

CONTRIBUIÇÃO AO PROBLEMA DE EQUILÍBRIO EM REDES

*Luis Ernesto Torres Guardia*

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS ( D.Sc. ) EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

*Nelson Maculan Filho*

Prof. Nelson Maculan Filho  
( Presidente )

*Paulo Boaventura Neto*

Prof. Paulo Boaventura Neto

*Antonio Fernandes de Oliveira*

Prof. Antonio Fernandes de Oliveira

*Nair Maria Maia de Abreu*

Prof. Nair Maria Maia de Abreu

*Lucia Silva Kubrusly*

Prof. Lucia Silve Kubrusly

RIO DE JANEIRO, R.J. - BRASIL

OUTUBRO DE 1987

TORRES GUARDIA, LUIS ERNESTO

Contribuição ao Problema de Equilíbrio em  
Redes. ( Rio de Janeiro ) 1987.

IX, 109p. 29,7 cm ( COPPE/UFRJ,D.Sc.,  
Engenharia de Sistemas e Computação 1987 )

Tese - Universidade Federal de Rio de  
Janeiro, COPPE.

1. Fluxo em Redes. 2. Inequações Variacionais. 3. Programação Matemática.

I. COPPE/UFRJ

II. Título ( série )

A la memoria de mis padres  
Leandra y Ernesto  
quienes me vieron nacer  
y no los vi partir.

## AGRADECIMENTOS

Meus agradecimentos muitos especiais ao Professor Nelson Maculan Filho pelo seu constante apoio, sem o qual, certamente, não teria sido possível realizar o presente trabalho.

Ao Professor Félix Mora-Camino pelo tempo dispensado no início deste trabalho.

Aos membros da banca que me honraram com sua participação.

À Universidad Nacional Mayor de San Marcos - Perú por ter-me liberado de minhas atividades docentes.

A CAPES pelo apoio financeiro no curso e na elaboração deste trabalho.

À Sociedade Cultural e Beneficente Guilherme Guinle pelo patrocínio parcial desta tese.

Ao Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC) pelas facilidades brindadas no desenvolvimento do trabalho computacional.

A todos aqueles que direta ou indiretamente me brinderam sua ajuda, amizade e contribuíram para a realização deste trabalho. Mencionar a todos eles daria lugar a um catálogo semelhante a uma lista telefônica.

A Tania, Luis Carlos e Jeremy Miguel por compartilhar as alegrias e sobretudo os momentos difíceis durante a realização do curso e do presente trabalho. Vocês são meu equilíbrio.



Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências ( D.Sc. )

## CONTRIBUIÇÃO AO PROBLEMA DE EQUILÍBRIO EM REDES

*Luis Ernesto Torres Guardia*

*Outubro, 1987*

*Orientador* : Nelson Maculan Filho.

*Programa* : Engenharia de Sistemas e Computação.

Apresenta-se um estudo dos distintos modelos de equilíbrio de tráfego em redes de transporte, considerando o caso onde o custo de viagem sobre cada arco possa depender do fluxo nesse arco como também do fluxo nos demais arcos da rede. Para este caso, o problema de equilíbrio de tráfego pode ser expressado por uma formulação de inequação variacional.

Entre os métodos disponíveis de resolução do problema variacional, para o caso de um só modo de transporte, incluem-se o método linearizado de decomposição "simplicial" e o método de plano de corte.

Considera-se o modelo de equilíbrio de tráfego com mais de um modo de transporte onde o custo de viagem sobre um arco dependa do fluxo de todos os modos que usam esse arco. A demanda de viagem para todos os modos é constante e uma função de demanda prediz a proporção de viagem que ocorre para cada modo. Este modelo é também formulado como o problema de inequações variacionais. O método de aproximação linear de decomposição simplicial é estendido para resolver o problema variacional para o caso de dois modos de transporte. Como para problemas práticos alocar todos os pontos extremos na memória de um computador poderia ser uma tarefa inviável, o método linearizado é modificado de tal modo que o número de pontos extremos retidos seja restringido a um valor pré-fixado. Resultados computacionais são apresentados.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science ( D.Sc. )

## CONTRIBUTION TO THE NETWORK EQUILIBRIUM PROBLEM

*Luis Ernesto Torres Guardia*

*October, 1987*

*Chairman* : Nelson Maculan Filho.

*Department* : System Engineering and Computer Science.

This work presents a study of the traffic equilibrium network models. It is considered the case where the travel cost on each link may depend on the flow on this link as well as others links of the network. For this case, the traffic equilibrium problem may be expressed for the variational inequality formulation.

Among the available methods for solving the variational problem, for a single mode of transportation, are included the linearized simplicial decomposition and the cutting plane methods.

The traffic equilibrium model with more than one travel mode is considered where the cost for travel on a link depends on the flow of all modes that use that link. The demand for travel by all modes is constant and the demand function predicts the proportion of trips that occur by each mode. This model is also formulated as a variational inequality problem. The linearized simplicial decomposition method is extended for solving the variational problem for the case of two modes of transportation. For practical problems to allocate computer memory for all the extremis points would be an infeasible task, the linearized method is modified so such the number of retained extreme points is restricted to some fixed value. Computational results are reported.

## ÍNDICE

	<i>pag.</i>
CAPÍTULO I - O PROBLEMA DE EQUILÍBRIO DE TRÁFEGO.....	1
I. 1 - Introdução .....	1
I. 2 - Representação de Rede de um Sistema de Transporte.....	2
I. 2. 1 - Centróides.....	3
I. 2. 2 - Função de Custos nos Arcos.....	3
I. 3 - Equilíbrio em uma Rede de Transporte Urbano.....	4
I. 3. 1 - Conceito de Equilíbrio.....	5
I. 3. 2 - Definição Operacional de Equilíbrio.....	5
 CAPÍTULO II - FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE EQUILÍBRIO - ALOCAÇÃO DE FLUXO.....	 8
II. 1 - Introdução.....	8
II. 2 - Modelo de Equilíbrio.....	9
II. 3 - Formulação do Problema de Equilíbrio em Termos de Complementaridade Não Linear	13
II. 4 - Formulação do Problema de Equilíbrio em Termos de Inequações Variacionais.....	16
II. 5 - Formulação do Problema de Equilíbrio como um Problema de Otimização.....	21

CAPÍTULO III - RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE DETERMINAÇÃO DO FLUXO DE EQUILÍBRIO.....	24
III. 1 - Introdução.....	24
III. 2 - Resolução do Problema de Equilíbrio por Métodos de Otimização.....	25
III. 2. 1 - O Método de Frank e Wolfe.....	26
III. 2. 2 - A Técnica PARTAN.....	31
III. 3 - Resolução do Problema de Equilíbrio por Técnica de Complementaridade Não Linear	34
III. 4 - Resolução do Problema de Equilíbrio por Técnicas de Inequações Variacionais.....	36
III. 4. 1 - Método de Aproximação Linear Simplicial.....	39
III. 4. 2 - Algoritmo de Plano de Corte..	46
III. 5 - Exemplo de Aplicação.....	54
 CAPÍTULO IV - MODELO BINÁRIO DE ALOCAÇÃO/ ESCOLHA MODAL.....	 63
IV. 1 - Introdução.....	63
IV. 2 - Modelo Combinado de Alocação/Escolha Modal.....	64
IV. 3 - Formulação do Modelo Binário em Termos de Inequações Variacionais.....	67
IV. 4 - Formulação do Modelo Binário como um Programa de Otimização.....	73
IV. 5 Algoritmos de Solução do Modelo Binário	74

IV. 5. 1 - Método de Aproximação Linear Simplicial.....	75
IV. 5. 2 - Exemplo de Aplicação para uma Rede Binária.....	80
IV. 5. 3 - Modificação do Método de Apro- ximação Linear Simplicial.....	84
CAPÍTULO V - CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS.....	89
ANEXO I - MONOTONICIDADE DE UMA FUNÇÃO.....	92
ANEXO II - PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA.....	93
BIBLIOGRAFIA.....	100

## CAPÍTULO I

### O PROBLEMA DE EQUILÍBRIO DE TRÁFEGO

#### I. 1. INTRODUÇÃO

Define-se transporte como uma transferência de pessoas e/ou produtos, em um veículo ou qualquer outro meio, entre lugares geográficamente separados.

O número de viagens que se realiza numa rua qualquer ou linha de trânsito, em uma área urbana, é o resultado de muitas decisões que o usuário deve tomar. Estas decisões do usuário encerram considerações de quatro diferentes tomadas de decisões, que dão lugar a outros diferentes modelos de transporte, que são:

- i) Determinação de se viajar ou não e quando realizar a viagem para algum propósito (modelo de geração de viagem).
- ii) Determinação para onde ir (modelo de distribuição de viagem).
- iii) Escolha do modo de transporte a usar (escolha modal).
- iv) Escolha da rota a usar para alcançar o destino (alocação de tráfego).

Estas decisões dependem em parte, de como o sistema de transporte está congestionado, e quais são os pontos de congestionamento. Por sua vez, os pontos de congestionamento dependem do número total de viagens realizadas através destes pontos.

O interesse dos engenheiros de transporte e de planejadores urbanos origina-se na necessidade de, através de certos dados conhe-

cidos, prever o fluxo que percorre uma certa facilidade da infraestrutura de transporte, a fim de avaliar os benefícios de um possível investimento no serviço de transporte. O fluxo é medido em termos do número de veículos, passageiros, pedestres, que percorrem a facilidade de transporte em uma unidade de tempo.

Dado que, se o fluxo aumenta produz-se engarrafamento, e por outro lado viagens são evitadas por causa do engarrafamento, tal interação pode ser modelada como um processo de alcançar um certo equilíbrio entre engarrafamento e decisões de viagens, de tal modo que se possa calcular um fluxo de tráfego qualificado de *equilíbrio*.

## I. 2. REPRESENTAÇÃO DE REDE DE UM SISTEMA DE TRANSPORTE

Uma rede é um conceito matemático usado para descrever um sistema de transporte ou outros sistemas (como de informação, de relação de afiliação, de linhas de telefone, etc.).

Uma rede consiste, principalmente, de dois elementos. Um conjunto de pontos, nós ou vértices, e um conjunto de segmentos de linha, arcos, ramos ou lados, ligando estes pontos. Assume-se que cada arco na rede está associado a uma direção de fluxo.

Adicionalmente, uma outra característica, a impedância que afeta o fluxo é associada, na maioria das aplicações, somente aos arcos. Os nós representam a interação dos arcos.

Supõe-se que um nó qualquer da rede possa ser alcançado por qualquer outro nó através de um caminho ou rota da rede. Um caminho é uma sequência de arcos dirigidos de um nó a outro nó. A impedância ao longo de um caminho é o somatório das impedâncias nos

arcos que compõem o caminho em consideração. Como observação, um par de nós está geralmente ligado por mais de um caminho, e em redes de grande porte, o número de caminhos que ligam os nós pode ser extremadamente grande.

### 1. 2. 1. CENTRÓIDES

O planejamento de transporte de uma região urbana é baseado na partição da região em zonas de tráfego, que varia de tamanho. Cada zona, dependendo da sua importância no estudo de transporte de tráfego, é representada por um centróide, um simples nó, no qual o movimento de tráfego se origina (centróide de origem) e/ou termina (centróide de destino). Além disso, a representação da rede inclui também outros nós representando interseções, pontos de ônibus, ou outras facilidades de transporte. Uma vez definidos os centróides, uma matriz de viagens origem-destino é construída, a qual especifica o movimento ou fluxo entre cada centróide de origem a cada centróide de destino da rede. Os centróides são ligados à rede por arcos fictícios conhecidos por conectores.

### 1. 2. 2. FUNÇÃO DE CUSTO NOS ARCOS

A impedância de viagem, ou nível de serviço, associada aos arcos da rede, pode incluir muitos componentes como tempo de viagem, conforto, segurança, custo de viagem, etc. Como a determinação da maioria destas componentes por medidas quantitativas é na prática difícil, mas o tempo de viagem é particularmente mais fácil de ser medido, esta componente é usada como medida exclusiva da impedância nos arcos. Embora, para ser compatível com a



maioria dos trabalhos disponíveis na literatura de análise de equilíbrio, o termo geral de custo de viagem do usuário será usado em lugar de tempo de viagem.

Agora, devido ao congestionamento, o custo de viagem é uma função crescente do fluxo. Deste modo, os arcos estão associados com uma certa função que relaciona o custo de viagem sobre cada arco com o fluxo que atravessa esse arco. Tal função é definida independentemente para cada arco da rede.

### I. 3. EQUILÍBRIO EM UMA REDE DE TRANSPORTE URBANO

A noção de equilíbrio em uma rede de transporte urbano origina-se da dependência entre o custo de viagem nos arcos e dos fluxos nesses arcos. Suponha que um certo número de usuários deseja viajar desde um ponto de origem a um ponto de destino que está ligado por um número de caminhos possíveis. Deseja-se determinar como os usuários serão distribuídos entre todos os possíveis caminhos. Este problema constitui a essência do equilíbrio de tráfego. O número de usuários em cada caminho será uma consequência direta das decisões feitas por cada usuário com respeito a que rota alternativa tomar. Em princípio, cada usuário elegeria o caminho mais curto em termo dos custos de viagem, mas neste caso, poderia-se produzir congestionamento e assim o caminho poderia deixar de ser o caminho mais curto. Alguns outros motoristas examinariam então outro caminho alternativo mas também poderiam ocasionar congestionamento, e assim sucessivamente. Uma vez determinado o número de usuários distribuídos em cada caminho disponível, o fluxo em cada arco será o somatório dos fluxos nos caminhos que usam o dito arco.

### 1. 3. 1. CONCEITO DE EQUILÍBRIO

Suponha que seja dado um grafo representando a rede de transporte, com suas funções de custo associadas a cada arco, e uma matriz origem-destino.

O problema de alocação de tráfego consiste em encontrar o fluxo (e o custo de viagem correspondente) sobre cada um dos arcos da rede.

Para resolver o problema de alocação de tráfego, requer-se fazer algumas suposições acerca do comportamento dos usuários em escolher entre os caminhos disponíveis para viajar desde um ponto origem a um ponto destino. É razoável adotar o comportamento natural de que cada usuário trate de minimizar seu próprio custo de viagem desde seu ponto origem ao seu ponto destino. Para o processo de eleição do caminho, a seguinte lei, que caracteriza a condição de equilíbrio do usuário, é dada:

Em equilíbrio, nenhum usuário pode reduzir seu custo de viagem mudando unilateralmente as rotas.

Esta lei tem sido, amplamente aceita como uma descrição do comportamento espontâneo de cada usuário sobre uma rede de transporte.

### 1. 3. 2. DEFINIÇÃO OPERACIONAL DO EQUILÍBRIO

Uma definição operacional que formaliza a noção de equilíbrio do usuário sobre redes de transporte é dada como se segue:

Para cada par origem-destino, os custos de viagem sobre

todos os caminhos utilizados são iguais e (também) menores ou iguais aos custos de viagem que experimentaria um único veículo sobre qualquer outro caminho não utilizado.

Da definição anterior, pode-se articular que em equilíbrio, os caminhos que ligam um par qualquer de origem-destino pode ser dividido em dois grupos: um grupo que inclui caminhos que levam fluxos, cujos custos de viagem sejam iguais; e o outro grupo inclui caminhos que não levam fluxos, com custos de viagem sobre estes caminhos maiores ou iguais aos custos de viagem dos caminhos do primeiro grupo.

O fluxo de tráfego com a propriedade anterior é usualmente referido como o fluxo de otimização do usuário, desde que cada usuário escolha o caminho que ele percebe ser o melhor. A definição operacional do equilíbrio do usuário é conhecida como o *primeiro princípio* de WARDROP (69).

Por contraste, um fluxo de otimização do sistema é caracterizado por um *segundo princípio* de WARDROP, denominado Lei de Equilíbrio do Sistema, o qual é dado como se segue:

Em equilíbrio, o custo médio de viagem é mínimo.

O fluxo que satisfaz esta lei minimiza o custo total de operação da rede ou sistema como um todo.

No presente trabalho, um estudo principalmente relacionado a encontrar o fluxo de equilíbrio do usuário é realizado.

No capítulo II, desenvolve-se uma formulação geral do problema de equilíbrio. A formulação é dada como sendo um problema de complementaridade não linear ou equivalentemente como um problema de inequações variacionais. Como caso particular, obtém-se um

modelo simples, clássico na teoria do equilíbrio do usuário, formulado como um problema de otimização.

Dentro do capítulo III, algoritmos de programação não linear são apresentados para resolver o modelo simples do equilíbrio do usuário. Posteriormente, um algoritmo de aproximação linear é apresentado para resolver o problema de complementaridade não linear, o qual se reduz basicamente a resolver uma sequência de problemas de complementaridade linear, para o qual existem diversos algoritmos de resolução. Por último, para resolver o problema de inequações variacionais, apresentam-se e implementam-se dois algoritmos: um baseado na técnica de "Plano de Corte" e o outro baseado em um "Método de Aproximação Linear Simplicial".

No capítulo IV, uma extensão dos modelos apresentados no capítulo II é considerada, incluindo a escolha do modo de transporte. O método de aproximação linear simplicial é usado para resolver o modelo de alocação de tráfego/escolha modal para o caso específico de dois modos de transporte. Como no método de aproximação linear simplicial é requerido o armazenamento de uma série de vetores, tal método é modificado de modo que o número de vetores a acumular é limitado a um certo valor pré-fixado.

## CAPÍTULO II

# FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA DE EQUILÍBRIO - ALOCAÇÃO DO FLUXO.

### II. 1. INTRODUÇÃO

A partir dos princípios de equilíbrio de tráfego dados por WARDROP (69), foram desenvolvidos novos algoritmos de programação matemática com o intento de aproximar à solução do fluxo de equilíbrio numa rede.

O uso da programação matemática para resolver o problema de equilíbrio de tráfego foi introduzido inicialmente em 1956, quando BECKMANN et alii (4) formularam e analisaram o problema de equilíbrio de tráfego sobre uma rede como um problema de minimização restrita, isto no caso em que o custo de viagem do usuário em um arco dependa exclusivamente do fluxo nesse arco. A partir deste trabalho pioneiro, uma série de modelos e algoritmos de resolução foram propostos.

Apesar destes modelos serem satisfatórios para muitas aplicações, não foram consideradas as situações em que o custo de viagem do usuário em cada arco da rede de transporte dependa também do fluxo nos outros arcos da rede, o que nos parece ser uma situação realista. Por exemplo, temos o caso de uma rede com duplo sentido onde o custo de viagem de um usuário em uma direção não só depende do volume de tráfego nessa direção, como também do volume de tráfego na direção oposta. Outro exemplo ocorre nas interseções dos

arcos ou quando diferentes modos de transporte compartilham o mesmo arco.

DAFERMOS (6) considera o caso anterior e demonstra que se a matriz Jacobiana da função de custo de viagem do usuário é simétrica, então ali existe um problema de minimização equivalente.

A solução do problema no caso em que a matriz Jacobiana não é simétrica, e que certas condições de monotonicidade da função de custo de viagem do usuário são satisfeitas, é desenvolvida por DAFERMOS (7). Esta solução baseia-se na formulação de SMITH (69) que observa que as condições de equilíbrio para os fluxos de tráfego podem ser transformadas em um problema de inequações variacionais. As técnicas numéricas de resolução para os problemas de inequações variacionais tem sido, em particular, desenvolvidas para o estudo de equações diferenciais parciais com as condições de fronteira. Para este tipo de problema, entre outros autores, é aconselhável consultar por exemplo o livro clássico de GLOWINSKI et alii (35), ou o trabalho de KIRSTEN e TICHATSCHKE (47).

Uma outra formulação alternativa é também proposto por AASHTIANI e MAGNANTI (1) que usam uma formulação equivalente em termos de um problema de complementariedade não linear.

A seguir apresenta-se a formulação geral do problema de determinação do fluxo de equilíbrio de tráfego em uma rede, seguindo os trabalhos de DAFERMOS (7) e (9), AASHTIANI e MAGNANTI (1), FISK e BOYCE (17), e FLORIAN (20) entre outros.

## II. 2. MODELO DE EQUILÍBRIO.

Considera-se uma rede de transporte que escoar um fluxo de um

dados tipo de tráfego nos arcos da rede. A rede é representada por um grafo orientado  $G(N,A)$ , onde  $N$  é o conjunto de nós, com  $|N| < \infty$ , e  $A$  é o conjunto de arcos orientados ligando pares de nós ordenados de  $N$  e que representam a infraestrutura atual do sistema de transporte. Entre os elementos de  $N$ , existem nós que representam centróides de origem (nós onde os fluxos são gerados) e nós que representam centróides de destino (nós onde os fluxos terminam). Pode existir entretanto nós que sejam centróides de origem e centróides de destino, de diferentes viagens, ao mesmo tempo.

