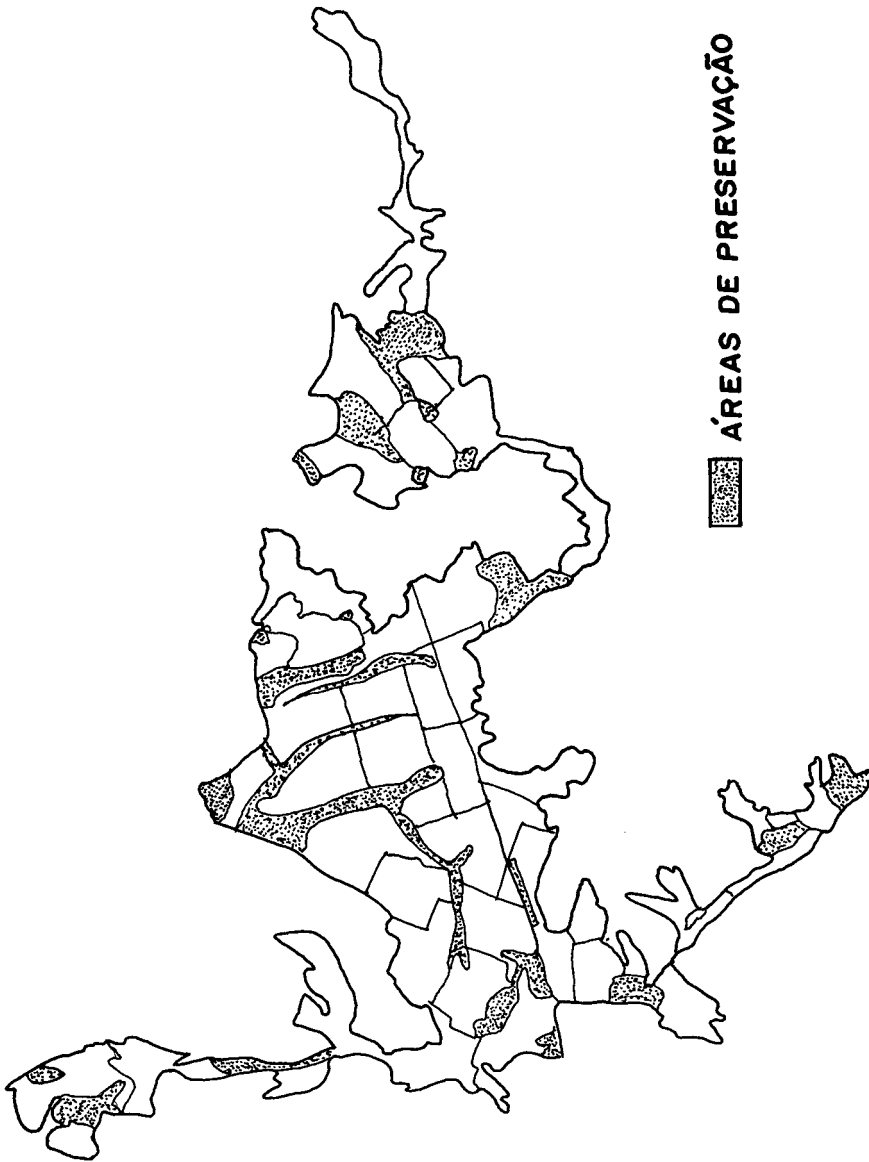


FIGURA 6.3.

A exploração do reflorestamento está prevista para ciclos de corte de 5 em 5 anos, sendo cortados anualmente 1582 ha, de forma a alcançar uma produção mensal de carvão em torno de 4615 MDC (metros de carvão).

6.3.2 - A Praça de Baterias:

Praça de baterias também chamada praça de carvoejamento, é o local onde serão construídas as baterias de fornos para carbonização da lenha. Além disso, deve contar com toda a infraestrutura necessária à produção de carvão, tais como:

- local para estocagem da lenha e carvão;
- instalações para carga de carvão (silos, rampas, valas, etc.);
- cobertura para proteção do carvão estocado;
- sistema de abastecimento d'água.

A localização dinâmica destas praças no reflorestamento é objeto da seção 6.4. Na escolha dos pontos elegíveis para sua construção, cuidados devem ser tomados para que sejam:

- distantes de casas residenciais, acampamentos, bairros, etc;
- afastadas de vias de grande tráfego;

- de fácil acesso, providos de estradas que permitam a entrada de lenha e saída de carvão, em qualquer época do ano;
- não inundável;
- de topografia plana, ou levemente ondulada;
- de terreno seco, firme? com pequena declividade para facilitar o escoamento das águas de serviço e da chuva;
- com água disponível em quantidade adequada e eletricidade - no caso de recuperação de alcatrão.

6.3.2.1 - Bateria de Fornos:

É um conjunto de fornos operados por carvoejadores treinados. O número de fornos que compõem uma bateria varia de acordo com seu tipo e capacidade. A figura 6.3.2 apresenta a planta de uma bateria. Os principais tipos de fornos ou os mais difundidos em nosso meio? são:

- Forno rabo quente ou biscoiteira: 15 fornos por bateria;
- Forno mineiro de encosta ou barranco: 12 fornos por bateria;
- Forno de superfície, com 5 metros de diâmetro, convencional ou de chaminé central: 9 fornos por bateria.
- Forno recuperável, construído a partir da superposição de anéis metálicos, que permitem desmontá-lo para mudança de local de instalação: 12 fornos por bateria.

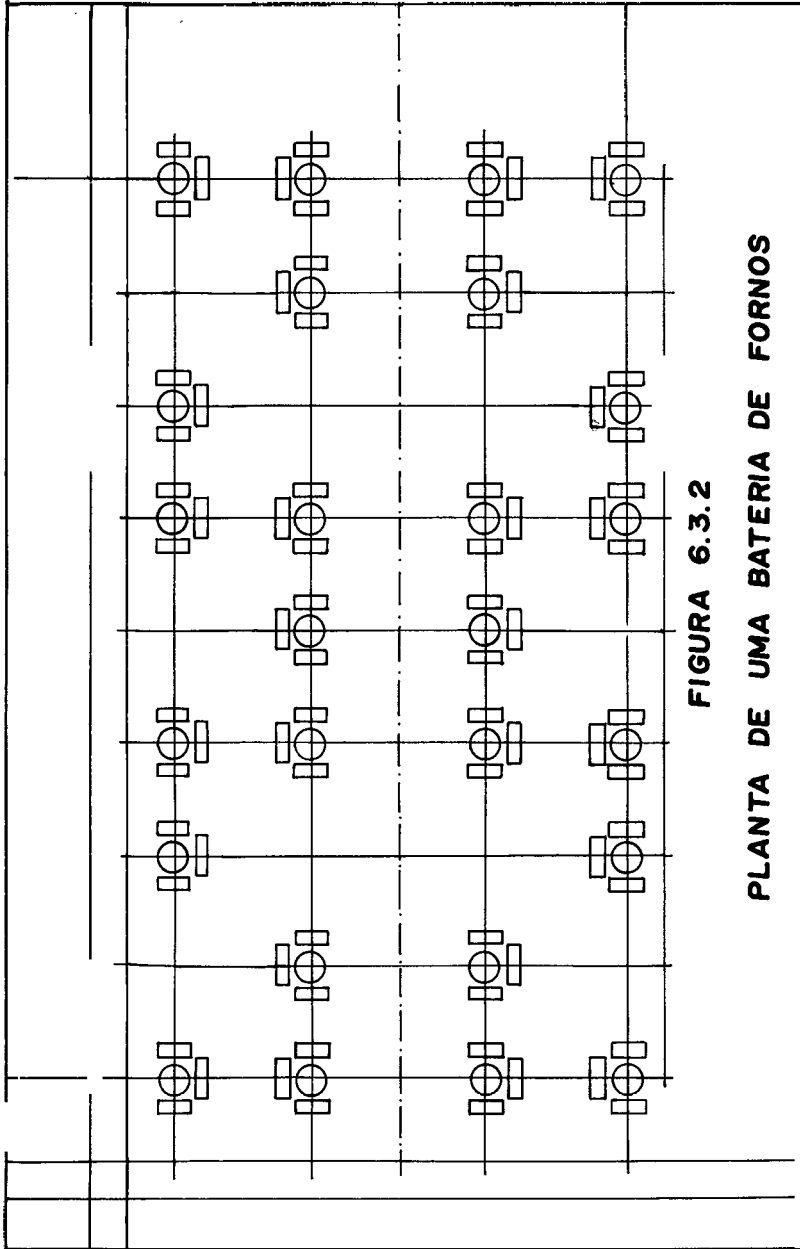


FIGURA 6.3.2
PLANTA DE UMA BATERIA DE FORNOS

6.3.2.2 - Área da Carvoaria:

O espaço necessário para construção de uma carvoaria, está diretamente relacionado aos seguintes fatores:

- previsão de depósito para lenha a ser usada na época de chuva;
- construído de galpão para depósito de carvão;
- número de baterias de fornos a serem agrupadas no local;
- tipo e capacidade do forno a ser construído;
- disposição das baterias de fornos na área, que pode ser em filas paralelas ou em linha de fornos.

Podem ser tomadas como base as seguintes medidas usadas na construção de uma carvoaria composta de uma bateria de 9 fornos de superfície, convencional ou de chaminé central, distribuídos em linha reta

	largura em metros
- estrada para abastecimento de lenha	3,00
- estrada para saída de carvão	4,00
- espaço lateral para depósito de lenha	4,00
- espaço para depósito de lenha para o forno	3,00
- espaço para construção do forno	6,00
- espaço para depósito de carvão, frente ao forno	10,00
- total	30,00

O comprimento é obtido multiplicando o número de fornos pela distancia entre eles (centro a centro) **que**, em geral, é de 8m9 mais o **espaço de trânsito, contorno, etc.**, chegando a um total de **90,00m.**

6.3.3 - Sistemática ou Seqüenciamento da Condução dos Trabalhos:

6.3.3.1 - Exploração:

A colheita da lenha compreende: **derrubada, desgalhamento,** toragem e enleiramento da lenha e da **galhada,** atividades essas executadas com um operador utilizando motosserra e **machadinha,** obedecendo a uma **seqüência** de trabalho, visando **eliminar** os deslocamentos **desnecessários** na drea. O trecho de trabalho para cada operador é definido, **normalmente,** por 8 fileiras de plantio, o que determina um afastamento entre eles de 24 metros. Este **número, porém,** pode ser aumentado ou **diminuído,** dependendo da profundidade do trecho e **altura média das árvores,** levando-se **em** conta a **segurança** do operador. Cada trecho de 8 fileiras é dividido **em** 4 **módulos** de trabalho **constituído** de 2 fileiras ("pega") e entregues a um operador.

- Derrubada

A derrubada é previamente examinada e demarcada de tal forma que, no desenvolver da operação, não perturbe a retirada da lenha do maciço. É sempre iniciada no sentido de fora (estrada de saída da lenha) para dentro do maciço, orientando as Árvores para que caiam sobre as já derrubadas e nunca entre as Árvores ainda em pé. Derrubar simultaneamente duas fileiras de Árvores, convergindo a queda para o meio da linha para que forme uma única leira de lenha. A altura do cepo deve situar-se em torno de 10cm e sua superfície apresentar-se ligeiramente inclinada. O vento é fator limitante para uma boa derrubada. Recomenda-se, de preferência, derrubar pela manhã.

- Desgalhamento e enleiramento da galhada

Feito com machadinha, iniciando-se do pé para a ponta dos varões, do fim para o início da derrubada. Deve-se retirar com machadinha, todo material considerado não lenhoso, diâmetro inferior a 3cm. Os galhos devem ser retirados o mais rente possível, de maneira a evitar ganchos que prejudicam e tornam inseguras as operações subseqüentes. Enleirar a galhada entre duas fileiras de cepos, evitando o recobrimento dos mesmos, alternando com o enleiramento da lenha, deixando limpa a rua de trânsito.

- Toragem

A toragem em peças (**toretas**) de **1,10m** a **2,20m** de comprimento é feita? iniciando-se pela base do fuste - sentido final para o início da derrubada - utilizando-se a **motosserra**. Torar todo material considerado **lenhoso**, no fuste de **diâmetro** igual ou **superior** a **3cm** com casca.

- Enleiramento da lenha

O **enleiramento**, veja figura **6.3.3**, é feito no **próprio** local do desdobramento **no** sentido da ponta para o pé da madeira (início para o fim da **derrubada**). Com auxílio da **machadinha**, rejuntar as toras formando uma leira densa e **contínua**. **As peças** mais pesadas **não** devem ser levantadas e sim roladas.

6.3.3.2 - Transporte da Lenha

É a retirada da lenha do interior do **maciço** e sua **transferência** para os boxes dos fornos. **As** principais atividades desenvolvidas são a carga e descarga dos **caminhões**.

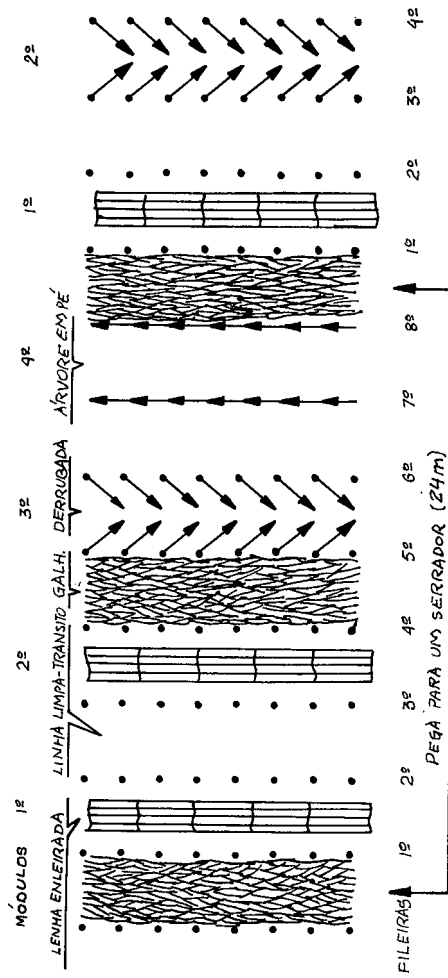


FIGURA 6.3.3
ESQUEMA PARA ENLEIRAMENTO
DA LENHA E GALHADA

6.3.3.3 - Carbonização:

São as atividades necessárias para transformar a lenha em carvão. As principais ações aí realizadas se constituem da retirada dos toletes dos boxes? sua arrumação no interior do forno* a carbonização propriamente dita que é iniciada pela ignição - feita imediatamente após a carga de cada forno - o resfriamento e a descarga dos fornos. O ciclo completo da carbonização é de aproximadamente 9 dias distribuídos da seguinte forma:

carga	=	4 horas
carbonização	=	114 horas
resfriamento	=	96 horas
descarga	=	2 horas

6.3.4 - Quadro de Pessoal:

A composição do quadro de pessoal é feita observando as atividades de supervisão, exploração florestal, produção de carvão e manutenção mecânica. A supervisão é executada por 01 chefe de área; a exploração florestal? em geral, pode ser feita por 01 feitor? 14 operadores de máquinas, 10 carregadores e 01 ajudante de manutenção mecânica; a produção de carvão pode ser conduzida por 01 feitor? 04 carbonizadores, 88 forneiros e 83 ajudantes de fabricação de carvão: a manutenção mecânica é feita por 01 mecânico.

6.3.5 - Investimentos:

Os investimentos necessários são feitos na compra de equipamentos, como motosserra, carregadeiras, peças de reposição, material de oficina, etc; na construção de carvoarias que envolvem a preparação da praça, rede hidráulica, construção de fornos, etc.

6.3.6 - Outros Itens:

Além dos já mencionados, compõem também um projeto de exploração florestal e produção de carvão, um cronograma anual de atividades operacionais que estabeleça para cada mês, os níveis de exploração, transporte, estoque, enforamento, carvão produzido e/ou estocado na carvoaria; consideração sobre os níveis de depreciação dos equipamentos e componentes da capacidade instalada; construção do orçamento das despesas anuais com as atividades diretas de extração de madeira e transporte de carvão, construção e manutenção de estradas, transporte de pessoal, etc.; despesas administrativas com as atividades de supervisão, compra de material de escritório, etc.; análise do custo do carvão com sua decomposição em custo operacional, custo administrativo e custo de transporte.

6.4 - Análises Locacionais:

Aqui serão realizados alguns estudos sobre a localização dinâmica das pragas de carvoejamento, no reflorestamento considerado. Antes, porém, de qualquer consideração direta, serão introduzidas algumas observações sobre as estimativas utilizadas nas análises.

