

OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES
COM APLICAÇÃO A POLÍTICAS DE PESCA

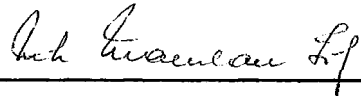
Antonio Clécio Fontelles Thomaz

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.) EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:



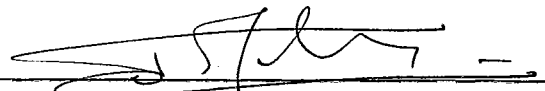
Prof. João Lauro Dorneles Facó
Presidente



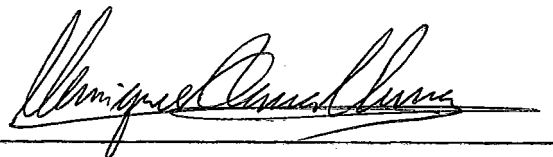
Prof. Nelson Maculan Filho



Prof. Antonio Adauto Fonteles Filho



Prof. Philippe Mahey



Prof. Henrique Pacca Loureiro Luna

THOMAZ, ANTONIO CLÉCIO FONTELLES

Otimização de Sistemas Dinâmicos Não-Lineares com
Aplicação a Políticas de Pesca (Rio de Janeiro) 1986.

, p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de
Sistemas e computação, 1985).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro.

COPPE.

I. Otimização de Sistemas Dinâmicos Aplicados a
Pesca.

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

A minha esposa Diana que compartilhou comigo as alegrias e tristezas, me encorajando no dia-a-dia dessa jornada.

À meus filhos Daniel, Izabel e Gustavo, com todo o meu afeto.

À meus pais:

*José Isaias de Thomaz Lourenço,
professor, educador e poeta
(in memoriam) e à Mania Cacilda
Thomaz com todo carinho.*

Aos meus irmãos: Celeste, Cēlio
Cefas e Celso pelo apoio que
sempre me dedicaram.

MINHA HOMENAGEM AO DESCONHECIDO PESCADOR SEM O QUAL NÃO SERIA
POSSIVEL A REALIZAÇÃO DA PARTE PRÁTICA DESSE TRABALHO



AGRADECIMENTOS

Quero expressar meus agradecimentos ao Professor João Lauro Dornelles Facó pelo trabalho de orientação dedicado à execução desta Tese.

Em especial, agradeço ao Professor Nelson Maculan Filho que em primeiro lugar me proporcionou o convívio com o Programa de Sistemas e por toda essa salutar e competente dedicação que lhe é peculiar e da qual me tenho beneficiado.

Estendo meu reconhecimento a todos professores, colegas e funcionários do Programa de Sistemas e da COPPE/UFRJ com os quais tive a oportunidade de conviver. Em particular, o apreço e admiração aos colegas de batalha Arlindo, Negreiros e Manuel Lino pelas discussões, contradições e sugestões do dia-a-dia.

À Universidade Federal do Ceará através do Departamento de Estatística e Matemática Aplicada, meu reconhecido agradecimento pela liberação integral de minhas atividades docentes e sobretudo pelo apoio dedicado à realização desse trabalho.

Quero agradecer aqui o suporte financeiro que me foi concedido pelo PICD (Plano Integrado de Capacitação de Docentes) da UFC e pela CAPES (comissão de Aperfeiçoamento de Professores do Ensino Superior).

À FINEP-UFC através de seu Coordenador, Professor Antonio Gervásio Colares que me concedeu suporte financeiro nesta fase final, quero também expressar meu reconhecido agradecimento.

À SUDEPE-RJ na pessoa do Dr. Silvio Jablonski pelas facilidades de acesso às informações sobre os dados de atuns, meus sinceros agradecimentos.

Meu agradecimento à Sra. Suely Klajman da COPPE/UFRJ pelo dedicado e exaustivo trabalho de datilografia.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

OTIMIZAÇÃO DE SISTEMAS DINÂMICOS NÃO-LINEARES
COM APLICAÇÃO A POLÍTICA DE PESCA

Antonio Clécio Fontelles Thomaz

Abril de 1986

Orientador: Prof. João Lauro Dornelles Facó

Programa : Engenharia de Sistemas e computação

O estudo consiste em analisar ecossistemas dinâmicos com perturbações através de procedimentos de otimização não-linear. Inicialmente, o problema é tratado como um problema de controle ótimo discreto onde a dinâmica é definida por um sistema de equações de diferenças de 1ª ordem. Os critérios de otimalidade são estabelecidos pelas condições de Kuhn-Tucker. O modelo é aplicado ao ecossistema de atuns no Sudeste do Brasil onde a evolução do sistema é caracterizado por logísticas de crescimento populacional. As variáveis de estado são as biomassas de cada espécie e as variáveis de controle são as taxas de capturas sustentáveis de cada espécie. Tentamos estabelecer políticas ótimas de capturas para cada espécie, maximizando o retorno líquido da operação de pesca num determinado horizonte sob as condições de equilíbrio ecológico. O problema de PNL associado é resolvido usando-se o código computacional GRECO (Gradiente Reduzido para Controle Ótimo) de J.L.Facó.

Abstract of thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree' of Doctor of Science (D.Sc.)

OPTIMIZATION OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEMS WITH
APPLICATION TO FISHERIES POLICY

Antonio Clécio Fontelles Thomaz

April, 1986

Chairman : Prof. João Lauro Dornelles Facó
Department : Systems and Computers Engineering

The study consists in analysing dynamic ecosystems with perturbations through nonlinear optimization procedures. First, the problem is treated as a discrete optimal control problem where the dynamics is defined by a system of first order difference equations. The optimality criteria are established by Kuhn-Tucker conditions. The model is applied to Tuna ecosystem in the Southeast Brazil where the system evaluation is characterized by population growth logistics. The state variables are the biomass of each species and the control variables are the sustainable catch rates of each species. We try to set up optimal catch policies for each species, maximizing the fisheries operation net return in a determined horizon, under ecological equilibrium conditions. The associated NLP problem is solved using the computational code GRECO (Generalized Reduced Gradient for Optimal Control) developed by J.L. Facó.

ÍNDICE

	<u>Páginas</u>
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I - DINÂMICA DE INTERAÇÃO ENTRE MULTIESPÉCIES	
1.1. Análise de Bio-Sistemas Dinâmicos Não Lineares	6
1.2. Sistemas Discretos	10
CAPÍTULO II - MÉTODOS E PROCEDIMENTOS DE OTIMIZAÇÃO NÃO-LINEAR	
2.1. Controle Ótimo	13
2.2. Princípio do Máximo de Pontryagin	15
2.3. Formulação Discreta de Controle Ótimo	16
2.4. Programação Matemática e Controle Ótimo	18
2.5. Método GRG: Gradiente Reduzido Generalizado	20
2.6. Algoritmo GRECO: Gradiente Reduzido para Controle Ótimo	31
CAPÍTULO III - SISTEMA DE ATUNS COSTEIROS	
3.1. Cenário Ecológico de Tunídeos	40
3.2. Regionalização de Áreas de Pesca	41
3.3. Identificação de Parâmetros	44
3.4. Sistema Dinâmico perturbado	47
3.5. Modelo Aplicado à Captura de Atuns	59
3.6. Resolução do Modelo de Programação Não-Linear	62
CAPÍTULO IV - CONSTRUÇÃO E AVALIAÇÃO DO MODELO DE PESCA DE ATUNS	
4.1. Estimativas do Estoque de Populações Exploradas	69
4.2. Estratégia ótima para Avaliação de Parâmetros	71
4.3. Políticas ótimas de Pesca	76
CAPÍTULO V - RESULTADOS E CONCLUSÕES	83
BIBLIOGRAFIA	87

I N T R O D U Ç Ã O

O crescente desenvolvimento tecnológico tem exigido constantes estudos para controle e preservação de sistemas ecológicos, notadamente aqueles que constituem fonte de alimentação.

A livre exploração pesqueira de recursos renováveis constitui uma séria ameaça ao equilíbrio das populações marinhas.

Recentemente, tem havido uma constante preocupação por parte de determinados organismos governamentais para controlar a pesca.

Com o surgimento de agências internacionais tais como o ICCAT (International Commission for the Conservation of Atlantic Tunas), IWC (International Waling Commission), foram definidos em consonância com Órgãos governamentais, determinados mecanismos de controle de pesca. Estes mecanismos estão sendo aperfeiçoados à luz de sofisticados modelos bioeconômicos de recursos renováveis.

Neste trabalho, desenvolvemos um modelo de controle Ótimo para avaliação de parâmetros de um ecossistema marinho submetido à exploração pesqueira.

O principal obstáculo quanto ao uso da teoria de controle Ótimo em ecologia reside na dificuldade de formular um modelo matemático que expresse rigorosamente a dinâmica do ecossistema.

Complexos ecossistemas dinâmicos podem ser analisa

dos através de avançadas técnicas de otimização como o Princípio de Pontryagin que constitui uma formulação moderna do cálculo de variações clássico.

Em geral, muitos problemas de ecossistemas aplicados podem ser formulados como modelos de programação não-linear (PNL) e resolvidos através de eficientes procedimentos computacionais.

O uso de PNL tem apresentado (como veremos no decorrer deste trabalho) substanciais vantagens no tratamento de ecossistemas, notadamente na estimação de determinados parâmetros inerentes ao modelo.

O conceito geral de uma estratégia Ótima de pesca é extremamente complexo e, as decisões sobre tais modelos envolvem fatores de ordem biológica, econômica e social. Outros fatores estocásticos como: alterações climáticas, poluição, etc, podem potencialmente alterar um sistema marinho e, conseqüentemente causar variações nos estoques.

Quaisquer alterações causadas sobre estes fatores aliados a uma sobrepesca podem trazer drásticas conseqüências não só sobre o aspecto comercial/social, mas também, sobre o aspecto ecológico.

Partindo do principio que em um sistema marinho de exploração pesqueira a componente que pode ser controlada é a pesca, tentamos estabelecer um modelo bioeconômico de controle que mais se aproxime da situação existente no sistema de atuns no Atlântico, particularmente nas Costas do Sudeste da Brasil.

Aqui tentaremos aproximar nosso modelo para explo-

ração de recursos biológicos renováveis por um sistema dinâmico discreto determinístico baseado em equações de diferenças de primeira ordem.

O modelo objeto do estudo, é uma versão modificada do sistema de interação entre multiespécies envolvendo competidor, predador, presa definido por LOTKA^[4 1] e VOLTERRA^[6 6] aplicado ao sistema de atuns do Atlântico com distribuição espacial.

O objetivo principal é determinar taxas sustentáveis de capturas por espécies de atuns em cada área de pesca sob condições de equilíbrio ecológico, maximizando um critério bioeconômico de retorno líquido ao longo do tempo.

Esperamos em princípio, que o controle sobre os níveis de exploração venha proporcionar uma maior rentabilidade do ponto-de-vista econômico para a captura, ensejando também uma política adequada para regulação da pesca de atuns e afins na Costa do Brasil.

O estudo está basicamente dividido em cinco Capítulos.

No primeiro Capítulo, abordamos o estudo da dinâmica de populações enfatizando a análise de sistemas dinâmicos não-lineares.

No Capítulo II, descrevemos de uma forma sucinta, alguns conceitos de otimização não-linear, métodos e soluções que constituem ferramentas indispensáveis à resolução numérica do problema de controle ótimo proposto.

Apresentamos um eficiente algoritmo de programa-

ção matemática GRECO (Gradiente Reduzido Generalizado para Controle Ótimo), J.L.D.FACÓ |¹⁴| que é utilizado para resolução numérica do problema de controle Ótimo para captura de atuns.

O método GRG foi desenvolvido por ABADIE, J. and CARPENTIER, J. |¹| para resolver problemas gerais de programação não-linear com restrições.

A idéia central desses algoritmos reside em resolver problemas gerais de programação matemática através de seqüências de problemas reduzidos utilizando algoritmos de otimização irrestrita com pequenas adaptações.

Visto que os problemas de controle Ótimo recaem em problemas de programação matemática, segue-se que os problemas de controle Ótimo podem ser resolvidos por algoritmos do tipo GRECO que é uma especialização do GRG para sistemas dinâmicos não-lineares com restrições de desigualdade nas variáveis de estado e/ou controle.

Neste segmento descrevemos ainda as condições necessárias de otimalidade para o sistema em estudo.

A partir dos dados de captura e esforço, importantes parâmetros do sistema tais como coeficiente de capturabilidade, taxa de mortalidade natural, proporção de novos recrutas, biomassa, etc, por espécie, são determinados num estágio intermediário através de um modelo de PNL minimizando a soma dos quadrados dos desvios entre a captura real e a estimada com restrições sobre os parâmetros.

O estudo das populações de Atuns costeiros no Sudeste do Brasil está concentrado nos Capítulos III e IV que se compõe dos seguintes tópicos:

- Cenário Ecológico de Tunídeos no Sudeste do Brasil;
- Regionalização de Áreas de Pesca;
- Sistema Dinâmico Perturbado;
- Modelo Discreto de Controle ótimo para Captura de Atuns;
- Resolução Numérica do Modelo de programação Não-Linear;
- Avaliação de Parâmetros do Modelo de produção do Estoque de Atuns no Sudeste do Brasil;
- Políticas ótimas de Pesca.

Convém notar que o modelo de LOTKA ^[41] e VOLTERRA ^[66] a exemplo de outros modelos biológicos de interação entre multiespécies de LESLIE, P.H. and GROWER ^[38] não leva em consideração a distribuição espacial; fator de grande relevância no comportamento da dinâmica, enquanto que o proposto, além de interação entre multiespécies, também incorpora distribuição espacial uniforme podendo ainda considerar classes de estrutura etária.

O modelo analisado aqui à luz da teoria de Controle ótimo aplicado a sistemas biológicos para captura de atuns não apresenta similaridade com nenhum modelo conhecido na literatura até o presente momento.

Esperamos serem estas as principais características que constituem a contribuição deste trabalho que julgamos indispensável numa primeira fase para o controle da pesca de tunídeos nas Costas do Brasil.

CAPÍTULO I

DINÂMICA DE INTERAÇÃO ENTRE MULTIESPÉCIES

1.1. Análise de Bio-Sistemas Dinâmicos Não-Lineares

Existem vários procedimentos para descrever o comportamento de populações animais. Estes métodos, fundamentados em logísticas de crescimento populacional, estão basicamente subdivididos em duas principais categorias:

- a) Métodos para uma espécie;
- b) Método de interação entre multiespécies.

Os modelos de BEVERTON e HOLT ⁸, RICKER ⁵⁶, FOX ¹⁶ e ALLEN ⁵ pertencem à categoria (a) e tratam de estimativas considerando espécies isoladamente. Já os métodos da classe (b) tais como LOTKA ⁴¹ e VOLTERRA ⁶⁶; PARRISH ⁶, CLARCK ¹⁰ entre outros, levam em consideração a interação entre várias espécies no mesmo habitat.

Aqui, investigamos um método da classe (b) para a avaliação de estoques de peixes envolvendo várias espécies de um sistema marinho de atuns do Atlântico.

Os modelos designados para descrever a interação entre multiespécies geralmente são constituídos de sistemas de equações diferenciais que podem ser tratados por processos contínuos ou discretos. Em princípio, tais modelos serão aqui considerados determinísticos, embora outros modelos de simulação estocástica possam também representar o comportamento de interação entre multiespécies: REED, W.J. ⁵⁵, LUDWING, D. ⁴².

Se uma população com biomassa x sobrevive num determinado instante t sem limitações de qualquer natureza, então ela deverá crescer segundo a taxa:

$$\frac{d x (t)}{d t} = r x (t) \quad (1.1.1)$$

onde:

r é a taxa líquida de crescimento dada pela diferença entre a taxa de nascimentos e a taxa de mortalidade.

Segundo este processo, a população x deveria crescer exponencialmente se $r > 1$ ou decrescer indefinidamente quando $0 < r < 1$.

Assumindo limitações em alimentação e espaço, definimos a taxa de crescimento num dado instante por uma função envolvendo os efeitos de reprodução e mortalidade, isto é:

$$\frac{d x (t)}{d t} = F(x(t)) \quad (1.1.2)$$

onde:

F é uma função contínua e infinitamente continuamente diferenciável.

Expandindo F por aproximação polinomial temos:

$$\frac{d x(t)}{d t} = F(x(t)) = C_0 + C_1 x(t) + C_2 x^2(t) + \dots \quad (1.1.3)$$

É óbvio que para $x=0$, a taxa de crescimento

$$\frac{d x}{d t} = 0, \text{ daí, } C_0 = 0.$$

Por outro lado, $F(x(t))$ deve admitir dois zeros, isto é: $\frac{dx(t)}{dt}$ deve se anular não somente para $x=0$, mas também quando x atingir seu nível de saturação.

A Equação (1.1.3) satisfaz estas condições desde que se desprezem os termos de ordem superior a dois, obtendo-se:

$$F(x(t)) = \frac{dx(t)}{dt} = C_1 x(t) + C_2 x^2(t) = 0 \quad (1.1.4)$$

cujas raízes são $x=0$ e $x = -C_1/C_2$,

Fazendo-se $C_1 = r$ e $C_2 = -a$ em (1.1.4) temos a seguinte equação:

$$\frac{dx(t)}{dt} = x(t) [r - ax(t)] \quad (1.1.5)$$

que integrando conduz à logística de crescimento populacional.

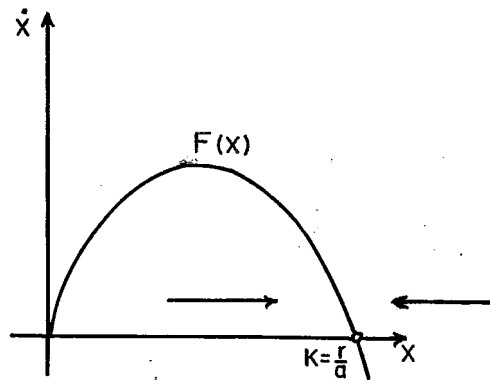


FIGURA-I Gráfico da equação (1.1.5)

$$x(t) = \frac{K}{1 + C e^{-rt}} \quad (1.1.6)$$

onde:

$$K = r/a$$

C é uma constante que define o estado inicial do sistema.