Seja  $I$  o conjunto de todos os pares centróides origem-destino. Seja  $K$  o conjunto de todos os caminhos que ligam todos os pares origem-destino, e  $K_i$  o conjunto de todos os caminhos que ligam o par de origem-destino  $i \in I$ .

A cada arco  $a$ ,  $a \in A$ , está associado um fluxo denotado por  $f_a$ , e um custo de viagem do usuário correspondente denotado por  $c_a$ . O fluxo  $f_a$  dá lugar a um vetor de fluxo nos arcos,  $f \in \mathbb{R}^{|A|}$ , e o custo de viagem  $c_a$  dá lugar a um vetor de custo  $c \in \mathbb{R}^{|A|}$ . Supõe-se que o custo  $c_a$  relativo ao arco  $a$  dependa não somente do fluxo ao longo do arco  $a$ , mas também dos fluxos nos demais arcos. Assim pode-se escrever que

$$c \equiv c(f) = (c_a(f))_{a \in A}$$

Similarmente, seja  $h_k$  o fluxo do caminho  $k$ , agrupado em um vetor de distribuição de fluxos dos caminhos,  $h \in \mathbb{R}^{|K|}$ , e  $C_k$  o custo correspondente ao caminho  $k$ , agrupado em um vetor de distribuição

de custos dos caminhos,  $C \in \mathbb{R}^{|K|}$ .

A demanda de viagem associada a cada par  $i$ , de origem-destino, suposta conhecida e fixa (em uma primeira abordagem), é denotada por  $d_i$ , e  $d \in \mathbb{R}^{|I|}$  o vetor de demanda de viagens. Este vetor de demanda  $d$  induz o vetor de fluxo dos caminhos  $h$  na forma

$$\sum_{k \in K_i} h_k = d_i, \quad \text{para todo } i \in I \quad (\text{II.1})$$

ou na forma matricial

$$B h = d \quad (\text{II.2})$$

onde  $B = [b_{i,k}]$  é uma matriz  $|I| \times |K|$  tal que

$$b_{i,k} = \begin{cases} 1 & \text{se } k \text{ liga } i \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Por sua vez, o vetor de fluxos dos caminhos  $h$  induz o vetor de fluxo  $f$  nos arcos na forma

$$f_a = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} \delta_{ak} h_k, \quad \text{para todo } a \in A \quad (\text{II.3})$$

A equação em (II-3) significa que o fluxo no arco  $a$  é o somatório de todos os fluxos dos caminhos que usam o arco  $a$ .

Na forma matricial, (II-3) pode ser escrito como

$$f = D h \quad (\text{II.4})$$

onde  $D = [\delta_{ak}]$  com



$$\delta_{ak} = \begin{cases} 1 & \text{se arco } a \text{ pertence ao caminho } k \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

e assim, temos que  $D$  é uma matriz de incidência arco-caminho de ordem  $|A| \times |K|$ .

O vetor de fluxos  $h$  é qualificado de viável se satisfaz a expressão (II-1) e se  $h_k \geq 0$ , para todo  $k \in K$ . O conjunto  $S(d) \subset \mathbb{R}^{|K|}$  de todos estes fluxos viáveis  $h$  é um subconjunto convexo, fechado e limitado. Por sua vez, o vetor de fluxo dos arcos  $f$  é viável se existe um vetor de fluxos dos caminhos  $h$  que induza  $f$  através da relação dada em (II-3). O conjunto de todos estes fluxos viáveis  $f$  para um vetor de demanda  $d$ , designado por  $F(d) \subset \mathbb{R}^{|A|}$ , é um subconjunto convexo, fechado e limitado.

Supõe-se a aditividade dos custos de transporte nos arcos da rede. Assim o custo relativo a um caminho  $k$  é dado como o somatório dos custos nos arcos que compõem esse caminho, isto é,

$$C_k = \sum_{a \in A} \delta_{ak} c_a, \quad k \in K_i, \quad i \in I. \quad (\text{II.5})$$

Admite-se que os usuários escolham seus caminhos seguindo o primeiro princípio de equilíbrio do usuário de WARDROP (69) em que nenhum usuário pode reduzir seu custo total de viagem mudando unilateralmente para outro caminho.

Seja  $u_i = u_i(f)$  o custo do caminho de menor custo para qual quer par  $i$  de origem-destino, expresso por:

$$u_i = \min_{k \in K_i} C_k, \quad i \in I \quad (\text{II.6})$$

sendo estes  $u_i$  agrupados no vetor  $u \in \mathbb{R}^{|I|}$ .

A solução de equilíbrio do usuário em termos do fluxo na rede satisfaz as seguintes condições:

$$C_k(h) - u_i = 0 \quad \text{se } h_k > 0 \quad \text{para } k \in K_i, \quad i \in I \quad (\text{II.7.1})$$

$$C_k(h) - u_i \geq 0 \quad \text{se } h_k = 0 \quad \text{para } k \in K_i, \quad i \in I \quad (\text{II.7.2})$$

$$h \in S(d) \quad (\text{II.7.3})$$

$$u \geq 0 \quad (\text{II.7.4})$$

Quando, para cada  $i \in I$ , a demanda  $d_i$  depende dos custos de transporte através de uma função  $G_i(u)$ , isto é:

$$d_i = G_i(u), \quad i \in I \quad (\text{II.8})$$

teremos o que é chamado de modelo de demanda elástica.

## II. 3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE EQUILÍBRIO EM TERMOS DE COMPLEMENTARIDADE NÃO LINEAR

AASHTIANI e MAGNANTI (1) formulam o problema de equilíbrio como um problema de complementaridade não linear. KARAMARDIAN (43) e (44) apresenta um vasto estudo do problema de complementaridade.

Seja  $F(x) = (F_1(x), \dots, F_n(x))$  um funcional de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$ . O problema de complementaridade não linear consiste em encontrar um vetor  $x$  tal que satisfaça as seguintes condições:

$$F(x) \geq 0 \quad (\text{II.9.1})$$

$$x^t F(x) = 0 \quad (\text{II.9.2})$$

$$x \geq 0 \quad (\text{II.9.3})$$

onde o símbolo (t) em (II-9.2) significa a operação de transposição, dando lugar ao produto escalar ordinário em  $R^n$ .

Quando o funcional  $F$  é afim, i.e., da forma:

$$F(x) = a + Bx, \quad a \in R^n, \quad B \in R^n \times R^n \quad (\text{II.10})$$

o problema de complementaridade é dito linear, o qual pode ser expresso como:

$$y = a + Bx \geq 0 \quad (\text{II.11.1})$$

$$x^t y = 0 \quad (\text{II.11.2})$$

$$x \geq 0 \quad (\text{II.11.3})$$

As condições de equilíbrio do usuário (II-7.1) - (II-7.2) sujeito as condições (II-7.3) - (II-7.4) e à condição (II-8) podem também ser expressas como:

$$(C_k(h) - u_i) h_k = 0 \quad \text{para todo } k \in K_i, \quad i \in I \quad (\text{II.12.1})$$

$$C_k(h) - u_i \geq 0 \quad \text{para todo } k \in K_i, \quad i \in I \quad (\text{II.12.2})$$

$$\sum_{k \in K_i} h_k - G_i(u) = 0 \quad \text{para todo } i \in I \quad (\text{II.12.3})$$

$$h \geq 0 \quad (\text{II.12.4})$$

$$u \geq 0 \quad (\text{II.12.5})$$

Considerando  $(h,u)$  uma solução do problema de equilíbrio e portanto satisfazendo as relações (II-12.1) - (II-12.5), pode-se

notar que  $x \equiv (h, u)$  resolve também o seguinte problema de complementaridade não linear:

$$F(x) \geq 0 \quad (\text{II.13.1})$$

$$x^t F(x) = 0 \quad (\text{II.13.2})$$

$$x \geq 0 \quad (\text{II.13.3})$$

tomando-se  $F(x) = (y(x), z(x))$ , um funcional de  $R^{|K|+|I|}$  em  $R^{|K|+|I|}$ , de modo que

$$y_k(x) = C_k(h) - u_i, \quad \text{para todo } k \in K_i, \quad i \in I \quad (\text{II.14.1})$$

$$z_i(x) = \sum_{k \in K_i} h_k - G_i(u), \quad \text{para todo } i \in I \quad (\text{II.14.2})$$

O caso inverso, ou seja a prova de que toda solução do problema complementar (II-13.1) - (II-13.3) com as definições (II-14.1) e (II-14.2) é também solução do problema de equilíbrio (II-12.1) - (II-12.5), pode, seguindo o procedimento de AASHTIANI e MAGNANTI (1), ser realizada por redução ao absurdo.

Supõe-se (hipóteses pouco restritivas) que

$$C_k : R_+^{|K|} \longrightarrow R_+, \quad k \in K$$

seja uma função positiva, e que

$$G_i : R_+^{|K|} \longrightarrow R_+, \quad i \in I$$

seja uma função não negativa.

Considerando-se que exista um  $x \equiv (h, u)$  satisfazendo (II-12) mas que (II-12.3) seja violada, isto é, que

$$z_i(x) = \sum_{k \in K_i} h_k - G_i(u) > 0, \quad \text{para algum } i \in I$$

da condição  $z_i(x) u_i = 0$ , tem-se que  $u_i = 0$ . Por outro lado, como  $G_i(u)$  é não negativa, então

$$\sum_{k \in K_i} h_k > G_i(u) \geq 0$$

o qual quer dizer que existe um  $k \in K_i$  tal que  $h_k > 0$ . Para este  $k$  particular, da relação  $y_k(x) h_k = 0$ , tem-se que

$$y_k(x) = C_k(h) - u_i = 0$$

ou que  $C_k(h) = u_i$ . Como  $u_i = 0$ , então  $C_k(h) = 0$ , o qual contraria a hipótese de que  $C_k(\cdot)$  é uma função positiva.

Deste modo, fica demonstrado que o problema de equilíbrio é equivalente a um problema de complementaridade não linear.

AASHTIANI e MAGNANTI (1) apresentam também as condições de existência da solução para o problema de equilíbrio do usuário. A solução  $(h, u)$  existe se as funções de custo  $C_k(h)$ ,  $k \in K$  são contínuas e positivas e se  $G_i(u)$ ,  $i \in K$  são funções contínuas não negativas limitadas superiormente. Estas condições são relativamente fracas e na prática são satisfeitas pela maioria das funções de custo e de demanda que se possa vir a considerar.

## II. 4. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE EQUILÍBRIO EM TERMOS DE INEQUAÇÕES VARIACIONAIS

Uma outra maneira de formular o problema de equilíbrio de tráfego

fego é transformando-o em um problema de inequações variacionais.

Um problema de inequações variacionais consiste em encontrar um vetor  $x^*$  em  $K \subset \mathbb{R}^n$ ,  $K$  conjunto não vazio tal que

$$(x - x^*)^t F(x^*) \geq 0, \quad \text{para todo } x \in K \quad (\text{II.15})$$

onde  $F$  é um funcional de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Consideremos o caso geral que a matriz Jacobiana de  $F$  não seja simétrica, de tal modo que o problema de inequações variacionais não corresponda a um problema de otimização.

O problema de equilíbrio de tráfego formulado como um problema de complementaridade não linear, pode ser transformado em um problema de inequações variacionais se considermos o seguinte resultado encontrado em KINDERLEHER e STAMPACCHIA (46):

Seja  $\mathbb{R}_+^n = \{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \}$  um conjunto convexo fechado de  $\mathbb{R}^n$  e  $F$  um funcional de  $\mathbb{R}_+^n$  em  $\mathbb{R}^n$ . O ponto  $x^* \in \mathbb{R}_+^n$  é uma solução do seguinte problema de complementaridade não linear:

$$F(x^*) \geq 0 \quad (\text{II.16.1})$$

$$F(x^*)^t x^* = 0 \quad (\text{II.16.2})$$

se e somente se

$x^* \in \mathbb{R}_+^n$  tal que

$$(x - x^*)^t F(x^*) \geq 0, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}_+^n. \quad (\text{II.17})$$

FISK e BOYCE (17) usam este resultado de equivalência para o

problema (II-13) de AASHTIANI e MAGNANTI (1), para expressá-lo na forma de inequações variacionais seguinte:

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} (C_k(h^*) - u_i^*) (h_k - h_k^*) - \sum_{i \in I} (G_i(u^*) - \sum_{k \in K_i} h_k^*) (u_i - u_i^*) \geq 0$$

para todo  $(h, u) \in R_+^{|K|+|I|}$ . (II.18)

No caso quando a demanda é constante, i.e.,  $G_i(u) = d_i$ , para todo  $i \in I$ , então (II-18) se reduz a:

$$\sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} (C_k(h^*) - u_i^*) (h_k - h_k^*) \geq 0$$

para todo  $(h, u) \in R_+^{|K|+|I|}$ . (II.19)

Usando (II-1), (II-3) e (II-5) temos, de (II-19), que

$$\begin{aligned} \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} (C_k(h^*) - u_i^*) (h_k - h_k^*) &= \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} C_k(h^*) (h_k - h_k^*) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} \sum_{a \in A} \delta_{ak} c_a(f^*) (h_k - h_k^*) \\ &= \sum_{a \in A} c_a(f^*) (f_a - f_a^*) \geq 0 \end{aligned} \quad (II.20)$$

ou expresso na sua forma vetorial

$$(f - f^*)^t c(f^*) \geq 0, \quad \text{para todo } f \in F(d) \quad (II.21)$$

o qual representa uma formulação do tipo de inequações variacionais obtida por SMITH (66), definida no conjunto de fluxos viáveis nos

arcos, i.e., que satisfazem as equações de conservação de fluxo.

Similarmente, quando a função demanda é inversível, isto é, existe  $g_i(d) \equiv G_i^{-1}(d) = u_i$ ,  $i \in I$ , então de (II-18) temos que

$$\begin{aligned} & \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} C_k(h^*) (h_k - h_k^*) - \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} u_i^* h_k \\ & - \sum_{i \in I} G_i(u^*) (u_i - u_i^*) + \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} u_i h_k^* \\ & = \sum_{a \in A} c_a(f^*) (f_a - f_a^*) - \sum_{i \in I} u_i^* (d_i - d_i^*) \geq 0 \quad (\text{II.22}) \end{aligned}$$

ou na sua forma vetorial

$$\begin{aligned} c(f^*)^t (f - f^*) - g(d^*)^t (d - d^*) \geq 0, \\ \text{para todo } (f, d) \in M \quad (\text{II.23}) \end{aligned}$$

onde  $M = \{ (f, d) \in \mathbb{R}^{|A|+|I|} : f \in F(d) \}$ .

A expressão na relação (II-23) é a formulação do problema de equilíbrio na forma de um problema de inequações variacionais obtida por DAFERMOS (9).

Deve-se mencionar, não obstante, que as formulações (II-21) e (II-23) foram derivadas diretamente sob estas formas pelo seus respectivos autores.

Observe-se, também, que as inequações variacionais (II-21) e (II-23) estão formuladas em termos das variáveis de fluxo nos arcos em lugar das variáveis de fluxo nos caminhos e portanto, poderiam ser de mais fácil resolução computacional.



Por facilidade, faremos um estudo usando somente a formulação (II-21). Um estudo mais detalhado considerando a formulação (II-23) pode ser encontrado em DAFERMOS (9) ou FLORIAN (20).

A existência de pelo menos um ponto de equilíbrio de tráfego é considerada por um teorema da teoria das inequações variacionais, ver HARTMAN e STAMPACCHIA (37), válido quando o funcional  $c(f)$  é contínuo e o conjunto viável é convexo e compacto.

Geralmente, a solução de um problema de inequações variacionais não é único. Não obstante, há uma condição natural relacionada ao conceito de monotonicidade que assegura a unicidade da solução. Assim, será necessário admitir tal propriedade para o funcional  $c(f)$ , e neste caso existem algoritmos para encontrar este ponto único.

O Anexo I apresenta definições relativas a monotonicidade de um funcional qualquer.

Para determinar a condição de monotonicidade que assegura a unicidade da solução do problema de inequações variacionais, suponha-se que existam duas soluções distintas  $f'$  e  $f'' \in F(d)$  para o problema de inequações variacionais dada em (II-21). Então temos que

$$f' \in F(d) : \quad (f - f')^t c(f') \geq 0, \quad f \in F(d) \quad (\text{II.24})$$

$$f'' \in F(d) : \quad (f - f'')^t c(f'') \geq 0, \quad f \in F(d) \quad (\text{II.25})$$

Colocando  $f = f''$  na primeira relação (II-24) e  $f = f'$  na segunda relação (II-25) e somando ambas relações, obtemos

$$(f' - f'')^t (c(f') - c(f'')) \leq 0. \quad (\text{II.26})$$

Deste modo, uma condição natural para a unicidade da solução

de um problema de inequações variacionais é que

$$(f' - f'')^t (c(f') - c(f'')) > 0, \quad f', f'' \in F(d), \quad f' \neq f'' \quad (\text{II.27})$$

que satisfaz a definição do funcional  $c(f)$  ser estritamente monótono em  $F(d)$ .

## II. 5 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DE EQUILÍBRIO COMO UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Os estudos iniciais do problema de equilíbrio introduzido por BECKMAN et alii (4) e DAFERMOS (6) entre outros autores, consideram versões mais simples que as apresentadas até agora, sendo que as formulações são associadas a um problema de otimização equivalente.

Na realidade, o problema equivalente de otimização pode ser representado diretamente se considerarmos a sua relação com o problema de inequações variacionais, através da seguinte equivalência que KINDERLEHER e STAMPACCHIA (46) apresentam:

Seja  $g$  uma função convexa continuamente diferenciável em  $K \subset \mathbb{R}^n$ , sendo  $K$  um conjunto convexo e fechado, e seja  $F : K \longrightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $F(x) = \text{grad } g(x)$ . Então  $x$  é uma solução do problema de inequações variacionais

$$x \in K: (x - y)^t F(x) \geq 0, \quad \text{para todo } y \in K$$

se e somente se

$$g(x) = \min_{y \in K} g(y).$$

A partir da relação de equivalência anterior, e para o caso especial onde a matriz Jacobiana de  $c(f)$ ,

$$\left[ \partial c / \partial f \right]$$

é simétrica, então a solução do problema de inequações variacionais dada em (II-21), pode ser obtida minimizando o funcional convexo  $z(f)$  definido por uma integral de linha dada por

$$\min z(f) = \int_0^f c(x) dx \quad (\text{II.28})$$

$$\text{sujeito a } f \in F(d)$$

O programa matemático dado em (II-28) coincide com o resultado do trabalho apresentado por DAFERMOS (6).

Quando o funcional  $c(f)$  é estritamente monótono,  $z(f)$  é um funcional estritamente convexo.

Agora, para o caso mais simples, quando o custo de viagem do usuário num arco  $a \in A$  depende exclusivamente do fluxo nesse arco,  $c_a(f) = c_a(f_a)$ , então o fluxo de equilíbrio  $f$  pode ser encontrado resolvendo o seguinte problema de otimização

$$\min \sum_{a \in A} \int_0^{f_a} c_a(x) dx \quad (\text{II.29})$$

$$\text{sujeito a } f \in F(d).$$

O programa (II-29) é o problema matemático clássico proposto por BECKMANN et alii (4).

A partir da formulação (II-29) do modelo mais simples de equilíbrio, outros modelos sob certas características adicionais foram desenvolvidos e formulados equivalentemente como programas de otimização. Assim, por exemplo, tem-se o modelo no qual o número de viagens que ocorre entre cada par origem-destino é dado por uma função, a qual é conhecida como o modelo de demanda elástica, ver FLORIAN e NGUYEN (21). Outro modelo considerado na literatura de equilíbrio de rede é o problema combinado de alocação de fluxo e distribuição de viagens no qual, para cada par origem-destino, a geração e atração de viagens são conhecidas, ver EVANS (14) ou FLORIAN et alii (25).

## CAPÍTULO III

### RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE DETERMINAÇÃO DO FLUXO DE EQUILÍBRIO

#### III. 1. INTRODUÇÃO

No capítulo anterior, as condições de equilíbrio para os fluxos de tráfego foram transformadas, dependendo das condições impostas nos custos do usuário, em um problema equivalente de programação matemática, ou em um problema equivalente de complementaridade não linear ou em um problema equivalente de inequações variacionais.

Neste capítulo passaremos a apresentar os distintos procedimentos para resolver em forma numérica os problemas equivalentes acima mencionados, a fim de determinar o fluxo de equilíbrio em rede de transporte.

A notação básica da rede é a seguinte:

- $N$  - Conjunto de nós.
- $A$  - Conjunto de arcos.
- $O$  - Conjunto de nós origens,  $O \subset N$ .
- $D$  - Conjunto de nós destinos,  $D \subset N$ .
- $I$  - Conjunto de todos os pares  $i = (r,s)$  que ligam o origem  $r \in O$  e o destino  $s \in D$ .
- $K_i$  - Conjunto de caminhos que ligam o par  $i = (r,s)$ ,  $i \in I$ ,  $r \in O$ ,  $s \in D$ .
- $f_a$  - Fluxo no arco  $a$ ,  $a \in A$ ;  $f = (\dots, f_a, \dots)$ .