6.4.1 - Estimativas da Oferta e Demanda de Madeira:

Na produção do carvão vegetal serão utilizados fornos recuperáveis com uma superfície de 5 metros de diâmetro, produzindo aproximadamente 54 mdc/mês/unidade. Geralmente, considera-se ideal, a instalação de um número de fornos próximo a um múltiplo de nove. O relação "lenha:carvão" é considerada como sendo 2:1.

A divisão do reflorestamento em talhdes, conforme figura 6.4.1, foi feita sistematicamente, para fins de estudos locacionais, agregando uma grande extensão, (formando blocos de talhdes - em geral cada talhão tem uma drea de 40 a 50 ha), eliminando as dreas de preservação permanente e as dreas de estradas. O bloco de talhdes será, daqui em diante, denominado, simplesmente, talhão. Cada sub-região determinada foi planimetrada a fim de encontrar a drea verdadeira do talhão. Para saber o volume de madeira a ser transportado, multiplicou-se a drea do talhdo por 70 obtendo-se, assim, a quantidade (oferta) de madeira por talhão em estéreos, veja tabela 6.4.1.

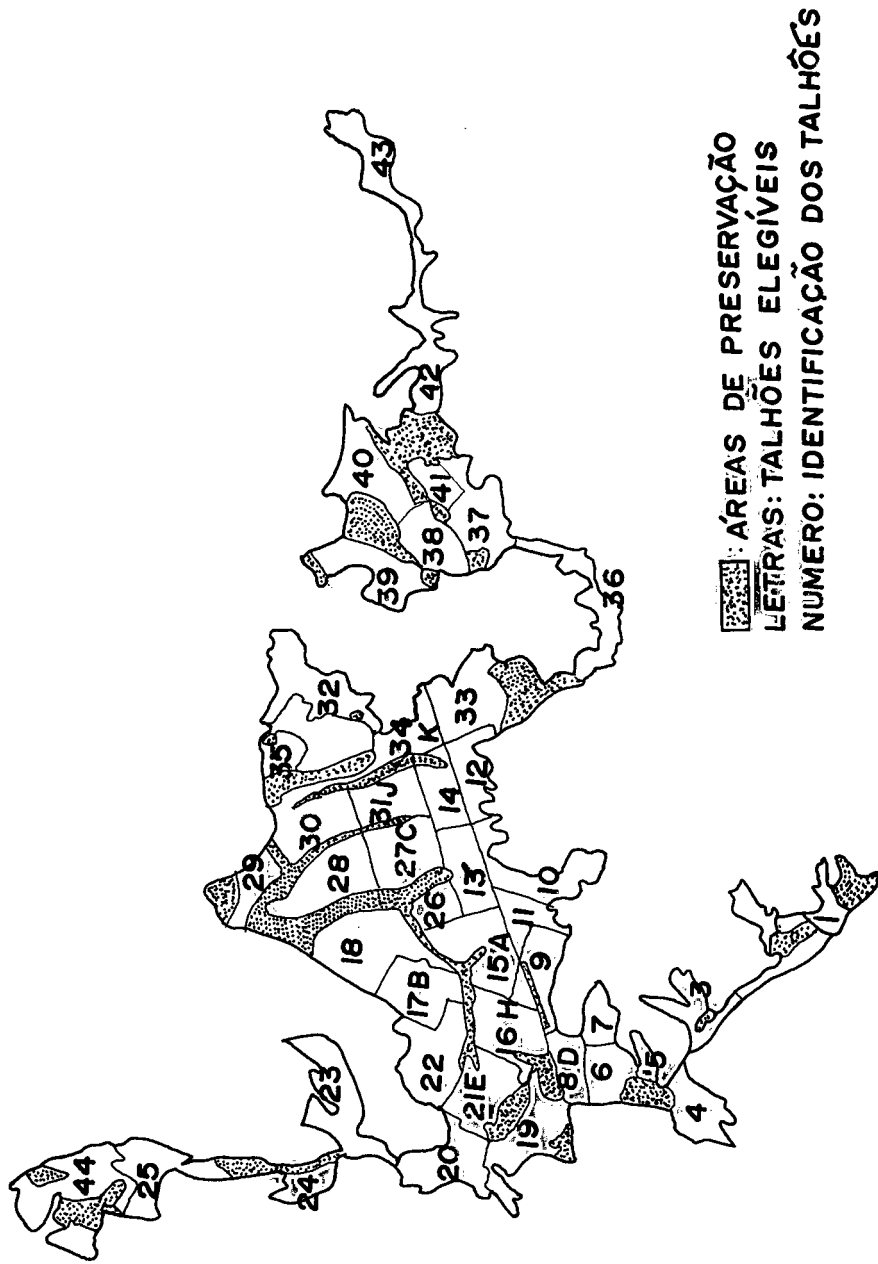


FIGURA 6.4.1

O número total de talhões é de 44, totalizando uma área de 7.910,5 hectares equivalentes a 553.700 estéreos de lenha.

Como o ciclo de corte foi considerado de 5 em 5 anos, a área cortada anualmente será de 1.582 hectares ou 110.740 estéreos de lenha.

A demanda de lenha foi determinada a partir do volume cortado anualmente, ou seja, 110.740 estéreos, equivalentes a uma produção mensal de 4.615 mdc e anual de 55.380 mdc.

A demanda de lenha por forno será de 108 estéreos/mês, ou 1.296 estéreos por ano, evidentemente serão necessários aproximadamente 85 fornos para satisfazer (atender) a oferta anual de lenha que é de 110.740 estéreos.

6.4.2 - Estimativas dos Custos Unitários de Transporte e dos Custos Fixos:

A partir das distâncias determinadas, foram calculados os custos de transporte da lenha* dos 44 talhões para os pontos elegíveis (9 pontos), candidatos a praças de carvoejamento, através da fórmula

Tabela 6.4.1

Relação dos talhões com as áreas e volumes de madeira/lenha, considerando 70 st/ha independente do ano de plantio.

Talhão nó.	Área (ha)	Volume de madeira (st)
01	113,41	7.938,7
02	162,71	11.389,7
03	123,77	8.663,9
04	134,61	9.422,7
05	82,19	5.753,3
06	112,64	7.884,8
07	83,84	5.833,8
08	116,86	5.473,3
09	113,41	10.645,6
10	154,34	10.803,8
11	154,74	10.831,8
12	203,15	12.915,0
13	181,45	14.007,0
14	130,17	9.111,9
15	238,65	16.705,5
16	231,74	16.221,8
17	224,96	15.747,2
18	324,68	22.727,6
19	168,63	11.804,1
20	215,96	15.117,2
21	209,16	14.641,2
22	257,38	18.016,6
23	233,71	16.359,7
24	94,95	6.646,5
25	203,39	14.237,3
26	96,89	6.782,3
27	246,54	17.257,8
28	266,25	18.637,5
29	128,34	8.983,8
30	242,22	16.955,4
31	166,66	11.666,2
32	226,53	14.120,4
33	255,90	19.635,0
34	132,64	9.249,8
35	100,64	7.044,8
36	182,45	12.771,5
37	226,82	15.877,4
38	166,66	11.666,2
39	203,76	14.263,2
40	236,67	16.566,9
41	100,44	3.665,2
42	211,53	18.172,7
43	186,38	13.046,6
44	263,39	18.437,3
Total	7.910150	553.700,0

$$2,5 \frac{P}{d} + (0,50 \frac{P}{d}) D \quad (6.4.2.1)$$

km

que proporciona os custos em cz\$/(st transportado), onde

P é o preço do óleo diesel,
d

D é a distancia em quilbmetros entre o talhdo e a
km
praça de fornos.

A fórmula (6.4.2.1) é usada correntemente pela Sociedade de Investigações Florestais (SIF), bem como por firmas e outras instituições ligadas ao ramo, e com ela foi possível obter os custos unitários (e totais) de transporte da lenha dos 44 talhões até os 9 pontos elegiveis para instalação de baterias.

Para os custos fixos foi estimado um valor para todos os pontos elegiveis em função de duas razões: a primeira delas constitui-se da uniformidade das operações necessdrias para instalapdo das baterias; o outro motivo está na funpdo distintiva entre o custo fixo de uma bateria jd instalada (custo fixo jd amortizado) e outra a ser possivelmente instalada? com custo fixo ainda a ser pago, considerando o caráter dinâmico da instalação das baterias, que são ativadas e desativadas dinamicamente. no decorrer do processo de tomada de decisões sequenciais. Além disso, alguns experimentos serão executados com custos fixos decrescentes, procurando com isso analisar o efeito do aparecimento de novas tecnologias de construção de fornos mais baratos.

6.4.3 - Ciclo de Corte e Exploração dos Talhões:

O ciclo de corte, conforme já comentado, é de 5 anos, sendo cortado primeiro os reflorestamentos mais antigos, ou seja, o corte anual será de 1.582 hectares* iniciando com os reflorestamentos plantados em 1976. A tabela 6.4.2 mostra os talhões, o ano do plantio e a idade de corte, correspondentes.

6.4.4 - Montagem da Rede Dinâmica de Recobrimento Mínimo:

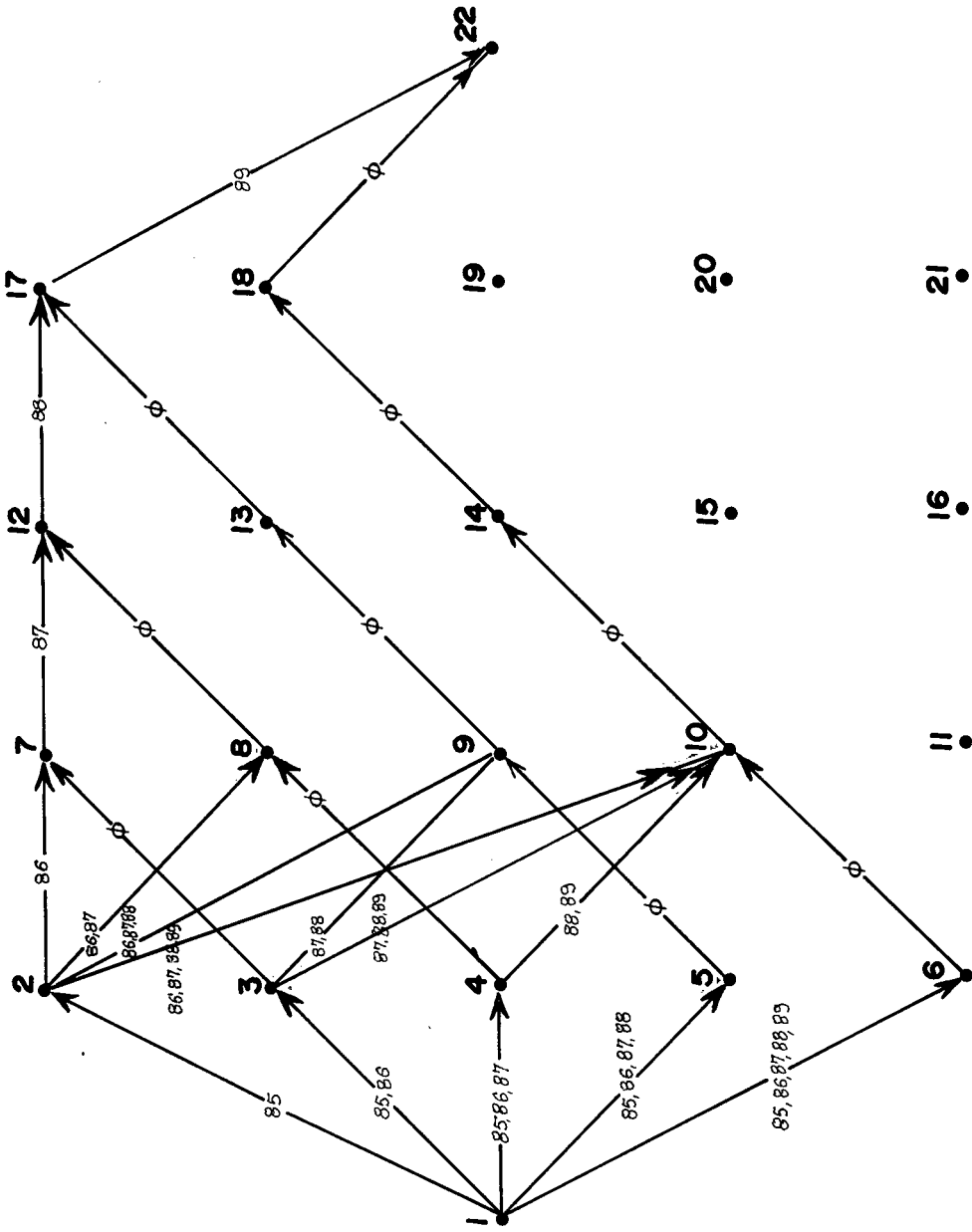
Foram realizadas várias análises locais que, na prática, devem ser levadas para uma discussão dentro da empresa, a nível de superintendência, a fim de aumentar o volume de informações dos planejadores e executores do projeto de exploração florestal e produção de carvão, nos períodos que antecedem às tomadas de decisão.

Os experimentos executados foram modelados com a rdr assumindo a configuração mostrada na figura 6.4.2. Conforme capítulo III, na condução de experimentos com um modelo criado, As vezes é necessário retirar decisões (transformar decisões "reais" em pseudodecisões "fantasmas" ou em pseudodecisões "vazias") do processo dinâmico. Eliminar uma decisão, corresponde a retirar na rdr o arco correspondente, produzindo com isso a necessidade do conceito de pseudodecisão fantasma. ou seja, uma decisão de custo infinito, como mais um recurso ou figura de modelagem. Uma pseudodecisão vazia é uma decisão de custo zero, e sua

Tabela 6.4.2

Talhões com as épocas de plantio e corte, e áreas cortadas anualmente.

Talhão nó.	Ano de Plantio	Ano de Corte	Área Cortada (ha)
01	1980	1986	113,41
02	1980	1986	162,71
03	1981	1989	123,77
04	1981	1989	134,61
05	1981	1989	82,19
06	1978	1985	112,64
07	1978	1985	83,34
08	1978	1985	78,19
08	1978	1986	38,67
09	1978	1986	113,41
10	1979	1986	154,34
11	1979	1986	154,74
12	1980	1986	184,50
12	1980	1987	18,65
13	1980	1987	181,45
14	1980	1987	130,17
15	1979	1986	238,65
16	1977	1985	231,74
17	1977	1985	224,96
18	1979	1986	324,68
19	1976	1985	168,63
20	1976	1985	215,96
21	1976	1985	209,16
22	1976	1985	257,38
23	1981	1989	233,71
24	1981	1989	94,94
25	1981	1989	203,30
26	1979	1986	96,89
27	1980	1987	246,54
28	1980	1987	266,25
29	1980	1987	128,34
30	1980	1987	242,34
31	1980	1987	166,66
32	1980	1987	201,73
32	1980	1988	24,80
33	1980	1988	255,90
34	1980	1988	132,14
35	1980	1988	100,64
36	1980	1988	182,45
37	1980	1988	226,82
38	1980	1988	166,66
39	1980	1988	203,76
40	1981	1988	236,67
41	1981	1988	52,36
41	1981	1989	48,08
42	1981	1989	211,53
43	1981	1989	186,38
44	1981	1989	263,39



IGUR 6.4.2

função concreta é servir de **conexão** entre duas decisões: a que lhe antecede e a que lhe sucede. Em termos de **rdr**, a **função** concreta do arco correspondente a uma **decisão** vazia é simplesmente **conectar** as **duas** partes de um caminho de **recobrimento**. O arco na **rdr**, associado a uma **decisão** vazia, **não** é retirado (eliminado), mas a **decisão** vazia **não** corresponde a nenhuma **evolução** do processo **produtivo**, sendo, apenas, um recurso adicional de modelagem. Uma pseudo-decisão é "fantasma" ou "vazia" dentro de **um modelo**, em **relação** a outros, numa mesma **seqüência** ou família de **experimentos**, ou ainda **em relação** a um modelo básico original.

Os **sistemas dinâmicos** de **decisões seqüenciais** aqui utilizados, têm **decisões reais**, pseudo-decisões vazias e fantasmas. Conforme o que se disse acima e no **capítulo III**, estas pseudodecisões são instrumentos usados pela modelagem para conferir flexibilidade ao processo de **experimentação**.

