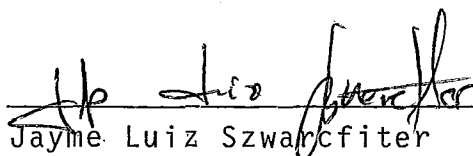


ORIENTAÇÕES EM GRAFOS CIRCULARES E SUAS APLICAÇÕES

Magali Maria de Araújo Barroso

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DE UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.) EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

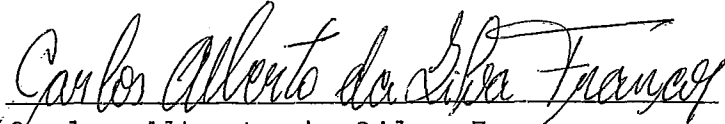


Jayme Luiz Szwarcfiter

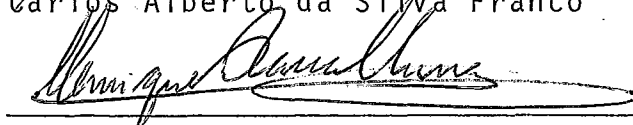
Presidente



Antônio Alberto Fernandes de Oliveira



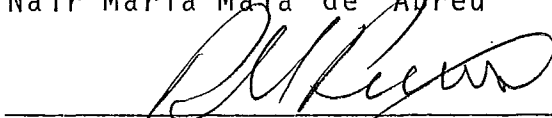
Carlos Alberto da Silva Franco



Henrique Pacca Loureiro Luna



Nair Maria Maia de Abreu



Ronaldo Cesar Marinho Persiano

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

MARÇO DE 1987

Dedico este trabalho

Ao Léo, meu marido e ao João Luís meu filho querido.

A todos da minha família de origem e em especial a meu pai cu
ja presença ainda sinto constante.

Aos meus amigos Marion Penna e Helvécio Botelho Pereira.

AGRADECIMENTOS

A todos que de alguma forma contribuíram para a conclusão deste trabalho, e, em particular:

Ao prof. Jayme Luiz Szwarcfiter que desde meu ingresso no Programa orientou-me com dedicação e segurança.

Ao meu marido e ao meu filho pelo apoio, incentivo e carinho que me dedicaram.

Aos profs. Antônio Alberto Fernandes de Oliveira e Paulo Oswaldo Boaventura com os quais trabalhei durante o curso. E em especial ao prof. Carlos Alberto da Silva Franco que além disso sugeriu-me o tema da tese.

Aos funcionários da Biblioteca do NCE e do IMPA pela colaboração durante a fase de pesquisa bibliográfica.

À Denise Schwartz Cupolillo pelo excelente trabalho de datilografia.

À Marisa Maria de Araújo Borgerth pela valiosa colaboração durante a redação do texto.

Aos professores: Nair Maria Maia de Abreu, Henrique Pacca Loureiro Luna e Ronaldo César Marinho Persiano que como participantes da banca examinadora colaboraram para o aperfeiçoamento deste trabalho.

Ao PICD por ter-me concedido suporte financeiro para a realização do curso.

Resumo da Tese Apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.).

ORIENTAÇÕES EM GRAFOS CIRCULARES E SUAS APLICAÇÕES

Magali Maria de Araújo Barroso

Março de 1987

Orientador: Jayme Luiz Szwarcfiter

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Um grafo circular é aquele gerado por um diagrama constituído por um círculo e um conjunto finito e não vazio de cordas. Cada uma das cordas é associada a um vértice do grafo e dois destes vértices definem uma aresta se, e somente se, as cordas a eles correspondentes se interceptam.

Neste trabalho identificamos um tipo de orientação que denominamos coberta. Provamos que todo grafo circular possui tal orientação e, além disso, ela pode ser obtida em tempo linear. Contudo, o problema de verificar se um grafo arbitrário admite, mostramos ser NP-completo. Usando a orientação coberta descrevemos um algoritmo $O(nm + n\alpha)$ para determinar todas as cliques maximais de grafos circulares, onde n , m e α são, respectivamente, o número de vértices, o de arestas e o de cliques maximais do grafo.

Construímos também um algoritmo $O(n.m)$ que obtém o número exato de cliques maximais de grafos circulares. Finalmente, descrevemos uma nova prova do teorema que estabelece o número máximo de cliques maximais dos referidos grafos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.).

CIRCLE GRAPHS ORIENTATIONS AND ITS APPLICATIONS

Magali Maria de Araújo Barroso

March, 1987

Chairman: Jayme Luiz Szwarcfiter

Department: Computation and Systems Engineering

A circle diagram consists of a circle C and a set of n chords. This diagram defines a graph G with n vertices where each vertex corresponds to a chord, and two vertices are adjacent if their corresponding chords intersect in C . Such a graph G is called a circle graph.

In this work we identify a type of orientation and we call it covered. To verify if a arbitrary graph admits a covered orientation is proved to be NP-complete. We show also that all circle graphs admit it and for them we can determine it in linear time. Using covered orientation we describe an $O(nm + n\alpha)$ algorithm to determine all maximal cliques of circle graphs, where n , m and α are the number of vertices, edges and maximal cliques, respectively. A $O(n.m)$ algorithm is devised for computing the exact number of maximal cliques of circle graphs. Finally, we describe a new proof for the maximum number of maximal cliques of circle graphs.

ÍNDICE

Capítulo I - Introdução	1
I.1. Preliminares	1
I.2. Conceitos Gerais da Teoria dos Grafos	4
Capítulo II - Grafos Circulares	14
II.1. Conceito	14
II.2. Sequência Circular	18
II.3. Grafos de Permutação	23
II.4. A Ordenação de um Conjunto N Segundo uma Permutação P e sua Relação com os Grafos Circulares ...	31
Capítulo III - Cliques Máximas em Grafos Circulares	47
III.1. Preliminares	47
III.2. Cliques Máximas em Grafos Circulares	49
III.2.1. Algoritmo de Gavril	49
III.2.2. Algoritmo de Buckingham	51
III.2.3. Algoritmo de Rotem e Urrutia	55
III.3. Cliques Máximas em Grafos Circulares Valorados ..	60
III.3.1. Introdução	60
III.3.2. Algoritmo de Buckingham	61
III.3.3. Algoritmo de Hsu	63
Capítulo IV - Orientação Coberta	66
IV.1. Conceitos e Notação	66
IV.2. Orientação Coberta em Grafos Circulares	71
IV.3. Orientação Coberta em um Grafo Qualquer	78

Capítulo V - Cliques Maximais de Grafos Circulares	82
V.1. Introdução	82
V.2. As Arestas de Cobertura Maximal de \vec{G} e as Cliques Maximais de G	83
V.3. Algoritmo para Determinar todas as Cliques Maximais de Grafos Circulares	86
V.4. O Número de Cliques Maximais de Grafos Circulares	91
V.5. Limite Superior para o Número de Cliques Maximais de Grafos Circulares	97
Conclusão	110
Referências Bibliográficas	115

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

I.1. PRELIMINARES

Basicamente, os grafos podem ser usados para representar situações que envolvem um conjunto de objetos e as relações entre eles. Por esta razão, a Teoria dos Grafos é aplicada na resolução de problemas de diversas áreas, tais como: Engenharia, Computação, Otimização, Química, Sociologia, etc. Neste trabalho dirigimos nosso estudo para uma classe especial de grafos, a dos grafos circulares.

Como os Grafos Intervalados e os Arco-Circulares, podemos definir os Grafos Circulares como um grafo de Interseção. Lembramos que um Grafo de Interseção de uma família F de conjuntos não vazios é obtido quando representamos cada conjunto de F por um vértice e fazemos a conexão de dois destes vértices por uma aresta se, e somente se, eles correspondem a conjuntos não disjuntos.

Um Grafo de Interseção de uma família F de intervalos em uma linha reta é denominado Intervalado e aquele cuja família F se constitui por arcos em um círculo é um grafo Arco-Circular. Enquanto que em um grafo circular, F é uma família de cordas em um círculo.

Num Grafo Intervalado Próprio nenhum intervalo contém propriamente qualquer outro. O conceito de um Grafo Arco-Circular Próprio é análogo. Tanto os Grafos Intervalados Próprios

prios quanto os Arco-Circulares Próprios constituem casos especiais dos Grafos Circulares.

Os Grafos Circulares servem como modelo de representação de uma placa contendo alguns dispositivos nas extremidades e as ligações existentes entre eles, como indica a figura (I.1.1).

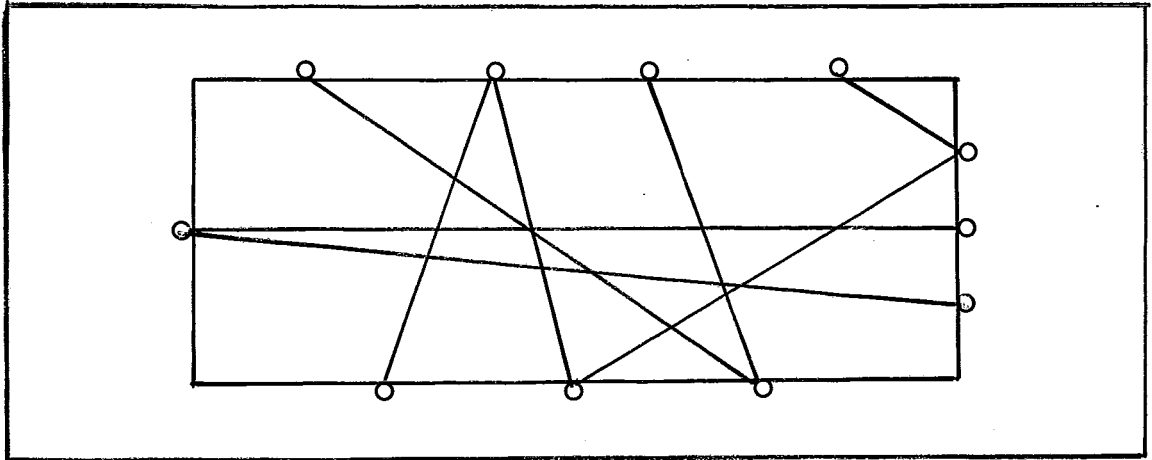


Figura I.1.1.

Esta placa pode ser usada para representar, por exemplo, uma rede de circuitos elétricos, de gás ou de água. Nestes casos, um problema a considerar é o da determinação do número mínimo de planos necessários para se construir a rede.

