

METODOLOGIA DE EXPANSÃO DA CAPACIDADE DE FONTE
EM SISTEMAS INTERLIGADOS DE GERAÇÃO HIDROTERMOELÉTRICA

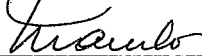
Gerson Couto de Oliveira

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS
DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO
DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.) EM ENGENHARIA
DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:



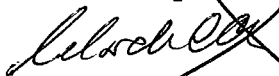
Prof. Sérgio Granville
(Presidente)



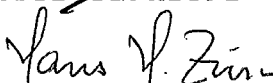
Prof. Nelson Maculan Filho



Dr. Mário Veiga Ferraz Pereira



Prof. Celso Carneiro Ribeiro



Prof. Hans H. Zurn

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 1987

OLIVEIRA, GERSON COUTO DE

Metodologia de Expansão da Capacidade de Ponta em Sistemas Interligados de Geração Hidrotermoelétrica (Rio de Janeiro) 1987.

VII, 110 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1987)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

I. Assunto: Planejamento da Expansão de Sistemas de Geração Hidrotermoelétrica.

I. COPPE/UFRJ II. Título (Série)

AGRADECIMENTOS

Ao Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL) pelo apoio e suporte material necessário à realização deste trabalho.

Aos professores Sérgio Granville e Nelson Maculan Filho pela orientação, incentivo e apoio ao meu programa de doutorado.

Aos colegas e amigos Mário Veiga F. Pereira e Sérgio Henrique F. da Cunha pela grande colaboração e participação no desenvolvimento da metodologia.

Ao Departamento de Geração da ELETROBRÁS pela contribuição no estabelecimento das aplicações da metodologia e no financiamento do projeto de desenvolvimento deste trabalho pelo CEPEL.

À Maria Olívia Vasconcelos Luzio por sua paciência e eficiente datilografia.

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

METODOLOGIA DE EXPANSÃO DA CAPACIDADE DE PONTA EM SISTEMAS INTERLIGADOS DE GERAÇÃO HIDROTERMOELÉTRICA

Gerson Couto de Oliveira

Dezembro de 1987

Orientador: Sérgio Granville

Programa : Engenharia de Sistemas e Computação

O planejamento da expansão da capacidade de ponta em sistemas interligados tem por objetivo estabelecer quando e onde deverão ser instalados novos equipamentos de geração e de interligação de forma a garantir um atendimento econômico e confiável dos crescentes requisitos de potência do mercado consumidor. Estes objetivos são em geral conflitantes visto que uma maior confiabilidade só é obtida a custa de investimentos adicionais. Este trabalho apresenta uma metodologia de expansão adequada à sistemas hidrotermoelétricos interligados que incorpora explicitamente restrições probabilísticas de confiabilidade. O trabalho consistiu em elaborar uma extensão de técnicas de decomposição a um contexto probabilístico e no desenvolvimento de algoritmos especializados de solução do problema de expansão probabilística. Exemplos e casos teste com um sistema brasileiro são apresentados e descritos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

PEACK CAPACITY EXPANSION METHODOLOGY FOR INTERCONNECTED
HYDROTHERMAL GENERATING SYSTEMS

Gerson Couto de Oliveira

December, 1987

Chairman : Sérgio Granville

Department: Computation and Systems Engineering

Peak capacity expansion planning of interconnected systems aims to establish when and where new generation and interconnection equipments will be installed in order to guarantee the economic and reliable supply of the increasing power needs of the demand. These objectives are in general conflicting, since a greater reliability is only obtained with additional investments. This work presents a methodology for capacity expansion of hydrothermal systems which explicitly incorporates probabilistic reliability constraints. It consisted in the extension of decomposition techniques to a probabilistic environment and the development of specialized algorithms to solve the probabilistic expansion problem. Examples and case studies with a Brazilian system are presented and discussed.

ÍNDICE

I.	INTRODUÇÃO	1
II.	PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO DE SISTEMAS HIDROTERMOELÉTRICOS INTERLIGADOS	4
	II.1 EXPANSÃO PARA ATENDIMENTO DA DEMANDA DE ENERGIA E DA DEMANDA DE PONTA	4
	II.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	7
III.	FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROGRAMA DE EXPANSÃO DE CAPACIDADE DE PONTA	10
	III.1 EXPANSÃO ESTÁTICA	10
	III.2 EXPANSÃO MULTI-ESTÁGIO (DINÂMICA)	13
IV.	APLICAÇÃO DE DECOMPOSIÇÃO EM PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA	15
	IV.1 DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS	15
	IV.2 EXTENSÃO PROBABILÍSTICA	25
	IV.3 EXEMPLO	29
V.	APLICAÇÃO DE DECOMPOSIÇÃO AO PROBLEMA DE EXPANSÃO	37
	V.1 SUBPROBLEMA DE OPERAÇÃO-CONFIABILIDADE DE SISTEMAS INTERLIGADOS	38
	V.2 SUBPROBLEMA DE INVESTIMENTO	40
VI.	ANÁLISE DA CONFIABILIDADE DE SISTEMAS HIDROTERMOELÉTRICOS INTERLIGADOS	42
	VI.1 MODOS DE FALHA DO SISTEMA INTERLIGADO	42
	VI.2 ÍNDICES DE CONFIABILIDADE E SENSIBILIDADES	46
	VI.3 MÉTODO DE INTEGRAÇÃO DIRETA	51
	VI.4 MÉTODO DE MONTE CARLO	57
	VI.5 COMPARAÇÕES E CASOS EXEMPLO	72

VI.6	EXTENSÃO DO CÁLCULO DE SENSIBILIDADES PARA OBTENÇÃO DE CORTES DE BENDERS	81
VII.	ESTRATÉGIAS DE SOLUÇÃO DE SUBPROBLEMA DE INVESTIMENTO	87
VII.1	CASO ESTÁTICO	87
VII.2	CASO DINÂMICO	91
VII.3	HEURÍSTICAS	93
VIII.	RESULTADOS COMPUTACIONAIS	94
VIII.1	EXPANSÃO ESTÁTICA	95
VIII.2	EXPANSÃO DINÂMICA	96
IX.	CONCLUSÕES	100
	APÊNDICE	103
	FORMULAÇÃO ALTERNATIVA DO PROBLEMA E ADAPTAÇÃO DA METODOLOGIA PROPOSTA.	
	REFERÊNCIAS	108

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O parque gerador brasileiro é predominantemente hidroelétrico, sendo caracterizado por grandes reservatórios plurianuais existentes nas principais bacias hidrográficas situadas nas regiões norte, nordeste, sudeste e sul do país. O parque térmico tem um peso pequeno na geração média do sistema (13% da geração em 1984), basicamente concentrado nas regiões sul (usinas a carvão) e sudeste (usinas nucleares e óleo). Os sistemas regionais de geração, inicialmente concebidos para atender aos mercados locais, vêm sofrendo um processo de interligação (Sul-Sudeste, Norte-Nordeste), possibilitando a transmissão da potência de aproveitamentos distantes dos centros de cargas regionais (Norte para Nordeste) e também possibilitando tirar partido da complementaridade (ou independência) de regimes hidrológicos entre regiões (Sul e Sudeste).

A expansão do sistema hidrotermoelétrico interligado brasileiro se depara com uma nova realidade: o pequeno potencial hidroelétrico remanescente nas regiões de maior participação na carga total (sudeste, um pouco mais no sul e nordeste), enquanto que há um grande potencial hidroelétrico pouco explorado no norte que, entretanto, está distante dos principais centros de carga. Deste modo, há que se pesar as vantagens das alternativas de construção de usinas mais caras próximas dos centros de carga (térmicas, algumas hidráulicas) contra as vantagens das alternativas de aproveitamento de usinas distantes mais baratas e a transmissão da potência nelas geradas por longas distâncias até os centros de carga.

O planejamento da expansão do sistema interligado é usualmente dividido em duas etapas: expansão de energia (usinas e interligações necessárias ao atendimento da demanda de energia prevista) e expansão de ponta (motorizações adicionais nas usinas e reforços de interligações necessárias ao atendimento da demanda de ponta prevista).

Esta divisão é utilizada para simplificar a abordagem do problema de expansão cuja complexidade é devido às seguintes características:

- i) grande porte: o número de alternativas é expressivo, sendo necessário determinar a sequência em que os investimentos devem ser efetuado ao longo do período de planejamento e as datas de entrada correspondentes;
- ii) não separável: a política de operação das usinas hidroelétricas em um dado estágio é função do custo esperado de operação futura do sistema interligado, visto que o único custo associado à geração hidráulica decorre do custo da geração do parque térmico utilizada no atendimento das demandas previstas no período. Deste modo, a decisão de investimento está condicionada à operação futura das usinas do sistema interligado que, por sua vez, é função das decisões de investimento até o horizonte de planejamento;
- iii) estocástico: a capacidade de produção das usinas hidroelétricas é função do nível de armazenamento dos seus reservatórios que, por sua vez, depende das afluências a cada usina ao longo do período de planejamento. As afluências futuras a cada reservatório não podem ser previstas para intervalos longos, de modo que devem ser tratadas como variáveis aleatórias. Outras aleatoriedades se devem a flutuações nas cargas e a quebras nas unidades geradoras.

O planejamento da expansão da capacidade de ponta em sistemas interligados brasileiros tem sido feito por ajuste de tentativas: cada alternativa de expansão considerada é analisada por um modelo de confiabilidade para verificar os níveis de risco resultantes. Entretanto, o modelo de confiabilidade atualmente utilizado (OLIVEIRA, CUNHA, GOMES (1)) só é capaz de tratar até dois sistemas interligados, não sendo possível considerar simultaneamente as interligações Sul-Sudeste, Sudeste-Norte e Norte-Nordeste. Ademais, o custo

computacional do modelo de confiabilidade impede a análise de um grande número de alternativas, de modo que a obtenção da alternativa de mínimo custo por este procedimento é impraticável.

Neste trabalho, propõe-se formular o problema de expansão da capacidade de ponta (descrito em detalhe no Capítulo II) como um problema de programação estocástica. A formulação é apresentada no Capítulo III, inicialmente no caso de expansão estática e em seguida generalizada para o caso de expansão multi-estágio (dinâmica). No Capítulo IV mostra-se como o método de decomposição de Benders generalizado para o caso estocástico pode ser usado para resolução de problemas de programação estocástica. Em seguida (Capítulo V), apresenta-se a aplicação do método de decomposição ao problema de expansão de ponta, desenvolvendo-se os subproblemas de operação e de investimento resultantes da decomposição. No Capítulo VI, descrevem-se dois métodos de solução do subproblema de operação (análise de confiabilidade) e a derivação do corte de Benders a partir da análise de confiabilidade. Estratégias de solução do subproblemas de investimento são discutidas no Capítulo VII, tanto no caso de expansão estática quanto no de expansão dinâmica.

Experiências computacionais com um programa computacional desenvolvido para implementar os algoritmos propostos são relatados no Capítulo VIII com exemplos de expansão estática e dinâmica para o sistema Sul-Sudeste composto de 5 áreas (regiões). O resultado da aplicação da metodologia proposta aos casos estudados possibilita tirar algumas conclusões que são relatadas no Capítulo IX. Apresenta-se ainda em Apêndice uma alternativa à formulação proposta e o tratamento a ser-lhe dado.

CAPÍTULO II

PLANEJAMENTO DA EXPANSÃO DE SISTEMAS
HIDROTERMOÉLETRICOS INTERLIGADOSII.1 EXPANSÃO PARA ATENDIMENTO DA DEMANDA DE ENERGIA E
DA DEMANDA DE PONTA

O planejamento da expansão da energia em sistemas interligados visa determinar quais usinas (hidráulicas e térmicas) e quais interligações devem ser construídas a cada estágio do período de estudo com custo atualizado mínimo, atendendo às demandas regionais de energia a um nível de garantia de suprimento pré-fixado. Neste caso, o não atendimento dos mercados previstos decorre da possibilidade de ocorrência de déficits de energia, causados por falta d'água nos reservatórios decorrentes de longos períodos de estiagem e/ou limites de intercâmbio de energia entre regiões. O planejamento da expansão de ponta tem como objetivo determinar quais usinas hidroelétricas devem receber motorizações adicionais e quais interligações devem ser reforçadas a cada estágio do período de estudo com custo atualizado mínimo de modo a atender às demandas regionais de ponta a um nível de garantia de suprimento pré-fixado. A falha no atendimento da ponta não é causada por déficits de energia (previsíveis, que podem durar meses), mas por déficits de potência (redução da disponibilidade de ponta nas usinas), devidos a: perda de queda nos reservatórios por deplecionamento, falhas nas unidades geradoras e limites de intercâmbio de potência entre regiões. As interrupções resultantes destes efeitos são imprevisíveis, de curta duração e, em sua maioria, ocorrem durante as horas de maior demanda.

O desacoplamento do planejamento da expansão nestas duas etapas é justificado pelos efeitos distintos dos fenômenos causadores de déficits de demanda de energia e ponta. Deste modo, o problema de expansão de energia pode ser resolvido primeiramente, decidindo-se os investimentos nas usinas e interligações necessárias ao atendimento das

demandas de energia para os níveis de garantia fixados. Dadas estas decisões, o problema de expansão de ponta é então resolvido de modo a atender os mercados de ponta para os níveis de garantia de ponta fixados.

Tanto o problema de expansão de energia quanto o de ponta são estocásticos, visto que se deseja garantir o atendimento das demandas previstas com um determinado nível de garantia de suprimento. Dadas as incertezas envolvidas (afluências futuras aos reservatórios do sistema, falhas nos equipamentos e flutuações nas cargas), o critério de garantia de suprimento visa criar um compromisso entre o nível de investimento e a qualidade do atendimento das demandas previstas.

O risco de não atendimento da demanda de energia em sistemas hidrotermoelétricos é estimado pela simulação da operação do sistema para diversas hipóteses de sequências de afluências futuras aos reservatórios. Modelos de simulação da operação como o MSSSE/ELETOBRÁS (2) são capazes de avaliar os riscos ao longo do período de estudo para uma alternativa de expansão do sistema.

O método de cálculo do risco de não atendimento da demanda de ponta se vale da simulação energética efetuada para cada condição hidrológica para obter uma amostra de potências unitárias disponíveis nas usinas hidroelétricas em cada estágio do período de estudo (a potência unitária em uma usina hidroelétrica é função do nível de armazenamento do seu reservatório). Um modelo de confiabilidade (CUNHA, OLIVEIRA, GOMES E PEREIRA (3)) é utilizado para calcular o risco para cada evento desta amostra, e o risco global é finalmente calculado tomando-se a média dos riscos calculados da amostra. Este enfoque é utilizado devido ao desacoplamento existente entre operação para energia e ponta: estudos realizados em diversos sistemas (CUNHA, OLIVEIRA, GOMES E PEREIRA (3)) mostram que as falhas em unidades geradoras não são suficientes para alterar a operação de sistemas brasileiros para o atendimento da demanda de energia, de modo que o efeito das falhas na capacidade de atendimento da demanda de ponta pode ser avaliado para cada sequência hidrológica simulada.

A restrição de garantia de suprimento da ponta em

cada estágio é expressa em termos do índice de confiabilidade ser inferior a um critério de planejamento. Os índices mais utilizados em estudos de confiabilidade de ponta são a probabilidade de perda de carga (LOLP) e o valor esperado da demanda não suprida (EUD) do sistema. A restrição de garantia de suprimento também pode ser exigida para o sistema interligado como um todo ou então estabelecer-se uma restrição para cada sistema regional (área).

As demais restrições do problema de expansão de capacidade de ponta incluem datas mínimas de motorizações adicionais e intervalos mínimos entre motorizações adicionais de usinas hidroelétricas: uma usina só pode ser supermotorizada a partir do estágio em que se completou sua motorização definida na etapa de expansão para atendimento das demandas de energia; os intervalos mínimos se devem ao tempo de instalação e testes de uma unidade na usina. Esta classe de restrições também é válida para reforços em interligações: datas mínimas de instalação de incrementos de capacidade face ao cronograma de construção de interligações na etapa de expansão de energia e intervalo mínimo entre instalações de incrementos sucessivos de capacidade de uma interligação.

O plano de expansão da capacidade de ponta deve ter um custo atualizado de investimento mínimo. Os custos esperados de operação térmica precisam ser considerados na expansão para energia, em que a política de operação das térmicas dadas as disponibilidades de geração hidráulica é decidida em função das restrições de garantia de suprimento e dos custos de geração térmica. Como em geral as térmicas do sistema brasileiro são operadas na base e a decisão de ligar térmicas é feita na etapa de operação do sistema para energia, neste trabalho o custo esperado de operação não será incluído na função objetivo do problema de expansão da capacidade de ponta.

II.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Os métodos desenvolvidos para expansão da capacidade de ponta de sistemas elétricos são de origem recente, com a característica de terem sido desenvolvidos para sistemas com parque térmico, e considerando geração e carga concentrados em um único sistema. O uso de técnicas de decomposição de Benders na solução do problema de expansão de geração de sistemas térmicos surgiu com NOONAM e GIGLIO (4), que utilizaram uma aproximação determinística para modelar o subproblema de operação e resolvê-lo por programação linear. Uma restrição de confiabilidade foi incluída no subproblema mestre, através de uma aproximação não-linear gaussiana da LOLP. Anteriormente, SCHWEPPE et al (5), e BEGLARI, LAUGHTON (6) já haviam introduzido técnicas de decomposição na solução do problema, utilizando entretanto heurísticas ao invés de cortes de Benders e não havendo portando garantia de convergência. COTÉ (7) apresentou em 1979 um método baseado em decomposição de Benders com subproblema estocástico resolvido por simulação probabilística, e com subproblema de investimento com restrição de confiabilidade que era modelada por uma função não linear ajustada a priori para o sistema em estudo, sem ser atualizada ao longo das iterações de Benders.

Mais recentemente, BLOOM (8) apresentou uma metodologia similar à de COTÉ mas capaz de gerar os coeficientes dos cortes de Benders a partir do modelo de simulação probabilística de BOOTH (9). A versão inicial sofreu diversos aperfeiçoamentos visando torná-la capaz de analisar sistemas térmicos de grande porte e visando também uma modelagem mais realista da variável de decisão (adição de capacidade) por tipo de usina (nuclear, gás, carvão, óleo). Esta modelagem das decisões de investimento em termos de capacidade (variáveis contínuas) visava tornar o subproblema de investimento linear; entretanto a aproximação da restrição de confiabilidade (expressa em termos da EUD do sistema) gerada pelos cortes de Benders resulta em situações de não convexidade. A não convexidade decorre do fato da confiabilidade de uma unidade de 500 MW, por exemplo, ser bastante distinta da confiabilidade de 5 unidades de 100 MW. Embora a economia de escala em termos de custo favoreça a

unidade de 500 MW, a confiabilidade de 5 unidades de 100 MW é maior, sendo essencial que o modelo de confiabilidade utilizado no subproblema de operação represente este efeito e explicitamente o ganho (ou perda) da confiabilidade devido a adição/retirada de unidades geradoras no corte de Benders gerado para cada alternativa de expansão. Este problema foi minorado pela substituição do modelo de simulação probabilística do subproblema de operação por uma modelagem baseada em aproximação de Gram-Charlier (BLOOM, CARAMAMIS e CHARNY, (10)), sem entretanto eliminá-lo totalmente. Isto só se torna possível modelando-se as variáveis de decisão como variáveis 0/1 como apresentado e discutido neste trabalho.

A busca de métodos de menor custo computacional levou PARK, LEE e YOUN (11) a propor simplificações na modelagem de falhas nas unidades geradoras e nas flutuações nas cargas. Usando a hipótese de distribuições gaussianas para ambos, e modelando as decisões de investimento como variáveis contínuas para cada tipo de usina eles elaboraram uma metodologia baseada também em decomposição, em que o subproblema de operação tem solução analítica. O subproblema mestre é modelado como um problema de controle ótimo em que cada restrição de confiabilidade é linearizada e tratada como um corte de Benders, sendo o problema resolvido por algoritmos de programação não linear. Este método resulta ser bem mais eficiente que o de BLOOM, embora a hipótese gaussiana não encontre justificativa para grande número de sistemas, e apresente os mesmos problemas decorrentes de modelar variáveis de adição de capacidade como variáveis contínuas.

Neste trabalho será utilizada uma modelagem mais precisa do subproblema de investimento para o caso de sistemas hidrotermoeletrônicos com preponderância hidráulica. O subproblema de operação também contempla as especificidades deste tipo de sistema, considerando ainda que o sistema é interligado com limites de intercâmbio de potência entre áreas. As decisões de investimento envolvem não só motorizações adicionais de usinas hidráulicas candidatas à expansão de ponta nas diversas áreas mas também eventuais

reforços de interligações para possibilitar a transmissão de potência de uma área para outra quando isto resultar em uma expansão econômica e confiável. Esta proposta visa a aplicação da metodologia no planejamento da expansão da capacidade de ponta do sistema interligado brasileiro, em que há alternativas de supermotorização de usinas junto aos principais centros de carga conjuntamente com várias opções de supermotorização de usinas distantes dos centros de carga definidas pelo planejamento de expansão de energia do sistema interligado.

CAPITULO III

FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE
EXPANSÃO DA CAPACIDADE DE PONTA

A formulação do problema será inicialmente feita considerando-se uma expansão para um estágio (estático), o que simplifica a notação e facilita o entendimento. Em seguida a formulação é estendida para o caso multi-estágio.

Será utilizada a seguinte notação:

- N - Número de áreas (regiões, subsistemas)
- M - Número de interligações entre áreas
- S - Matriz $N \times M$ de incidência
- I - Conjunto de usinas candidatas à motorização de ponta
- n_i - Número máximo de unidades que podem ser adicionadas na usina $i \in I$
- c_i - Custo de adição de uma unidade na usina $i \in I$
- J - Conjunto de interligações candidatas a reforço
- m_j - Número máximo de incrementos de capacidade na interligação $j \in J$
- q_j - Custo de um incremento de capacidade na interligação $j \in J$
- U - Critério (nível) de garantia de suprimento aceitável da demanda de ponta
- x_i - Número de adições de unidades na usina $i \in I$
- y_j - Número de incrementos de capacidade na interligação $j \in J$

III.1 EXPANSÃO ESTÁTICA

Seja $\bar{u}(x,y)$ a função valor esperado da demanda não suprida (EUD) do sistema para a decisão (x,y) , resultado da avaliação de confiabilidade do sistema com as adições (x,y) .

O problema de expansão estática pode ser formulado como:

$$\text{Min} \quad \sum_{i \in I} c_i x_i + \sum_{j \in J} q_j y_j \quad (\text{III.1})$$

s/a

$$\bar{u}(x,y) \leq U \quad (\text{III.2})$$

$$x_i \in \{0, 1, \dots, n_i\} \quad (\text{III.3})$$

$$y_j \in \{0, 1, \dots, m_j\} \quad (\text{III.4})$$

Restrições adicionais de investimento (por exemplo, restrições financeiras) da forma $Ax + By \geq b$ podem ser também incluídas na formulação (III.1)-(III.4).

A função $\bar{u}(x,y)$ pode ser caracterizada a partir do seguinte problema de programação linear (minimização de déficit no sistema interligado para a condição hidrológica h e nível de demanda ℓ):

$$u^{h\ell}(x,y) = \text{Min} \quad \sum_{i=1}^N r_i \quad (\text{III.5})$$

s/a

$$\sum_{j=1}^M s_{ij} f_j + \sum_{k \in A_i} g_k + r_i = d_i^\ell, \quad i = 1, N \quad (\text{III.6})$$

$$|f_j| \leq F_j(y), \quad j = 1, M \quad (\text{III.7})$$

$$g_k \leq G_k^h(x), \quad k \in A_i, \quad i = 1, N \quad (\text{III.8})$$

$$r_i \leq d_i^\ell, \quad i = 1, N \quad (\text{III.9})$$

onde:

- d_i^{ℓ} - Demanda na área i no nível ℓ
 A_i - Conjunto de usinas na área i
 $F_j(y)$ - Capacidade da interligação j dada a decisão y (suposta sem perda de generalidade não sujeita a falhas)
 $G_k^h(x)$ - Potência disponível na usina k na hidrologia h dada a decisão x (variável aleatória binomial supondo-se um modelo de falhas para unidades geradoras a dois estados)
 f_j - Fluxo na interligação j
 g_k - Geração na usina k
 r_i - Déficit (corte de carga) na área i

A equação (III.5) representa a conservação de potência na área i , e as restrições (III.6) - (III.8) definem os limites nas variáveis do problema. Note-se que sendo $u^{h\ell}(x,y)$ função da variável aleatória $G_k^h(x)$, é também uma v.a.. Denotando por E o operador valor esperado, $E\{u^{h\ell}(x,y)\}$ é a função EUD do sistema para a decisão (x,y) condicionada à hidrologia h e ao nível de carga ℓ . Supondo-se H condições hidrológicas equiprováveis (eventos de uma amostra de potências disponíveis obtida por um modelo de simulação) e representando-se as curvas de carga das áreas com L níveis (cada um com probabilidade α_{ℓ}) pode-se então exprimir a função EUD do sistema para a decisão (x,y) como a média de $E\{u^{h\ell}(x,y)\}$ nas hidrologias e níveis de carga:

$$\bar{u}(x,y) = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L \alpha_{\ell} E\{u^{h\ell}(x,y)\} \quad (\text{III.10})$$

A função $\bar{u}(x,y)$ definida por (III.10) pode ser interpretada como o resultado de um modelo de confiabilidade de sistemas interligados calculado no ponto (x,y) (vide Capítulo VI).

O problema de expansão estática (III.1) - (III.4) é um problema de programação estocástica inteira, que pode ser representado por um processo de decisão em dois estágios: no primeiro obtém-se uma decisão de investimento (x,y) que satisfaz (III.3) - (III.4) (subproblema de investimento); no segundo, avalia-se $\bar{u}(x,y)$ com um modelo de confiabilidade (subproblema de operação) que permite avaliar as consequências da decisão (x,y) em termos da confiabilidade do sistema.