- $c_a$  - Custo do usuário no arco  $a$ ,  $a \in A$ ;  $c = (\dots, c_a, \dots)$ .  
 $h_k$  - Fluxo sobre o caminho  $k$ ;  $h = (\dots, h_k, \dots)$ .  
 $C_k$  - Custo sobre o caminho  $k$ ;  $C = (\dots, C_k, \dots)$ .  
 $d_i$  - Demanda de viagem associada com cada par  $i = (r, s)$ ,  
 $i \in I$ ,  $r \in O$ ,  $s \in D$ .  
 $\delta_{ak}$  - Variável indicador:

$$\delta_{ak} = \begin{cases} 1 & \text{se arco } a \text{ pertence ao caminho } k. \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

### III. 2. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE EQUILÍBRIO POR MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO

O problema de fluxo de equilíbrio para o caso separável, i.e.,  $c_a(f) = c_a(f_a)$  consiste em encontrar um fluxo em cada arco,  $f_a$ ,  $a \in A$  tal que satisfaz o critério de equilíbrio do usuário, e o qual pode ser obtido a partir da resolução do seguinte programa matemático, ver (II-32), escrito na forma:

$$\min z(f) = \sum_{a \in A} \int_0^{f_a} c_a(x) dx \quad (\text{III.1.1})$$

sujeito a

$$\sum_{k \in K_i} h_k = d_i, \quad i \in I \quad (\text{III.1.2})$$

$$h_k \geq 0, \quad k \in K_i, \quad i \in I \quad (\text{III.1.3})$$

e as restrições de definição do fluxo

$$f_a = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} \delta_{ak} h_k, \quad a \in A \quad (\text{III.1.4})$$

onde se considera que a função de custo de viagem do usuário  $c_a(\cdot)$  é uma função positiva e monótona crescente e sendo  $d_i$  a demanda de viagem fixa.

A formulação (III-1) do problema de equilíbrio é conhecida como a transformação de BECKMANN et alii (4), e foi desenvolvida em meados da década dos 50 mas sua utilidade é recente, sendo comprovada com o desenvolvimento de novos algoritmos de resolução de problemas matemáticos no fim dos anos 60.

Como a função  $c_a(\cdot)$  é monótona crescente, sua integral e portanto  $z(f)$  é uma função estritamente convexa em  $f_a$ . Sendo a região viável, definida pelas restrições (III-1.2) e (III-1.3), um conjunto convexo, então o problema (III-1) é um programa convexo e assim, ver por exemplo o trabalho de SHEFFI (65), a solução a encontrar é única (com respeito aos fluxos nos arcos).

### III. 2. 1. O MÉTODO DE FRANK E WOLFE

Existem diversos métodos disponíveis para resolver o problema de minimização (III-1). Entre eles, um método bastante usado até agora é o de adaptar o método de aproximação linear de FRANK e WOLFE (27), o qual é um método de direções viáveis.

Considere o problema de programação não linear restringido linearmente escrito na forma

$$\begin{aligned} \min \quad & F(x) && \text{(III.2)} \\ \text{sujeito a} \quad & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

O algoritmo de FRANK e WOLFE (27), designado a resolver o problema (III-2), pode ser descrito da seguinte maneira: dada uma solução inicial viável, linearizar a função objetivo  $F(x)$  para encontrar uma direção viável de descida a qual pode ser obtida através da resolução de um subproblema de programação linear. Depois, por meio de uma busca unidimensional sobre um segmento de reta, definida pela solução atual e a solução do subproblema linear, encontrar uma nova melhor solução.

Ao aplicar o algoritmo de FRANK e WOLFE ao problema não linear (III-1), um método usado para obter a solução inicial viável é definindo  $c_a = c_a(0)$ , para todo arco  $a \in A$  e, posteriormente é realizado o cálculo do caminho mais curto que liga cada par origem-destino.

GALLO e PALLOTINO (32) apresentam um estudo detalhado dos distintos algoritmos disponíveis para a resolução do problema do caminho mais curto.

A aproximação linear da função objetivo  $z(f)$ , dada na relação (III-1.1), no ponto  $f^l$ , é expressa na seguinte forma:

$$z(f) = z(f^l) + \nabla z(f^l)^t (f - f^l)$$

sendo  $\nabla z(\cdot)$  a gradiente de  $z(\cdot)$  dada por



$$\nabla z(f) = (c_a(f_a))$$

Assim, a aproximação linear de  $z(f)$  origina, na iteração  $l$ , o seguinte subproblema linear:

$$\min \sum_{a \in A} c_a(f_a^l) y_a \quad (\text{III.3.1})$$

sujeito a

$$\sum_{k \in K_i} h_k = d_i, \quad i \in I \quad (\text{III.3.2})$$

$$h_k \geq 0, \quad k \in K_i, \quad i \in I \quad (\text{III.3.3})$$

$$y_a = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} \delta_{ak} h_k, \quad a \in A. \quad (\text{III.3.4})$$

Usando a relação (III-3.4) na função objetivo (III-3.1), temos que

$$\begin{aligned} \sum_{a \in A} c_a(f_a^l) y_a &= \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} h_k \sum_{a \in A} \delta_{ak} c_a(f_a^l) \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} h_k C_k^l \end{aligned}$$

onde

$$C_k^l = \sum_{a \in A} \delta_{ak} c_a(f_a^l)$$

é o custo do caminho  $k$ .

Assim o subproblema linear (III-3) é equivalente ao seguinte subproblema:

$$\min \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} C_k^l h_k \quad (\text{III.4.1})$$

sujeito a

$$\sum_{k \in K_i} h_k = d_i, \quad i \in I \quad (\text{III.4.2})$$

$$h_k \geq 0, \quad k \in K_i, \quad i \in I. \quad (\text{III.4.3})$$

O programa (III-4) é um problema de fluxo de custo mínimo sem capacidade sobre os arcos. A solução do programa (III-4) pode ser obtida encontrando os caminhos mais curtos para cada par origem-destino, e alocamos a demanda  $d_i$  nesse caminho mais curto encontrado. Se denotamos por  $h_k^l$  a solução do subproblema (III-4), então

$$h_k^l = \begin{cases} d_i & \text{se } k \text{ é o caminho mais curto de } K_i \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{III.5})$$

Este procedimento de alocação é conhecido como de alocação *tudo ou nada*, onde cada par origem-destino,  $i = (r,s)$ ,  $r \in O$ ,  $s \in D$ , é examinado, e um fluxo  $d_i$  é alocado a cada arco que pertence ao caminho mais curto que liga a origem  $r$  ao destino  $s$ . Todos os outros caminhos que ligam o par origem-destino,  $i = (r,s)$ , terão um fluxo nulo.

A solução do subproblema linear (III-3) é então dada por

$$y^l = (y_a^l) = \left( \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i} \delta_{ak} h_k^l \right) \quad (\text{III.6})$$

Para completar a iteração  $l$  do algoritmo de FRANK e WOLFE,

um comprimento de passo  $\lambda$  é encontrado resolvendo o seguinte problema:

$$\min_{0 \leq \lambda \leq 1} \sum_{a \in A} \int_0^{(f_a^l + \lambda d_a^l)} c_a(x) dx, \quad (\text{III.7})$$

onde

$$d_a^l = f_a^l - y_a^l,$$

é a direção de descida.

No trabalho de VAN VLIET (68) observa-se que, por questões numéricas, é preferível encontrar  $\lambda$  tal que anule a derivada da função objetivo do problema (III-7), isto é, encontrar  $\lambda_l$  tal que

$$\sum_{a \in A} c_a(f_a^l + \lambda_l d_a^l) d_a^l = 0. \quad (\text{III.8})$$

Por último, fazemos

$$f^{l+1} = f^l + \lambda_l d^l. \quad (\text{III.9})$$

Todo este procedimento (III-3) - (III-9) é repetido para  $l = 1, 2, \dots$ , até que uma solução satisfatória para o problema de equilíbrio seja obtida.

Esta técnica de FRANK e WOLFE é amplamente usada dada sua simplicidade em explorar a estrutura da rede do problema e a seu modesto requerimento de armazenamento em memória de um computador, não aumentando com o número de iterações. A cada iteração, somente os fluxos nos arcos,  $f_a^l$ , são mantidos, assim como os custos nos arcos  $c_a(f_a^l)$ , além dos dados da rede. Do ponto de

vista da taxa de convergência, porém, a eficiência do algoritmo FRANK e WOLFE não é de toda satisfatória, já que usualmente converge lentamente na vizinhança da solução ótima.

### III. 2. 2. A TÉCNICA PARTAN

Diversas modificações do algoritmo FRANK e WOLFE foram estudadas com a esperança de acelerar a sua convergência sendo preservada sua simplicidade. Assim, por exemplo, existe a versão de FLORIAN (18), baseado no trabalho de WOLFE (71), adaptando o algoritmo original de FRANK e WOLFE com a incorporação de uma direção a um passo a frente; existem ainda as versões apresentadas por FUKUSHIMA (30), por WEINTRAUB et alii (70), por LEBLANC et alii (50), entre outros autores.

Em particular, o algoritmo de LEBLANC e colaboradores (50) usa uma combinação interessante do algoritmo de FRANK e WOLFE com a técnica PARTAN, a qual tenta melhorar a taxa de convergência, encontrando uma direção extra de busca em cada iteração. O método PARTAN (PARallel TANgents), desenvolvido originalmente para um problema de minimização irrestrita de uma função diferenciável e estendido para o caso restrito de uma função quadrática com restrições lineares, é amplamente estudado por exemplo no trabalho de LUENBERGER (52).

Seja  $x^1$  uma solução inicial viável. O procedimento PARTAN é incorporado à técnica FRANK e WOLFE (F-W) como se segue:

*Passo 1.* Subproblema linear

Seja  $z^1$  a solução ótima do subproblema linear F-W.

*Passo 2.* Cálculo da direção de busca F - W

$$d^1 = z^1 - x^1.$$

*Passo 3.* Cálculo do passo F-W

Seja  $\lambda_1$  o passo

$$\text{Fazer } x^2 = x^1 + \lambda_1 d^1$$

$$k = 2.$$

*Passo 4.* Subproblema linear

Seja  $z^k$  a solução ótima do subproblema linear F-W.

*Passo 5.* Cálculo da direção de busca F-W

$$d^k = z^k - x^k.$$

*Passo 6.* Cálculo do passo F-W

Seja  $\lambda_k$  o passo

$$\text{Fazer } v^k = x^k + \lambda_k d^k.$$

*Passo 7.* Cálculo da direção de busca PARTAN

$$\text{Fazer } d_p^k = v^k - x^{k-1}.$$

*Passo 8.* Cálculo do passo PARTAN

Seja  $p_k^{max}$  um passo máximo

Calcular o passo  $p_k : 0 \leq p_k \leq p_k^{max}$

Fazer

$$x^{k+1} = x^{k-1} + p_k d_p^k,$$

$$k = k + 1.$$

Ir ao passo 4.

O procedimento PARTAN não inicia até que três primeiras soluções aproximadas sejam determinadas. Um passo máximo,  $p_k^{max}$ , deve ser calculado na direção PARTAN para evitar que o novo ponto a ser encontrado seja inviável. FLORIAN et alii (26) apresentam um método iterativo para calcular o passo máximo  $p_k^{max}$ , e provam a eficiência computacional da variante PARTAN no algoritmo de aproximação linear, a partir de resultados numéricos obtidos com uma série de modelos de redes usados na prática.

Ainda outro algoritmo para o problema do fluxo de equilíbrio é aquele dado por NGUYEN (56) que adapta o método *Convex Simplex* de ZANGWILL (72). Posteriormente NGUYEN (57) apresenta uma metodologia unificada para a resolução do problema em consideração. Um outro método é a de adaptar o algoritmo de HOLLOWAY (41) o qual é baseado em uma estratégia de restrição onde um número de pontos extremos gerados pelo método de aproximação linear são armazenados.

GUÉLAT (36) apresenta resultados computacionais de aplicação de uma série de algoritmos para a resolução do problema de fluxo de equilíbrio, e indica que a taxa de convergência, tanto ao usar o algoritmo de LEBLANC et alii (50) ou o algoritmo de HOLLOWAY (41), é melhorada com respeito ao algoritmo de aproximação linear.

Alguns dos algoritmos mencionados anteriormente são apresentados no trabalho de KENNINGTON e HELGASON (45) para resolver o problema geral de fluxo em rede com custo convexo do

tipo dado em (III.2), onde  $A$  é a matriz de incidência nó-arco.

### III. 3. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE EQUILÍBRIO POR TÉCNICA DE COMPLEMENTARIDADE NÃO LINEAR

Consideremos agora o problema de encontrar o fluxo de equilíbrio em uma rede com custo *não simétrico*, isto é, o Jacobiano da função de custo do usuário é não simétrico, para o qual não é conhecido um programa de otimização equivalente. Para este caso não simétrico, ver no capítulo II, o problema de equilíbrio é formulado equivalentemente a um problema de complementaridade não linear ou a um problema de inequações variacionais.

AASHTIANI E MAGNANTI (1) formulam o problema do fluxo de equilíbrio como um problema de complementaridade não linear da forma:

$$F(x) \geq 0 \quad (\text{III.10.1})$$

$$x^t F(x) = 0 \quad (\text{III.10.2})$$

$$x \geq 0 \quad (\text{III.10.3})$$

definida no espaço de fluxo nos caminhos e onde  $F$  é um funcional de  $R^n$  em  $R^n$ .

Ultimamente, uma ampla variedade de modelos são formulados como um problema de complementaridade não linear. Por exemplo, FRIESZ et alii (29) apresentam e resolvem o problema de equilíbrio de preços formulado como um problema de complementaridade não linear.

Para a solução do problema de complementaridade não linear

dado em (III-10), JOSEPHY (42) por exemplo sugere que o funcional  $F$  seja aproximado linearmente, gerando assim um problema de complementaridade linear o qual pode ser resolvido usando por exemplo o algoritmo de pivoteamento de LEMKE (51). Este procedimento de linearização é repetido até que haja convergência a uma solução aceitável. O algoritmo de resolução para o problema de complementaridade não linear (III-10) é como se segue:

Dado um ponto inicial  $x^0$ , a linearização de  $F$  em  $x^0$  é:

$$F(x^0) + A(x^0)(x - x^0)$$

onde  $A$  é a matriz Jacobiana de  $F$ .

Reagrupando convenientemente os vetores constantes

$$(F(x^0) - A(x^0)x^0) + A(x^0)x$$

e denominando:

$$a = F(x^0) - A(x^0)x^0$$

$$M = A(x^0)$$

teremos que a linearização aplicada ao problema de complementaridade não linear (III-10) produz o seguinte problema, neste caso, denominado de complementaridade linear:

$$a + Mx \geq 0 \quad (\text{III.11.1})$$

$$x^t (a + Mx) = 0 \quad (\text{III.11.2})$$

$$x \geq 0 \quad (\text{III.11.3})$$

A solução do problema (III-11) resulta em um novo vetor  $x^1$ . O funcional  $F$  é novamente linearizado no ponto  $x^1$  e o procedimento é repetido até que um critério de parada seja satisfeito de tal modo



que uma solução aceitável para o problema (III-10) seja obtida.

Há de se mencionar que embora o problema de complementaridade linear possa ser resolvido eficientemente por algum método disponível de pivoteamento, sua aplicação para o problema de equilíbrio não é apropriado para redes de grande porte.

JOSEPHY (42) e PANG e CHANG (62) estabelecem critérios de convergência para este método iterativo de aproximação linear.

### III. 4. RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE EQUILÍBRIO POR TÉCNICAS DE INEQUAÇÕES VARIACIONAIS

Por sua vez, SMITH (66) formula o problema de equilíbrio de fluxo como um problema de inequações variacionais.

Um problema de inequações variacionais consiste em encontrar um  $f^* \in K$  tal que:

$$(f - f^*)^t c(f^*) \geq 0 \quad \text{para todo } f \in K \quad (\text{III.12})$$

onde  $c(\cdot)$  é um funcional de  $R^n$  em  $R^n$  e sendo  $K$  um subconjunto de  $R^n$ .

Para nosso caso,  $f_a$  é o fluxo sobre o arco  $a$  com  $f = (f_a)$ ,  $a \in A$ , e  $c_a(f)$  é o custo do usuário no arco  $a$  com  $c(f) = (c_a(f))$  o funcional definido sobre o conjunto de fluxos viáveis  $K = F(d)$ , sendo  $F(d)$  o conjunto dado na seção (II.2).

Nos últimos anos, o problema de inequações variacionais tem provado ser de grande utilidade na formulação de uma variedade de

modelos de equilíbrio. PANG (61) por exemplo enquadra dentro da formulação variacional o problema de equilíbrio espacial de preços, o problema de equilíbrio de Nash, além do problema de equilíbrio de tráfego, entre outros. Igualmente FRIESZ (28) apresenta uma revisão sucinta do desenvolvimento da teoria de equilíbrio em redes. Ele simultaneamente descreve e formula o problema de equilíbrio do usuário e o problema de equilíbrio espacial de preços nas suas distintas versões. Por sua vez, ZUBIETA (73) apresenta diversos métodos de resolução do modelo de equilíbrio espacial de preços, formulado como um problema de otimização, com custo de transporte não linear.

Entre os distintos métodos propostos para resolver o problema geral de equilíbrio de tráfego, formulado como um problema de inequações variacionais, temos o algoritmo de BERTSEKAS e GAFNI (5) que propõem o uso de um método de projeção, através de uma transformação sobre o espaço de fluxo nos caminhos; o algoritmo de diagonalização de FLORIAN e SPIESS (23) ou também referido como o algoritmo de relaxação de DAFERMOS (8); o algoritmo de projeção relaxado de FUKUSHIMA (31); o algoritmo de decomposição *simplicial* de LAWPHONGHANICH e HEARN (48) ou de aproximação linear *simplicial* de PANG e YU (63), ou o algoritmo de SMITH (67); o algoritmo de plano de corte de NGUYEN e DUPUIS (58); o algoritmo de MARCOTTE (53), entre outros autores.

DAFERMOS (10) apresenta e estuda um esquema geral iterativo para a solução numérica do problema de inequações variacionais, no qual como caso particular estão incluídos os algoritmos de relaxação e de projeção, e estabelece, sob suposições apropriadas, a convergência do esquema geral iterativo.

FISK e NGUYEN (16) fazem um estudo comparativo de alguns algoritmos para determinar o fluxo de equilíbrio para uma única rede de pequeno porte, e concluem na eficiência dos algoritmos de diagonalização. NAGURNEY (55) igualmente realiza testes comparativos de dois métodos: o método de relaxação e o método de projeção, aplicados a uma variedade de redes de pequeno e médio porte. NAGURNEY conclui que a forma do funcional do custo do usuário afeta a eficiência dos métodos de relaxação e de projeção.

No algoritmo de diagonalização ou de relaxação, ao começo de cada iteração  $k$ , dado um fluxo viável  $f^k$ , uma diagonalização da função  $c(\cdot)$  é desenvolvida a qual consiste em construir, para cada arco  $a \in A$ , uma nova função  $\tilde{c}_a^k(f_a)$  dada por

$$\tilde{c}_a^k(f_a) = c_a(f_1^k, f_2^k, \dots, f_{a-1}^k, f_a, f_{a+1}^k, \dots, f_{|A|}^k)$$

a qual dá lugar a um novo funcional  $\tilde{c}(\cdot, \cdot)$  definido por

$$\tilde{c}(f, f^k) = [\tilde{c}_a^k(f_a), a \in A]$$

onde  $\tilde{c}(\cdot, \cdot)$  é um funcional de  $K \times K \subset \mathbb{R}^{2|A|}$  em  $\mathbb{R}^{|A|}$  tal que  $\tilde{c}(f, f) = c(f)$ .

Para um  $f^k$  fixo, o seguinte problema resultante de inequações variacionais consiste em encontrar um  $f \in K$  tal que

$$\tilde{c}(f, f^k)^t (y - f) \geq 0, \quad \text{para todo } y \in K \quad (\text{III.13})$$

cuja resolução produz na seguinte iteração o vetor  $f^{k+1}$ .

O algoritmo de diagonalização termina quando um critério de parada apropriado seja satisfeito. Caso contrário, uma seguinte

iteração é efetuada.

Pela sua construção, o problema de inequações variacionais dado em (III-13) pode ser convertido em um problema de programação matemática escrito na forma

$$\min \sum_{a \in A} \int_0^{f_a} \tilde{c}_a^k(x) dx$$

sujeito a  $f \in K$

cuja solução pode ser obtida, por exemplo, através da aplicação do algoritmo FRANK e WOLFE ou de qualquer outra técnica descrita na seção (III.2).