Foram EVEN e ITAI em (8) que primeiro apresentaram os grafos circulares para representar o processo de ordenação dos elementos de um conjunto N segundo uma permutação P , usando um sistema de pilhas em paralelo. Neste problema, surge a questão da obtenção do número mínimo de pilhas a serem utilizadas no sistema para que tal ordenação seja viável.

Os dois problemas apresentados podem ser vistos como um problema de Coloração dos grafos circulares associados às respectivas situações.

Alguns problemas que são NP-completos para a classe que congrega todos os grafos, tais como o do Conjunto Independen

dente Máximo, o da Clique Máxima e o do Ciclo Hamiltoniano, foram resolvidos polinomialmente para os Grafos Circulares. O Problema do Reconhecimento de Grafos Circulares, recentemente, foi inserido na classe P enquanto que o da Coloração na classe dos NP-Completos.

Procuramos desenvolver, neste trabalho, um algoritmo polinomial por clique para determinar todas as cliques máximas de grafos circulares. E, buscando atingir este objetivo, obtivemos novos resultados que foram agrupados nos capítulos IV e V. A seguir, detalharemos os assuntos tratados em cada capítulo.

O Capítulo I é a introdução do assunto. Nele expomos os grafos circulares como Grafos de Interseção e procuramos definir todos os conceitos gerais da Teoria dos Grafos que utilizamos.

O Capítulo II dedicamos especialmente aos Grafos Circulares. Como eles são gerados por diagramas ou sequências circulares, utilizamos as duas formas para representá-los. Estudamos os Grafos de Permutação por constituírem uma subclasse da classe dos Grafos Circulares. E ainda mostramos como obter um grafo circular a partir de um processo de ordenação dos elementos de um conjunto.

No Capítulo III expomos alguns dos algoritmos polinomiais existentes na literatura para a obtenção de cliques máximas de grafos circulares valorados e não valorados.

No Capítulo IV introduzimos o conceito de Orientação Coberta. Apresentamos alguns exemplos de Grafos Circulares e Não Circulares que a admitem e também mostramos a existência de grafos nos quais tal orientação é impossível de ser obtida.

Provamos que em todos os grafos circulares podemos obtê-la em tempo polinomial e que para um grafo arbitrário este problema é NP-completo.

No Capítulo V nos ocupamos das aplicações decorrentes do fato de os Grafos Circulares admitirem Orientação Coberta. Apresentamos um Algoritmo que determina todas as cliques maximais dos citados grafos e outro que fornece o número exato de tais cliques. A complexidade do primeiro algoritmo é $O(nm + n\alpha)$ e a do segundo é $O(nm)$, onde n , m e α são, respectivamente, o número de vértices, o de arestas e o de cliques maximais do grafo. Finalmente, mostramos que, ao empregar a orientação coberta, conseguimos obter limite superior para o número de cliques maximais de grafos circulares.

I.2. CONCEITOS GERAIS DA TEORIA DOS GRAFOS

Um grafo $G(V,E)$ é definido como sendo um conjunto V finito e não vazio de vértices e um conjunto E de arestas constituído por pares não ordenados de elementos distintos de V . Já num digrafo $D(V,E)$, os elementos do conjunto E de arestas são pares ordenados de elementos distintos de V . Denotamos, respectivamente, por n e m a cardinalidade dos conjuntos V e E . Assim, $|V| = n$ e $|E| = m$.

Dizemos que a aresta (v,w) de um grafo é definida pelos vértices v e w que são seus extremos. E se $(v,w) \in E$ então v e w são adjacentes. Caso contrário são independentes. Em um digrafo dizemos que a aresta (v,w) converge para w e diverge de v .

Um grafo é valorado se existe uma função associando cada um de seus vértices a um número denominado peso.

A lista de adjacência de um vértice v de um grafo $G(V,E)$ é denotada por $A(v)$ e se constitui dos vértices w , $w \in V$, tais que $(v,w) \in E$. Enquanto que o conjunto de vizinhos do mesmo vértice v , $\Gamma(v)$ é igual à união dos conjuntos $\{v\}$ e $A(v)$. Em um digrafo $D(V',E')$ como as arestas (v,w) e (w,v) são diferentes, distinguimos duas listas de adjacência, assim definidas:

$$A^+(v) = \{w \in V' / (v,w) \in E'\} \text{ e}$$

$$A^-(v) = \{w \in V' / (w,v) \in E'\} .$$

Os elementos de $A^+(v)$ são denominados sucessores de v , enquanto que os de $A^-(v)$ são os predecessores de v .

Na figura (I.2.1), encontramos a representação geométrica do grafo $G(V,E)$ e a do digrafo $D(V,E')$ que, em geral e em particular neste texto, são confundidas com o próprio grafo e com o próprio digrafo.

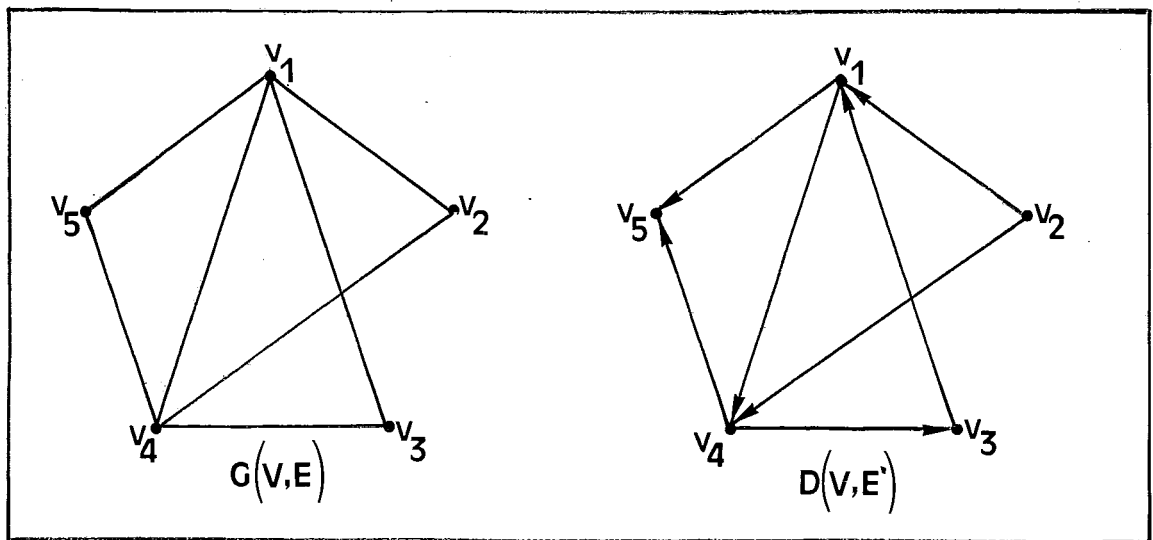


Figura I.2.1.

Ainda na mesma figura podemos observar que se retirarmos as orientações das arestas do digrafo $D(V, E')$ obtemos como resultado o grafo $G(V, E)$ e por esta razão ele é denominado o grafo subjacente do digrafo.

O grau de um vértice de um grafo é igual à cardinalidade da sua lista de adjacência. Assim em $G(V, E)$ como $A(v_1) = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$, o grau $(v_1) = 4$. Num digrafo, cada um de seus vértices possui duas listas de adjacência, logo eles terão dois tipos de grau. O grau de entrada, $\text{grau}^-(v) = |A^-(v)|$ e o grau de saída, $\text{grau}^+(v) = |A^+(v)|$. Assim em $D(V, E')$, $A^+(v_1) = \{v_4, v_5\}$ e $A^-(v_1) = \{v_2, v_3\}$; logo $\text{grau}^+(v_1) = \text{grau}^-(v_1) = 2$.

Uma fonte de um digrafo é um vértice cujo grau de entrada é nulo, enquanto que um sumidouro tem nulo seu grau de saída. No digrafo $D(V, E')$, v_2 é sua única fonte e v_5 seu sumidouro.

Uma consequência imediata dos últimos conceitos é que

$$\sum_{v \in V(G)} \text{grau}(v) = 2m \quad \text{e} \quad \sum_{v \in V(D)} \text{grau}^+(v) = \sum_{v \in V(D)} \text{grau}^-(v) = m.$$

Um subgrafo $G_1(V_1, E_1)$ de um grafo $G(V, E)$ é um grafo tal que $V_1 \subseteq V$ e $E_1 \subseteq E$. Se além disso, G_1 possuir toda aresta $(v, w) \in E$ tal que v e w estejam ambos em V_1 , então ele é um subgrafo de G induzido por V_1 e o denotamos por $G(V_1)$.

A figura (I.2.2) mostra dois subgrafos de $G(V, E)$ da figura anterior: o $G_1(V_1, E_1)$ e o $G(V_1)$.

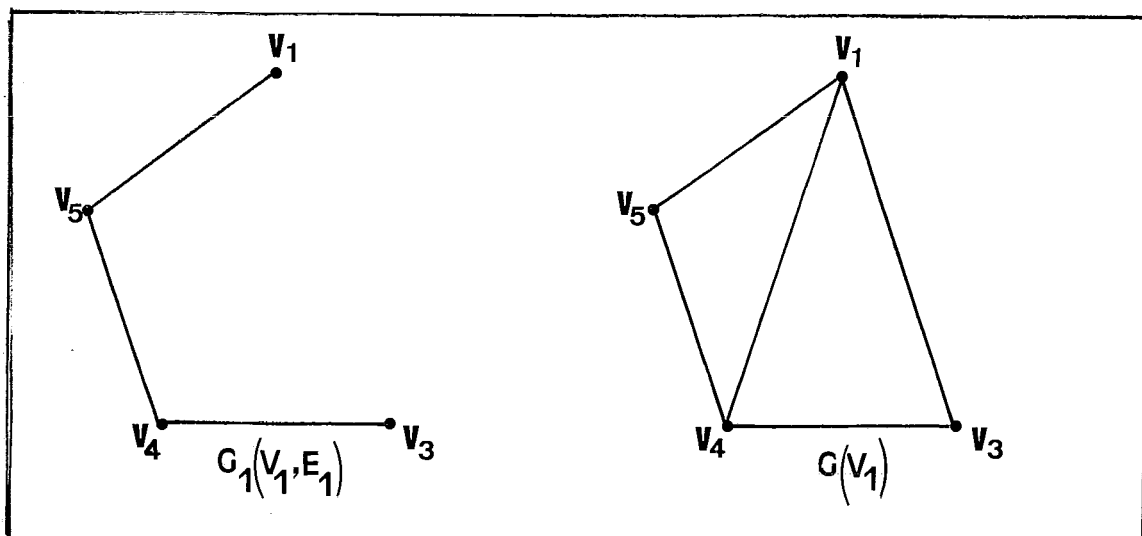


Figura I.2.2.