Observe-se que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = r/a = K$$

é o nível de saturação da população devido às limitações do meio-ambiente.

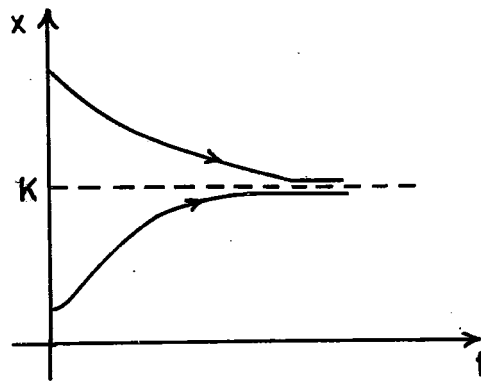


FIGURA -2 Gráfico do equação (1.1.6)

Consideremos o modelo de interação entre duas espécies com biomassas x_1 e x_2 respectivamente num certo instante t competindo sob as mesmas condições de limitação em espaço e alimentação.

Por uma extensão da Equação (1.1.5) para o caso de duas espécies temos que a taxa de crescimento "per capita" de cada espécie num instante t é função linear das biomassas das espécies envolvidas no mesmo instante, isto é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1} \frac{dx_1}{dt} &= (r_1 - a_{11} x_1 - a_{12} x_2) \\ \frac{1}{x_2} \frac{dx_2}{dt} &= (r_2 - a_{22} x_2 - a_{21} x_1) \end{aligned} \tag{1.1.7}$$

Cada população i deveria aumentar como se estivesse sobrevivendo isoladamente com parâmetros logísticos r_i e a_{ij} ; o parâmetro a_{ij} mede o efeito inibidor da espécie j na espécie i .

Generalizando o sistema (1.1.7) para o caso de n espécies temos:

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \left[r_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j(t) \right] x_i(t) = F_i(x) ; i=1, n \quad (1.1.8)$$

onde $F_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ é um vetor do \mathbb{R}^n representando as biomassas de cada espécie.

1.2. Sistemas Discretos

Assumimos que a logística de crescimento de uma população com biomassa $x(t)$ no tempo t é dada pela Equação:

$$x(t) = \frac{k}{1 + C e^{-rt}} \quad (1.2.1)$$

Decorre de (1.2.1) que:

$$C e^{-rt} = (K - x(t))/x(t) \quad (1.2.2)$$

No tempo $t + h$ temos:

$$x(t + h) = \frac{K}{1 + C e^{-r(t+h)}} \quad (1.2.3)$$

Se substituirmos (1.2.2) em (1.2.3) considerando $\lambda = e^{hr}$ temos:

$$x(t+h) = \frac{\lambda x(t)}{1 + \Psi x(t)} \quad (1.2.4)$$

onde, $\Psi = (\lambda - 1)/K$. ou $\Psi = a(\lambda-1)/r$

A Equação (1.2.4) define a logística discreta de crescimento da população com biomassa x para $t=0,1,2,\dots$

Para o caso de duas espécies (ver LESLIE [36]), temos o seguinte sistema discreto:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t+1) = \frac{\lambda_1 x_1(t)}{1 + \Psi_{11} x_1(t) + \Psi_{12} x_2(t)} \\ x_2(t+1) = \frac{\lambda_2 x_2(t)}{1 + \Psi_{22} x_2(t) + \Psi_{21} x_1(t)} \\ x_i(0) = x_{i0} ; i=1,2 . \end{array} \right. \quad (1.2.5)$$

para $t=0,1,2,\dots$

onde:

$$\left. \begin{array}{l} r_i = L_n(\lambda_i) \\ \Psi_{ij} = a_{ij}(\lambda_i - 1)/r_i \end{array} \right\} i=1,2$$

Podemos generalizar o sistema (1.2.5) para n espécies x_1, x_2, \dots, x_n obtendo-se o modelo discreto equivalente sob a forma:

$$x_i(t+1) = \frac{\lambda_i x_i(t)}{1 + \sum_{j=1}^n \Psi_{ij} x_j(t)} \quad (1.2.6)$$

$$x_i(0) = x_{i0}$$

para $\left\{ \begin{array}{l} i=1,n \\ t=0,1,2,\dots \end{array} \right.$

onde:

$$\lambda_i = e^{r_i} ; \psi_{ij} = a_{ij}(\lambda_i - 1)/r_i ; i=1,n$$

CAPÍTULO 11MÉTODOS E PROCEDIMENTOS DE OTIMIZAÇÃO NÃO-LINEAR2.1. Controle Ótimo

Neste trabalho, o uso da teoria de controle Ótimo constitui importante ferramenta necessária à formulação, desenvolvimento e solução do problema de controle para captura de atuns no Sudeste do Brasil.

A idéia básica do problema de controle Ótimo aqui analisada consiste em: dado um sistema dinâmico não-linear e um funcional que exprime a medida da performance do sistema, selecionar funções de controle que otimizem o funcional satisfazendo às restrições nas variáveis de estado e controle.

Formulamos problemas de controle Ótimo de dois tipos: contínuos e discretos.

Uma definição mais formal do problema de controle Ótimo considerando o critério de maximização com tempo fixo T e estado final livre seria:

$$\text{Maximizar } J(x,u,t) = G(x(T),T) + \int_0^T L(x(t),u(t),t) dt \quad (2.1.1)$$

sujeito a:

$$x(t) = f(x(t), u(t), t) ; 0 \leq t \leq T \quad (2.1.2)$$

$$x(0) = x_0 \quad (2.1.3)$$

$$u(t) \in U \quad (2.1.4)$$

$$x(T) \text{ livre ; } x(t) \in X$$

$$X = \{ x(t) / a \leq x(t) \leq b \}$$

onde $x \in \mathbb{R}^n$ é o vetor de estados e $u \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de controles. Assumimos que $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $L: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$, e $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)'$ é tal que $f_i: \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}$.

Temos portanto um problema envolvendo $(n+m)$ funções (x, u) que devem satisfazer n equações diferenciais do tipo (2.1.2) onde os m controles u , são funções independentes.

As funções G, L e f_i são continuamente diferenciáveis em $(x(t), u(t))$.

É importante que a região de controles m -dimensionais U seja limitada por $a_i \leq u_i(t) \leq b_i$, $i=1, m$. Tais limitações refletem o fato de que em muitos problemas, os controles devem ter um significado físico, por exemplo, estar compreendido entre dois valores pré-estabelecidos.

Como as variáveis de decisão do problema de controle Ótimo são funções $u(t)$, $0 \leq t \leq T$, uma vez especificada u , é possível determinar juntamente com (2.1.2) e (2.1.3) uma Única trajetória de estado $x(t)$, $0 \leq t \leq T$.

Esta trajetória e a função de controle determinam o valor de J de acordo com a Equação (2.1.1). O problema consiste então em encontrar funções de controle $u(t)$, $0 \leq t \leq T$ satisfazendo à condição (2.1.4) que produza o maior valor possível em J .

Estamos assim interessados em determinar as correspondentes alterações sofridas na função objetivo devido a pequenas alterações realizadas em $u(t)$. Determinar as variações na função objetivo é uma tarefa exaustiva uma vez que alterações em $u(t)$ implicam também alterações em $x(t)$.

As condições necessárias de otimalidade para o problema de controle Ótimo acima são estabelecidas pelo Princípio do Máximo de Pontryagin em [13], [51].

2.2. Princípio do Máximo de Pontryagin

As condições necessárias de otimalidade para problemas de controle podem ser derivadas de técnicas bastante conhecidas em cálculo variacional. Em problemas com dinâmica linear e função objetivo quadrática é possível obter a solução Ótima integrando-se a equação diferencial do tipo Ricatti, CANON, M.D. et alii [11].

As funções de controle Ótimo para o problema (2.1.1) a (2.1.4) podem ser determinadas aplicando-se o Princípio do Máximo de Pontryagin que formulamos assim:

Seja $(x^*(t), u^*(t))$ solução Ótima para o problema (2.1.1) a (2.1.4). Então existe uma trajetória adjunta $\lambda(t) \in \mathbb{R}^n$; $t \in [0, T]$

tal que $(x^*(t), u^*(t))$ satisfazem:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \right] \lambda(t) - \frac{\partial L}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), t) \quad (2.2.1)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial u} = f(x^*(t), u^*(t), t) \quad (2.2.2)$$

$$x^*(0) = x_0 \quad (2.2.3)$$

$$\lambda(T) = -\frac{\partial G}{\partial x}(x^*(T)) \quad (2.2.4)$$

tal que a função Hamiltoniano:

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = L(x(t), u(t), t) + \lambda'(t) \left[f(x(t), u(t), t) \right] \quad (2.2.5)$$

é maximizada em $u^*(t)$ isto é: para todo $v \in U$

$$L(x^*(t), u^*(t) + \lambda' \left[f(x^*(t), u^*(t)) \right] \geq L(x^*(t), v) + \lambda' \left[f(x^*(t), v) \right] \quad (2.2.6)$$

A dificuldade em resolver problemas de controle Ótimo usando princípios de cálculo variacional é causada pela existência de equações diferenciais não lineares com condições de contorno no início e no final do processo. Este é o clássico problema TPBV (Two-Point Boundary-Value).

Visando analisar a solução numérica do modelo de Atuns em estudo, vamos abordar o caso de controle Ótimo discreto no item a seguir.

2.2.3. Formulação Discreta de Controle Ótimo

Seja o problema de controle ótimo discreto definido por:

$$\text{Maximiar } J(x, u) = G(x(N), N) + C \sum_{k=1}^{N-1} L(x(k), u(k), k)$$

sujeito a:

$$x(k+1) - x(k) = f(x(k), u(k), k) \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (2.3.1)$$

$$x(0) = a$$

$$u(k) = (u_1, \dots, u_m) \in U$$

$$x(k) \in X$$

onde:

$x(k) \in \mathbb{R}^n$ é o vetor coluna das variáveis de estado no instante k

$u(k) \in \mathbb{R}^m$ é o vetor coluna das variáveis de controle no instante k

$a \in \mathbb{R}^n$ é o vetor coluna das condições iniciais.

Assumimos que L, G e f são continuamente diferenciáveis com respeito a x e somente contínuas com respeito a u para cada k .

Suponhamos que os vetores $\tilde{u}(k)$ e $\tilde{x}(k)$ representam respectivamente o controle Ótimo e a trajetória ótima para o problema (2.3.1). Então existe uma trajetória adjunta $\Psi(k) \in \mathbb{R}^m$ tal que $\tilde{x}(k)$, $\tilde{u}(k)$ e $\Psi(k)$ satisfazem às condições:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{x}(k+1) - \tilde{x}(k) = \frac{\partial H(\tilde{x}, \tilde{u}, \Psi, k)}{\partial \Psi} = f(\tilde{x}(k), \tilde{u}(k), k) \quad (\text{Sistemas de Equações de diferenças}) \\ \tilde{x}(0) = a \quad (\text{Condição inicial}) \\ \Psi(k) - \Psi(k-1) = - \frac{\partial H(\tilde{x}, \tilde{u}, \Psi, k)}{\partial x} \quad (\text{Equações adjuntas}) \\ \Psi(N) = \frac{\partial G(x(N))}{\partial x} \quad (\text{Condição de transversalidade}) \end{array} \right.$$

e tal que para todo $v \in U$

$$L(\tilde{x}(k), \tilde{u}(k)) + \Psi' \left[f(\tilde{x}(k), \tilde{u}(k)) \right] \geq L(\tilde{x}(k), v) + \Psi' \left[f(\tilde{x}(k), v) \right] \quad (2.3.2)$$

com $k=0, N-1$

onde,

H é a função Hamiltoniana dada por:

$$H(x, u, \Psi, k) = L(x, u, k) + \sum_{i=1}^n \Psi(k) \left[f_i(x, u, k) \right] \quad k=0, N-1$$

Assim as Equações (2.3.2) constituem condições necessárias para que u e x sejam soluções do problema de controle Ótimo (2.3.1).

2.4. Programação Matemática e Controle Ótimo

A solução de um problema de controle ótimo à luz do cálculo de variações consiste em resolver equações do tipo Euler-Lagrange sujeito a determinadas condições de contorno que constituem a principal dificuldade para sua resolução numérica. Este problema recai no famoso TPBVP "Two - Point Boundary - Value Problem" não-linear que é difícil de ser resolvido numericamente, exceto em casos extremamente simples.

Neste princípio, são introduzidas variáveis adjuntas semelhantes aos multiplicadores de Lagrange e problemas de controle Ótimo podem ser tratados como problemas de programação matemática sob certas condições.

Existe uma forte relação entre controle Ótimo e programação matemática o que permite passar de um problema de controle Ótimo para um problema de programação matemática e resolvê-lo através de eficientes algoritmos para obtenção de

trajetórias e controles ótimos.

Consideremos o problema geral de controle ótimo com restrições de igualdades e desigualdades nas variáveis de estado e/ou controle onde g e h são funções vetoriais.

$$\begin{array}{l}
 \text{Maximizar o funcional:} \\
 J(x,u,t) = \int_{t_0}^{t_f} L(x,u,t)dt + G(x(t_f)) \quad (2.4.1) \\
 \text{Sujeito } \tilde{a}: \\
 \text{(I) } \left\{ \begin{array}{l}
 x = f(x,u,t) \quad (2.4.2) \\
 x(t_0) = x_0 \\
 x(t) \in X \\
 u(t) \in U \\
 X = \{ x(t) / a \leq x(t) \leq b \}
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

O funcional J pode ser aproximado pelo limite de uma soma considerando uma partição do intervalo t_0, t_f em "n" subintervalos (t_1-t_0) ; (t_2-t_1) , ... (t_f-t_{n-1}) onde $t_f=t_n$. Para cada intervalo (t_k-t_{k-1}) tomemos um t_k' arbitrário tal que $t_k \leq t_k' \leq t_{k-1}$; $k=0,1,\dots,n$ e reescrevemos a integral (2.4.1) sob a forma de um somatório.

De acordo com estes procedimentos, as equações discretas juntamente com as condições de contorno constituem o seguinte problema de programação matemática:

Maximizar:

$$\begin{array}{l}
 J(x(t_k), u(t_k), t_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{n-1} L(x(t'_k), t'_k) (t_k - t_{k-1}) + G(x(t_n), t_n) \\
 \text{Sujeito } \tilde{a}: \\
 \lim_{h_k \rightarrow 0} \frac{x(t_k) - x(t_{k-1})}{4} = f(x(t_{k-1}), u(t_{k-1}), t_{k-1}) \\
 \text{(II) } \left\{ \begin{array}{l}
 \text{onde,} \\
 h_k = t_k - t_{k-1} \quad \text{com } k=1, 2, \dots, n ; n \rightarrow \infty \\
 x(t_k) \in X \quad \text{para cada } k \\
 u(t_k) \in U ; k=0, 1, 2, \dots, n-1 \quad \text{com } n \rightarrow \infty
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Portanto, o problema de controle ótimo (I) é equivalente ao problema de programação matemática (II) onde as condições necessárias de otimalidade são também satisfeitas.

2.5. Método GRG - Gradiente Reduzido Generalizado

Os métodos de direções viáveis constituem uma classe de algoritmos para resolver problemas de programação não-linear cuja estratégia consiste em se deslocar de um ponto viável para um outro ponto viável com melhor performance. Assim, dado um ponto viável x_k , determinamos uma direção \bar{d}_k tal que para $\lambda > 0$ e suficientemente pequeno, as duas condições sejam satisfeitas:

- 1) $x_k + \lambda \bar{d}_k$ seja viável;

2) O valor da função objetivo em $x_k + \lambda d_k$ seja melhor que o valor no ponto x_k .

Obtida a direção d_k procedemos a uma otimização unidimensional para determinar o quanto podemos caminhar na direção d_k otimizando a função objetivo nessa direção, obtendo assim x_{k+1} . O procedimento é repetido até que sejam satisfeitas condições de otimalidade. Estes métodos são denominados de métodos principais pois a viabilidade do primal é mantida durante o procedimento de otimização.

Contido nesta classe está o método Gradiente Reduzido Generalizado (GRG) que tem sido frequentemente usado para solução de problemas de programação não-linear. A concepção inicial do GRG foi desenvolvida por Wolfe apenas para o caso onde as restrições eram lineares sendo posteriormente estendido por ABADIE, J. e CARPENTIER, J. [1] para o caso geral de restrições não lineares.

A idéia central do método consiste em utilizar os vínculos para exprimir m -variáveis básicas em função de $n-m$ não básicas pelo emprego do Teorema das Funções Implícitas do Cálculo Diferencial.

Facó, J.L.D. [14] especializou o método GRG para problemas de controle ótimo desenvolvendo o algoritmo Gradiente Reduzido Generalizado para Controle Ótimo (GRECO) que é utilizado na solução numérica do nosso modelo.

Como vimos anteriormente, um problema de controle Ótimo pode ser formulado via programação matemática possibilitando assim que problemas de controle ótimo sejam solucionados

por algoritmos do tipo GRG.

Apresentamos os procedimentos básicos do método GRG considerando o problema geral de programação matemática.

$$(P.2.2) \left\{ \begin{array}{ll} \text{Maximizar} & \psi(X) & (2.5.1) \\ \text{Sujeito a:} & f(X) = 0 & (2.5.2) \\ & a \leq X \leq b & (2.5.3) \end{array} \right.$$

onde, $\psi \in C^1$ e $f \in [C^1]^m$; os vetores a, b e $X \in \mathbb{R}^n$ com $m < n$.

Denotaremos a matriz Jacobiana $m \times n$ das funções f_i em relação a x_i $i=1,2,\dots,m$ por $A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{\substack{i=1,2,\dots,m \\ j=1,2,\dots,n}}$ e o paralelepípedo $\mathbb{P} = \{X | a < X < b\}$.

Consideremos uma partição $X = (X_B, X_N)$ onde $X_B \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de variáveis básicas e $X_N \in \mathbb{R}^{n-m}$ o vetor de variáveis não básicas.

Seja X^0 um ponto viável satisfazendo (2.5.2) e (2.5.3), desejamos expressar analiticamente X_B em função de X_N ,

$$X_B = F(X_N) \quad (2.5.4)$$

que em geral não pode ser obtido explicitamente.