A seguir apresenta-se o método de aproximação linear simplicial e o método de plano de corte que empregam técnicas de decomposição simplicial/geração de coluna. FRIESZ (28) considera tais técnicas atrativas a ser consideradas nos métodos de resolução de um problema de equilíbrio.

### III. 4. 1. MÉTODO DE APROXIMAÇÃO LINEAR SIMPLICIAL

Apresentaremos a seguir o método *simplicial* da família de aproximação linear de PANG e YU (63).

Denota-se por simplicidade PIV(K,c) como o problema de inequações variacionais de encontrar o vetor  $f^* \in K \subset \mathbb{R}^n$  tal que:

$$(f - f^*)^t c(f^*) \geq 0 \quad \text{para todo } f \in K \quad (\text{III.14})$$

onde K é um conjunto poliédrico compacto. Para o problema de

equilíbrio de tráfego,  $K$  é o conjunto de fluxos viáveis que satisfazem às restrições de conservação de fluxo em cada nó.

Um algoritmo de aproximação é dado pelo seguinte esquema:

Dado que conhecemos  $f^k \in K$ , seja  $f^{k+1}$  a solução do subproblema de inequações variacionais  $PIV(K, c^k)$  onde  $c^k$  é um funcional de aproximação de  $c$  no ponto  $f^k$ . Presumivelmente,  $c^k$  é tal que o subproblema  $PIV(K, c^k)$  seja numericamente mais fácil de resolver que o problema original  $PIV(K, c)$ .

PANG e YU (63) consideram uma aproximação linear da função  $c(\cdot)$  expressa na forma

$$c^k(f) = c(f^k) + A(f^k)(f - f^k) \quad (III.15)$$

onde  $A(f^k)$  é uma matriz  $n \times n$ .

Entre algumas das escolhas típicas para a matriz  $A(f^k)$  temos

- i)  $A(f^k) = \nabla c(f^k)$  o Jacobiano do funcional  $c$ , que dá lugar ao método de Newton.
- ii)  $A(f^k) =$  a parte diagonal de  $\nabla c(f^k)$ , que é o método linearizado de Jacobi.
- iii)  $A(f^k) =$  alguma matriz simétrica definida positiva para todo  $k$ , que é conhecido como o método de projeção.

A solução do subproblema linearizado  $PIV(K, c^k)$ , sendo  $c^k(\cdot)$  um funcional afim, i.e.,

$$c^k(f) = a + B f \quad (III.16.1)$$

onde:

$$a = c(f^k) - A(f^k) f^k \quad (\text{III.16.2})$$

$$B = A(f^k) \quad (\text{III.16.3})$$

tal que a matriz  $A(f^k)$  seja simétrica semidefinida positiva, é equivalente a encontrar a solução do seguinte programa quadrático convexo

$$\text{minimizar } z(f) = a^t f + \frac{1}{2} f^t B f \quad (\text{III.17})$$

$$\text{sujeito a } f \in K$$

Para rede de grande porte, a aplicação de algoritmos conhecidos para a resolução do programa quadrático (III-17) poderia ser inviável, tomando-se também em conta que, a matriz de restrições associada ao conjunto  $K$  (de conservação de fluxo) é uma matriz de incidência nó - arco. Para evitar usar explicitamente as restrições de conservação de fluxo, a idéia central é a de operar sobre uma representação *simplicial* do conjunto  $K$  em termos de seus pontos extremos. HOHENBALKEN (40) usa esta decomposição simplicial em algoritmos para problemas de programação não linear. Por sua vez, SACHER (64) e PANG (60) aplicam-no para problemas de programação quadrática.

Antes de apresentar o algoritmo de decomposição para o programa quadrático (III-17), as seguintes notações são dadas:

$W_K$  : Conjunto de pontos extremos retidos de  $K$ ,

$H(W_K)$  : Envoltória convexa de  $W_K$ , i.e.,

$$H(W_K) = \left\{ f / f = \sum_i \alpha_i y^i, \sum_i \alpha_i = 1, \alpha_i \geq 0 \text{ e } y^i \in W_K \right\}$$

$\nabla z(f)$  : Gradiente do funcional  $z$ .

O algoritmo de decomposição *simplicial* para resolver um programa quadrático do tipo (III-17) é como segue:

*Passo 0.* Inicialização

Seja  $f'$  um ponto viável de  $K$  e  $W_K = \emptyset$ .

*Passo 1.* Subproblema Linear

Seja  $\tilde{f}$  a solução do subproblema linear

$$\begin{aligned} \min \quad & \nabla z(f')^t y \\ \text{sujeito a} \quad & y \in K \end{aligned}$$

Se  $\nabla z(f')^t(\tilde{f} - f') \geq 0$ , parar com  $f'$  sendo a solução ótima. Senão, fazer  $W_K = W_K \cup \{\tilde{f}\}$ .

*Passo 2.* Problema Principal

Seja  $f'$  a solução do problema quadrático

$$\begin{aligned} \min \quad & z(f) = a^t f + \frac{1}{2} f^t B f \\ \text{sujeito a} \quad & f \in H(W_K). \end{aligned}$$

Elimina-se de  $W_K$  todos os pontos extremos com peso  $\alpha_i$  nulo, na expressão da solução  $f'$  como combinação convexa dos elementos de  $W_K$ . Ir ao passo 1.

Observa-se que para o problema de equilíbrio, a solução do subproblema linear, no passo 1, pode ser obtida através da alocação *tudo ou nada* do problema de fluxo de custo mínimo.

No problema principal, passo 2, se  $f \in H(W_K)$  então

$$f = P\alpha, \quad \sum_i \alpha_i = 1, \quad \alpha_i \geq 0.$$

onde  $P$  é uma matriz cujas colunas são os pontos extremos de  $K$ . Assim, o problema principal, no passo 2, converte-se em resolver o seguinte programa matemático mais simples, dado em função da nova variável  $\alpha = (\alpha_i)$ .

$$\min g(\alpha) = (P^t a)^t \alpha + \frac{1}{2} \alpha^t (P^t B P) \alpha \quad (\text{III.18.1})$$

sujeito a

$$\sum_i \alpha_i = 1, \quad (\text{III.18.2})$$

$$\alpha_i \geq 0. \quad (\text{III.18.3})$$

que é um problema de programação quadrática com uma única restrição.

SACHER (64) usa o algoritmo de LEMKE (51) para resolver o programa quadrático (III-18), enquanto que PANG e YU (63) propõem em o uso de uma versão modificada do algoritmo de Dantzig-Van de Panne-Whinston descrito em PANG (60).

Como pode-se perceber, para encontrar a solução de um problema de inequações variacionais,  $PIV(K,c)$ , referido em (III-14), é necessário resolver uma sequência de programas quadráticos, do tipo (III-17), que por sua vez, cada um destes programas, requer a resolução de uma sequência de subproblemas lineares e de programas principais. Como este procedimento consome algum tempo de execução, PANG e YU (63) modificam o conjunto original  $K$  e em seu lugar resolvem subproblemas de inequações variacionais do tipo  $PIV(K^k, c^k)$ , onde o conjunto em consideração é  $K^k$  (e não  $K$ ), de



tal modo que  $K^k$  seja a envoltória convexa de alguns pontos extremos de  $K$ . Em particular, o conjunto  $K^k$  contém como elemento o ponto extremo  $\tilde{f}^k$  de  $K$  tal que

$$c(f^k)^t \tilde{f}^k = \min_{y \in K} c(f^k)^t y \quad (\text{III.19})$$

A solução  $\tilde{f}^k$  do programa (III-19) é obtida através da aplicação do algoritmo do caminho mais curto.

Finalmente,  $f^k$  será a solução de equilíbrio se

$$c(f^k)^t \tilde{f}^k \geq c(f^k)^t f^k \quad (\text{III.20})$$

já que

$$c(f^k)^t y \geq c(f^k)^t \tilde{f}^k \geq c(f^k)^t f^k, \text{ para todo } y \in K$$

e assim

$$c(f^k)^t (y - f^k) \geq 0, \text{ para todo } y \in K.$$

Caso (III-20) não seja satisfeita, uma nova solução  $f^{k+1}$  é procurada sobre o subconjunto  $K^k$  o qual inclui  $\tilde{f}^k$ .

O algoritmo de decomposição *simplicial* linearizado de PANG e YU (63) pode então ser apresentado como se segue:

*Passo 0.* Inicialização

Seja  $f^0$  um fluxo viável de  $K$ .

Colocar  $\tilde{f}^0 = f^0$ ,  $K = \{\tilde{f}^0\}$ ,  $k = 0$ .

*Passo 1.* Subproblema linear

Seja  $\tilde{f}^{k+1}$  a solução do subproblema linear

$$\min_{y \in K} c(f^k)^t y$$

*Passo 2.* Critério de Parada

Se  $c(f^k)^t \tilde{f}^{k+1} \geq c(f^k)^t f^k$ , então  $f^k$  é uma solução.

Senão, fazer  $K^{k+1} = K^k \cup \{\tilde{f}^{k+1}\}$ .

*Passo 3.* Subproblema Quadrático

Seja  $P$  a matriz cujas colunas são os vetores pertencendo a  $K^{k+1}$ , e  $r = |K^{k+1}|$ .

Sejam  $a = c(f^k) - A(f^k) f^k$

$$B = A(f^k),$$

sendo  $A(\cdot)$  qualquer uma das matrizes típicas consideradas anteriormente, ver seção (III-4.1).

Seja  $\alpha = (\alpha_i)_{i=1, \dots, r}$  a solução do subproblema quadrático

$$\min (P^t a)^t \alpha + \frac{1}{2} \alpha^t (P^t B P) \alpha$$

sujeito a

$$\sum_{i=1}^r \alpha_i = 1$$

$$\alpha_i \geq 0, \quad i=1, \dots, r$$

Fazer 
$$f^{k+1} = \sum_{i=1}^r \alpha_i \tilde{f}^i$$

Eliminar todos os pontos extremos  $\tilde{f}^i$  com peso  $\alpha_i = 0$  na

expressão de  $f^{k+1}$ . Atualizar  $K^{k+1}$ . Colocar  $k=k+1$ . Ir ao passo 1.

PANG e YU (63) apresentam a convergência global do método de decomposição *simplicial* linearizado.

O outro procedimento de resolução para o problema de inequações variacionais é baseado na técnica de plano de corte.

### III. 4. 2. ALGORITMO DE PLANO DE CORTE

NGUYEN e DUPUIS (58) resolvem o problema de inequações variacionais (III-12) usando uma técnica de plano de corte, descrita por exemplo em ZANGWILL (72).

Suporemos que o funcional de custo  $c(\cdot)$  é contínuo e estritamente monótono sobre o poliedro compacto  $K$ , i.e.,

$$(c(x) - c(y))^t (x - y) > 0, \quad \text{para todo } x \neq y \in K \quad (\text{III.21})$$

de tal modo que a existência e unicidade da solução de fluxo de equilíbrio seja assegurada.

Usando uma propriedade do funcional de custo ser contínuo e monótono, ver por exemplo AUSLENDER (3), os seguintes problemas são equivalentes:

(III.a) Determinar  $f^* \in K$  satisfazendo

$$c(f^*)^t (y - f^*) \geq 0, \quad \text{para todo } y \in K. \quad (\text{III.22})$$

(III.b) Determinar  $f^* \in K$  satisfazendo

$$c(y)^t (y - f^*) \geq 0, \quad \text{para todo } y \in K. \quad (\text{III.23})$$

Para o caso do funcional de custo  $c(\cdot)$  ser monótono, a solução do problema de inequações variacionais (III-12) existe. Seja  $S$  o conjunto de todas essas soluções.

O problema de inequações variacionais (III-22) é equivalente a

$$c(f^*)^t (f^* - y) \leq 0 \quad \text{para todo } y \in K \quad (\text{III.24})$$

e seja

$$G(f) = \max_{y \in K} c(f)^t (f - y) \quad (\text{III.25})$$

MARCOTTE e DUSSAULT (54) utilizam a formulação (III-25) para resolver o problema variacional (III-22), usando o método de Newton incorporando uma estratégia de linha de busca. DRISSI (12) realiza um estudo similar aplicado ao problema de equilíbrio espacial de preços.

Considerando agora a formulação (III-23), define-se

$$g(f) = \min_{y \in K} c(y)^t (y - f), \quad \text{para todo } f \in K. \quad (\text{III.26})$$

Baseado na definição (III-26), HEARN et alii (38) apresentam as seguintes proposições:

*Proposição 1.*  $g(f) < 0$ , para todo  $f \in K$  e  $f \notin S$ .

*Prova:* Se  $f \notin S$ , i.e.,  $f$  não é solução, então deve existir um  $\hat{y} \in K$  tal que

$$c(\hat{y})^t (\hat{y} - f) < 0$$

e por conseguinte

$$g(f) = \min_{y \in K} c(y)^t (y - f) < c(\hat{y})^t (\hat{y} - f) < 0.$$

*Proposição 2.*  $g(f) = 0$  se e só se  $f \in S$ .

*Prova:* Suporemos primeiramente que  $g(f) = 0$ . Neste caso,

$$g(f) = \min_{y \in K} c(y)^t (y - f) = 0,$$

o qual significa que

$$c(y)^t (y - f) \geq 0, \text{ para todo } y \in K$$

e assim  $f$  satisfaz a formulação equivalente (III-23), portanto  $f \in S$ .

Agora suporemos que  $f \in S$ . Então temos que

$$c(y)^t (y - f) \geq 0, \text{ para todo } y \in K$$

e portanto

$$g(f) = \min_{y \in K} c(y)^t (y - f) \geq 0.$$

Por outro lado, desde que em particular  $f \in K$ , temos que

$$g(f) = \min_{y \in K} c(y)^t (y - f) \leq c(f)^t (f - f) = 0,$$

e assim  $0 \leq g(f) \leq 0$ .

*Proposição 3.*  $g(f^*) = \max_{f \in K} g(f)$  se e só se  $f^* \in S$ .

*Prova:* Por absurdo, suporemos que

$$g(f^*) = \max_{f \in K} g(f) \text{ mas que } f^* \notin S.$$

Da *proposição 1*, temos que  $g(f^*) < 0$ . Por ser  $c(\cdot)$  um funcional monótono, existe pelo menos uma solução para o problema (III-23), i.e.,  $S \neq \emptyset$ . Seja  $f' \in S$ . Da *proposição 2*, temos que  $g(f') = 0$ . Por outro lado, temos que

$$g(f^*) = \max_{f \in K} g(f) \geq g(f'),$$

então  $0 > g(f^*) \geq 0$ , o qual é um absurdo. Portanto  $f^* \in S$ .

Suporemos agora que  $f^* \in S$ . Para provar que

$$g(f^*) = \max_{f \in K} g(f),$$

provaremos que  $g(f^*) \geq g(f)$ , para todo  $f \in K$ .

Caso  $f \in K$  mas que  $f \notin S$ , das proposições 1 e 2, temos que

$$g(f^*) = 0 > g(f).$$

Caso  $f \in S$ , da proposição 2, temos que  $g(f^*) = g(f)$ .

Assim em ambos casos obtém-se

$$g(f^*) \geq g(f), \text{ para todo } f \in K.$$

A proposição 3 fornece uma formulação de otimização para o problema equivalente (III-23). NGUYEN e DUPUIS (58) utilizam a proposição 3 para resolver o problema associado de *max min*:

$$\max_{f \in K} \min_{y \in K} c(y)^t (y - f) \quad (\text{III.27})$$

O problema (III-27) é equivalente ao seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \max x_0 && (\text{III.28}) \\ & \text{sujeito a} \\ & c(y)^t (y - f) \geq x_0, \text{ para todo } y \in K \\ & f \in K \end{aligned}$$

O problema (III-28) é linear em  $x_0$  e  $f$ , mas o conjunto de restrições não pode ser escrito explicitamente. Neste caso, o problema

(III-28) aproxima-se do seguinte problema linear com um número finito de restrições:

$$\max x_0 \quad (III.29)$$

sujeito a

$$c(y^i)^t (y^i - f) \geq x_0, \quad i=1,2,\dots,k$$

$$f \in K$$

onde  $y^1, y^2, \dots, y^k$  são pontos conhecidos de  $K$ .

DUPUIS (13) apresenta em forma detalhada um algoritmo de solução para o programa (III-28), o qual pode ser dado como se segue:

*Passo 1.* Inicialização

Dado um fluxo viável  $y^1 \in K$ , seja

$$z^1 = \{(x_0, f) / c(y^1)^t (y^1 - f) \geq x_0, f \in K\}$$

$$k = 1.$$

*Passo 2.* Solução do subproblema linear

Encontrar a solução ótima  $(x_0^k, f^k)$  de

$$\max x_0$$

$$\text{sujeito a } (x_0, f) \in z^k.$$

*Passo 3.* Critério de parada

Se  $x_0^k \leq 0$ , parar.

*Passo 4.* Determinar um novo plano de corte

Calcular  $\theta^{k+1}$ , a solução ótima de

$$\min_{0 \leq \theta \leq 1} [c(y^k + \theta(f^k - y^k))^t (y^k - f^k)]^2$$

Fazer  $y^{k+1} = y^k + \theta^{k+1} (f^k - y^k)$ .

Seja  $z^{k+1} = z^k + H(y^{k+1})$

onde  $H(y^{k+1})$  dá lugar ao novo plano de corte

$$H(y^{k+1}) = \{(x_0, f) / c(y^{k+1})^t (y^{k+1} - f) \geq x_0, f \in K\}$$

Ir ao passo 2 com  $k=k+1$ .

A convergência do algoritmo acima mencionado é apresentado por NGUYEN e DUPUIS (58).

Algumas considerações numéricas do algoritmo anterior devem ser observadas. Primeiro, o valor  $\theta^{k+1}$ , no passo 4, pode ser calculado como se segue:

$$\theta^{k+1} = \begin{cases} 1 & \text{se } c(f^k)^t (y^k - f^k) > 0 \\ \bar{\theta} & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

sendo  $\bar{\theta}$  tal que

$$c(y^k + \bar{\theta}(f^k - y^k))^t (y^k - f^k) = 0 \quad (\text{III.30})$$

Para encontrar a raiz  $\bar{\theta}$  de (III-30), pode ser usado qualquer método apropriado de resolução tal como o método de Newton. Por outro lado, não se requer que o valor exato de  $\bar{\theta}$  seja necessariamente obtido, o qual poderia envolver um número grande de cálculos. Um valor positivo de  $\bar{\theta}$  seria suficiente.

Considere-se agora o subproblema linear (III-29), referente ao passo 2, escrito na forma:



$$\max x_0 \quad (\text{III.31})$$

sujeito a

$$x_0 + c(y^i)^t f \leq c(y^i)^t y^i, \quad i = 1, 2, \dots, k$$

$$f \in K.$$

onde  $K$  é o conjunto de fluxos viáveis, suposto limitado, que descreve as equações de conservação de fluxo, em número usualmente grande. A solução do problema (III-31) pode ser encontrada usando o método de decomposição de Dantzig e Wolfe, ver DANTZIG (11), de tal modo de evitar o tratamento explícito das equações de conservação de fluxo. A geração de uma coluna, reduz-se essencialmente a encontrar o caminho mais curto na rede.

Seja  $x^j$ ,  $j \in J$  os pontos extremos, em número finito, de  $K$  tal que

$$f = \sum_j \alpha_j x^j \quad (\text{III.32.1})$$

$$\sum_j \alpha_j = 1 \quad (\text{III.32.2})$$

$$\alpha_j \geq 0. \quad (\text{III.32.3})$$

Usando as relações dadas em (III-32), o subproblema linear (III-31) converte-se no seguinte problema equivalente:

$$\max x_0 \quad (\text{III.33.1})$$

sujeito a

$$x_0 + \sum_j [c(y^i)^t x^j] \alpha_j + e_i = c(y^i)^t y^i, \quad i=1, 2, \dots, k \quad (\text{III.33.2})$$

$$\sum_j \alpha_j = 1 \quad (\text{III.33.3})$$

$$\alpha_j \geq 0, \quad (\text{III.33.4})$$

onde  $e_i$  é a variável de folga para cada iteração  $i$ ,  $i=1,2,\dots,k$ .

Como em cada iteração, uma nova restrição ou plano de corte é adicionada, cada novo subproblema linear, no passo 2, tem aumentado o número de restrições, cuja resolução seria impraticável do ponto de vista numérico. Uma forma de evitar o aumento do número de restrições é a de, antes de adicionar uma nova restrição, eliminar todas as restrições não ativas (restrições cujas correspondentes variáveis de folga sejam positivas).