III.2 EXPANSÃO MULTI-ESTÁGIO (DINÂMICA)

Supondo-se que o período de estudo seja dividido em T estágios, a notação anterior é estendida da seguinte forma:

- $c_i(t)$ - Custo atualizado ao estágio inicial de uma unidade da usina $i \in I$
- $q_j(t)$ - Custo atualizado ao estágio inicial de um incremento de capacidade na interligação $j \in J$
- $U(t)$ - Critério de garantia de suprimento para estágio t
- a_i - Data mínima (estágio) para usina $i \in I$
- b_j - Data mínima (estágio) para interligação $j \in J$
- Δa_i - Intervalo mínimo entre adições na usina $i \in I$
- Δb_j - Intervalo mínimo entre incrementos de capacidade na interligação $j \in J$
- $x_i(t)$ - Número de adições de unidades na usina $i \in I$ até o estágio t
- $y_j(t)$ - Número de incrementos de capacidade na interligação $j \in J$ até o estágio t

A função $\bar{u}(t, x(t), y(t))$, "valor esperado da demanda não suprida no estágio t para a decisão $(x(t), y(t))$ " é análoga à definida em III.1.

O problema de expansão dinâmica pode ser formulado como:

$$\text{Min} \quad \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i \in I} c_i(t)(x_i(t) - x_i(t-1)) + \sum_{j \in J} q_j(t)(y_j(t) - y_j(t-1)) \right) \quad (\text{III.11})$$

$$\text{s/a} \quad \bar{u}(t, x(t), y(t)) \leq U(t), \quad t=1, T \quad (\text{III.12})$$

$$x_i(t + \Delta a_i) - x_i(t) \leq 1, \quad i \in I; t = a_i, T \quad (\text{III.13})$$

$$y_j(t + \Delta b_j) - y_j(t) \leq 1, \quad j \in J; t = b_j, T \quad (\text{III.14})$$

$$x_i(t-1) - x_i(t) \leq 0, \quad i \in I; t = a_i + 1, T \quad (\text{III.15})$$

$$y_j(t-1) - y_j(t) \leq 0, \quad j \in J; t = b_j + 1, T \quad (\text{III.16})$$

$$x_i(t) \in \{0, \dots, n_i\}, \quad i \in I; t = a_i, T \quad (\text{III.17})$$

$$y_j(t) \in \{0, \dots, m_j\}, \quad j \in J; t = b_j, T \quad (\text{III.18})$$

As restrições (III.13)-(III.14) representam os intervalos mínimos para instalação de unidades geradoras e reforços de interligações. As restrições (III.15)-(III.16) garantem que as decisões de investimentos são crescentes no tempo.

O programa (III.11) - (III.18) de programação estocástica inteira também pode ser representado por um processo de decisão em dois estágios: no primeiro (subproblema de investimento), escolhe-se uma solução $(x(t), y(t))$, $t=1, T$ que satisfaz (III.13)-(III.18); no segundo (subproblema de operação) avalia-se as consequências da decisão $(x(t), y(t))$, $t=1, T$ em termos da confiabilidade do sistema em cada estágio. Nota-se que o subproblema de operação corresponderá a T análises independentes de confiabilidade.

CAPITULO IV

APLICAÇÃO DE DECOMPOSIÇÃO EM PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO
ESTOCÁSTICA

Técnicas de decomposição são usualmente empregadas em problemas de programação matemática de grande porte para tirar partido da estrutura do problema, que é simplificada quando se fixam determinadas variáveis ou se relaxam algumas restrições. Os subproblemas resultantes podem então ser resolvidos por algoritmos específicos, tornando a obtenção da solução mais eficiente. Uma destas técnicas é a Decomposição de Benders (BENDERS (21)), que será inicialmente apresentada em sua forma linear determinística. Em seguida, será feita uma extensão para o caso em que o subproblema resultante da decomposição é estocástico, e o corte de Benders para este caso será derivado. Um exemplo é apresentado para ilustrar o uso da Decomposição de Benders em um problema estocástico simples.

IV.1 DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS

Seja o problema linear da forma

$$\text{Min } cx + dy \quad (\text{IV.1})$$

s/a

$$Ax \geq b \quad (\text{IV.2})$$

$$Ex + Fy \geq g \quad (\text{IV.3})$$

Pode-se associar às variáveis x as decisões do tipo investimento, sendo cx o custo de investimento e as restrições (IV.2) aquelas que só envolvem variáveis de investimento tais como restrições financeiras, período de construção, etc. As variáveis y se referem a decisões de operação, com custo dy , sendo que (IV.3) representa as restrições nas variáveis x e y .

O problema (IV.1) - (IV.3) pode ser representado como um processo de decisão em dois estágios:

- i) no primeiro estágio, escolhe-se uma decisão de investimento x^* viável, isto é, tal que $Ax^* \geq b$.
- ii) no segundo estágio, dada a decisão x^* , escolhe-se a decisão de operação mais eficiente, isto é, resolve-se o subproblema

$$\text{Min } dy \quad (IV.4)$$

s/a

$$Fy \geq g - Ex^* \quad (IV.5)$$

O objetivo é minimizar a soma dos custos de investimento e operação. A figura IV.1 abaixo ilustra o processo de decisão.

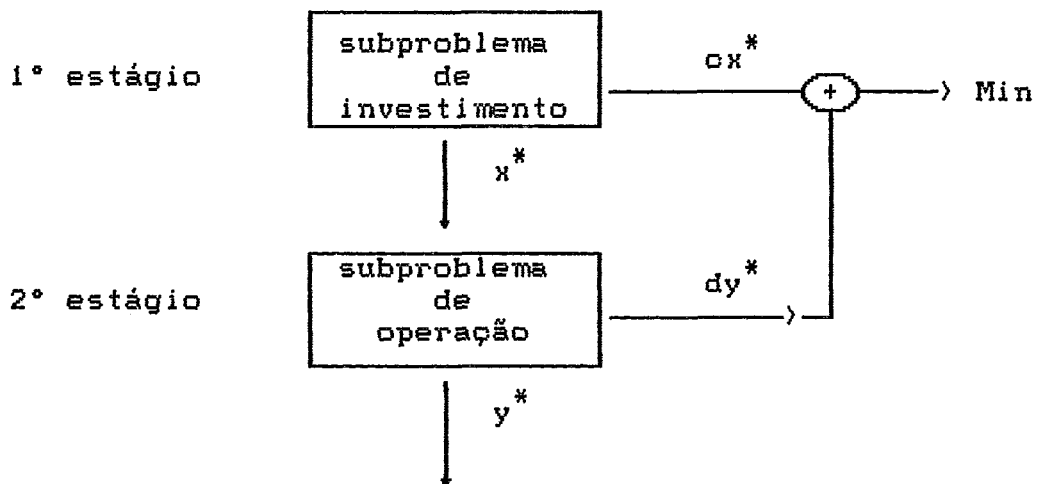


FIGURA IV.1 - PROCESSO DE DECISÕES EM DOIS ESTÁGIOS

A decomposição é baseada nas seguintes observações:

- o custo de operação dy^* , onde y^* é a solução de (IV.4) - (IV.5), pode ser visto como uma função $u(x)$ da decisão de investimento x , isto é,

$$u(x) = \text{Min } dy \quad (\text{IV.6})$$

s/a

$$Fy \geq g - Ex \quad (\text{IV.7})$$

- o problema (IV.1) - (IV.3) pode ser então reescrito em função das variáveis de investimento:

$$\text{Min } cx + u(x) \quad (\text{IV.8})$$

s/a

$$Ax \geq b \quad (\text{IV.9})$$

onde $u(x)$ é a solução de (IV.6) - (IV.7) para qualquer x .

A função $u(x)$ informa as consequências da decisão x em termos do custo de operação. Se for disponível, o problema original pode ser resolvido sem representar explicitamente o subproblema de segundo estágio.

A Decomposição de Benders é uma técnica para construir a função $u(x)$ com a precisão desejada a partir da solução do subproblema do segundo estágio conforme o esquema da Figura IV.2.

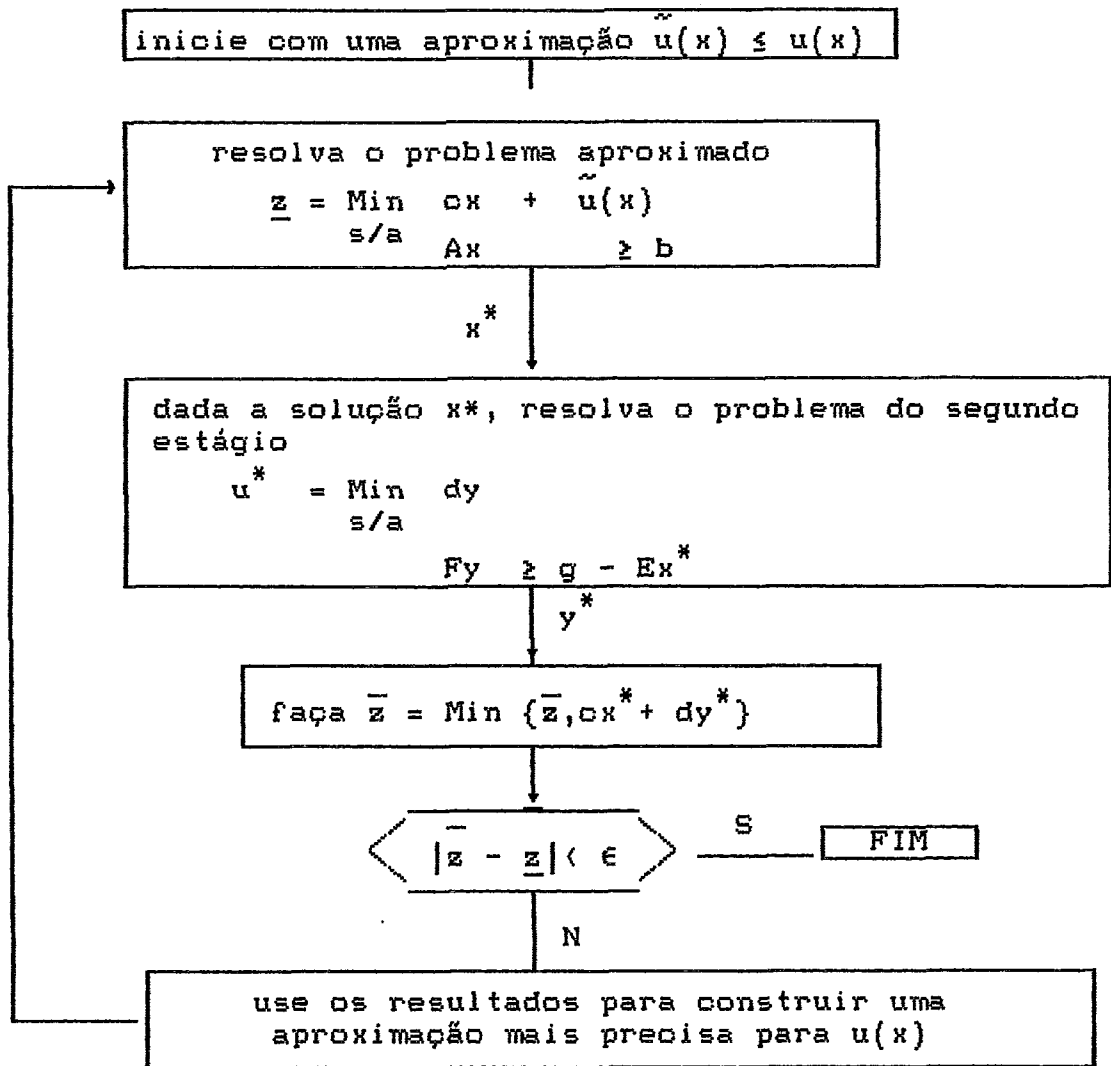


FIGURA IV.2 - ESQUEMA DO MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS

A aproximação $\tilde{u}(x)$ pode ser construída da seguinte forma. O problema dual de (IV.6) - (IV.7) pode ser escrito como

$$\max_{s/a} \quad \pi \quad (g - Ex) \quad (\text{IV.10})$$

$$\pi \quad F = d \quad (\text{IV.11})$$

onde π é um vetor linha de multiplicadores simplex associados à restrição (IV.7). Sem perda de generalidade, pode-se supor que (IV.10) - (IV.11) sempre tem solução. Note-se que a região viável de (IV.11) independe da variável de decisão do

primeiro estágio x . Esta região é um poliedro convexo, podendo ser caracterizada pelos seus vértices, ou seja, pelo conjunto $\Pi = \{\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^p\}$. O problema (IV.10) - (IV.11) poderia então ser resolvido por enumeração:

$$\max \quad \pi(g - Ex) \quad (IV.12)$$

s/a

$$\pi \in \Pi \quad (IV.13)$$

Alternativamente, pode-se reescrever o problema acima como

$$\min \quad \alpha \quad (IV.14)$$

s/a

$$\alpha \geq \pi^i (g - Ex), \quad i=1, \dots, p \quad (IV.15)$$

onde α é uma variável escalar. Sendo α maior que cada valor de $\pi^i (g - Ex)$, será então maior que o seu máximo. Como a função objetivo é minimizar, a restrição será atendida na igualdade. Pelo teorema da dualidade, as soluções de (IV.6) - (IV.7) e (IV.10) - (IV.11) são iguais no ótimo e pode-se concluir que as restrições $\alpha \geq \pi^i (g - Ex)$ definem a função $u(x)$, que será uma função convexa definida por restrições lineares. No caso em que x é um escalar, $u(x)$ teria a forma apresentada na Figura IV.3.

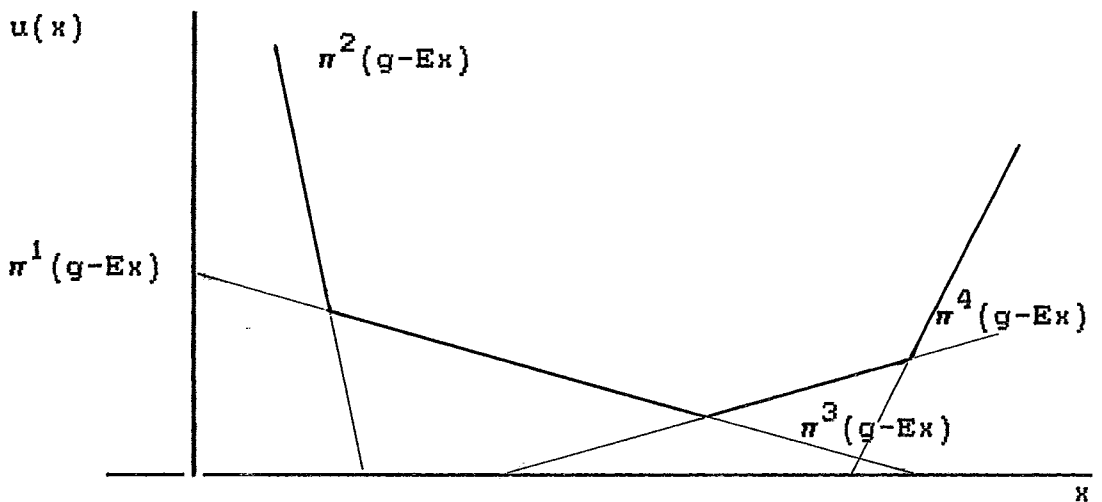


FIGURA IV.3 - FUNÇÃO $u(x)$ PARA x ESCALAR

Pode-se agora reescrever o problema (IV.1) - (IV.3) como

$$\text{Min } cx + \alpha \quad (IV.16)$$

$$\text{s/a } Ax \geq b \quad (IV.17)$$

$$\pi^i (g - Ex) - \alpha \leq 0, \quad i=1, \dots, p \quad (IV.18)$$

O problema acima é escrito em termos das variáveis x e α , e embora possa ter um número muito grande de restrições, só poucas delas estarão ativas na solução ótima. Isto sugere o uso de relaxação, onde restrições do tipo $\pi^i (g - Ex) - \alpha \leq 0$ são sucessivamente incluídas no problema relaxado à medida que novos vértices são obtidos.

O algoritmo de decomposição de Benders é apresentado a seguir.

Passo 0

Inicialize $k=1$, defina $S=\emptyset$, $\bar{Z} = \infty$, $\epsilon =$ tolerância para convergência.

Passo 1

Resolva o problema relaxado (problema do 1º estágio)

$$\text{Min } cx + \alpha \quad (IV.19)$$

s/a

$$Ax \geq b \quad (IV.20)$$

$$\alpha \in S \quad (IV.21)$$

Passo 2

Seja (x^k, α^k) a solução ótima do problema (IV.19) - (IV.21).

Note-se que $\underline{Z} = cx^k + \alpha^k$ é um limite inferior da solução ótima, já que o problema é uma relaxação de (IV.1) - (IV.3).

Passo 3

Resolva o problema do 2º estágio dada a solução x^k .

$$u^k = \text{Min} \quad dy \quad (\text{IV.22})$$

s/a

$$Fy \geq g - Ex^k \quad (\text{IV.23})$$

Passo 4

Seja y^k a solução ótima de (IV.22) - (IV.23). O par (x^k, y^k) é uma solução viável de (IV.1) - (IV.3), embora não necessariamente ótima. Faça $\bar{Z} = \text{Min} (\bar{Z}, cx^k + dy^k)$.

Passo 5

Se $|\bar{Z} - \underline{Z}| < \epsilon$, a solução ótima é o par (x, y) associado ao limite superior \bar{Z} . Caso contrário, atualize a estimativa de $u(x)$, adicionando a restrição $\pi^k(g - Ex) - \alpha \leq 0$ ao conjunto S , onde π^k é o vetor de multiplicadores ótimos associados a restrição (IV.23) na solução ótima de (IV.22) - (IV.23).

Passo 6

Faça $k=k+1$, vá para o passo 1.

O algoritmo converge em um número finito de passos já que o limite inferior entre duas iterações sucessivas deve aumentar (o problema (IV.19) - (IV.21) é cada vez mais restrito), e o limite superior não aumenta por construção.

A restrição $\pi^k (g - Ex^k) - \alpha \leq 0$ é chamada corte de Benders (de otimalidade). Ela pode ser reescrita da seguinte forma: da igualdade entre soluções ótimas primal e dual de (IV.22) - (IV.23), tem-se que

$$\begin{aligned} u^k &= \pi^k (g - Ex^k), \text{ ou seja} \\ \pi^k g &= u^k + \pi^k Ex^k \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

Substituindo (IV.24) na expressão do corte, tem-se a forma alternativa do corte de otimalidade

$$u^k + \pi^k E(x^k - x) - \alpha \leq 0 \quad (\text{IV.25})$$

Suponha agora que uma restrição do tipo

$$ry \leq h \quad (\text{IV.26})$$

foi incluída no problema (IV.1)-(IV.3) onde r é um vetor linha e h um escalar, e que dada uma decisão x^* do problema do 1° estágio a restrição acima torna o problema do segundo estágio inviável. Neste caso o custo dy não interessa e pode-se definir como função objetivo do problema do 2° estágio a minimização da violação da restrição (IV.21), resultando o novo subproblema

$$u' = \text{Min } ry \quad (\text{IV.27})$$

$$\text{s/a } Fy \geq g - Ex^* \quad (\text{IV.28})$$

Pode-se ver que:

se $u' \leq h$ o subproblema do segundo estágio com a restrição (IV.26) é viável

se $u' > h$ o subproblema do segundo estágio com a restrição (IV.26) é inviável

No último caso, pode-se traduzir a inviabilidade para o problema do primeiro estágio em termos de um corte de viabilidade, qual seja

$$u' + \pi'E(x^* - x) \leq h, \quad (IV.29)$$

onde π' é o vetor de multiplicadores ótimos associados à restrição (IV.28). Note que neste caso h é uma constante e não uma variável.

O esquema da Decomposição de Benders para o caso de inviabilidades é apresentado na Figura IV.4.

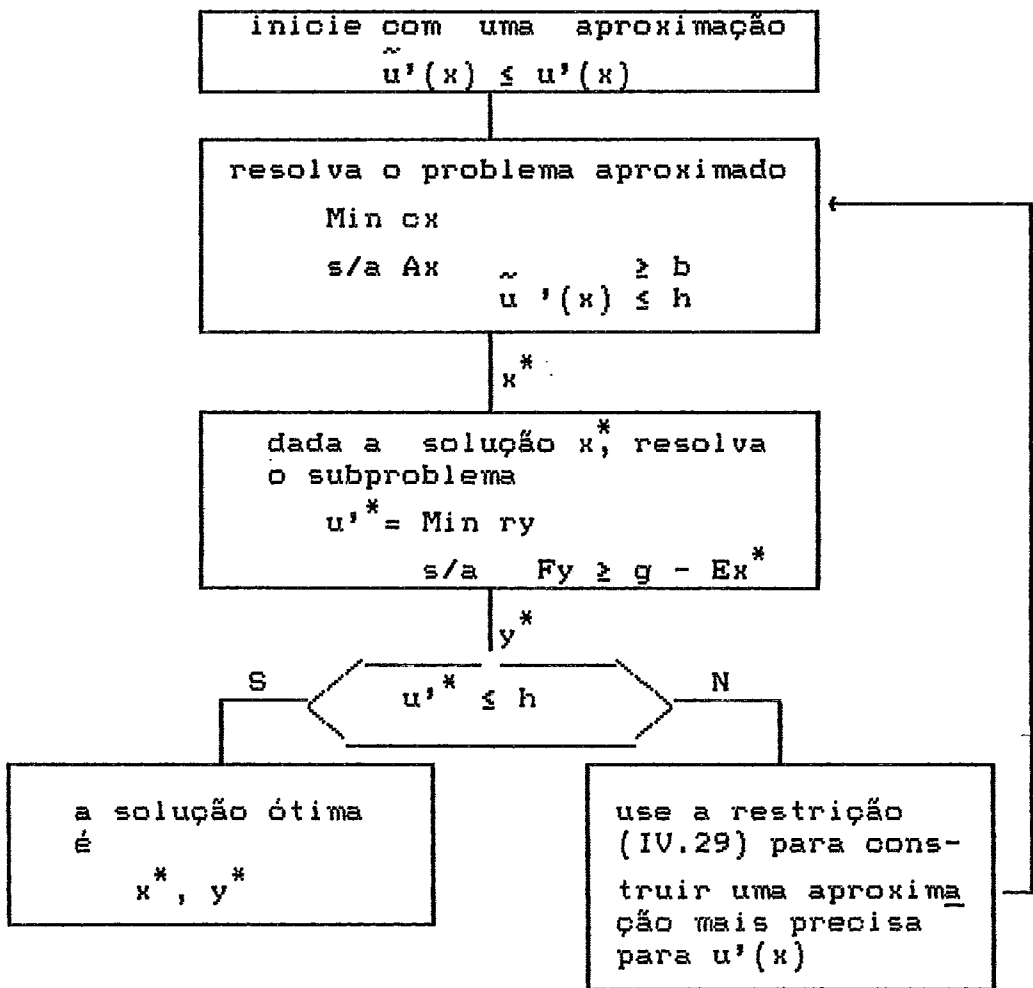


FIGURA IV.4 - ESQUEMA DO MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO DE BENDERS COM CORTE DE VIABILIDADE

Note-se que neste caso a primeira solução viável encontrada será ótima, já que o objetivo é minimizar cx garantindo que o problema do segundo estágio é viável. É possível combinar os dois esquemas de decomposição apresentados, gerando-se um corte de otimalidade (IV.25) no caso do subproblema do 2º estágio ser viável ou um corte de viabilidade (IV.29) caso contrário.

IV.2 EXTENSÃO PROBABILÍSTICA

Suponha agora que o problema do segundo estágio envolva variáveis aleatórias discretas. Para ilustrar a extensão da decomposição de Benders para este caso, será apresentado um exemplo em que o vetor g e a matriz E podem assumir dois valores g_1, E_1 e g_2, E_2 , com probabilidades p_1 e p_2 . O problema do segundo estágio agora é de minimizar o custo esperado de operação $p_1 dy_1 + p_2 dy_2$. O problema (IV.1) - (IV.3) para este exemplo é

$$\text{Min } cx + p_1 dy_1 + p_2 dy_2 \quad (\text{IV.30})$$

s/a

$$Ax \geq b \quad (\text{IV.31})$$

$$E_1 x + Fy_1 \geq g_1 \quad (\text{IV.32})$$

$$E_2 x + Fy_2 \geq g_2 \quad (\text{IV.33})$$

O problema do segundo estágio envolve agora dois cenários, e o processo de decisão associado ao problema acima pode ser ilustrado pelo esquema da Figura IV.5.