No caso presente, a **formação** dos **estágios**, **estados** e **decisões** do sistema **dinâmico** de **decisões seqüenciais**, é conduzida permitindo-se agrupar as sub-regiões com idades de corte completadas nos anos de 1985 a 1989, de acordo com o que é mostrado na tabela 6.4.3. Cada arco da **rdr** está associado a um cenário. A **solução** global do problema de **localização** de **praças de carvoejamento** é composta dos **vários cenários** determinados (escolhidos) pelo processo **dinâmico** de **decisões seqüenciais**.

6.4.5 - Resultados e Discussão das Análises Locacionais:

Serão discutidos os principais experimentos executados? especialmente aqueles que dão margem a observações relevantes? que permitem demonstrar a flexibilidade e o desempenho do sistema formulado para geração destas análises locacionais.

A tabela 6.4.4 mostra os resultados da primeira análise feita com a rdr construída com os dados da tabela 6.4.3. De acordo com a tabela 6.4.4, que mostra os volumes e áreas exploradas? as praças de carvoejamento localizadas, com suas respectivas dimensões (números de fornos)? e o esquema de atendimento? a exploração deverá ser feita em duas etapas? onde a primeira é constituída do estágio 1 que corresponde à exploração de um cenário equivalente a uma área de 6.328,70 hectares com 441.205,50 estéreos de madeira/lenha. Para produção de carvão vegetal? durante os quatro anos (de 1985 a 1988), serão operadas duas praças de carvoejamento, sendo que uma delas? instalada no talhão 34, terá 43 fornos, e a outra, no talhão 16, com 42 fornos. A segunda etapa? constituída do estágio 5, explora uma área de 1.582,00 hectares? onde estão 112.494,50 estéreos de madeira. As duas praças da primeira etapa são desativadas e a produção de carvão, agora se dará a partir de duas outras. A primeira delas, instalada no talhão 15, com 61 fornos? e a outra no talhão 41, com 28 fornos.

Os demais estágios que compõem este sistema dinâmico de decisões seqüenciais são constituídos de

Tabela 6.4.3

Decisões "reais" associadas aos demais componentes do sistema dinâmico de decisões sequenciais relativo à rdr da figura 6.4.2

Estágio	Orço ou Decisão	Ano em que os talhões completam a idade ou corde	Talhões que formam a sub-região (cenário) a ser explorada	Área (ha)	Volume (st)
	(1,2)	1985	6,7,8,16,17,19,20,21,22	1.582,0	108.928,8
	(1,3)	1985	idem decisão (1,2)		
		1986	1,2,8,9,10,11,12,15,18,26	3.164,0	220.294,4
		1985	idem decisão (1,2)		
	(1,4)	1986	idem decisão (1,3)	4.746,5	330.647,1
		1987	12,13,14,27,28,29,30,31,32		
		1985	idem decisão (1,2)		
	(1,5)	1986	idem decisão (1,3)	6.328,7	441.205,5
		1987	idem decisão (1,4)		
		1988	32,33,34,35,36,37,38,39,40,41		
		1985	idem decisão (1,2)		
	(1,6)	1986	idem decisão (1,3)	7.910,7	553.700,0
		1987	idem decisão (1,4)		
		1988	idem decisão (1,5)		
		1989	3,4,5,23,24,25,41,42,43,44		

Tabela 0.4.3 (continuação)

O sistema dinâmico de decisões "reais" associadas aos demais componentes sequenciais relativo à rd da figura 0.4.2

Estágio	Arco ou decisão	Ano em que o planejamento foi realizado	Talhões que formam a sub-região a ser explorada	Área (ha)	Volume (st)
(2,7)		1986	idem decisão (1,3)	1.582,0	111.365,6
(2,8)		1986	idem decisão (1,3)		
		1987	idem decisão (1,4)	3.164,0	221.745,3
(2,9)		1986	idem decisão (1,3)		
		1987	idem decisão (1,4)	4.746,7	332.276,7
		1988	idem decisão (1,5)		
(2,10)		1986	idem decisão (1,3)		
		1987	idem decisão (1,4)	0.328,7	444.771,2
		1988	idem decisão (1,5)		
		1989	idem decisão (1,6)		
(3,9)		1987	idem decisão (1,4)	3.164,7	220.911,1
		1988	idem decisão (1,5)		
(3,10)		1987	idem decisão (1,4)	4.746,7	333.483,6
		1988	idem decisão (1,5)		
		1989	idem decisão (1,6)		
(4,10)		1988	idem decisão (1,5)	3.164,7	223.025,9
		1989	idem decisão (1,6)		
(6,11)		1987	idem decisão (1,4)	1.582,0	110.379,7

Tabela 6.4.3 (continuação)

Decisões "reais" associadas aos demais componentes do sistema dinâmico de decisões sequenciais relativo à rdr da figura 0.4.2

Estágio ou Decisão	Ano em que os talhões completam a idade de corte	Talhões que formam a sub-região (cenário) a ser explorada	Área (ha)	Volume (st)
1 (7,12)	1987	idem decisão (1,4)	1.582,0	110.379,7
3 (11,15)	1988	idem decisão (1,5)	3.164,7	223.025,9
4 (12,17)	1988	idem decisão (1,5)	1.582,7	110.531,4
5 (17,22)	1989	idem decisão (1,6)	1.582,0	112.494,5

Tabela 6.4.4

Estágios	Anos	Área Explorada (ha)	Volume Explorado (st)	Praças de Carvoejamento	Dimensão no. de Fornos	Talhões Atendidos
1	1985	6.328,70	441.205,50	34	43	12 13 14 27 28 29 30 31 32
	1986			16	42	33 34 35 36 37 38 39 40
	1987					6 7 16 17 19 20 21 22 8
	1988					9 1 2 10 11 26 15 18
5	1989	1.582,00	112.494,57	15	61	3 4 5 23 24 25 44
				41	28	41 42 43

Exploração em duas etapas:

primeira etapa = estágio 1

segunda etapa = estágio 5

Cada forno processa:

108 st/mês ou

1.296 st/ano

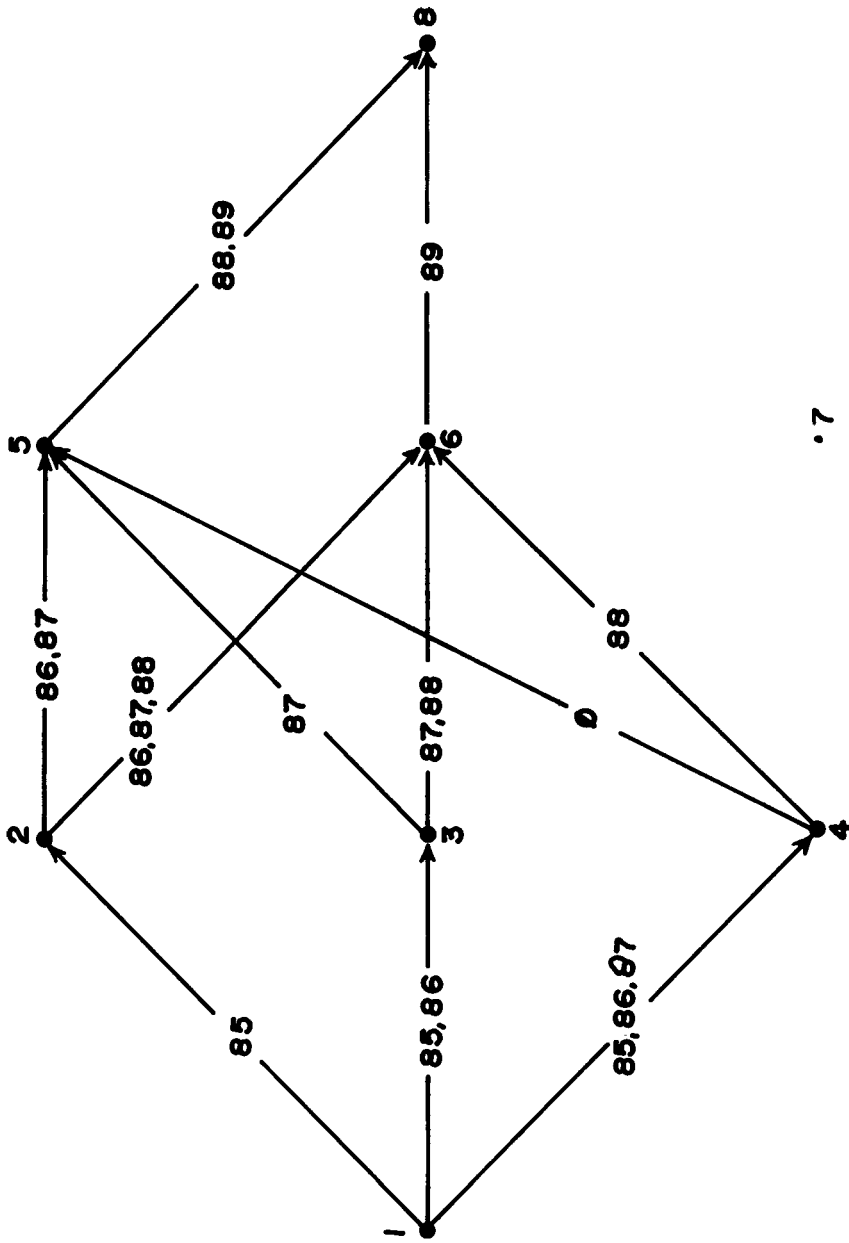
ias

decisões vazias (de custo zero e que não correspondem a nenhuma evolução do processo produtivo). O número de fornos para cada praça foi determinado levando em conta que cada forno processa anualmente 1296 estéreos de madeira/lenha. ■ decisão quanto à localização dentro do talhão é tomada através de critérios técnicos de outra natureza, uma vez que o nível de agregação dos talhões originais em talhbes (blocos) maiores, produziu áreas ao redor de 150 hectares, o que conduziu a uma "macro-localização". Nesta análise o número máximo de medianas permitidas para cada sub-rede foi de duas ($p = 2$).

Na experiência seguinte fizemos $p = 1$, obrigando com isso, a escolha de um único ponto para a instalação de baterias* para cada sub-rede. Neste caso, a solução é obtida com a execução do processo produtivo numa única etapa constituída do estdgio 1. O único ponto escolhido está no talhão 15, onde deveria ser instalada uma praça de carvoejamento com 85 fornos para produzir carvão vegetal durante os cinco anos (de 1985 a 1989) do horizonte de planejamento, a partir da exploração do cenário constituído da área de 1.910,00 hectares* com 553.700,00 estéreos de madeira. Esta solução coincide com a solução estdtica do problema, para $p=1$. O custo desta solução é maior que o da solução anterior, mesmo porque ela é uma das soluções vidveis do caso antecedente. A solução que coincide com aquela do problema estático, mesmo quando tem custo inferior aos custos das demais, pode ser desaconselhável, uma vez que as opções de construir a capacidade produtiva, bem como executar o processo

produtivo em várias etapas, pode permitir o adiamento parcial de investimentos, ou reorientá-los para as necessidades de outras atividades. Além disso, as vantagens eventualmente obtidas com a localização estática poderiam ser anuladas com os custos financeiros de investimentos que, no caso da localização dinâmica, são naturalmente adiados.

A terceira análise foi executada com base na rede da figura 6.4.3, construída a partir dos dados da tabela 6.4.5. Trata-se de um experimento simplificado em relação aos anteriores. Entretanto, seu objetivo é avaliar o processo locacional na presença de limitações como estas aqui presentes, pelas quais, as decisões construídas a partir das agregações de áreas exploráveis, feitas por grupos de anos, estão limitadas, por razões técnicas, a um máximo de três anos, conforme mostram a figura 6.4.3 e a tabela 6.4.5. Além disso, eliminou-se a possibilidade da solução equivalente à do problema estático. Neste caso, a exploração é executada em três etapas, que aqui correspondem aos três estágios do sistema dinâmico. Na primeira etapa (primeiro estágio) são explorados 3.164,50 hectares, com um volume de 220.294,35 estéreos, nos anos de 1985 e 1986. Para tanto, será instalada uma praça no talhão 16, que deverá operar com 85 fornos. Na segunda etapa, o cenário explorado tem uma área de 3.164,71 hectares e um volume de 220.911,09 estéreos. Será desativada a praça do talhão 16 que operou na primeira etapa e serão instaladas duas outras praças: uma no talhão 34 com 73 fornos e outra no talhão 15 com 12 fornos, que deverão operar durante



.7

FIGURA 6.4.3

Tabela 6.4.5

Decisões associadas aos domínios com onventos
do sistema dinâmico de decisões sequenciais relativas ao arbor da figura 6.4.3

Estágio	Arco ou Decisão	Ano em que os talhões completam a idade de corte	Talhões que formam a sub-região (cenário) a ser explorada	Área (ha)	Volume (st)
1	(1,2)	1985	6,7,8,16,17,19,20,21,22	1.582,0	108.928,8
	(1,3)	1985	idem decisão (1,2)		
		1986	1,2,8,9,10,11,12,15,18,26	3.164,0	220.294,4
		1985	idem decisão (1,2)		
	(1,4)	1986	idem decisão (1,3)	4.746,5	330.047,1
		1987	12,13,14,27,28,29,30,31,32		
	(2,5)	1986	idem decisão (1,3)	3.164,0	221.715,3
		1987	idem decisão (1,4)		
2	(2,6)	1986	idem decisão (1,3)	7.910,7	553.700,0
		1987	idem decisão (1,4)		
		1988	32,33,34,35,36,37,38,39,40,41		
	(3,5)	1987	idem decisão (1,4)	1.582,0	110.379,7
	(3,6)	1987	idem decisão (1,4)	3.164,7	220.911,1
		1988	idem decisão (2,6)		
	(4,5)		FSEUDO DECISÃO (VAZIA)		
	(4,6)	1988	idem decisão (2,6)	1.582,7	110.531,4
3	(5,8)	1988	idem decisão (2,6)	3.164,7	223.025,9
		1989	3,4,5,23,24,25,41,42,43,44		
	(6,8)	1989	idem decisão (5,8)	1.582,0	112.494,5

os anos de 1987 e 1988. Finalmente, na terceira etapa? serão explorados 1.582,00 hectares com 112.494,00 estéreos, durante o ano de 1989. Serão desativadas as duas praças da segunda etapa, e instaladas outras duas: uma no talhão 41, com 25 fornos e a outra no talhão 21, com 61 fornos.

No próximo experimento, para avaliar o efeito do aparecimento de tecnologias de construção de fornos mais baratos e de fácil manipulação na montagem e desmontagem, bem como a existência de condições favoráveis, como terreno de topografia plana, que dispensa serviços de terraplenagem para preparação e construção das praças de carvoejamento, etc., foram anulados os custos fixos. A rede dinâmica é a da figura 6.4.2, e os dados utilizados estão na tabela 6.4.3. Nesta experiência o nível de mobilidade das praças de carvoejamento, bem como a descentralização do processo produtivo, aumentaram consideravelmente. A exploração se deu em cinco etapas - uma para cada ano do horizonte de planejamento e para cada estágio do processo dinâmico. Na primeira etapa as duas praças de carvoejamento serão instaladas nos talhões 21 e 8. Na segunda etapa será mantida a praça do talhão 8, desativada a do talhão 21 e instalada outra praça no talhão 15. Na terceira etapa serão desativadas as duas praças da etapa anterior e instaladas duas novas praças. Uma delas no talhão 31 e a outra no talhão 27. No quarto estágio serão desativadas as praças anteriores e construídas duas outras, a primeira no talhão 41 e a segunda no talhão 34. Finalmente, na quinta etapa? será mantida a praça do talhão 41, reativada a praça do talhão 21, que operou na primeira etapa, e desativada a praça 34.

Na quinta análise o valor de p foi feito igual a 1 e a decisão (1,6) foi transformada em pseudodécisão fantasma. A exploração do reflorestamento, segundo a solução obtida, deverá ser executada em duas etapas, correspondentes aos dois primeiros estágios do sistema dinâmico. Na primeira, correspondendo aos anos de 1985 a 1987, um volume de 330.674,13 estéreos será colhido de uma área de 4.746,50 hectares. Na segunda etapa, a área a ser explorada é de 3.164,70 hectares e o volume 223.025,87 estéreos. A praça de carvoejamento para a primeira etapa será instalada no talhão 15, e operará com 85 fornos. Esta praça continuará em funcionamento na segunda etapa, porém, operando com 86 fornos. Portanto, da primeira para a segunda etapa, não haverá desativação de baterias nem instalação de nova unidade de produção. O problema tem, nesse caso, virtualmente a solução estática, não diferindo, essencialmente, por isso, da solução obtida na segunda análise locacional.