Usaremos o teorema das funções implícitas para expressar X_B como função diferenciável de X_N numa vizinhança do ponto $X^0 = (X_B^0, X_N^0)$ verificando $f(X_B^0, X_N^0) = 0$.

Para isso, supomos que a submatriz \mathbb{B} da matriz Jacobiana A , onde $\mathbb{B} = \frac{\partial f}{\partial X_B} = \frac{\partial f(X^0)}{\partial X_B}$ é regular.

Admitindo um acréscimo $dx = (dx_B, dx_N)$ que respeite as restrições temos:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_B^0} dx_B + \frac{\partial f}{\partial x_N^0} dx_N = 0$$

daí,

$$dx_B = - \left(\frac{\partial f}{\partial x_B^0} \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_N^0} dx_N \quad (2.5.5)$$

A variação da função objetivo ψ em torno de x^0 é dada por:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x_B^0} dx_B + \frac{\partial \psi}{\partial x_N^0} dx_N \quad (2.5.6)$$

Usando a Equação (2.5.5) podemos escrever (2.5.6)

sob a forma,

$$d\psi = \left[\frac{\partial \psi}{\partial x_N^0} - \frac{\partial \psi}{\partial x_B^0} \left(\frac{\partial f}{\partial x_B^0} \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_N^0} \right] dx_N \quad (2.5.7)$$

Se denotamos :

C^K = vetor linha formado pelos elementos c^i tal que $i \in K$,

onde K é o conjunto dos índices das variáveis básicas

A^N = submatriz dos vetores não básicos.

Então a Equação (2.5.7) se escreve:

$$d\psi = \left[C^N - C^B B^{-1} A^N \right] dx_N \quad (2.5.8)$$

Define-se o gradiente reduzido segundo Wolfe por:

$$\xi^N = \frac{d\Psi}{dX_N} = C^N - C^B \mathbb{B}^{-1} A^N \quad (2.5.9)$$

que é uma generalização de "custo reduzido" em programação linear sendo \mathbb{B} a matriz de base

A função objetivo (2.5.1) do problema na forma canônica pode ser expressa apenas como função das variáveis não básicas X_N .

$$\Phi(X)_N = \Psi(F(X_N), X_N) \quad (2.5.10)$$

Assim, o problema restrito não-linear inicial é transformado, na vizinhança de X^0 , num problema reduzido irrestrito, sujeito apenas aos limites nas variáveis X_N :

$$\text{Maximizar } \Phi(X_N) \quad (2.5.11)$$

$$\text{Sujeito a: } a \leq X_N \leq b \quad (2.5.12)$$

O método GRG soluciona o problema original (2.5.1) - (2.5.3) resolvendo uma seqüência de problemas reduzidos do tipo (2.5.11) - (2.5.12) através de um algoritmo de otimização irrestrita com pequenas modificações destinadas a evitar violações dos limites de cada variável.

Para determinar uma direção viável d_N de melhora das variáveis independentes, projetamos o gradiente reduzido ξ^N a fim de não sair do paralelepípedo $\mathbb{P} : d_N = P\xi^N$, sendo P a matriz de projeção.

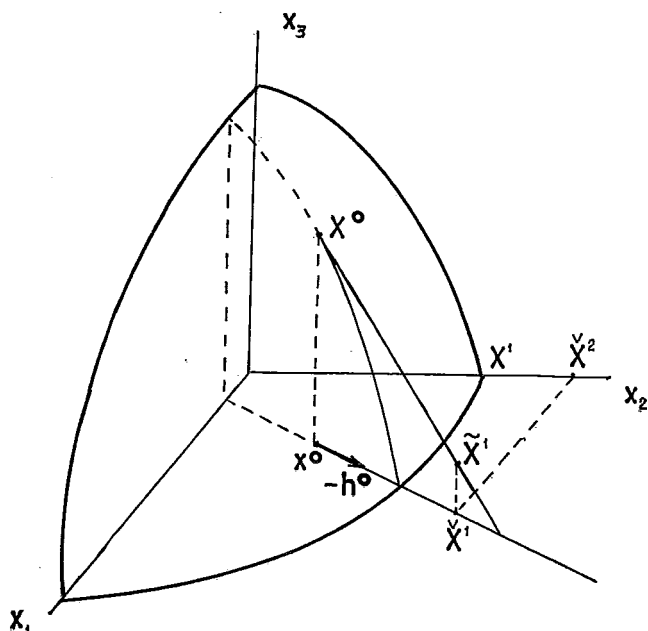


FIGURA 3 - INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO ALGORÍTMO GRG

A direção do deslocamento d_B das variáveis básicas é calculada de modo que a direção $d = (d_B, d_N)$ pertença ao hiperplano tangente às superfícies definidas pelas restrições (2.5.2) no ponto X^0 .

$$\nabla f(X^0) \cdot d = 0 = \frac{\partial f}{\partial X_B^0} d_B + \frac{\partial f}{\partial X_N^0} d_N = 0$$

$$\therefore d_B = - \left(\frac{\partial f}{\partial X_B^0} \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial X_N^0} d_N = - B^{-1} A^N d_N \quad (2.5.13)$$

Para obter um ponto na direção d que seja melhor que o anterior, determinamos um passo $\theta > 0$ por uma busca unidirecional maximizando $\Psi(X + \theta d)$.

Como X se desloca linearmente segundo a tangente no ponto, X_B deve se deslocar não linearmente de modo a verificar as restrições (2.5.2). Para isso, o algoritmo procede em duas etapas:

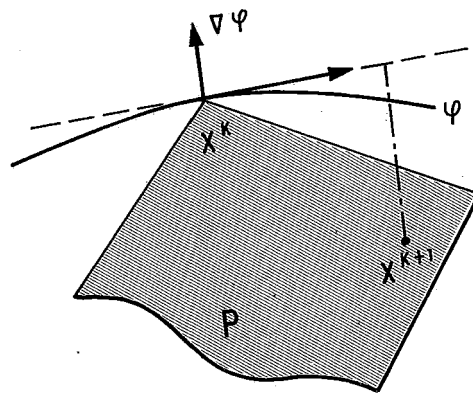


FIGURA 4- SOLUÇÕES VIÁVEIS DO ALGORITMO GRG.

1) Um deslocamento linear segundo a tangente em x^k

$$\begin{aligned} x_N &= x_N^0 + \theta d_N \\ x_B &= x_B^0 + \theta d_B \end{aligned} \tag{2.5.14}$$

2) Uma correção em x_B de modo que o novo ponto obtido x^{k+1} seja viável, isto é, esteja na superfície definida pelos vínculos não-lineares. Para isso, empregaremos um método iterativo para resolução de sistemas de equações não-lineares.

No ponto viável obtido, verificamos se o valor da função objetivo foi melhorado; em caso afirmativo, procedemos a uma nova iteração do GRG; se não, reduzimos o passo θ e recalculamos um novo ponto viável (ver Figura 4).

O algoritmo terminará quando for encontrado um ponto estacionário de Kuhn-Tucker que corresponde a um ótimo local (global quando o problema for convexo).

ALGORITMO GRG

PASSO 1 - Seja x^k uma solução viável para o problema de programação matemática $\mathbb{P}.2.2$;

PASSO 2 - Calcular o Jacobiano no ponto x^k tomando a partição $x^k = (x_B^k, x_N^k)$ onde $x_B^k \in \mathbb{R}^m$ é o vetor de variáveis básicas e $x_N^k \in \mathbb{R}^{n-m}$ o vetor de variáveis não básicas satisfazendo às condições de não degenerescência:

$$H1) \quad a_i < x_i^k < b_i \quad \text{para todo } i \in B ;$$

$$H2) \quad \text{A matriz } \frac{\partial f}{\partial x_B^k} \text{ é não-singular.}$$

PASSO 3 - Direção de deslocamento das variáveis não-básicas:

i) Calcular os multiplicadores de Lagrange:

$$\mu = - \frac{\partial \Psi}{\partial x_B^k} \left(- \frac{\partial f}{\partial x_B^k} \right)^{-1} = -C^B \mathbb{B}^{-1}$$

ii) Cálculo do gradiente reduzido:

$$\xi^N = C^N + \mu A^N$$

iii) Cálculo do gradiente reduzido projetado:

$$V_i \in N ; P_j = \begin{cases} \xi_j^j > 0 \text{ e } x_j^k = a_j \\ 0 \text{ se } \xi_j^j > 0 \text{ e } x_j^k = b_j \\ \xi_j \text{ em caso contrário .} \end{cases}$$

Se $P_N = 0$ PARE; se não, faça $d_N = P_N$, ou empregue um método de otimização não linear irrestrita tipo gradiente conjugados ou métrica variável.

PASSO 4 - Direção de deslocamento das variáveis básicas:

$$d_B = - B^{-1} A^N d_N$$

PASSO 5 - Melhoria da Solução:

- i) Efetuar uma busca unidimensional para determinar $\theta > 0$ que maximize $Y(x^k + \theta d)$.
- ii) Deslocamento das variáveis básicas e não básicas segundo as direções obtidas:

$$\tilde{x}_B = x_B^k + \theta d_B$$

$$\tilde{x}_N = x_N^k + \theta d_N$$

- iii) Quando o novo ponto \tilde{x} não é viável, procedemos a uma correção sobre as variáveis básicas resolvendo o sistema de m equações não-lineares e m incógnitas por um método pseudo-Newton.

- iv) Calculamos iterativamente a partir de \tilde{x}_B :

$$x_B^{t+1} = x_B^t - \left(\frac{\partial f}{\partial x_B^k} \right)^{-1} f(x_B^t, \tilde{x}_N)$$

Seja \bar{x}_B a solução obtida. Se o ponto obtido

$$x^{k+1} = (\bar{x}_B, \tilde{x}_N) \text{ é tal que:}$$

- a) $x^{k+1} \in \mathbb{P}$ e $Y(x^{k+1}) < \Psi(x^k)$ não houve melhoria e tentaremos encontrar um novo ponto diminuindo θ e recalculando \tilde{x} .

b) $x^{k+1} \in \mathbb{P}$ e $\Psi(x^{k+1}) > \Psi(x^k)$ então temos uma solução melhor e procedemos a uma nova iteração do algoritmo.

c) $x^{k+1} \notin \mathbb{P}$ então calculamos a interseção do segmento $[x^k, x^{k+1}]$ com a fronteira do paralelepípedo \mathbb{P} , onde temos $x_r^k = a_r$ ou b_r para algum índice r . Realizamos uma mudança de base, trocando uma variável básica x_r por alguma variável não básica x_s de modo que a expressão abaixo seja maximizada com respeito ao índice j :

$$\min\{|\alpha_{rj}|(b_j - x_j^k), |\alpha_{rj}|(x_j^k - a_j)\}$$

onde a_{rj} é o elemento da linha r e coluna

j da matriz $(-\frac{\partial f}{\partial x_B^k})^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_N^k}$

Retornamos ao procedimento IV a fim de resolver o novo sistema não-linear após a mudança de x_r por x_s partindo do ponto x^{k+1}

CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE:

Seja o problema (P.2.2) e um ponto viável x^0 . As condições de Kuhn-Tucker em x^0 correspondem à existência de multiplicadores u e v associados a (2.5.2) e (2.5.3) respectivamente, tais que:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_i \leq 0 \quad \text{se } x_i^0 = a_i \\ v_i \geq 0 \quad \text{se } x_i^0 = b_i \\ v_i = 0 \quad \text{se } a_i < x_i^0 < b_i, \quad e \end{array} \right. \quad (2.5.15)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_B^0} + u \frac{\partial f}{\partial x_B^0} = 0 \quad (2.5.16)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x_N^0} + u \frac{\partial f}{\partial x_N^0} = v \quad (2.5.17)$$

de (2.5.16) temos que:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial x_B^0} \left(-\frac{\partial f}{\partial x_B^0} \right)^{-1} \quad \text{ou} \quad u = -C^B B^{-1},$$

substituindo em (2.5.17) temos:

$$v = \frac{\partial \Psi}{\partial x_N^0} - \frac{\partial \Psi}{\partial x_B^0} \left(-\frac{\partial f}{\partial x_B^0} \right)^{-1} \frac{\partial f}{\partial x_N^0} \quad \text{ou} \quad v = C^N - C^B B^{-1} A^N$$

Portanto, se v satisfaz às condições (2.5.15), x^0 é dito um ponto estacionário.

Assim, o critério de parada do algoritmo GRG corresponde à obtenção de um ponto satisfazendo às condições de Kuhn-Tucker pois o gradiente reduzido projetado será nulo se e somente se:

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi^j < 0 \quad e \quad x_j^0 = a_j \\ \xi^j > 0 \quad e \quad x_j^0 = b_j \\ \xi^j = 0 \quad e \quad a_j < x_j^0 < b_j \end{array} \right.$$

Vemos então que o ponto obtido no GRG verifica as condições necessárias de otimalidade. Por outro lado, a construção de uma série crescente de valores da função objetivo nos assegura que o ponto obtido é um máximo local.

Observe-se que a computação de u é uma operação natural no cálculo de v ou seja: no método GRG, os multiplicadores de Lagrange não são calculados com tempos extras de computação.

Devido a complexidade do ecossistema de Atuns que iremos abordar mais adiante quanto aos aspectos numéricos de resolução, faz-se necessário estudar um algoritmo de controle Ótimo mais eficiente que incorpore procedimentos mais avançados de estabilidade numérica, conforme veremos a seguir.

2.6. Algoritmo GRECO: Gradiente Reduzido para Controle Ótimo

Descrevemos um eficiente algoritmo desenvolvido por FACÓ ^[14] para resolver problemas de controle Ótimo do tipo:

$$\text{Maximizar } \sum_{t=0}^{T-1} \psi_t(x_t, u_t) + \psi_T(x_T) \quad (2.6.1)$$

sujeito a:

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t) \quad ; \quad t=0, 1, \dots, T-1 \quad (2.6.2)$$

$$\alpha_t \leq u_t \leq \beta_t \quad ; \quad t=0, 1, \dots, T-1 \quad (2.6.3)$$

$$a_t \leq x_t \leq b_t \quad ; \quad t=1, 2, \dots, T \quad (2.6.4)$$

onde $x_t \in \mathbb{R}^n$, $u_t \in \mathbb{R}^n$; ψ_t e f_t são continuamente diferenciáveis.

(1) Restrições próprias ao período t:

As restrições do tipo (2.6.2)

$$x_{i,t+1} = f_{i,t}(x_t, u_t) ; i \in I = \{1, \dots, m\}$$

são ditas próprias ao período t

(2) variáveis próprias ao período t:

As variáveis de estado $x_{i,t+1}$, i e as de controle $u_{j,t}$; $j \in J = \{1, \dots, n\}$

são ditas próprias ao período t.

(3) variáveis Candidatas:

As variáveis que assumem valores estritamente entre seus limites são ditas candidatas à base.

(4) variáveis admissíveis:

Uma variável é dita admissível se ela é candidata e se o pivô é aceitável.

(5) Variáveis prioritárias:

São as variáveis de estado

$$x_{i,t+1} ; i \in J \text{ para cada período } t \in \{1, 2, \dots, T\}$$

Definimos três princípios que nos permitem construir uma base:

Princípio (P1): "Construimos uma base com o maior número possível de variáveis prioritárias".

Este princípio constitui o caso mais simples onde a matriz de base obtida é descrita pela Figura a seguir:

x^1	x^2	x^3	\dots	x^{T-1}	x^T
$I_{1,1}$					
H_1	$I_{1,1}$				
	H_2	$I_{1,1}$			
			\dots		
				$I_{1,1}$	
				H_{T-1}	$I_{1,1}$

onde: $H_t = \frac{\partial f}{\partial x^t}$

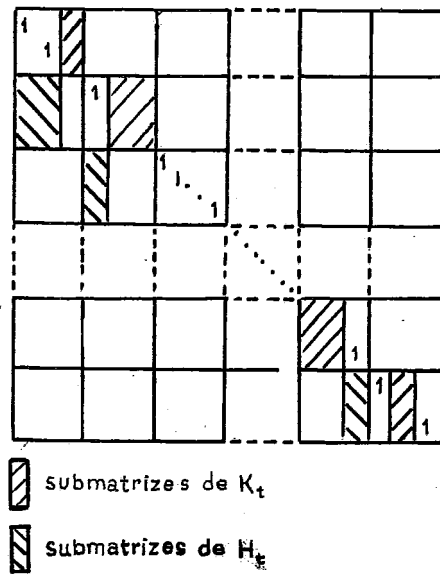
princípio (P2): "Se uma variável prioritária própria a um certo período t não é candidata, introduzir na base uma das variáveis de controle próprias ao mesmo período que seja admissível".

Este princípio permite escolher uma variável de controle $u_{j,t-1}$ para substituir a variável de estado $x_{i,t}$ de modo a satisfazer às hipóteses de não-degenerescência do GRG:

$$H1 : \alpha_{j,t-1} < u_{j,t-1} < \beta_{j,t-1}$$

H2 : O bloco diagonal do Jacobiano obtido pela permuta da coluna na $x_{i,t}$ por $u_{j,t-1}$ é inversível.

A matriz base construída segundo as condições H1 e H2 é descrita na Figura a seguir:



Se a aplicação dos princípios (P1), (P2) não conduzir à obtenção de uma base, será preciso introduzir novos procedimentos.

Assim vamos definir dois tipos de base:

- a) Base normal: A matriz que satisfaz às hipóteses de não-degenerescência do algoritmo GRG.
- b) Base de trabalho: Matriz formada a partir dos princípios (P1) e (P2).

Princípio (P3): "Se uma variável prioritária própria ao período t , $x_{i,t+1}$ não é candidata e alguma variável própria do mesmo período não é admissível: colocar a variável prioritária $x_{i,t+1}$ na base de trabalho e introduzir na base normal uma variável admissível disponível em um período anterior, o mais próximo possível do período t , e construir a matriz elementar de passagem".

$$B = \Omega E_1 E_2 \dots E_\ell$$

onde R é uma matriz triangular inferior por blocos quadrados e E_i ; $i \in \{1, \dots, \ell\}$ são matrizes elementares.