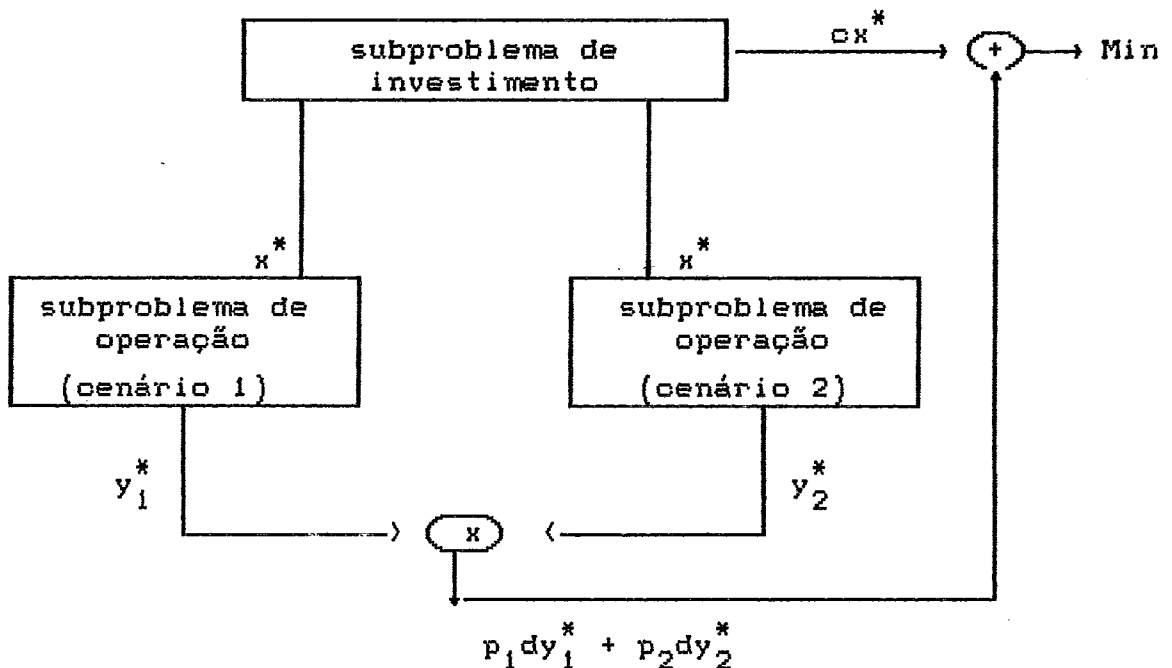


FIGURA IV.5 - PROCESSO DE DECISÃO EM DOIS ESTÁGIOS - EXTENSÃO PROBABILÍSTICA

Note que o subproblema do segundo estágio pode ser decomposto em problemas independentes para cada cenário $i = 1, 2$, dada a decisão x do primeiro estágio:

$$u_i(x) = \text{Min}_{s/a} \quad dy_i \quad (\text{IV.34})$$

$$Fy_i \geq g_i - E_i x \quad (\text{IV.35})$$

O problema original pode ser agora expresso em termos das variáveis de decisão x e da função $\bar{u}(x)$ definida como

$$\bar{u}(x) = \sum_i p_i u_i(x) \quad (\text{IV.36})$$

Analogamente ao caso determinístico, o problema de decisão estocástico pode ser reescrito como

$$\text{Min}_{s/a} \quad cx + \bar{u}(x) \quad (\text{IV.37})$$

$$Ax \geq b \quad (\text{IV.38})$$

A derivação do corte de Benders para o caso estocástico segue a mesma argumentação usada na derivação do corte (IV.25). Se u_i é o valor da solução ótima do problema do segundo estágio no cenário i e π_i é o vetor de multiplicadores ótimos associados à restrição (IV.35) (dada a decisão x^* do problema do primeiro estágio), o corte (IV.25) para este cenário seria

$$u_i + \pi_i E_i (x^* - x) - \alpha \leq 0 \quad (\text{IV.39})$$

Tomando-se o valor esperado em u e πE para todos os cenários possíveis, obtém-se o corte de otimalidade no caso estocástico:

$$\bar{u} + \bar{w} (x^* - x) - \alpha \leq 0 \quad (\text{IV.40})$$

onde

$$\bar{u} = \sum_i p_i u_i \quad (\text{V.41})$$

$$\bar{w} = \sum_i p_i (\pi E)_i \quad (\text{IV.42})$$

O algoritmo de Decomposição de Benders para o caso estocástico é similar ao caso determinístico, exceto que no passo 3 são calculados \bar{u} e \bar{w} que são usados para gerar o corte no passo 5. Cabe notar que não se deve necessariamente resolver o problema do segundo estágio para cada cenário para obter \bar{u} e \bar{w} . Dependendo da estrutura do problema do segundo estágio é possível calcular \bar{u} e \bar{w} diretamente.

A consideração de inviabilidades no caso estocástico corresponde a associar um valor esperado à restrição (IV.26) que é incluída no problema (IV.30)-(IV.33). O problema do segundo estágio neste caso também pode ser decomposto em problemas independentes para cada cenário, dada a decisão x^* do primeiro estágio:

$$u'_i = \text{Min}_{s/a} \quad ry \quad (\text{IV.43})$$

$$Fy \geq g_i - E_i x^* \quad (\text{IV.44})$$

Note-se que a função objetivo agora é minimizar a violação da restrição (IV.26) e pode-se mostrar que o corte de viabilidade no caso estocástico é dado por

$$\bar{u}' + \bar{w} (x^* - x) \leq h \quad (\text{IV.45})$$

onde

$$\bar{u}' = \sum_i p_i u_i' , \quad (\text{IV.46})$$

$$\bar{w}' = \sum_i p_i (\pi' E)_i , \quad (\text{IV.47})$$

π_i' é o vetor de multiplicadores ótimos associados à restrição (IV.44) no cenário i , p_i é a probabilidade de ocorrência de (g_i, E_i) e h agora corresponde ao termo independente da restrição (IV.26) ao tomar-se o valor esperado.

IV.3 EXEMPLO

Suponha dois tipos de unidade de produção com as seguintes características:

Tipo	Capacidade	Taxa de Falha	Custo Unitário	N° Máximo de Unidades
a	$c_a = 3$	$\lambda_a = 0.2$	3	2
b	$c_b = 2$	$\lambda_b = 0.1$	2	2

Deseja-se obter a solução de menor custo capaz de atender uma demanda de valor 4 e tal que o valor esperado do déficit no atendimento seja não superior a 0.2.

Define-se duas variáveis 0/1 para cada tipo, de modo que o número de adições de unidades de cada tipo seja expresso como

$$x_a = x_{a1} + x_{a2} \quad (\text{tipo a})$$

$$x_b = x_{b1} + x_{b2} \quad (\text{tipo b})$$

O vetor de decisões é dado então por

$$x = \begin{bmatrix} x_{a1} \\ x_{a2} \\ x_{b1} \\ x_{b2} \end{bmatrix}$$

O problema pode ser formulado como

$$\begin{array}{ll} \min & 3x_{a1} + 3x_{a2} + 2x_{b1} + 2x_{b2} \\ \text{s/a} & \\ & -x_{a1} + x_{a2} \leq 0 \\ & \phantom{-x_{a1} + x_{a2}} -x_{b1} + x_{b2} \leq 0 \\ & \bar{u}(x) \leq 0.2 \\ & x \in \{0,1\} \end{array}$$

onde:

$$\bar{u}(x) = \sum_{\xi} p_{\xi} u_{\xi}(x),$$

p_{ξ} é a probabilidade de ocorrência do cenário ξ ,

$$\begin{array}{ll} u_{\xi}(x) = \min & s \\ \text{s/a} & \\ & y+s = 4 \\ & y \leq e_{\xi} x, \end{array}$$

$e_{\xi} = (e_{\xi}^1, e_{\xi}^2, e_{\xi}^3, e_{\xi}^4)$ é uma realização vetor aleatório de capacidades $e = (e^1, e^2, e^3, e^4)$.

As duas primeiras restrições do problema são do tipo $Ax \geq b$ e visam evitar a consideração de soluções idênticas para cada tipo de unidade. A última restrição é probabilística, sendo função de $u_{\xi}(x)$ (mínimo déficits \leq em cada cenário ξ de capacidade dada a decisão de investimento x).

As componentes do vetor aleatório e são v.a. independentes entre si definidas abaixo:

$$(\forall i = 1, 2) \quad e^{a_i} = \begin{cases} 0, & \text{com probabilidade } \lambda_a, \\ 3, & \text{com probabilidade } (1-\lambda_a) \end{cases}$$

$$(\forall j = 1, 2) \quad e^{b_j} = \begin{cases} 0, & \text{com probabilidade } \lambda_b, \\ 2, & \text{com probabilidade } (1-\lambda_b) \end{cases}$$

Se para a solução x^* do problema do primeiro estágio, resultar que o valor esperado $\bar{u}(x^*)$ é superior a 0.2, gera-se o corte de viabilidade

$$\bar{u} + \bar{w} (x^* - x) \leq 0.2,$$

onde

$$\bar{u} = \bar{u}(x^*)$$

$$\bar{w} = \sum_{\xi} p_{\xi} \pi_{\xi} e_{\xi},$$

e π_{ξ} é o multiplicador ótimo da restrição de desigualdade do problema do segundo estágio no cenário ξ .

A aplicação da Decomposição de Benders para este exemplo é apresentada a seguir.

Iteração 0

i) problema do 1º estágio:

$$\begin{aligned} \text{Min } & 3x_{a1} + 3x_{a2} + 2x_{b1} + 2x_{b2} \\ \text{s/a} & \\ & -x_{a1} + x_{a2} \leq 0 \\ & \phantom{-x_{a1} + x_{a2}} - x_{b1} + x_{b2} \leq 0 \\ & x_{a1}, x_{a2}, x_{b1}, x_{b2} \in \{0,1\} \end{aligned}$$

solução: $x^* = (0,0,0,0)$, $cx^* = 0$

ii) problema do 2º estágio:

$$\begin{aligned} u_{\xi} = \text{Min } & s \\ \text{s/a} & \\ & y + s = 4 \\ & y \leq 0, \end{aligned}$$

cuja solução é $u_{\xi}^* = 4$, $\pi_{\xi}^* = 1$, $\forall \xi$.

Tomando-se o valor esperado, tem-se que:

$$\bar{u}^* = 4,$$

$$\bar{w}^* = (3(1-\lambda_a), 3(1-\lambda_a), 2(1-\lambda_b), 2(1-\lambda_b)) = (2.4, 2.4, 1.8, 1.8)$$

iii) corte de viabilidade:

$$4 + 2.4(0-x_{a1}) + 2.4(0-x_{a2}) + 1.8(0-x_{b1}) + 1.8(0-x_{b2}) \leq 0.2$$

ou

$$2.4x_{a1} + 2.4x_{a2} + 1.8x_{b1} + 1.8x_{b2} \geq 3.8$$

Iteração 1

i) Problema do 1º estágio

$$\begin{array}{rcll}
 \text{Min} & 3x_{a1} & + & 3x_{a2} & + & 2x_{b1} & + & 2x_{b2} & & \\
 \text{s/a} & & & & & & & & & \\
 & -x_{a1} & + & x_{a2} & & & & & & \leq 0 \\
 & & & & - & x_{b1} & + & x_{b2} & & \leq 0 \\
 & 2.4x_{a1} & + & 2.4x_{a2} & + & 1.8x_{b1} & + & 1.8x_{b2} & & \geq 3.8 \\
 & x_{a1} & , & x_{a2} & , & x_{b1} & , & x_{b2} & \in & (0,1)
 \end{array}$$

$$\text{solução: } x^1 = (1, 0, 1, 0) , \text{ } cx^1 = 5$$

ii) Problema do 2º estágio

$$\begin{array}{rcl}
 u_{\xi}(x^1) = \text{Min} & s \\
 \text{s/a} & \\
 y + s = 4 & \\
 y \leq e_{\xi}^{a1} + e_{\xi}^{b1} &
 \end{array}$$

solução para cada cenário:

e_{ξ}^{a1}	e_{ξ}^{b1}	$e_{\xi}^{a1} + e_{\xi}^{b1}$	Prob.	u_{ξ}^1	π_{ξ}^1
0	0	0	$\lambda_a \lambda_b$	4	1
0	2	2	$\lambda_a (1-\lambda_b)$	2	1
3	0	3	$\lambda_b (1-\lambda_a)$	1	1
3	2	5	$(1-\lambda_a)(1-\lambda_b)$	0	0

Tomando-se o valor esperado obtém-se:

$$\bar{u}^{-1} = 4\lambda_a\lambda_b + 2\lambda_a(1-\lambda_b) + 1\lambda_b(1-\lambda_a) = \lambda_a\lambda_b + 2\lambda_a + \lambda_b = 0.52 > 0.2$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_{a1}^{-1} &= 3\lambda_b(1-\lambda_a) \\ &= 0.24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_{a2}^{-1} &= (\lambda_a\lambda_b + \lambda_a(1-\lambda_b) + \lambda_b(1-\lambda_a)) \cdot 3(1-\lambda_a) \\ &= 0.67 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_{b1}^{-1} &= 2\lambda_a(1-\lambda_b) \\ &= 0.36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_{b2}^{-1} &= (\lambda_a\lambda_b + \lambda_a(1-\lambda_a) + \lambda_b(1-\lambda_a)) \cdot 2(1-\lambda_b) \\ &= 0.50 \end{aligned}$$

iii) Corte de viabilidade

$$0.52 + 0.24(1-x_{a1}) + 0.67(0-x_{a2}) + 0.36(1-x_{b1}) + 0.50(0-x_{b2}) \leq 0.2$$

ou

$$0.24x_{a1} + 0.67x_{a2} + 0.36x_{b1} + 0.50x_{b2} \geq 0.92$$

Iteração 2

i) Problema do 1º estágio:

$$\text{Min} \quad 3x_{a1} + 3x_{a2} + 2x_{b1} + 2x_{b2}$$

s/a

$$-x_{a1} + x_{a2} \leq 0$$

$$-x_{b1} + x_{b2} \leq 0$$

$$2.4x_{a1} + 2.4x_{a2} + 1.8x_{b1} + 1.8x_{b2} \geq 3.8$$

$$0.24x_{a1} + 0.67x_{a2} + 0.36x_{b1} + 0.50x_{b2} \geq 0.92$$

$$x_{a1}, x_{a2}, x_{b1}, x_{b2} \in \{0, 1\}$$

$$\text{solução } x^2 = (1, 0, 1, 1), \quad cx^2 = 7$$

ii) Problema do 2º estágio:

$$u_{\xi}(x^2) = \text{Min} \quad s$$

s/a

$$y + s = 4$$

$$y \leq e_{\xi}^{a1} + e_{\xi}^{b1} + e_{\xi}^{b2}$$

solução para cada cenário:

a_1 e_{ξ}^1	b_1 e_{ξ}^1	b_2 e_{ξ}^2	$e_{\xi}^{a1} + e_{\xi}^{b1} + e_{\xi}^{b2}$	Prob.	u_{ξ}^2	π_{ξ}^2
0	0	0	0	$\lambda_a \lambda_b^2$	4	1
0	0	2	2	$\lambda_a \lambda_b (1-\lambda_b)$	2	1
0	2	0	2	$\lambda_a \lambda_b (1-\lambda_b)$	2	1
0	2	2	4	$\lambda_a (1-\lambda_b)^2$	0	0
3	0	0	3	$(1-\lambda_a) \lambda_b^2$	1	1
3	0	2	5	$(1-\lambda_a) \lambda_b (1-\lambda_b)$	0	0
2	2	0	5	$(1-\lambda_a) \lambda_b (1-\lambda_b)$	0	0
3	2	2	7	$(1-\lambda_a) (1-\lambda_b)^2$	0	0

Tomando-se o valor esperado, obtém-se

$$\bar{u}^2 = 4\lambda_a \lambda_b^2 + \lambda_a \lambda_b (1-\lambda_b) + 1\lambda_b^2 (1-\lambda_a) = \lambda_b (4\lambda_a + \lambda_b - \lambda_a \lambda_b) = 0.09 < 0.2$$

logo $x^2 = (1, 0, 1, 1)$ é a solução ótima do problema.

A tabela IV.1 apresenta a evolução do método de decomposição para o exemplo.

Decisões Possíveis				Custo	Corte de Viabilidade	
x_{a_1}	x_{a_2}	x_{b_1}	x_{b_2}		Iteração 1	Iteração 2
0	0	0	0	0	(0)	-
0	0	1	0	2	(1.8)	-
0	0	1	1	4	(3.6)	-
1	0	0	0	3	(2.4)	-
1	0	1	0	5	4.2*	(0.60)
1	0	1	1	7	6.0	1.10*
1	1	0	0	6	4.8	(0.91)
1	1	1	0	8	6.6	1.41
1	1	1	1	10	8.4	1.77
RHS do corte					3.8	0.92

TABELA IV.1 - MÉTODO DE DECOMPOSIÇÃO APLICADO AO CASO EXEMPLO

() indica decisão inviável no corte de viabilidade;
 * indica solução ótima do problema do 1º estágio na iteração.

CAPÍTULO V

APLICAÇÃO DE DECOMPOSIÇÃO AO PROBLEMA DE EXPANSÃO

A representação do problema de expansão como um processo de decisão em dois estágios como apresentado no Capítulo III aponta para a possibilidade do uso da decomposição de Benders (extendida para o caso probabilístico) para a solução do problema.

O algoritmo geral de decomposição de Benders aplicado ao problema de expansão de ponta dinâmico é dada pelos seguintes passos:

- i) sejam as aproximações $\tilde{u}(t, x(t), y(t))$, $t=1, T$ tais que

$$\tilde{u}(t, x(t), y(t)) \leq \bar{u}(t, x(t), y(t)), t=1, T;$$
- ii) resolva o problema (III.11) - (III.18) com as aproximações com $\tilde{u}(t, x(t), y(t))$, $t=1, T$ nas restrições (III.12) (subproblema de investimento);
- iii) dada a solução $(x^*(t), y^*(t))$, $t=1, T$ do subproblema de investimento, obtenha $\bar{u}(t, x^*(t), y^*(t))$, $t=1, T$ (subproblema de operação)
- iv) se $\bar{u}(t, x^*(t), y^*(t)) > U(t)$ para algum $t=1, T$, vá para o passo (v); caso contrário, pare: $(x^*(t), y^*(t))$, $t=1, T$ é a solução ótima;
- v) use a solução do subproblema de operação para obter novas aproximações (cortes de Benders) e volte ao passo (ii). Cada corte de Benders gerado no passo (v) é um corte de viabilidade, de modo que no passo (iv) a

primeira solução viável encontrada é a solução ótima (caso haja solução viável).

V.1 SUBPROBLEMA DE OPERAÇÃO-CONFIABILIDADE EM SISTEMA INTERLIGADOS

O subproblema de operação da decomposição do problema de expansão de ponta corresponde à avaliação da confiabilidade do sistema interligado para cada estágio t do período de estudo, expressa em termos do valor esperado da demanda não suprida no sistema para a decisão $(x^*(t), y^*(t))$ de investimento, $\bar{u}(t, x^*(t), y^*(t))$.

A solução do subproblema de operação (vide algoritmo no Capítulo VI) para cada estágio t deve ser testada contra o critério de confiabilidade $U(t)$, $t=1, T$. Caso em algum estágio t haja violação de critério, um corte de Benders da forma $\tilde{u}(t, x(t), y(t)) \leq U(t)$ deve ser gerado. Para a formulação (III.11) - (III.18), a aproximação $\tilde{u}(t, x(t), y(t))$ tem a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, x(t), y(t)) = & \bar{u}(t, x^*(t), y^*(t)) + \sum_{i \in I} \bar{w}_i(t) (x_i^*(t) - x_i(t)) \\ & + \sum_{j \in J} \bar{v}_j(t) (y_j^*(t) - y_j(t)) \end{aligned} \quad (V.1)$$

A expressão (V.1) representa uma linearização da função $\bar{u}(t, x(t), y(t))$ em torno do valor $\bar{u}(t, x^*(t), y^*(t))$ que é calculado pelo modelo de confiabilidade. Na seção VI.6 apresenta-se a extensão deste modelo para o cálculo dos coeficientes $\bar{w}_i(t)$, $i \in I$ e $\bar{v}_j(t)$, $j \in J$. O coeficiente $\bar{w}_i(t)$ é a redução (acréscimo) marginal de $\bar{u}(t, x^*(t), y^*(t))$ devido a um incremento (decremento) de capacidade de ponta na usina $i \in I$.

Similarmente, $\bar{v}_j(t)$ é a redução (acréscimo) marginal de $\bar{u}(t, x^*(t), y^*(t))$ devido a um incremento (decremento) de capacidade na interligação $j \in J$.

Os cortes da forma $\tilde{u}(t, x(t), y(t)) \leq U(t)$ que são gerados sucessivamente ao longo do método de Benders permitem construir aproximações cada vez mais precisas da função $\bar{u}(t, x(t), y(t))$. Em geral, não é possível construir analiticamente $\bar{u}(t, x(t), y(t))$ exceto para casos muito simples, como no exemplo do Capítulo IV.3.

Denotando por $u_{\xi}^{h\ell}(t, x(t), y(t))$ uma realização da v.a. $u^{h\ell}(t, x(t), y(t))$ definida por (III.5)-(III.9), pode-se ver que esta função é convexa com relação a $x(t)$ e $y(t)$ pois estas variáveis estão nos termos independentes de (III.5)-(III.9). Para que a probabilidade de cada cenário ξ seja bem definida, cada variável de decisão $x_i(t)$ é redefinida em termos de variáveis $x_{iK}(t) \in \{0, 1\}$ de modo similar ao exemplo do Capítulo IV.3:

$$x_i(t) = \sum_{k=1}^{n_i} x_{iK}(t) \quad (V.2)$$

Deste modo, a função

$$\bar{u}(t, x(t), y(t)) = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L \alpha_{\ell} E \{ u^{h\ell}(t, x(t), y(t)) \} \quad (V.3)$$

também é convexa. A aproximação de (V.3) em torno do ponto $\bar{u}(t, x^*(t), y^*(t))$, dada por (V.1) é reescrita a seguir em termos das variáveis $x_{iK}(t)$ e $y_j(t)$.

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, x(t), y(t)) = & \bar{u}(t, x^*(t), y^*(t)) + \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{n_i} \bar{w}_{iK}(t) (x_{iK}^*(t) - x_{iK}(t)) \\ & + \sum_{j \in J} \bar{v}_j(t) (y_j^*(t) - y_j(t)) \end{aligned} \quad (V.4)$$

onde $\bar{w}_{ik}(t)$ é a redução (acréscimo) marginal de $\bar{u}(t, x^*(t), y^*(t))$ devido a um incremento (decremento) de uma unidade na usina $i \in I$. Note-se que a variável de decisão $\bar{y}_j(t)$ não precisa ser redefinida já que nas interligações não se consideram falhas.

V.2 SUBPROBLEMA DE INVESTIMENTO

O problema (III.11)-(III.18) com as aproximações (V.1) na restrição (III.12) será primeiramente reescrito em termos das variáveis de investimento (V.2), da seguinte forma

$$\text{Min } \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i \in I} \Delta c_i(t) \sum_{k=1}^{n_i} x_{ik}(t) + \sum_{j \in J} \Delta q_j(t) y_j(t) \right) \quad (\text{V.5})$$

s/a

$$\begin{aligned} & \bar{u}(t, x^m(t), y^m(t)) + \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{n_i} \bar{w}_{ik}^m(t) (x_{ik}^m(t) - x_{ik}(t)) \\ & + \sum_{j \in J} \bar{v}_j^m(t) (y_j^m(t) - y_j(t)) \leq U(t), \quad m = 1, M; \quad t = 1, T \quad (\text{V.6}) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik}(t + \Delta a_i) - x_{ik}(t)) \leq 1, \quad i \in I; \quad t = a_i, T \quad (\text{V.7})$$

$$y_j(t + \Delta b_j) - y_j(t) \leq 1, \quad j \in J; \quad t = b_j, T \quad (\text{V.8})$$

$$\sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik}(t-1) - x_{ik}(t)) \leq 0, \quad i \in I; \quad t = a_i + 1, T \quad (\text{V.9})$$

$$x_{ik}(t) - x_{ik-1}(t) \leq 0, \quad i \in I; \quad k = 2, n_i; \quad t = a_i, T \quad (\text{V.10})$$

$$y_j(t-1) - y_j(t) \leq 0, \quad j \in J; \quad t = b_j + 1, T \quad (\text{V.11})$$

$$x_{ik}(t) \in \{0,1\}, i \in I; k=1, n_i; t=a_i, T \quad (V.12)$$

$$y_j(t) \in \{0,1, \dots, m_j\}; j \in J; t=b_j, T \quad (V.13)$$

onde M é o número de cortes de Benders já gerados, $\Delta c_i(t) = c_i(t) - c_i(t+1)$, $\Delta q_j(t) = q_j(t) - q_j(t+1)$, $t=1, \dots, T-1$ e $\Delta c_i(T) = c_i(T)$, $\Delta q_j(T) = q_j(T)$.

A restrição (V.10) foi acrescentada para garantir que as decisões de adição das unidades geradoras de um usina candidata sejam consideradas em uma mesma sequência, evitando a repetição de combinações idênticas de unidades.

O subproblema de investimento (V.5)-(V.13) é um problema de programação inteira de grande porte devido ao seu caráter dinâmico. Note-se que a relaxação contínua deste subproblema não faz sentido para o subproblema de operação visto que as capacidades de geração são v.a. e, portanto, suas distribuições de probabilidades só são definidas para um número inteiro de unidades geradoras por usina. O acoplamento entre estágios deve-se às restrições (V.7), (V.8) (intervalo mínimo entre adições de unidades e reforços de interligações) e (V.9), (V.11) (decisões de investimento não decrescentes no tempo). Outra característica importante é que a cada geração de um corte de Benders, a solução ótima do subproblema na iteração anterior se torna inviável na nova iteração, já que os cortes gerados são de viabilidade. Assim, a cada iteração de Benders a busca da solução do subproblema de investimento não pode tomar partido da solução do subproblema na iteração anterior. Em princípio, poderia-se utilizar um algoritmo do tipo "Branch and Bound" para resolver cada subproblema de investimento. No Capítulo VII discutem-se algumas estratégias de solução do subproblema de investimento que visam reduzir o esforço computacional. No Capítulo VIII são apresentados alguns resultados computacionais obtidos pela aplicação destas estratégias que foram testadas utilizando o programa XMIP de "Branch and Bound" (SINGHAL (19)).