Seja  $\pi_i$ ,  $i=1,2,\dots,k$  e  $u$  as variáveis duais referidas às restrições (III-33.2) e (III-33.3) respectivamente. O custo reduzido  $\bar{e}_i$  da variável de folga  $e_i$  é

$$\bar{e}_i = -\pi_i,$$

e entra na base a variável  $e_s$  tal que

$$\pi_s = \min_i \pi_i < 0. \quad (\text{III.34})$$

O custo reduzido  $\bar{\alpha}_j$  da variável  $\alpha_j$  é

$$\bar{\alpha}_j = -(\pi_1, \dots, \pi_p; u) \begin{bmatrix} c(y^1) x^j \\ \vdots \\ c(y^k) x^j \\ 1 \end{bmatrix}$$

e o critério usual simplex é encontrar

$$\min_j \bar{\alpha}_j = \min \hat{c}^t x + u \quad (\text{III.35})$$

onde  $\hat{c} = (c_a) = (\sum_i \pi_i c_a(y^i))$ .

O problema (III-35) resolve-se usando qualquer algoritmo do caminho mais curto. Note-se que como todas as variáveis  $\pi_i$  são não negativas e se os custos  $c_a$  são não negativos, então não existe circuitos negativos na rede.

Entra na base a variável correspondente  $\alpha$  tal que

$$\alpha_s = \min_j \alpha_j < 0,$$

e o procedimento simplex usual continua.

DUPUIS (13) apresenta diversas técnicas para tentar acelerar a convergência do algoritmo de plano de corte.

### III. 5. EXEMPLO DE APLICAÇÃO

Nesta seção, apresenta-se exemplos de aplicações dos algoritmos de PANG e YU (63) e NGUYEN e DUPUIS (58), desenvolvidos neste capítulo para redes de transporte.

Para cada algoritmo, um programa FORTRAN é escrito usando DOUBLE PRECISION de tal modo a reduzir o erro de arredondamento.

O computador IBM 370/158 do Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC) é usado em todos os experimentos computacionais.

A resolução de cada subproblema quadrático, no algoritmo de PANG e YU, é realizada através da aplicação do método de restrições ativas, ver anexo II, descrito em GILL et alii (34). A subrotina E04NAF-NAG é usada para resolver o problema de programação

quadrática correspondente.

Para a aplicação do algoritmo de PANG e YU, a linearização do funcional de custo de viagem  $c(\cdot)$  no ponto  $f^k$  conhecido, é obtida a partir da relação

$$c^k(f) = c(f^k) + A(f^k) (f - f^k), \quad (\text{III.36})$$

onde  $A(f^k)$  é uma matriz de ordem  $n \times n$ , sendo  $n$  o número de arcos.

A primeira rede em análise é definida por 40 nós, 66 arcos e 6 pares origem-destino, de acordo com a Figura 1. Tal rede é reportado em NAGURNEY (55). O custo de viagem associado a cada arco é linear e não simétrico, dado na forma

$$c_a(f) = u_a f_a + v_a f_b + w_a, \quad a \neq b \quad (\text{III.37})$$

onde  $u_a$  e  $w_b$  são positivos e  $v_a \geq 0$ .

A matriz  $B = A(f^k)$  escolhida em (III-36) é dada como a parte diagonal da matriz Jacobiana do funcional  $c(\cdot)$  de (III-37), isto é,  $B = [b_{i,j}]$ , tal que  $b_{i,j} = u_i$  se  $i = j$ , e zero, caso contrário.

Nas páginas posteriores, ver Quadro 1, apresentam-se os resultados obtidos aplicando o algoritmo de linearização de Pang - Yu e de plano de corte de Nguyen - Dupuis para a rede da Figura 1.

No Quadro 1 de resultados, observa-se que aplicando o algoritmo de linearização de Pang-Yu, a solução de equilíbrio é obtida em 27 iterações principais, i.e., resolve-se 26 programas quadráticos do tipo dado em (III-18), sendo que o ordem da matriz  $(P^tBP)$  associada à função objetivo da cada programa quadrático é igual ao

número de pontos extremos armazenados, onde a matriz  $D = (P^tBP)$   $= [d_{i,j}]$  é tal que

$$d_{i,j} = \tilde{f}^{i^t} B \tilde{f}^j$$

com  $B = A(f^k)$  a matriz diagonal constante e  $\tilde{f}$  vetores extremos pertencendo ao conjunto  $K$ .

Por exemplo, na solução final, a ordem da matriz  $P^tBP$  é de  $20 \times 20$ .

No algoritmo de Nguyen-Dupuis, o método termina em 250 iterações, i.e., resolve-se exatamente 248 programas lineares distintos e um número similar de equações para encontrar a raiz  $\bar{\theta}$ .

Vale a pena também mencionar que no algoritmo de Pang-Yu, em cada iteração principal, encontra-se a solução ótima do programa quadrático correspondente. Agora para o caso do algoritmo de Nguyen-Dupuis, na execução de cada programa linear, ver passo 2, é limitado o número de pivoteamentos. Assim mesmo, o valor da raiz  $\bar{\theta}$  nem sempre é calculado exatamente.

Uma segunda rede definida por 20 nós, 28 arcos e 8 pares origem - destino, de acordo com a figura 2 e reportada em Nagurney (55), é analisada. O custo de viagem associado a cada arco é não linear e não simétrico, na forma geral

$$c_a(f) = \mu_a f_a^4 + \nu_a f_a + \omega_a f_b + \gamma_a \quad ; \quad a \neq b \quad (\text{III.38})$$

onde  $\nu_a$ ,  $\omega_a$  e  $\gamma_a$  são positivos e  $\mu_a \geq 0$ .

Para a linearização do funcional custo de viagem  $c(\cdot)$ , a matriz correspondente  $A(f^k)$  é dada também como a parte diagonal da

matriz Jacobiana do funcional  $c(\cdot)$ , onde

$$A(f^k) = [a_{ij}(f^k)], \quad \text{tal que}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} 4\mu_a f_a^3 + \nu_a & i = j \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Os resultados obtidos a partir do algoritmo de linearização de Pang - Yu e de plano de corte de Nguyen - Dupuis são apresentados a seguir.

Do quadro 2, observa-se que o algoritmo de Pang-Yu termina em 16 iterações principais, o qual quer dizer que resolve-se 15 programas quadráticos. A matriz  $D = [d_{i,j}]$  associada à função objetivo de cada programa quadrático é dada por

$$D = P^t A(f^k) P, \quad \text{tal que}$$

$$d_{i,j} = \tilde{f}^i{}^t A(f^k) \tilde{f}^j$$

onde  $A(f^k)$  é a matriz dependendo do fluxo  $f^k$ , e os  $\tilde{f}$  são pontos extremos de  $K$  retidos em  $K^k$ . Assim, o cálculo dos elementos da matriz  $D$  requer maior esforço computacional.

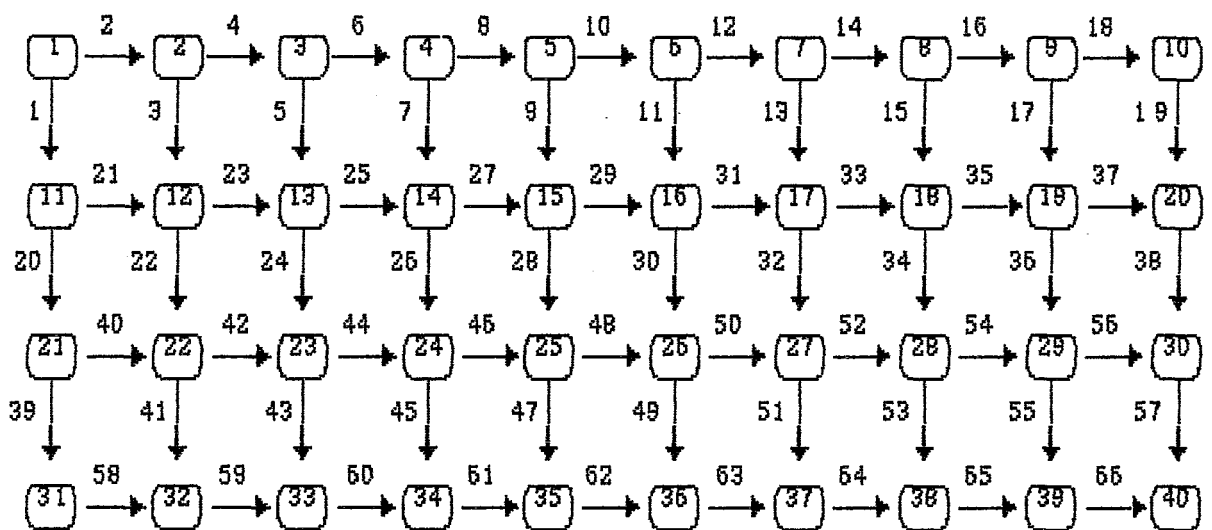
Por sua vez, o algoritmo de Nguyen-Dupuis requer a resolução de 248 programas lineares e um número similar de equações para encontrar a raiz  $\bar{\theta}$ .

Uma vez mais, cada programa quadrático é resolvido até se encontrar uma solução ótima, enquanto que, na resolução de cada programa linear, limita-se o número de pivoteamento.

Para ambas redes da Figura 1 e 2, o método de linearização de Pang-Yu retém maior número de pontos extremos que o método de plano de corte de Nguyen-Dupuis.

Por outro lado, a matriz utilizada no método de linearização, para ambas funções de custo da rede da Figura 1 e 2, é a parte diagonal, nem sempre satisfatória para a convergência, do Jacobiano da função de custo correspondente, sendo armazenado como um vetor. Embora outra matriz simétrica definida positiva possa ser utilizada, e requer um maior esforço tanto computacional como de armazenamento, o número de iterações necessários para resolver o problema variacional poderia ser menor.

FIGURA 1. Rede com Custo Linear e não Simétrico.



par (O/D)  $w_1 = (1,25)$ ,  $d_{w_1} = 70$

par (O/D)  $w_2 = (1,20)$ ,  $d_{w_2} = 60$

par (O/D)  $w_3 = (4,27)$ ,  $d_{w_3} = 50$

par (O/D)  $w_4 = (16,30)$ ,  $d_{w_4} = 50$

par (O/D)  $w_5 = (22,40)$ ,  $d_{w_5} = 50$

par (O/D)  $w_6 = (24,40)$ ,  $d_{w_6} = 50$



## QUADRO 1

## RESULTADOS OBTIDOS PARA A REDE DA FIGURA I

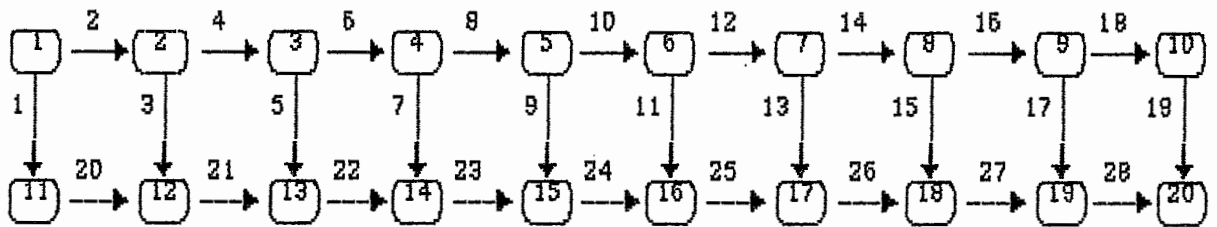
## Algoritmo PANG - YU

Iter. k	$\min_{f \in K} (f^k)^t (f - f^k)$	Nº. Pontos Extremos	Iter. k	$\min_{f \in K} (f^k)^t (f - f^k)$	Nº. Pontos Extremos
1	-915200,000	1	9	-5543,724	8
2	-303716,096	2	10	-4837,682	9
3	-215402,738	3	15	-1099,646	14
4	-77601,422	4	20	-8,878	19
5	-65030,651	5	25	-0,007	20
6	-40749,559	6	26	-0,002	20
7	-13718,186	6	27	-0,000	20
8	-6935,716	7			

## Algoritmo NGUYEN - DUPUIS

Iter. k	$x_0^k$	Nº. de restrições	Iter. k	$x_0^k$	Nº. de restrições
1	915200,000	1	10	9537,351	5
2	295555,255	2	20	3188,723	7
3	216622,402	2	25	2331,383	5
4	91536,201	3	30	1487,019	6
5	62465,500	3	50	1031,100	7
6	35737,801	3	100	603,964	7
7	21558,982	4	150	401,040	9
8	14936,725	4	200	296,653	6
9	12384,212	5	250	161,592	8

FIGURA 2. Rede com Custo não Linear e não Simétrico



$$\text{par (O/D)} \quad w_1 = (1,20), \quad d_{w_1} = 50$$

$$\text{par (O/D)} \quad w_2 = (1,19), \quad d_{w_2} = 60$$

$$\text{par (O/D)} \quad w_3 = (2,20), \quad d_{w_3} = 100$$

$$\text{par (O/D)} \quad w_4 = (2,17), \quad d_{w_4} = 100$$

$$\text{par (O/D)} \quad w_5 = (2,13), \quad d_{w_5} = 100$$

$$\text{par (O/D)} \quad w_6 = (3,14), \quad d_{w_6} = 50$$

$$\text{par (O/D)} \quad w_7 = (4,20), \quad d_{w_7} = 100$$

$$\text{par (O/D)} \quad w_8 = (6,19), \quad d_{w_8} = 100$$

## QUADRO 2

## RESULTADOS OBTIDOS PARA A REDE DA FIGURA 2

## Algoritmo PANG - YU

Iter. k	$\min_{f \in K} c(f^k)^t (f - f^k)$	Nº. Pontos Extremos	Iter. k	$\min_{f \in K} c(f^k)^t (f - f^k)$	Nº. Pontos Extremos
1	-3498862135,0	1	9	-2303937,150	5
2	-1193512252,1	2	10	-1799102,101	6
3	-259915134,12	3	11	-468552,455	7
4	-95316667,01	4	12	-392250,787	7
5	-71557934,72	4	13	-310275,655	7
6	-12479139,69	5	14	-111759,051	8
7	-4810605,055	5	15	-223,849	9
8	-2388724,351	5	16	-1,716	10

## Algoritmo NGUYEN - DUPUIS

Iter. k	$x_0^k$	Nº. de restrições	Iter. k	$x_0^k$	Nº. de restrições
1	3498862135,0	1	10	2213043,628	4
2	69238714,65	2	15	2196334,812	3
3	63574601,76	2	20	2181952,772	3
4	33551742,20	3	30	382114,902	3
5	28655838,43	3	50	250902,262	3
6	18427554,00	4	100	10718,247	4
7	3502356,789	4	150	19803,574	4
8	2666066,004	3	200	651,865	8
9	4001258,629	3	250	79,861	4

## CAPÍTULO IV

### MODELO BINÁRIO DE ALOCAÇÃO / ESCOLHA MODAL

#### IV. 1. INTRODUÇÃO

Nos capítulos anteriores, foram apresentados modelos que servem para simular o tráfego para um só modo de transporte, em particular, de veículos particulares. Posteriormente foram consideradas algumas técnicas de resolução para aqueles modelos. Algumas vezes porém, as viagens não podem ser realizadas usando um só modo de transporte, senão através de modos alternativos de transporte, seja por exemplo ônibus. Neste capítulo, apresenta-se então um modelo estendido de equilíbrio no qual se consideram mais de um modo de transporte, e em particular para o caso binário em que um modo é por auto e o outro modo é de transporte coletivo, digamos ônibus. Assim, não só o número de viagens há de ser determinado, como também, para cada par origem-destino, o número de passageiros de trânsito, tem que ser determinado.

Embora os fluxos de autos e de ônibus não sejam expressos em termos de uma mesma unidade de fluxo, por simplicidade assume-se que exista um fator de conversão tal que os fluxos para ambos modos sejam medidos em termos de uma mesma unidade de fluxo.

Como uma breve revisão de trabalhos anteriores para o modelo estendido que considera mais de um modo de transporte, temos o trabalho de FLORIAN (19) que considera um modelo combinado de alocação/escolha modal onde a escolha de rota está sujeita à condição de equilíbrio de WARDROP (69) e a escolha do modo de

transporte é determinada por uma certa função. ABDULAAL e LEBLANC (2) apresentam modelos que combinam técnicas de alocação de tráfego e escolha modal em modelos de escolha simultânea de rota e de modo. LEBLANC e FARHANGIAN (49) examinam diferentes algoritmos de resolução para o modelo de alocação/escolha modal de ABDULAAL e LEBLANC (2). FISK e NGUYEN (15) formulam o modelo proposto por FLORIAN (19) na forma de um sistema de equações não lineares e provam a existência de uma solução de equilíbrio e determinam condições suficientes para sua unicidade.

Até aqui é suposto que não exista interdependência entre os custos de viagens sobre os arcos da rede viária (auto) e sobre os arcos da rede de transporte coletivo (ônibus). Esta condição será relaxada para analisar o problema de alocação de tráfego/escolha modal para o caso em que a demora do fluxo de um modo dependa do fluxo do outro modo. Em equilíbrio, é suposto que as condições de equilíbrio do usuário são satisfeitas para ambas redes, viária (auto) e de transporte coletivo (ônibus), e que a escolha modal é dada por uma função conhecida de escolha do modo de transporte.

#### IV. 2. MODELO COMBINADO DE ALOCAÇÃO/ESCOLHA MODAL

Para o problema combinado de alocação/escolha modal de auto e ônibus, suponha-se que a rede em consideração permite o fluxo de auto e de passageiros de ônibus sobre os arcos. Pode-se supor como se uma rua seja representada por dois arcos (2-grafo): um arco para o fluxo de auto e o outro para o fluxo de ônibus.

Seja  $G(N,A)$  a representação da rede em consideração, onde  $N$  é o conjunto de nós e  $A$  é o conjunto de arcos.

Sejam,  $f_a^1$  o fluxo de autos sobre o arco  $a$ , e  $f_a^2$  o fluxo de ônibus (passageiros) sobre o arco  $a$ . Similarmente,  $c_a^1$  e  $c_a^2$  representam os custos de viagem dos usuários associados aos modos de auto e de ônibus respectivamente. Supondo que haja interação entre os fluxos de ambos modos sobre o arco  $a$ , teremos que

$$\begin{aligned} c_a^1 &= c_a^1(f_a^1, f_a^2), \quad \text{para o modo auto, } a \in A \\ c_a^2 &= c_a^2(f_a^1, f_a^2), \quad \text{para o modo ônibus, } a \in A. \end{aligned} \quad (\text{IV.1})$$

Supõe-se que a função de custo do usuário

$$c_a(f_a) = (c_a^1(f_a), c_a^2(f_a)), \quad \text{onde } f_a = (f_a^1, f_a^2),$$

é contínua, diferenciável e monótona, i.e.,

$$(c_a(f'_a) - c_a(f''_a))^t (f'_a - f''_a) \geq 0, \quad \text{para todo } a \in A. \quad (\text{IV.2})$$

Seja  $I$  o conjunto de pares origem-destino, e  $m$  especifica o modo de transporte,  $m = 1$  modo auto, e  $m = 2$  modo ônibus.

A demanda de viagem origem-destino,  $d_i^m$ ,  $i \in I$ , e modo  $m$ , será distribuída entre os distintos caminhos que ligam  $i$ . Seja  $h_k$  o fluxo sobre o caminho  $k$ ,  $k \in K_i^m$ , onde  $K_i^m$  é o conjunto de caminhos disponíveis para o modo  $m$  e cada par  $i$  de origem-destino. A demanda total de viagem origem-destino para ambos modos de transporte é dada por

$$d_i^1 + d_i^2 = \bar{d}_i, \quad i \in I, \quad (\text{IV.3})$$

onde  $\bar{d}_i$  é suposto fixo e conhecido.

O fluxo sobre o caminho  $k$ ,  $h_k$ , é não negativo e deve satisfazer as equações de conservação de fluxo para cada modo:

$$\sum_{k \in K_i^m} h_k = d_i^m, \quad i \in I, \quad m = 1, 2 \quad (\text{IV.4.1})$$

$$h_k \geq 0, \quad \text{para todo } k. \quad (\text{IV.4.2})$$

Os fluxos nos arcos  $a$ ,  $f_a^m$ , são dados por:

$$f_a^m = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i^m} \delta_{ak} h_k, \quad a \in A, \quad m = 1, 2 \quad (\text{IV.5})$$

onde

$$\delta_{ak} = \begin{cases} 1 & \text{se arco } a \text{ pertence ao caminho } k \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{IV.6})$$

O custo no caminho  $k$ ,  $C_k$ , é a soma dos custos dos usuários nos arcos que estão nesse caminho,

$$C_k(h) = \sum_{a \in A} \delta_{ak} c_a^m(f_a^m), \quad k \in K_i^m, \quad i \in I, \quad m = 1, 2. \quad (\text{IV.7})$$

Seja  $u_i^m(h)$  o custo do caminho de custo mínimo para todos os pares  $i$  de origem-destino, e para todos os modos  $m$ ,

$$u_i^m = \min_{k \in K_i^m} C_k, \quad i \in I, \quad m = 1, 2. \quad (\text{IV.8})$$

Consideremos agora a escolha modal de demanda entre o auto e o ônibus que dependa dos custos de viagens dos dois modos. Esta escolha modal tem sido estudada e modelada por pesquisadores de Engenharia de Transporte e de Planejamento Urbano, e é reconhecida ser uma decisão complexa a qual está influenciada por vários fatores (e a maioria das vezes não podem ser medidas). Para tomar em conta estes fatores, certas funções especiais de escolha modal tem sido desenvolvidas. FLORIAN (19), por exemplo apresenta algumas classes de modelos de demanda.