Os conceitos de subdigrafo e subdigrafo induzido são análogos aos anteriores.

Uma sequência $P = \langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ de vértices, tal que (v_i, v_{i+1}) é uma aresta do grafo ou digrafo, onde $1 \leq i < k$ é denominado caminho de v_1 a v_k e seu comprimento é $k-1$. P' é um subcaminho de P se, e somente se, todos os seus vértices pertencerem a P e ocorrerem na mesma ordem. Um grafo é conexo se existe um caminho entre cada par de seus vértices. Caso contrário, ele é desconexo. Denominam-se componentes conexos de um grafo seus subgrafos maximais que sejam conexos.

Um ciclo é um caminho $\langle v_1, v_2, \dots, v_k, v_{k+1} \rangle$ sendo $v_{k+1} = v_1$ e $k \geq 3$. Neste trabalho interessam-nos apenas os caminhos constituídos por vértices distintos. Nos ciclos também excetuando, evidentemente, a identidade entre v_1 e v_{k+1} . Um grafo e um digrafo dizem-se acíclicos se não possuem ciclos. Num digrafo acíclico existe, pelo menos, uma fonte e um sumidouro. No grafo $G(V, E)$ da figura (I.2.1) $\langle v_2, v_4, v_3, v_1, v_5 \rangle$ é um caminho de comprimento 4, enquanto que $\langle v_1, v_4, v_3, v_1 \rangle$ é um ciclo de comprimento 3 que, usualmente, é chamado de triângulo.

lo.: Os grafos nos quais cada ciclo de comprimento maior do que 3 possui uma aresta não pertencente ao ciclo definida por dois de seus vértices são denominados cordais ou triangularizados.

O digrafo $D(V, E')$ da figura (I.2.1) apesar de possuir uma única fonte e um único sumidouro não é acíclico. Ele possui o ciclo $\langle v_1, v_4, v_3, v_1 \rangle$. Já os digrafos D_1 e D_2 da figura (I.2.3) são acíclicos.

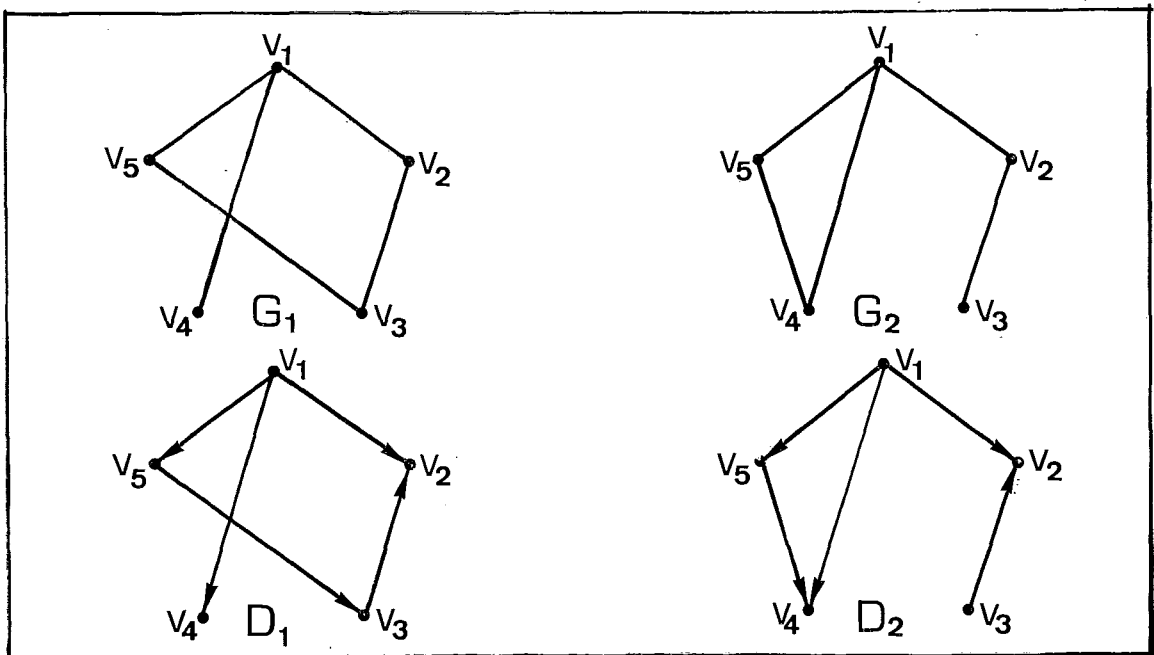


Figura I.2.3.

Nos digrafos acíclicos, dois vértices v e w que compartilham de um mesmo caminho, recebem uma denominação especial que identifica as posições ocupadas por eles no referido caminho. Se o caminho é de v para w , então dizemos que v é ancestral de w e w descendente de v . Como o caminho de comprimento zero se constitui apenas por um único vértice, todo vértice é seu descendente e também seu ancestral. Sendo assim, se for importante assinalar que v e w são vértices distintos, a denominação a eles atribuída vem seguida da palavra próprio. No digrafo D_1 da figura (I.2.3), v_1, v_5 e v_3 são ancestrais

próprios de v_2 que, por sua vez, é descendente próprio dos citados vértices.

Podemos atribuir orientações às arestas de um grafo e obter um digrafo. Na figura (I.2.3) encontramos os grafos G_1 e G_2 e duas orientações acíclicas deles que resultaram nos digrafos acíclicos D_1 e D_2 . Dizemos que um digrafo acíclico é transitivo se a presença das arestas (v,w) e (w,u) acarreta a presença da aresta (v,u) . E um digrafo acíclico é anti-transitivo se a presença das arestas (v,w) e (w,u) implica na ausência da aresta (v,u) . O digrafo D_2 da figura (I.2.3) é transitivo pois ele possui apenas o caminho $\langle v_1, v_5, v_4 \rangle$ de comprimento 2 e como podemos observar (v_1, v_4) é uma de suas arestas. Portanto, a orientação imposta às arestas de G_2 para obter D_2 é uma orientação transitiva. Porém, o digrafo D_1 é anti-transitivo e ele resulta de uma orientação anti-transitiva de G_1 , já que os caminhos $\langle v_1, v_5, v_3 \rangle$ e $\langle v_5, v_3, v_2 \rangle$ são os únicos de comprimento 2 e as arestas (v_1, v_3) e (v_5, v_2) não pertencem a ele.

Um grafo é de comparabilidade se ele admite uma orientação transitiva. E, naturalmente, um grafo é de anti-comparabilidade se admite uma orientação anti-transitiva.

Se $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$ é um caminho de um digrafo acíclico, qualquer aresta (v_i, v_j) definida pelos vértices do caminho e que não pertence a ele é denominada aresta implícita por transitividade. Denotamos, respectivamente, por $D+(v,w)$ e $D-(v,w)$ o digrafo resultante pela inclusão e exclusão da aresta (v,w) em D . O maior digrafo que podemos obter de D quando efetuamos sucessivamente a operação $D = D + (v,w)$ sempre que (v,w) tornar-se uma aresta implícita por transitividade é denominado fecho transitivo. E o menor digrafo que pode

mos obter de D quando efetuamos sucessivamente a operação $D = D - (v,w)$ sempre que (v,w) for uma aresta implícita por transitividade é denominado redução transitiva. A figura (I.2.4) apresenta o digrafo D , seu fecho transitivo D_1 e também sua redução transitiva D_2 .

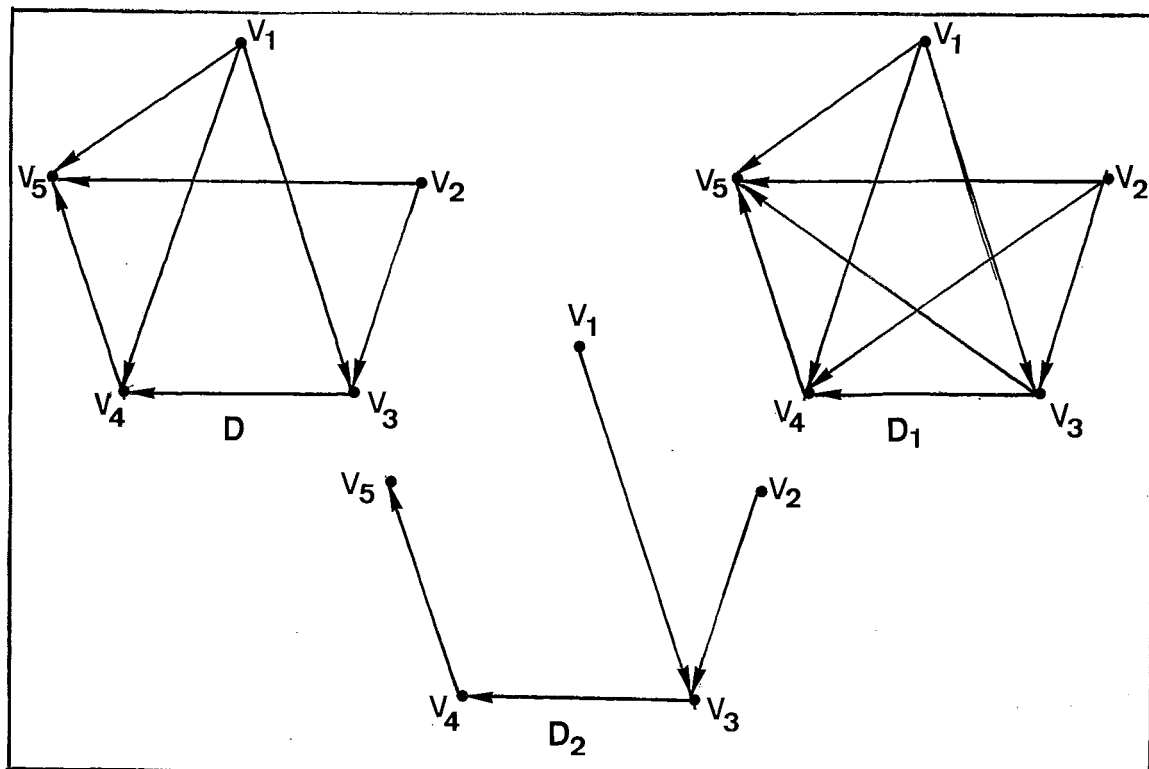


Figura I.2.4.