CAPÍTULO VI

ANÁLISE DA CONFIABILIDADE DE SISTEMAS HIDROTERMOELÉTRICOS
INTERLIGADOS

O sistema CONFGER de análise de confiabilidade de geração desenvolvido por CUNHA, OLIVEIRA, GOMES e PEREIRA (12) para sistemas hidrotermoelétricos representa o primeiro esforço de tratamento de sistema hidrotermoelétricos interligados (no máximo dois sistemas), onde técnicas de simulação foram combinadas com as tradicionais técnicas analíticas desenvolvidas para sistemas térmicos para calcular índices de confiabilidade. Posteriormente, a técnica de decomposição de espaço de estados para análise de confiabilidade de grafos com arcos de capacidade estocástica desenvolvida por DOULLIEZ e JAMOULLE (13) foi adaptada e combinada com técnicas de simulação por OLIVEIRA, CUNHA e PEREIRA (14), gerando o modelo MULTIAR de análise de sistemas hidrotermoelétricos interligados. Entretanto, a técnica de decomposição em espaço de estados necessita um esforço computacional muito alto para estimar com razoável precisão os índices, o que levou os autores citados a desenvolver um método de Monte Carlo (15) baseado na caracterização dos modos de falha do sistema (vide VI.1). Esta caracterização também motivou OLIVEIRA, CUNHA e PEREIRA (16) a desenvolverem um método misto analítico/simulação denominado de integração direta (vide VI.3). O método de Monte Carlo também foi adaptado e aperfeiçoado utilizando técnicas de redução de variância para aplicação no planejamento de expansão de ponta e está descrito em VI.4.

VI.1 MODOS DE FALHAS DO SISTEMA INTERLIGADO

A função $u^{h\ell}$ (mínimo corte de carga no sistema interligado para a condição hidrológica h e nível de demanda ℓ) foi definida em (III.1) como a solução do problema de

programação linear (III.5) - (III.9). A este problema está associado um grafo capacitado cujos nós são as N áreas mais um nó fonte \underline{S} e um nó destino \underline{D} . Os arcos do grafo são as M interligações entre áreas, mais um arco entre o nó \underline{S} e cada nó (área) com capacidade dada pela soma das capacidades de geração de suas usinas na hidrologia h , e mais um arco entre o nó \underline{D} e cada nó (área) com capacidade igual a sua carga para o nível ℓ de demanda.

A figura abaixo representa o grafo associado ao sistema interligado mais simples (2 áreas), com as capacidades associadas aos arcos.

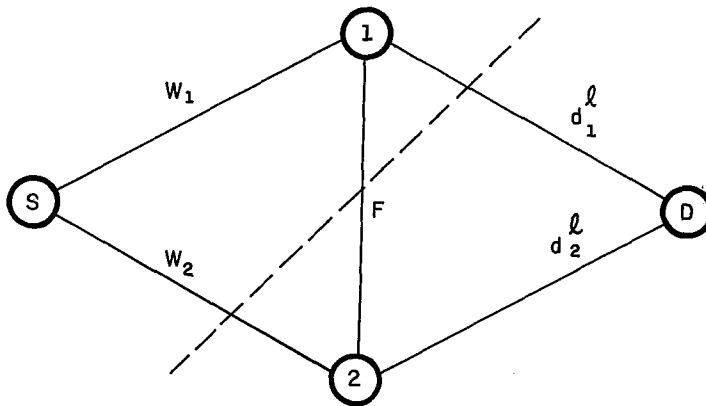


FIGURA VI.1 - GRAFO ASSOCIADO A UM SISTEMA INTERLIGADO DE 2 ÁREAS

É fácil verificar que $u^{h\ell}$ é dado pela diferença

entre a demanda total $\sum_{i=1}^N d_i^{\ell}$ do sistema no nível ℓ e o fluxo máximo entre \underline{S} e \underline{D} . O problema do fluxo máximo é um problema linear cujo dual corresponde a determinar o corte de mínima capacidade entre \underline{S} e \underline{D} . Um corte entre \underline{S} e \underline{D} é uma partição do conjunto de nós em dois subconjuntos, um contendo o nó \underline{S} e o outro o nó \underline{D} . Sua capacidade é dada pela soma das capacidades dos arcos que ligam nós de um conjunto ao outro.

O arco (S,i) tem capacidade dada pela v.a.

$$W_i^h = \sum_{k \in A_i} G_k^h, \quad i = 1, N \quad (VI.1)$$

Supondo-se que um modelo a dois estados para cada unidade geradora (operação/falha) e que as falhas de geradores são independentes, a distribuição de probabilidades da v.a. W_i^h é dada pela convolução das distribuições de probabilidades das v.a. $G_k^h, k \in A_i$.

O teorema do fluxo máximo - corte mínimo (FORD, FULKERSON (17)) afirma que o valor do fluxo máximo de \underline{S} a \underline{D} é igual à capacidade do corte mínimo entre \underline{S} e \underline{D} . Este corte é o "gargalo" do grafo. O teorema garante também que os arcos do corte mínimo estão saturados, isto é, seus fluxos estão nos seus limites de capacidade. Consequentemente, qualquer área i "à esquerda" do corte mínimo tem sua demanda atendida (seu arco (i,D) está saturado), estando numa região "segura". Se "à direita" do corte só estiver o nó \underline{D} , o fluxo máximo é igual à demanda total e não há déficit. Caso contrário, os nós "à direita" do corte mínimo constituem a região insegura onde se concentra o corte de carga.

Denotando por ω_i^h uma realização de v.a. $W_i^h, i=1, N$; dados $\omega^h = (\omega_1^h, \dots, \omega_N^h), F = (F_1, \dots, F_M)$ e $d^\ell = (d_1^\ell, \dots, d_N^\ell)$ diz-se que o estado (ω^h, d^ℓ, F) é aceitável se não há déficit (o corte mínimo não tem nenhuma área "à direita") e inaceitável caso contrário. Pode-se ver então que cada estado inaceitável corresponderá a uma das $2^N - 1$ possíveis partições distintas do conjunto de nós que são chamadas de modos de falha do sistema interligado. Cada modo de falha corresponde a uma combinação diferente de áreas na região insegura.

Para se caracterizar uma partição de índice $k=1, \dots, 2^N$, seja a função indicadora

$$\phi_k(j) = \begin{cases} 0, & \text{se os nós terminais do arco } j \text{ estão no mesmo} \\ & \text{subconjunto da partição índice } k. \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{VI.2})$$

A capacidade do corte associado à partição de índice $k=1, \dots, 2^N$ para o estado (ω^h, d^e, F) pode ser expressa como

$$C_k(\omega^h, d^e, F) = \sum_{j=1}^N \omega_j^h \phi_k(j) + \sum_{j=1}^N d_j^e \phi_k(j) + \sum_{j=1}^M F_j \phi_k(j) \quad (\text{VI.3})$$

Por exemplo, o corte assinalado na Figura VI.1 tem capacidade $\omega_2^h + d_1^e + F$.

O corte de índice k será mínimo se

$$C_k(\omega^h, d^e, F) \leq C_i(\omega^h, d^e, F), \quad \forall i = 1, \dots, 2^N, \quad i \neq k \quad (\text{VI.4})$$

Dado \underline{F} e fixados o nível \underline{e} de demanda e a condição hidrológica \underline{h} , (VI.4) caracteriza os estados do modo de falha índice $k=1, \dots, 2^N-1$. Pode-se então particionar o espaço amostral Ω^h em subconjuntos disjuntos:

$$\Omega^h = \Omega_1^{he} \cup \dots \cup \Omega_{2^N}^{he} \quad (\text{VI.5})$$

onde

$$\Omega_k^{he} = \left\{ \omega^h \in \Omega^h \mid \begin{array}{l} C_k(\omega^h, d^e, F) \leq C_i(\omega^h, d^e, F), i=1, \dots, k-1 \\ C_k(\omega^h, d^e, F) < C_j(\omega^h, d^e, F), j=k+1, \dots, 2^N \end{array} \right\} \quad (VI.6)$$

Por convenção, define-se o conjunto $\Omega_{2^N}^{he}$ como aquele constituído de estados aceitáveis, e o conjunto Ω_k^{he} aquele constituído dos estados inaceitáveis no modo de falha de índice $k=1, \dots, 2^N-1$.

Cada subconjunto Ω_k^{he} é um poliedro convexo no espaço Ω^h . Esta caracterização possibilita exprimir os índices de confiabilidade a partir da análise probabilística destes subconjuntos, como será descrito a seguir.

IV.2 ÍNDICES DE CONFIABILIDADE E SENSIBILIDADES

Denotando por $p_i(\cdot)$ a distribuição de probabilidades de $W_i^h, i=1, N$ para uma dada condição hidrológica h , pela hipótese de independência das falhas de geradores resulta que

$$p(\omega^h) = \prod_{i=1}^N p_i(\omega_i^h) \quad (VI.7)$$

onde $p(\cdot)$ denota a distribuição de probabilidades do vetor aleatório W^h .

Como a partição (VI.7) é disjunta, tem-se que para qualquer nível de demanda $\underline{\ell}$

$$\sum_{k=1}^{2^N} \Pr\{\Omega_k^{h\ell}\} = 1 \quad (\text{VI.8})$$

onde

$$\Pr\{\Omega_k^{h\ell}\} = \sum_{\omega^h \in \Omega_k^{h\ell}} p(\omega^h) \quad (\text{VI.9})$$

Excluindo-se o conjunto $\Omega_{2^N}^{h\ell}$ de estados aceitáveis, tem-se que

$$\text{LOLP}^{h\ell} = \sum_{k=1}^{2^N-1} \Pr\{\Omega_k^{h\ell}\} \quad (\text{VI.10})$$

Como as H condições hidrológicas são equiprováveis e cada nível $\underline{\ell}$ de demanda tem probabilidade α_ℓ , pode-se calcular a LOLP do sistema interligado como:

$$\text{LOLP} = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell \text{LOLP}^{h\ell} \quad (\text{VI.11})$$

O valor esperado do corte de carga para os estados inaceitáveis em todos os modos de falha é dado por

$$\text{EUD}^{h\ell} = \sum_{k=1}^{2^N-1} E_k^{h\ell} \left\{ \sum_{i=1}^N d_i^\ell - C_k(\omega^h, d^\ell, F) \right\} \quad (\text{VI.12})$$

onde $E_k^{h\ell}$ denota o operador valor esperado restrito a $\omega^h \in \Omega_k^{h\ell}$.

A expressão (VI.12) pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} EUD^{h\ell} &= \left(\sum_{i=1}^N d_i^\ell \right) \sum_{k=1}^{2^N-1} \Pr\{\Omega_k^{h\ell}\} - \sum_{k=1}^{2^N-1} E_k^{h\ell} \{C_k(\omega^h, d^\ell, F)\} = \\ &= \left(\sum_{i=1}^N d_i^\ell \right) LOLP^{h\ell} - \sum_{k=1}^{2^N-1} E_k^{h\ell} \{C_k(\omega^h, d^\ell, F)\} \quad (VI.13) \end{aligned}$$

Analogamente ao caso da LOLP, a EUD do sistema interligado é dada por

$$EUD = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell EUD^{h\ell} \quad (VI.14)$$

Pelo teorema do fluxo máximo - corte mínimo, qualquer arco do corte mínimo está saturado de modo que para qualquer estado (ω^h, d^ℓ, F) e para qualquer subconjunto $\Omega_k^{h\ell}$,

$$- \frac{\partial C_k(\omega^h, d^\ell, F)}{\partial a_j} = -\phi_k(j) \quad , k=1, \dots, 2^N \quad (VI.15)$$

onde a_j denota a capacidade do arco j do grafo e $\phi_k(j)$ é definido em (VI.2).

Aplicando-se o operador $E_k^{h\ell}$ a (VI.15), resulta que

$$E_k^{h\ell} \left(- \frac{\partial C_k(\omega^h, d^\ell, F)}{\partial a_j} \right) = -\phi_k(j) \Pr\{\Omega_k^{h\ell}\} \quad (VI.16)$$

Somando-se (VI.16) para todos os modos de falha, tem-se que

$$\sum_{k=1}^{2^N-1} E_k^{h\ell} \left(- \frac{\partial C_k(\omega^h, d^\ell, F)}{\partial a_j} \right) = - \sum_{k=1}^{2^N-1} \phi_k(j) \Pr\{\Omega_k^{h\ell}\} \quad (VI.17)$$

Usando-se (VI.13), a derivada parcial de $EUD^{h\ell}$ em relação a a_j é dada então por:

$$\frac{\partial EUD^{h\ell}}{\partial a_j} = \begin{cases} LOLP^{h\ell} - \sum_{k=1}^{2^{N-1}} \phi_k(j) Pr\{\Omega_k^{h\ell}\}, & \text{se o arco } j \text{ é um} \\ & \text{"arco de demanda"}. \\ \\ - \sum_{k=1}^{2^{N-1}} \phi_k(j) Pr\{\Omega_k^{h\ell}\}, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A sensibilidade de EUD com relação a variações incrementais na capacidade do arco j do grafo é dada então por

$$\frac{\partial EUD}{\partial a_j} = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L a_{\ell} \frac{\partial EUD^{h\ell}}{\partial a_j} \quad (VI.19)$$

Índices de risco (LOLP) por área podem ser também obtidos se for definido o protocolo de corte de carga do sistema interligado para estados inaceitáveis. Os protocolos mais conhecidos são: prioridades, repartição de riscos e repartição de reservas. O primeiro define a sequência de áreas em que deve-se obrigatoriamente efetuar o mínimo de carga de cada estado inaceitável. O protocolo de repartição de riscos assume que as áreas "à direita" do corte mínimo devem sofrer corte de carga visto que estão na "região insegura", mesmo que eventualmente uma destas áreas tenha reserva (geração menos carga) positiva. O protocolo repartição de reservas só considera como áreas em corte de carga aquelas áreas na região insegura com reserva negativa. Pode-se notar que na política de repartição de reservas uma área só se beneficia com sua interligação ao sistema, enquanto que isto já não é válido para a política de repartição de riscos. A política de prioridades é muito dependente da política adotada em cada sistema não sendo possível tirar conclusões gerais. Cabe lembrar entretanto que

qualquer que seja o protocolo adotado em um sistema interligado, os índices globais (LOLP e EUD) não se alteram visto que o mínimo corte de carga independe do protocolo.

Pela definição do protocolo de repartição de riscos, um "arco de geração" j no modo de falha índice k (isto é, $\phi_k(j) = 1$) está em déficit, de modo que o índice $LOLP_j^{h\ell}$ (LOLP na área j na condição hidrológica h e no nível de carga ℓ) é obtido pelo somatório das probabilidades dos modos de falha em que $\phi_k(j) = 1$:

$$LOLP_j^{h\ell} = \sum_{k=1}^{2^N-1} \phi_k(j) Pr\{\Omega_k^{h\ell}\}, \quad j=1, \dots, N \quad (VI.20)$$

O índice $LOLP_j$ (LOLP na área j) é obtido então tomando-se o valor esperado de (VI.20) sobre as hidrologias e níveis de carga:

$$LOLP_j = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L \alpha_{\ell} LOLP_j^{h\ell}, \quad j=1, \dots, N \quad (VI.21)$$

De (VI.18) pode-se verificar então que

$$\frac{\partial EUD}{\partial a_j} = -LOLP_j, \quad j=1, \dots, N \text{ (arco de geração)} \quad (VI.22)$$

A expressão (VI.22) mostra que a sensibilidade (VI.19) de EUD em relação à capacidade de geração na área j é igual (em módulo) à probabilidade de perda de carga na área para o protocolo de repartição de riscos.

O cálculo dos índices LOLP, EUD e das sensibilidades $\partial EUD/\partial a_j$ envolve a avaliação de $Pr\{\Omega_k^{h\ell}\}$ e $E_k^{h\ell}\{C_k(\omega^h, d^{\ell}, F)\}$ para cada conjunto $\Omega_k^{h\ell}$, $k=1, \dots, 2^N-1$, $\ell=1, \dots, L$, $h=1, \dots, H$. Nas seções seguintes, dois métodos de avaliação são apresentados e comparados entre si.

VI.3 MÉTODO DE INTEGRAÇÃO DIRETA

A definição (VI.6) do conjunto Ω_k^{he} caracteriza um poliedro convexo no espaço amostral

$$\Omega^h = \{\omega^h \in \mathbb{R}^N \mid 0 \leq \omega^h \leq c^h\} \quad (\text{VI.23})$$

onde c_i^h é a capacidade máxima de geração na área i na condição hidrológica h .

Para facilitar a notação omite-se os índices de condição hidrológica e nível de demandas e reescreve-se (VI.6) como

$$\Omega_k = \{0 \leq \omega \leq c \mid \sum_{j=1}^N a_{ij} \omega_j \leq b_i, i=1, \dots, 2^N, i \neq k\} \quad (\text{VI.24})$$

onde b_i corresponde ao termo de cada desigualdade de (VI.6) que não é função de ω . É fácil verificar pela definição (VI.3) que os coeficientes a_{ij} não nulos de qualquer ω_j são todos de mesmo sinal, de modo que fixados valores $\omega_1^*, \dots, \omega_{j-1}^*$, o intervalo de variação V_j de ω_j é limitado entre $\bar{V}_j(\omega_1^*, \dots, \omega_{j-1}^*)$ e $\underline{V}_j(\omega_1^*, \dots, \omega_{j-1}^*)$, funções obtidas tomando-se o menor (maior) limite superior (inferior) de ω_j dadas as restrições de (VI.24) como mostrado a seguir.

Define-se inicialmente

$$\theta_{ij} = b_i - \sum_{m=1}^{j-1} a_{im} \omega_m^* - \sum_{m=j+1}^N a_{im} \theta_{im} \quad (\text{VI.25})$$

onde

$$\theta_i = \begin{cases} 0, & \text{se } a_{im} > 0 \\ c_m, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Dois casos distintos devem ser considerados:

a) coeficientes de ω_j não negativos: neste caso, é fácil verificar que

$$\underline{V}_j(\omega_1^*, \dots, \omega_{j-1}^*) = 0 \quad (\text{VI.26a})$$

$$\bar{V}_j(\omega_1^*, \dots, \omega_{j-1}^*) = \text{Min}_{\substack{i=1, \dots, 2^{N-1} \\ i \neq k}} (c_j, e_{ij}) \quad (\text{VI.27a})$$

No caso a, o limite superior \bar{V}_j é dado pelo menor limite superior dentre todas as restrições de (VI.24), dado os valores $\omega_1^*, \dots, \omega_{j-1}^*$.

b) coeficientes de ω_j não positivos: neste caso, é fácil verificar que

$$\underline{V}_j(\omega_1^*, \dots, \omega_{j-1}^*) = \text{Max}_{\substack{i=1, \dots, 2^{N-1} \\ i \neq k}} (0, -e_{ij}) = - \text{Min}_{\substack{i=1, \dots, 2^{N-1} \\ i \neq k}} (0, e_{ij}) \quad (\text{VI.26b})$$

$$\bar{V}_j(\omega_1^*, \dots, \omega_{j-1}^*) = c_j \quad (\text{VI.27b})$$

No caso b, o limite inferior \underline{V}_j é dado pelo maior limite inferior dentre todas as restrições de (VI.24), dados os valores $\omega_1^*, \dots, \omega_{j-1}^*$.

Pode-se agora exprimir $\text{Pr}\{\Omega_k\}$ em termos do somatório múltiplo

$$\begin{aligned} \text{Pr}\{\Omega_k\} &= \sum_{\omega_1 \in V_1} \left(\sum_{\omega_2 \in V_2} \left(\dots \left(\sum_{\omega_N \in V_N} p(\omega_1, \dots, \omega_N) \right) \right) \right) = \\ &= \sum_{\omega_1 \in V_1} p_1(\omega_1) \left(\sum_{\omega_2 \in V_2} p_2(\omega_2) \left(\dots \left(\sum_{\omega_N \in V_N} p_N(\omega_N) \right) \dots \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{VI.28})$$

Pode-se também exprimir $E_k\{C_k(\omega, d, F)\}$ em termos do somatório múltiplo

$$\begin{aligned}
 E_k\{C_k(\omega, d, F)\} &= \sum_{\omega_1 \in V_1} \left(\sum_{\omega_2 \in V_2} \left(\dots \left(\sum_{\omega_N \in V_N} C_k(\omega, d, F) p(\omega_1, \dots, \omega_N) \right) \dots \right) \right) \\
 &= \sum_{\omega_1 \in V_1} p_1(\omega_1) \left(\sum_{\omega_2 \in V_2} p_2(\omega_2) \left(\dots \left(\sum_{\omega_N \in V_N} p_N(\omega_N) C_k(\omega, d, F) \right) \dots \right) \right)
 \end{aligned}
 \tag{VI.29}$$

Note-se que em (VI.28)-(VI.29) o intervalo $V_j = [V_j, \bar{V}_j]$ é função dos valores $\omega_1^*, \dots, \omega_{j-1}^*$ já fixados, de modo que os limites de V_j devem ser recalculados sempre que se variar $\omega_1, \dots, \omega_{j-1}$.

Os somatórios (VI.28)-(IV.29) devem ser avaliados para cada possível modo de falha do sistema interligado, cujo número cresce exponencialmente com N. Entretanto, como

$$\sum_{k=1}^{2^N-1} \Pr\{\Omega_k^{h\ell}\} = \text{LOLP}^{h\ell}$$

é de se supor que para sistemas planejados em que a LOLP é da ordem de 10^{-3} , hajam vários modos de falha de probabilidade nula ou desprezível e que a chance disto ocorrer seja crescente com N. É desejável portanto detectar estes casos de uma forma simples de modo a evitar cálculos desnecessários de intervalo nos somatórios (VI.28)-(VI.29). Pode-se inicialmente testar se para algum modo de falha, o conjunto Ω_k é vazio. Como $0 \leq \omega_k$, a capacidade de um corte para um dado nível de demanda e uma dada condição hidrológica está limitado pelas desigualdades abaixo:

$$C_k(0, d, F) \leq C_k(\omega, d, F) \leq C_k(c, d, F)
 \tag{VI.30}$$

Desse modo, se para algum $i \neq k$ for satisfeita a relação

$$C_i(o, d, F) < C_k(o, d, F), \text{ para algum } i \neq k \quad (\text{VI.31})$$

garante-se que o subconjunto do modo de falha de índice k é vazio.

Um outro teste simples pode ser feito avaliando-se a probabilidade de um "hipercubo" H_k que contenha Ω_k . Assim, se

$$H_k = \{ \omega \in \Omega \mid \underline{h}_j \leq \omega_j \leq \bar{h}_j, j=1, N \} \quad (\text{VI.32})$$

a relação (VI.7) assegura que

$$\Pr\{H_k\} = \prod_{j=1}^N \Pr\{\underline{h}_j \leq \omega_j \leq \bar{h}_j\} = \prod_{j=1}^N \left(\sum_{\omega_j=\underline{h}_j}^{\bar{h}_j} p_j(\omega_j) \right) \quad (\text{VI.33})$$

Os limites $\underline{h}_j, \bar{h}_j, j=1, N$ de H_k podem ser obtidos por um argumento semelhante ao usado para definir os limites \underline{v}_j e \bar{v}_j do intervalo V_j (equações (VI.26)-(VI.27)). Define-se inicialmente

$$e_i = b_i - \sum_{m=1}^N a_{im} v_{im}, \quad (\text{VI.34})$$

onde

$$\theta_{im} = \begin{cases} 0, & \text{se } a_{im} > 0 \\ c_m, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{VI.35})$$

Dois casos distintos devem ser considerados:

a) coeficientes de ω_j não negativos: neste caso, é fácil verificar que

$$\underline{h}_j = 0 \quad (\text{VI.36a})$$

$$\bar{h}_j = \text{Min} (c_j, e_i) \quad (\text{VI.37a})$$

$$i=1, \dots, 2^N - 1$$

$$i \neq k$$

b) coeficientes de ω_j não negativos: neste caso é fácil verificar que

$$\underline{h}_j = \text{Max}(\emptyset, -e_i) = -\text{Min}(\emptyset, e_i) \quad (\text{VI.36b})$$

$$i=1, \dots, 2^N - 1 \quad i=1, \dots, 2^N - 1$$

$$i \neq k \quad i \neq k$$

$$\bar{h}_j = c_j \quad (\text{VI.37b})$$

Note-se que os limites $\underline{h}_j, \bar{h}_j, j=1, \dots, N$ não são funções de $\omega_1, \dots, \omega_{j-1}$ de modo que o cálculo de (VI.33) é um produtório simples, ao contrário do oneroso cálculo dos somatórios (VI.28). Assim, avaliando-se previamente $\text{Pr}\{H_k\}$ e resultando um valor menor que uma tolerância pré-estabelecida, evita-se o cálculo de $\text{Pr}\{\Omega_k\}$, já que Ω_k está contido em H_k . Um "hipercubo" H_{kj} pode também ser definido de forma semelhante para o subespaço de Ω_k de dimensão $N-j$ após a fixação de $\omega_1, \dots, \omega_j$ e caso $\text{Pr}\{H_{kj}\}$ for menor que a tolerância, evita-se calcular os somatórios restantes em $\omega_{j+1}, \dots, \omega_N$.

O algoritmo de confiabilidade por integração direta avalia (VI.28), (VI.25) para cada condição hidrológica, cada

nível de demanda e cada conjunto de modo de falha, conforme o esquema apresentado na Figura VI.2.