Na sexta análise, com $p = 2$, transformou-se a decisão (1,5) em pseudodécisão fantasma. Com isso, o caminho de custo mínimo da rede dinâmica de recobrimento, produziu um plano para a execução do processo produtivo em três etapas. A primeira, que corresponde ao primeiro estágio do processo dinâmico, será conduzida nos anos de 1985 e 1986. Será instalada uma praça no talhão 16 que operará com 85 fornos para produzir carvão a partir de 220.294,35 estéreos colhidos em 3.164,50 hectares. Na segunda etapa - associada ao terceiro estágio e ao ano de 1987 - serão instaladas duas

praças, sendo uma no talhdo 34 com 60 fornos e a outra no talhdo 15 com 25 fornos. A praça da etapa anterior serd desativada. Na terceira etapa - quarto estdgio - será mantida a praça do talhão 34, agora com 85 fornos; desativada a praça do talhdo 15, e ndo serd construida nenhuma outra unidade produtiva. Na quarta etapa? as baterias do talhão 34 continuando em operação com 26 fornos e serd reativada a praça do talhda 15, que operará com 59 fornos? no ano de 1989. Na verdade, ocorreu uma desativação parcial da praça do talhão 34.

As próximas andlises foram executadas com a rdr da figura 6.4.4, que é ligeiramente modificada em relagda A da figura 6.4.2. A deciso (1,6), como mostra a figura 6.4.2, foi decomposta nas decisbes (1,6), (6,11) e (11,15), conforme a figura 6.4.4. As decisbes (6,11) e (11,15), no modelo relativo à figura 6.4.2, sdo decisões fantasmas em relação ao modelo correspondente à figura 6.4.4, onde sdo decisbes reais que correspondem 1 evolugbes concretas do processo produtivo. Os experimentos executados ndo apresentaram novidades em relagdo aos anteriores, mostrando a inatividade das modificações que conduziram ao modelo associado A rdr da figura 6.4.4, em relagdo As analises locacionais executadas.

Procurando aproximar os pontos localizados dos centros de massa da floresta? isto é, das dreas de maior volume? efetuamos várias andlises mudando os coeficientes da função critério, utilizados até entdo. Substituímos o custo de

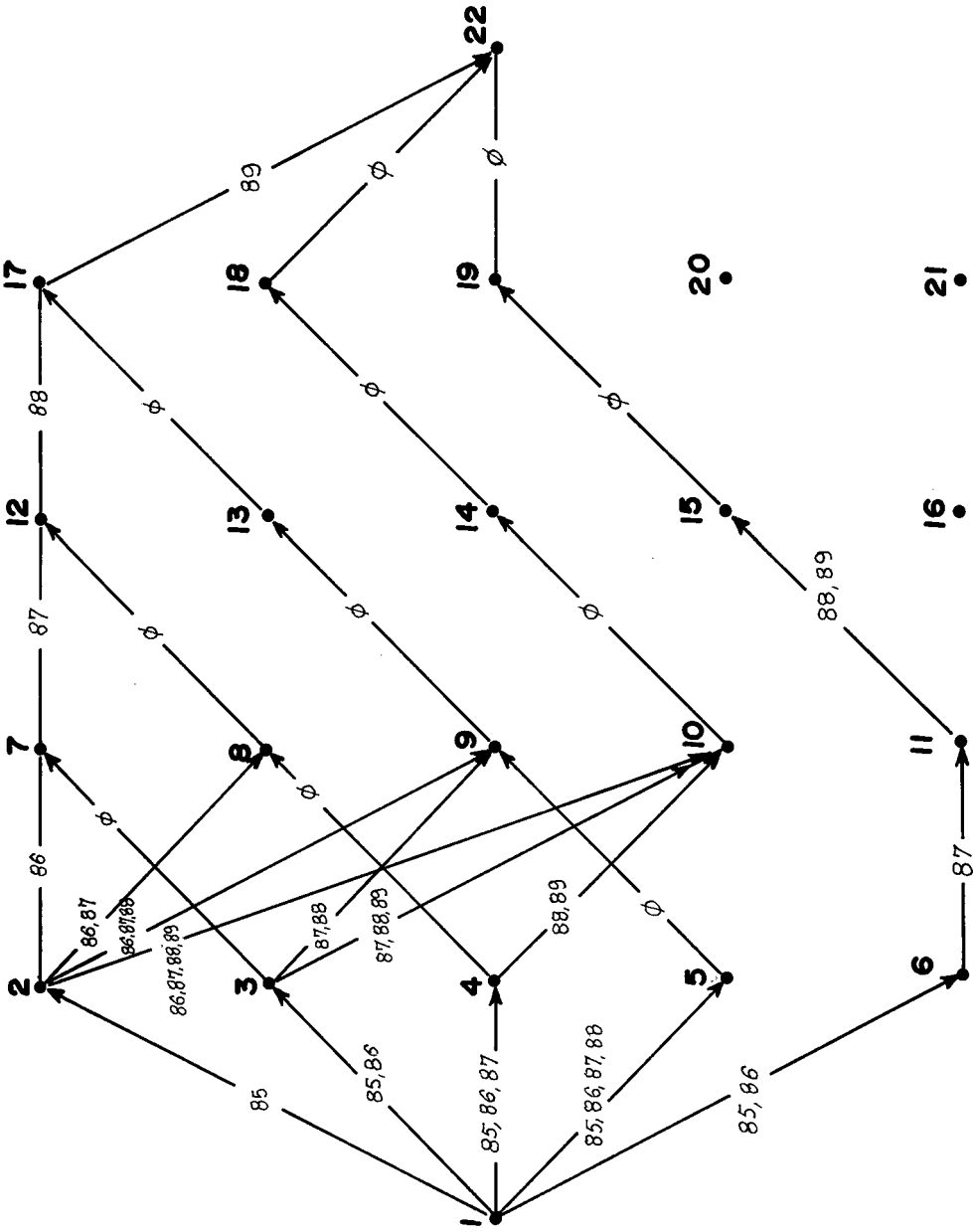


FIGURA 6.4.4

transporte c_{ij} , entre o talhão i e o ponto elegível j , pela razão c_{ij}/vol_i , onde vol_i é o volume do talhão i . Com isso, a escolha dos pontos, dentre os elegíveis, passa a ser influenciada também pelos volumes de madeira dos talhões, tendendo a aproximar os locais eleitos para instalação de praças de carvoejamento, das áreas de maior densidade. Tal iniciativa se deve ao fato de que o problema é não-capacitado e o algoritmo não é forçado a exibir, com suas soluções, as vantagens de se instalar baterias próximas a locais de maior produtividade de madeira. Descobrimos que, ao invés do volume, é recomendável utilizar alguma outra influência sua, na relação c_{ij}/vol_i . Tal influência poderia ser qualquer função não-decrescente do volume, tal como a função raiz quadrada, ou a função logaritmo do volume. Isto porque, em muitas situações, os valores nominais das custos e volumes são tão distintos que a simples razão entre os dois valores produz números extremamente pequenos, o que pode dificultar a análise dos resultados, ou até distorcê-la. Chamamos a nova função de custo assim obtida, de critério de custo reduzido. No lugar de utilizar funções reais não-decrescentes, porém de crescimento amortecido como é o caso das funções raiz e logaritmo do volume, pode ser mais adequado usar a razão $c_{ij}/(a \cdot vol_i)$, onde "a" é uma constante adequada com a qual se procura manter os custos reduzidos dentro da mesma escala dos custos reais. Uma solução tende a ficar ligeiramente superior ao valor que ela teria, se tivesse sido calculada diretamente pelo critério do custo real. Entretanto, as suas vantagens são óbvias e podem interessar aos

planejadores e executores do projeto de exploração florestal.

Conduzimos vários experimentos com o critério do custo reduzido, paralelamente ao critério do custo real. O primeiro deles? ou seja, a sétima análise locacional, executada com o modelo baseado na rdr da figura 6.4.2 e os dados da tabela 6.4.3, exibiu uma mobilidade maior das instalações em relação à primeira análise que foi executada sob as mesmas condições, a menos dos custos reduzidos. A exploração deverá ser feita em três etapas, correspondendo aos estágios 1, 2 e 5. No primeiro, serão instaladas duas praças: uma no talhão 8 e a outra no talhão 15. Na segunda etapa, as unidades produtoras se deslocam para os talhões 34 e 41, e são desativadas as praças anteriores. Finalmente? na terceira etapa, a praça 41 continuará em operação, porém parcialmente desativada, e a praça do talhão 8 retorna ao processo produtivo. A primeira etapa se refere aos anos de 1985 e 1986, a segunda, a 1987 e 1988, e a terceira a 1989.

A oitava análise, executada sob as mesmas condições que a segunda? a menos dos custos reduzidos, propõe a exploração do reflorestamento em duas etapas. Na primeira? será instalada uma praça no talhão 8 que operará nos anos de 1985 e 1986. Na segunda? a produção se desloca para o talhão 34, onde será instalada uma praça com 85 fornos para operar nos anos de 1987 a 1989. Lembramos que, nesse caso? fizemos $p = 1$.

A análise 9 foi executada com base no modelo associado à rdr da figura 6.4.3 e nos dados da tabela 6.4.5. Na décima análise, voltamos à questão da avaliação de condições extremamente favoráveis, que reduzem drasticamente os custos fixos. Os dois últimos quadros do APÊNDICE B, resumem os resultados destas duas últimas análises. No APÊNDICE B, as tabelas seguem a ordem das análises descritas aqui.

Além desses, foram executados outros experimentos que julgamos desnecessário comentar. É interessante registrar, entretanto, que a cada análise realizada, surgem novas indagações que conduzem a outras análises, gerando um processo informático-interativo indispensável e de profundas reflexões no planejamento da exploração florestal e na tomada de decisões.

CAPÍTULO VII

EXTENSÕES E CONCLUSÕES

7.1 - Extensões:

Embora o sistema construído seja útil na busca de informações locais, o problema tratado tem características notadamente capacitadas. Com isso? afirmamos que a extensão natural deste trabalho poderá ser feita através da formulação de modelos e algoritmos para solução do problema correspondente de localização capacitada.

Junto com um algoritmo baseado na metodologia da relaxação Lagrangeana, QEOFFRION e McBRIDE (61, 1978) propuseram o seguinte modelo para o problema capacitado de localização:

$$\text{Minimize } Z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_j f_j y_j \quad (7.1.1)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_j x_{ij} = 1, \quad i \in I \quad (7.1.2)$$

$$v_{\min} y_j \leq \sum_i d_i x_{ij} \leq v_{\max} y_j, \quad j \in J \quad (7.1.3)$$

$$Ax + By \geq b \quad (7.1.4)$$

$$0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad i \in I, \quad j \in J \quad (7.1.5)$$

$$y_j \in (0, 1), \quad j \in J, \quad (7.1.6)$$

onde x_{ij} é a fração da demanda no ponto j satisfeita pelo fornecedor i , cuja capacidade total é d_i . A soma $\sum_i d_i x_{ij}$ corresponde ao total ofertado por todos os pontos fornecedores A facilidade j , e deve estar, pela restrição (7.1.3), entre v_{min_j} e v_{max_j} que são as capacidades (volumes) mínima e máxima com que opera a facilidade j . As restrições (7.1.4) correspondem a vínculos adicionais, onde A e B são matrizes de dimensões adequadas ao vetor b .

CHRISTOFIDES e BERSLEY (18, 1983) também propuzeram um algoritmo baseado nos procedimentos comuns A relaxação Lagrangeana para resolver um problema semelhante ao dado por (7.1.1) a (7.1.6).

JRCOBSEN (79, 1983) e BARCELO e CRSONOVS (6, 1984) trazem heurísticas para solução de modelos semelhantes ao de Geoffrion e McBride.

Uma outra extensão para o problema estudada aqui, consiste na localização em dois níveis, onde, no caso da instalação de praças de baterias de fornos, seriam levados em consideração, tanto os talhões fornecedores de madeira/lenha, quanto a localização das indústrias consumidoras de carvão vegetal. RO e TCHR (150, 1984) propuzeram um modelo e um algoritmo de separação e avaliação para o problema de localização em dois níveis, onde o exploradas as propriedades de submodularidade da função objetivo do problema.

Seria interessante a adaptação do algoritmo de decomposição primal, desenvolvido na capítulo V deste trabalho? para solução dos problemas capacitados de

localização e distribuição em dois níveis.

Além dessas extensões devem ser explorados os algoritmos de separação e avaliação, veja FORREST, HIRST e TOMLIN (48, 1974), para fechamento das falhas duais, mesmo levando em conta que a sua ocorrência é mínima nos problemas de localização aqui considerados, conforme ficou comprovado nas exaustivas experiências computacionais realizadas.

Considerando uma facilidade "livre" em um dado nó da árvore associada a um algoritmo de separação e avaliação, e calculando os limites superior e inferior da redução do custo de suprir todos os mercados quando a facilidade é incluída na solução ótima, observamos que:

i) se o limite inferior da redução excede o custo fixo da facilidade, ela será aberta na solução ótima do nó;

ii) se o limite superior da redução é inferior ao custo fixo da facilidade, ela será fechada na solução ótima.

No cálculo dos limites superior e inferior? assume-se que todas as outras facilidades são mantidas (fixadas) no estado aberto ou fechado? na solução ótima do nó. Dai surgem as chamadas "regras de fixação de variáveis". KHUMAWALA (90, 1972) é o precursor da técnica e SERRR e TABKHA (161, 1985), introduziram novas regras para fixar o estado de uma facilidade (aberta ou fechada) num algoritmo do tipo separação e avaliação para problemas de localização não-capacitada. Além disso, o algoritmo foi construído com vistas

a sua utilização em microcomputadores, onde o tempo de processamento é uma variável menos importante do que a ocupação de memória principal.

apesar da escassez, no momento? de tecnologia adequada? em nosso meio, uma área promissora onde devem ser conduzidas outras extensões deste trabalho? é a construção de algoritmos paralelos para solução de problemas de localização capacitada e não-capacitada. O aparecimento de uma nova geração de computadores científicos, caracterizados pelo uso de arquiteturas avançadas - dotados de multiprocessadores com tecnologia VLSI - aumentou consideravelmente a velocidade de processamento. Tais dispositivos se tornaram altamente adequados na solução, salvo algumas exceções, de problemas de grande complexidade, quando considerados do ponto de vista seqüencial. R disso, em decorrência natural do avanço tecnológico, surgiu uma extensão da área de desenho de métodos computacionais, dedicada ao estudo da paralelização de algoritmos. Sobre paralelismo de algoritmos veja RIBEIRO (148, 1983) e (149, 1985) e CASTI, RICHARDSON e LARSON (14, 1973). Os métodos de paralelização de algoritmos, que tentam alcançar um melhor aproveitamento de dispositivos de hardware, consistem de um conjunto de técnicas que introduzem concorrência de operações em sistemas de computadores, permitindo que vários processadores permaneçam simultaneamente ativos, a fim de aumentar a eficiência e o fluxo computacionais.

As técnicas de agregação são muito úteis e necessárias em estudos dessa natureza, e seu potencial deve

ser explorado no contexto dos problemas aqui tratados. Em ZIPKIN (187, 1982) o erro induzido quando os nós de uma rede de grande porte são agregados para formar uma rede menor, é avaliado. É formalizado o conceito de agregação, bem como construída uma função de custo do problema agregado. Também são exploradas as condições sob as quais o erro cometido na agregação é pequeno, e é mostrado como calcular cotas (limites) sobre o erro. Em EVANS (41, 1983) e (42, 1981) a técnica de agregação é explorada para problemas de transporte de itens múltiplos, modelados como fluxos em rede.

Critérios do tipo

$$\text{Maximize } Z = \sum_i \sum_j (\text{vol}_i / d_{ij}) x_{ij} - \sum_j f_j y_j \quad (7.1.7)$$

onde vol_i é o volume de madeira do talhão i e d_{ij} é a distância entre o talhão i e o ponto elegível j , para os subproblemas de localização, também devem ser explorados? visando aumentar e aperfeiçoar o nível das informações providas pelas análises locacionais. Além disso, critérios como (7.1.7), permitem afastar algumas inconveniências do custo de transporte. Tais inconveniências aparecem, no caso do problema não capacitado, quando os custos, sendo unitários, podem afastar as facilidades dos pontos com maior capacidade de oferta. E, sendo proporcionais aos volumes ofertados pelos pontos de procedência, podem penalizar justamente os pontos com maior volume de oferta.