Um grafo é completo se existe uma aresta para cada par de seus v̄rtices. Um grafo completo de n v̄rtices é deno_ tado por K_n . O complemento de um grafo G , é o grafo \bar{G} consti_ tuído pelo mesmo conjunto de v̄rtices de G e cujo conjunto de arestas é formado pelos pares não ordenados de v̄rtices dis_ tintos (v,w) que não definem aresta alguma em G .

A união de dois grafos $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$ é um grafo $G(V, E)$ tal que $V = V_1 \cup V_2$ e $E = E_1 \cup E_2$. Na figura (I.2.5) podemos observar os grafos G , \bar{G} e $K_5 = G \cup \bar{G}$.

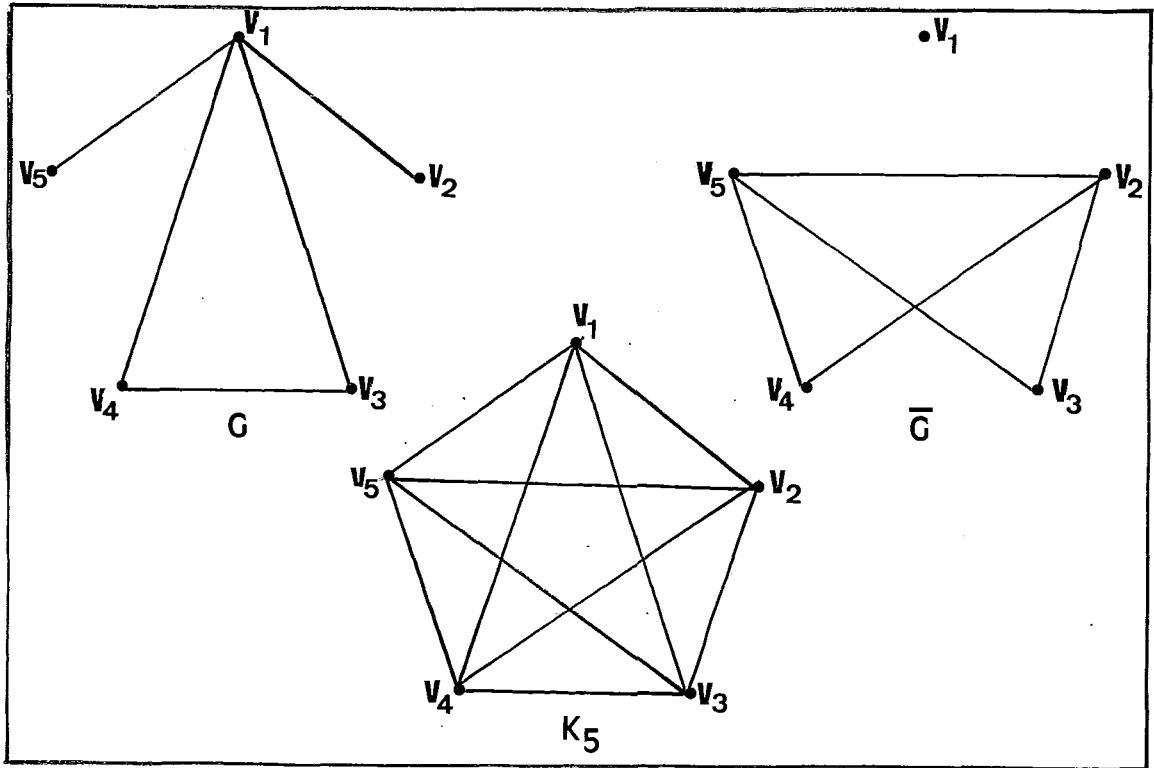


Figura I.2.5.

Uma clique de um grafo G é um conjunto de vértices que induz um subgrafo completo de G . Enquanto que um conjunto independente de vértices de G é aquele cujos elementos são dois a dois não adjacentes. Evidentemente, uma clique de G é um conjunto independente em \bar{G} e vice-versa. A clique $\{v_1, v_3, v_4\}$ de G é um conjunto independente em \bar{G} , conforme podemos ver na figura (I.2.5).

Uma clique de G é maximal se não existe nenhuma outra clique de G que a contém.

Uma clique de G é máxima se G não possui outra clique de cardinalidade superior à dela. Os conceitos de conjunto independente maximal e máximo são análogos.

Um grafo $G(V, E)$ é bipartido se seu conjunto de vértices puder ser particionado em dois subconjuntos V_1 e V_2 , tais que toda aresta de G é definida por um vértice de V_1 e outro

de V_2 . Nos grafos bipartidos para os quais $E \neq \emptyset$, toda clique máxima tem cardinalidade 2.

Os problemas que verificam a existência de uma clique e de um conjunto independente de tamanho K , $K > 0$, em um grafo arbitrário, são NP-completos. Entretanto eles foram resolvidos em tempo polinomial para algumas classes de grafos nas quais a dos grafos circulares se inclui. O mesmo ocorre com o problema de verificar se um grafo G possui um ciclo hamiltoniano, isto é, um ciclo que parte de um vértice arbitrário do grafo e nele se retorna passando por todos os demais vértices exatamente uma vez.

Dois grafos $G_1(V_1, E_1)$ e $G_2(V_2, E_2)$ são ditos isomorfos, se, e somente se, $|V_1| = |V_2|$ e existir uma função biunívoca $f: V_1 \rightarrow V_2$, tal que a existência da aresta (v, w) em E_1 é condição necessária e suficiente para a presença de $(f(v), f(w))$ em E_2 . O problema de verificar se dois grafos são isomorfos é conhecido como Isomorfismo de Grafos e permanece em aberto para grafos arbitrários.

Existem outros problemas que são NP-completos para grafos arbitrários e que não obtiveram soluções particulares para os circulares. Nos casos abaixo K é um inteiro dado.

- Partição por Clique - No qual procura-se uma partição do conjunto de vértices em K ou menos subconjuntos disjuntos, tais que, cada um deles seja uma clique do grafo.
- Conjunto Dominante - Onde é procurado um subconjunto V' do conjunto de vértices V , de cardinalidade menor ou igual a K , tal que todos os elementos de $V - V'$ definam uma aresta com, pelo menos, um elemento de V' .

- Índice Cromático - Neste problema procura-se uma partição do conjunto de arestas em K ou menos subconjuntos disjuntos, tais que, nenhum par de arestas de um mesmo subconjunto possua um extremo comum.

Finalmente, ainda vamos citar o problema do Número Cromático de um grafo. Seja $C = \{C_1, C_2, \dots, C_K\}$ um conjunto de cores. Uma coloração de um grafo G é uma atribuição de alguma cor de C para cada vértice de V , de tal modo que dois vértices adjacentes não tenham a mesma cor. Uma K -coloração é uma coloração na qual utiliza-se um total de K cores. O número cromático de um grafo G é o menor número de cores K , para o qual existe uma K -coloração de G . O problema da determinação do número cromático de um grafo circular é NP-completo.

CAPITULO II

GRAFOS CIRCULARES

II.1. CONCEITO

Seja $C(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$ um diagrama circular que se constitui de um círculo e um conjunto não vazio de cordas, tais que duas cordas distintas do diagrama, v_i e v_j , nunca compartilham de um mesmo extremo. Então, podemos afirmar que ou v_i e v_j têm um ponto em comum ou elas não se interceptam.

Podemos associar ao diagrama $C(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_n)$ um grafo $G(V, E)$, denominado grafo circular, assim definido:

- . $V = \{v_i / \bar{v}_i \text{ é uma corda do diagrama}\}$
- . $E = \{(v_i, v_j) / \bar{v}_i \text{ e } \bar{v}_j \text{ são cordas que se interceptam}\}$

A figura (II.1.1) apresenta um diagrama circular de cinco cordas e o grafo circular associado a ele.

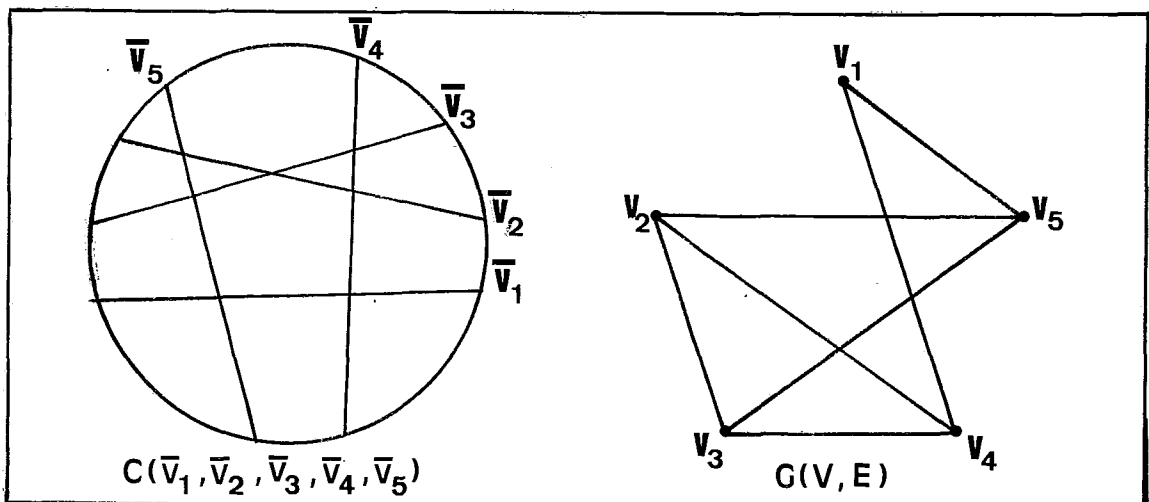


Figura II.1.1

Através de sua definição, verificamos que os grafos circulares são grafos de interseção se considerarmos como F a família de cordas sem extremos comuns em um círculo.

A figura (II.1.2) ilustra o grafo circular G_1 que possui um único diagrama circular que o deriva, o C_1 . Já o grafo circular $G_2 = G_1 - (v_1, v_5)$ pode ser gerado pelos diagramas C_2 e C'_2 .