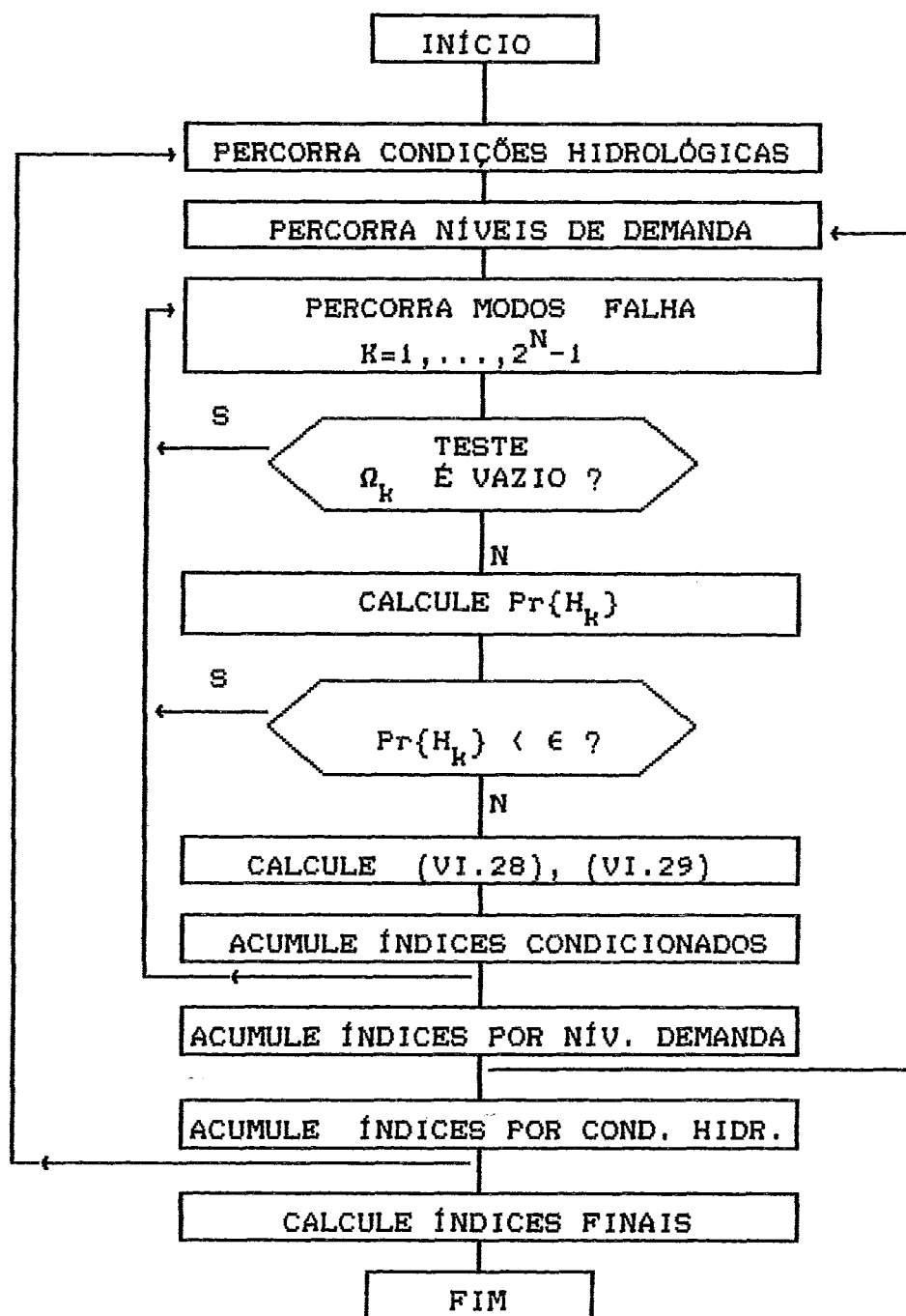


FIGURA VI.2 - ESQUEMA DE ALGORITMO DE CONFIABILIDADE EM SISTEMAS HIDROTERMOELÉTRICOS INTERLIGADOS POR INTEGRAÇÃO DIRETA

VI.4 MÉTODO DE MONTE CARLO

O método de Monte Carlo é uma forma de estimar estatísticas de interesse de um sistema qualquer a partir da análise do desempenho do sistema para estados de uma amostra aleatória do espaço de estados. Na análise de confiabilidade de sistemas hidrotermoelétricos, o método de Monte Carlo ao ser aplicado possibilita estimar os índices LOLP, EUD e sensibilidades a partir de uma amostra aleatória de condições hidrológicas, níveis de demanda e capacidades de geração (por área) do sistema interligado.

O esquema geral do método de Monte Carlo aplicado à análise da confiabilidade de sistemas hidrotermoelétricos interligados é apresentado na Figura VI.3.

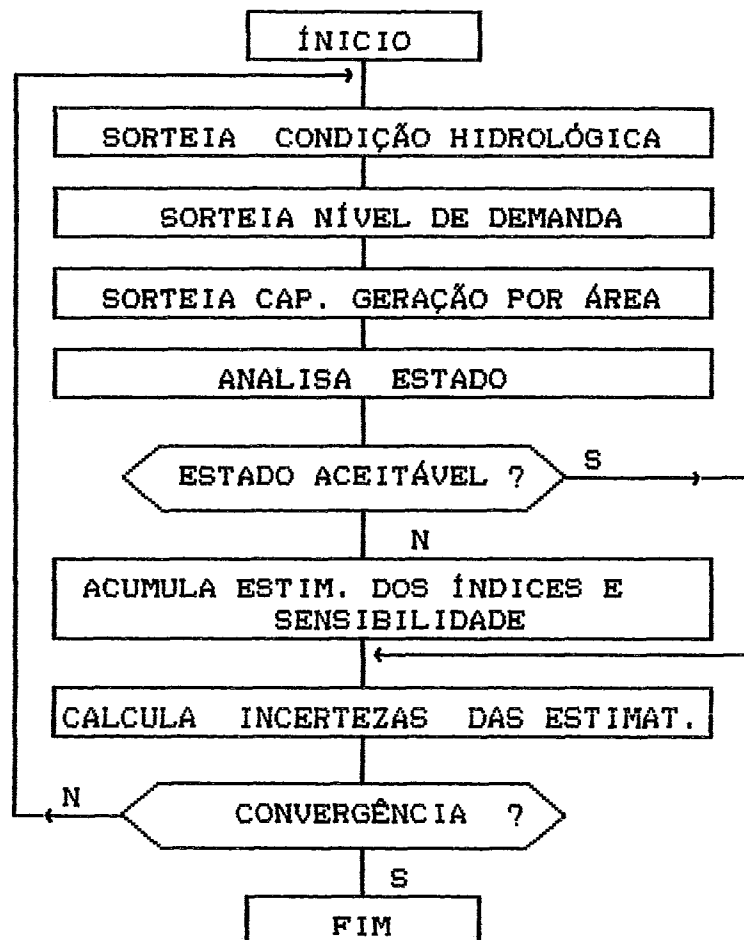


FIGURA VI.3 - ESQUEMA GERAL DE MÉTODO DE MONTE CARLO PARA ANÁLISE DE CONFIABILIDADE DE SISTEMAS HIDROTERMOELÉTRICOS INTERLIGADOS

O processo de sorteio de uma realização de uma v.a. Z qualquer é imediato conhecendo-se na distribuição acumulada de probabilidade $P_Z(z)$, conforme ilustrado na figura VI.4.

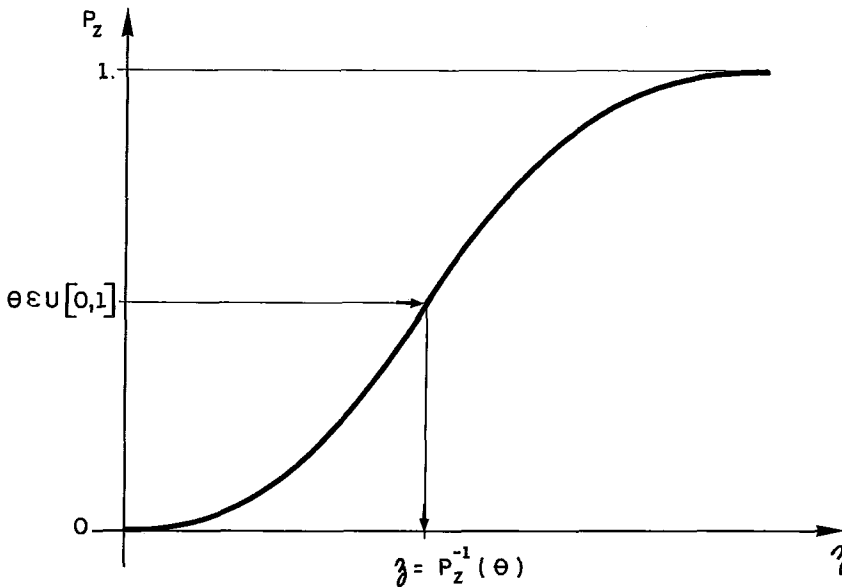


FIGURA VI.4 - SORTEIO DE REALIZAÇÃO DE V.A. Z A PARTIR DE SUA DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA $P_Z(z)$

Um gerador de número pseudo-aleatórios é utilizado para sortear θ de uma distribuição uniforme no intervalo $[0,1]$. Como as v.a. $W_i^h, i=1, N$ (capacidade de geração dada uma condição hidrológica h) são independentes entre si, o sorteio de um estado de capacidade de geração do sistema interligado é trivial uma vez efetuado o sorteio da condição hidrológica (o sorteio da condição hidrológica é simples por serem todas as hidrologias equiprováveis). Assume-se também que a v.a. nível de demanda é independente das v.a. $W_i^h, i=1, N$, sendo o sorteio de nível de demanda efetuado conforme ilustrado na Figura VI.5.

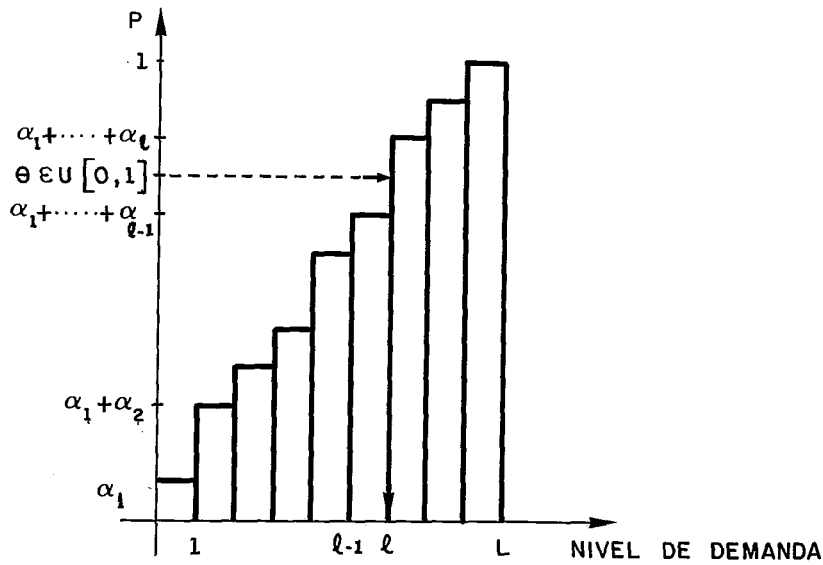


FIGURA VI.5 - SORTEIO DE v.a. NÍVEL DE DEMANDA DADA SUA DISTRIBUIÇÃO ACUMULADA

Sorteados a condição hidrológica h , a capacidade de geração ω_i^h da área $i=1,N$ e o nível de demanda ℓ , o estado $e_j = (\omega^h, d^\ell)$ é analisado para se determinar o corte mínimo do grafo associado ao estado (vide VI.1). Define-se então as seguintes funções indicadoras do estado e_j :

$$\text{LOLP}(e_j) = \begin{cases} 0, & \text{se o estado é aceitável} \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (\text{VI.38})$$

$$\text{EUD}(e_j) = \begin{cases} 0, & \text{se o estado é aceitável} \\ \sum_i^N d_i^\ell - C_k(\omega^h, d^\ell, F), & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (\text{VI.39})$$

$$s_i(e_j) = \begin{cases} 0, & \text{se o arco } i \text{ não está no corte mínimo do grafo} \\ 1, & \text{caso contrário,} \end{cases} \quad (\text{VI.40})$$

onde k é o índice do corte mínimo do grafo para o estado e_j .

As estimativas dos índices e sensibilidades correspondentes a (VI.38)-(VI.40) para uma amostra de n estados são dadas por

$$\hat{L}OLP = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n LOLP(e_j) \quad (VI.41)$$

$$\hat{E}UD = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n EUD(e_j) \quad (VI.42)$$

$$\hat{s}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n s_i(e_j) \quad (VI.43)$$

A incerteza de uma estimativa pode ser expressa em termos do seu coeficiente de variação ($v=\sigma/\mu$). Assim, no caso da estimativa (VI.41) da LOLP é fácil mostrar que

$$\mu_{\hat{L}OLP} = LOLP \quad (VI.44)$$

$$\sigma_{\hat{L}OLP}^2 = LOLP(1-LOLP)/n \quad (VI.45)$$

$$v_{\hat{L}OLP}^2 = \frac{\sigma_{\hat{L}OLP}^2}{\mu_{\hat{L}OLP}^2} = \frac{1 - LOLP}{n \cdot LOLP} \approx \frac{1}{n \cdot LOLP}, \quad LOLP \ll 1 \quad (VI.46)$$

Ao se aproximar LOLP por $\hat{L}OLP$ em (VI.46), tem-se a relação

$$n \cdot v_{\hat{L}OLP}^2 \hat{L}OLP \approx 1, \quad (VI.47)$$

o que indica que o esforço computacional do Método de Monte Carlo para estimar a LOLP é função de n e do valor que se deseja estimar, sendo que para reduzir a incerteza da estimativa o esforço cresce quadraticamente com n . Esta

análise indica também que quanto menor o índice LOLP, maior a dificuldades de estimá-lo por Monte Carlo.

Técnicas de redução da variância são geralmente utilizadas para acelerar a convergência do método de Monte Carlo. A amostragem por importância possibilita obter estimativas com menores incertezas que descrito anteriormente pela modificação do estimador utilizado(18). No que se segue, uma nova técnica de redução de variância adaptada ao problema em foco será apresentada e discutida.

Uma forma de reduzir o tamanho da amostra necessária para obter estimativas (VI.41)-(VI.43) é "aumentar" o valor a ser estimado. No caso da LOLP, isto pode ser conseguido modificando-se o espaço de estados a ser amostrado, pela exclusão de um subespaço composto unicamente de estados aceitáveis. Dada uma condição hidrológica h e uma nível de carga ℓ , uma condição necessária para que (ω^h, d^ℓ) seja aceitável é que

$$\sum_i^N \omega_i^h \geq \sum_i^N d_i^\ell$$

Para se excluir o maior número de estados aceitáveis, define-se o seguinte problema de otimização

$$\beta^{h\ell} = \text{Max} \prod_{i=1}^N (1 - P_i(\omega_i^h)) \quad (\text{VI.48})$$

$$\text{s/a} \quad \sum_{i=1}^N \omega_i^h \geq \sum_{i=1}^N d_i^\ell \quad (\text{VI.49})$$

onde $P_i(\cdot)$ é a distribuição acumulada de probabilidades de v.a. W_i^h .

O produtório de (VI.48) corresponde a probabilidade do subconjunto de estados tais que $\omega^h \geq \omega^*$, onde ω^* é a solução ótima do problema. Se ω^* for aceitável, o subconjunto conterà unicamente estados aceitáveis.

A função $1-P_i(\omega_i^h)$ é não crescente, de modo que resolver (VI.48)-(VI.49) é equivalente a resolver o problema

$$\text{Max } \sum_{i=1}^N \ell n (1-P_i(\omega_i^h)) \quad (\text{VI.50})$$

$$\text{s/a } \sum_{i=1}^N \omega_i^h = \sum_{i=1}^N d_i^{\ell} \quad (\text{VI.51})$$

Uma v.a. contínua Z qualquer pode ser caracterizada por sua função "hazard" definida como

$$g(z) = \frac{\partial \ell n(1-P_Z(z))}{\partial z} = \frac{p_Z(z)}{1-P_Z(z)}$$

onde $p_Z(\cdot)$ é a função densidade de Z e $P_Z(\cdot)$ a distribuição acumulada de Z .

O lagrangiano de (VI.50)-(VI.51) é dado por

$$\mathcal{L}(\omega^h, \lambda) = \sum_{i=1}^N \ell n (1-P_i(\omega_i^h)) + \lambda \sum_{i=1}^N (d_i^{\ell} - \omega_i^h) \quad (\text{VI.52})$$

Se a v.a. ω^h fosse contínua o lagrangiano seria dado por

$$\mathcal{L}(z, \lambda) = \sum_{i=1}^N \ell n (1-P_i(z_i)) + \lambda \sum_{i=1}^N (d_i^{\ell} - z_i) \quad (\text{VI.53})$$

As condições de otimalidade para $\text{Max } L(z, \lambda)$ são

$$\frac{\partial \mathcal{L}(z, \lambda)}{\partial z_i} = g_i(z_i) - \lambda = 0 \quad , \quad i=1, N$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(z, \lambda)}{\partial \lambda} = \sum_{i=1}^N (d_i^{\ell} - z_i) = 0$$

No caso da v.a. discreta W_i^h , a função "hazard" é dada por

$$g_i(\omega_i^h) = \frac{p_i(\omega_i^h)}{1 - P_i(\omega_i^h)} \quad (\text{VI.54})$$

Por analogia, as condições de otimalidade para $\text{Max } \mathcal{L}(\omega^h, \lambda)$ são

$$\lambda^* = g_i(\omega_i^h) = \frac{p_i(\omega_i^h)}{1 - P_i(\omega_i^h)}, \quad i=1, N \quad (\text{VI.55})$$

$$\sum_i^N \omega_i^* = \sum_i^N d_i^e \quad (\text{VI.56})$$

De (VI.56), tem-se a relação

$$\omega_i^* = g_i^{-1}(\lambda^*) \quad (\text{VI.57})$$

Substituindo-se (VI.57) em (VI.56), obtém-se a relação

$$\sum_{i=1}^N g_i^{-1}(\lambda^*) = \sum_{i=1}^N d_i^e \quad (\text{VI.58})$$

Resolvendo-se (VI.58) para λ^* , obtém-se em seguida de (VI.57) a solução ω^* do problema (VI.48)-(VI.49). Entretanto, se a condição (VI.49) não for suficiente para garantir que (ω^*, d^e) é um estado aceitável (o que pode ocorrer, pois as capacidades das interligações não foram consideradas em (VI.49)), substitui-se (VI.49) por

$$\sum_{i=1}^N \omega_i^h = (1+\delta) \sum_{i=1}^N d_i^e \quad (\text{VI.59})$$

e resolve-se (VI.50), (VI.59) para $\delta=0.1, 0.2, \dots$ até que a solução resulte em um estado aceitável.

O espaço de estados $\Omega^{h\ell}$ correspondente ao nível ℓ de carga e à condição hidrológica h tem probabilidade α^ℓ/H , e excluindo-se os estados de $\Omega^{h\ell}$ tais que $\omega_2 \geq \omega_2^*$, resta um subconjunto $C^{h\ell}$ de probabilidade $\rho^{h\ell} = (1 - \beta^{h\ell}) \alpha^\ell / H$.

A Figura VI.6 apresenta a forma de $C^{h\ell}$ para o caso de $N=2$.

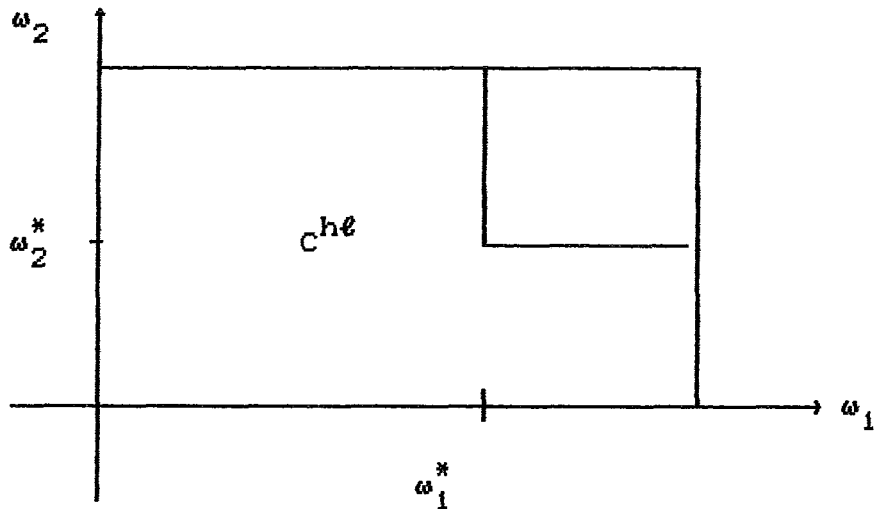


FIGURA VI.6 - CONJUNTO $C^{h\ell}$

O ganho ao aplicar o Método Carlo restrito ao subconjunto $C^{h\ell}$ na estimativa do índice $LOLP^{h\ell}$ pode ser avaliado pelo seguinte raciocínio. Seja $\hat{LOLP}_C^{h\ell}$ a estimativa para $LOLP^{h\ell}$ após n sorteios restritos ao espaço amostral $C^{h\ell}$. A estimativa de $LOLP^{h\ell}$ é dada então por

$$\hat{LOLP}^{h\ell} = \rho^{h\ell} \hat{LOLP}_C^{h\ell} \quad (VI.60)$$

De (IV.45), tem-se que a variância do estimador (VI.60) de $LOLP^{he}$ é dada por

$$\begin{aligned} \sigma_{L\hat{O}LP}^2 &= (\rho^{he})^2 L\hat{O}LP_C^{he} (1 - L\hat{O}LP_C^{he})/n = \\ &= L\hat{O}LP_C^{he} (\rho^{he} - L\hat{O}LP_C^{he})/n \end{aligned} \quad (VI.61)$$

O "ganho" de redução de variância do estimador de $LOLP^{he}$ calculada por (VI.60) e por (VI.44) para o mesmo número n de sorteios é

$$\eta = \frac{L\hat{O}LP_C^{he} (\rho^{he} - L\hat{O}LP_C^{he})/n}{L\hat{O}LP_C^{he} (1 - L\hat{O}LP_C^{he})/n} = \rho^{he}, L\hat{O}LP_C^{he} \ll 1 \quad (VI.62)$$

Poderia-se aplicar o método de Monte Carlo restrito ao conjunto C^{he} sorteando-se eventos do conjunto Ω^{he} e descartando os eventos não pertencentes a C^{he} . Entretanto se ρ^{he} for "alto", um grande número de sorteios "inúteis" serão feitos, o que oneraria o tempo total de sorteio.

Para se sortear estados exclusivamente do subconjunto C^{he} , faz-se necessário particionar C^{he} em N "hipercubos" disjuntos:

$$C^{he} = C_1^{he} \cup \dots \cup C_N^{he} \quad (VI.63)$$

onde

$$C_i^{he} = \{\omega \in \Omega^{he} \mid \omega_i < \omega_i^*; \omega_j \geq \omega_j^*, \forall j < i\}, i=1, \dots, N \quad (VI.64)$$

A Figura VI.7 apresenta a partição do subconjunto C^{he} da Figura VI.6.

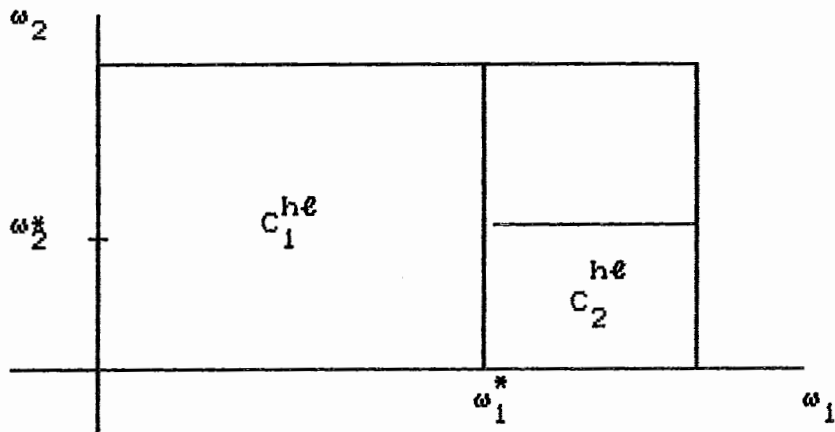


FIGURA VI.7 - PARTIÇÃO DO C^{he} EM "HIPERCUBOS" DISJUNTOS

O sorteio de um estado $\omega \in C_i^{he}$ é imediato: para $j=1, \dots, N$, sorteia-se $\theta_j \in U[0,1]$, obtendo-se em seguida

$$\omega_j = \begin{cases} P_j^{-1}(P_j(\omega_j^*) + \theta_j(1-P_j(\omega_j^*))), & j < i \\ P_j^{-1}(\theta_j P_j(\omega_j^*)), & j = i \\ P_j^{-1}(\theta_j), & j > i \end{cases} \quad (\text{VI.65})$$

De (VI.62) resulta que

$$P^{he} = P_1^{he} + \dots + P_N^{he}, \quad (\text{VI.66})$$

onde $P_i^{he} = \Pr\{C_i^{he}\}$, $i = 1, \dots, N$ é facilmente calculável pois C_i^{he} é um "hipercubo".

Assim, de (VI.60) resulta que

$$\hat{L}OLP^{he} = \rho_1^{he} \hat{L}OLP_1^{he} + \dots + \rho_N^{he} \hat{L}OLP_N^{he} \quad (VI.67)$$

onde $\hat{L}OLP_i^{he}$ é a estimativa de $LOLP^{he}$ restrita ao hipercubo C_i^{he} após n_i^{he} sorteios, $i=1, \dots, N$.

A variância do estimador (VI.67) de $LOLP^{he}$ é dada por

$$\sigma_{\hat{L}OLP^{he}}^2 = (\rho_1^{he})^2 \frac{\hat{L}OLP_1^{he} (1 - \hat{L}OLP_1^{he})}{n_1^{he}} + \dots + (\rho_N^{he})^2 \frac{\hat{L}OLP_N^{he} (1 - \hat{L}OLP_N^{he})}{n_N^{he}} \quad (VI.68)$$

A expressão (VI.68) permite definir um critério de escolha de qual hipercubo sortear estados de modo a minimizar $\sigma_{\hat{L}OLP^{he}}^2$. A partir de uma amostra inicial de $n^{he}(\emptyset)$ eventos, sorteia-se $n_i^{he}(\emptyset) = [\rho_i^{he} / \rho^{he}] n^{he}(\emptyset)$ eventos do hipercubo C_i^{he} , $i=1, \dots, N$, obtendo-se $\hat{L}OLP^{he}(\emptyset)$, $\sigma_{\hat{L}OLP^{he}}^2(\emptyset)$. Como as parcelas de (VI.68) são todas positivas, sorteia-se um segundo lote de eventos do hipercubo correspondente à maior parcela, recalculando-se (VI.67)-(VI.68). Este procedimento é repetido até que as incertezas nos índices estimados passem nos critérios de convergência.