Para melhorar ainda mais a precisão numérica, enunciaremos o último princípio:

Princípio (P4): "Para toda matriz triangular inferior por blocos quadrados, decompor cada bloco diagonal sob a forma LU sem proceder a modificações nos demais blocos."

Definição:

Os vetores ψ^t, x^t, w^t são constituídos pelas variáveis duais associadas às restrições (2.6.2); (2.6.3) e (2.6.4) definidas por:

$$w^t = \frac{\partial f_t}{\partial x_t} - \psi^{t-1} + \psi^t \frac{\partial f_t}{\partial x_t}; \quad t \in \{1, 2, \dots, t-1\}$$

$$w^t = \frac{df_t}{dx_t} - \psi^{t-1}$$

$$x^t = \frac{\partial f_t}{\partial u_t} + \psi^t \frac{\partial f_t}{\partial u_t}; \quad t \in \{0, 1, \dots, t-1\}$$

ALGORITMO GRECO

Dado (x, u) satisfazendo às condições (2.6.2) - (2.6.4), cada interação do algoritmo é descrita por:

Passo 1: Para cada $t=1, 2, \dots, T$, determinar os conjuntos B e N das variáveis básicas e não-básicas através da apli-

cação dos princípios (P1), (P2), (P3), (P4). Obter uma matriz de base de trabalho Ω e k matrizes elementares de passagem $E_i : i = 1, \dots, k$ que represente a matriz de base normal B pela fatorização

$$B = \Omega E_1 \dots E_k$$

onde Ω é uma matriz triangular inferior por blocos quadrados e E_i são matrizes elementares.

Passo 2: Determinar a direção de deslocamento das variáveis não-básicas:

(a) Calcular os multiplicadores de Lagrange

$$\Psi B = b, \text{ onde } b = C_B$$

usando a rotina BACKW(x, u)

(b) Calcular o gradiente reduzido

$$g^n = (w^n, x^n)$$

(c) Calcular o gradiente reduzido projetado como no passo. 3 do algoritmo GRG; se $P_N = 0$, FIM.

(d) Aplicar o método dos gradientes conjugados para obter uma direção de melhoria Y_N .

Passo 3: Determinar a direção de deslocamento das variáveis básicas pela rotina FORW. (x, u)

$$B Y_B = b \text{ onde } b = -A^N Y_N$$

Passo 4: Melhoria da solução:

(a) Escolher um número real $\theta > 0$ que maximixe a função objetivo na direção $Y = (Y_B, Y_N)$. Obtemos

assim um ponto (x^8, u^8) que deve verificar as restrições limites (2.6.3) e (2.6.4) mas que em geral não satisfaz (2.6.1).

- (b) Pela modificação destas variáveis básicas, resolver por um método pseudo-Newton, para cada $t=1, \dots, T$, o seguinte sistema de equações não-lineares:

$$\dot{x}_{t+1} = f_t(x_t, u_t)$$

e ajustar θ de modo a se obter um ponto tal que:

$$\psi(x^\theta, u^\theta) > \psi(x, u)$$

Passo 5: Voltar ao passo 1 com o novo ponto a fim de iniciar uma nova interação.

CAPÍTULO 111SISTEMA DE ATUNS COSTEIROS NO SUDESTE DO BRASIL3.1. Cenário Ecológico de Tunídeos

A pesca de tunídeos no Brasil é realizada ao longo de toda a Costa, caracterizando-se por uma exploração artesanal no Nordeste, e uma exploração industrial, concentrada no Sudeste-Sul.

O grande impulso da pesca de atuns e afins no Brasil ocorreu a partir de 1979 com o início da pesca de superfície com espinhel e isca viva no Sudeste/Sul.

Entre as primeiras espécies que compõem as capturas, destacam-se pelo alto rendimento econômico: Bonito Listrado (*Katsuwonus Pelamis*); Albacora Lage (*Thunnus Albacares*); Albacorinha (*Thunnus Atlanticus*); Bonito Cachorro (*Ausis Thazard*); Cavala (*Scomberomorus Cavalla*), entre outras.

Vários trabalhos JABLONSKI, S. and MATSUURA, Y. ^{|29|}; MATSUURA, Y. ^{|46|}; ZAVALA, C. ^{|67|} etc ..., têm sido realizados pela SUDEPE, Instituto de Pesca e pelo Instituto oceanográfico de São Paulo, com as espécies capturadas envolvendo: estudos de reprodução; análise de estrutura de populações, etc, objetivando fornecer subsídios para Estudos de Produção de Estoques realizados pela comissão Internacional para conservação de Atuns do Atlântico - ICCAT.

Recentemente, JABLONSKI e MATSUURA ^{|46|}, usando um procedimento de análise de Cohorte, obtiveram importantes,

resultados sobre estimativas por faixas etárias para taxas de mortalidade e biomassa do Bonito Listrado no Sudeste do Brasil.

A grande maioria dos estudos realizados com atuns e afins no Brasil para avaliação de estoques, versam sobre métodos envolvendo uma espécie e, geralmente utilizam modelos clássicos, tais como, BEVERTON-HOLT ⁵⁸, SHAEFFER ⁵⁸ e RICKER ⁵⁶.

Estudamos um modelo dinâmico de interação entre várias espécies à luz da teoria de controle ótimo considerando informações sobre captura e esforço para as três espécies: Bonito Listrado, Albacora Lage e Bonito Cachorro.

Dentro do cenário ecológico em estudo, estas três espécies constituem um grupo de competidores: não existindo na literatura, informações sobre espécies sistematicamente predadas de atuns; já que estes, pela sua perfeita forma aerodinâmica se movimentam com grande rapidez.

Devido a grandes dificuldades de identificar a classe de presas das espécies em estudo, o modelo de LOTKA-VOLTERRA passou a ser analisado sob o aspecto competidor, onde foi possível caracterizar o efeito inibidor da espécie j sobre a espécie i a partir de um modelo pseudo-gravitacional levando em consideração a distribuição espacial das áreas de pesca.

3.2. Regionalização de Áreas de Pesca

O controle sobre os dados de pesca de atuns no Brasil é realizado pela SUDEPE (superintendência do Desenvolvi-

mento da Pesca) que mantém informações sobre os sistemas de "Mapas de Bordo" e "Desembarque", SUDEPE, PDP/RJ [60].

As análises obtidas neste trabalho foram processadas a partir dos dados do Sistema de Mapas de Bordo, tomando-se a série mensal de captura (toneladas métrica) e esforço (dias de pesca) de 1979 a 1984 para cada bloco geográfico de 1º de lado.

A região de estudo correspondente ao Sudeste do Brasil conta com um total de 15 blocos geográficos, conforme Figura 6.

Estatísticas de capturas do Bonito Listrado (de maior abundância) para os dois sistemas em cada período trimestral são apresentados na Figura 5.

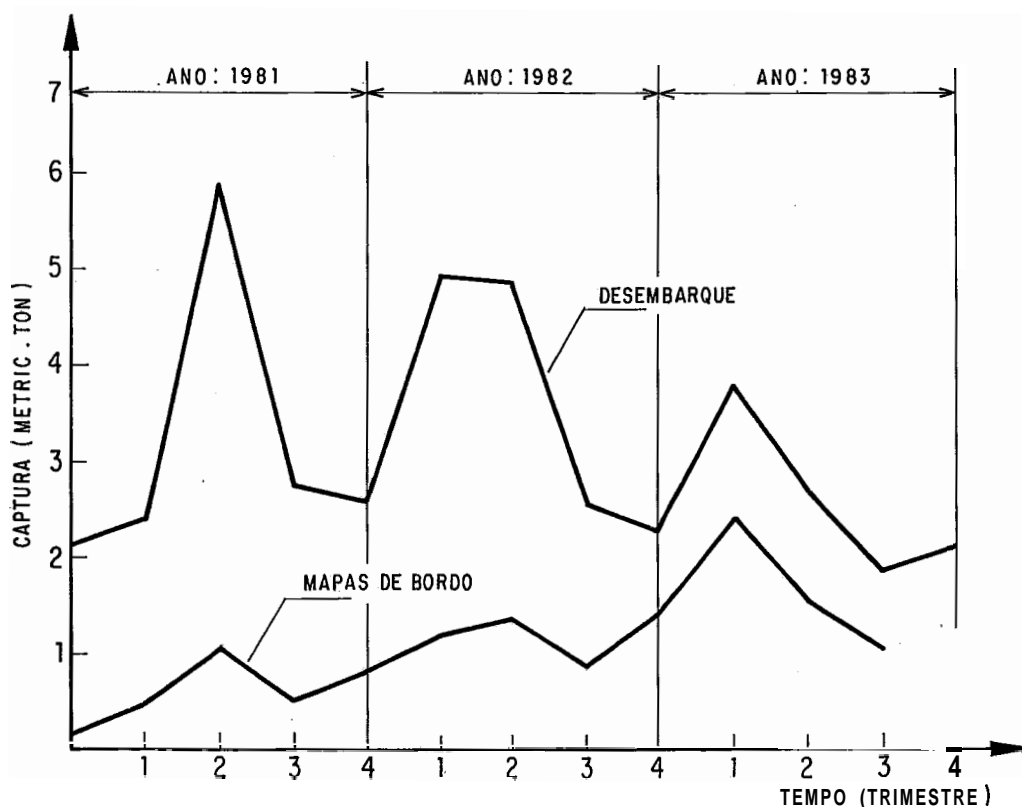


FIGURA 5- CAPTURA ANUAL DO BONITO LISTRADO CORRESPONDENTE A MAPAS DE BORDO E DESEMBARQUE DE 81-83 NO SUDESTE DO BRASIL.

A partir das variáveis Latitude, Longitude, Cap-
tura e esforço, obteve-se uma regionalização de áreas de pesca
no sentido de que estas áreas fossem as mais homogêneas possí-
veis. Esta caracterização foi obtida através de uma análise
de "cluster" (agregação de blocos mais semelhantes dentre cada
conglomerado do que entre conglomerados).

O procedimento utilizado foi o algoritmo das k-
médias que minimiza a variância dentro de cada "cluster" GO-
MES et alii |¹⁹| e THOMAZ et alii |⁶²|.

Assim foi possível determinar quais as regiões
mais abundantes para pescaria, permitindo definições de políti-
cas adequadas de exploração por áreas.

A melhor distribuição espacial obtida pela análi-
se de "cluster" apresentou quatro conglomerados contidos na re-
gião Sudeste conforme Figura 6 abaixo.

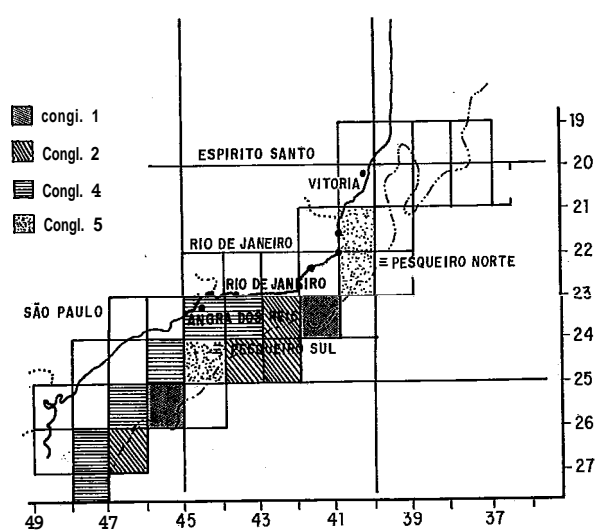


FIGURA 6 - DISTRIBUIÇÃO ESPACIAL ÓTIMA.

3.3. Identificação de Parâmetros

Sejam x_1, x_2 e x_3 as biomassas respectivamente do Bonito Listrado, Albacora Lage e Bonito Cachorro. Consideremos a dinâmica de interação entre estas espécies dada pelo sistema:

$$\frac{dx_1}{dt} = (r_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)x_1$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (r_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3)x_2$$

$$\frac{dx_3}{dt} = (r_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3)x_3$$

onde,

r_i são as taxas de crescimento de cada espécie;

a_{ij} o efeito inibidor da espécie j na espécie i ;

Assumimos que existe suficiente suprimento de alimentos para suportar cada população na ausência de outra população, de acordo com a logística de crescimento (1.1.6).

Existe uma grande dificuldade quanto à determinação dos parâmetros r_i e a_{ij} do sistema (3.3.1). Nós utilizamos um procedimento para aproximar o efeito inibidor a_{ij} baseado num modelo pseudo-gravitacional envolvendo a distribuição espacial definida anteriormente.

Inicialmente, obtivemos as biomassas (densidades populacionais) de cada espécie em cada área h_j através do mo-

delo de produção de estoque de FOX, W.W. [16]. A partir dos dados de captura e esforço, o algoritmo ajusta pelo método dos mínimos quadrados à logística de Shaefer considerando espécies isoladamente. A Tabela 1 contém as biomassas, e a produção máxima sustentável média de cada espécie por áreas calculadas pelo modelo de equilíbrio de Fox, que ainda determina os coeficientes de capturabilidade das espécies entre outros parâmetros.

Reescrevemos o sistema (3.3.1) sob a forma:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{r_i}{k_i} (k_i - \sum_{j=i}^3 \alpha_{ij} x_j) x_i ; i=1,3 \quad (3.3.2)$$

Observe-se que subsiste a seguinte relação entre a_{ij} e α_{ij} :

$$a_{ij} = \frac{r_i}{k_i} \alpha_{ij} \quad (3.3.3)$$

onde os coeficientes de competição a_{ij} podem ser aproximados por um modelo pseudo-gravitacional da forma:

$$\alpha_{ij} = \frac{\sum_{h=1}^s P_{ih} P_{jh}}{\sum_{h=1}^s P_{ih}^2} ; j=1,3 ; i=1,3 \quad (3.3.4)$$

sendo

P_{ih} = percentual do total da população da i -ésima espécie ocorrendo na h -ésima região

TABELA 1

Status do ecossistema de atuns na área de estudos
(toneladas métricas) (1979 - 1984)

		CLUSTER 1	CLUSTER 2	CLUSTER 3	CLUSTER 4	TOTAL
BONITO						
LISTRADO	MSY*	1079.1	3948.3	9469.2	5773.5	20270.
	VPS**	11099.1	7701.3	14433.3	7259.9	40492.
ALBACORA	MSY	82.2	969.3	72.9	261.9	1386.
LAGE	VPS	5002.8	1282.5	179.1	836.4	7301.
BONITO	MSY	1256.1	43.5	181.5	33.3	1514.
CACHORRO	VPS	2988.9	129.9	463.8	1651.2	5233.

* MSY - Maximum sustainable yield

VPS - Virgin population size

k_i = nível de saturação da espécie i (na ausência de outras espécies).

s = número de regiões

3.4. Sistema Dinâmico Perturbado

Quando a população descrita por (3.3.2) está sujeita a perturbações impostas pelas taxas de pesca $u_i(t)$, podemos formular um modelo bioeconômico para o sistema dinâmico perturbado que permita avaliar as taxas de capturas sustentáveis de cada espécie:

\mathbb{P}_1 Maximizar:

$$J(u_1, u_2, u_3) = \int_0^{\infty} e^{-\delta t} \{ [P_1 - C_1(x_1)] u_1(t) + [P_2 - C_2(x_2)] u_2(t) + [P_3 - C_3(x_3)] u_3(t) \} dt \quad (3.4.1)$$

sujeito à:

$$\frac{dx_1}{dt} = (r_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)x_1 - u_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (r_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3)x_2 - u_2(t) \quad (3.4.2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = (r_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3)x_3 - u_3(t)$$

$$x_i(0) = x_i^0; \quad x_i(t) \geq 0$$

$$b_i \leq x_i(t) \leq a_i \quad (3.4.3)$$

$$0 \leq u_i(t) \leq u_i^{\max}$$

onde:

r representa o retorno líquido (lucro) da exploração pesqueira;

P_i representa o preço unitário da pesca de cada espécie i ;

c_i são os custos unitários da pesca de cada espécie i ;

δ é a taxa de desconto considerada constante em $[\underline{0}, \bar{T}]$;

u_i são as taxas de captura de cada espécie i .

As perturbações $u(t) : [\underline{0}, \bar{T}] \rightarrow U$ são funções contínuas por parte representando controles admissíveis.

Tal modelo obviamente envolve um grande número de simplificações e abstrações sobre o real comportamento biológico da população.

Estas simplificações serão discutidas neste trabalho e muitas delas, serão agregadas ao modelo geral de controle Ótimo tratado em 3.5.

Os modelos determinísticos do tipo acima são geralmente válidos sob determinadas hipóteses que assumiremos verdadeiras para nosso estudo:

1. Distribuição uniforme de populações de atuns na região;
2. Não congestionamento de barcos de pesca;
3. Não saturação de apetrechos de pesca;
4. Os coeficientes a_{ij} estimados em (3.3.3) representam de fato o efeito de competição entre duas espécies

Partiremos do princípio que o problema \mathbb{P}_1 admite uma solução Ótima local sem nos preocuparmos todavia, em bus-

car "condições de existência"; isto é: o funcional J que representa o valor presente da pesca admite um equilíbrio em (x_1^*, x_2^*, x_3^*) .

Para determinar os níveis Ótimos de biomassa e as taxas de captura (x_i^*, u_i^*) é suficiente resolver o problema \mathbb{P}_1 .

Analizamos o problema \mathbb{P}_1 à luz da teoria de controle Ótimo CLARK, C.W. [10] onde as condições necessárias de optimalidade são estabelecidas pelo Princípio do Máximo de Pontryagin.