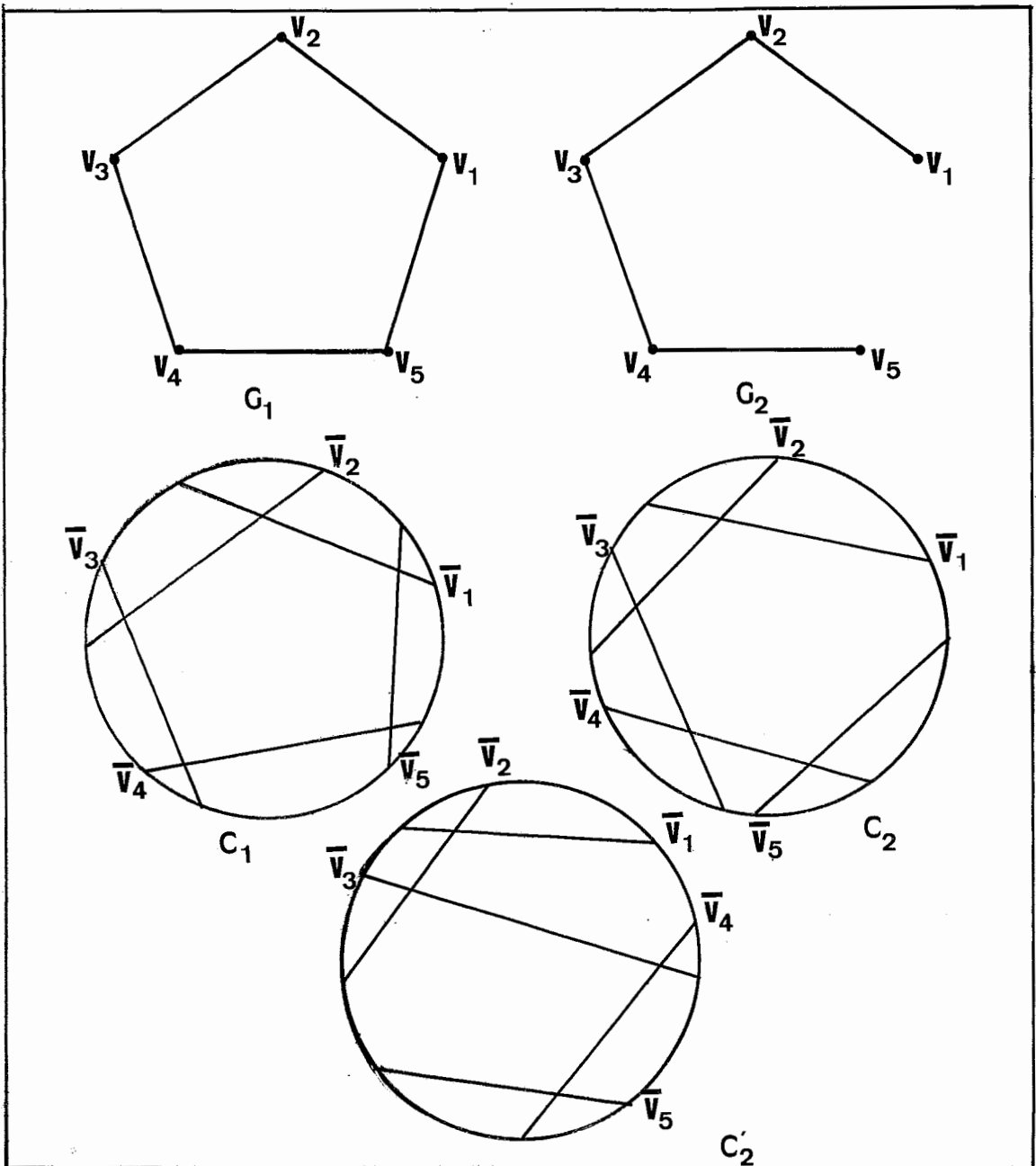


Figura II.1.2

Se agora adicionarmos um novo v\u00e9rtice ao grafo G_1 e todas as arestas definidas por este \u00faltimo e cada um dos demais v\u00e9rtices do grafo, vamos obter o grafo G_3 representado na figura (II.1.3). Embora n\u00e3o tenhamos apresentado a justificativa te\u00f3rica da unicidade do diagrama circular que gera o grafo G_1 , demonstrado por BUCKINGHAM em (6), tal diagrama est\u00e1 contido na figura anterior. Para que ele se iguale ao diagrama do qual G_3 se deriva, falta-lhe a corda \bar{v}_6 . Sendo o v\u00e9rtice v_6 adjacente aos demais v\u00e9rtices do grafo, a corda \bar{v}_6 dever\u00e1 interceptar todas as outras contidas no diagrama. Por\u00e9m, realizar esta tarefa, como pode ser observado, \u00e9 imposs\u00edvel. Assim, o grafo G_3 n\u00e3o \u00e9 gerado por diagrama circular algum e por esta raz\u00e3o ele n\u00e3o \u00e9 circular.

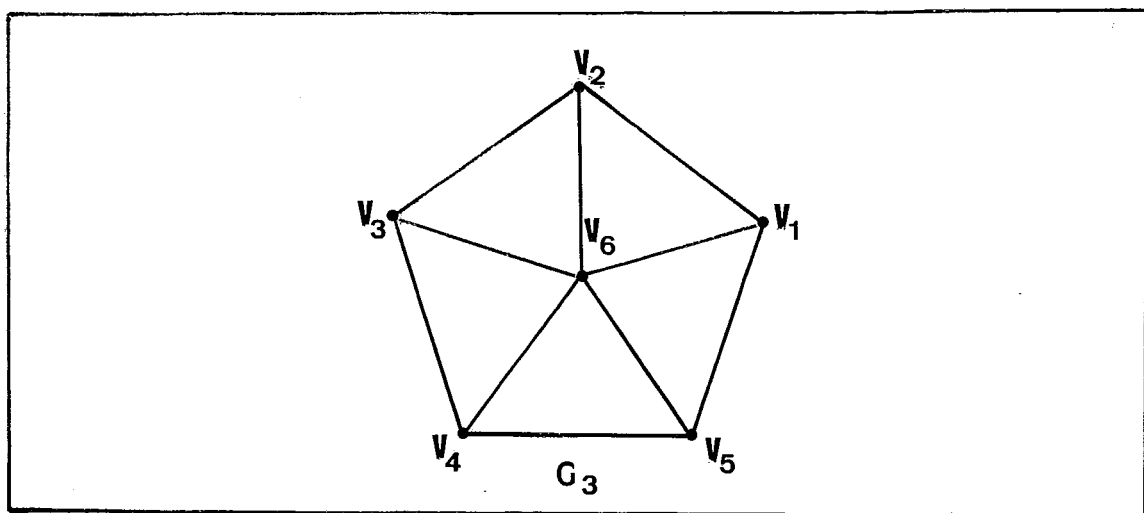


Figura II.1.3.

A seguir, apresentaremos dados relacionados com as caracteriza\u00e7\u00f5es e algoritmos para o reconhecimento de grafos circulares. EVEN e ITAI em (8) demonstram que o grafo constru\u00eddo a partir de alguns crit\u00e9rios estabelecidos durante o processo de ordena\u00e7\u00e3o dos elementos de um conjunto N , segundo uma per

mutação P , é um grafo circular. Comentaremos detalhadamente este artigo na seção II.4.

FOUNIER em (10) faz a caracterização de grafos circulares envolvendo o conceito de relação de ordem que tem conexão com os grafos de comparabilidade. Já FRAYSSEIX em (11) e (12) apresenta duas caracterizações para os grafos circulares. No primeiro trabalho, ele identifica aqueles que são bipartidos usando propriedades do conjunto de vizinhos de um vértice, enquanto que, no segundo, dedica seu estudo aos grafos circulares gerais.

BOUCHET em (5) descreve um algoritmo $O(n^5)$ para verificar se um grafo dado é circular usando uma técnica para decompô-lo. Esta também foi a estratégia utilizada por GABOR e colaboradores em (13) os quais obtiveram um resultado mais satisfatório: um algoritmo $O(n.m)$ capaz de reconhecer os grafos circulares. Neste artigo, ainda encontramos alguns grafos circulares que são gerados por diagramas circulares que possuem uma única representatividade. BUCKINGHAM em (6) também trata deste assunto e ainda apresenta alguns subgrafos proibidos dos grafos circulares, embora não estabeleça nenhuma caracterização para eles.

II.2. SEQUÊNCIA CIRCULAR

Uma sequência circular é constituída por um número finito de elementos, na qual cada um deles ocorre exatamente duas vezes. Aqui, nós as utilizaremos em substituição aos diagramas circulares já que deles podem ser obtidas facilmente.

Consideremos um diagrama circular com n cordas. Escolhendo um ponto arbitrário em um dos $2n$ arcos do círculo definidos pelas cordas e percorrendo este círculo em qualquer um dos sentidos, digamos o anti-horário, até que o ponto inicial seja novamente atingido, teremos passado pelos dois extremos de cada corda do diagrama. Se durante este trajeto, rotularmos os extremos da i -ésima corda encontrada com o número i e no final da operação transcrevermos estes rótulos na mesma ordem em que os pontos a eles correspondentes foram visitados, teremos formado uma sequência circular.

A figura (II.2.1) ilustra várias das etapas seguidas para obtermos uma sequência circular S do diagrama circular dado.

Evidentemente, a mudança do ponto inicial para qualquer um dos $2n-1$ arcos ou mesmo se percorrermos o círculo no outro sentido, vamos obter um total de $4n$ sequências circulares que apesar de não serem necessariamente idênticas são equivalentes por estarem associadas ao mesmo diagrama.

Aproveitando a sequência circular $|12334214|$, vamos definir o que é subsequência e apresentar duas subsequências especiais.