Como visto no Capítulo VI.3, os índices e sensibilidades globais (não condicionados) são obtidos como:

$$LOLP = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L a_{\ell} LOLP^{he},$$

$$EUD = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L a_{\ell} EUD^{he},$$

$$\frac{\partial EUD}{\partial a_j} = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L a_{\ell} \frac{\partial EUD^{he}}{\partial a_j}, \text{ onde } a_j \text{ é capacidade do}$$

arco j do grafo do

sistema interligado.

O procedimento de partição/Monte Carlo será agora estendido para estimar diretamente os índices globais.

Pelo esquema da Figura VI.3, o sorteio de cada estado é precedido do sorteio da condição hidrológica h e do nível de demanda ℓ . Como a definição dos "hipercubos" $C_i^{h\ell}$, $i=1, \dots, N$ é função de h e ℓ , é possível caracterizar-se $C_i^{h\ell}$, $i=1, \dots, N$ previamente para $h=1, \dots, H$ e $\ell=1, \dots, L$. Definem-se então os conjuntos

$$C_i = \bigcup_{h=1}^H \bigcup_{\ell=1}^L C_i^{h\ell}, \quad i=1, \dots, N \quad (\text{VI.69})$$

Denotando-se por $\hat{L}OLP_i$ a estimativa da LOLP restrita ao conjunto C_i após n_i sorteios, resulta que

$$\hat{L}OLP = p_1 \hat{L}OLP_1 + \dots + p_N \hat{L}OLP_N \quad (\text{VI.70})$$

onde

$$p_i = \Pr \{C_i\} = \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L \Pr(C_i^{h\ell}), \quad i=1, \dots, N \quad (\text{VI.71})$$

A variância do estimador (VI.70) da LOLP é

$$\sigma_{\hat{L}OLP}^2 = p_1^2 \frac{\hat{L}OLP_1(1-\hat{L}OLP_1)}{n_1} + \dots + p_N^2 \frac{\hat{L}OLP_N(1-\hat{L}OLP_N)}{n_N} \quad (\text{VI.72})$$

Estimadores para EUD e $s_j = \frac{\partial EUD}{\partial a_j}$ são definidos de forma similar ao estimador (VI.70) da LOLP:

$$\hat{E}UD = p_1 \hat{E}UD_1 + \dots + p_N \hat{E}UD_N, \quad (\text{VI.73})$$

$$\hat{s}_j = p_1 \hat{s}_{j1} + \dots + p_N \hat{s}_{jN} \quad (\text{VI.74})$$

O procedimento usado para escolher n_1, \dots, n_N tem como objetivo minimizar $\sigma_{\hat{L}OLP}^2$, sendo análogo ao descrito anteriormente para minimizar $\sigma_{\hat{L}OLP}^2 h^2$. Assim, a partir de uma amostra inicial de tamanho n dividida em $[\rho_i / (\sum_i \rho_i)]n$ eventos por conjunto C_i , $i=1, \dots, N$, verifica-se qual a maior parcela de (VI.72), sorteando-se em novo lote de eventos do conjunto correspondente. Este procedimento é repetido até a convergência de estimativa da LOLP medida em termos de $v_{\hat{L}OLP}$.

A técnica de aceleração de convergência aqui apresentada (partição) pode ser incorporada ao método de Monte Carlo conforme esquematizado nas Figura VI.8 e VI.9. Uma pequena amostra inicial é primeiramente utilizada para obter estimativas iniciais para os índices e incertezas associadas a cada conjunto C_i , $i=1, \dots, N$ (Figura VI.8).

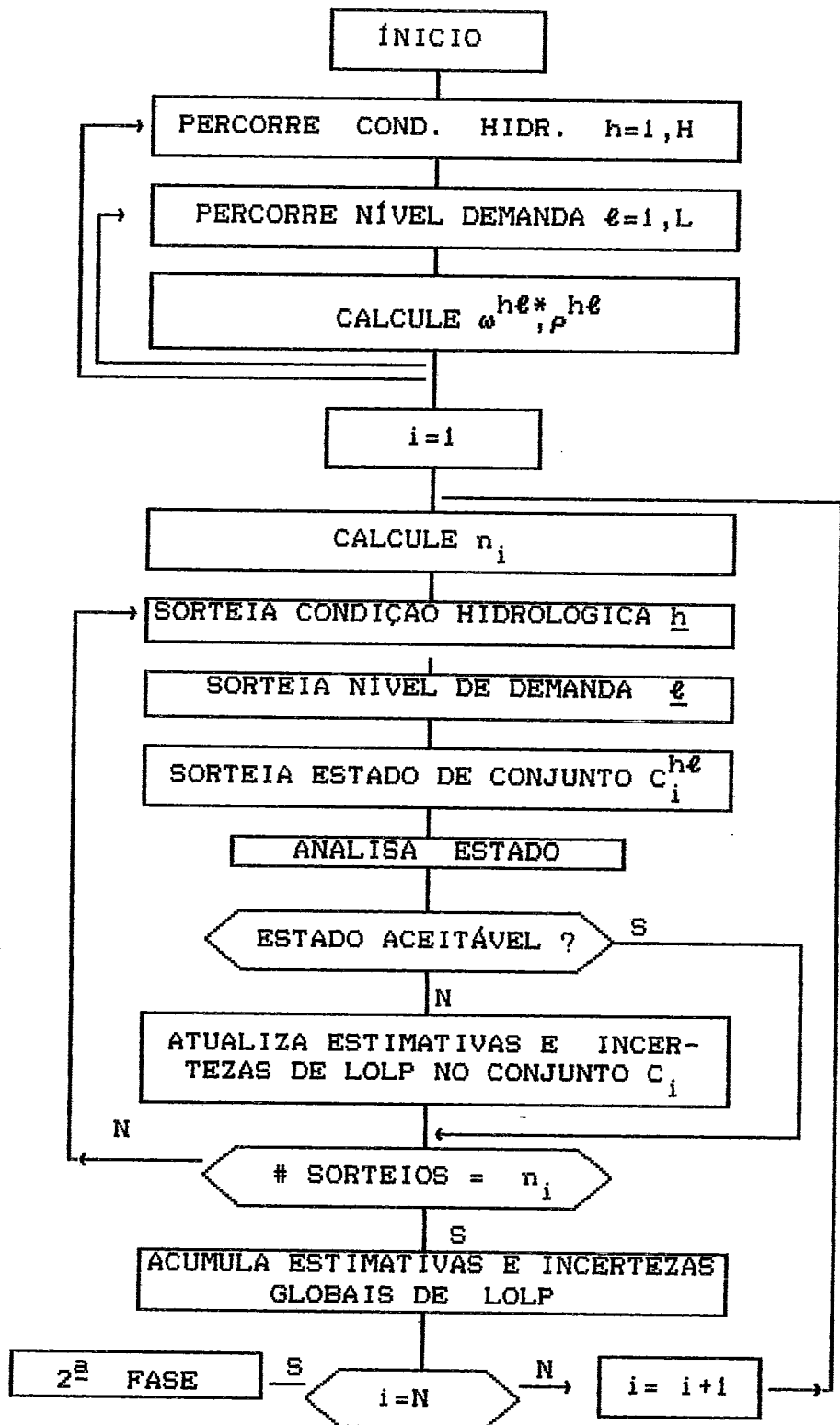


FIGURA VI.8 - MÉTODO DE PARTIÇÃO/MONTE CARLO - 1ª FASE

Em seguida, o Método de Partição/Monte Carlo é utilizado conforme o esquema da Figura VI.9.

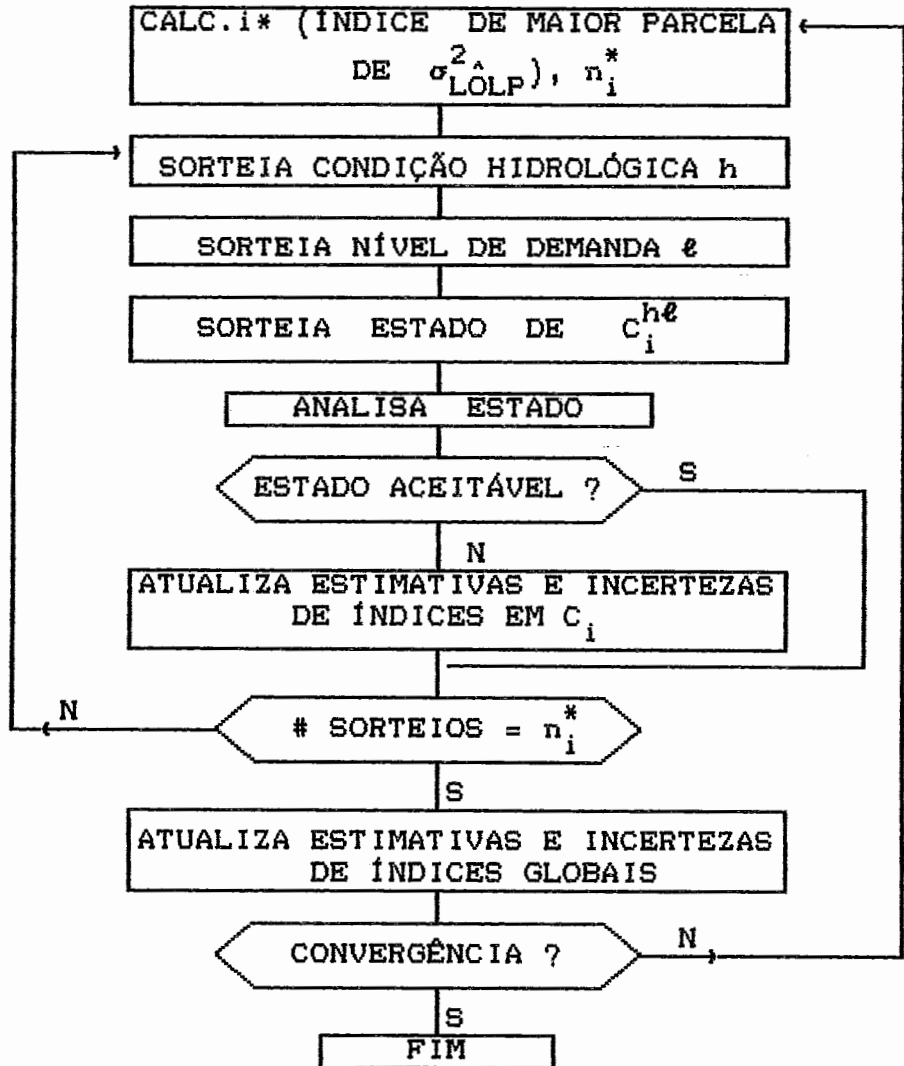


FIGURA VI.9 - MÉTODO DE PARTIÇÃO/MONTE CARLO - 2° FASE

VI.5 COMPARAÇÕES E CASOS EXEMPLO

Para se comparar os métodos de integração direta e de Monte Carlo com relação a precisão e esforço computacional, 2 sistemas interligados foram utilizados. O primeiro corresponde a uma configuração do sistema sul/sudeste brasileiro composto de 5 áreas interligadas como apresentado na figura VI.10.

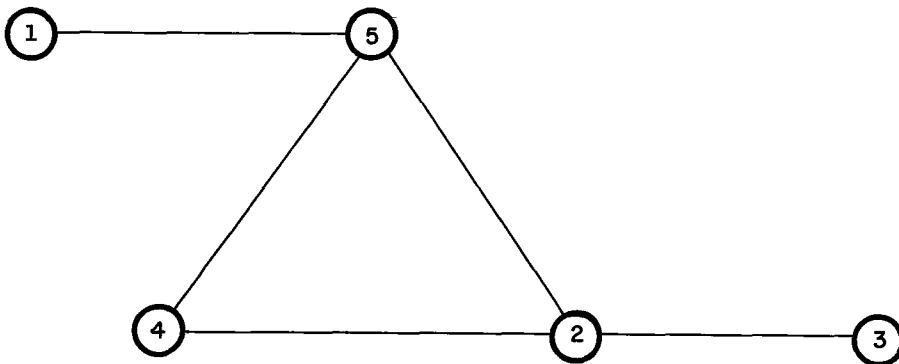


FIGURA VI.10 - CONFIGURAÇÃO DO SISTEMA SUL/SUDESTE

A área 1 corresponde à usina de Itaipu, a área 2 é a ELETROSUL, a área 3 é a CEEE, a 4 é a CESP e a área 5 é composta pelas empresas CEMIG e Furnas. Esta configuração foi simulada com 50 condições hidrológicas, sendo que neste trabalho só se considerou uma condição hidrológica. Os 10 maiores patamares das curvas de carga das áreas foram modeladas por 10 níveis equiprováveis, apresentados em p.u. na tabela VI.1. Excluindo Itaipu que não tem carga, as demandas de pico das áreas são: 3081 MW (ELETROSUL), 2084 MW (CEEE), 12139 MW (CESP) e 10465 MW (CEMIG/FURNAS).

Nível	Área 2	Área 3	Área 4	Área 5
1	0.9283	0.8740	1.0000	0.9735
2	0.9196	0.8635	0.9789	0.9927
3	0.9934	0.9956	0.9492	0.9449
4	0.9842	0.9836	0.9290	0.9637
5	0.9118	0.8736	0.9221	1.0000
6	0.9344	0.8742	0.9142	0.9880
7	0.9849	1.0000	0.9111	0.9445
8	0.9758	0.9951	0.8753	0.9707
9	1.0000	0.9757	0.8698	0.9590
10	0.9091	0.8716	0.8662	0.9799

Tabela VI.1 - VALORES DE CARGA POR ÁREA EM p.u PARA 10
MAIORES NÍVEIS DE CARGA - SISTEMA
SUL/SUDESTE

As capacidades das interligações são dadas na tabela
VI.2.

Interligação	Capacidade (MW)
2-3	1400
2-4	500
2-5	1350
4-5	5000
5-1	2800

Tabela VI.2 - CAPACIDADE DAS INTERLIGAÇÕES DO SISTEMA
SUL/SUDESTE

A tabela VI.3 apresenta para cada usina da configuração sua área, motorização, taxa equivalente de indisponibilidade e potência unitária para a condição hidrológica considerada.

ÁREA	USINA	Nº MÁQUINAS	POT. UNIT. (MW)	F.O.R
1	Itaipu	4	659	.100
2	Foz do Areia	4	398	.048
2	C.Cachoeira	4	63	.024
2	Figueira	3	9	.090
2	S.Santiago	4	316	.048
2	S.Osório	6	175	.024
2	Passo Fundo	2	110	.024
2	J.Lacerda A1	2	46	.080
2	J.Lacerda A2	2	61	.193
2	J.Lacerda B	2	115	.090
2	Charqueadas	1	60	.080
3	Passo Real	2	70	.024
3	Jacuí	6	30	.014
3	Itaúba	4	122	.024
3	P.Médici A	2	60	.090
4	Graminha	2	40	.014
4	Eucl. Cunha	4	27	.021
4	A. Vermelha	6	219	.048
4	Ilha Solteira	20	153	.024
4	Barra Bonita	4	35	.014
4	A.S.Lima	3	47	.014
4	Ibitinga	3	40	.014
4	Mário Leão	3	87	.024
4	N.Avanhandava	3	101	.024
4	Souza Dias	14	95	.024
4	A. Laydner	2	49	.014
4	Xavantes	4	104	.024
4	Lucas Garcez	4	18	.021
4	Capivara	4	152	.024
4	Jaguari	2	14	.021
4	Paraíbuna	2	43	.014
4	Cubatão	14	63	.024
4	S.Oliveira	2	16	.080
4	Piratininga	1	447	.090
5	Furnas	8	155	.024
5	Peixoto	10	44	.014
5	Estreito	6	174	.024
5	P.Colômbia	4	77	.024
5	Marimbondo	8	176	.024
5	Itumbiara	6	361	.048
5	C.Dourada	4	103	.014
5	Funil	3	73	.024
5	Mascarenhas	3	40	.014
5	I. Pombos	5	30	.014
5	N. Peçanha	6	63	.024
5	Fontes	5	29	.014
5	P.Coberta	2	46	.014
5	Angra I	1	626	.017
5	Sta. Cruz 1E2	1	160	.193
5	Sta. Cruz 3E4	1	418	.178

TABELA VI. 3 - DADOS DE USINAS DA CONFIGURAÇÃO SISTEMA SUL/SUDESTE

CONTINUA

CONTINUAÇÃO TABELA VI. 3

ÁREA	USINA	N° MÁQUINAS	POT.UNIT. (MW)	F.O.R
5	Camargos	2	24	.021
5	Itutinga	4	13	.021
5	Jaguara	4	97	.024
5	Volta Grande	4	88	.024
5	Emborcação	4	283	.048
5	Salto Grande	4	26	.021
5	Três Marias	6	62	.024
5	São Simão	6	266	.048
5	Igarapé	1	119	.090

A distribuição de potência disponível em cada área foi obtida pelo método de convolução, com passo de discretização compatível com o porte da capacidade total da área. Probabilidades inferiores a 10^{-10} foram desprezadas.

Dois casos foram analisados para este sistema. O primeiro considera só o pico de carga de cada área. Para este caso, dos $2^5 - 1$ possíveis modos de falha, só 3 não foram rejeitados pelo teste (VI.31), correspondendo às seguintes regiões inseguras: área 3, área 2 e 3, e todas as áreas. Feita a análise de confiabilidade, só o 1° e o 3° destes modos de falha contribuíram para os índices, resultando nos seguintes valores calculados pelo método de integração direta (ID):

ÍNDICES GLOBAIS		SENSIBILIDADES NÃO NULAS DA EUD COM RELAÇÃO À CAPACIDADE DE:		
LOLP	EUD(KW)	ÁREAS 1,2,4,5	ÁREA 3	INTERLIGAÇÃO 2-3
0.00655	562	0.00174	0.00655	0.00481

O tempo de processamento do cálculo acima foi de 18 segundos de CPU num IBM 4381. Estimativas para os mesmos índices foram obtidas pelo Método de Monte Carlo (MC) com dois critérios de convergência: coeficiente de variação do estimador da LOLP de 10% e 5%, como apresentado abaixo (valores entre parênteses são os coeficientes de variação)

SORTEIOS	ÍNDICES GLOBAIS		SENSIBILIDADES NÃO NULAS DA EUD COM RELAÇÃO À CAP. DE:		
	LÓLP	EUD (KW)	ÁREAS 1,2,4,5	ÁREA 3	INTERLIGAÇÃO 2-3
18040	0.00554(10%)	498(26%)	0.00105	0.00554	0.00449
63068	0.00631(5%)	535(13%)	0.00140	0.00631	0.00491

Os tempos de CPU para os critérios de 10% e 5% foram de 12 e 40 segundos, respectivamente. Nota-se que neste caso, para uma incerteza de 10% na estimativa da LOLP, o método de MC é competitivo com o de ID, embora a incerteza na estimativa da EUD seja bem maior (26%) e as incertezas das estimativas das sensibilidades sejam pelos menos iguais à da LOLP. Já para se estimar a LOLP com uma incerteza de 5% o método de MC é muito mais oneroso que o ID. Para se reduzir a variância dos estimadores, utilizou-se o método de Partição/Monte Carlo (PMC). A solução do problema (VI.48)-(VI.49) resultou no valor de $\beta = 0.388$. Assim, aplicando-se o método PMC ao espaço estados residual (de probabilidade $1-\beta$), a estimativa da LOLP com uma incerteza de 10% pode ser obtida com apenas 10000 sorteios, com um tempo de CPU de 7 segundos.

O segundo caso considera os 10 níveis de carga da tabela VI.1. Feita a análise de confiabilidade pelo método de ID para todos os níveis, os mesmos modos de falha do caso anterior contribuíram para os índices, resultando nos seguintes valores com um tempo de 2 minutos e 27 segundos:

ÍNDICES GLOBAIS		SENSIBILIDADES NÃO NULAS DA EUD COM REALAÇÃO À CAPACIDADE DE:		
LOLP	EUD(KW)	ÁREAS 1,2,4,5	ÁREA 3	INTERLIGAÇÃO 2-3
0.00097	32	0.00002	0.00097	0.00095

Estimativas para os mesmos índices obtidas com o método de MC para incertezas na estimativa da LOLP de 10% e 5% são apresentadas a seguir (valores entre parênteses são os coeficientes de variação)

SORTEIOS	ÍNDICES GLOBAIS L [^] OLP	ÍNDICES GLOBAIS E [^] UD(KW)	SENSIBILIDADES NÃO NULAS DA E [^] UD COM RELAÇÃO À CAP. DE:		
			ÁREAS 1,2,4,5	ÁREA 3	INTERLIGAÇÃO 2-3
100000	0.00107(10%)	51(18%)	0.00005	0.00107	0.00100
387308	0.00103(5%)	46(9%)	0.00004	0.00103	0.00100

Os tempos de CPU para os critérios de 10% e 5% foram de 1 minuto 7 segundos e 4 minutos 20 segundos, respectivamente.

Nota-se que enquanto o método de ID deve ser repetido para cada nível de carga e condição hidrológica, o método de MC não é sensível a introdução destes fatores. Entretanto para se obter estimativas com incertezas pequenas (5%, por exemplo), o método de MC apresenta uma taxa de convergência muito lenta o que o torna menos eficiente que o método de ID quando se deseja obter índices com grande precisão.

O método de PMC aplicado ao segundo caso resultou no valor de $\beta = 0.10$ na solução do problema (VI.48)-(VI.49), de modo que a incerteza na estimativa da LOLP com 100000 sorteios seria de 9,6% ao invés de 10% no método de MC, o que é um ganho muito pequeno.

O segundo sistema corresponde à configuração da Pacific Gas and Electric Company (PG&E), descrito em detalhes por Clancy, Gross e Wu [20] e compostos de 7 áreas interligadas conforme apresentado na figura VI.11.

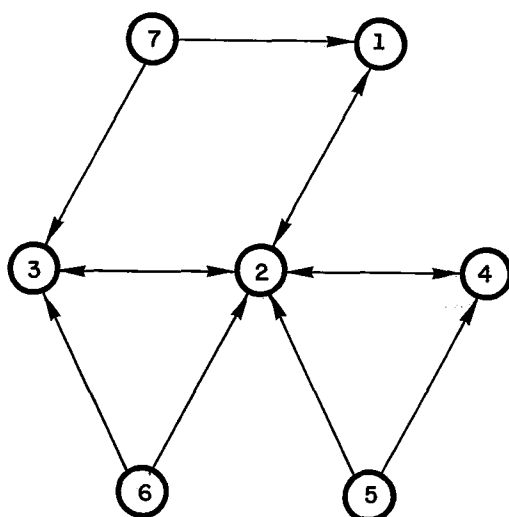


Figura VI.11 - CONFIGURAÇÃO DO SISTEMA INTERLIGADO DA PG&E

Os dados de geração, interligação e carga são idênticos aos da referência [20], exceto pelo fato que aqui não se considerou falhas nas interligações. As áreas 5,6 e 7 não tem carga, as demais tem cargas de pico de 19550 MW (área 1), 15000 (área 2), 6650 (área 3) e 2850 (área 4). As capacidades das interligações são dadas na tabela VI.4.

INTERLIGAÇÃO	TIPO	CAPACIDADE (MW)
1-2	BIDIRECIONAL	2000
2-3	BIDIRECIONAL	1000
2-4	BIDIRECIONAL	200
5-2	UNIDIRECIONAL	1750
5-4	UNIDIRECIONAL	450
6-2	UNIDIRECIONAL	1500
6-3	UNIDIRECIONAL	900
7-1	UNIDIRECIONAL	2500
7-3	UNIDIRECIONAL	1400

TABELA VI.4 - CAPACIDADES DAS INTERLIGAÇÕES DO SISTEMA PG&E

As capacidades máximas de geração das áreas são apresentadas na tabela VI.5.

ÁREA	CAPACIDADE MAX. GERAÇÃO (MW)
1	21000
2	15500
3	6500
4	3300
5	2200
6	2500
7	3900

TABELA VI.5 - CAPACIDADES MÁXIMAS DE GERAÇÃO POR ÁREA DO SISTEMA PG&E

A análise de confiabilidade deste sistema comportaria 127 possíveis modos de falha. Desprezando-se probabilidades inferiores a 10^{-8} , 18 modos de falha não foram rejeitados pelo teste (VI.31), tendo contribuído para os índices de confiabilidade os modos de falha com as seguintes regiões inseguras: área 4, áreas 1,2,3,6; áreas 2,3,4,5,6 e todas as áreas. Os índices calculados pelo método de ID foram os seguintes:

ÍNDICES GLOBAIS		SENSIBILIDADES NÃO NULAS DA EUD COM RELAÇÃO A CAPACIDADE DE:	
LOLP	EUD(KW)	ÁREA	INTERLIGAÇÕES
		4	2-4, 5-4
0.00029	38	0.00029	0.00029

O tempo de CPU foi de 8 segundos de CPU num IBM 4381. Estimativas para os mesmos índices foram obtidos pelo método de MC, como apresentado abaixo (coeficientes de variação entre parênteses)

SORTEIOS	ÍNDICES LÓLP	GLOBAIS EÚD(KW)	SENSIBILIDADES NÃO NULAS DA EUD COM RELAÇÃO À CAP. DE:	
			ÁREAS 4	INTERLIGAÇÃO 2-4, 5-4
85000	0.00053(19%)	43(18%)	0.00033	0.00033
200000	0.00031(13%)	40(14%)	0.00031	0.00031

Os tempos de CPU para incertezas de 19% e 13% na LOLP foram de 1 minuto 54 segundos e 4 minutos 27 segundos, respectivamente.