Por questões de simplicidade, denotamos as equações de estado de cada espécie por:

$$F_1(x_1, x_2, x_3) = (r_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3)x_1$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3) = (r_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3)x_2$$

$$F_3(x_1, x_2, x_3) = (r_3 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3)x_3$$

A função Hamiltoniana associada a \mathbb{P}_1 é dada por:

$$\begin{aligned} H &= e^{-\delta t} \{ [\bar{P}_1 - C_1(x_1)]u_1 + [\bar{P}_2 - C_2(x_2)]u_2 + [\bar{P}_3 - C_3(x_3)]u_3 + \\ &+ \lambda_1 [\bar{F}_1(x_1, x_2, x_3) - u_1] + \lambda_2 [\bar{F}_2(x_1, x_2, x_3) - u_2] + \lambda_3 [\bar{F}_3(x_1, x_2, x_3) - u_3] = \\ &= \{ e^{-\delta t} [\bar{P}_1 - C_1(x_1)]^{-\lambda_1} \} u_1 + \{ e^{-\delta t} [\bar{P}_2 - C_2(x_2)]^{-\lambda_2} \} u_2 + \\ &= \{ e^{-\delta t} [\bar{P}_3 - C_3(x_3)]^{-\lambda_3} \} u_3 + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + \lambda_3 F_3 \end{aligned}$$

As equações adjuntas são:

$$\begin{aligned}
\frac{d\lambda_1}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_1} = e^{-\delta t} \left[C_1'(x_1)u_1 - \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_1} - \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \lambda_3 \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right] \\
\frac{d\lambda_2}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_2} = e^{-\delta t} \left[C_2'(x_2)u_2 - \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_2} - \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_2} - \lambda_3 \frac{\partial F_3}{\partial x_2} \right] \\
\frac{d\lambda_3}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_3} = e^{-\delta t} \left[C_3'(x_3)u_3 - \lambda_1 \frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \lambda_2 \frac{\partial F_2}{\partial x_3} - \lambda_3 \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \right]
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

Consideremos o caso em que a função "SWITCH"
 $\tau(t) = \frac{\partial H}{\partial u}$ se anula isto é: o caso de triplo controle singular:

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t) &= e^{-\delta t} \{P_1 - C_1(x_1)\} \\
\lambda_2(t) &= e^{-\delta t} \{P_2 - C_2(x_2)\} \\
\lambda_3(t) &= e^{-\delta t} \{P_3 - C_3(x_3)\}
\end{aligned} \tag{3.4.5}$$

Diferenciando o sistema (3.4.5), equacionando com (3.4.4) e levando em consideração que $u_i = F_i - \dot{x}_i$, temos após simplificações o seguinte sistema:

$$\begin{aligned}
&\left[\bar{P}_1 - C_1(x_1) \right] \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \left[\bar{P}_2 - C_2(x_2) \right] \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \left[\bar{P}_3 - C_3(x_3) \right] \frac{\partial F_3}{\partial x_1} - C_1'(x_1) \left[\bar{F}_1 - \dot{x}_1 \right] = \\
&= \delta \left[\bar{P}_1 - C_1(x_1) \right] \\
&\left[\bar{P}_1 - C_1(x_1) \right] \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \left[\bar{P}_2 - C_2(x_2) \right] \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \left[\bar{P}_3 - C_3(x_3) \right] \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - C_2'(x_2) \left[\bar{F}_2 - \dot{x}_2 \right] = \\
&= \delta \left[\bar{P}_2 - C_2(x_2) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left[\bar{P}_1 - C_1(x_1) \right] \frac{\partial F_1}{\partial x_3} + \left[\bar{P}_2 - C_2(x_2) \right] \frac{\partial F_2}{\partial x_3} + \left[\bar{P}_3 - C_3(x_3) \right] \frac{\partial F_3}{\partial x_3} - C'_3(x_3) \left[\bar{F}_3 - \dot{x}_3 \right] = \\ & = \delta \left[\bar{P}_3 - C_3(x_3) \right] \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

Supondo que o sistema acima admite uma solução ótima $x = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$, então podemos reescrevê-lo sob a forma:

$$\begin{aligned} & \left[\bar{P}_1 - C_1(x_1) \right] \frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \left[\bar{P}_2 - C_2(x_2) \right] \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \left[\bar{P}_3 - C_3(x_3) \right] \frac{\partial F_3}{\partial x_1} - C'_1(x_1) F_1 = \delta \left[\bar{P}_1 - C_1(x_1) \right] \\ & \left[\bar{P}_1 - C_1(x_1) \right] \frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \left[\bar{P}_2 - C_2(x_2) \right] \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \left[\bar{P}_3 - C_3(x_3) \right] \frac{\partial F_3}{\partial x_2} - C'_2(x_2) F_2 = \delta \left[\bar{P}_2 - C_2(x_2) \right] \\ & \left[\bar{P}_1 - C_1(x_1) \right] \frac{\partial F_1}{\partial x_3} + \left[\bar{P}_2 - C_2(x_2) \right] \frac{\partial F_2}{\partial x_3} + \left[\bar{P}_3 - C_3(x_3) \right] \frac{\partial F_3}{\partial x_3} - C'_3(x_3) F_3 = \delta \left[\bar{P}_3 - C_3(x_3) \right] \end{aligned} \quad (3.4.7)$$

Nosso propósito é caracterizar o vetor de controle Ótimo u^* e a trajetória ótima x^* satisfazendo o problema \mathbb{P}_1 . Para isto, procedemos algumas transformações sobre o funcional J em (3.4.1).

Definimos o rendimento sustentável por:

$$R(x_1, x_2, x_3) = \left[\bar{P}_1 - C_1(x_1) \right] F_1 + \left[\bar{P}_2 - C_2(x_2) \right] F_2 + \left[\bar{P}_3 - C_3(x_3) \right] F_3 \quad (3.4.8)$$

onde,

R é uma função côncava positiva.

Podemos reescrever o sistema (3.4.7) sob a forma:

$$-\frac{\partial R}{\partial x_1} = \delta \left[\bar{P}_1 - C_1(x_1) \right]$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_2} = \delta [\bar{P}_2 - C_2(x_2)]$$

$$\frac{\partial R}{\partial x_3} = \delta [\bar{P}_3 - C_3(x_3)]$$

(3.4.9)

Obviamente quando $\delta = 0$, o sistema (3.4.9) define as condições necessárias de otimalidade para o rendimento máximo sustentável $\frac{\partial R}{\partial x_i} = 0$; $i=1,3$.

Mostraremos que as equações (3.4.9) determinam as condições ótimas de equilíbrio (x_1^*, x_2^*, x_3^*) para \mathbb{R}_1 .

A partir de (3.4.8) definimos uma função côncava positiva de classe C^2 por:

$$R_\delta(x_1, x_2, x_3) = R(x_1, x_2, x_3) - \delta [\bar{Z}_1(x_1) + Z_2(x_2) + Z_3(x_3)] \quad (3.4.10)$$

onde,

$$Z_1(x_1) = \int_{x_1^0}^{x_1} [\bar{P}_1 - C_1(\zeta_1)] d\zeta_1$$

$$Z_2(x_2) = \int_{x_2^0}^{x_2} [\bar{P}_2 - C_2(\zeta_2)] d\zeta_2 \quad (3.4.11)$$

$$Z_3(x_3) = \int_{x_3^0}^{x_3} [\bar{P}_3 - C_3(\zeta_3)] d\zeta_3$$

com,

$$x_1^0 = x_1^0(0) \quad ; \quad x_2^0 = x_2^0(0) \quad ; \quad x_3^0 = x_3^0(0)$$

Observe-se que as Equações (3.4.9) ainda consti-

tuem condições necessárias de otimalidade (maximização) da função R_δ e que as restrições das variáveis de estado $x_i \geq 0$ não foram incorporadas em (3.4.9). Como estas restrições podem estar ativas na solução Ótima, as condições (3.4.9) podem ser substituídas pelas condições de Kuhn-Tucker para maximização de funções restritas.

Para caracterizar as condições de otimalidade (3.4.9) para \mathbb{P}_1 , substituímos $u_i = F_i - \dot{x}_i$ no funcional J assim:

$$J = \int_0^\infty e^{-\delta t} \{ [P_1 - C_1(x_1)] [F_1 - \dot{x}_1] + [P_2 - C_2(x_2)] [F_2 - \dot{x}_2] + [P_3 - C_3(x_3)] [F_3 - \dot{x}_3] \} dt \quad (3.4.12)$$

De 3.4.11 temos que,

$$\dot{z}_1 = [P_1 - C_1(x_1)] \dot{x}_1 ; \dot{z}_2 = [P_2 - C_2(x_2)] ; \dot{z}_3 = [P_3 - C_3(x_3)] \quad (3.4.13)$$

Assim, o funcional J pode ser reescrito sob a forma:

$$J = \int_0^\infty e^{-\delta t} \{ [P_1 - C_1(x_1)] F_1 + [P_2 - C_2(x_2)] F_2 + [P_3 - C_3(x_3)] F_3 - \dot{z}_1 - \dot{z}_2 - \dot{z}_3 \} dt$$

Integrando o funcional J por partes obtemos:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty e^{-\delta t} \{ [P_1 - C_1(x_1)] F_1 + [P_2 - C_2(x_2)] F_2 + [P_3 - C_3(x_3)] F_3 - \delta z_1 - \delta z_2 - \delta z_3 \} dt = \\ &= \int_0^\infty e^{-\delta t} R_\delta(x_1(t), x_2(t), x_3(t)) dt \end{aligned} \quad (3.4.14)$$

Vemos então que as Equações (3.4.9) constituem condições necessárias de otimalidade para o funcional J ; isto é: existe uma trajetória (x_1^*, x_2^*, x_3^*) tal que:

$$R_\delta(x_1^*(t), x_2^*(t), x_3^*(t)) \geq R_\delta(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$$

para toda trajetória viável $(x_1(t), x_2(t), x_3(t))$

Estendemos o conceito da existência da trajetória ótima (x_1^*, x_2^*, x_3^*) incluindo as restrições dadas em (3.4.3) que podem ser reescritas sob a forma:

$$F_1(x_1, x_2, x_3) - u_1^{\text{máx}} \leq \dot{x}_1 \leq F_1(x_1, x_2, x_3)$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3) - u_2^{\text{máx}} \leq \dot{x}_2 \leq F_2(x_1, x_2, x_3)$$

$$F_3(x_1, x_2, x_3) - u_3^{\text{máx}} \leq \dot{x}_3 \leq F_3(x_1, x_2, x_3) \quad (3.4.15)$$

Nosso problema consiste em determinar sobre a superfície R_δ (Figura 9), o melhor caminho entre o ponto inicial (x_1^0, x_2^0, x_3^0) e (x_1^*, x_2^*, x_3^*) ou equivalentemente encontrar funções $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ que atendam (3.4.2), satisfaçam (3.4.3) de tal modo que a função R_δ cresça o mais rapidamente possível.

Para contornar as dificuldades apresentadas em (3.4.15) vamos considerar o problema mais simples no qual estas restrições são do tipo:

$$A_1 \leq \dot{x}_1 \leq B_1$$

$$A_2 \leq \dot{x}_2 \leq B_2$$

$$A_3 \leq \dot{x}_3 \leq B_3$$

(3.4.16)

onde A_i e B_i são constantes.

Pelo teorema das funções implícitas temos:

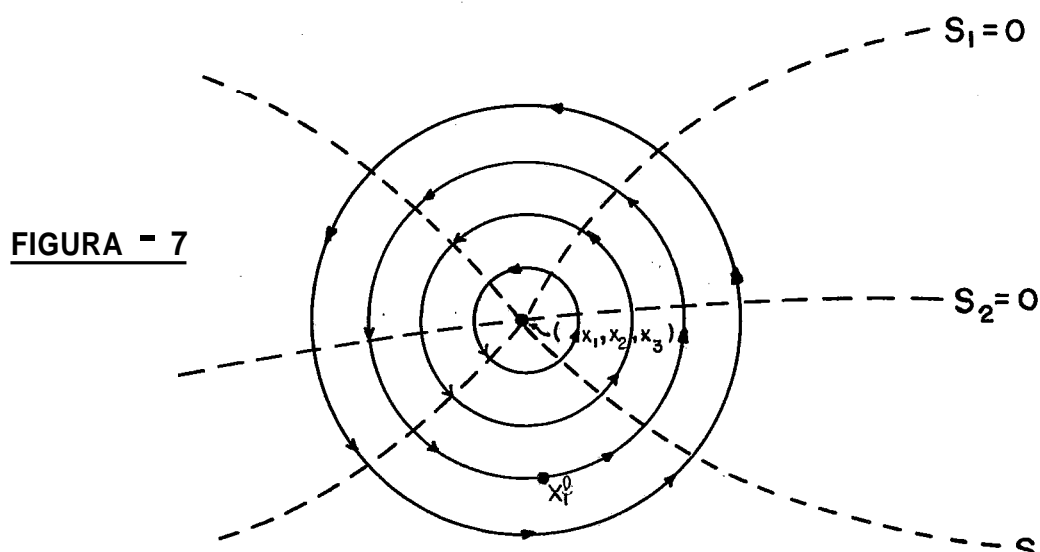
$$\frac{dR_\delta}{dt} = \frac{\partial R_\delta}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial R_\delta}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial R_\delta}{\partial x_3} \dot{x}_3 \quad (3.4.17)$$

Para maximizar (3.4.17) devemos ter:

$$\dot{x}_1 = \begin{cases} A_1 & \text{se } \frac{\partial R_\delta}{\partial x_1} < 0 \\ B_1 & \text{se } \frac{\partial R_\delta}{\partial x_1} > 0 \end{cases} ; \quad \dot{x}_2 = \begin{cases} A_2 & \text{se } \frac{\partial R_\delta}{\partial x_2} < 0 \\ B_2 & \text{se } \frac{\partial R_\delta}{\partial x_2} > 0 \end{cases} ; \quad \dot{x}_3 = \begin{cases} A_3 & \text{se } \frac{\partial R_\delta}{\partial x_3} < 0 \\ B_3 & \text{se } \frac{\partial R_\delta}{\partial x_3} > 0 \end{cases}$$

As curvas $S_1 = \frac{\partial R_\delta}{\partial x_1} = 0$; $S_2 = \frac{\partial R_\delta}{\partial x_2} = 0$;

$S_3 = \frac{\partial R_\delta}{\partial x_3} = 0$ representadas no plano $x_1-x_2-x_3$ projetado, interceptam-se no ponto de equilíbrio (x_1^*, x_2^*, x_3^*) conforme Figura a seguir.



Cada trajetória Ótima dependendo do ponto inicial x_i^0 é obtida segundo a regra: a partir do ponto inicial (x_1^0, x_2^0, x_3^0) seguimos as curvas de níveis (círculos) da superfície parabólica R_δ até encontrarmos uma das curvas S_i . A partir daí, seguimos sobre S_k (k fixo) até o ponto (x_1^*, x_2^*, x_3^*) .

Este procedimento é equivalente a se deslocar sobre a superfície R_δ de x^0 até x^* o mais rapidamente possível.

Nós tentaremos agora justificar os argumentos acima usando o princípio do máximo. Inicialmente, constatamos que se A_i , B_i não são fixos como em (3.4.15), o princípio do máximo não se aplica, pois as variáveis de controle (por hipótese) não podem depender de variáveis de estado. É possível mostrar aplicando-se o princípio do máximo que a trajetória obtida com as restrições (3.4.15) não é Ótima,

Para maximizar J em (3.4.14) sujeito às restrições (3.4.16) introduzimos novas variáveis de controle $\dot{x}_1=v_1$, $\dot{x}_2=v_2$ e $\dot{x}_3=v_3$.

A função Hamiltoniano associada é:

$$H = e^{-\delta t} R_\delta(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 \quad (3.4.18)$$

De acordo com o princípio do máximo, o controle Ótimo $v = (v_1, v_2, v_3)$ deve maximizar a expressão H .

Como este problema é um problema variacional de controle linear, então, para maximizar (3.4.18), atendendo (3.4.16), v deverá satisfazer:

$$v_i(t) = \begin{cases} B_i & \text{quando } \lambda_i(t) > 0 \\ A_i & \text{quando } \lambda_i(t) < 0 \end{cases} ; \quad i=1,3 \quad (3.4.19)$$

AS variáveis de controle que assumem estes valores extremos são denominadas de controles "bang-bang" e $\tau(t) = \frac{\partial H}{\partial v} = h(t)$ são referidas como funções "switch".

Quando $\tau(t) = 0$ e $\tau(t) \neq 0$ temos o caso chamado triplo controle singular que corresponde à solução singular $x = x^*(t) = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$.

O princípio do máximo assegura portanto, que o controle ótimo $v_i = \dot{x}_i$ para o problema linear é uma combinação de controle "bang-bang" e controle singular.

De fato, se por exemplo apenas v_1 é singular, isto é, $v_1 \neq A_1$ ou B_1 temos que $\lambda_1 = 0$. Pelas equações adjuntas $\frac{dh_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_1}$ temos que $\lambda_1 = e^{-6t} \frac{\partial R_\delta}{\partial x_1} = 0$. Assim, a curva $\frac{\partial R_\delta}{\partial x_1} = 0$ corresponde a um controle semi-singular onde v_1 é singular com v_2 e v_3 controles 'bang-bang'.

As combinações possíveis para nosso problema são apresentadas na Tabela abaixo onde:

T = Controle singular ($v_i \neq A_i$ ou B_i) v_i não é "bang-bang";

N = Controle não singular ($v_i = A_i$ ou B_i) v_i é "bang-bang".

v_1	v_2	v_3		Pelas equações adjuntas:
T	N	N	\Rightarrow	$s_1 = 0$
T	T	N	\Rightarrow	$s_1 = 0$ e $s_2 = 0$
T	N	T	\Rightarrow	$s_1 = 0$ e $s_3 = 0$
T	T	T	\Rightarrow	$s_1 = 0$ e $s_2 = 0$ e $s_3 = 0$
N	T	T	\Rightarrow	$s_2 = 0$ e $s_3 = 0$
N	N	T	\Rightarrow	$s_3 = 0$
N	T	N	\Rightarrow	$s_2 = 0$

Observe-se que exceto sobre as curvas $s_i = 0$ todos os controles são "bang-bang" e que a solução exata do problema inicial não é conhecida. No entanto, é possível determinar a partir de x^0 uma única trajetória Ótima semi-singular passando por x^* . Dizemos que essa trajetória é uma aproximação para a solução do problema inicial.