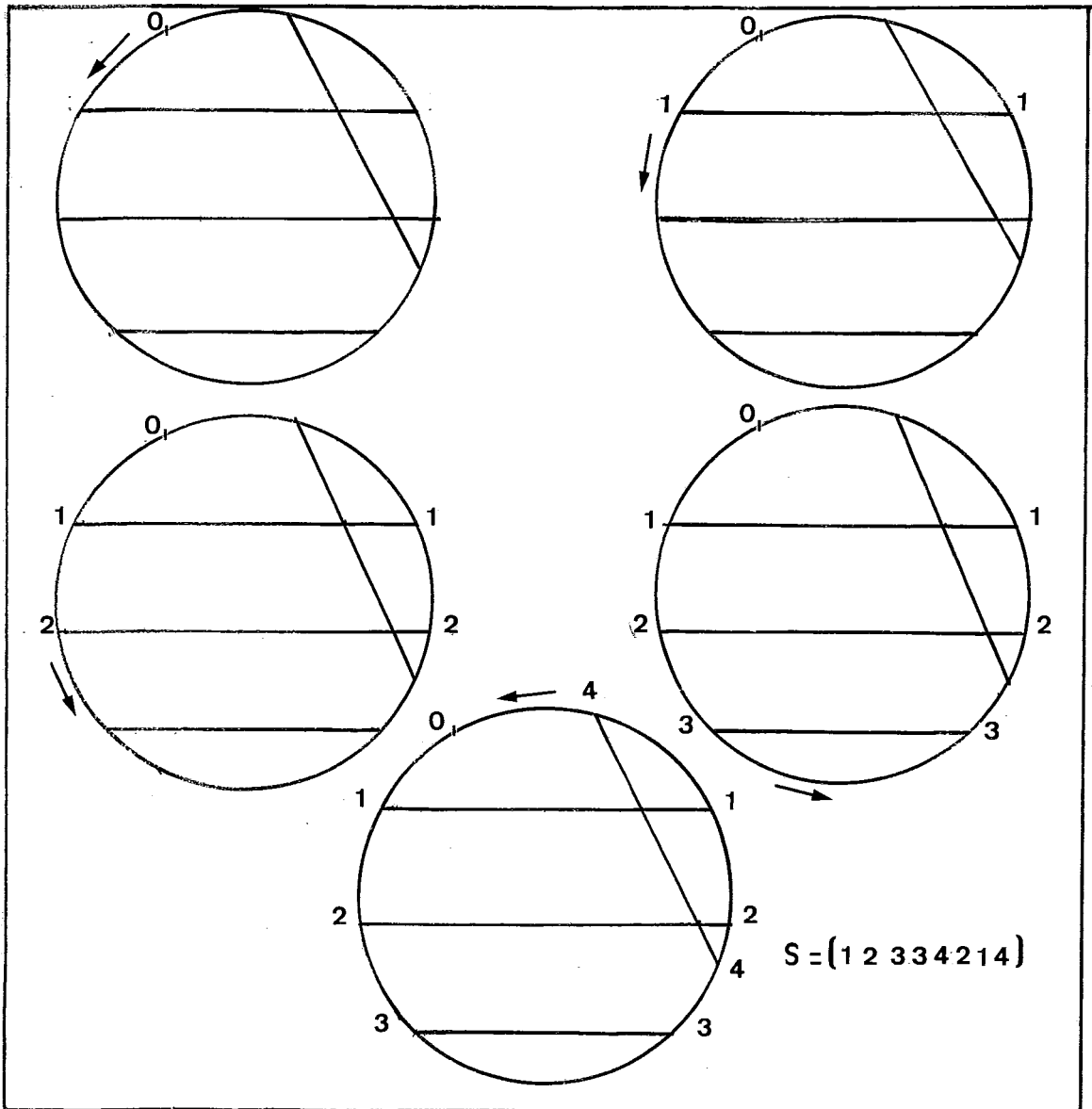


Figura II.2.1.

S' é uma subsequência de S se todos os seus elementos pertencerem a S e, além disso ocorrerem na mesma ordem que na sequência S . $S'_1 = |1234|$, $S'_2 = |1221|$ e $S'_3 = |3421|$ são subsequências de S . A subsequência S'_2 é denominada completa por que cada um de seus elementos ocorrem exatamente duas vezes, enquanto que S'_3 é uma subsequência contígua já que estão presentes nela todos os elementos de S entre o primeiro e último elementos de S'_3 . A subsequência S'_1 não é completa nem contígua.

Consideremos agora uma reta T e nela vamos marcar $2n$ pontos. Rotulando os pontos de T da esquerda para a direita, de

forma que ao i -ésimo ponto seja atribuído o i -ésimo elemento da sequência circular S , teremos obtido uma coleção de intervalos sobre a reta T , cada um deles limitado por pontos de mesmo rótulo. A figura (II.2.2) apresenta a reta T , oito de seus pontos rotulados como os elementos da sequência circular $S = |12334214|$ e os intervalos que eles determinam.

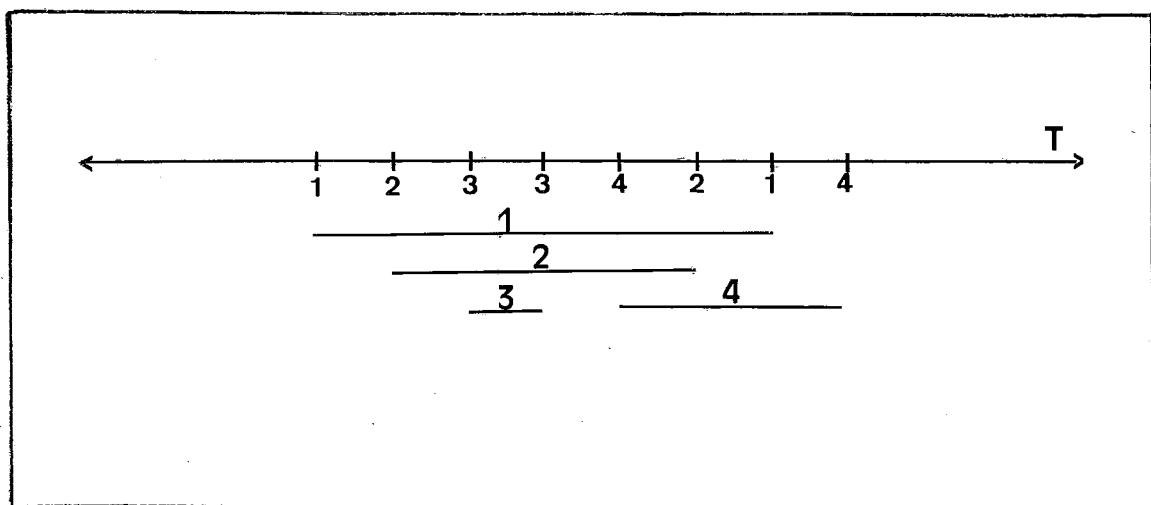


Figura II.2.2.

Como dois intervalos quaisquer de T possuem extremos distintos, cada par destes intervalos satisfaz a, exatamente, uma das seguintes propriedades:

- (i) Sobreposição: P_S - Os dois intervalos se interceptam, mas nenhum está contido no outro.
- (ii) Inclusão: P_I - Um dos intervalos está incluído no outro.
- (iii) Disjunção: P_D - Os dois intervalos possuem interseção vazia.

Na figura (II.2.2) os seguintes pares de intervalos obedecem a propriedade:

(i) P_S - 1 e 4, 2 e 4.

(ii) P_I - 1 e 2, 2 e 3, 3 e 1.

(iii) P_D - 3 e 4.

Vamos representar por $xP_S y$, $xP_I y$ e $xP_D y$ caso os intervalos x e y satisfaçam, respectivamente, às propriedades de sobreposição, de inclusão e de disjunção.

Seja U o conjunto de todos os pares não ordenados constituídos por elementos distintos do conjunto I de intervalos representados em T . Consideremos os subconjuntos de U :

$$A = \{(x,y) / xP_S y\}$$

$$B = \{(x,y) / xP_I y\}$$

$$C = \{(x,y) / xP_D y\}$$

Assim, $A \cap B \cap C = \emptyset$ e $A \cup B \cup C = U$.

Fazendo corresponder a cada intervalo de I um vértice de V , e considerando como conjunto de arestas A , $A \cup B$ e C definimos os grafos a seguir:

$G(V,A)$ - grafo sobreposto

$G(V,A \cup B)$ - grafo intervalado

$G(V,C)$ - complemento do grafo intervalado

A figura (II.2.3) ilustra os três grafos definidos pelo conjunto de intervalos da sequência circular $S = |12334214|$.

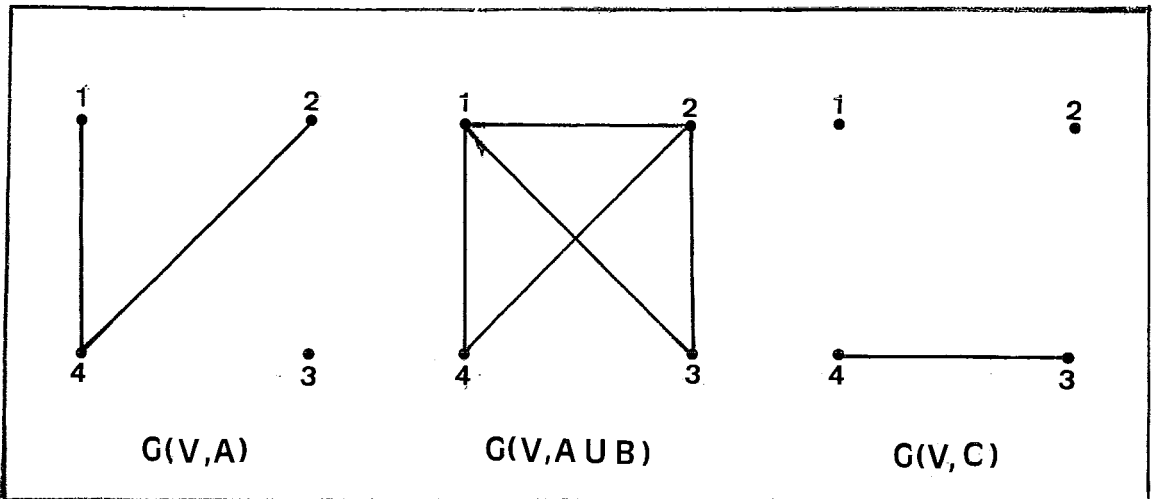


Figura II.2.3.

Como podemos observar, o grafo sobreposto $G(V,A)$ é o grafo circular que deriva do diagrama circular da figura (II.2.1), do qual a sequência S foi obtida. Isto pode ser constatado considerando que cada intervalo de T corresponde a uma corda do diagrama e sendo a e b duas cordas que se interceptam, quando percorremos o círculo para a obtenção de S , visitamos seus extremos nesta ordem: a,b,a,b supondo o rótulo a menor que b . Na reta os intervalos correspondentes a estas cordas satisfazem a propriedade de sobreposição. Por outro lado, se dois intervalos a e b satisfazem a propriedade de inclusão ou de disjunção, eles não definem uma aresta no grafo sobreposto e na sequência circular, seus extremos ocorrem nesta ordem $abba$, se $aP_I b$ ou na ordem $aabb$ caso $aP_D b$, supondo que $a < b$. Sendo assim, tais intervalos correspondem a cordas cuja interseção é vazia, logo, a aresta definida pelos vértices a e b também não se encontra no grafo circular.