Alguns aspectos de engenharia econômica devem ser considerados posteriormente. Na rede dinâmica de

recobrimento, cada caminho do nó fonte ao nó sumidouro, define uma estratégia de exploração. Cada estratégia, portanto? cada caminho, está ligada a um custo financeiro dos investimentos que serão feitos em tempo de execução do processo produtivo. A avaliação destes custos e sua incorporação no cálculo do caminho mínimo, para escolha da melhor estratégia de exploração, certamente constituem extensões que devem ser executadas e incorporadas a este estudo.

7.2 - Conclusões:

Neste trabalho propusemos um modelo para solução de um problema específico de localização dinâmica de p -medianas em rede n do capacitada. A metodologia construída foi desenvolvida tendo por base um sistema dinâmico de decisões seqüenciais. Para solução dos subproblemas P_t , $d(k_t)$'s do problema dinâmico de localização, aperfeiçoamos algumas heurísticas, testamos outras e comparamos resultados. Estes mostraram-se promissores no nível de elaboração que nos pareceu compatível com o interesse de utilizar procedimentos cada vez mais eficientes para a solução do problema que definimos. As experiências e tentativas para se chegar a tais procedimentos mostraram a existência de um espaço considerável para o exercício da busca de novos métodos.

Os testes dos algoritmos foram feitos com a grande maioria dos casos restrita a problemas em que o baixo número de medianas a serem escolhidas na rede, era uma característica das instâncias do problema, geradas

aleatoriamente. Esta característica foi herdada da aplicação prática do sistema que definimos neste trabalho. De um lado, tal restrição permitiu analisar o desempenho dos algoritmos na solução do tipo específico de problema com o qual tratamos. Entretanto, de outro lado, uma análise mais genérica do comportamento dos algoritmos, ficou inibida e deve ser explorada em trabalhos futuros. O título deste trabalho, ao referir-se a "um algoritmo", certamente reflete o impacto que nos causou a descoberta de um método eficiente para resolver os subproblemas do problema aqui definido. Entretanto, o ponto central da teoria desenvolvida, não é dedicado à construção de algoritmos, fato que nos desobrigou de uma análise mais profunda e abrangente dos métodos de solução utilizados. Mesmo assim, foi imediato observar que o nível de eficiência dos algoritmos é obviamente dependente do grau de decomposição ou particionamento do problema em estágios e estados do sistema dinâmico de decisões seqüenciais.

Após um breve levantamento, no capítulo II, do que nos pareceu representativo do imenso volume de estudos de localização, empreendemos no capítulo III, a definição e modelagem de um problema específico de localização dinâmica. O acoplamento da metodologia de localização com um sistema dinâmico de decisões seqüenciais, foi alcançado após compreendermos o problema concreto com que se defrontam os planejadores de várias empresas ligadas ao setor de extrato florestal para fins energéticos.

A aplicação feita no capítulo VI, que

introduziu a análise locacional como mais um item de um projeto de planejamento e exploração florestal com vistas à produção industrial de carvão vegetal. exibiu o sistema construído como um instrumento de análise e assessoramento, capaz de avaliar as várias alternativas ou planos de extração florestal, em relação à escolha de pontos na floresta para instalação de praças de carvoejamento. O uso do critério $c_{ij} / (i \text{ influência do vol })$ no lugar do custo operacional de transporte. c_{ij} , procurou atender parcialmente o caráter intrinsecamente capacitado do problema. A relação do custo por uma influência do volume, procura privilegiar - em termos de proximidade com as praças de baterias - os talhdes com grande volume de madeira. O aparecimento das "figuras de modelo". que aqui denominamos de "pseudodecisbes vazias" e "fantasmas", trouxe grande flexibilidade aos processos de modelagem e experimentação, conforme ficou nitidamente constatado.

Das várias análises locacionais comentadas no capítulo VI, podemos extrair um histograma como o da figura 7.2.1, que nos dá uma visão dos pontos, que oferecem melhores condições, considerando o universo de diferentes condições sob as quais foram executados os experimentos locacionais. A figura 7.2.2 é o mapa da região explorada, onde estão destacados os talhdes com maior frequência no histograma da figura 7.2.1.

Na medida em que se descentraliza a produção de carvão vegetal - de uma para várias praças de carvoejamento - surgem certos problemas. como a necessidade de

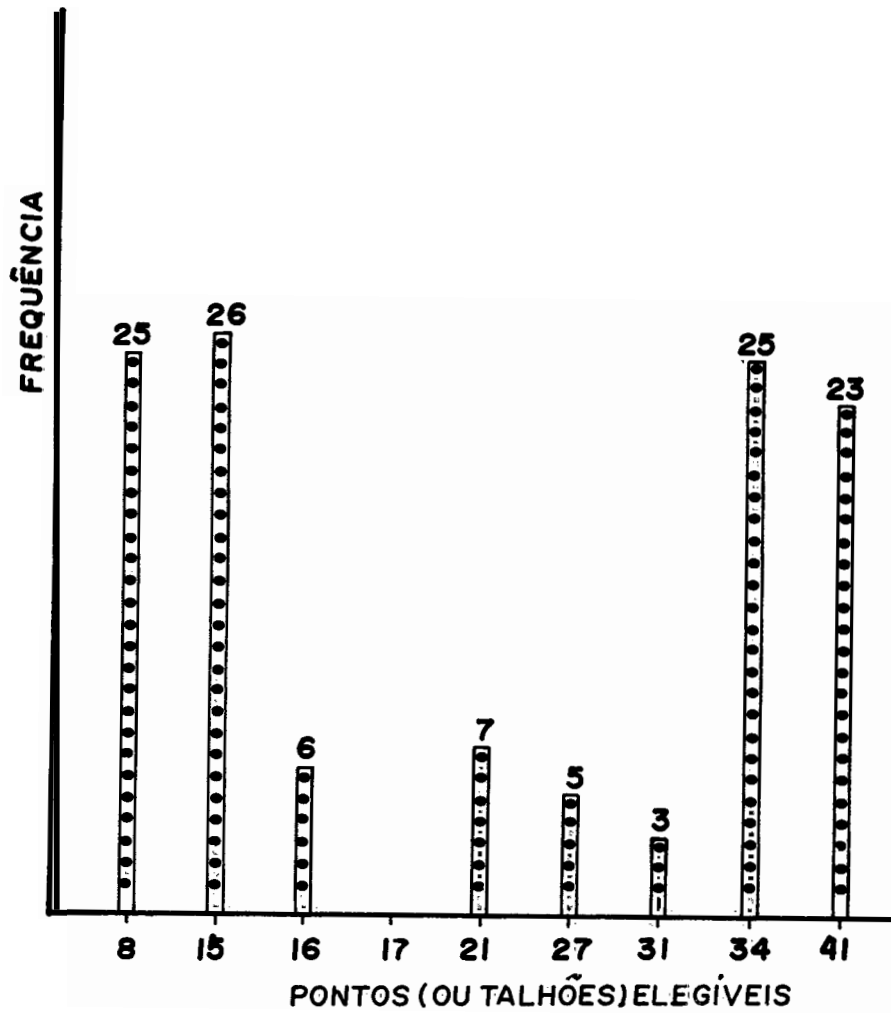


FIGURA Z2.1

HISTOGRAMA DE FREQUÊNCIA DOS PONTOS ELEGÍVEIS. CONSIDERANDO UM CONJUNTO DE 22 ANÁLISES LOCACIONAIS.

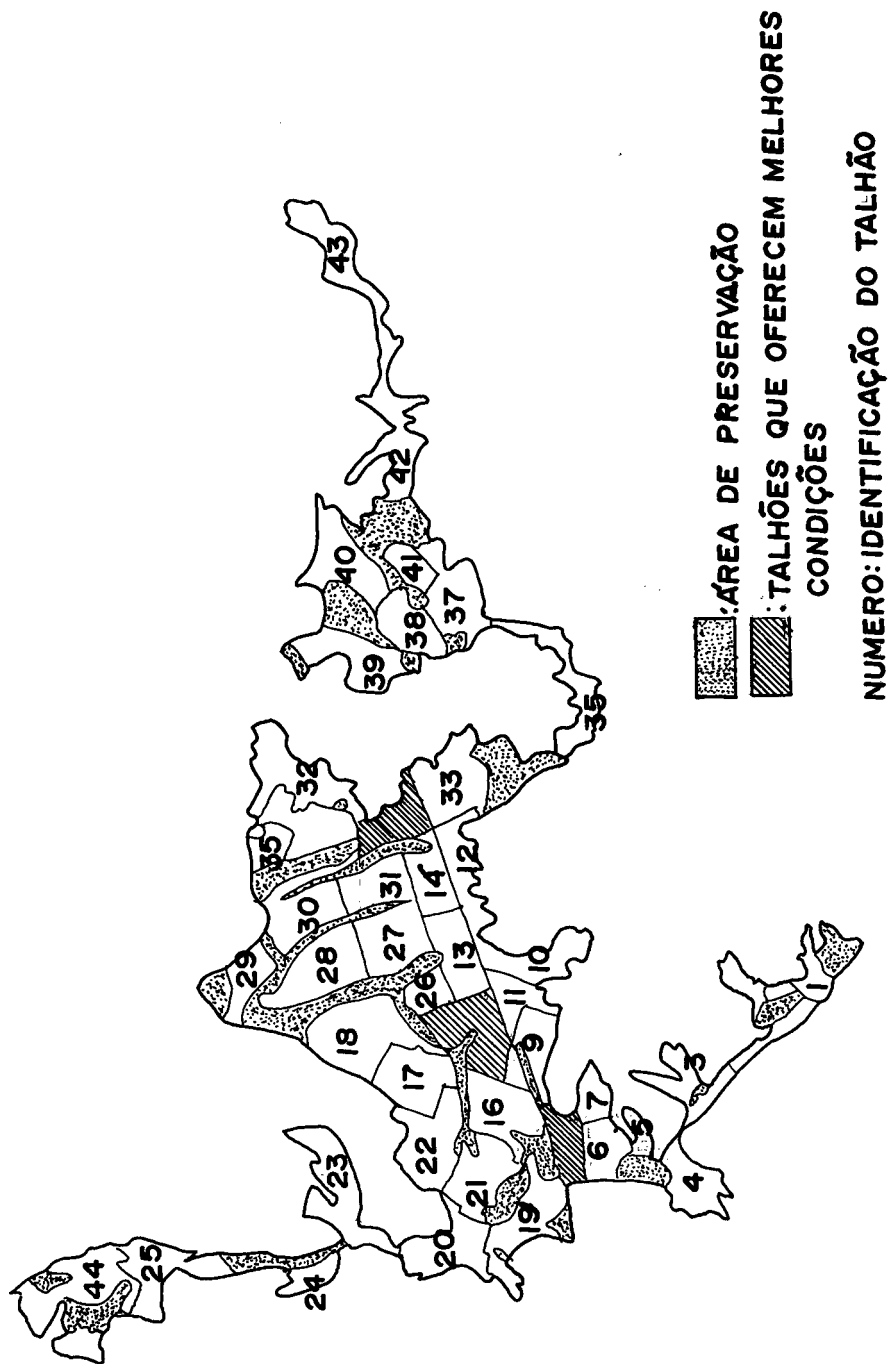


FIGURA 7.2.2

ACHURADOS OS TALHÕES QUE OFERECEM MELHORES CONDIÇÕES
LOCACIONAIS PARA INSTALAÇÃO DE PRAÇAS DE CARVOEJAMENTO,

CONFORME HISTOGRAMA DA FIGURA 7.2.1

adquirir equipamentos adicionais, para carga e descarga de madeira e carvão, como guas e pds carregadeiras; dispositivos para a recuperação de subprodutos, como alcatrão; veículos de pequeno porte que são utilizados no interior das praças de baterias, além de uma administração criteriosa da mão-de-obra total disponível.

O processo de validação do sistema construído, tanto a nível teórico quanto em confronto com a realidade, foi conduzido até o ponto em que se tornou satisfatória a nossa convicção acerca do seu funcionamento correto.

Do estudo de realocização e redimensionamento de facilidades, voltado para uma situação específica, que acabamos de executar, ficaram valiosos ensinamentos, além de uma ferramenta de auxílio aos tomadores de decisão no trato com problemas complexos do mundo real. Por estas lições, observamos que importa muito compreender o problema através da manipulação de entes abstratos inerentes a estudos dessa natureza. Fica patente a inadequação de se utilizar um instrumento desses para dar uma solução única e definitiva para a questão abordada. Tal procedimento seria, sem dúvida, extremamente simplificado. Utilizá-lo para análises, experimentações e testes, parece o mais indicado, como ficou comprovado. Ao utilizar modelos, que são representações resumidas de algo concreto, pareceu-nos imperativo controlar o nível de abstração embutido nos métodos, a fim de evitar o risco de perder a relevância da

realidade. Entretanto, nossa ação exploratória se resguardou de que o desenvolvimento de novos procedimentos procura estender a base das técnicas disponíveis. Como se esperava e é natural, o modelo aqui tratado não contém a compreensão e o conhecimento completos do sistema real, ou pelo menos não consegue comunicá-los plenamente. Tal fato é consequência imediata da presença de fatores não quantificáveis comuns na realidade. Entretanto, os modelos e métodos formulados, que não dispensam o papel da experiência, do julgamento e da intuição no processo decisório, e permitem uma administração satisfatória da subjetividade humana, se apresentaram como um corpo integrado de hipóteses plausíveis que conduzem a conclusões úteis acerca do sistema estudado. Por fim, observamos:

i) É provável que a verdadeira essência da pesquisa operacional seja a de fornecer elementos para estudo, compreensão e análise dos problemas, em lugar, tão somente, de resolvê-los com uma solução definitiva que não suscite dúvidas.

ii) Na medida em que simplificamos a realidade, aceitamos não resolver o problema plenamente, em troca da sua compreensão completa e profunda.

iii) "É preciso interagir com a realidade". Eis o que captamos como a grande mensagem dos instrumentos metodológicos da pesquisa operacional enquanto ciência aplicada e na medida em que, como aqui, por sua natureza, refletem a grande conveniência de se utilizar

recursos informáticos de engenharia de sistemas no planejamento e gerenciamento da solução de problemas complexos de componentes do sistema produtivo.

APÊNDICE A

Dados Para Geração dos Problemas Simulados

APÊNDICE A

Dados Para Geração Aleatória dos Custos (de Transporte+Fixos) para os Problemas de Localização Não-Capacitados, Utilizados nos Experimentos Computacionais com os Algoritmos dos Capítulos IV e V.

CUSTOS

PROB.	DE TRANSPORTE (Distribuição Uniforme)		FIXOS (Distribuição Normal)	
	Intervalo		Média	Desv. Padrão
001	154.00	945.00	3452.00	1324.00
002	431.00	1243.00	2495.00	2613.00
003	329.00	1027.00	5786.00	1011.00
004	191.00	998.00	4293.00	999.00
005	254.00	1025.00	3967.00	1203.00
006	159.00	845.00	4873.00	2548.00
007	170.00	280.00	6318.00	948.80
008	731.00	946.00	3685.00	1859.80
009	916.00	1200.00	4573.00	1823.00
010	800.00	1400.00	6241.00	1985.00
011	500.00	1300.00	5469.00	946.00
012	150.00	484.00	3976.00	1000.00
013	120.00	260.00	2134.00	967.00
014	135.00	978.00	6135.00	2104.00
015	142.00	916.00	4758.00	2259.00
016	115.00	826.00	5832.00	2611.00
017	192.00	1400.00	3521.00	1887.00
018	138.00	613.00	2211.00	938.00
019	251.00	839.00	5246.00	2509.00
020	415.00	729.00	3165.00	2426.00
021	865.00	1000.00	4958.00	1719.00
022	509.00	786.00	3297.00	1587.00
023	356.00	468.00	4683.00	1998.80
024	415.00	729.00	5912.00	2000.00
025	211.00	659.00	5246.00	1000.00

Dados Para Geração Aleatória dos Custos (de Transporte+Fixos)
para os Problemas de Localização Não-Capacitados, Utilizados
nos Experimentos Computacionais com os Algoritmos dos Capítulos
IV e V.