Seja então  $G_i(w_i)$  uma função de escolha modal que dependa dos custos de viagens dos dois modos de transporte através da diferença seguinte

$$w_i = u_i^1(f) - u_i^2(f) . \quad (IV.9)$$

Assim,  $d_i^1 = \bar{d}_i G_i(w_i)$  dá a proporção de viagens que ocorre para o modo auto e  $\bar{d}_i(1-G_i(w_i))$  a proporção de viagens para o modo ônibus. É suposto que  $G_i(w_i)$  é uma função estritamente decrescente, e portanto inversível, cuja função inversa é dada por  $W_i^1(d_i)$ .

#### IV. 3. FORMULAÇÃO DO MODELO BINÁRIO EM TERMOS DE INEQUAÇÕES VARIACIONAIS

FLORIAN e SPIESS (24) formulam o modelo de alocação/escolha modal supondo que para cada modo, a escolha do caminho satisfaz o princípio de otimização do usuário de WARDROP (69),



$$C_k^* - u_i^{m*} \begin{cases} = 0 & \text{se } h_k^* > 0 \\ \geq 0 & \text{se } h_k^* = 0, \end{cases} \quad k \in K_i^m, i \in I, m=1,2 \quad (\text{IV.10})$$

e que

$$u_i^{1*} - u_i^{2*} = W_i(d_i^{1*}), \quad i \in I \quad (\text{IV.11})$$

sujeito às condições

$$\sum_{k \in K_i^1} h_k = d_i^1, \quad i \in I \quad (\text{IV.12.1})$$

$$\sum_{k \in K_i^2} h_k = d_i^2, \quad i \in I \quad (\text{IV.12.2})$$

$$d_i^1 + d_i^2 = \bar{d}_i, \quad i \in I \quad (\text{IV.12.3})$$

$$f_a^1 = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i^1} \delta_{ak} h_k, \quad a \in A \quad (\text{IV.12.4})$$

$$f_a^2 = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i^2} \delta_{ak} h_k, \quad a \in A \quad (\text{IV.12.5})$$

$$h_k \geq 0, \quad \text{para todo } k \quad (\text{IV.12.6})$$

onde  $\delta_{ak}$  é definido em (IV-6).

O símbolo (\*) em (IV-10) e (IV-11) indica que os valores respectivos estão em equilíbrio.

Depois de uma série de manipulações algébricas, FLORIAN e SPIESS (24) provam que as condições (IV-10) e (IV-11) sujeitas às

restrições (IV-12.1) - (IV-12.6) são equivalentes ao seguinte problema de inequações variacionais:

$$\sum_{a \in A} c_a^1(f_a^*) (f_a^1 - f_a^{1*}) + \sum_{a \in A} c_a^2(f_a^*) (f_a^2 - f_a^{2*}) - \sum_{i \in I} W_i(d_i^{1*}) (d_i^1 - d_i^{1*}) \geq 0, \quad \text{para todo } (f, d^1) \text{ viável}$$

... (IV.13)

onde o conjunto viável é definido pelas relações dadas em (IV-12.1)-(IV-12.6).

Seguindo o trabalho de FISK e BOYCE (17), a expressão dada em (IV-13) pode ser generalizada para o caso de mais de dois modos de transporte. Seja  $M$  o conjunto dos diferentes modos de transporte. Considerando a relação (II-22) no Capítulo II e generalizando-a para o caso de mais de um modo de transporte, podemos escrever:

$$\sum_{m \in M} \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i^m} C_k(h^*) (h_k - h_k^*) - \sum_{m \in M} \sum_{i \in I} u_i^{m*} (d_i^m - d_i^{m*}) \geq 0,$$

... (IV.14)

Suponha agora que a demanda total de viagem  $\bar{d}_i$ ,  $i \in I$  seja fixa e conhecida. Logo a seguinte relação deve ser satisfeita

$$\sum_{m \in M} d_i^m = \bar{d}_i, \quad i \in I. \quad \text{(IV.15)}$$

Usando a relação dada em (IV-15), é possível eliminar na relação dada em (IV-14), uma das variáveis de demanda, digamos a

variável  $d_i^{m_i}$  para cada  $i \in I$ , isto é:

$$\begin{aligned} \sum_{m \in M} \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i^m} C_k(h^*) (h_k - h_k^*) \geq \sum_{i \in I} \sum_{\substack{m \in M \\ m \neq m_i}} u_i^{m^*} (d_i^m - d_i^{m^*}) \\ + \sum_{i \in I} u_i^{m_i^*} (d_i^{m_i} - d_i^{m_i^*}). \end{aligned} \quad (\text{IV.16})$$

Por outro lado, usando convenientemente a expressão dada em (IV-15), temos que:

$$d_i^{m_i} - d_i^{m_i^*} = \sum_{\substack{m \in M \\ m \neq m_i}} (d_i^{m^*} - d_i^m), \quad (\text{IV.17})$$

Usando a expressão em (IV-17) conjuntamente com as expressões dadas em (IV-5) e (IV-7), temos que (IV-16) pode também ser escrito na forma:

$$c(f^*)^t (f - f^*) \geq \sum_{i \in I} \sum_{\substack{m \in M \\ m \neq m_i}} (u_i^{m^*} - u_i^{m_i^*}) (d_i^m - d_i^{m^*}). \quad (\text{IV.18})$$

Suponha agora que a função de escolha modal, dependendo dos custos de viagens para os distintos modos de transporte, seja dada por:

$$d_i = \bar{d}_i G_i(w), \quad i \in I \quad (\text{IV.19.1})$$

onde

$$w_i^m = u_i^m - u_i^{m_i}, \quad m \neq m_i, \quad m \in M. \quad (\text{IV.19.2})$$

Se  $G(w)$  é inversível, a inversa existe e é dada por  $W(d)$ , isto é,  $w_i = W_i(d)$ . Então (IV-18) pode ser escrito pelo seguinte problema de inequações variacionais:

$$c(f^*)^t (f - f^*) - \sum_{i \in I} \sum_{\substack{m \in M \\ m \neq m_i}} W_i^m(d^*) (d_i^m - d_i^{m^*}) \geq 0 \quad (\text{IV.20})$$

para todo  $(f, d) \in \Omega$ , onde

$$\Omega = \{ (f, d) / f \in F(d), \sum_{m \in M} d_i^m = \bar{d}_i, i \in I \}, \quad e$$

$$F(d) = \{ f / \sum_{k \in K_i^m} h_k = d_i^m, h_k \geq 0, \forall k \text{ e } f_a^m = \sum_{i \in I} \sum_{k \in K_i^m} \delta_{ak} h_k, a \in A \}$$

Observe-se agora que para o caso de dois modos de transporte e  $m_i = 2$ , temos que a inequação variacional (IV-20) reduz-se à expressão (IV-13) obtida por FLORIAN e SPIESS (24).

Entre as funções de escolha modal, uma frequentemente usada e que possua inversa, é dada pela seguinte função do modelo *logit*:

$$d_i^m = \frac{\bar{d}_i e^{-\beta u_i^m}}{\sum_{k \in M} e^{-\beta u_i^k}}, \quad m \in M, \quad i \in I, \quad (\text{IV.21})$$

onde  $\beta$  é um parâmetro positivo.

Usando (IV-19.2) e para  $m \neq m_i$ , temos que (IV-21) pode ser escrito como:

$$d_i^m = \frac{\bar{d}_i e^{-\beta(u_i^m - u_i^{m_i})}}{1 + \sum_{\substack{k \in M \\ k \neq m_i}} e^{-\beta(u_i^k - u_i^{m_i})}} = \frac{\bar{d}_i e^{-\beta w_i^m}}{1 + \sum_{\substack{k \in M \\ k \neq m_i}} e^{-\beta w_i^k}}, \quad i \in I, m \in M$$

... (IV.22.1)

e para  $m = m_i$ ,

$$d_i^{m_i} = \bar{d}_i - \sum_{\substack{k \in M \\ k \neq m_i}} d_i^k = \frac{\bar{d}_i}{1 + \sum_{\substack{k \in M \\ k \neq m_i}} e^{-\beta w_i^k}} \quad (\text{IV.22.2})$$

Usando (IV-22.2), temos que (IV-22.1) pode também ser escrito como

$$d_i^m = d_i^{m_i} \cdot e^{-\beta w_i^m}, \quad m \neq m_i$$

e portanto

$$w_i^m = -\frac{1}{\beta} \ln \left[ \frac{d_i^m}{\bar{d}_i - \sum_{\substack{k \in M \\ k \neq m_i}} d_i^k} \right], \quad m \in M, m \neq m_i, i \in I. \quad (\text{IV.23})$$

A expressão (IV-23) fornece  $W_i(\bar{d})$ , isto é, a função inversa

de  $G(w)$ .

#### IV. 4. FORMULAÇÃO DO MODELO BINÁRIO COMO UM PROGRAMA DE OTIMIZAÇÃO

Considere-se agora o caso para dois modos de transporte onde a matriz Jacobiana da função de custo  $c(\cdot)$  seja simétrica. Usando o mesmo argumento dado na seção (II-5) de que a resolução de um problema de inequações variacionais, sob algumas suposições, é equivalente a resolver um problema de otimização, temos que a solução do problema dado em (IV-13) pode ser obtida através da resolução do seguinte programa:

$$\min z(f, d^1) = \int_0^f c(x) dx - \sum_{i \in I} \int_0^{d_i^1} W_i(y) dy \quad (\text{IV.24})$$

sujeito a  $(f, d) \in \Omega$

Agora, para o caso separável com o custo de viagem na forma  $c_a^1(f_a) = c_a^1(f_a^1)$  e  $c_a^2(f_a) = c_a^2(f_a^2)$ , o problema de inequações variacionais (IV-13) reduz-se ao seguinte problema equivalente de otimização:

$$\min z = \sum_{a \in A} \int_0^{f_a^1} c_a^1(x) dx + \sum_{a \in A} \int_0^{f_a^2} c_a^2(x) dx - \sum_{i \in I} \int_0^{d_i^1} W_i(y) dy$$

... (IV.25)

sujeito a  $(f, d) \in \Omega$

O programa em (IV-25) é o mesmo obtido por ABDULAAL e LEBLANC (2).

Um modelo preliminar ao apresentado na expressão (IV-25) mas com certas características adicionais é desenvolvido no trabalho de FLORIAN e NGUYEN (22), que estendem o problema de alocação e distribuição de fluxo: geração e atração de viagens conhecidas, com uma escolha binária modal.

#### IV.5. ALGORITMOS DE SOLUÇÃO DO MODELO BINÁRIO

A formulação do modelo binário de alocação/escolha modal como um problema de inequações variacionais permite, em princípio, a aplicação dos distintos métodos de resolução mencionados na seção (III.4).

FLORIAN e SPIESS (24) por exemplo adaptam o método de diagonalização ou de relaxação para resolver o problema variacional (IV-13). O método para o caso de dois modos de transporte é dado como se segue:

Seja dado na iteração  $k$ , um fluxo viável  $(f^k, d^{1,k}) \in \Omega$ , onde  $f^k = (f^{1,k}, f^{2,k})$  e  $d^{1,k} = (d_i^{1,k})$ ,  $i \in I$ . Um novo problema de programação matemática é construído a partir da definição das seguintes funções de custos:

$$c_a^1(f_a) = c_a^1(f_a^1, f_a^{2,k}) \quad a \in A$$

$$c_a^2(f_a) = c_a^2(f_a^{1,k}, f_a^2) \quad a \in A$$

O novo problema (diagonalizado) consiste então em resolver o

seguinte programa matemático:

$$\min z = \sum_{a \in A} \int_0^{f_a^1} c_a(x, f_a^{2,k}) dx + \sum_{a \in A} \int_0^{f_a^2} c_a(f_a^{1,k}, y) dy - \sum_{i \in I} \int_0^{d_i^1} W_i(z) dz$$

... (IV.26)

sujeito a  $(f, d) \in \Omega$

O programa (IV-26) é equivalente ao problema (IV-25). Seja  $(f^{k+1}, d^{1,k+1})$  uma solução do problema (IV-26). O algoritmo de diagonalização termina se um critério de parada é satisfeito, digamos se  $(f^{k+1}, d^{1,k+1})$  está suficientemente próximo de  $(f^k, d^{1,k})$ . Caso contrário, fazer  $k = k+1$  e uma nova iteração é efetuada.

Por outro lado e devido à eficiência computacional mostrada para o caso do problema de equilíbrio com um modo de transporte, o algoritmo de aproximação linear será usado como um método alternativo de resolução para o problema binário.

#### IV. 5. 1. MÉTODO DE APROXIMAÇÃO LINEAR SIMPLICIAL

O algoritmo de aproximação linear proposto por PANG e YU (63), descrito na seção (III.4.1), pode ser estendido para resolver o problema de inequações variacionais dado em (IV-20), denotado por  $PIV(\Omega, c, W)$ , para o caso de dois modos de transporte.

Cada função  $c(\cdot)$  e  $W(\cdot)$  é separadamente aproximada linearmente. Seja conhecido na iteração  $k$ ,  $(f^k, d^{1,k}) \in \Omega$ , onde  $f^k = (f^{1,k}, f^{2,k})$  sendo  $f^{1,k}$  e  $f^{2,k}$  os vetores de fluxos do modo 1 e 2 respectiva



mente e  $d^{1,k}$  o vetor demanda para o modo 1. O vetor demanda para o modo 2,  $d^{2,k}$ , é dado por  $\bar{d} - d^{1,k}$ . Considere as funções  $c^k(\cdot)$  e  $W^k(\cdot)$  como as aproximações lineares de  $c(\cdot)$  e  $W(\cdot)$ , nos pontos  $f^k$  e  $d^{1,k}$  respectivamente, as quais estão expressas como

$$c^k(f) = c(f^k) + A(f^k) (f - f^k) \quad (\text{IV.27.1})$$

$$W^k(d) = W(d^{1,k}) + B(d^{1,k}) (d - d^{1,k}) \quad (\text{IV.27.2})$$

onde as matrizes  $A(f^k)$  e  $B(d^{1,k})$  são alguns dos operadores discutidos na seção (III.4.1).

Assim, a solução do subproblema de inequações variacionais linearizados  $\text{PIV}(\Omega, c^k, W^k)$  é equivalente a encontrar a solução do seguinte programa quadrático.

$$\min z(f,d) = (a^t f + \frac{1}{2} f^t C f) - (b^t d + \frac{1}{2} d^t D d) \quad (\text{IV.28})$$

$$\text{sujeito a} \quad (f, d) \in \Omega$$

onde

$$a = c(f^k) - A(f^k) f^k \quad (\text{IV.29.1})$$

$$C = A(f^k) \quad (\text{IV.29.2})$$

$$b = W(d^{1,k}) - B(d^{1,k}) d^{1,k} \quad (\text{IV.29.3})$$

$$D = B(d^{1,k}). \quad (\text{IV.29.4})$$

Para evitar resolver o programa quadrático (IV-28) sobre o conjunto  $\Omega$ , em seu lugar resolve-se sobre o conjunto  $\Omega^k$  o qual é a envoltória convexa de alguns pontos extremos de  $\Omega$ . Tal modificação dá lugar a um novo programa quadrático, em termos dos pesos de

cada ponto extremo de  $\Omega$ , com uma única restrição.

Para o caso em consideração, com dois modos de transporte, o conjunto  $\Omega^k$  contém como elementos os pontos  $(\tilde{f}^{1,k}, \tilde{f}^{2,k}, \tilde{d}^{1,k})$  de  $\Omega$ , tal que

$$\begin{aligned} & c^1(f^k)^t \tilde{f}^{1,k} + c^2(f^k)^t \tilde{f}^{2,k} - W(d^{1,k})^t \tilde{d}^{1,k} \\ = & \min_{(y^1, y^2, z) \in \Omega} c^1(f^k)^t y^1 + c^2(f^k)^t y^2 - W(d^{1,k})^t z \quad (\text{IV.30}) \end{aligned}$$

A solução de (IV-30) traz consigo a resolução de um problema do caminho mais curto.

Em efeito, para o par origem-destino  $j$ , sejam  $c_a^i(f^k)$  o custo de viagem ao usar o modo  $i$  associado ao arco  $a$ ;  $L_j^i$  o comprimento do caminho mais curto para o par origem-destino  $j$  usando o modo  $i$ , onde os custos associados sobre os arcos são  $\tilde{c}_a^i$ ;  $l_j^i$  o caminho mais curto encontrado para o par origem-destino  $j$  para o modo  $i$ . A solução do problema (II-30) é obtida como se segue:

Se  $L_j^1 - W_j(d_j^{1,k}) \leq L_j^2$ , então alocar no caminho  $l_j^1$  o valor  $\tilde{d}_j^1$ , isto é, viajar usando modo 1 através do seu caminho mais curto; nos demais caminhos, inclusive os que usam modo 2, alocar um fluxo nulo. Fazer  $\tilde{d}_j^{1,k} = \tilde{d}_j^1$ .

Se  $L_j^1 - W_j(d_j^{1,k}) > L_j^2$ , então alocar no caminho  $l_j^2$  o valor  $\tilde{d}_j^1$ , isto é, viajar usando modo 2 através do seu caminho mais curto; nos demais caminhos, inclusive os que usam modo 1,

alocar um fluxo nulo. Fazer  $\tilde{d}_j^{1,k} = 0$ .

A resolução do problema (IV-30) requer então encontrar o caminho mais curto para cada modo de transporte 1 e 2, e para cada par de origem-destino  $i$ ,  $i \in I$ .

O critério de parada do algoritmo de aproximação linear para o problema de inequações variacionais (IV-20) é dado por

$$c(f^k)^t (\tilde{f}^k - f^k) - W(d^{1,k})^t (\tilde{d}^{1,k} - d^{1,k}) \geq 0 \quad (\text{IV.31})$$

e neste caso,  $f^k = (f^{1,k}, f^{2,k})$  é o vetor solução binária de equilíbrio, e  $d^{1,k}$  o vetor solução de demanda para o modo 1, sendo portanto  $\tilde{d}^1 - d^{1,k}$  o vetor solução de demanda para o modo 2.

Caso a condição dada em (IV-31) não seja satisfeita, uma nova solução  $(f^{k+1}, d^{1,k+1})$  é procurada sobre o conjunto  $\Omega^{k+1}$  o qual inclui  $(\tilde{f}^k, \tilde{d}^{1,k})$ .

O algoritmo de aproximação linear estendido para o caso de dois modos de transporte, sendo  $f^k = (f^{1,k}, f^{2,k})$  e  $d^{1,k} = (d_i^{1,k})$ ,  $i \in I$ , pode ser dado como se segue:

**Passo 0.** Inicialização

Seja  $(f^0, d^{1,0}) \in \Omega$ .

Fazer  $\tilde{f}^0 = f^0$ ,  $\tilde{d}^{1,0} = d^{1,0}$ ,

$$\Omega^0 = \{ (\tilde{f}^0, \tilde{d}^{1,0}) \} \text{ e } k = 0$$

**Passo 1.** Subproblema linear

Seja  $(\tilde{f}^{k+1}, \tilde{d}^{1,k+1})$  a solução do seguinte subproblema linear (problema do caminho mais curto)

$$\min_{(y,z) \in \Omega} c(f^k)^t y - W(d^{1,k})^t z$$

*Passo 2. Critério de Parada*

Se  $c(f^k)^t (\tilde{f}^{k+1} - f^k) \geq W(d^{1,k})^t (\tilde{d}^{1,k+1} - d^{1,k})$ ,  
então  $(f^k, d^{1,k})$  é uma solução. Senão fazer

$$\Omega^{k+1} = \Omega^k \cup \{(\tilde{f}^{k+1}, \tilde{d}^{1,k+1})\}.$$

*Passo 3. Subproblema Quadrático*

Sejam  $P$  e  $Q$  as matrizes cujas colunas são os vetores  $\tilde{f}$  e  $\tilde{d}^1$  de  $\Omega^{k+1}$ , respectivamente.