Na Figura 8 abaixo damos uma interpretação gráfica do procedimento descrito em 3.4

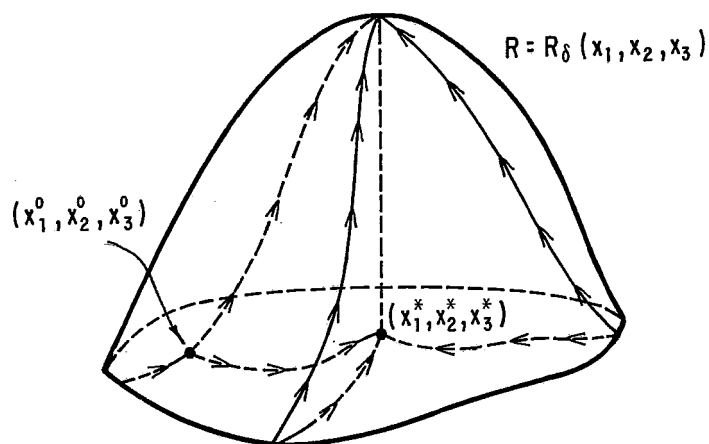


FIGURA 8 - SUPERFÍCIE DA FUNÇÃO OBJETIVO $R = R_\delta(x_1, x_2, x_3)$.

3.5. Modelo Aplicado à Captura de Atuns

Na literatura, existem vários modelos para tratamento de ecossistemas entre espécies marinhas sujeitos a contínuas perturbações causadas por pesca. A maioria destes trabalhos está baseada no estudo realizado por VOLTERRA, V. [66] sobre a flutuação na população de peixes no mar Adriático, o qual constitui a principal ferramenta sobre a teoria determinística de dinâmica de populações.

Geralmente, os modelos matemáticos que tentam descrever a dinâmica populacional de comunidades reais têm sido usados com limitados sucessos.

Tradicionalmente, modelos de populações de peixes são bastante simples a exemplo dos modelos de BEVERTON, R. J. and HOLT [8] e RICKER, W.E. [56] entre outros que tratam de espécies isoladas.

Uma série de trabalhos estimulados por MARGALEF [6] e formalizados com maior rigor matemático por PIELOU [52] deram início à estudos de modelos de interação entre multiespécies na tentativa de estabelecer medidas de abundância relativa das espécies envolvidas. MACARTHUR [6] discute vários aspectos sobre a estabilidade de comunidades e deduz considerações a respeito da transferência de energia entre populações. GARFINKEL [6] analisou sob aspectos teóricos, as propriedades de estabilidade de sistemas dinâmicos, usando o sistema predador-presa de LOTKA-VOLTERRA [41].

O uso de complexos modelos aplicados a ecossistemas requerem estimações de um grande número de parâmetros que

geralmente são usados para quantificar os efeitos de interação entre populações, além de outras características da dinâmica do sistema.

As recentes aplicações de técnicas de otimização a complexos ecossistemas dinâmicos têm recebido bastante atenção por parte de pesquisadores.

Atualmente, os comportamentos biológicos de interação multiespécies são formulados, usualmente, através de modelos matemáticos não-lineares que são analisados segundo técnicas de equações diferenciais não-lineares; cálculo de variações; programação matemática, etc.

Em particular, ressaltamos neste trabalho, procedimentos de controle Ótimo e programação não-linear na formulação do complexo ecossistema dinâmico de atuns no Sudeste do Brasil.

Inúmeros outros exemplos envolvendo ecossistemas perturbados podem ser formulados dentro desta classe geral de problemas.

A dinâmica geral de interação entre n -espécies de Volterra pode ser analisada pelo sistema de equações diferenciais abaixo:

$$\dot{x}_i = F_i(x_1, \dots, x_n) x_i = \tilde{F}_i(x_1, \dots, x_n) \quad ; \quad i=1, n \quad (3.5.1)$$

onde x_i são as densidades (biomassas) de cada espécie no tempo; $S_i = \frac{dx_i}{dt}$ denotam as taxas instantâneas de crescimento populacional de cada espécie e \tilde{F}_i são funções contínuas re-

presentando o efeito da interação sobre a taxa de reprodução da espécie i .

O nosso estudo se reduz a um caso particular do modelo de Volterra onde: as equações diferenciais são substituídas por equações de diferenças de 1ª ordem. Consideramos \tilde{F}_i como funções lineares das biomassas das espécies envolvidas; de forma que as taxas de crescimento populacional de cada espécie são funções quadráticas. O modelo se torna ainda mais comportado quando adotamos a medida de performance do sistema como sendo uma função linear representando o lucro da pesca no horizonte especificado.

Assim, o modelo de controle ótimo aplicado para determinar parâmetros do sistema envolvendo as três espécies mais abundantes de atuns no Sudeste do Brasil é apresentado sob a forma de sistemas de equações de diferenças:

$$\text{Maximizar } \sum_{t=t_0}^T e^{-\delta t} [P_1(t)u_1(t) + P_2(t)u_2(t) + P_3(t)u_3(t)]$$

sujeito a:

$$x_i(t+1) - x_i(t) = \left[r_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j \right] x_i - u_i(t) \quad ; \quad i=1,3$$

$$x_i(0) \text{ conhecido} \tag{3.5.2}$$

$$u_{\text{MIN}}^i(t) \leq u_i(t) \leq u_{\text{MAX}}^i(t)$$

$$x \geq X_i(t) \leq a_i$$

$$t=0, 1, 2, \dots, T \quad ; \quad i=1,3$$

As variáveis de estado são as densidades populacionais $x_i(t)$ de cada espécie; as variáveis de controle $u_i(t)$ representam as taxas de capturas sustentáveis de cada espécie;

δ é a taxa média de desconto no período $[\underline{T}_0, \overline{T}]$; $P_i(t)$ são os preços unitários de venda de cada espécie; r_i denotam as taxas líquidas de crescimento de cada espécie. Os coeficientes a_{ij} representam o efeito inibidor da espécie j sobre a espécie i . Estes coeficientes incorporam a distribuição espacial conforme descrito no item 3.3.

Devido à falta de dados sobre as populações em estudo, deixamos de incorporar no modelo as equações de estado por classes de idade.

3.6. Resolução do Modelo de programação Não-Linear

O modelo de programação não-linear adotado para estimar as trajetórias e as taxas de capturas das três espécies de atuns: Bonito Listrado (BOL), Albacora Lage (ALA) e Bonito Cachorro (BOC) maximizando o retorno líquido do investimento no horizonte $\pi = 10$ anos (1979-1988), está baseado no sistema de equações de diferenças abaixo:

$$\text{Maximizar } \sum_{t=0}^9 P(t) e^{-\delta t} [u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)]$$

sujeito a:

$$x_1(t+1) - x_1(t) = \left[1.63 - 4.04 \times 10^{-5} x_1(t) - 3.74 \times 10^{-5} x_2(t) - 3.72 \times 10^{-5} x_3(t) \right] x_1(t) - u_1(t)$$

$$x_2(t+1) - x_2(t) = \left[1.53 - 1.02 \times 10^{-5} x_1(t) - 2.09 \times 10^{-5} x_2(t) - 1.77 \times 10^{-5} x_3(t) \right] x_2(t) - u_2(t)$$

$$x_3(t+1) - x_3(t) = 1.14 - 1.250 \times 10^{-5} x_1(t) - 2.18 \times 10^{-5} x_1(t) - 2.18 \times 10^{-5} x_3(t) - x_3(t) - u_3(t)$$

$$0 \leq x_1(t) \leq 40492 \quad 0 \leq u_1(t) \leq 20270$$

$$0 \leq x_2(t) \leq 7301 \quad 0 \leq u_2(t) \leq 1386$$

$$0 \leq x_3(t) \leq 5233 \quad 0 \leq u_3(t) \leq 1514$$

$$x_1(0) = 20270 ; x_2(0) = 1386 ; x_3(0) = 1514$$

$$u_1(0) = 13671 ; u_2(0) = 910 ; u_3(0) = 48$$

$$t = 0, 1, 2, \dots, 10 \quad (3.6.1)$$

onde $P(t)$ é o preço de venda (considerado constante para as três espécies); $\delta = 0,08$ representa a taxa média de desconto no horizonte: 79-88; $x_i(t)$ $i=1,3$ são as biomassas e $u_i(t) = 1,3$ indicam as taxas de capturas sustentáveis de cada espécie.

O problema de controle para determinar trajetórias ótimas que levam o sistema (3.6.1) de um estado inicial (x_0, u_0) a um estado final (x^*, u^*) maximizando o retorno líquido do investimento da pesca foi modelado como um problema de programação não-linear e resolvido usando o código computacional GRECO (Gradiente Reduzido para Controle Ótimo).

Os resultados se encontram na Tabela a seguir.

BIOMASSAS E TAXAS DE CAPTURAS (TON)	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985	1986	1987	1988
BOL = x_1^*	48.0	48.2	48.4	48.9	50.6	47.3	46.4	48.3	45.6	46.2
ALA = x_2^*	5.7	5.6	5.7	5.7	11.0	9.5	10.2	10.6	10.7	10.5
BOC = x_3^*	8.8	10.6	13.6	9.9	20.7	19.8	9.1	22.2	23.4	20.8
CAP _{BOL} = u_1^*	21.6	23.1	24.7	18.0	29.6	28.1	29.1	11.9	9.8	13.2
CAP _{ALA} = u_2^*	0.7	0.7	0.7	0.7	6.0	0.9	1.7	1.7	1.9	1.9
CAP _{BOC} = u_3^*	0.5	1.5	1.3	1.5	1.3	1.8	1.8	1.6	1.8	2.0

TABELA 2 - Estimativas de Estoques e Capturas de Atuns no Sudeste do Brasil

O valor Ótimo da função objetivo $z^* = 4836.19$

Consideramos a solução x^*, u^* para $t=7$ (ano 1985) ...

Estudamos os resultados para dois casos: sistema não perturbado e sistema perturbado, onde tentamos analisar algumas características de interação competitiva entre as espécies selecionadas, com ausência e presença de capturas.

Convém observar que no modelo logístico de crescimento (3.6.1) assumimos por questões de simplificação que a pesca é o Único fator que reduz a população.

Consideramos inicialmente a dinâmica de crescimento (3.6.1) com ausência de pesca descrita sob a forma:

$$x_1(t+1) - x_1(t) = \left[r_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 \right] x_1 = f_1(x_1, x_2, x_3) x_1$$

$$x_2(t+1) - x_2(t) = \left[r_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 - a_{23}x_3 \right] x_2 = f_2(x_1, x_2, x_3) x_2$$

$$x_3(t+1) - x_3(t) = [r_3 - a_{32}x_1 - a_{32}x_2 - a_{33}x_3]x_3 = f_3(x_1, x_2, x_3)x_3 \quad (3.6.2)$$

onde os parâmetros r_i e a_{ij} estão especificados em (3.6.1); f_i são funções representando os efeitos de reprodução e mortalidade de cada espécie e $\Delta_i = x_i(t+1) - x_i(t)$, $i=1,3$ indica a taxa de crescimento da espécie i .

"Se $x_i > 0$ para $t=0$ no sistema (3.6.2) então $x_i > 0$ para todo t ".

Assim, dado um ponto inicial positivo, as trajetórias das espécies no tempo são também positivas. As trajetórias geradas pelo sistema (3.6.2) correspondentes às espécies Bonito Listrado (x_1), Albacora Lage (x_2) e Bonito Cachorro (x_3) são representadas abaixo onde as funções $x_i(t+1) \geq 0$ com $x_i(0) > 0$.

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= \frac{5.1402x_1(t)}{1+0.00010224x_1(t)+0.000094702x_2(t)+0.000094171x_3(t)} \\ x_2(t+1) &= \frac{4.6320x_2(t)}{1-10.000242985x_1(t)+0.00049763x_2(t)+0.000419772x_3(t)} \\ x_3(t+1) &= \frac{4.1206x_3(t)}{1+0.000275657x_1(t)+0.000480650x_2(t)+0.000480767x_3(t)} \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

$$x_1(0) = 20270 \quad x_2(0) = 1386 \quad x_3(0) = 1514$$

$$t = 0, 1, 2, \dots, 10 .$$

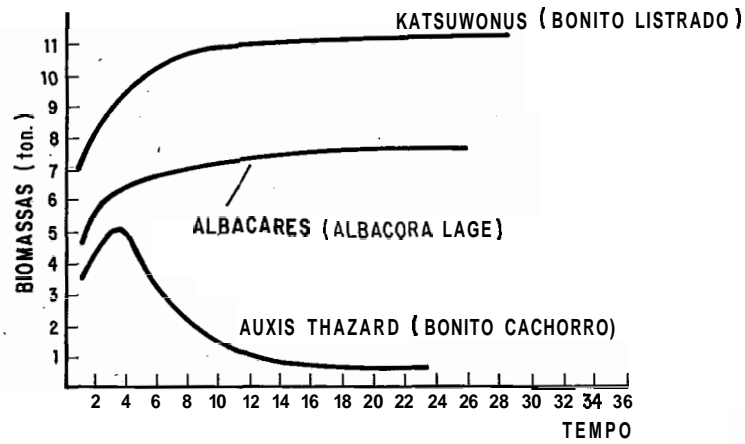


FIGURA 9 - TRAJETÓRIA DAS ESPÉCIES.

Estabelecemos algumas hipóteses sobre o sistema 3.6.2 no que diz respeito aos aspectos de interação competitiva entre as três espécies:

- a) Um acréscimo em qualquer uma das três populações produz um decréscimo na taxa de crescimento Δ_i , $i=1,3$ de todas as três populações. É fácil observar em 3.6.2 que:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} < 0 \quad i, j = 1, 3$$

- b) Se todas três populações são muito pequenas então elas podem aumentar simultaneamente porém não indefinidamente; portanto:

$$f_i(0,0,0) = r_i > 0 \quad ; \quad i=1,3$$

- c) Uma população quando muito pequena, não pode aumentar se as outras duas populações atingem um certo tamanho.

De acordo com a hipótese c, excluimos da análise dos resultados do nosso modelo a espécie BOC (Bonito Cachorro) por apresentar baixa densidade populacional na região de estudo. Sua eliminação do modelo não foi baseada no princípio de exclusão de Voltarra, pois não podemos assegurar sua extinção devido principalmente a falta de informações de ordem biológica. Um outro resultado que nos conduziu à exclusão da espécie BOC foi fornecido pela análise de estabilidade do sistema dinâmico 3.6.2 o qual apresentou grande instabilidade. O ponto de equilíbrio do sistema 3.6.2, onde as taxas de crescimento de cada espécie se anulam ($\Delta_i = 0$) é fornecido pela solução positiva do sistema abaixo.

$$r_i - \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j = 0 \quad , \quad i=1,3 \quad (3.6.4)$$

com r_i e a_{ij} especificados em 3.6.1. A solução de 3.6.4 para valores reais de r_i e a_{ij} é dada por:

$$x_1^* = 74.686 \quad ; \quad x_2^* = 39.453 \quad ; \quad x_3^* = 20.219$$

Os autovalores associados à matriz de comunidades

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right)_{x^*} \quad \text{para } j=1,3 \quad ; \quad i=1,3 \quad \text{são } \lambda_1 = -0.09987, \lambda_2 = 0.18098, \lambda_3 = 0.08615.$$

No plano $x_3 = 0$, analisamos as "isoclinas" (curvas onde $\dot{x}_i = 0$) das duas espécies BCL e ALA na vizinhança do ponto de equilíbrio; isto é:

$$\begin{aligned} r_1 - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 &= 0 \\ r_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2 &= 0 \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

Neste espaço de fase, o diagrama de composição das duas espécies coexistindo pode ser representado em qualquer instante t pelo par $(x_1(t), x_2(t))$, conforme Figura 10 abaixo.

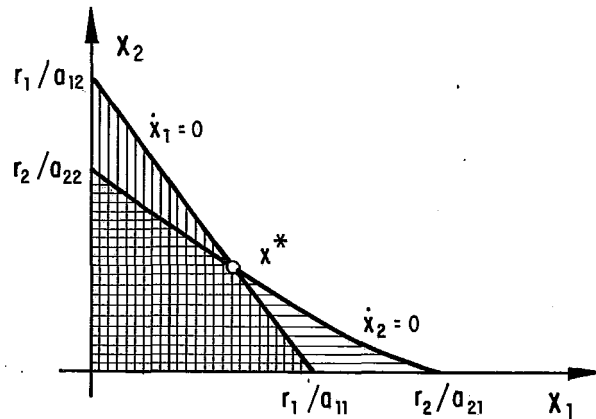


FIGURA 10 - CURVAS DE NÍVEIS DO SISTEMA 3.6.2 PARA DUAS ESPÉCIES.

Teoricamente, as duas espécies com esta configuração deverão permanecer inalteradas indefinidamente. À medida que o tempo passa, as curvas integrais de cada espécie tendem a x^* para qualquer ponto inicial. As curvas $\dot{x}_1=0$ e $\dot{x}_2=0$ em 3.6.5 dividem o plano em quatro zonas conforme Figura 11, onde as setas indicam as direções das curvas integrais quando o tempo cresce.

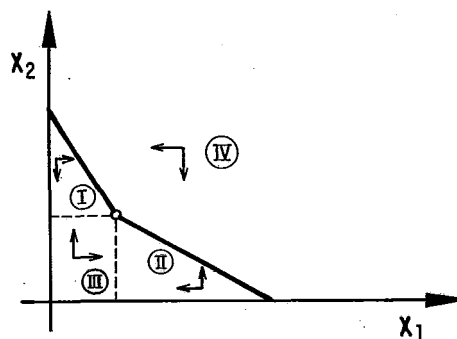


FIGURA 11

CAPÍTULO IV

CONSTRUÇÃO E AVALIAÇÃO DO MODELO DE PESCA DE ATUNS

4.1. Estimativas do Estoque de Populações Exploradas

Devido à grande densidade de atuns da espécie Bonito Listrado na região Sudeste do Brasil, direcionamos nosso estudo no sentido de obter através de técnicas de otimização, um maior número de parâmetros do sistema da espécie mais abundante. Como os modelos de interação entre multiespécies analisados nos Capítulos anteriores apenas determinam parâmetros referentes a biomassa e taxas de capturas, optamos em analisar um procedimento que incorpore além destes, outros importantes parâmetros tais como, coeficiente de capturabilidade, taxa de mortalidade natural, taxa de novos recrutas, etc.