CUSTOS

PROB.	DE TRANSPORTE (Distribuição Uniforme)		FIXOS (Distribuição Normal)	
	Intervalo		Média	Desv. Padrão
026	1200.00	1900.00	3514.00	2648.00
027	720.00	869.00	4853.00	985.00
028	135.00	427.00	6145.00	2736.00
029	247.00	1100.00	2254.00	1019.00
030	567.00	1150.00	4883.00	2315.00
031	324.00	890.00	3146.00	1010.00
032	465.00	723.00	2215.00	947.00
033	192.00	1020.00	4793.00	940.00
034	110.00	328.00	3925.00	958.00
035	827.00	1215.00	4751.00	2625.00
036	187.00	298.00	2343.00	2193.80
037	722.00	869.00	4752.00	1498.80
038	987.00	1040.00	5469.00	940.00
039	175.00	627.00	4315.00	1489.00
040	192.00	324.00	6273.00	2511.00
041	135.00	487.00	4972.00	2618.00
042	685.00	1015.00	2213.00	1487.00
043	985.00	1050.00	3865.00	980.80
044	429.00	813.00	6382.00	967.00
045	285.00	468.00	5967.00	2513.00
046	329.00	565.00	5713.00	2714.00
047	165.00	868.00	2864.00	1489.00
048	329.00	509.00	3948.00	976.00
049	645.00	1013.00	6282.00	1325.00
050	425.00	988.00	5148.00	1689.00

Dados Para Geração Aleatória dos Custos (de Transporte+Fixos) para os Problemas de Localização Não-Capacitados, Utilizados nos Experimentos Computacionais com os Algoritmos dos Capítulos IV e V.

CUSTOS

PROB.	DE TRANSPORTE (Distribuição Uniforme)		FIXOS (Distribuição Normal)	
	Intervalo		Media	Desv. Padrão
051	628.00	1428.00	9569.00	2257.00
052	815.00	989.00	2167.00	1975.00
053	187.00	890.00	6329.00	2089.00
054	141.00	379.00	4865.00	1627.80
055	445.00	612.00	3942.08	930.80
056	148.00	718.00	3221.00	1527.00
057	457.00	1219.00	5638.00	2496.00
058	356.00	825.00	4792.00	1359.00
059	780.00	1011.00	3158.00	2311.00
060	320.00	450.00	6782.00	1013.80
061	209.00	625.00	3293.00	2418.00
062	257.00	407.00	5462.00	950.00
063	404.00	1250.00	3481.00	2627.00
064	305.00	809.00	5972.00	1589.00
065	627.00	1320.00	3625.00	948.00
066	822.00	1400.00	2211.00	2089.00
067	165.00	402.00	6372.00	946.00
068	385.00	922.00	5323.00	1059.00
069	615.00	807.00	4815.00	2567.00
070	425.00	642.00	3963.00	1358.00
071	148.00	613.00	4721.00	947.00
072	352.00	1040.00	3624.00	1613.00
073	652.00	1031.00	5348.00	989.00
074	1017.00	1412.00	4689.00	2639.00
075	1020.00	1100.00	3576.00	2427.00

Dados Para Geração Aleatória dos Custos (de Transporte+Fixos) para os Problemas de Localização Não-Capacitados, Utilizados nos Experimentos Computacionais com os Algoritmos dos Capítulos IV e V.

CUSTOS

PROB.	DE TRANSPORTE (Distribuição Uniforme)		FIXOS (Distribuição Normal)	
	Intervalo		Média	Desv. Padrão
076	305.00	816.00	6325.00	1047.00
077	728.00	913.00	3521.00	930.00
078	525.00	702.00	4789.00	2145.00
079	349.00	417.00	5143.00	997.00
080	1011.00	1030.00	6789.00	1482.00
081	165.00	277.00	2318.00	1256.00
082	268.00	908.00	3197.00	1867.00
083	647.00	903.00	4852.00	2385.00
084	608.00	1017.00	3231.00	970.00
085	985.00	1300.00	6753.00	1089.00
086	746.00	614.00	3128.00	2635.00
087	324.00	810.00	4687.00	979.00
088	602.00	1025.00	5327.00	2375.00
089	351.00	709.00	3416.00	1267.00
090	286.00	628.00	7985.00	956.00
091	124.08	1013.00	5246.00	2473.00
092	442.00	516.00	1056.00	1237.00
093	312.00	1098.00	6375.00	2631.00
094	1041.00	1205.00	4562.00	937.00
095	646.00	857.00	5246.00	2058.00
096	207.00	352.00	3978.00	965.00
097	692.00	1075.00	2132.00	2016.00
098	1026.00	2045.00	6281.00	1012.00
099	851.00	947.00	3978.00	2658.00
100	1089.00	1206.00	4253.00	1683.00

APÊNDICE B

**Resultados das Análises Locacionais Comentadas
no Capítulo VI.**

LOCALIZACAO DINAMICA DE BATERIAS DE FCENCS PARA EXCUCAO INDUSTRIAL DE CARVAO VEGETAL
 CUSTO GINIO TOTAL 85715

ESTAGIO 1												
ABCC	CUSTC	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES)	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS
1	5	66562	441205.49	34	12 13 14 27 28 29 30 31 32 33 34 35	36 37 38 39 40 41	6 7 16 17 19 20 21 22 8 9 1 2	10 11 28 15 18				
ESTAGIO 2												
ABCC	CUSTC	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES)	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS
5	5	0										
*****PSEUDO DECISAO (VAZIA)*****												
ESTAGIO 3												
ABCC	CUSTC	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES)	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS
9	13	0										
*****PSEUDO DECISAO (VAZIA)*****												
ESTAGIO 4												
ABCC	CUSTC	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES)	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS
13	17	0										
*****PSEUDO DECISAO (VAZIA)*****												
ESTAGIO 5												
ABCC	CUSTC	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES)	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS	ATENDIDOS
17	22	15353	112494.51	15	3 4 5 23 24 25 44	41 42 43						

LOCALIZACAO DINAMICA DE BATERIAS DE FORNOS PARA PRODUCAO INDUSTRIAL DE CARVAO VEGETAL
 CUSTO OTIMO TOTAL 95972

ESTAGIO 1																						
ABCC	CUSTO	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS	6	7	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	6	7911.21	553700.00	15		6	7	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
						31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47

ESTAGIO 2																						
ABCC	CUSTO	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS	6	7	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
6	10	0																				

*****PSEUDO DECISAO (VAZIA)*****

ESTAGIO 3																						
ABCC	CUSTO	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS	6	7	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
10	14	0																				

*****PSEUDO DECISAO (VAZIA)*****

ESTAGIO 4																						
ABCC	CUSTO	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS	6	7	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
14	16	0																				

*****PSEUDO DECISAO (VAZIA)*****

ESTAGIO 5																						
ABCC	CUSTO	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS	6	7	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
18	22	0																				

*****PSEUDO DECISAO (VAZIA)*****

LOCALIZACAO DINAMICA DE BATEMIAS DE FORNOS PARA ESCUECAO INDUSTRIAL DE CARVAO VEGETAL
 CUSTO CTIMO TCTIAL 85018

ESTAGIO 1												
ARCC	CUSTO	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS							
3	32550	3164.50	240294.35	16	10 11 16 17 19 20 21 22 8 9 1 2							
ESTAGIO 2												
ARCC	CUSTO	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS							
3	34840	3164.71	220911.09	34	12 14 27 29 30 31 32 33 34 35 36 37							
				15	13 28							
ESTAGIO 3												
ARCC	CUSTO	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS							
6	17188	1582.00	112494.50	41	41 42 43							
				21	3 4 5 23 24 25 44							

LOCALIZACAO DINAMICA DE BARRIAS DE FORNOS PARA PRODUCAO INDUSTRIAL DE CARVAO VEGETAL

CUSTO C/CMC TOTAL 42624

ESTAGIO 1

ARCC	CUSTO	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS
1 2	4114	1582.50	108928.84	21	16 17 19 20 21 22

ESTAGIO 2

ARCC	CUSTO	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS
2 7	8846	1582.00	111365.51	8	6 7 8
				15	9 10 11 26 15 18 12
				8	8 1 2

ESTAGIO 3

ARCC	CUSTO	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS
7 12	5447	1582.01	110379.78	31	12 14 30 31 32
				27	13 27 28 29

ESTAGIO 4

ARCC	CUSTO	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS
12 17	7029	1582.70	110551.36	41	36 37 38 39 40 41
				34	32 33 34 35

ESTAGIO 5

ARCC	CUSTO	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS
17 22	17188	1582.00	112494.51	41	41 42 43
				21	3 4 5 23 24 25 44

LOCALIZACAO LAMINICA DE MATERIAS DE FORNOS PARA PRODUCAO INDUSTRIAL DE CARVAO VEGETAL
 CUSTO CLIMO TOTAL 98405

ESTAGIO 1																				
ABCC	CUSTC	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (SI)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS															
1	4	4746.51	330674.13			15	6	7	16	17	19	20	21	22	23	24	27	28	29	30
							31	32												

ESTAGIO 2																				
ABCC	CUSTC	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (SI)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS															
4	10	3164.70	223025.87			15	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	3	4		

ESTAGIO 3											
ABCC	CUSTC	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (SI)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS	*****PSEUDO DECISAO (VAZIA)*****					
10	14					*****PSEUDO DECISAO (VAZIA)*****					

ESTAGIO 4											
ABCC	CUSTC	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (SI)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS	*****PSEUDO DECISAO (VAZIA)*****					
14	16					*****PSEUDO DECISAO (VAZIA)*****					

ESTAGIO 5											
ABCC	CUSTC	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (SI)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS	*****PSEUDO DECISAO (VAZIA)*****					
18	22					*****PSEUDO DECISAO (VAZIA)*****					

LOCALIZACAO DINAMICA DE BATERIAS DE FORNOS PARA PRODUCAO INDUSTRIAL DE CARVAO VEGETAL
 CUSTO GILHO TOTAL 61195

ESTAGIO 1												
ABCC	CUSTO	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS							
1	3250	3164-50	220294-35	16	16	7	16	17	19	20	21	22
3						10	11	26	35	18	12	8
												9
												1
												2
ESTAGIO 2												
ABCC	CUSTO	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS							
3	0											
ESTAGIO 3												
ABCC	CUSTO	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS							
7	8035	1582-01	110379-78	34	12	14	27	29	30	31	32	
						15		13	28			
ESTAGIO 4												
ABCC	CUSTO	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS							
12	14792	1582-70	110531-36	34	32	33	34	35	36	37	38	39
												40
												41
ESTAGIO 5												
ABCC	CUSTO	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS							
17	25378	1582-00	112494-51	15	3	4	5	23	24	25	24	44
						34		41	42	43		

*****PSEUDO DECISAO (VAZIA)*****

LOCALIZACAO DINAMICA DE ENTERRIAS DE FURNOS PARA PRODUCAO INDUSTRIAL DE CARVAO VEGETAL

CRITERIO DE CUSIC REUTILIZADO

$$(CUSIC \text{ VIZI\u00c1VEL REUTILIZADO (J)}) = (CUSIC \text{ VARI\u00c1VEL (I,J)}) / ((INFLUENCIA \text{ DO VOLUME (I)}) / ((CUSIC \text{ FIC\u00c1O REUTILIZADO (J)}) - (CUSTO \text{ FIC\u00c1O (J)})) / ((INFLUENCIA \text{ DA S\u00d3RA DOS VOLUMES (I)}) / ((TOT. \text{ CARVO\u00c1RIAS})))$$

CUSIC (REAL) OTIMO TOTAL 98576
 CUSIC (REUZ) OTIMO TOTAL 51018

ESTAGIO 1

ABCC	CUSIC BEB2	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS
1	3	3164.50	220294.35		
		40944		8	6 7 16 19 20 21 8 1 2
		15271		35	17 22 9 10 11 26 15 18 12

ESTAGIO 2

ABCC	CUSIC BEB2	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS
3	5	3166.41	220911.14		
		40558		34	12 13 14 27 28 29 30 31 32 33 34 35
		18748		41	36 37 38 39 40 41

ESTAGIO 3

ABCC	CUSIC BEB2	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS
9	13				
		0			

*****PSEUDO DECISAO (VAZIA)*****

ESTAGIO 4

ABCC	CUSIC BEB2	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS
13	17				
		0			

*****PSEUDO DECISAO (VAZIA)*****

ESTAGIO 5

ABCC	CUSIC BEB2	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHOES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS
17	22	1582.00	112494.51		
		17576		41	41 42 43
		16399		8	3 4 5 23 24 25 44

LOCALIZACAO DINAMICA DE BATERIAS DE FORNOS PARA PRODUCAO INDUSTRIAL DE CARVAO VEGETAL

CRITERIO DO CUSIO REDUZIDO

{CUSTO FIC REDUZIDO(J)} = {CUSTO FIC(J)} / ((INFLUENCIA DA SOBRA DOS VOLUMES(I)) / ((TOT. CARVOARIAS))

{CUSTO VARIAVEL REDUZIDO(I,J)} = {CUSTO VARIAVEL(I,J)} / {INFLUENCIA DO VOLUME(I)}

CUSTO (REAL) OTIMO TOTAL 101140

CUSTO (REDZ) OTIMO TOTAL 75148

ESTAGIO 1												
ABCC	CUSIC	EEAI	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS						
1	3		3164.50	220294.35	8	10 11 16 17 19 20 21 22 6 9 1 2						
ESTAGIO 2												
ABCC	CUSIC	EEAI	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS						
3	10		4746.71	333405.65	34	12 13 14 17 18 19 20 21 22 30 31 32 33 34 35						
ESTAGIO 3												
ABCC	CUSIC	EEAI	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS						
10	14					42 43 44						
ESTAGIO 4												
ABCC	CUSIC	EEAI	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS						
14	15											
ESTAGIO 5												
ABCC	CUSIC	EEAI	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS						
18	22											

*****PSEUDO DECISAO (VAZIA)*****

*****PSEUDO DECISAO (VAZIA)*****

*****PSEUDO DECISAO (VAZIA)*****

LOCALIZACAO DINAMICA DE AREAS DE FURNOS PARA PRODUCAO INDUSTRIAL DE CARVAO VEGETAL

CRITERIO DO CUSTO REDUZIDO

$$(CUSTO FICHO REDUZIDO (J)) = (CUSTO FICHO (J)) / ((INFLUENCIA DA SOMA DOS VOLUMES (I)) / ((CUSTO VARIAVEL REDUZIDO (I, J)) = (CUSTO VARIAVEL (I, J)) / (INFLUENCIA DO VOLUME (I)))$$

$$CUSTO (REAL) CILINDRO TOTAL \quad 98578$$

$$CUSTO (REDZ) CILINDRO TOTAL \quad 51018$$

ESTAGIO 1

ABCC	CUSTO REDZ	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS
1	3	3164.50	220294.35		
		40442			8
		15271			15
					6
					7
					16
					19
					20
					21
					8
					1
					2

ESTAGIO 2

ABCC	CUSTO REDZ	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS
3	6	3164.71	220911.09		
		40558			34
		16748			41
					12
					13
					14
					27
					28
					29
					30
					31
					32
					33
					34
					35

ESTAGIO 3

ABCC	CUSTO REDZ	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	TALHES LOCALIZADOS	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS
6	8	1582.00	112494.50		
		17576			41
		16999			8
					41
					42
					43
					3
					4
					5
					23
					24
					25
					44

LOCALIZACAO DINAMICA DE BATERIAS DE FORNOS PARA FLOCULACAO INDUSTRIAL DE CARVAC VEGETAL

CALCULO DO CUSTO REDUZIDO

$$\{CUSTO FIXO REDUZIDO(J)\} = \{CUSTO FIXO(J)\} / \{INFLUENCIA DA SOMA DOS VOLUMES(I)\} / \{TOT. CAEVOARIAS\}$$

$$CUSTO (REAL) \text{ CILINDRO TOTAL} = 44742$$

$$CUSTO (REDZ) \text{ CILINDRO TOTAL} = 43786$$

ESTAGIO 1		TALHOES LOCALIZADOS		TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS	
ABCC	CUSTO REDZ	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	ABCC	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS
1	2	1582.50	108928.84	8	6 7 19 8
		4114		21	16 17 20 21 22
	3356				

ESTAGIO 2		TALHOES LOCALIZADOS		TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS	
ABCC	CUSTO REDZ	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	ABCC	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS
2	8	3184.01	221745.29	27	10 26 15 18 12 13 14 27 26 29 30 31
		16223		8	6 9 1 2 11
	14647				

ESTAGIO 3		TALHOES LOCALIZADOS		TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS	
ABCC	CUSTO REDZ	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	ABCC	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS
8	12				

ESTAGIO 4		TALHOES LOCALIZADOS		TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS	
ABCC	CUSTO REDZ	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	ABCC	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS
12	17	1582.70	110531.36	41	36 37 58 39 40 41
		7029		34	32 33 34 35
		11084			

ESTAGIO 5		TALHOES LOCALIZADOS		TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS	
ABCC	CUSTO REDZ	AREA EXPLORADA (HA)	VOLUME EXPLORADO (ST)	ABCC	TALHOES (OU BLOCOS DE TALHOES) ATENDIDOS
17	22	1582.00	112494.51	41	41 42 43
		17576		8	3 4 5 23 24 25 44
		14699			

*****PSEUDO DECISAO (VAZIA)*****

BIBLIOGRAFIA

BIBLIOGRFFIR

- (1) AHO, R. V., HOPCROFT, J. E., ULLMAN, J. D., The Design and Analysis of Computer Algorithms, Addison-Wesley, 1974.
- (2) AKINC, U., KHUMAWALA, B. M., An Efficient Branch and Bound Algorithm for the Capacitated Warehouse Location Problem, Management Science, 23, 585-594, 1977.
- (3) ASSOCIAÇÃO BRRSILEIRR DE METAIS, Siderurgia Brasileira a Carvão Vegetal, II Impressão, São Paulo, 1975.
- (4) RUBIN, J. P., EKELAND, I.? Estimates of the Duality Gap in Nonconvex Optimization, Mathematics of Operations Research, vol. 1 no. 3, 225-245, 1976.
- (5) BAKER, B. M., Linear Relaxations of the Capacitated Warehouse Location Problem, Journal of the Operational Reçearch Society, vol. 33, 475-479.
- (6) BARCELO, J., CASANOVAS, J., A Heuristic Lagrangean Algorithm for the Capacitated Location Problem, European Journal of Operational Research, vol. 15, 212-226, 1984.
- (7) BAZARAA, M. S., JARVIS, J. J., Linear Programming and Network Flows, John Wiley 8 Sons, 1977.