Seja  $\alpha = (\alpha_i)$  a solução do seguinte subproblema quadrático:

$$\min (P^t a - Q^t b)^t \alpha + \frac{1}{2} \alpha^t (P^t C P - Q^t D Q) \alpha$$

sujeito a

$$\sum_i \alpha_i = 1$$

$$\alpha_i \geq 0$$

onde  $a$ ,  $b$ ,  $C$  e  $D$  são definidos em (IV-29)

Fazer

$$(f^{k+1}, d^{1,k+1}) = \sum_i \alpha_i (\tilde{f}^i, \tilde{d}^{1,i})$$

Eliminar todos os pontos extremos  $(\tilde{f}^i, \tilde{d}^{1,i})$  com peso  $\alpha_i = 0$  na expressão de  $(f^{k+1}, d^{1,k+1})$ . Atualizar  $\Omega^{k+1}$ .

Fazer  $k = k+1$ . Ir ao passo 1.

#### IV. 5. 2 EXEMPLO DE APLICAÇÃO PARA UMA REDE BINÁRIA

Um exemplo de aplicação do algoritmo de aproximação linear estendido para uma rede com dois modos de transporte é apresentado a seguir.

A rede em análise é definida por 20 nós, 28 arcos e 7 pares origem-destino, de acordo a rede da Figura 3.

O custo de viagem para cada modo de transporte associado a cada arco é linear e não simétrico, dado por

$$c_a^m(f) = u_a^m f_a^1 + v_a^m f_a^2 + w_a^m \quad m = 1, 2$$

onde  $f = (f_a)$  com  $f_a = (f_a^1, f_a^2)$  e  $u_a^m, v_a^m$  e  $w_a^m$  são constantes positivas.

A função de escolha modal de demanda para ambos modos de transporte a ser usada é dada por

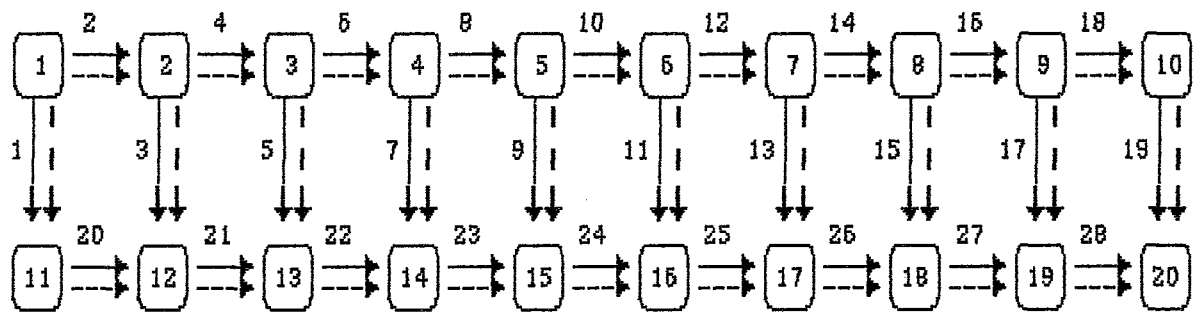
$$d_i^1 = \frac{\bar{d}_i e^{-\beta u_i^1}}{e^{-\beta u_i^1} + e^{-\beta u_i^2}}, \quad i \in I$$

$$d_i^2 = \frac{\bar{d}_i e^{-\beta u_i^2}}{e^{-\beta u_i^1} + e^{-\beta u_i^2}}, \quad i \in I$$

com  $d_i^1 + d_i^2 = \bar{d}_i$ .

A função inversa da função de escolha modal é dada pela relação (IV-23), onde  $m_i = 2, i \in I$ , isto é:

Figura 3. Rede com Custo Linear e não Simétrico para dois Modos de Transporte.



—————→ modo de transporte 1

- - - - -→ modo de transporte 2

$$\text{par (O/D)} \quad w_1 = (1,20) \quad \bar{d}_{w_1} = 50 ,$$

$$w_2 = (1,19) \quad \bar{d}_{w_2} = 60 ,$$

$$w_3 = (2,20) \quad \bar{d}_{w_3} = 100 ,$$

$$w_4 = (2,17) \quad \bar{d}_{w_4} = 100 ,$$

$$w_5 = (2,13) \quad \bar{d}_{w_5} = 100 ,$$

$$w_6 = (3,14) \quad \bar{d}_{w_6} = 50 ,$$

$$w_7 = (4,20) \quad \bar{d}_{w_7} = 100 .$$

$$w_i^1 = -\frac{1}{\beta} \ln \left[ \frac{d_i^1}{\bar{d}_i - d_i^1} \right]$$

A matriz usada na aproximação linear da função de custo  $c(\cdot)$  é a diagonal da matriz Jacobiana de  $c$ , isto é,  $E = [e_{i,j}^m]$ ,  $m=1,2$  tal que

$$e_{i,j}^m = \begin{cases} u_a & \text{se } i = j, m = 1 \\ v_a & \text{se } i = j, m = 2 \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

enquanto que a aproximação para a função  $W(\cdot)$ , a matriz usada é dada por  $B = [b_{i,j}]$ , tal que

$$b_{i,j} = \begin{cases} -\frac{1}{\beta} \frac{1}{p(1-p)\bar{d}_j}, & i = j, p = \frac{2}{3} \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O valor considerado de  $\beta$  é igual a 1.

Os resultados obtidos a partir da aplicação do algoritmo de aproximação linear são apresentados no Quadro 3.

Observando o Quadro 3, o método de linearização termina em 37 iterações com o qual 36 programas quadráticos são resolvidos. O número máximo de pontos extremos armazenados é igual a 16, sendo que cada ponto extremo  $x = (\tilde{f}, \tilde{d}^1)$  é de dimensão  $63=2 \times 28 + 7$ . Poderia ocorrer que o número de pontos extremos retidos fosse

## Quadro 3

Aplicação do Algoritmo de Aproximação Linear  
para a Rede da Figura 3

Iter $k$	$\min_{(f, d^1) \in \Omega} \left[ \begin{array}{c} c(f^k) \\ -W(d^1, k) \end{array} \right]^t \left[ \begin{array}{c} f - f^k \\ d^1 - d^1, k \end{array} \right]$	Nº Pontos Extremos
1	-3036475,000	1
2	-1419942,932	2
3	-621335,083	3
4	-385156,955	4
5	-414562,650	5
6	-174690,836	6
7	-110973,696	7
8	-124689,172	7
9	-97658,275	8
10	-76660,331	8
15	-23567,250	10
18	-8784,074	12
20	-1789,344	13
25	-257,820	15
30	-13,117	16
32	-4,013	16
35	-1,003	16
36	-0,494	16
37	-0,300	16



de tal magnitude que haveria alguma dificuldade quanto à capacidade de armazenamento de todos os pontos extremos. O tratamento de tal dificuldade é revisada a seguir.

#### IV. 5. 3 MODIFICAÇÃO DO MÉTODO DE APROXIMAÇÃO LINEAR SIMPLICIAL

No problema de equilíbrio com dois modos de transporte, duplica-se o tamanho do vetor de fluxo,  $f = (f^1, f^2)$ , e para muitos problemas práticos, armazenar na memória de um computador, todos os pontos extremos de  $\Omega^k$  poderia ser uma tarefa inviável. Se este fosse o caso e a fim de evitar alocar todos os pontos extremos, poder-se-ia restringir o número de pontos extremos retidos de  $\Omega^k$  a um certo valor pré-fixado. Este procedimento é efetuado por HEARN et alii (39) para problemas de programação não linear com restrições lineares.

No procedimento restrito, quando o número de pontos extremos retidos em  $\Omega^k$  é estipulado por um valor  $r$ , o novo ponto extremo que entra  $(\bar{f}^{k+1}, \bar{d}^{1,k+1})$ , encontrado no passo 2 do algoritmo de aproximação linear anterior, substitui aquele ponto extremo que tenha peso mínimo  $\alpha_i$  na expressão da solução (encontrada na iteração precedente) aproximada dada como uma combinação convexa dos pontos extremos retidos.

O algoritmo modificado de aproximação linear e para o caso de dois modos de transporte pode ser apresentado da seguinte maneira:

*Passo 0. Inicialização*

Seja  $(f^0, d^{1,0}) \in \Omega$  com  $f^0 = (f^{1,0}, f^{2,0})$

Fazer  $\tilde{f}^0 = f^0$ ,  $\tilde{d}^{1,0} = d^{1,0}$ .

Fazer  $\Omega_x^0 = \{(f^0, d^{1,0})\}$ ,  $\Omega^0 = \emptyset$ ,  $k = 0$

*Passo 1. Subproblema Linear*

Seja  $(\tilde{f}^{k+1}, \tilde{d}^{1,k+1})$  a solução do subproblema linear

$$\min_{(y,z) \in \Omega} c(f^k)^t y - W(d^{1,k})^t z$$

*Passo 2. Critério de Parada*

Se  $c(f^k)^t (\tilde{f}^{k+1} - f^k) \geq W(d^{1,k})^t (\tilde{d}^{1,k+1} - d^{1,k})$ ,

então  $(f^k, d^{1,k})$  é uma solução. Senão realizar

(i) Se  $|\Omega^k| < r$ , fazer  $\Omega^{k+1} = \Omega^k \cup \{(\tilde{f}^{k+1}, \tilde{d}^{1,k+1})\}$   
e  $\Omega_x^{k+1} = \Omega_x^k$ .

(ii) Se  $|\Omega^k| = r$ , então  $(\tilde{f}^{k+1}, \tilde{d}^{1,k+1})$  substitui um elemento de  $\Omega^k$ , o qual tenha um peso mínimo  $\alpha_s$  na expressão de  $(f^k, d^{1,k})$  dada como uma combinação convexa de  $\Gamma^k$ . Obter assim  $\Omega^{k+1}$  dado por

$$\Omega^{k+1} = \Omega^k - \{(\tilde{f}^s, \tilde{d}^{1,s})\} \cup \{(\tilde{f}^{k+1}, \tilde{d}^{1,k+1})\}$$

Fazer  $\Omega_x^{k+1} = \{(f^k, d^{1,k})\}$ .

Definir  $\Gamma^{k+1} = \Omega^{k+1} \cup \Omega_x^{k+1}$ .

### Passo 3. Subproblema Quadrático

Sejam  $P$  e  $Q$  as matrizes cujas colunas são os vetores  $\tilde{f}$  e  $\tilde{d}^1 \in \Omega^{k+1}$ , respectivamente.

Seja  $\alpha = (\alpha_i)$  a solução do seguinte subproblema quadrático:

$$\min (P^t a - Q^t b)^t \alpha + \frac{1}{2} \alpha^t (P^t C P - Q^t D Q) \alpha$$

sujeito a

$$\sum_i \alpha_i = 1$$

$$\alpha_i \geq 0.$$

$$\text{Fazer } (f^{k+1}, d^{1,k+1}) = \sum_i \alpha_i z^i$$

onde  $z^i \in \Gamma^{k+1}$ .

Eliminar todos os pontos extremos  $z^i$  com peso  $\alpha_i = 0$  na expressão de  $(f^{k+1}, d^{1,k+1})$ . Atualizar  $\Omega^{k+1}$  e  $\Omega_x^{k+1}$ . Fazer  $k = k+1$ . Ir ao passo 1.

A rede da Figura 3 é novamente analisada usando o método modificado de aproximação linear. O número máximo de pontos extremos retidos no conjunto  $\Omega^k$  é fixado em  $r = 11$ . Os resultados obtidos são apresentados no Quadro 4.

Do Quadro 4 pode-se observar que o algoritmo modificado de

aproximação linear termina em 45 iterações, com o valor -5,771, portanto requer-se a resolução de 44 programas quadráticos. O algoritmo modificado requer um maior número de iterações a ser desenvolvidos em comparação ao algoritmo original simples, que poderia terminar em 32 iterações com o valor -4,013, ver segunda coluna no quadro 3, mas em compensação resolve-se programas quadráticos cujo número de variáveis é no máximo de 12, cada variável corresponde a cada um dos 11 vetores retidos em  $\Omega^k$  mais o vetor retido em  $\Omega_x^k$ , enquanto que, no algoritmo original simples o número máximo de variáveis do programa quadrático é de 16.

## Quadro 4

Aplicação do Algoritmo Modificado de Aproximação

Linear para a Rede da Figura 3

Iter k	$\min_{(f,d^1) \in \Omega} \begin{bmatrix} c(f^k) \\ -W(d^1,k) \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} f-f^k \\ d^1-d^1,k \end{bmatrix}$	Nº Pontos Extremos
1-18	igual ao Quadro 3	igual Qdro 3
19	-2788,436	12
20	-2718,248	11
25	-1447,290	12
30	-322,773	12
32	-355,502	12
35	-247,753	12
40	-34,893	12
45	-5,771	12

## CAPÍTULO V

### CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS

Na primeira parte deste trabalho, apresentou-se um estudo de alguns modelos de equilíbrio e técnicas de alocação de viagens em redes com um só modo de transporte. Posteriormente, realizou-se uma extensão de um algoritmo - de aproximação linear simplicial - que pudesse ser aplicado a redes de razoável porte, com dois modos de transporte.

Quando a função de custo de viagem em um arco depende não só do fluxo nesse arco, como também do fluxo nos demais arcos, e sendo a matriz Jacobiana da função de custo não simétrica, o problema de equilíbrio de tráfego é formulado como um problema de complementaridade não linear, ou equivalentemente como um problema de inequações variacionais. Para o caso mais simples - quando o custo de viagem em um arco só depende do fluxo nesse arco ou sob a condição de simetria do Jacobiano - o problema de equilíbrio é formulado como um problema de otimização cuja solução é obtida seja usando um método de aproximação linear ou uma variante deste.

Para a resolução do problema de inequações variacionais, e sob a suposição de monotonicidade, que assegure a existência da solução, destacamos dois algoritmos: o método de aproximação linear de decomposição simplicial e o método de plano de corte. Ambos os métodos tem em comum a característica de armazenarem pontos extremos do conjunto em consideração, definido pelas restrições de conservação de fluxo na rede.

No método linearizado, e sob certas condições, a resolução do problema variacional se reduz à resolução de uma sequência de programas quadráticos com uma única restrição, definida sobre a representação simplicial dos pontos extremos do conjunto considerado. A solução de cada programa quadrático é encontrada através da aplicação do algoritmo de restrições ativas. O segundo método, de plano de corte, dá lugar a uma sequência de programas lineares resolvidos por meio da aplicação do princípio de decomposição de Dantzig e Wolfe. Nos exemplos de aplicação, observou-se que o número de iterações necessárias para convergir à solução pelo método linearizado é menor que pelo método de plano de corte. No entanto este último requer, em cada iteração, a resolução de programas lineares simples, enquanto que o primeiro método requer maior esforço computacional para resolver o respectivo programa quadrático.

Há de mencionar-se que a matriz usada no método linearizado, é a diagonal do Jacobiano da função de custo de viagem, embora nem sempre satisfazendo as condições de convergência. Poder-se-ia usar em seu lugar uma matriz simétrica definida positiva com a esperança de reduzir o número de iterações. No entanto isso acarretaria um aumento do esforço computacional por iteração, bem como do espaço de armazenamento requerido.

Para o caso de uma rede com mais de um modo de transporte e dada uma função de escolha modal, o problema de equilíbrio é formulado como um problema de inequações variacionais. Para a resolução de tal problema variacional, propomos uma extensão do algoritmo de aproximação linear de decomposição simplicial. Como cada ponto extremo considera o vetor de fluxo para cada modo de transporte além do vetor de demanda, encontrados através do algorit

mo do caminho mais curto, para problemas práticos de razoável porte, armazenar todos estes pontos extremos na memória de um computador poderia ser tarefa inviável. Para evitar esta situação, o método linearizado simplicial é modificado de modo a restringir o número de pontos extremos retidos a um valor pré-fixado. Com isso o número de iterações, para resolver o problema variacional pode aumentar, porém cada programa quadrático será de menor porte, tornando o método linearizado restringido uma alternativa de resolução para redes de razoável porte.

Varios aspectos precisam ainda ser melhor investigados, do ponto de vista teórico, como a relaxação da suposição de estrita monotonicidade e estabilidade do ponto de equilíbrio. Outro ponto a destacar é a possibilidade de aplicação de alguns dos algoritmos aqui mencionados a problemas de equilíbrio espacial de preços e, na sua forma geral, integrados a uma rede com congestionamento.



## ANEXO I

## MONOTONICIDADE DE UMA FUNÇÃO

Seja  $D \subset \mathbb{R}^n$  e  $F$  uma função,  $F: D \longrightarrow \mathbb{R}^n$ .

I.1.  $F$  é monótona em  $D$  se

$$(x - y)^t (F(x) - F(y)) \geq 0 \text{ para todo } x, y \in D.$$

I.2.  $F$  é estritamente monótona em  $D$  se

$$(x - y)^t (F(x) - F(y)) > 0 \text{ para todo } x, y \in D, x \neq y$$

I.3.  $F$  é fortemente monótona em  $D$  se existe um  $\gamma$  constante positivo tal que

$$(x - y)^t (F(x) - F(y)) \geq \gamma \|x - y\|^2 \text{ para todo } x, y \in D$$

Se a função  $F$  é continuamente diferenciável em  $D$  com matriz Jacobiana  $H$ , ORTEGA e RHEINBOLDT (59) apresentam as seguintes proposições:

I.4.  $F$  é monótona em  $D$  se e somente se a matriz  $H(x)$  é semidefinida positiva para todo  $x \in D$ .

I.5. Se  $H(x)$  é definida positiva para todo  $x \in D$ , então  $F$  é estritamente monótona em  $D$ .

I.6.  $F$  é fortemente monótona em  $D$  se e somente se existe uma constante positiva  $\gamma$  tal que

$$h^t H(x) h \geq \gamma h^t h \text{ para todo } x \in D, h \in \mathbb{R}^n.$$

## ANEXO II

## PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA

Considere o problema de encontrar a solução do seguinte programa quadrático definido por

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} q(x) = \frac{1}{2} x^t G x + c^t x \quad (2.1.1)$$

$$\text{sujeito a } A^t x \geq b \quad (2.1.2)$$

onde  $G$  é uma matriz  $n \times n$  constante simétrica,  $c$  é um vetor em  $\mathbb{R}^n$ ,  $A^t$  é uma matriz  $m \times n$  e  $b$  é um vetor em  $\mathbb{R}^m$ . O vetor gradiente de  $q(x)$  é dado por  $g(x) = Gx + c$ .

O ponto  $\hat{x}$  é viável se satisfaz as restrições (2.1.2). O conjunto de todos os pontos viáveis, denominado região viável, forma um conjunto convexo.

Uma restrição  $j$  é definida como ativa em  $x$  se  $a_j^t x = b_j$ .

As condições necessárias e suficientes para um ponto  $\hat{x}$  seja solução única ao problema de programação quadrática (2.1), caso  $G$  seja uma matriz definida positiva, são como se segue:

II.1. O ponto  $\hat{x}$  seja viável.

II.2. Se  $\hat{A}^t$  é uma matriz  $t \times n$  de restrições ativas em  $\hat{x}$ , então existe um vetor  $t$ -dimensional  $\lambda$  tal que

$$\hat{A} \lambda = g(\hat{x}) = G \hat{x} + c \quad (2.2)$$

Os elementos de  $\lambda$  são conhecidos como os multiplicadores de Lagrange.

II.3. Os multiplicadores de Lagrange são todos positivos.

Seja  $\hat{Z}$  uma matriz  $n \times (n-t)$  tal que  $\hat{A}^t \hat{Z} = 0$ . A condição (II.2) pode também ser escrito equivalentemente como

$$\text{II.4.} \quad \hat{Z}^t g(\hat{x}) = 0 \quad (2.3)$$

Pontos que satisfazem a condição (II.4) são definidos como pontos estacionários, e  $\hat{Z}^t g(\hat{x})$  é considerada como a gradiente projetada em  $\hat{x}$ .

### Método de Solução

Seja  $x^k$  qualquer ponto viável com a correspondente matriz de restrições ativas  $A_k^t$  de ordem  $t_k \times n$  e o vetor respectivo  $b^k$  de dimensão  $t_k$ , de elementos de  $b$ .

Requer-se encontrar um vetor de direção de busca  $p^k$ , de dimensão  $n$ , tal que  $x^k + p^k$  seja o mínimo de  $q(x)$  sujeito às condições  $A_k^t x = b^k$ .

Substituindo  $x^k + p$  em (2.1.1), obtém-se o seguinte subproblema quadrático para  $p^k$

$$\min \quad \frac{1}{2} p^t G p + p^t (G x^k + c) \quad (2.4.1)$$

$$\text{sujeito a} \quad A_k^t p = 0 \quad (2.4.2)$$

Qualquer vetor  $p$  satisfazendo as restrições (2.4.2) pode ser escrito na forma  $p = Z_k v$  onde  $Z_k$  é uma matriz  $n \times (n-t_k)$  ortogonal à matriz de restrições ativas, i.e.,  $A_k^t Z_k = 0$ .