Descrevemos o modelo dinâmico uniespécie através de uma versão modificada do método de estimativas de populações proposto por ALLEN |⁵|. O método original é capaz de calcular o tamanho da população (x) considerando constantes os seguintes parâmetros: coeficiente de capturabilidade (q); taxa de mortalidade natural (M) e taxa de novos recrutas (w). A versão estendida aqui proposta, além de determinar o tamanho da população (x), considera os parâmetros acima como variáveis a serem determinadas dinamicamente através do tempo.

A estratégia ótima para estimar alguns parâmetros do ecossistema do Bonito Listrado é formulada por um modelo de controle Ótimo que minimiza a soma dos quadrados das diferenças entre a captura atual e a esperada para cada período

com restrições sobre as equações de estado e controle.

Suponhamos que numa população explorada são conhecidos a captura (C_k) e o esforço (E_k) no tempo k . Para estimar o tamanho da população (x_k); a capturabilidade (q_k); a taxa de mortalidade natural (M_k) e a proporção de novos recrutas (w_k) no k -ésimo período, usamos o seguinte procedimento dinâmico:

ANO 1

$$\text{população inicial} = X_1$$

$$\text{Sobrevivência no início do próximo período} = (X_1 - C_1) e^{-M_1}$$

$$\text{Captura esperada } \psi_1 = (X_1 - C_1/2) q_1 E_1$$

ANO 2

$$\text{População no início do segundo período} \quad X_2 = \frac{(X_1 - C_1) e^{-M_1}}{(1 - w_2)}$$

$$\text{Sobrevivência no início do próximo período} = \left[\frac{(X_1 - C_1) e^{-M_1}}{(1 - w_2)} - C_2 \right] e^{-M_2}$$

$$\text{Captura esperada} \quad \psi_2 = \left[\frac{(X_1 - C_1) e^{-M_1}}{(1 - w_2)} - C_2/2 \right] q_2 E_2$$

Para $k \geq 3$, o tamanho da população no início do período k é dado por:

$$X_k = \frac{e^{\sum_{i=1}^{k-1} M_i}}{e^{\sum_{i=2}^k (1-W_i)}} \left[X_1 - C_1 - \frac{C_2 (1-W_2)}{e^{-M_1}} - \frac{C_3 (1-W_2)(1-W_3)}{e^{-(M_1+M_2)}} - \dots - \frac{C_{k-1} \prod_{i=2}^{k-1} (1-W_i)}{e^{\sum_{i=1}^{k-2} M_i}} \right] \quad (4.1.1)$$

4.2. Estratégia Ótima para Avaliação de Parâmetros

Formuamos uma estratégia Ótima para determinar os parâmetros do ecossistema construindo um modelo de controle ótimo o qual minimiza um critério representando a soma dos quadrados dos erros entre a captura atual e a esperada em cada período.

O problema de programação não-linear equivalente com restrições nas variáveis q_k , M_k , W_k e ψ_k é dado por:

$$\text{Minimize } \left\{ \sum_{k=1}^N g_k(X_k, q_k, M_k, W_k) = \sum_{k=1}^N \left[C_k \left(1 + \frac{q_k E_k}{2} \right) - q_k E_k x_k \right]^2 \right\} \quad (4.2.1)$$

Sujeito à:

$$x_{k+1} - x_k = f(X_k, q_k, M_k, W_k) = (e^{-M_k} - 1 + W_{k+1}) X_k - C_k e^{-M_k} / (1 - W_{k+1}) \quad (4.2.2)$$

para $k = 1, 2, \dots, N-1$

$$b \leq x_k \leq a \quad (4.2.3)$$

$$0 \leq q_k \leq 1 ; 0 \leq M_k \leq 1 ; 0 \leq W_k \leq 1 \quad (4.2.4)$$

$k = 1, 2, \dots, N$

onde,

l_k e L_k : são os limites inferiores e superiores para captura esperada ψ_k ;

x_k : são variáveis de estado;

q_k, M_k e W_k : representam as variáveis de controle;

C_k e E_k : são conhecidos;

N : é o horizonte de planejamento;

a, b : limites das variáveis de estado.

O procedimento acima consiste em construir o tamanho da população nos sucessivos períodos, aplicando a taxa de sobrevivência (e^{-M_k}) no restante da população ($X_k - C_k$) e adicionando novas recrutas pela divisão do resultado por $(1 - W_k)$. A captura esperada para cada período é obtida multiplicando-se a população média estimada pelo coeficiente de capturalidade (q_k) vezes o esforço (E_k). Repetindo-se este processo sucessivamente, estimamos para cada período a população X_k e a captura esperada ψ_k .

A idéia básica dessa versão modificada é não considerar constantes os parâmetros de capturabilidade, mortalidade e taxas de novas recrutas como apresentado em ALLEN ^[5]. Este procedimento acarreta inevitavelmente uma formulação mais complexa do problema de otimização, devido o acréscimo do número de variáveis.

Conforme vimos em (2.4) o problema de controle

ótimo discreto é equivalente a um problema de programação matemática e portanto, pode ser resolvido através de métodos tipo GRG (Gradiente Reduzido Generalizado).

Para o problema (4.2.1) - (4.2.4) onde temos restrições nos controles, o princípio do máximo é substituído por:

$$u_k = \arg \max_{u \in U} H_k(x_k, u, \lambda_k)$$

O problema da programação não-linear (4.2.1) - (4.2.4) foi processado usando-se o algoritmo computacional GRG (Gradiente Reduzido Generalizado) com um total de 20 variáveis, 5 (cinco) restrições de igualdade, 10 (dez) restrições de desigualdades e 5 (cinco) períodos, com limitações sobre as variáveis de estado e controle.

Realizamos uma análise comparativa entre este procedimento e quatro outros métodos para avaliação de estoques de pesca existentes:

1. MÍNIMOS QUADRADOS PARA AJUSTAMENTO DE MODELOS DE PRODUÇÃO E ESTOQUE (Método de FOX ^[16])
2. ANÁLISE DE "COHORTE" (Modelo de LESLIE ^[37])
3. MODELO DE CONTROLE ÓTIMO (Desenvolvido neste trabalho)
4. MODELO DE GAUSE ^[17]

O primeiro modelo desenvolvido por FOX ^[16] para ajustamento da produção do estoque é descrito pela Equação de Bernoulli $g(x_t) = a x_t^m - b x_t$ onde $g(x_t)$ é a função de produção representando o efeito da reprodução e mortalidade natu-

ral; a , b e m são parâmetro e x_t é o tamanho da população no tempo t .

Cohorte analysis é um método baseado em matrizes de transição tipo LESLIE [37] contendo taxas de sobrevivência e fertilidade. O modelo é descrito pela dinâmica $x_{t+1} = M^t x_t$ onde x_t é a população estratificada por classes de idade e M é a matriz quadrada de transição no período t .

O terceiro método é o procedimento estudado no Capítulo III e o quarto método se baseia no algoritmo de projeção populacional proposto por GAUSE [17],

Apresentamos os resultados na Tabela 3.

Parâmetros Métodos	ANOS	Biomassa (metric ton.)	Coefficiente de Capturabilidade $q(x 10^{-1})$	Taxa de Mortalidade (M)	Taxa de Novos Recrutas (W)	Taxa de Captura (metric ton.)
MÉTODOS DE ALLEN ESTENDIDO	1979	40000	0.111	0.6	0.600	1818
	1980	32300	0.369	0.6	0.880	6070
	1981	32299	0.160	0.6	0.309	11857
	1982	24935	0.560	0.6	0.309	17922
	1982	32095	0.407	0.7	0.309	15517
MÉTODOS DE PRODUÇÃO E ESTOQUE DE FOX	1979	28887	0.47432			9726
	1980	39259				to
	1981	63474				33636
	1982	76057				
	1983	51273				
ANÁLISE DE COHORTE: MÉTODOS DE LESLIE	1979	[54617-78694]		D.6 to 0.8]		16400
	1983					31500
MODELO DE CONTROLE ÓTIMO	1979	19748				12482
	1980	23506				14062
	1981	25086				15414
	1982	25141				14233
	1983	25086				17364
MÉTODOS DE GAUSE	1979	19088				
	1980	32506				
	1981	38232				
	1982	39854				
	1983	40294				

TABELA 3 - Estimativas de Parâmetros Biológicos do Bonito Listrado para Diversos Modelos de Controle de Pesca.

4.3. Políticas Ótimas de Pesca

Pelo fato da espécie Bonito Listrado ser a mais abundante na área de estudo e também a mais rentável do ponto-de-vista econômico, optou-se por um estudo mais aprofundado sobre a referida espécie no que diz respeito à definição de políticas ótimas de capturas. Para isso, incorporamos duas outras componentes ao modelo: o ciclo de pesca e a demanda no mesmo período.

Consideremos, a partir de agora, o modelo ideal de pesca 3.4.1 - 3.4.3 restrito à espécie Bonito Listrado (BOL).

$$\text{Maximizar } \{J(u) = \int_0^T e^{-\delta t} R(u) dt\}$$

sujeito a:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - u(t)$$

$$x(0) = x_0$$

$$b \leq x \leq a$$

$$u_{\text{MIN}} \leq u \leq u_{\text{MAX}}$$

(4.3.1)

onde $R(u)$ é uma função representando o lucro da pesca e $F(x)$ é a logística de crescimento populacional.

O sistema (4.3.1) deixa de incorporar vários requerimentos de ordem prática. Qualquer política de pesca quando praticada em escala industrial deve levar em consideração, aspectos de conservação das espécies; mercado de demanda; níveis de estoques, etc, de forma que a pesca pode ser regulada objetivando a preservação contínua dos estoques ao longo do tempo. Por outro lado, as taxas de capturas não devem exceder certos limi-

tes que possam causar sérias discontinuidades nos estoques e possíveis extinções das espécies envolvidas.

No sentido de atender às necessidades mencionadas acima, formulamos o seguinte modelo de captura sob condições de preservação da espécie BOL.

$$\text{Maximizar } \{J(u) = \int_0^T e^{-\delta t} R(u) dt\}$$

sujeito a:

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - u(t)$$

$$\frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \geq D \quad (\text{demanda média})$$

$$x(0) = x_0$$

$$x(T) = x_0$$

$$b \leq x(t) \leq a$$

$$u \in U$$

(4.3.2)

onde T representa o período do ciclo da pesca não necessariamente pré-fixado; δ é a taxa de desconto. Note que as condições $x(0) = x_0$ e $x(T) = x_0$ são de conservação do nível do estoque no final de cada período da operação de pesca.

As condições necessárias de otimalidade podem ser estabelecidas pelo principio do máximo de Pontryagin:

A função Hamiltoniana associada a (4.3.1) é:

$$H = e^{-\delta t} R(u) + \lambda [F(x) - u]$$

Pelo principio do máximo temos que:

$$\lambda = \arg \left[\max_{\underline{u}} \underline{H} \right] = e^{-\delta t} R'(u)$$

Diferenciando a equação anterior temos:

$$\frac{d\lambda}{dt} = e^{-\delta t} \left[\delta R'(u) + R''(u) \frac{d}{dt} \right]$$

Por outro lado, as equações adjuntas conforme (2.2.2) são:

$$\frac{d\lambda}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial x} = - \lambda F'(x) = - e^{-\delta t} R'(u) F'(x)$$

Relacionando as duas últimas expressões temos:

$$\frac{du}{dt} = \frac{R'(u)}{R''(u)} [\delta - F'(x)] \quad (4.3.3)$$

A equação (4.3.3) juntamente com a equação de estado

$$\frac{dx}{dt} = F(x) - u(t) \quad (4.3.4)$$

constituem as condições necessárias de otimalidade para $u(t)$ e $x(t)$.

A Figura 13 representa o plano de fase do sistema de equações (4.3.3) e (4.3.4) que admite uma única solução para cada (x_0, u_0) inicial. Estas soluções constituem uma família de trajetórias no plano (x, u) . A análise geométrica destas trajetórias é melhor interpretada considerando as "isoclinas" isto é: as curvas onde $\dot{x}=0$ e $\dot{u}=0$ respectivamente. A isoclina- x é a curva $u=F'(x)$ enquanto que a isoclina- u é a reta $x=x^*$ onde $F'(x^*) = \delta$.

A interseção das duas isoclinas é o ponto de equilíbrio $(x^*, u^*) = (50.6, 29.6)$ que facilmente se verifica ser um

ponto de sela.

Observe-se que cada trajetória pode representar uma política ótima de pesca, pois u^* maximiza o funcional $J(u)$ em (4.3.1).

Várias alternativas para políticas ótimas de capturas podem ser estabelecidas dependendo obviamente das condições iniciais fornecidas nas regiões A, A', B ou B' da Figura 12.

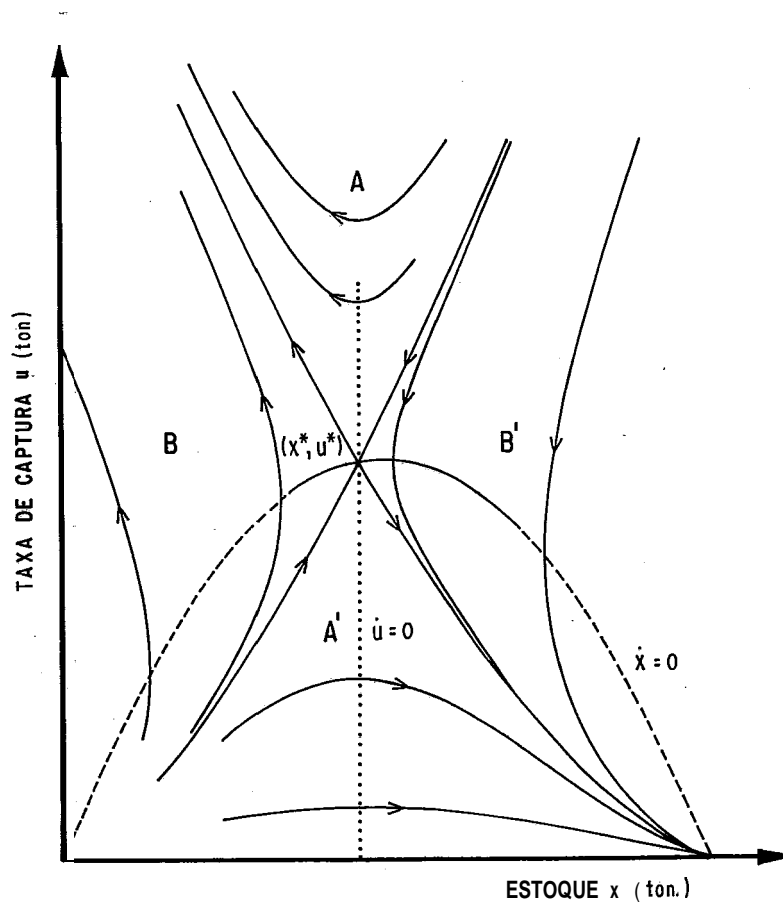


FIGURA 12- PLANO DE FASE DO SISTEMA NÃO LINEAR 3.7.3 e' 3.7.4.

Conseqüentemente, vários possíveis ciclos de pesca podem também ser estabelecidos. Obviamente, a condição básica para a definição de um ciclo de pesca é que a demanda D seja satisfeita.

Consideremos a restrição de Demanda do modelo (4.3.2) a qual denotaremos por:

$$r = \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} u(t) dt \geq \underline{r} \quad (4.3.5)$$

Uma condição de equilíbrio econômico para (4.3.5) é que $|\dot{r} - D| \leq \underline{\epsilon}$.

como caracterizar os valores de t_0 (início do ciclo de pesca) e τ (tamanho do ciclo)?

Para determinar estes valores, vamos inicialmente considerar uma política de pesca para o Bonito Listrado na região B onde $x_0 \leq x^*$ e $u_0 \leq u^*$ conforme Figura 13.

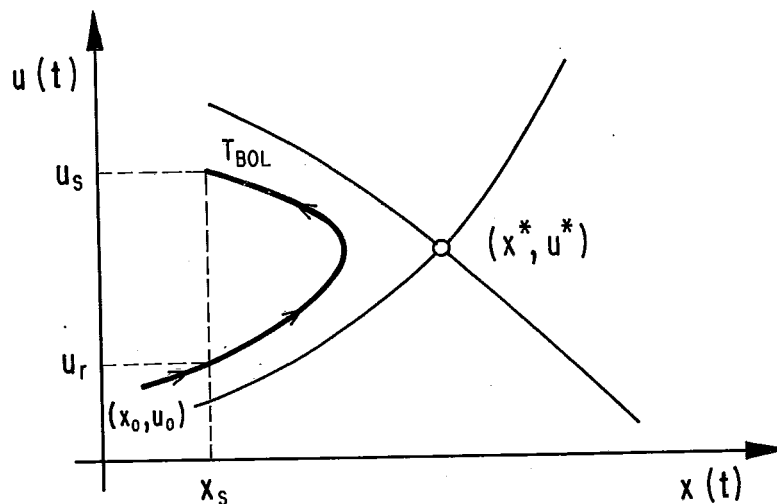


FIGURA 13-POLÍTICA ÓTIMA PARA CAPTURA DO BONITO LISTRADO.

Adotamos a política de pesca determinada pela trajetória \mathbb{T}^{BOL} onde o nível do estoque $x(t)$ cresce até um determinado valor e em seguida decresce, atingindo seu menor valor x_S (escolhido arbitrariamente $x_S \leq x^*$). Neste instante, a taxa de captura $u(t)$ decresce de u_S até u_r e o ciclo volta a se repetir.

Assim, t_0 é o tempo onde o nível x_S assume seu primeiro valor, isto é $x_S(t_0)$.

A duração do ciclo τ foi pré-fixado com o valor $\tau = 2.5$ baseado na série histórica da captura do Bonito Listrado apresentado na Figura 5.