- (8) BAZARAA, M. S., SHETTY, C. M., Nonlinear Programming, Theory and Algorithms, John Wiley & Sons. 1979.
- (9) BELLMAN, R. E., Dynamic Programming, Princeton University Press, Princeton, N. J., USA, 1957.
- (10) BENDERS, J. F., Partitioning Procedures for Solving Mixed Variables Programming Problems. Numerische Mathematik, 4, 238-252, 1962.
- (11) BILDE, O., KRARUP, J., Sharp Lower Bounds and Efficient Algorithms for the Plant location Problems, Annals of Discrete Mathematics, vol. 1, 79-97, 1977.
- (12) BOFFEY, T. E., KARKAZIS, J., p-Median and Multi-Medians, Journal of the Operational Research Society, vol. 35, no. 1, 57-64, 1984.
- (13) BRUCKER, F., NP-Complete Operations Research Problems and Approximations Algorithms, Zeitschrift für Operations Research. Band 23, 73-94, 1979.
- (14) CASTI, J., RICHARDSON, M., LARSON, R. Dynamic Programming and Parallel Computers, Journal of Optimization Theory and Applications, 12, 423-438, 1973.
- (15) CAVALIER, T. M., SHERALI, H. D., Sequential Location-Allocation Problems on Chains and Trees with Probabilistic Link Demands, Mathematical Programming, 32, 249-277, 1985.

- (16) CHRISTOFIDES, N., Graph Theory, an Algorithmic Approach,
Academic Press, 1975.
- (17) CHRISTOFIDES, N., BEASLEY, J. E., R Tree Search
Algorithm for the p-Median Problem, European
.....
Journal of Operational Research, 10, 196-204,
1982.
- (18) CHRISTOFIDES, N., BEASLEY, J. E., Extensions to a
Lagrangian Relaxation Approach for the
Capacitated Warehouse Location Problem, European
.....
Journal of Operational Research, 12, 19-28, 1983.
- (19) CHRISTOFIDES, N., MINGOZZI, A., TOTH, P., SANDI, C.,
(Editors), Combinatorial Optimization, John
Wiley & Sons, 1979.
- (20) CHO, D. C., JOHNSON, E. L., PADBERG, M. W., RAO, M. R.,
On the Uncapacitated Location Problem I - Valid
.....
Inequalities, and Facets, Rapport de Recherche,
IRIA, no. 86, 1981.
- (21) CHO, D. C., PADBERG, M. W., RAO, M. R., On the
Uncapacitated Plant Location Problem II: Facets
.....
and Lifting Theorems, Rapport de Recherche, IRIA,
.....
no. 87r 1981.
- (22) CHVATAL, V., Linear Programming, W. H. Freeman and
Company* 1983.

- (23) COELHO? J. D., CAPITIVO, M. E., R Lagrangean
Decomposition Algorithm for the p-Median Problem,
 Tenth Triennial Conference on Operations
 Research, IFORS'84, Washington D. C., USA, 1984.
- (24) CONFORTI, M., CORNUEJOLS, G., Submodular Set Functions,
Matroid and Greed Algorithm: Tight Worst-Case
Bound and Some Generalizations of Rado-Edmonds
Theorem, Discrete Applied Mathematics, vol. 7,
 no. 3, 251-274, 1984.
- (25) COOK, S. A., The Complexity of Theorem Proving
Procedures, Proc. 3rd ACM Symp. on the Theory of
Computing, ACM, 151-158, 1971.
- (26) CORNUEJOLS, G., FISHER, M. L., NEMHAUSER, G. L.,
 Location of Bank Account to Optimize Float: An
 Analytic Study of Exact and Approximate
Algorithms, Management Science, 23, 789-810,
 1977.
- (27) CORNUEJOLS, G., NEMHAUSER, G. L., WOLSEY, L. A., R
 Canonical Representation of Simple Plant Location
 Problem and its Applications, Siam Journal on
Algebraic and Discrete Methods, vol. 1, no. 3,
 261-272, 1980.
- (28) CORNUEJOLS, G., NEMHAUSER, G. L., WOLSEY, L. A., The
Uncapacitated Facility Location Problem, Graduate
 School of Industrial Administration, Carnegie-
 Mellon University, Management Science Research
 Report no. MSRR493, 1983.

- (29) CORNUEJOLS. G., THIZY, J. M., Some Facets of the Simple Plant Location Polytope, Mathematical Programming, 23, 50-74, 1982.
- (30) CÔTÉ, G., LAUGHTON, M. A., Large-Scale Mixed Integer Programming: Benders-type Heuristics, European Journal of Operational Research, vol. 16, 327-333, 1984.
- (31) CROWDER, H., JOHNSON, E. L., FADBERG, M., Solving Large-Scale Zero-One Linear Programming Problems, Operations Research, vol. 31, no. 5, 803-834, 1983.
- (32) DAELLENBACH, H. G., KLUYVER, C. A., Note on Multiple Objective Dynamic Programming, Journal of the Operational Research Society, vol. 31, 591-594, 1980.
- (33) DANTZIG, G. B., Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, N. J., USA, 1963.
- (34) DENARDO, E. V., Dynamic Programming, Models and Application, Prentice-Hall, N. J., 1982.
- (35) DREYFUS, S. E., An Appraisal of Some Shortest Path Algorithm, Operations Research, vol. 17, 395-412, 1969.
- (36) EFROYMSON, M. A., RAY, T. L., A Branch and Bound Algorithm for Plant Location, Operations Research, 14, 361-368, 1966.

- (37) ERLINKOTTER, D., A Comparative Study of Approaches to
Dynamic Location Problems, European Journal of
Operational Research, 6, 133-143, 1981.
- (38) ERLINKOTTER, D., A Dual-Based Procedure for
Uncapacitated Facility Location, Operations
Research, 26, 992-1009, 1978.
- (39) ERLINKOTTER, D., Facility Location with Price-Sensitive
Demands: Private, Public, and Quasi-Public,
Management Science, vol. 24, no. 4, 378-386,
1977.
- (40) ERLINKOTTER, D., ROGERS, J. S., Sequencing Competitive
Expansion Projects, Operations Research, vol. 25,
no. 6, 937-951, 1977.
- (41) EVANS, J. R., A Network Decomposition/Aggregation
Procedure for a Class of Multicommodity
Transportation Problems, Networks, vol. 13, 197-
205, 1983.
- (42) EVANS, J. R., The Multicommodity Assignment Problem: R
Network Aggregation Heuristic, Computer and
Mathematics with Applications, vol. 7, 187-194,
1981.
- (43) EVERETT, H., Generalized Lagrange Multiplier Method for
Solving Problems of Optimum Allocation of
Resources, Operations Research, 11, 399-417,
1963.

- (44) FISHER, M. L., HOCHBAUM, D. S., Probabilistic Analysis
 of Planar k-Median Problem, Mathematics of
 Operations Research, 5, 27-34, 1980.
- (45) FISHER, M. L., The Lagrangian Relaxation Method for
 Solving Integer Programming Problems, Management
 Science, 27, 1-18, 1981.
- (46) FISHER, M. L., Worst-Case Analysis of Heuristics
 Algorithm, Management Science, 26, 1-17, 1980.
- (47) FLOYD, R. W., Algorithm 97 - Shortest Path,
 Communication of ACM, 5, p.345, 1960.
- (48) FORREST, J. J. H., HIRST, J. P. H., TOMLIN, J. A.,
 Practical Solution of Large Mixed Integer
 Programming Problems with Umpire, Management
 Science, vol. 20, no.5, 736-773, 1974.
- (49) FRANCIS, R. L., MCGINNIS, L. F., WHITE, J. A.,
 Locational Analysis, European Journal of
 Operational Research, 12, 220-252, 1983.
- (50) FRANCIS, R. L., WHITE, J. A., Facility Layout and
 Location, Prentice-Hall, 1974.
- (51) FRIEZE, A. M., R Cost Function for Plant Location
 Problems, Mathematical Programming, 7, 245-248,
 1974.
- (52) GALVAO, R. D., R Dual-Bounded Algorithm for the p-Median
 Problem, Operations Research? vol. 28, no. 5,
 1112-1121, 1980.

- (53) GALVÃO, R. D., ROTHSTEIN, S., The Generalized p-Median Problem, Preprints, II International Symposium on

Location Decisions (ISOLDE-81), Skodsborg,
Dinamarca, 123-146, 1981.
- (54) GAREY, M. R., JOHNSON, D. S., Computers and
Intractability - A Guide to the Theory of NP-
.....
Completeness, W. H. Freeman and Co., 1979.

- (55) GAREY, M. R., JOHNSON, D. S., "Strong" NP-Completeness
Results: Motivations, Examples and Implications,

J. ACM, vol. 25, no. 3, 499-508, 1978.
- (56) GARFINKEL, R. S., NEMHRUSER, G. L., Integer Programming,

John Wiley & Sons Inc., 1972.
- (57) GAVISH, B., On Obtaining the "Best" Multiplier for a

Lagrangian Relaxation for Integer Programming,

Computers & Operations Research, vol. 5, no. 1,
55-71, 1978.
- (58) GEOFFRION, A. M., Duality in Nonlinear Programming: A
Simplified Applications-Oriented Development,
.....
Siam Review, vol. 13, no. 1, 1-37, 1971.
- (59) GEOFFRION, R. M., Lagrangian Relaxation for Integer

Programming, Mathematical Programming Study, 2,
82-114, 1974.

- (60) GEOFFRION, A. M., GRAVES, G., Multicommodity
Distribution System Design by Benders
.....
Decomposition, Management Science, vol. 20, no.

5, 822-844, 1974.
- (61) GEOFFRION, A. M., McBRIDE, R., Lagrangean Relaxation
.....
Applied to Capacitated Facility Location
.....
Problems, RIIIE Transactions, vol. 10, no. 1,
40-47r 1978.
- (62) GOFFIN, J. L., On Convergence Rates of Subgradient
.....
Optimization Methods, Mathematical Programming,
13, 329-347, 1977.
- (63) GONDRAN, M., MINOUX, H., Graphs and Algorithms, John
Wiley & Sons, 1984.
- (64) GUIGNARD, M., Fractional Vertices, Cuts, and Facets of

the Simple Plant Location Problem, Mathematical

Programming, 12, 150-162, 1980.
- (65) GUIGNARD, M., SPIELBERG, K., A Direct Dual Method for

the Mixed Plant Location Problem with some Side

Constraints, Mathematical Programming, 17, 198-

228, 1979.
- (66) HAKIMI, S. L., Optimal Locations of Switching Centers
and Medians of a Graph, Operations Research, vol.

12, 450-459, 1964.
- (67) HANDLER, G. Y., MIRCHANDANI, P. E., Location on
Networks, MIT Press, Cambridge, Massachusetts,

1979.

- (68) HANSEN, P., LABBE, M., FEETERS, D., THISSE, J. F.,
Single Facility Location on Network, School on
Combinatorial Optimization, Rio de Janeiro, 8-19,
July, 37p., 1985.
- (69) HELD, M., KARP, R. M., The Traveling Salesman Problem
and Minimum Spanning Trees, Operations Research,
vol. 18, 1138-1162, 1970.
- (70) HELD, M., KARP, R. M., The Traveling Salesman Problem
and Minimum Spanning Trees: Part II, Mathematical
Programming, 01, 6-25, 1971.
- (71) HELD, M., WOLFE, P., CROWDER, H. P., Validation of
Subgradient Optimization, Mathematical
Programming, 6, 62-88, 1974.
- (72) HELMAN, P., ROSENTHAL, R., A Comprehensive Model of
Dynamic Programming, Siam Journal on Algebraic
and Discrete Methods, vol. 6, no. 2, 319-344,
1985.
- (73) HOCHBAUM, D., Heuristic for the Fixed Cost Median
Problem, Mathematical Programming, 22, 148-162,
1982.
- (74) HODGSON, M. J., WONG, R. T., HONSAKER, J., The p-Median
Problem on an Inclined Plane, Working Paper,
Purdue University, 1984.
- (75) HOROWITZ, E., SAHNI, S., Fundamentals of Computer
Algorithms, Computer Science Press, 1984.

- (76) HOROWITZ, E., SAHNI, S., Fundamentals of Data Structures in Pascal, Computer Science Press, 1984.
- (77) HU, T. C., Combinatorial algorithms, Addison-Wesley Publishing Company, 1982.
- (78) HU, T. C., Integer Programming and Network Flows, Addison-Wesley, 1962.
- (79) JACOBSEN, S. K., Heuristics for the Capacitated Plant Location Model, European Journal of Operational Research Research, vol. 12, 253-261, 1983.
- (88) KANNAN, R., Polynomial Time Aggregation of Integer Programming Problems, J. ACM, vol. 30, no. 1, 133-145, 1983.
- (81) KARIIV, O., HAKIMI, S. L., An Algorithmic Rpproach to Network Location Problems I: The p-Centers, Siam Journal of Rpplied Mathematics, vol. 37, no. 3, 513-538, 1979.
- (82) KARIIV, O., HAKIMI, S. L., An Algorithmic Rpproach to Network Location Problems II: the p-Medians, Siam Journal of Applied Mathematics, vol. 37, no.3, 539-560, 1979.
- (83) KARKAZIS, J., BOFFEY, T. E., The Multi-commodity Facilitieç Location Problem, Journal of Operational Research Society, 32, 803-814, 1981.

- (84) KARP, R. M., HELD, M., Finite State Processes and Dynamic Programming, Siam Journal on Applied Mathematics, 15, 693-718, 1967.
- (85) KARP, R. M., On the Complexity of Combinatorial Problems, Networks, no. 5, 45-68, 1975.
- (86) KARP, R. M., Reducibility among Combinatorial Problems, Complexity of Computer Computation, Plenum Press, 85-103, 1972.
- (87) KARWAN, M. H., RARDIN, R. L., Surrogate Dual Multiplier Search Procedures in Integer Programming, Operations Research, vol. 32, no. 1, 1984.
- (88) KELLY, D. L., KHUMAWALA, B. M., Capacitated Warehouse Location with Concave Costs, Journal of the Operational Research Society, vol. 33, 817-826, 1982.
- (89) KENNINGTON, J. L., HELGASON, R. V., Algorithms for Network Programming, John Wiley & Sons, 1980.
- (90) KHUMAWALA, B. M., An Efficient Branch and Bound Algorithm for the Warehouse Location Problem, Management Science, 18, 718-731, 1972.
- (91) KHUMAWALA, B. M., KELLY, D. L., Warehouse Location with Concave Costs, Infor, vol. 12, no. 1, 55-65, 1974.
- (92) KLEE, V., Combinatorial Optimization: What is the State of the Art?, Mathematics of Operations Research, vol. 5, no. 1, 1-26, 1980.