Como a LOLP é muito baixa, o método de MC tem grande dificuldade de estimá-lo com precisão. Para reduzir a variância das estimativas, o método de PMC pode ser útil neste caso: a solução do problema (VI.48)-(VI.49) resultou no valor de $\beta=0.56$, o que possibilita estimar a LOLP com 85000 sorteios com a mesma incerteza (13%) que se obteria com 250000 sorteios pelo método de MC.

Resumindo a comparação entre os métodos, deve-se preferir o método do MC (ou PMC) somente quando não se necessita índices com muita precisão ou quando os índices forem "altos". Em particular, quando a representação das flutuações nas cargas e da influência da condição hidrológica é muito detalhada, o método de ID incorre em um dispêndio computacional linearmente crescente com o número de níveis de carga e de condições hidrológicas, podendo não ser competitivo com o método de MC. Nestes casos, o método de ID pode entretanto produzir subestimativas para os índices quando de pequenas variações nas cargas pelo uso das sensibilidades da EUD com relação a "arcos de carga" (vide VI. 19). Pode-se também reduzir o número de condições hidrológicas analisadas agregando aquelas "semelhantes entre si" sob um determinado critério (por exemplo a potência total disponível) e reponderando suas probabilidades.

VI.6 EXTENSÃO DO CÁLCULO DE SENSIBILIDADES PARA OBTENÇÃO DE CORTES DE BENDERS

A aproximação (VI.5) da função "valor esperado da demanda não suprida" para um estágio qualquer é reescrita para facilidade de notação sem o indicador do estágio como:

$$\tilde{u}(x,y) = \bar{u}(x^*,y^*) + \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{n_i} \bar{w}_{ik} (x_{ik}^* - x_{ik}) + \sum_{j \in J} \bar{v}_j (y_j^* - y_j) \quad (\text{VI.75})$$

onde $\bar{u}(x^*,y^*)$ (definido por (III.10)), valor esperado da potência não suprida dada a decisão de investimento (x^*,y^*) é reescrito a seguir:

$$\bar{u}(x^*,y^*) = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L \alpha_{\ell} E \{ u^{h\ell}(x^*,y^*) \} \quad (\text{VI.76})$$

A v.a. $u^{h\ell}(x^*,y^*)$ é a solução do problema (III.5)-(III.9) reescrito abaixo:

$$u^{h\ell}(x^*,y^*) = \text{Min}_{s/a} \sum_{n=1}^N r_n \quad (\text{VI.77})$$

$$\sum_{j=1}^M s_{ij} f_j + \sum_{i \in A_n} \sum_{k=1}^{n_i} g_{ik} + r_n = d_n^{\ell}, \quad n=1, N \quad (\text{VI.78})$$

$$|f_j| \leq F_j y_j^*, \quad j \in J \quad (\text{VI.79})$$

$$|f_j| \leq F_j, \quad j=1, M, j \notin J \quad (\text{VI.80})$$

$$g_{ik} \leq G_{ik}^h x_{ik}^*, \quad k=1, n_i, i \in I \quad (\text{VI.81})$$

$$g_{ik} \leq G_{ik}^h, \quad k=1, n_i, i \in A-I \quad (\text{VI.82})$$

$$r_n \leq d_n^{\ell}, \quad n=1, N \quad (\text{VI.83})$$

onde A é o conjunto de usinas do sistema interligado e A_n é o subconjunto de usinas da área $n=1, \dots, N$.

Denotando por $v_j^{h\ell}(x^*, y^*)$, $j \in J$ o multiplicador ótimo associado à restrição (VI.79), de acordo com (IV.37) tem-se que

$$\bar{v}_j = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell E \{ F_j v_j^{h\ell} \} = \frac{F_j}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell E \{ v_j^{h\ell}(x^*, y^*) \} \quad (\text{VI.84})$$

Denotando por $\pi_{ik}^{h\ell}(x^*, y^*)$, $k=1, m_i$, $i \in I$ o multiplicador ótimo associado à restrição (VI.81), tem-se também que

$$\bar{w}_{ik}^{h\ell} = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell \bar{w}_{ik}^{h\ell}, \quad (\text{VI.85})$$

onde

$$\bar{w}_{ik}^{h\ell} = E \{ G_{ik}^h \pi_{ik}^{h\ell}(x^*, y^*) \} \quad (\text{VI.86})$$

A v.a. G_{ik}^h para uma dada condição hidrológica h é definida como

$$G_{ik}^h = \begin{cases} 0, & \text{com probabilidade } \lambda_i \\ q_i^h, & \text{com probabilidade } (1-\lambda_i) \end{cases}, k=1, m_i, i \in I \quad (\text{VI.87})$$

onde λ_i é a taxa equivalente de indisponibilidade de uma unidade geradora da usina i e q_i^h sua potência unitária na condição hidrológica h .

Pelo teorema das probabilidades totais, pode-se escrever que

$$\begin{aligned} w_{ik}^{h\ell} &= E\{G_{ik}^h \pi_{ik}^{h\ell}(x^*, y^*) | G_{ik}^h = 0\} \lambda_i + E\{G_{ik}^h \pi_{ik}^{h\ell}(x^*, y^*) | G_{ik}^h = q_i^h\} (1 - \lambda_i) = \\ &= (1 - \lambda_i) q_i^h E\{\pi_{ik}^{h\ell}(x^*, y^*) | G_{ik}^h = q_i^h\} \end{aligned} \quad (VI.88)$$

O modelo de confiabilidade de sistemas interligados calcula a sensibilidade $\frac{\partial EUD^{h\ell}}{\partial a_j}$ (expressão (VI.18)) onde a_j é a capacidade de uma área ou uma interligação. No caso de uma interligação $j \in J$, tem-se que

$$E\{v_j^{h\ell}(x^*, y^*)\} = \frac{\partial EUD^{h\ell}}{\partial a_j} \quad (VI.89)$$

de modo que (VI.84) pode ser reescrito como

$$\bar{v}_j = \frac{F_j}{H_j} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L \alpha_{\ell} \frac{\partial EUD^{h\ell}(x^*, y^*)}{\partial a_j} = F_j \frac{\partial EUD(x^*, y^*)}{\partial a_j} \quad (VI.90)$$

No caso de uma unidade da usina $i \in I$, o valor de $E\{\pi_{ik}^{h\ell}(x^*, y^*) | G_{ik}^h = q_i^h\}$ na expressão (VI.88) é condicionado ao evento de não falha da unidade, de modo que a distribuição de probabilidades de capacidade da área \underline{n} da usina \underline{i} não é a distribuição utilizada no cálculo da sensibilidade $\frac{\partial EUD}{\partial a_n}$. Assim, para calcular-se (VI.88) é necessário calcular a sensibilidade $\frac{\partial EUD^{h\ell}}{\partial a_n}$ com a distribuição $p_n(\cdot)$ de probabilidades de capacidade da área \underline{n} deconvolvida da unidade da usina \underline{i} e adicionada de uma capacidade fixa q_i^h . Com esta modificação a sensibilidade é calculada pelo modelo de

confiabilidade pela expressão

$$\frac{\partial \text{EUD}^{he_i}}{\partial a_n} = - \sum_{k=1}^{2^{N-1}} \phi_k(n) \sum_{\omega \in \Omega_k^{he}} p^i(\omega), \quad i \in A_n \quad (\text{VI.91})$$

onde

$$p^i(\omega) = p_1(\omega_1) \cdots p_{n-1}(\omega_{n-1}) p_n^i(\omega_n) p_{n+1}(\omega_{n+1}) \cdots p_N(\omega_N), \quad (\text{VI.92})$$

e $p_n^i(\cdot)$ é a distribuição de probabilidades de capacidade da área n modificada pela usina i . Note-se que o conjunto Ω_k^{he} não se altera, pois a capacidade máxima da área n na distribuição $p_n^i(\cdot)$ é igual à da distribuição $p_n(\cdot)$.

Para cada variável de decisão x_{ik}^* , duas situações podem ocorrer:

a) $x_{ik}^* = 0$:

Neste caso é claro que $p_n^i(\cdot) = p_n(\cdot)$, de modo que

$$\frac{-he}{w_{ik}} = (1-\lambda_i) q_i^h \frac{\partial \text{EUD}^{he}}{\partial a_n}, \quad i \in A_n \quad (\text{VI.93a})$$

b) $x_{ik}^* = 1$

Neste caso $p_n^i(\cdot) \neq p_n(\cdot)$ de modo que

$$\frac{-he}{w_{ik}} = (1-\lambda_i) q_i^h \frac{\partial \text{EUD}^{he_i}}{\partial a_n}, \quad i \in A_n \quad (\text{VI.93b})$$

O cálculo de (VI.93b) deve ser efetuado para cada usina $i \in I$ tal que $x_{ik}^* = 1$. Nestes casos, a análise de confiabilidade pelo método de integração direta deve então

avaliar não só

$$\Pr\{\Omega_k^{he}\} = \sum_{\omega \in \Omega_k^{he}} p(\omega), \quad k=1, \dots, 2^{N-1},$$

mas também

$$\Pr\{\Omega_k^{he i}\} = \sum_{\omega \in \Omega_k^{he}} p^i(\omega), \quad k=1, \dots, 2^{N-1}.$$

Os cálculos adicionais podem ser efetuados simultaneamente ao cálculo "base", pois como foi visto o "domínio" Ω_k^{he} é sempre o mesmo. No método de Monte Carlo, também é possível calcular (VI.93b) considerando-se para cada sorteio $\theta_n \in U[0,1]$ capacidades diferentes para cada distribuição acumulada P_n, P_n^i , $i \in A_n$ tal que $x_{ik}^* = i$ conforme ilustrado na Figura VI.12.

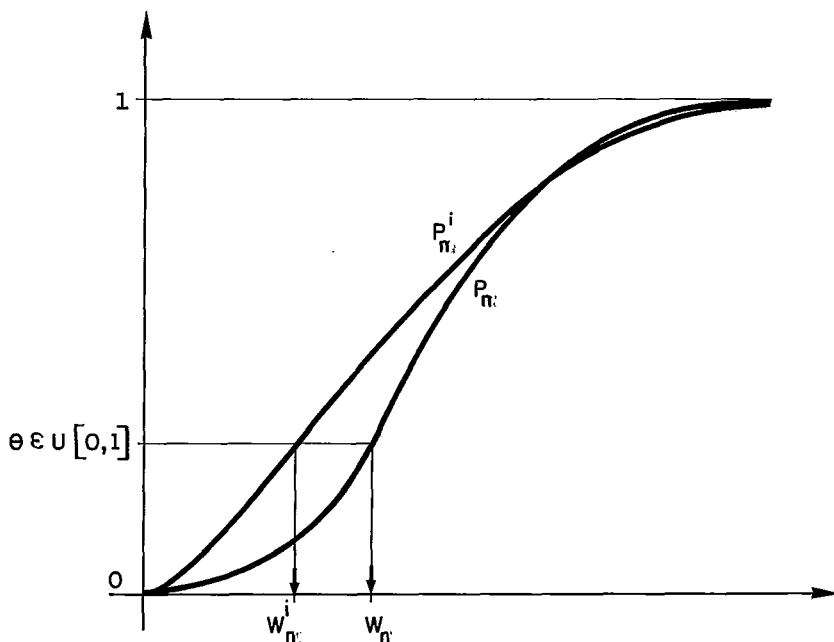


FIGURA VI.12 - SORTEIO DE CAPACIDADE DE DISTRIBUIÇÃO "BASE" P_n E DISTRIBUIÇÃO MODIFICADA P_n^i PARA USINA $i \in I$

Deste modo, estimativas de

$$\bar{w}_{ik} = (1-\lambda_i) \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H q_i^h \sum_{\ell=1}^L \alpha_{\ell} \frac{\partial EU^D}{\partial a_n}{}^{h\ell i}, \quad i \in A_n \quad (\text{VI.94})$$

são obtidas diretamente pelo método de Monte Carlo sem aumentar o número de sorteios utilizados anteriormente. Apenas o número de análises de estados por sorteio crescerá já que para cada $i \in I$ tal que $x^* = 1$ é necessário determinar o modo de falha associado a cada estado extraído do sorteio.

A aproximação (VI.75) é utilizada em cada estágio t em que $\bar{u}(t, x^*(t), y^*(t)) > U(t)$ para gerar o corte de Benders na forma

$$\tilde{u}(t, x(t), y(t)) \leq U(t) \quad (\text{VI.95})$$

Deve-se ter em mente que como a aproximação $\tilde{u}(t, x(t), u(t))$ deve ser uma subestimativa de $\bar{u}(t, x(t), y(t))$ para qualquer $(x(t), y(t))$, a incerteza associada às estimativas de $\bar{u}(t, x^*(t), y^*(t))$; $\bar{w}_{ik}(t)$, $k=1, n_i$, $i \in I$ e $\bar{v}_j(t)$, $j \in J$ deve ser tal que esta propriedade seja satisfeita. Isto pode ser alcançado utilizando-se como estimativa o valor estimado subtraído de um ou dois desvios padrão.

Para reduzir o esforço computacional de cálculo de cortes de Benders, deve-se tomar partido do fato que devido às restrições de data mínima para motorização adicional por usina e para reforço por interligações só é necessário o cálculo dos coeficientes de (V.5) para os termos correspondentes às variáveis de decisão existentes no estágio. Pode-se também tirar vantagens do fato seguinte: caso em alguma iteração $m < M$ (iteração atual) do método de Benders a solução foi tal que $x^*(t) \geq x^m(t)$, $y^*(t) \geq y^m(t)$ e

$\bar{u}^m(t, x^m(t), y^m(t)) < U(t)$ necessariamente ocorrerá que

$\bar{u}^M(t, x^m(t), y^m(t)) < U(t)$. Assim, neste caso não é necessário analisar o subproblema de operação da iteração m no estágio t .

CAPÍTULO VII

ESTRATÉGIAS DE SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE EXPANSÃO

O subproblema de investimento (V.4)-(V.12) do problema de expansão é um problema de programação 0/1 de grande porte. Devido ao seu caráter multi-estágio, torna-se computacionalmente penoso resolvê-lo até a otimalidade. Assim, será analisado inicialmente o caso de expansão estática e em seguida estratégias de solução no caso multi-estágio (dinâmica) serão discutidas.

VII.1 CASO ESTÁTICO

O subproblema (V.5)-(V.12) neste caso reduz-se a

$$\text{Min } \sum_{i \in I'} c_i \sum_{k=1}^{n_i} x_{ik} + \sum_{j \in J'} q_j y_j \quad (\text{VII.1})$$

s/a

$$\sum_{i \in I'} \sum_{k=1}^{n_i} w_{ik}^m (x_{ik}^m - x_{ik}) + \sum_{j \in J'} \bar{v}_j (y_j^m - y_j) + \bar{u}(x^m, y^m) \leq U, m=1, M \quad (\text{VII.2})$$

$$x_{ik} - x_{ik-1} \leq 0, k=2, n_i, i \in I' \quad (\text{VII.3})$$

$$\underline{\beta}_{ik} \leq x_{ik} \leq \bar{\beta}_{ik}, k=1, n_i, i \in I' \quad (\text{VII.4})$$

$$\underline{y}_j \leq y_j \leq \bar{y}_j, j \in J' \quad (\text{VII.5})$$

$$x_{ik} \in \{0, 1\}, k=1, n_i, i \in I' \quad (\text{VII.6})$$

$$y_j \in \{0, \dots, m_j\}, j \in J' \quad (\text{VII.7})$$

onde I' denote o conjunto de usinas motorizáveis e J' o conjunto de interligações candidatas a reforço no estágio em estudo e $(\bar{\beta}_{ik}, \underline{\beta}_{ik}), (\bar{y}_j, \underline{y}_j)$ são limites superiores e inferiores para x_{ik} e y_j respectivamente. Agora as restrições lógicas (VII.3)-(VII.5), restam M restrições (cortes de Benders) que são do tipo "knapsack": os coeficientes de x_{ik} e y_ℓ de (VII.2) são não negativos, assim como os termos independentes. A cada iteração de Benders, um novo corte (VII.2) é gerado que torna inviável a solução ótima do subproblema no estágio anterior, o que implica onerar a solução dos vários subproblemas de investimentos ao longo do método de Benders, visto que cada subproblema deve ser resolvido por algoritmos do tipo "branch and bound". É necessário então buscar formas de acelerar a convergência do método de Benders de forma a reduzir o tempo total de processamento.

Uma estratégia de aceleração da convergência consiste em propor uma solução inicial "próxima" da solução ótima. Esta solução deve ser inviável, visto que o método de Benders proposto neste trabalho utiliza cortes de viabilidade (uma solução que atenda todas as restrições de confiabilidade não gera cortes de viabilidade). Uma forma de se obter uma solução inicial sem a necessidade de efetuar análises de confiabilidade consiste em utilizar-se uma "relaxação" do subproblema de operação dada por

$$\bar{u}^h(x^*, y^*) = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell u^{h\ell}(x^*, y^*) \quad (\text{VII.8})$$

onde

$$u^{h\ell}(x^*, y^*) = \text{Min} \sum_{n=1}^N r_n \quad (\text{VII.9})$$

s/a

$$\sum_{j=1}^M s_{ij} f_j + \sum_{i \in A_n} \sum_{k=1}^{n_i} g_{ik} + r_n = d_n^\ell, \quad n=1, N \quad (\text{VII.10})$$

$$|f_j| \leq F_j y_j^*, \quad j \in J' \quad (\text{VII.11})$$

$$|f_j| \leq F_j, j=1, M; j \notin J' \quad (\text{VII.12})$$

$$g_{ik} \leq (1-\lambda_i) q_i^h x_{ik}^*, k=1, n_i; i \in I' \quad (\text{VII.13})$$

$$g_{ik} \leq (1-\lambda_i) q_i^h, k=1, n_i; i \in A-I' \quad (\text{VII.14})$$

$$r_n \leq d_n^e, n=1, N \quad (\text{VII.15})$$

O problema (VII.9)-(VII.15) é determinístico, onde se substituiu a v.a. G_{ik}^h por seu valor esperado nas restrições (VI.13)-(VII.14). Assim, $u^{he}, (x^*, y^*)$ pode ser calculado pela solução de $H \times L$ problemas de fluxo máximo (um problema (VII.9)-(VII.15) para cada condição hidrológica e cada nível de carga). Obtém-se também os coeficientes

$$\bar{w}'_{ik} = \frac{(1-\lambda_i)}{H} \sum_{h=1}^H q_i^h \sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell w^{he}, (x^*, y^*) \quad (\text{VII.16})$$

$$\bar{v}'_j = \frac{F_j}{H_j} \sum_{h=1}^H \sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell v_j^{he}, (x^*, y^*) \quad (\text{VII.17})$$

onde $w^{he}, (x^*, y^*)$ é o multiplicador ótimo associado à restrição (VII.13) e $v_j^{he}, (x^*, y^*)$ é o multiplicador ótimo associado à restrição (VII.11).

Como para qualquer v.a. Z e qualquer função f convexa vale que $E(f(z)) \geq f(E(z))$, resulta que

$$\bar{u}'(x^*, y^*) \leq \bar{u}(x^*, y^*) \quad (\text{VII.18})$$

Assim, a restrição

$$\tilde{u}'(x, y) = \bar{u}'(x^*, y^*) + \sum_{i \in I', k=1}^{n_i} \bar{w}'_{ik} (x_{ik}^* - x_{ik}) + \sum_{j \in J'} \bar{v}'_j (y_j^* - y_j) \leq U \quad (\text{VII.19})$$

é uma subestimativa para a restrição $\bar{u}(x,y) \leq U$. Resolvendo-se o problema de expansão determinístico obtido utilizando-se os cortes (VII.19) no subproblema de investimento resultará uma solução inicial para o problema estocástico a baixo custo computacional. Ademais, se esta solução for viável para o problema estocástico, será ótima devido à (VII.18). Caso contrário, os cortes gerados ao longo das iterações do método de Benders aplicados ao problema de expansão determinístico podem ser utilizados na solução do problema estocástico, visto que são subestimativas.

Uma forma alternativa de se obter subestimativas para a restrição de confiabilidade corresponde a efetuar a análise de confiabilidade para um único nível de carga, obtendo-se para cada condição hidrológica $h=1, \dots, H$ os valores de $\bar{u}^{h1}(x^*, y^*)$, w_{ik}^{h1} , $k=1, n_i$, $i \in I'$ e v_j^{h1} , $j \in J'$.

A expressão (VI.18) dá a sensibilidade s_i^h de $\bar{u}^{h1}(x^*, y^*)$ com relação a variação de demandas na área i , de modo que pode-se obter a subestimativa

$$\bar{u}^{h\ell'}(x^*, y^*) = \bar{u}^{h1}(x^*, y^*) + \sum_{i=1}^N s_i^h (d_i^\ell - d_i^1), \quad \ell=1, \dots, L \quad (\text{VII.20})$$

Obtém-se então

$$\bar{u}^{h'}(x^*, y^*) = \sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell \bar{u}^{h\ell'}(x^*, y^*) = \bar{u}^{h1}(x^*, y^*) + \sum_{\ell=1}^L \alpha_\ell \left(\sum_{i=1}^N d_i^\ell s_i^h \right) - \sum_{i=1}^N s_i^h d_i^1 \quad (\text{VII.21})$$

Tomando-se a média nas condições hidrológicas resulta então a subestimativa

$$\bar{u}'(x^*, y^*) = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \bar{u}^{h'}(x^*, y^*) \quad (\text{VII.22})$$

Com esta subestimativa, os coeficientes da restrição (VII.19) são dados por

$$\bar{w}'_{ik}(x^*, y^*) = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \bar{w}^{h1}_{ik} \quad (\text{VII.23})$$

$$\bar{v}'_j(x^*, y^*) = \frac{1}{H} \sum_{h=1}^H \bar{v}^{h1}_j \quad (\text{VII.24})$$

Esta abordagem pode ser generalizada para efetuar a análise de confiabilidade para alguns níveis de carga representativos e utilizar a subestimativa (VII.20) nos demais níveis.

As diversas estratégias discutidas podem ser aplicadas ao longo das iterações de Benders: no início do método quando em geral se está "distante" da solução ótima e há uma grande quantidade de alternativas de investimento a analisar, pode-se utilizar a subestimativa fraca (VII.19) dada pelo subproblema determinístico para eliminar um grande número de alternativas. À medida que se vai gerando mais cortes, pode-se utilizar subestimativas cada vez mais fortes, e, ao se chegar próximo da solução ótima, deve-se utilizar o subproblema de operação estocástico exato.

VII.2 CASO DINÂMICO

O subproblema (V.4)-(V.12) de investimento do problema de expansão multi-estágio (dinâmico) é composto de cortes de Benders (restrições independentes para cada estágio) e de restrições lógicas (V.6)-(V.10) que acoplam as decisões de investimento ao longo do período de planejamento. Relaxando-se as restrições (V.6), (V.7), (V.8) e (V.10), resultam T subproblemas de operação estocásticos

independentes. Esta observação indica uma forma de obter uma solução inicial para o subproblema multi-estágio a partir das soluções ótimas dos subproblemas estáticos em cada estágio $t=1, \dots, T$, que são de dimensão bem menor. Caso as restrições relaxadas não fiquem violadas na sequência de soluções estáticas assim obtida, esta sequência é a solução ótima do subproblema dinâmico. Caso contrário, os cortes de Benders gerados em cada subproblema estático são válidos para o subproblema dinâmico.

O problema dinâmico pode ser atacado restringindo-se o número de variáveis de decisão consideradas. Por exemplo, pode-se reduzir o número de unidades adicionáveis por usina e o número de reforços de capacidade por interligação a um valor pequeno (um ou dois). Os coeficientes dos cortes de Benders do problema dinâmico restrito dão uma indicação do benefício de se incluir (excluir) nas variáveis de decisão mais (ou menos) unidades geradoras nas usinas e mais (ou menos) reforços de interligação. Para as variáveis de investimento em que haja indicação de benefício, pode-se agora resolver novamente o problema dinâmico restrito alterando-se o mínimo e o máximo de adições de unidades ou reforços de interligações de modo a não crescer o número de variáveis de decisão. Assim, para cada problema dinâmico restrito está-se criando um "túnel" em torno da solução anterior, o que possibilita verificar a existência de soluções no entorno da solução anterior enquanto se mantém o problema numa dimensão tal que seja possível de ser tratada por algoritmos do tipo "branch and bound". Cabe notar que todos os cortes de Benders gerados ao longo do processo mantêm-se válidos, de modo que a aproximação da função "valor esperado da demanda não suprida" em cada estágio está sempre melhorando. Esta estratégia já foi utilizada com sucesso por DANTZIG, GRANVILLE e PEREIRA(22), sendo uma forma eficiente de se reduzir a dimensionalidade do problema sem perder a garantia de otimalidade da solução. O processo só é interrompido quando a solução encontrada para o problema dinâmico restrito for tal que não haja indicação de benefício de "abrir um túnel" em torno da solução para os casos em que

casos em que isto não viole os limites de adições de unidades ou reforços de interligações do problema dinâmico original.

VII.3 HEURÍSTICAS

Um limite superior para a solução ótima dinâmica pode ser obtido pela sequência de soluções ótimas estáticas obtidas resolvendo-se um problema de expansão estática em cada estágio, fixando-se a solução obtida no estágio anterior. Como se está restringindo o problema, caso cada problema de expansão estática tenha solução, o custo da sequência de soluções estáticas é um "upper bound". Alternativamente, pode-se partir do último estágio resolvendo-se uma sequência inversa de problemas estáticos onde consideram-se como candidatas à adição no estágio $t-1$ as adições obtidas na solução no problema do estágio t . Da mesma forma, caso exista solução em cada estágio $t=T, T-1, \dots, 1$ a sequência de soluções estáticas resultará numa solução viável para o problema dinâmico que é um "upper bound".