As densidades populacionais (biomassas) e as capturas do BOL variam no tempo de acordo com a periodicidade abaixo:

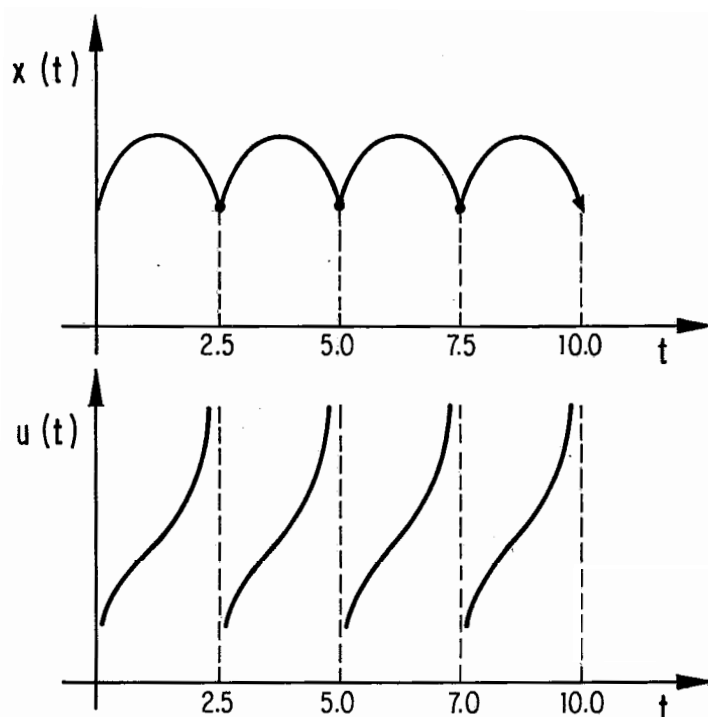


FIGURA 14 – CICLOS DE BIOMASSA E CAPTURA DO BONITO LISTRADO.

Analogamente muitas outras políticas de pesca podem ser analisadas nas diversas regiões A, A', B, B' dependendo do ponto inicial escolhido.

CAPÍTULO VRESULTADOS E CONCLUSÕES

A teoria determinística sobre dinâmica de populações leva em consideração aspectos matemáticos na formulação de modelos para tratamento de diversos modos de interação entre multiespécies. Dentro desse contexto, uma classe de ecossistemas dinâmicos podem ser modelados como problemas de programação matemática e resolvidos através de eficientes técnicas de programação não-linear.

A dinâmica do modelo aqui analisado, levou em consideração os seguintes aspectos:

1. A evolução do ecossistema foi estabelecida por equações de diferenças que incorporam características de competição entre espécies;
2. Os efeitos inibidores das espécies estudadas foram analisados através de um modelo pseudo-gravitacional que agrega distribuição espacial das espécies na área de estudo;
3. O ecossistema está sujeito a constantes perturbações causadas pelas taxas de capturas de cada espécie.

A formulação do modelo via equações de diferenças permitiu uma fácil adaptação a um problema de controle ótimo cuja solução numérica foi obtida com o uso de técnicas computacionais de programação não-linear.

A solução numérica foi obtida a partir dos dados sobre "captura" e "esforço" tomados dos "mapas de bordo" SUDEPE |⁶⁰| correspondentes às espécies: Bonito Listrado; Albacora Lage e Bonito Cachorro.

Devido ao curto período de exploração pesqueira de atuns costeiros no Sudeste do Brasil, tivemos sérias dificuldades em obter, aproximar ou mesmo simular determinados parâmetros inerentes ao modelo tais como: taxa líquida de crescimento (r_i) de cada espécie - obtida em |⁶⁰|; níveis de saturação (K_i) de cada espécie - obtidos pelo método de ajustamento de FOX |¹⁶|; efeito inibidor da espécie j sobre a espécie i ; (a_{ij}) - obtido por aproximação através de procedimentos envolvendo distribuição espacial conformes descrito em (3.3).

Do ponto-de-vista da aplicação, não foi possível implementar o modelo com características de predador-presa devido à falta de informações. Assim, o estudo consistiu em analisar um ecossistema de competição entre as três espécies.

Na função objetivo
$$\sum_{t=0}^T e^{-\delta t} [P_i(t) - C_i(t)] u_i(t)$$
 deixamos de incorporar por questões de simplificações, os custos $C_i(t)$ por unidade de pesca para cada espécie e consideramos os preços médios unitários $P_i(t)$ de venda de cada espécie conforme controle da SUDEPE-RJ |⁶⁰|.

Sanadas estas dificuldades, analisamos a formulação do modelo de controle ótimo para estimar as densidades populacionais de cada espécie (variáveis de estado) e as taxas

de capturas sustentáveis (variáveis de controle) na região Sudeste do Brasil.

A caracterização do ponto inicial $(x_0(t), u_0(t))$ para executar o modelo (3.6.1) pelo código CREGO exigiu várias tentativas no sentido de que o ponto inicial fosse viável isto é: as variáveis de estado $x(t)$ e de controle $u(t)$ deveriam atender a dinâmica do sistema e também satisfazerem as condições limites em cada período $t=1, 2, \dots, 10$.

Procedemos uma análise comparativa com os resultados aqui encontrados para o ecossistema de atuns no Sudeste do Brasil (79-84) com estimativas de biomassas e capturas de cada espécie considerando dois casos:

- CASO A - Estudo isolado para cada espécie (Método de FOX);
- CASO B - Estudo de competição interativa (Modelo de Controle Ótimo).

Os dois casos foram estudados sob o mesmo período (79-84) e em média os resultados estão na Tabela a seguir.

ESTOQUES ESPÉCIES	C A S O A		C A S O B	
	BIOMASSA (ton)	CAPTURA (ton)	BIOMASSA (ton)	CAPTURA (ton)
Bonito Listrado	57661	20360	38896	18406
Albacora Lage	31154	14100	7301	4390
Bonito Cachorro	2882	1080	746	300

TABELA 4

Observe-se todavia que estes resultados estão subestimados, uma vez que os estoques obtidos a partir dos mapas de bordo correspondem aproximadamente a 80% dos estoques apresentados nos controles de desembarque conforme Figura 6.

Embora o modelo geral aqui apresentado em (3.5.2) se proponha a estudar ecossistemas marinhos com características competidor-predador-presa e tendo sido implementado apenas sob o aspecto competidor, esperamos ser viável sua aplicação a outros tipos de espécies semelhantes onde possamos dispor de mais informações de ordem biológica.

Nosso trabalho nos leva a uma conclusão: ecossistemas de recursos renováveis quando estudados à luz de controle-ótimo e programação não-linear onde se tenta otimizar uma medida de performance da dinâmica, permitem análise e resultados mais aprofundados e confiáveis sobre comportamentos bioeconômicos de interação entre multiespécies.

BIBLIOGRAFIA

- | 1 | ABADIE, J. e CARPENTIER, J. - "Generalized of the Wolf
Reduced Gradient Methods to the Case of Nonlinear
Constraints, R. FLETCHER (ed), Academic Press, pp.191-211
(1969).
- | 2 | AGNEW, T.T. - Optimal Exploitation of a Fisher Employing
a Nonlinear Harvesting Function - Ecological Modeling,
Vol.6, pp.47-57 (1979).
- | 3 | ANDERSON, L. G. - The Economics of Fisheries Management,
The Johns Hopkins University Press (1977).
- | 4 | JACQUARD, A. - The Genetic Structure of Populations,
Springer-Verlag: Biomathematics, Vol.5
- | 5 | ALLEN, K.R. - Some Methods for Estimating Exploited
Populations, Journal of the Fisheries Res. Board of
Canada 23(10), pp.1553-1579 (1966).
- | 6 | ATKINSON, C.A. - Analysis of Perturbed Dynamic System
Under Parameter Uncertainty - A Nonlinear Programming
Approach with Applications to Marine Ecosystems; Tese
de Ph.D., University of California, Los Angeles
(1980).
- | 7 | BARTLETT, M.S. - On Theoretical Models for Competitive
and Predatory Biological Systems, Biometrika 44,
pp.27-42 (1957).
- | 8 | BEVERTON, R.J. e HOLT - Manual of Methods for Stock
Assessment, Part II - Tables of Yield Functions -
FAO - FIB/T38.

- |⁹| BURTON, T.A. - Modeling and Differential Equations in Biology, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol.58 (1978).
- |¹⁰| CLARK, C.W. - Mathematical Bioeconomics, Wiley and Sons (1976).
- |¹¹| CANON, M.D., CULLUM, C.D. Jr. and POLAK, E., Theory of Optimal Control and Mathematical Programming, McGraw-Hill Book Company (1970)
- |¹²| DOUBLEDAY, W.G., Harvesting in Matrix Population Models, Biometrics, Vol.31(1); pp.189-200 (1975).
- |¹³| DONALD, E.K., Optimal Control Theory: An Introduction, Prentice Hall Inc. (1970).
- |¹⁴| FACÓ, J.L.D., Commande Optimale des Systèmes Dynamiques Non Linéaires à Retards avec Contraintes d'intégralité sur l'état et la Commande: une spécialisation de la Méthode GRG, Tese de Dr. Ing., Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), (Abril 1977).
- |¹⁵| FAO - Some Scientific Problems of Multispecies Fisheries Technical Paper n° 181 (1978).
- |¹⁶| FOX, W.W. - Fitting the Generalized Stock Production Model by Least-Squares and Equilibrium Approximation, Fishery Bulletin, Vol.73, n° 1 (1975).
- |¹⁷| GAUSE, G.F. - La Théorie Mathématique de la Lutte Pour la Vie, Hermann, Paris (1935).
- |¹⁸| GOMES, F. J. NEGREIROS and A. CLÉCIO F. THOMAZ - Stochastic Dynamic Optimization Cohort Model Applied to Lobster Population Harvesting in Northeast Brazil, Aceito no TMS XXVI International Meeting, Copenhagen - Denmark (1984).

- [¹⁹] GOMES, F. J. NEGREIROS AND A. CLÉCIO F. THOMAZ - Conglomerados Oceanográficos para caracterização de Áreas de Pesca, Publicado nos Anais do XVI SBPO, Florianópolis, SC (1983).
- [²⁰] GOODMAN, L. A. - Stochastic Models for the Population Growth of the Sexes, Biometrika, Vol. 53(3), pp. 469-487 (1968).
- [²¹] GOH, B. S. - Optimal Control of a Prey-Predator System, Mathematical Bioscience, V. 19, pp. 263-286 (1974).
- [²²] GREG, K. - An Introduction to Applied Optimal Control, Academic Press (1981).
- [²³] HELMER, J. Y. - La Commande Optimale en Economie, Dunod, Paris (1972).
- [²⁴] HOLOWAY, C. A. - Mathematical Programming Approach to identification and Optimization of a Class of Unknown System, Naval Research Logistics Quarterly, Vol. 19(1), pp. 663-679 (1972).
- [²⁵] HOLGATE, P. - An Estimator for the Size of an Animal Population, Biometrika, Vol. 60(1), pp. 135-140 (1973).
- [²⁶] INTRILIGATOR, M. D. - Mathematical Optimization and Economic Theory, Prentice Hall (1971).
- [²⁷] JACQUARD, A. - The Genetic Structure of Population, Biomathematics Volume 5, Springer-Verlag (1980).
- [²⁸] JAQUETTE, D. L. - Mathematical Models for Controlling Growing Biological Populations: A Survey, Operations Research, Vol. 20, Nº 6, pp. 1142-1151 (1972).
- [²⁹] JABLONSKI, S. and MATSUURA, Y. - Estimate of Exploitation Rate and Population Size of SKIJACK Tuna of the Southeastern Coast of Brazil, Bol. Oceanográfico (1984).

- | 30 | JAWAHAR, L.T. and HOBBIE, J.E. - Random Differential Equations as Models of Ecosystems: Monte Carlo Simulation Approach, Mathematical Bioscience, V.28, pp.25-55 (1976).
- | 31 | MOHEL, J.A. - Stability of a Nonlinear Volterra Equation, Adv.Math., pp.297-301 (1975).
- | 32 | JIM SHEE, C.T. - Bound on the Dominant Eigenvalue of a Population Projection Model, Mathematical Bioscience, 57, pp.175-190 (1981).
- | 33 | KEYFITZ, N. - Estimating the Trajectory of a Population, Proc. Fifth Berkeley Symposium: Math. Statist. Prob., V.4, pp.81-113 (1967).
- | 34 | KASKUREWICZ, E. and HSU, L. - On Qualitative Equilibria in Lotka-Volterra Model, American Control Conference, (1982).
- | 35 | KASZKUREWICZ, E. - Estabilidade de Sistemas Não-Lineares: Uma Abordagem Estrutural, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ (1981).
- | 36 | LESLIE, P.H. - On the Use of Matrices in Certain Population Mathematics, Biometrika 33, Vol. XXIII, Part III (1945).
- | 37 | LESLIE, P.H. - Some Further Notes on the Use of Matrices in Population Mathematics, Biometrika 35, pp.213-245, (1948).
- | 38 | LESLIE, P.H. and GROWER - The Properties of a Stochastic Model for the Predator - Prey Type of Interaction Between Two Species, Biometrika, Vol.47, pp.219-234 (1960).

- |³⁹| LEFKOVITCH,L.P. - The Study of Population Growth in Organisms Grouped by Stages, Biometrics, Vol.21, pp.1-18 (1965) .
- |⁴⁰| LEVINE,S.H. - Competitive interaction in Ecosystems, American Naturalist, Vol.110, n? 976 (1976) .
- |⁴¹| LOTKA,A.J. - Growth of Mixed Populations, J.Wash.Acad. Sci., V.22, pp.461-469 (1932).
- |⁴²| LUDWING,D. - Optimal Harvesting of a Randomly Fluctuating Resource 1: Application of Perturbation Methods, SIAM J.Appl.Math., vol.37, n? 1 (1979).
- |⁴³| LUENBERGER,D.G. - Introduction to Dynamic System, John Wiley & Sons (1979) .
- |⁴⁴| MACULAN,N.F. e BRAGA,L. P.V. - Aspectos Computacionais em Programação Linear, Instituto de Matemática, UFRJ, 1980.
- |⁴⁵| MENDELSSOHN,R. - Optimization Problems Associated with a Leslie Matrix, American Naturalist, Vol.110, n? 973, pp.339-349 (1976).
- |⁴⁶| MATSUURA,Y. - Perspectiva de Pesca de Bonitos e Atuns no Brasil, Ciência e Cultura, 34(3), (1981) .
- |⁴⁷| MARTIN,L.C. - Optimization in Ecology, Science, Vol.183 (1974) .
- |⁴⁸| MAY,R.M. and et alii - Management of Multispecies Fisheries, Science, Vol.205, pp.267-277 (1979) .
- |⁴⁹| MAY,R.M. - Stability and Complexity in Model Ecosystem, Princeton, New Jersey (1973) .
- |⁵⁰| NAKAMURA,M. - Some Programming Problems in Population Projection, Ops.Res., Vol.21, n? 5, pp.1048-1062 (1973) .

- |⁵¹| PONTRYAGIN,L.S. and et alii - The Mathematical Theory of Optimal Processes, John Wiley & Sons (1965).
- |⁵²| POOLE,R.W. - An introduction to Quantitative Ecology McGraw-Hill (1974).
- |⁵³| PAIVA,M.P. and GALL,J.Y. - Catches of Tunas and Tuna Like Fishes in the Longline Fishery Areas off the Coast of Brazil, Arq. Cienc. Mar 15(1), pp.1-18.
- |⁵⁴| PIET,D.K. and MARINO,G. - Some Remark on Periodic Harvesting of a Fish Population, Math.Bioscience, 56, pp.47-69 (1981).
- |⁵⁵| REED,W.J. - Stead State of Stochastic Harvesting Model, Math.Bioscience, V. 41, pp.273-307 (1978).
- |⁵⁶| RICKER,W.E. - Computation and Interpretation of Biological Statistics of Fisch Populations, Fish. Res. Board Con., Bull.191, pp.265-352 (1975).
- |⁵⁷| SYKES,Z.M. - On Discrete Stable Population Theory, Biometrics 25, pp. 285-293 (1969).
- |⁵⁸| SHAEFER,M.B. - Some Aspects of the Dynamic of Population Important to the Management of the Comerical Marine Fisheries, Bull. Inter-Amer.Trop.Tuna Comm., Vol.1 (2), pp.27-56 (1954).
- |⁵⁹| SHAEFER,M.B. - A Study of the Dynamic of the Fishery for Yellosfin Tuna in the Eastern Tropical Pacific Ocean - Bull. Inter-Amer.Trop.Tuna Comm , vol.2(6), pp.247-268 (1957).
- |⁶⁰| SUDEPE,PDP/RJ - Informe Sobre a Pesca de Atuns e Afins com Isca Viva (1979-1985).

- |⁶¹| TABAK,D. and KUO,B.C. - Optimal Control by Mathematical Programming, Prentice Hall (1971).
- |⁶²| THOMAZ,A.C.F.;NEGREIROS GOMES,F.J. and MACULAN,N. - Nonlinear Programming Approach for Computing Fish Stock Production Model Parameters with Application in Catch of Atlantic Tunas, Accepted in TIMS XXVI International Meeting, Copenhagen, Denmark (1984).
- |⁶³| THOMAZ,A.C.F.;NEGREIROS GOMES,F.J. and FACÓ,J.L.D. - Dynamic Ecosystem with Optimal Strategy for Catch of Tunas and Tuna Like Fishes in Southeastern Cost of Brazil, Accepted in 10th Triennial Conference on Operations Research (IFORS'84), Washington.
- |⁶⁴| VANCE,R.R. - Predation and Resource Partitioning in Predator-two Prey Model Communities, American Naturalist, Vol.112, nº 987, pp.797-813 (1978).
- |⁶⁵| WANDERMEER,J.H. - The Competitive Structure of Communities: An Experimental Approach with Protozoa, Ecology, Vol.50 (1969).
- |⁶⁶| VOLTERRA,V. - Leçons sur la Theorie Mathematique de le Lutte Gram la Vie, Gauthier Villars, Paris (1931).
- |⁶⁷| ZAVALA,C. - Alguns Aspectos sobre la Estructura Poblacionala del Rabil, Bol.Inst.Pesca São Paulo, Vol.5, nº 1 (1978).
- |⁶⁸| WAYNE,M.GETZ - Harvesting Models and Stock Recruitment Curves in Fisheries Management
- |⁶⁹| WARREN,A.D. and LASDON,L.S. - The Status of Nonlinear Programming Software - Ops.Res., Vol.27, nº 3, pp.431-456 (1979).