- (93) KNUTH, D., Fundamental Algorithms, The Art of Computer Programming, vol. 1, 2nd Ed., Addison-Wesley,
1976.
- (94) KOLEN, A., Solving Covering Problems and the
Uncapacitated Plant Location Problem on Trees,
European Journal of Operational Research, 12,
266-278, 1983.
- (95) KRARUP, J., PRUZAN, P. M., Selected Families of Location
Problems, Annals of Discrete Mathematics, 5, 327-
387, 1979.
- (96) KRARUP, J., PRUZAN, P. M., Simple Plant Location
Problem: Survey and Syntesis, European Journal of
Operational Research, 12, 36-81, 1983.
- (97) KUEHN, A. A., HAMBURGER, M. J., A Heuristic Program for
Locating Warehouses, Management Science, 9, 643-
666, 1963.
- (98) LASDON, L.S., Optimization Theory for Large Systems,
Macmillan P. Co., 1970.
- (99) LAWLER, E. L., Combinatorial Optimization: Networks and
Matroids, Holt, Rinehart and Winston, 1976.

- (100) LENSTRA, J. K., RINNOOY KAN, R. H. G., BOAS, P. V. Em?
An Appraisal of Computational Complexity for
Operations Researchers, European Journal of
Operational Research, vol. 11, no. 3, 201-210,
1982.

- (101) LORIE, J., SAVAGE, L. J., Three Problems in Capital
Rationing, Journal of Business, 28, 229-239, 1955.
- (102) LUCCHESI, C. L., et alli, Respectos Teóricos da
Computação, Projeto Euclides, IMPA, 1979.
- (103) LUENBERGER, D. G., Introduction to Linear and Nonlinear
Programming, Addison-Wesley, 1973.
- (104) LUENBERGER, D. G., Optimization by Vector Space Methods,
John Wiley R Sons, 1969.
- (105) MACHADO, C. C., Planejamento e Controle de Custos na
Exploração Florestal, Universidade Federal de
Viçosa, 1984.
- (106) MACULAN, N., Programação Linear Inteira, Coppe/UFRJ,
1978.
- (107) MACULAN, N., Programmation Linéaire en Nombres Entiers,
1ère Partie, Publication 486, Département
D'Informatique et Recherche Opérationnelle,
Université de Montréal, 1983.
- (108) MACULAN, N., Relaxation Lagrangienne: Le Problème du
Knapsack - INFOR (Canadian Journal of
Operational Research and Information Processing),
vol. 21, no. 4, 315-327, 1983.
- (109) MAGNANTI, T. L., WONG, R. T., Rccelerated Benders
Decomposition: Algorithmic Enhancement and Model
Selection Criteria, Operations Research, 29, 464-
484, 1981.

- (110) MAHEY, P., Subgradient Techniques and Combinatorial Optimization, School on Combinatorial Optimization, Rio de Janeiro, 8-19 July, 33p., 1985.
- (111) MATEUS, G. R., BORNSTEIN, C. T., Um Algoritmo Guloso para o Problema de Localização Não-Capacitado, Relatórios Técnicos do Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, Coppe/UFRJ, ES-06/81, 1981.
- (112) MAVRIDES, L. P., An Indirect Method for the Generalized k-Median Problem Applied to Lock-Box Location, Management Science, vol. 25, 990-996, 1979.
- (113) MINIEKA, E., The Centers and Medians of a Graph, Operations Research, vol. 25, 641-650, 1977.
- (114) MINOUX, M., Programmation Mathématique, Théorie et Algorithmes, Tome 2, Dunod, 1983.
- (115) MIRZAIAN, A., Lagrangian Relaxation for the Star-Star Concentrator Location Problem: Approximation Algorithm and Bounds, Networks, vol. 15, 1-20, 1985.
- (116) MITTEN, L. G., Composition Principles for Synthesis of Optimal Multi-stage Processes, Operations Research, 12, 610-619, 1964.

- (117) MULVEY, J. M., BECK, M. P., Solving Capacitated Clustering Problems, European Journal of Operations Research, 18, 339-348, 1984.
- (118) MULVEY, J. M., CROWDER, H., Cluster Analysis: An Application of Lagrangian Relaxation, Management Science, vol. 25, 329-340, 1979.
- (119) MURTY, K. G., Linear and Combinatorial Programming, John Wiley & Sons, 1976.
- (120) NARULA, S. C., OGBU, U. I., SAMUELSSON, H. M., An Algorithm for the p-Median Problem, Operations Research, 25, 709-713, 1977.
- (121) NEEBE, A. W., A Branch and Bound Algorithm for the p-Median Transportation Problem, Journal of the Operational Research Society, 29, 989-995, 1978.
- (122) NEEBE, A. W., KHUMAWALA, B. M., An Improved Algorithm for the Multicommodity Location Problem, Journal of Operational Research society, 32, 143-149, 1981.
- (123) NEMHAUSER, G. L., Introduction to Dynamic Programming, John Wiley R Sons, 1966.
- (124) NEMHAUSER, G. L., WOLSEY, L.A., An Analysis of Approximations for Maximizing Submodular Set Functions I, Mathematical Programming, 14, 265-294, 1978.

- (125) NEMHAUSER, G. L., WOLSEY, L. R. An Analysis of
Approximations for Maximizing Submodular Set
Functions II, Mathematical Programming Study, 8,
73-87, 1978.
- (126) O'HEIGEARTAIGH, M., LENSTRA, J. K., RINNOOY KAN, A.
H.G., Combinatorial Optimization Annotated
Bibliographies, John Wiley & Sons, 1985.
- (127) ORLIN, J. B., Maximum - Throughput Dynamic Network
Flows, Mathematical Programming, 27, 214-231,
1983.
- (128) PAGE, E. S., WILSON, L. B., Information Representation
and Manipulation in a Computer, Cambridge
University Press, 1973.
- (129) PAPANIMITRIOU, C. H., On the Complexity of Integer
Programming, J. ACM, vol. 28, no. 4, 765-7681
1981.
- (130) PAPANIMITRIOU, C. H., STEIGLITZ, K., Combinatorial
Optimization Algorithms and Complexity, Prentice-
Hall, Inc., 1982.
- (131) PAPANIMITRIOU, C. W., Worst-case and Probabilistic
Analysis of Geometric Location Problem, Siam
Journal of Comp., 10, 542-557, 1981.
- (132) PATEL, N. R., Locating Rural Social Service Centers in
Indiana, Management Science, 25, 22-30, 1979.

- (133) PRULR JUNIOR, G. G., BORNSTEIN, C. T., Complexidade de Algoritmos e Problemas NP-Completos em Otimização Combinatória, Relatórios Técnicos do Programa de Engenharia de Sistemas e Computação - Coppe/UFRJ, ES-25/83, 1983.
- (134) PAULA JUNIOR, G. G., Contribuição às Aplicações dos Modelos de Recobrimento e Particionamento em Programação Inteira, Tese M.Sc., Coppe/UFRJ, 1978.
- (135) PAULA JUNIOR, G. G., PEREIRA, A. R., Dimensionamento de uma Frota de Caminhões para Transporte de Carvão Vegetal por meio da Programação Linear, IPEF, no. 21, 85-95, 1980.
- (136) PAULA JUNIOR, G. G., PEREIRA, A. R., Otimização do Transporte de Carvão Vegetal no Vale do Jequitinhonha, MG, XIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, Vitória, ES, Anais: 548-563, 1981.
- (137) PRULR JUNIOR, G. G., Problemas de Localização: Alguns Tópicos de Interesse, Exame de Qualificação ao Doutorado? Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, Coppe/UFRJ, 1983 (Não publicado).
- (138) PRULR JUNIOR, G. G., Relaxação Lagrangeana: Fundamentos e Aplicação, Exame de Qualificação ao Doutorado, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação - Coppe/UFRJ, 1983, (Não publicado).

- (139) PEREIRA, A. R., PRULR JUNIOR, G. G., Análise do
Desempenho de Caminhões com Capacidade de Carga
Variada em Função de Diferentes Tipos de
Caminhões no Transporte de Carvão Vegetal,
.....
Boletim Técnico no. 11, SIF, Viçosa, 1981.
- (140) PEREIRA, A. R., PRULR JUNIOR, G. G., Influência da
Produtividade Florestal nos Custos de Transporte
.....
de Carvão Vegetal no Estado de Minas Gerais?
.....
Brasil Florestal? no. 55, 15-28, 1983.
- (141) PEREIRA, A. R., PRULR JUNIOR, G. G., LADEIRA, H. P., Uma
Análise de Pós-Otimização do Transporte de Carvão
.....
Vegetal no Estado de Minas Gerais? Revista
.....
arvore? vol. 5, no. 2, 135-147, 1981.
- (142) PEREIRA, A. R., REZENDE, J. L. P., Custo Comparativo da
.....
Produção de Energia Derivada da Lenha? Semindrio
.....
IUFRO Sobre o Papel das Florestas Plantadas nos
Neotrópicos como Fonte de Energia? 30p, Viçosa,
IUFRO/UFV/MAB, 1983.
- (143) PEREIRA, A. R., VALENTE, O. F., Estudo Preliminar
Comparativo entre Custos de Gusa Líquido a Partir
.....
de Coque e Carvão Vegetal? Terceiro Relatório de
.....
Progresso - Carvão Vegetal? Cobrapi, Projetos
Industriais? 1982.

- (144) PLANE, D. R., HENDRICK, T. E., Mathematical Programming
and the Location of Fire Companies for the Denver
Fire Department, Operations Research, 25, 563-
578, 1977.
- (145) POLJAK, B. T., A General Method for Solving Extremum
Problems, Soviet. Math. Dokl., vol. 8, 593-597,
1967.
- (146) RAGGI, L. A., GALVÃO, R. D., Um Estudo da Performance do
Método de Otimização de Subgradientes em
Problemas de Localização o Capacitados, XVI
SBPO, Anais 317-330, Florianópolis, 1983.
- (147) REVELLE, C., MARKS, D., LIEBMAN, J. C., An Analysis of
Private and Public Sector Location Models,
Management Science, vol. 16, 692-707, 1970.
- (148) RIBEIRO, C. C., Algorithmes de Recherche de Plus Court
Chemins avec Contraintes: Étude Théorique,
Implémentation et Parallélisation, Thèse Docteur
Ingénieur, École Nationale Supérieur de
Télécommunications, Paris, 1983.
- (149) RIBEIRO, C. C., Parallel Computer Models and
Combinatorial Algorithms, School on Combinatorial
Optimization, Rio de Janeiro, 8-19 July, 80p.,
1985.

- (150) RO, H., TCHA, D., R Branch and Bound Algorithm for Two

Level Uncapacitated Facility Location Problem
with some Side Constraints, European Journal of
Operational Research, vol. 18, 349-358, 1984.
- (151) ROCKAFELLAR, R. T., Convex Analysis, Princeton
University Press, 1970.
- (152) ROCKAFELLAR, R. T., La Theorie des Sous-gradients et ses

Applications a L'Optimisation, Functions

Convexes et Non Convexes, Université de Montréal,

1979.
- (153) ROODMAN, G. M., SCHWARZ, L. B., Optimal and Heuristic

Facility Phase-Out Strategies, AIIE Transactions,

vol. 7, no. 2, 177-184, 1975.
- (154) ROY, T. J. V., Cross Decomposition for Mixed Integer

Programming, Mathematical Programming, 25, 46-63,

1983.
- (155) ROY, T. J. V., ERLINKOTTER, D., R Dual-Based Procedure

for Dynamic Facility Location, Management

Science, vol. 28, no. 1a, 1091-1105, 1982.
- (156) SAHNI, S. HOROWITZ, E. Combinatorial Problems:

Reducibility and Approximation, Operations

Research, vol. 26, no. 5, 718-759, 1978.
- (157) SALKIN, H. M., Integer Programming, Rddison Wesley,

1975.

- (158) SCHRAGE, L., Implicit Representation of Variable Upper
 Bounds in Linear Programming, Mathematical

 Programming Study, 4, 118-132, 1975.
- (159) SCHREUDER, G. F., BARE, B. B., BRIGGS, D. G., ROISE, J.
 P., Optimizing the Size and Standard of Road

 Systems for Forest Harvesting, Using Dynamic
 Programming, TIMS XXVI International Meeting,
 Copenhagen? 1984.
- (160) SEDGEWICK, R., Algorithms, Addison-Wesley, 1983.

- (161) SERRA, P., TABKHA, I., Facility-Fixing Rules for the

 Uncapacitated Location Problem, School on

 Combinatorial Optimization. Rio de Janeiro, 8-19
 July, 1985.
- (162) SHANNON, R. E., System Simulation: The Art and Science,

 Prentice-Hall, 1975.
- (163) SHAPIRO, J. F., A Survey of Lagrangean Techniques for

 Discrete Optimization, Annals of Discrete

 Mathematics, 5, 113-138, 1979.
- (164) SHAPIRO, J. F., Generalized Lagrange Multipliers in

 Integer Programming, Operations Research, vol.

 19, 68-76, 1971.
- (165) SHAPIRO, J. F., Mathematical Programming Structures and

 Algorithms, John Wiley & Sons? 1979.

- (166) SHOR, N. Z., On the Rate of Convergence of the

 Generalized Gradient Method, Kibernetika, 4, 79-

 80, 1968.
- (167) SLATER, P. J., On Locating a Facility to Service Areas
 within a Network, Operations Research, vol. 29,

 523-531, 1981.
- (168) SPIELBERG. K., Algorithms for the Simple Plant-Location

 Problem with some Side Conditions, Operations

 Research, 17, 85-111, 1969.
- (169) SZWARCFITER, J. L., Grafos e Algoritmos Computacionais,

 Editora Campos, 1984.
- (170) STOER, J., WITZGALL, C., Convexity and Optimization in

 Finite Dimensions I, Springer Verlag, 1970.

- (171) TANSEL, B. C. FRANCIS. R. L. LOWE. T. J., Location on
 Networks: A Survey. Part II: The p-Center and p-

 Median Problems, Management Science, vol. 29, no.
 4, 482-497, 1983.
- (172) TANSEL, B. C. FRANCIS. R. L. LOWE, T. J., Location on
 Networks: Survey. Part II: Exploiting Tree

 Networks Structure, Management Science, vol.

 29, no. 4, 498-511, 1983.
- (173) TARJAN, R. E. Complexity of Combinatorial Algorithms,
 Siam Review, vol. 20, no. 3, 457-491, 1978.

- (174) TRUBE NETO? M., Um Modelo de Programação Linear para
Planejamento de Florestas de Eucaliptos, Pesquisa
Operacional, vol.4, no. 1, 19-38, 1984.
- (175) TEITZ, M. B., BART, P., Heuristic Methods for Estimating
the Generalized Vertex Median of a Weighted
Graph, Operations Research, 16, 955-961, 1968.

- (176) TENENBAUM, M. R. AUGENSTEIN, M. J., Data Structures
Using Pascal, Prentice-Hall, 1981.

- (177) TODD, H. J., An Implementation of the Simplex Method for
Linear Programming Problems with Variable Upper
Bounds, Mathematical Programming, 23, 34-49,

 1982.
- (178) TONINELLO, S. L., Modelo Simplificado de Produção de
Carvão, Cia. Agrícola e Florestal Santa Bárbara,
Belo Horizonte, MG, 1984.
- (179) TOREGAS, C., SWAIN, R., REVELLE, C., BERGMAN, L.,
Location of Emergency Service Facilities,

Operations Research, 19, 1366-1373, 1971.
- (180) WEINTRAUB, A., GUITART, S., KOHN, V., Investment
Planning in Forest Industries: R Hierarchical

Approach, Serie Documentos de Trabajo, no. 6,
Facultad de Ciencias Fisicas y Matematicas,
Universidad de Chile, 1983.
- (181) WELSH, D. J. A., Matroid Theory, Academic Press, 1976.

- (182) WESOLOWSKY, G. O., TRUSCOTT, W. G., The Multiperiod
Location-Rallocation with Relocation of
Facilities, Management Science, vol. 22, no. 1,
57-65, 1975.
- (183) WIRTH, N., Algorithms + Data Structures = Programs,
Prentice-Hall, 1976.
- (184) WONG, R. T., Recent Advances in Location and Network
Design Models for Transportation Planning,
Working Paper, Krannert Graduate School of
Mangement, Purdue University, 1984.
- (185) WONG, R. T., Recent Research on Location and Network
Design Problems: An Annotated Bibliography,
Proceedings of the Summer School on Combinatorial
Optimization, Dublin, 1983.
- (186) ZEMEL, E., Probabilistic Rnalysis of Geometric Location
Problem, Siam Journal on algebraic and Discrete
Methods, vol. 6, no. 2, 189-200, 1985.
- (187) ZIPKIN, F. H. Rggregation and Disaggregation in Convex
Network Problems, Networks, vol. 12, 101-117,
1982.