Reescrevendo o programa quadrático (2.4) em termos de  $v$ ,

obtêm-se o seguinte problema irrestrito de minimização

$$\min_{v \in \mathbb{R}^{n-t_k}} \frac{1}{2} v^t (Z_k^t G Z_k) v + v^t Z_k^t (G x^k + c) \quad (2.5)$$

A solução  $\tilde{v}^k$  de (2.5) pode ser obtida a partir da resolução do seguinte sistema de equações

$$(Z_k^t G Z_k) \tilde{v}^k = -Z_k^t (G x^k + c) \quad (2.6)$$

GILL e MURRAY (33) observam que um método eficiente de resolução para o sistema (2.6) é realizar a fatorização

$$Z_k^t G Z_k = L_k D_k L_k^t \quad (2.7)$$

onde  $L_k$  é uma matriz  $(n-t_k) \times (n-t_k)$  triangular inferior e  $D_k$  uma matriz diagonal.

Portanto, a solução do subprograma quadrático (2.4) é dada por

$$p^k = Z_k \tilde{v}^k \quad (2.8)$$

Define-se  $\tilde{G}_k = Z_k^t G Z_k$  e  $\tilde{g}^k = Z_k^t (G x^k + c)$  como a matriz Hessiano projetada e o vetor gradiente projetado respectivamente.

Uma vez que a direção de busca  $p^k$  é obtida através de (2.8), pode ocorrer que o ponto  $x^k + p^k$  viole algumas restrições inativas. Neste caso, um comprimento de passo  $\alpha_k$  deve ser escolhido de tal modo de  $x^k + \alpha_k p^k$  seja viável. A restrição que é satisfeita em  $x^k + \alpha_k p^k$  deve ser incorporada ao conjunto ativo na seguinte iteração, para definir a respectiva matriz  $A_{k+1}^t$  conjuntamente com a

matriz  $Z_{k+1}$ .

Considere agora que a matriz  $A_k$  seja fatorizada na seguinte forma

$$Q_k A_k = \begin{bmatrix} R_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

onde  $R_k$  é uma matriz  $t_k \times t_k$  triangular superior e  $Q_k$  é uma matriz ortogonal  $n \times n$ , i.e.,  $Q_k Q_k^t = I$ .

Sejam as linhas da matriz  $Q_k$  particionada na forma

$$Q_k = \begin{bmatrix} Q_{k,1} \\ Q_{k,2} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

onde  $Q_{k,1}$  é uma matriz  $t_k \times n$  e  $Q_{k,2}$  é uma matriz  $(n-t_k) \times n$ .

Da equação dada em (2.2), a solução para os multiplicadores de Lagrange em  $x^{k+1}$  pode ser obtida a partir de

$$\lambda = [A_k^t \ A_k]^{-1} A_k^t g(x^{k+1}) = A_k^+ g(x^{k+1}) \quad (2.11)$$

onde  $A_k^+ = [A_k^t \ A_k]^{-1} A_k^t$  é conhecida como a matriz de Penrose.

Pode ser provado que  $A_k^+ = R_k^{-1} Q_{k,1}$ , o qual permite calcular os multiplicadores de Lagrange em forma eficiente.

A fatorização (2.9) permite também calcular a matriz  $Z_k$ , já que

$$A_k^t Q_{k,2}^t = \begin{bmatrix} R_k^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_{k,1} \\ Q_{k,2} \end{bmatrix} Q_{k,2}^t = \begin{bmatrix} R_k^t & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-t_k} \end{bmatrix} = 0 \quad (2.12)$$

Deste modo, uma forma de obter a matriz  $Z_k$  tal que  $A_k^t Z_k = 0$  consiste em escolher as últimas  $n-t_k$  linhas da matriz  $Q_k$  como as colunas da matriz  $Z_k$ .

Como as restrições são aumentadas ou eliminadas do conjunto de restrições ativas, GILL e MURRAY (33) modificam as fatorizações  $LDL^t$  e QR de tal modo que não sejam realizadas novamente tais fatorizações na seguinte iteração.

### Algoritmo para o Problema de Programação Quadrática (GILL e MURRAY (33))

Suponha que seja conhecido um ponto viável  $x^0$ . Seja  $A_0^t$  a matriz de restrições ativas  $t_0 \times n$  com  $t_0 \leq n$ . Igualmente sejam  $g^0 = Gx^0 + c$ , conjuntamente com a transformação ortogonal

$$Q_0 A_0 = \begin{bmatrix} R_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \bar{G}_0 = Z_0^t G Z_0$$

onde  $Z_0$  é uma matriz cujas colunas são as  $n - t_0$  linhas de  $Q_0$ .

Na iteração  $k$ , fazer:

*Passo 1.* Se  $\| Z_k^t (Gx^k + c) \| > \epsilon$ , com  $\epsilon > 0$  suficientemente pequeno, ir ao passo 2. Caso contrário, calcular o vetor de multiplicadores de Lagrange  $\lambda$ ,

$$R_k \lambda = Q_{k,1} g^k$$

Se todos os multiplicadores de Lagrange são positivos, parar com  $x^k$  solução encontrada. Senão, remover a restrição  $a_s^t x = b_s$  do conjunto de restrições ativas cuja correspondente  $\lambda_s$  seja o multiplicador de Lagrange mais negativo. Ir ao passo 6.

*Passo 2.* Resolver o sistema de equações:

$$(Z_k^t G Z_k) p_A^k = -Z_k^t (G x^k + c)$$

usando a fatorização  $LDL^t$ .

*Passo 3.* Encontrar a direção de busca  $p^k$

$$p^k = Z_k p_A^k$$

*Passo 4.* Calcular  $\Theta$ , a distância mais próxima às restrições inativas

$$\Theta = \min \left\{ \frac{b_j - a_j^t x^k}{a_j^t p^k} : a_j^t p^k < 0 \right\}$$

Seja  $a_r^t x = b_r$  uma das restrições inativas atingida pelo vetor  $p^k$ . Colocar  $\alpha_k = \min \{ \Theta, 1 \}$ ,  $x^{k+1} = x^k + \alpha_k p^k$  e  $g^{k+1} = G x^{k+1} + c$ .

*Passo 5.* Se  $\alpha_k = \Theta$ , definir  $A_{k+1}$  a qual inclui a restrição  $a_r^t x = b_r$  ao conjunto de restrições ativas.

*Passo 6.* Modificar a fatorização ortogonal do conjunto de restri

ções ativas,

$$Q_{k+1} A_{k+1} = \begin{bmatrix} R_{k+1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

e formar  $\bar{G}_{k+1} = Z_{k+1} G Z_{k+1}$ .

Fazer  $k = k+1$ .



## BIBLIOGRAFIA

- (1) AASHTIANI, H. Z. e MAGNANTI, T. L., "Equilibria on a Congested Transportation Network", SIAM Journal of Algebraic Discrete, vol. 2, n° 3, pp. 213 - 226, (1981).
- (2) ABDULAAL, M. e LEBLANC, L., "Methods for Combining Modal Splits and Equilibrium Assignment Models", Transportation Science, vol. 13, n° 4, pp. 292-314, (1979).
- (3) AUSLENDER, A., Optimisation Méthodes Numériques, Paris, Masson, 1976.
- (4) BECKMANN, M. J., MC GUIRE, C. B. e WINSTEN, C. B., Studies in the Economics of Transportation, Connecticut, Yale University Press, 1956.
- (5) BERTSEKAS, D. e GAFNI, E. M. , "Projection Methods for Variational Inequalities with Application to the Traffic Assignment Problem", Mathematical Programming Study, vol. 17, pp. 139 - 159, (1982).
- (6) DAFERMOS, S., "An Extended Traffic Assignment Model with Application to Two-Way Traffic", Transportation Science, vol 5, n° 4, pp. 336 - 389, (1971).
- (7) DAFERMOS, S., "Traffic Equilibrium and Variational Inequalities", Transportation Science, vol. 14, n° 1, pp. 42-54, (1980).
- (8) DAFERMOS, S., "Relaxation Algorithms for the General

Asymmetric Traffic Equilibrium Problem", Transportation Science, vol. 16, n<sup>o</sup> 2, pp. 231 - 240, (1982).

- (9) DAFERMOS, S., "The General Multimodal Network Equilibrium Problem with Elastic Demands", Networks, vol. 12, n<sup>o</sup> 1, pp. 57 - 72, (1982).
- (10) DAFERMOS, S., "An Iterative Scheme for Variational Inequalities", Mathematical Programming, vol. 16, n<sup>o</sup> 1, pp. 40-47, (1983).
- (11) DANTZIG, G. B., Linear Programming and Extensions, Princeton, New.Jersey., Princeton University Press, 1963.
- (12) DRISSI-KAITOUNI, O., "Problèmes D'Équilibre Spatial sur Réseau Général et Méthodes de Newton", Tesis Ph.D. a ser apresentada, Département D'Informatique et de Recherche Opérationnelle, Université de Montréal, (1987).
- (13) DUPUIS, C., "Le Problème de la Recherche D'Un Flot D'Équilibre sur un Réseau Routier", Publication n<sup>o</sup> 344, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, Décembre, (1983).
- (14) EVANS, S. P., "Derivation and Analysis of Some Models for Combining Trip Distribution and Assignment", Transportation Research, vol. 10, n<sup>o</sup> 1, pp. 37-57, (1976).
- (15) FISK, C. e NGUYEN, S., "Existence and Uniqueness Properties of an Asymmetric Two-Mode Equilibrium Model", Transportation Science, vol. 15, n<sup>o</sup> 4, pp. 318 - 328, (1981).
- (16) FISK, C. e NGUYEN, S., "Solutions Algorithms for Network

- Equilibrium Models with Asymmetric User Costs", Transportation Science, vol. 16, n° 3, pp. 361 - 381, (1982).
- (17) FISK, C. S. e BOYCE, D. E., "Alternative Variational Inequality Formulations of the Network Equilibrium-Travel Choice Problem", Transportation Science, vol. 17, n° 4, pp. 454 - 463, (1983).
- (18) FLORIAN, M., "An Improved Linear Approximation Algorithm for the Network Equilibrium (Packet Switching) Problem", *Publication n° 57*, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, (1977).
- (19) FLORIAN, M., "A Traffic Equilibrium Model of Travel by Car and Public Transit Modes", Transportation Science, vol. 11, n° 2, pp. 166 - 179, (1977).
- (20) FLORIAN, M., "Nonlinear Cost Network Models in Transportation Analysis", Mathematical Programming Study, vol. 26, pp. 167 - 196, (1986).
- (21) FLORIAN, M., e NGUYEN, S., "A Method for Computing Network Equilibrium with Elastic Demands", Transportation Science, vol 8, n°4, pp. 321-332, (1974).
- (22) FLORIAN, M., e NGUYEN, S., "A Combined Trip Distribution Modal Split and Trip Assignment Model", Transportation Research, vol. 12. n° 4, pp. 241-246, (1978).
- (23) FLORIAN, M. e SPIESS, H., "The Convergence of Diagonalization Algorithms for Asymmetric Network Equilibrium Problems", Transportation Research, vol. 16B, n° 6, pp. 477 - 483, (1982).

- (24) FLORIAN, M., e SPIESS, H., "On Binary Mode Choice/Assignment Models", Transportation Science, vol. 17, n<sup>o</sup> 1, pp. 32-47, (1983).
- (25) FLORIAN, M., NGUYEN, S. e FERLAND, J., "On the Combined Distribution-Assignment of Traffic", Transportation Science, vol. 9, n<sup>o</sup> 1, pp. 43-53, (1975).
- (26) FLORIAN, M., GUELAT, J., e SPIESS, H., "An Efficient Implementation of the PARTAN Variant of the Linear Approximation Method for the Network Equilibrium Problem", *Publication n<sup>o</sup> 538*, Département d'Informatique et de Recherche Opérationnelle, Université de Montréal, Juin, (1985).
- (27) FRANK, M. e WOLFE, P., "An Algorithm of Quadratic Programming", Naval Research Logistics Quarterly, vol. 3, pp. 95 - 110, (1956).
- (28) FRIESZ, T. L., "Transportation Network Equilibrium, Design and Aggregation: Key Developments and Research Opportunities", Transportation Research, vol. 19A, n<sup>o</sup> 5/6, pp. 413-427, (1985).
- (29) FRIESZ, T. L., TOBIN, R. L., SMITH, T. E. e HARKER, P.T., "A Nonlinear Complementarity Formulation and Solution Procedure for the General Derived Demand Network Equilibrium Problem", Journal of Regional Science, vol. 23, n<sup>o</sup>3, pp. 337-359, (1983).
- (30) FUKUSHIMA, M., "A Modified Frank-Wolfe Algorithm for Solving the Traffic Assignment Problem", Transportation Research, vol. 18B, n<sup>o</sup> 2, pp. 169-177, (1984).

- (31) FUKUSHIMA, M., "A Relaxed Projection Method for Variational Inequalities", Mathematical Programming, vol. 35, n° 1, pp. 58-70, (1986)
- (32) GALLO, G. e PALLOTINO, S., "Shortest Path Methods: A Unifying Approach", Mathematical Programming Study, vol. 26, pp. 38-64, (1986).
- (33) GILL, P. E., e MURRAY, W., "Linearly-Constrained Problems Including Linear and Quadratic Programming", JACOBS, D.A.H., Ed., The State of the Art in Numerical Analysis, London, Academic Press, pp. 313-363, (1977).
- (34) GILL, P.E., MURRAY, W., e WRIGHT, M.H., Practical Optimization, London, Academic Press Inc., (1981).
- (35) GLOWINSKI, R., LIONS, J.L. e TREMOLIERES, R., Numerical Analysis of Variational Inequalities, Amsterdam, North-Holland, 1981.
- (36) GUÉLAT, J., "Algorithmes pour le Probleme D'Affectation du Trafic D'Équilibre Avec Demandes Fixes Comparaisons", *Publication # 299*, Centre de Recherche Sur Les Transports, Université de Montréal, Mai, (1983).
- (37) HARTMAN, R. e STAMPACCHIA, G., "On Some Nonlinear Elliptic Differential Functional Equations", Acta Mathematica, vol. 115, pp. 271-310, (1966).
- (38) HEARN, D.W., e LAWPHONGPANICH, S. e NGUYEN, S., "Convex Programming Formulations of the Asymmetric Traffic Assignment Problem", Transportation Research, vol. 18B, n° 4/5, pp. 357-365, (1984).

- (39) HEARN, D.W., LAWPHONGPANICH, S. e VENTURA, J.A., "Finiteness in Restricted Simplicial Decomposition", Operations Research Letters, vol. 4, n<sup>o</sup> 3, pp.125-130, (1985).
- (40) HOHENBALKEN, B., "Simplicial Decomposition in Nonlinear Programming Algorithms", Mathematical Programming, vol. 13, n<sup>o</sup> 1, pp. 49-68, (1977)
- (41) HOLLOWAY, C.A., "An Extension of the Frank e Wolfe Method of Feasible Directions", Mathematical Programming, vol. 6, n<sup>o</sup> 1, pp. 14-27, (1974).
- (42) JOSEPHY, N.H., "Newton's Method for Generalized Equations", *Technical Report # 1965*, Mathematics Research Centre, University of Wisconsin, June, (1979).
- (43) KARAMARDIAN, S., "The Nonlinear Complementarity Problem with Applications, Part II", Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 4, n<sup>o</sup> 3, pp. 167-181, (1969).
- (44) KARAMARDIAN, S., "The Complementarity Problem", Mathematical Programming, vol. 2, n<sup>o</sup> 1, pp. 107-129, (1972).
- (45) KENNINGTON, J. L. e HELGASON, R.V., Algorithms for Network Programming, New York, John Wiley and Sons, 1980.
- (46) KINDERLEHRER, D. e STAMPACCHIA, G., An Introduction to Variational Inequalities and Applications, New York, Academic Press, 1980.
- (47) KIRSTEN, H. e TICHATSCHKE, R., "On a Method of Feasible

Directions for Solving Variational Inequalities", Optimization, vol. 16, n° 4, pp. 535-546, (1985).

- (48) LAWPHONGPANICH, S. e HEARN, D.W., "Simplicial Decomposition of the Asymmetric Traffic Assignment Problem", Transportation Research, vol. 18B, n° 2, pp. 123-133, (1984).
- (49) LEBLANC, L. e FARHANGIAN, K., "Efficient Algorithms for Solving Elastic Demand Traffic Assignment Problems and Mode Split-Assignment Problems", Transportation Science, vol. 15, n° 4, pp. 306-317, (1981).
- (50) LEBLANC, L.J., HELGASON, R.V. e BOYCE, D.E., "Improved Efficiency of the Frank-Wolfe Algorithm for Convex Network Programs", Transportation Science, vol. 19, n° 4, pp. 445-462, (1985).
- (51) LEMKE, C.E., "On complementary Pivot Theory", DANTZIG, G.B. e VEINOTT, A.F. Jr., Eds., Math. of the Decision Sciences, American Mathematical Society, (1968).
- (52) LUENBERGER, D., Introduction to Linear and Nonlinear Programming, Massachusetts, Addison-Wesley, 1984.
- (53) MARCOTTE, P., "A New Algorithm for Solving Variational Inequalities with Application to the Traffic Assignment Problem", Mathematical Programming, vol. 33, n° 3, pp. 339-351, (1985).
- (54) MARCOTTE, P. e DUSSAULT, J., "A Note on a Globally Convergent Newton Method for Solving Monotone Variational Inequalities", Operations Research Letters, vol. 6, n° 1, pp. 35-42, (1987).

- (55) NAGURNEY, A., "Comparative Tests of Multimodal Traffic Equilibrium Methods", Transportation Research, vol. 18B, n<sup>o</sup> 6, pp. 469-485, (1984).
- (56) NGUYEN, S., "An Algorithm for the Traffic Assignment Problem", Transportation Science, vol. 8, n<sup>o</sup> 3, pp. 203-216, (1974).
- (57) NGUYEN, S., "A Unified Approach to Equilibrium Methods for Traffic Assignment", FLORIAN, M., Ed., Traffic Equilibrium Methods, Springer-Verlag, pp. 148-182, (1976) .
- (58) NGUYEN, S. e DUPUIS, C., "An Efficient Method for Computing Traffic Equilibria in Networks with Asymmetric Transportation Costs", Transportation Science, vol. 18, n<sup>o</sup> 2, pp. 185-202, (1984)
- (59) ORTEGA, J.M. e RHEINBOLDT, W.C., Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables, New York, Academic Press, 1970.
- (60) PANG, J.S., "An Equivalence between two Algorithms for Quadratic Programming", Mathematical Programming, vol. 20, n<sup>o</sup> 2, pp. 152-165, (1981).
- (61) PANG, J.S., "Asymmetric Variational Inequality Problems over Product Sets: Applications and Iterative Methods", Mathematical Programming, vol. 31, n<sup>o</sup> 2, pp. 206-219, (1985).
- (62) PANG, J.S. e CHAN, D., "Iterative Methods for Variational and Complementarity Problems", Mathematical Programming, vol. 24, n<sup>o</sup> 3, pp. 284-313, (1982).



- (63) PANG, J.S. e YU, C.S., "Linearized Simplicial Decomposition Methods for Computing Traffic Equilibria on Networks", Networks, vol. 14, n° 3, pp. 427-438, (1984).
- (64) SACHER, R.S., "A Decomposition Algorithm for Quadratic Programming", Mathematical Programming, vol. 18, n° 1, pp. 16-30, (1980).
- (65) SHEFFI, Y., Urban Transportation Networks: Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods, New Jersey, Prentice-Hall, 1985.
- (66) SMITH, M.J., "The Existence, Uniqueness and Stability of Traffic Equilibria", Transportation Research, vol. 13B, n° 4, pp. 295-304, (1979).
- (67) SMITH, M.J., "An Algorithm for Solving Asymmetric Equilibrium Problems with a Continuous - Flow Function", Transportation Research, vol. 17B, n° 5, pp. 365-372, (1983).
- (68) VAN VLIET, D., "The Frank-Wolfe Algorithm for Equilibrium Traffic Assignment viewed as a Variational Inequality", Transportation Research, vol. 21B, n° 1, pp. 87-89, (1987).
- (69) WARDROP, J.G., "Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research", Proc. Inst. Civil Engineers, Part II, pp. 325-378, (1952).
- (70) WEINTRAUB, A., ORTIZ C. e GONZÁLES, J., "Accelerating Convergence of the Frank-Wolfe Algorithm", Transportation Research, vol. 19B, n° 2, pp. 113-122, (1985).
- (71) WOLFE, P., "Convergence Theory in Nonlinear Programming",

- ABADIE, J., Ed., Nonlinear and Integer Programming, Amsterdam: North-Holland, pp.1-36, (1970).
- (72) ZANGWILL, W.I., Nonlinear Programming: A Unified Approach, New Jersey: Prentice Hall Inc., 1969.
- (73) ZUBIETA, L., "Modelos D'Equilibre Spatial et Methodes de Resolution", Tese de Doutorado, Departamento D'Informatica et de Recherche Operationnelle, Université de Montreal, (1986).