Podemos agora construir o grafo circular a partir da sequência circular S que representa o diagrama do qual ele se deriva independentemente da reta T . Para isto vamos denotar

por S_i o elemento que se encontra na i -ésima posição da sequência S e se a é um dos intervalos de S , $S^{-1}(E(a))$ e $S^{-1}(D(a))$ são, respectivamente, as posições ocupadas pelo extremo esquerdo e pelo direito de a .

Assim, cada vértice do conjunto V do grafo circular $G(V,E)$ corresponde a um e único intervalo de S e dois vértices v e w , $v < w$, definem uma de suas arestas se, e somente se, $S^{-1}(E(v)) < S^{-1}(E(w)) < S^{-1}(D(v)) < S^{-1}(D(w))$.

II.3. GRAFOS DE PERMUTAÇÃO

Consideremos uma permutação $P = \langle P(1), P(2), \dots, P(n) \rangle$ dos elementos do conjunto $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Podemos construir um grafo $G(V,E)$, a partir de P , rotulando cada um de seus vértices com um elemento do conjunto N e fazendo seu conjunto de arestas igual ao dos pares não ordenados (i,j) de elementos de N , tais que: $(i-j)(P^{-1}(i) - P^{-1}(j)) < 0$, onde $P^{-1}(i)$ denota a posição ocupada por i em P . Este grafo é denominado Grafo de Permutação e nesta seção abordaremos a relação existente entre esta classe de grafos e a dos grafos circulares.

Seja $P = \langle 2, 5, 4, 1, 3 \rangle$, o grafo de permutação associado a P pode ser visto na figura (II.3.1).

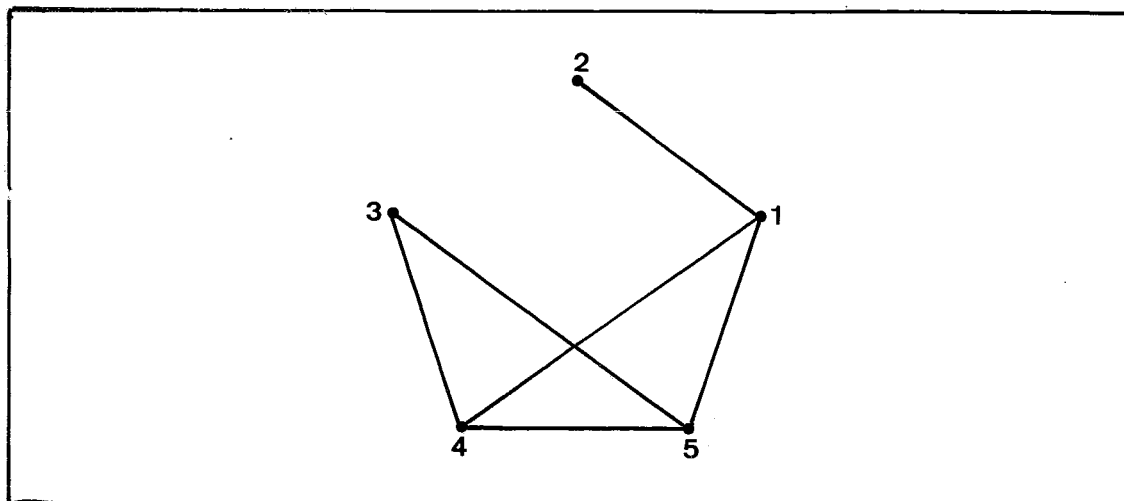


Figura II.3.1.

Os grafos de permutação foram caracterizados por EVEN e colaboradores em (9) e, para apresentarmos o resultado obtido por eles, necessitamos provar alguns resultados preliminares.

Seja $G(V,E)$ um grafo cujos vértices são rotulados com os elementos do conjunto $N = \{1, 2, \dots, n\}$. Consideremos agora os conjuntos de pares ordenados: $E_1 = \{(i,j)/i < j \text{ e } i \text{ e } j \text{ de finem uma aresta de } G\}$ e $E_2 = \{(i,j)/i > j \text{ e } i \text{ e } j \text{ não definem aresta alguma em } G\}$.

Agora vamos definir dois digrafos $D_1(V,E_1)$ e $D_2(V,E_2)$. Os digrafos D_1 e D_2 têm, respectivamente, como grafos subjacentes, os grafos G e seu complemento \bar{G} . A figura (II.3.2) contém os digrafos D_1 e D_2 relativos ao grafo $G(V,E)$ da figura (II.3.1).

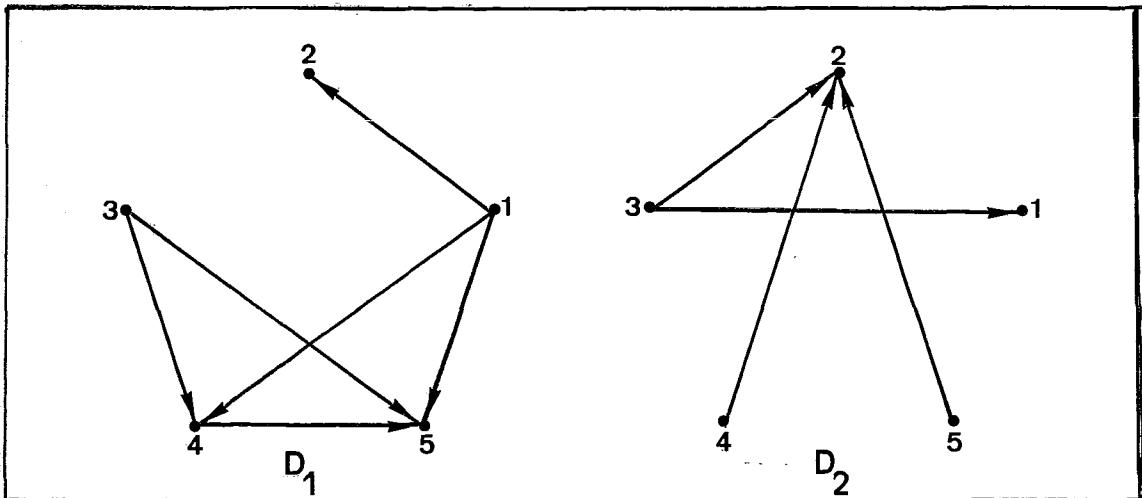


Figura II.3.2.

Consideremos os seguintes lemas:

LEMA II.3.1 - Um digrafo completo é acíclico se, e somente se, não contiver um ciclo de comprimento 3.

PROVA

Se o digrafo é acíclico é óbvio que ele não terá nenhum ciclo de três vértices. Agora, vamos supor que o digrafo não seja acíclico e seja $C = \langle v_1, v_2, \dots, v_\ell, v_1 \rangle$ seu ciclo de menor comprimento. Se $\ell = 3$ então o teorema é verdadeiro. Caso contrário, a aresta entre os vértices v_1 e v_3 deve ser (v_1, v_3) . Mas, se isto ocorre, C deixa de ser o ciclo de comprimento mínimo, o que é uma contradição.

Δ

LEMA II.3.2 - Se os digrafos $D_1(V, E_1)$ e $D_2(V, E_2)$ forem ambos transitivos, então o digrafo $D(V, E_1 \cup E_2)$ é um digrafo completo acíclico.

PROVA

Da definição dos digrafos D_1 e D_2 segue que D é um digrafo completo. Resta-nos provar que ele é acíclico. De acordo com o Lema (II.3.1) se ele não for acíclico então ele contém um triângulo orientado, isto é, um ciclo de comprimento 3. Seja $C = \langle a, b, c, a \rangle$ este ciclo e, sem perder a generalidade, podemos supor que $a < b < c$ ou $a > b > c$. No primeiro caso, as arestas (a, b) e (b, c) pertencem a E_1 e, como D_1 é transitivo, a aresta (a, c) também pertence a E_1 e, conseqüentemente, ela será uma aresta do digrafo D . Isto, porém, contradiz a hipótese de que (c, a) é uma aresta de D por ser de D_2 . No segundo caso, também surge uma contradição quando usamos o fato de D_2 ser transitivo.

△

Bem, já podemos apresentar a caracterização dos grafos de permutação que se resume no teorema a seguir.

TEOREMA II.3.1 - $G(V, E)$ é um grafo de permutação se, e somente se, os digrafos $D_1(V, E_1)$ e $D_2(V, E_2)$ forem transitivos.

PROVA

Se $G(V, E)$ é um grafo de permutação então, para qualquer aresta (i, j) de E , temos $(i - j)(P^{-1}(i) - P^{-1}(j)) < 0$. Isto significa que:

$$E_1 = \{(i, j) / i < j \text{ e } P^{-1}(i) > P^{-1}(j)\} \quad \text{e}$$

$$E_2 = \{(i, j) / i > j \text{ e } P^{-1}(i) > P^{-1}(j)\}$$

É fácil ver que $D_1(V, E_1)$ e $D_2(V, E_2)$ são ambos transitivos. Agora, vamos supor que D_1 e D_2 sejam transitivos. Pelo Lema (II.3.2) sabemos que $D(V, E_1 \cup E_2)$ é um digrafo completo acíclico. Sendo D acíclico, ele contém, pelo menos, um sumidouro. Mas por ser também completo ele contém exatamente um sumidouro.

Seja S_1 o sumidouro de D , o digrafo $D - S_1$ também é completo e acíclico, logo possui um único sumidouro. Seja S_2 este sumidouro. O digrafo $(D - S_1) - S_2$ também é completo e acíclico e seja S_3 o seu sumidouro. Repetindo sucessivamente esta operação, obtemos a sequência $\langle S_1, S_2, \dots, S_n \rangle$ de sumidouros de D , $D - S_1$, \dots , $((D - S_1) - \dots - S_{n-1})$. Evidentemente, o conjunto de arestas de D , $E_1 \cup E_2$, é formado por todos os pares ordenados (S_i, S_j) tais que $i > j$. Como $D_1(V, E_1)$ e $D_2(V, E_2)$ são transitivos, segue que o conjunto de arestas de um deles deve ser constituído pelas arestas (S_i, S_j) tais que $S_i < S_j$ e do outro com $S_i > S_j$. Então

$$E_1 = \{(S_i, S_j) / i > j \text{ e } S_i < S_j\}$$

como $G(V, E)$ é o grafo subjacente de $D_1(V, E_1)$ seu conjunto de arestas é:

$$E = \{(S_i, S_j) / (i - j) \cdot (S_i - S_j) < 0\}$$

já que seus elementos são pares não ordenados. Logo $G(V, E)$ é o grafo de permutação associado a $\langle S_1, S_2, \dots, S_n \rangle$.