Na estratégia de "túnel", cada solução do problema dinâmico restrito que na última iteração de Benders atenda às restrições de confiabilidade é uma solução viável e, conseqüentemente, também define um "upper bound" para a solução ótima dinâmica.

O problema dinâmico pode também ser abordado "hierárquicamente", decidindo-se inicialmente os principais investimentos a cada ano (tomando-se por exemplo o mês mais desfavorável), o que reduz significativamente o número de estágios e, conseqüentemente, o número de variáveis $0/1$. Em seguida, seriam tratados subproblemas dinâmicos em estágios mensais e horizontes anuais onde estariam já definidos a configuração inicial e final.

CAPÍTULO VIII

RESULTADOS COMPUTACIONAIS

O modelo de expansão de capacidade de ponta em sistemas interligados descrito na Capítulo V foi implementado num programa FORTRAN capaz de resolver problemas de expansão multi-estágio com as seguintes características:

- i) subproblema de investimento resolvido por um algoritmo de "Branch and Bound" codificado em FORTRAN desenvolvido por SINGHAL (19);
- ii) subproblema de operação (confiabilidade) resolvido pelo método de integração direta descrito no Capítulo VI.4 e extendido como descrito no Capítulo VI.6;
- iii) supondo-se que a expansão do sistema para atendimento dos requisitos de energia já foi efetuada e simulada, dispõe-se das alterações na configuração base (adições de usinas e interligações) para cada estágio do plano de expansão de energia e também das potências unitárias disponíveis em cada estágio nas usinas para cada condição hidrológica simulada.

Para ilustrar a aplicação do programa, dois casos de expansão (um estático e o outro dinâmico) foram montados a partir do sistema sul-sudeste com cinco áreas apresentado no Capítulo VI.5. A configuração base foi obtida retirando-se das usinas da Tabela VI.1 duas unidades da usina de Itaipu, duas unidades de Ilha Solteira e uma unidade de Cachoeira Dourada. Considerou-se nestes casos a mesma condição hidrológica utilizada no Capítulo VI.5 e só um nível de demanda (o pico). As capacidades da interligações são as mesmas utilizadas no Capítulo VI.5 (Tabela VI.2).

VIII.1 EXPANSÃO ESTÁTICA

Os dados das usinas candidatas à motorização são apresentados na Tabela abaixo.

USINA	ÁREA	POT.UNIT. (MW)	CUSTO DA UNIDADE (US 1000\$)	NÚMERO MAX.ADIÇÕES
ITAIPU	ITAIPU	659	239867	2
J.LACERDA	ELETROSUL	315	616140	1
CANDIOTA	CEEE	315	616140	1
P.MEDICI B	CEEE	150	293400	1
I.SOLTEIRA	CESP	153	51561	4
C.DOURADA	FURNAS/ CEMIG	103	34229	2

A interligação CEEE-ELETROSUL foi considerada candidata à reforço de capacidade (até três incrementos de 200MW) a um custo unitário de US\$ 10000 por incremento de capacidade.

Os picos de demanda por área são:

ELETROSUL	3081 MW
CEEE	2084 MW
CESP	12139 MW
FURNAS/CEMIG	10465 MW

O critério de confiabilidade utilizada é igual a 0.025% da demanda média global, que resulta no valor de 6.94 MW. O subproblema de investimento (SI) tem 14 variáveis 0/1 (considerando-se cada reforço de capacidade como uma variável 0/1), e $6 + M$ restrições, onde M denota o número de cortes de Benders. A convergência foi obtida após 3 iterações de Benders, sendo apresentadas na Tabela VIII.1 as soluções obtidas em cada iteração.

N° ADIÇÕES	ITER.0	ITER.1	ITER.2	ITER.3
ITAIPU	-	-	-	-
J.LACERDA	-	-	-	-
CANDIOTA	-	-	-	-
P.MEDICI B	-	-	-	-
J.SOLTEIRA	-	2	3	2
C.DOURADA	-	-	-	2
INTERLIGAÇÃO	-	-	-	-
CUSTO(10 ⁶ \$)	0	103	155	172
EUD(MW)	36.52	13.42	7.59	6.10
TEMPO SO(SEG.)	32	34	30	33
TEMPO SI(SEG.)	0.3	0.3	0.3	-

TABELA VIII.1 - CONVERGÊNCIA - EXPANSÃO ESTÁTICA
(DEMANDA BASE)

Note-se que 99% do tempo total de 2'14" de CPU (IBM4381/2) é devido à solução dos subproblemas de operação (SO).

Buscou-se reduzir o tempo de computação pela obtenção de uma solução inicial obtida pela solução do problema relaxado descrito no Capítulo VII.1(SO determinístico ao tornar-se o valor esperado nas v.a. capacidade de geração por área). No exemplo em pauta esta relaxação revelou-se entretanto fraca (a solução resultante foi nula).

VIII.2 EXPANSÃO DINÂMICA

O caso de expansão dinâmica foi montado considerando-se 3 estágios com as demandas base, + 2.5% e + 5%, com critério de 0.025% da demanda média global em cada estágio. A taxa de

desconto utilizada foi de 10%. Buscou-se inicialmente obter um "upper bound" para a solução do problema de expansão dinâmica pela sequência de soluções de problemas de expansão estática fixando-se a solução no estágio $t-1$ no problema de expansão no estágio t . As Tabelas VIII.2 e VIII.3 resolvem a convergência dos problemas de expansão estática nos estágios 2 e 3, respectivamente.

N° ADIÇÕES	ITER.0	ITER.1	ITER.2	ITER.3
ITAIPU	-	1	1	1
J.LACERDA	-	-	-	-
CANDIOTA	-	-	-	-
P.MEDICI B	-	-	-	-
J.SOLTEIRA	2	2	2	3
C.DOURADA	2	2	2	2
INTERLIGAÇÃO	-	-	3	-
CUSTO(10^6 \$)	172	411	441	463
EUD(MW)	63.87	11.87	11.56	6.89
TEMPO SO(SEG.)	30	33	34	40
TEMPO SI(SEG.)	0.2	0.3	0.3	-

TABELA VIII.2 - CONVERGÊNCIA - EXPANSÃO ESTÁTICA
(DEMANDA BASE + 2.5% - 2° ESTÁGIO)

N° ADIÇÕES	ITER.0	ITER.1	ITER.2	ITER.3
ITAIPU	1	2	2	2
J.LACERDA	-	-	-	-
CANDIOTA	-	-	-	-
P.MEDICI B	-	-	-	-
J.SOLTEIRA	3	3	3	4
C.DOURADA	2	2	2	2
INTERLIGAÇÃO	-	-	1	1
CUSTO(10 ⁶ \$)	463	703	712	764
EUD(MW)	65.14	13.84	12.24	7.16
TEMPO SO(SEG.)	36	37	37	37
TEMPO SI(SEG.)	0.2	0.2	0.2	-

TABELA VIII.3 - CONVERGÊNCIA - EXPANSÃO ESTÁTICA
(DEMANDA BASE + 5% - 3° ESTÁGIO)

O problema de expansão dinâmica foi então resolvido incluindo-se no subproblema de investimento os cortes de Benders gerados na solução dos problemas de expansão estática, como foi discutido no Capítulo VII.2. O problema de expansão dinâmica tem 42 variáveis 0/1 e 43 + M restrições. A convergência foi obtida em uma iteração (vide Tabela VIII.4).

N° ADIÇÕES	ESTÁGIO 1	ESTÁGIO 2	ESTÁGIO 3	TOTAL
ITAIPU	-	1	2	2
J.LACERDA	-	-	-	-
CANDIOTA	-	-	-	-
P.MEDICI B	-	-	-	-
J.SOLTEIRA	2	3	4	4
C.DOURADA	2	2	2	2
INTERLIGAÇÃO	-	-	1	1
EUD(MW)	6.10	6.89	7.16	-
TEMPO SO(SEG.)	30	33	33	96
TEMPO SI(SEG.)	-	-	-	46
CUSTO ATUAL(10^6 \$)	156	241	226	623

TABELA VIII.4 - SOLUÇÃO DO CASO DE EXPANSÃO DINÂMICA

Pode-se notar que a solução do caso exemplo de expansão dinâmica da Tabela VIII.4 é idêntica à solução heurística dada pelo "upper bound" obtida anteriormente.

A inclusão dos cortes de Benders gerados pela solução dos problemas de expansão estática mostrou-se uma estratégia atraente neste caso: só uma iteração foi necessária para chegar à solução ótima do problema de expansão dinâmica. Considerando-se os tempos gastos na obtenção dos cortes gerados anteriormente, a solução ótima foi obtida em 10' 53" CPU. A não inclusão dos cortes de Benders gerados na solução dos problemas de expansão estática no subproblema de investimento da expansão dinâmica levou a um custo alto de processamento: 5 minutos de CPU só para fazer duas iterações de Benders. Vale ressaltar que, contrariamente aos casos de expansão estática, o custo computacional do subproblema de investimento da expansão dinâmica é significativo (vide Tabela VIII.4), o que mostra que é fundamental a utilização de estratégias de aceleração da convergência do método de Benders para a solução de problemas de maior porte de expansão dinâmica.

CAPÍTULO IX

CONCLUSÕES

A abordagem de problemas de otimização de grande porte com restrições probabilísticas em um contexto de programação matemática estocástica é em geral uma tarefa de difícil consecução. O método de decomposição de Benders usualmente empregado em problemas determinísticos de grande porte pode em alguns casos ser estendido para problemas de programação estocástica de grande porte possibilitando dividir o problema em dois subproblemas mais simples, sendo um determinístico e outro estocástico que podem ser resolvidos por algoritmos especialmente desenvolvidos.

O problema de expansão da capacidade de ponta em sistemas hidrotermoelétricos interligados com restrições de confiabilidade foi formulado neste contexto. Apresentou-se dois métodos alternativos de análise de confiabilidade de sistemas interligados capazes de resolver o subproblema estocástico de operação resultante da decomposição do problema de expansão. O primeiro calcula os índices de confiabilidade pela integração direta dos eventos que conduzem a cortes de carga devido à falhas e redução de capacidade nos equipamentos de geração e/ou devidos à limites de capacidade das interligações para cada modo de falha do sistema interligado. O segundo método parte da mesma caracterização de modos de falha do sistema interligado para obter estimativas dos índices de confiabilidade pelo método de Monte Carlo, cuja convergência é acelerada pelo uso de técnicas de redução de variância especialmente desenvolvidas para esta aplicação.

Ambos os métodos foram estendidos para o cálculo dos coeficientes dos cortes de Benders para cada alternativa de expansão proposta pelo subproblema de investimento. Este, um problema determinístico de programação inteira, é possível de ser resolvido por algoritmos de "branch and bound" com

relativa facilidade para problemas de expansão estática. No caso de expansão multi-estágio (dinâmica), em que o número de variáveis de decisão é potencialmente grande, propõe-se técnicas de aceleração da convergência do método de Benders pela geração prévia de cortes de Benders obtidos de problemas de expansão estática, visando reduzir o número de subproblemas de programação inteira de grande porte a serem resolvidos. Apresentaram-se também métodos heurísticos capazes de gerar soluções viáveis para o problema de expansão dinâmica a partir da solução de uma sequência de soluções de problemas de expansão estática. Outras heurísticas que visam reduzir a dimensão do subproblema de investimento também foram propostas, assim como formas de obter soluções cada vez "melhores" pela aplicação sucessiva destas heurísticas.

A viabilidade de utilização da metodologia proposta foi demonstrada pela aplicação dos programas computacionais desenvolvidos neste trabalho na expansão de alguns casos exemplo (estáticos e dinâmico). O método de Benders revelou-se eficiente em termos de convergência e flexível de utilizar, possibilitando valer-se de cortes gerados na solução de problemas de expansão estática em cada estágio do período de estudo para acelerar a convergência da solução do problema de expansão dinâmica.

O tempo de processamento mostrou-se fortemente dependente do número de variáveis de decisão no subproblema de investimento, visto que se trata de um problema de programação inteira. O subproblema de operação também onera substancialmente o custo de processamento, sendo que o tempo de resposta do método de integração direta utilizada nos casos exemplo revelou-se pouco sensível à decisão de investimento. Sendo necessária a consideração de diversas condições hidrológicas e níveis de carga na análise de confiabilidade, o método de Monte Carlo proposto neste trabalho é uma alternativa atraente de ser utilizada na solução do subproblema de operação.

As soluções dos casos exemplos de expansão em tempos reduzidos de processamento indicam que o planejamento probabilístico da expansão de capacidade de ponta em sistema interligados pode ser levado a termo de forma realista com os

programas computacionais desenvolvidos neste trabalho. Uma versão destes programas que parte da alternativa de expansão de energia para efetuar a expansão de ponta também foi desenvolvida neste trabalho, considerando fenômenos tais como incertezas nas previsões de mercado e efeitos de manutenção de unidades geradoras e será utilizada brevemente pela ELETROBRÁS.

Alguns desenvolvimentos futuros podem ser mencionados, tais como:

- extensão do modelo de confiabilidade para o cálculo do índice EUD por área, de modo a possibilitar o uso de critério de confiabilidade por área;
- pesquisar algoritmos de programação inteira específicos para solução do subproblema de investimento;
- pesquisar como utilizar a árvore de busca de "branch and bound" gerada na solução de subproblema de investimento no estágio t quando da solução do subproblema no estágio $t+1$;
- modelagem das capacidades das interligações como v.a. (definir como se modifica a distribuição de probabilidades após um incremento/decremento de capacidade de uma interligação);
- verificar a influência da incerteza das estimativas do método de Monte Carlo na convergência do método de Benders.

APÊNDICE

FORMULAÇÃO ALTERNATIVA DO PROBLEMA E ADAPTAÇÃO DA
METODOLOGIA PROPOSTA

O problema de expansão da capacidade de ponta admite diversas formulações alternativas no que se refere à consideração da confiabilidade do sistema. A formulação apresentada no Capítulo III utiliza restrições de confiabilidade para cada estágio do período de planejamento. Outra formulação consiste em atribuir um custo ao corte de carga e incluir na função objetivo o custo esperado da demanda não suprida em cada estágio do período de planejamento. O modelo de expansão para esta formulação é:

$$\text{Min } \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i \in I} \Delta c_i(t) \sum_{k=1}^{n_i} x_{ik}(t) + \sum_{j \in J} \Delta q_j(t) y_j(t) + \delta(t) \bar{u}(t, x(t), y(t)) \right) \quad (\text{A.1})$$

s/a

$$\sum_{k=1}^{n_i} x_{ik}(t+\Delta a_i) - x_{ik}(t) \leq 1, i \in I; t = a_i, T \quad (\text{A.2})$$

$$y_j(t+\Delta b_j) - y_j(t) \leq 1, j \in J; t = b_j, T \quad (\text{A.3})$$

$$\sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik}(t-1) - x_{ik}(t)) \leq 0, i \in I; t = a_i + 1, T \quad (\text{A.4})$$

$$y_j(t-1) - y_j(t) \leq 0, j \in J; t = b_j + 1, T \quad (\text{A.5})$$

$$x_{ik}(t) \in \{0, 1\}, k=1, n_i, i \in I; t = a_i, T \quad (\text{A.6})$$

$$y_j(t) \in \{0, \dots, m_j\}, j \in J, t = b_j, T \quad (\text{A.7})$$

Na função objetivo (A.1), $\bar{u}(t, x(t), y(t))$ é o valor esperado da demanda não suprida no estágio t para a decisão de investimento $(x(t), y(t))$ e $\delta(t)$ é o custo unitário atualizado do corte de carga no estágio t .

O problema (A.1)-(A.7) pode ser resolvido por decomposição de Benders utilizando-se cortes de otimalidade como descrito no Capítulo IV. O subproblema de operação é análogo ao da formulação do Capítulo III: a análise de confiabilidade do sistema interligado em cada estágio t para a decisão $(x^*(t), y^*(t))$ produz o valor $\bar{u}(t, x^*(t), y^*(t))$. Um corte de otimalidade da forma

$$z(t) \geq \tilde{u}(t, x(t), y(t)) \quad (\text{A.8})$$

é gerado em cada estágio t pela análise de confiabilidade, onde

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t, x(t), y(t)) = & \bar{u}(t, x^*(t), y^*(t)) + \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{n_i} \bar{w}_{ik}(t) (x^*_{ik}(t) - x_{ik}(t)) \\ & + \sum_{j \in J} \bar{v}_j(t) (y^*_j(t) - y_j(t)) \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

A aproximação (A.9) é idêntica à (VI.98), sendo os coeficientes $\bar{w}_{ik}(t)$ e $\bar{v}_j(t)$ obtidos conforme descrito em VI.6.

O subproblema de investimento tem a seguinte formulação:

$$\text{Min } \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i \in I} \Delta c_i(t) \sum_{k=1}^{n_i} x_{ik}(t) + \sum_{j \in J} \Delta q_j(t) y_j(t) + \delta(t) z(t) \right) \quad (\text{A.10})$$

s/a

$$\begin{aligned} \bar{u}(t, x^m(t), y^m(t)) + \sum_{i \in I} \sum_{k=1}^{n_i} \bar{w}_{ik}(t) (x_{ik}^m(t) - x_{ik}(t)) \\ + \sum_{j \in J} \bar{v}_j(t) (y_j^m(t) - y_j(t)) - z(t) \leq 0, m=1, M; t=1, T \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

$$\sum_{k=1}^{n_i} x_{ik}(t + \Delta a_i) - x_{ik}(t) \leq 1, i \in I; t = a_i, T \quad (\text{A.12})$$

$$y_j(t + \Delta b_j) - y_j(t) \leq 1, j \in J; t = b_j, T \quad (\text{A.13})$$

$$\sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik}(t-1) - x_{ik}(t)) \leq 0, i \in I; t = a_{i+1}, T \quad (\text{A.14})$$

$$y_j(t-1) - y_j(t) \leq 0, j \in J; t = b_{j+1}, T \quad (\text{A.15})$$

$$x_{ik}(t) \in \{0, 1\}, k=1, n_i; i \in I, t = a_i, T \quad (\text{A.16})$$

$$y_j(t) \in \{0, \dots, m_j\}, j \in J, t = b_j, T \quad (\text{A.17})$$

O subproblema de investimento (A.10)-(A.17) é um problema de programação linear mista em que a variável contínua $z(t)$ representa a aproximação do valor esperado da demanda não suprida no estágio t dados M cortes de Benders (A.11). Como (A.10)-(A.17) é uma relaxação de (A.1)-(A.7), sua solução ótima \underline{w} é um "lower bound" da solução ótima do problema (A.1)-(A.7).

Um "upper bound" \bar{w} para a solução ótima do problema (A.1) (A.7) pode ser obtido do subproblema de operação: se $(x^*(t), y^*(t)), t=1, T$ é a solução ótima de (A.10)-(A.17), então

$$\sum_{t=1}^T \left(\sum_{i \in I} \Delta c_i(t) \sum_{k=1}^{n_i} x_{ik}^*(t) + \sum_{j \in J} \Delta q_j(t) y_j^*(t) + \delta(t) \bar{u}(t, x^*(t), y^*(t)) \right) \quad (\text{A.18})$$

é o custo da solução $(x^*(t), y^*(t)), t=1, T$. Tomando-se o mínimo de (A.18) dentre todas as soluções obtidas (que portanto são viáveis) obtém-se \bar{w} .

O algoritmo de Benders aplicado ao problema (A.1)-(A.7) é descrito a seguir:

Passo 0:

Inicialize $M=1$, TOL = tolerância para convergência,

$$\bar{w} = \infty, x^1(t) = 0, y^1(t) = 0, t=1, T$$

Passo 1:

Resolva o subproblema de operação: análise de confiabilidade em cada estágio dada a solução $(x^M(t), y^M(t)), t=1, T$; gerando cortes de otimalidade correspondentes. Atualize o "upper bound" como

$$\bar{w} = \text{Min} \left\{ \bar{w}, \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i \in I} \Delta c_i(t) \sum_{k=1}^{n_i} x_{ik}^M(t) + \sum_{j \in J} \Delta q_j(t) y_j^M(t) + \delta(t) \bar{u}(t, x^M(t), y^M(t)) \right) \right\}$$

Passo 2:

Resolva o subproblema de investimento (A.10)-(A.17). Faça $M=M+1$. Seja $(x^M(t), y^M(t)), t=1, T$ a solução obtida de valor \underline{w} .

Passo 3:

Se $|\bar{w}-\underline{w}| < TOL$, pare : a solução ótima é o par $(x^*(t), y^*(t)), t=1, T$ associado ao "upper bound" \bar{w} . Caso contrário, vá para o passo 1.

A formulação (A.1)-(A.7) não necessita da definição do critério de confiabilidade a ser atendido; entretanto a solução obtida é fortemente dependente do custo de perda de carga adotado. Este custo é de difícil avaliação, podendo variar de região para região. O custo pode também ser crescente com o corte de carga: neste caso a dependência deve ser representada como uma função linear por partes. A escolha da formulação mais adequada depende então de uma série de fatores que precisam ser quantificados previamente. Entretanto, como mostrado neste trabalho, a metodologia básica aqui apresentada é capaz de tratar ambas as formulações propostas.

REFERÊNCIAS

- (1) OLIVEIRA, G.C., CUNHA, S.H.F., GOMES, F.B.M., "Confiabilidade do Atendimento de Ponta em Sistemas Interligados - Metodologia e Aplicação", VI SNPTEE, Camboriú, (1981).
- (2) ELETROBRÁS/DENE, "Modelo de Simulação a Subsistemas Equivalentes", Relatório Técnico, (1977).
- (3) CUNHA, S.H.F., OLIVEIRA, G.C., GOMES, F.B.M., PEREIRA, M.V.F., "Reliability Evaluation in Hydrothermal Generating Systems", IEEE Transactions on PAS, vol. 101, pp. 4665-4672, (1982).
- (4) NOONAN, F., GIGLIO, R.J., "Planning Electric Power Generation: a Nonlinear Mixed Integer Model Employing Benders Decomposition", Management Science, vol. 23, n° 9, pp. 946-956, (1977).
- (5) SCHWEPPE, F.C., MARKS, D.H., FARRAR, D.L., GRUHL, J.RUAME, M.F., SHIERS, P.F., WOODRUFF, F., "Economic-Environmental System Planning", IEEE Summer Power Meeting, (1984)
- (6) BEGLARI, F., LAUGHTON, M.A., "The Combined Costs Method for Optimal Economic Planning of an Eletrical Power System" IEEE Transactions on PAS, vol. 94, n° 6, pp. 1935-1942, (1975).
- (7) CÔTÉ, G., "Reliability Aspects of Optimal Generation Planning Models for Power Systems", tese de doutorado, University of London, (1979).

- (8) BLOOM, J., "Solving an Electricity Generating Capacity Expansion Planning Problem by Generalized Benders' Decomposition", Operations Research, vol. 31, n° 1, pp 84-100, (1983).
- (9) BOOTH, R.R., "Power System Simulation Model Based on Probability Analysis", IEEE Transaction on PAS, vol. 91, pp. 62-69, (1972).
- (10) BLOOM, J., CARAMANIS, M., CHARNY, L., "Long-Range Generation Planning Using Generalized Benders' Decomposition: Implementation and Experience", Operation Research, vol. 32, n° 2, pp. 290-313, (1984).
- (11) PARK, Y.M., LEE, K.Y., YOUN, L.T.P., "A New Analytical Approach for Long-Term Generation Expansion Planning Based on Maximum Principle and Gaussian Distribution Function", IEEE Transaction on PAS, vol. 104, n° 2, pp. 390-397, (1985).
- (12) CUNHA, S.H.F., OLIVEIRA, G.C., GOMES, F.B.M., PEREIRA, M.V.F., "Confiabilidade de Geração Hidrotermoelétrica - (CONFGER) - Manual de Metodologia", Relatório Técnico n° 2336/80, CEPEL, (1980).
- (13) DOULLIEZ, P., JAMOULLE, E., "Transportation Networks with Random Arc Capacities", Revue Francaise d'Automatique, Informatique et Recherche Operationelle, vol. 2, pp. 45-60, (1972).
- (14) OLIVEIRA, G.C., CUNHA, S.H.F., PEREIRA, M.V.F., "Confiabilidade em Sistemas Interligados : o Modelo MULTIAR", VII SNPTEE, Brasília, (1984).
- (15) OLIVEIRA, G.C., CUNHA, S.H.F., PEREIRA, M.V.F., "Confiabilidade em Sistemas de Geração Hidrotermoelétrica Interligados", 5° Congresso Brasileiro de Automática, Campina Grande, (1984).

- (16) OLIVEIRA, G.C., CUNHA, S.H.F., PEREIRA, S.H.F., "A Direct Method for Multi-Area Reliability Evaluation", IEEE Power Summer Meeting, (1986).
- (17) FORD, L.R., FULKERSON, D.R., "Flows in Networks", Princeton University Press, USA, (1962).
- (18) CUNHA, S.H.F., PEREIRA, M.V.F., OLIVEIRA, G.C., MELO, A.G.C. PINTO, L.M.V.G., "Composite Reliability Evaluation Methods", EPRI EL 5178 Final Report, USA (1987)
- (19) SINGHAL, J., "Fixed Order Branch and Bound Methods for Mixed-Integer Programming", Tese de Doutorado, University of Arizona, (1982).
- (20) CLANCY, D.P., GROSS, G., WU, F.F., "Probabilistic Flows for Reliability Evaluation of Multiarea Power System Interconnections", Electric Power and Energy Systems, Vol. 5, n° 2, (1983).
- (21) BENDERS, J.F., "Partitioning Procedures for Solving Mixed Variables Programming Problems", Numerische Mathematik, pp 238-252, (1962).
- (22) DANTZIG, G.B., GRANVILLE, S., PEREIRA, M.V.F., "Application of Decomposition Techniques to Power System Planning and Operations", EPRI 2473-6 Final Report, (1987).