Δ

Seja $\bar{P} = \langle P(n), P(n-1), \dots, P(1) \rangle$ a permutação inversa de P e seja $G_1(V_1, E_1)$ o grafo de permutação associado a \bar{P} . Sendo assim, temos:

$$V_1 = N$$

$$E_1 = \{(i, j) / (i - j) (\bar{P}^{-1}(i) - \bar{P}^{-1}(j)) < 0\}$$

Mas como $\bar{P}^{-1}(i)$, que é a posição ocupada por i em \bar{P} , pode ser escrita como $n + 1 - P^{-1}(i)$, a expressão

$$(i - j) (P^{-1}(i) - P^{-1}(j)) < 0 \text{ torna-se}$$

$$(i - j)(n + 1 - P^{-1}(i) - (n + 1 - P^{-1}(j))) < 0, \text{ ou}$$

$$(i - j) (P^{-1}(i) - P^{-1}(j)) > 0.$$

Mas $E_1 = \{(i, j) / (i - j) (P^{-1}(i) - P^{-1}(j)) > 0\}$ é o conjunto de arestas \bar{E} do complemento do grafo $G(V, E)$, associado à permutação P , e como o conjunto de vértices de G_1 é o mesmo que o de G deduzimos que $G_1(V_1, E_1) = \bar{G}(V, \bar{E})$.

Logo, o complemento de um grafo de permutação associado a P também é de permutação e é associado à permutação \bar{P} , a inversa de P .

Como podemos observar, os grafos de permutação registram, através de suas arestas, os pares de elementos do conjunto N que ocupam, na permutação, posições invertidas àquelas ocupadas por eles quando dispostos em ordem crescente. Isto nos sugere a elaboração de um diagrama contendo dois conjuntos ordenados. No primeiro, colocamos os elementos em ordem crescente e no segundo, como eles aparecem na permutação P . Em seguida, ligamos os elementos iguais nos dois conjuntos. O diagrama assim formado gera um grafo de interseção cujo conjunto de vértices

é associado ao de segmentos e dois de seus vértices definem uma aresta se, e somente se, os segmentos a eles correspondentes se interceptam. Mas, dois segmentos v e w só se interceptam se eles ocorrerem em ordem contrária nos conjuntos ordenados. Este grafo gerado é o de permutação associado a P .

A figura (II.3.3) contém o diagrama da permutação $P := \langle 2, 5, 4, 1, 3 \rangle$.

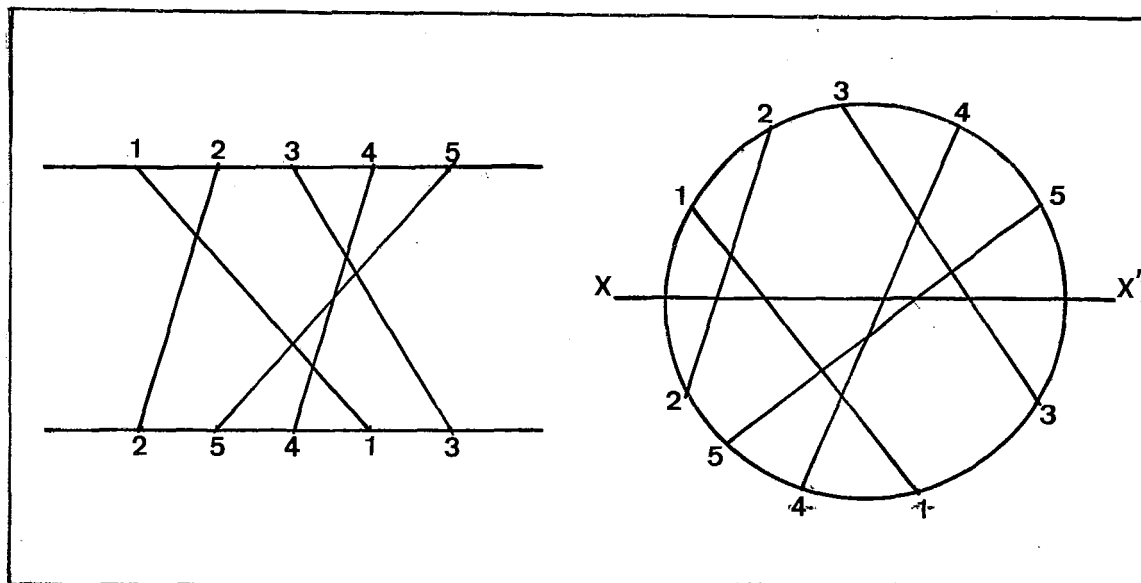


Figura II.3.3.

Consideremos um círculo dividido por uma reta xx' . Se mergulharmos os elementos do primeiro conjunto do diagrama de permutação no semi-círculo superior, da esquerda para a direita, e se fizermos o mesmo com os elementos do segundo conjunto no semi-círculo inferior, quando ligarmos os elementos iguais dos dois conjuntos, vamos obter um diagrama circular. O grafo circular que ele deriva é o mesmo grafo de permutação associado a P . Porém, este diagrama circular possui uma característica que o torna especial. É que todas as suas cordas podem ser interceptadas simultaneamente por uma reta, a xx' . Daí, o porquê da definição de grafo de permutação de READ e colaboradores

em (23) que diz:

Um grafo circular em cujo diagrama pode ser traçada uma reta que intercepta todas as suas cordas simultaneamente é denominado grafo de permutação. Na figura (II.3.3) encontramos o diagrama circular associado à permutação $P = \langle 2,5,4,1,3 \rangle$.

O grafo G da figura (II.3.4), entretanto, é circular mas não é de permutação. Observando o diagrama circular da mesma figura constatamos que, como a corda v intercepta todas as outras correspondentes aos vértices adjacentes a v , o subgrafo de G induzido pelos vértices de $\Gamma(v) = \{v\} \cup A(v)$ é um grafo de permutação. Eliminando todas as cordas do diagrama não correspondentes aos vértices de $\Gamma(v)$, verificamos que é possível traçar uma reta xx' que intercepta todas as cordas do novo diagrama.

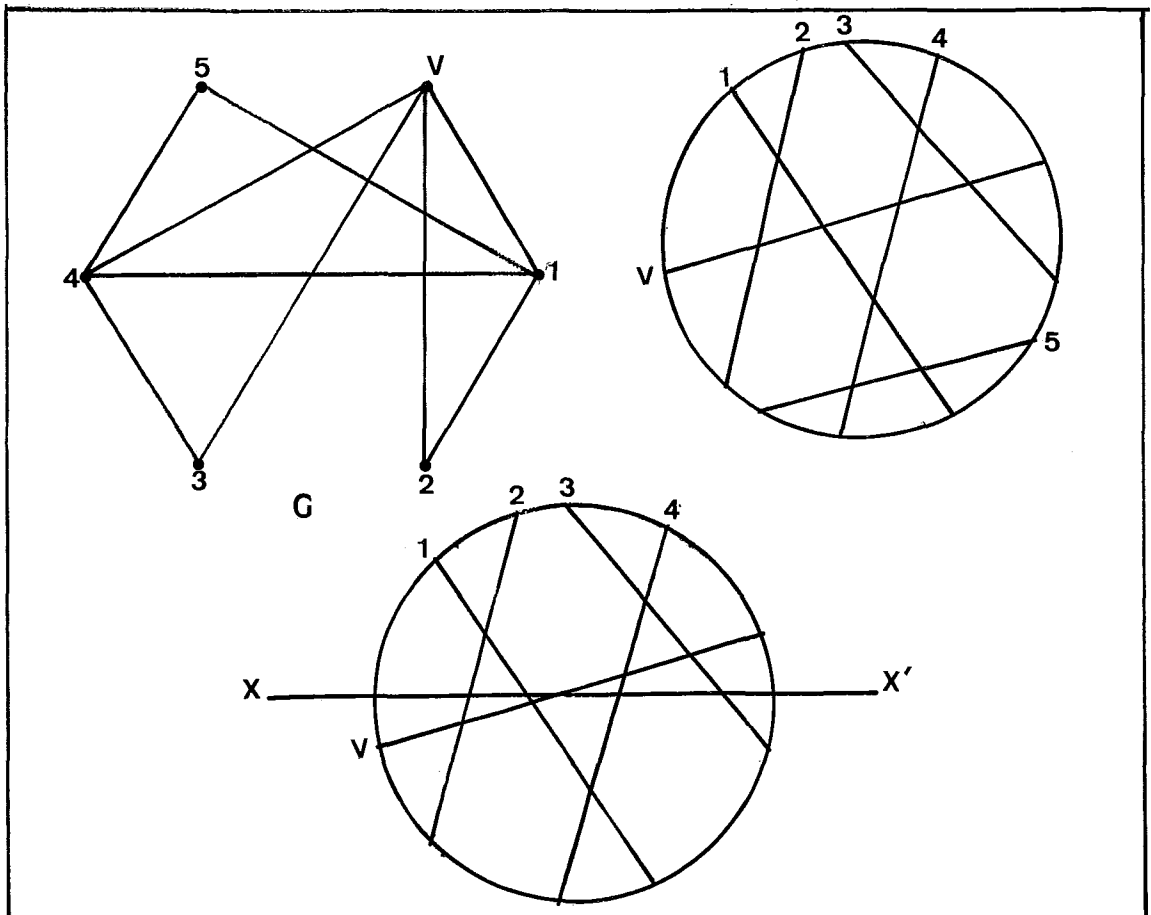


Figura II.3.4.

Sõ o fato de o grafo de permutação ser um grafo circular especial, ou saber que cada subgrafo de um grafo circular G induzido pelos v̄rtices de $\Gamma(v)$, $\forall v \in V(G)$ ẽ um grafo de permutação, jã justificaria a inclusõo desta classe de grafos neste trabalho. No entanto, a relaçaõo entre os dois grafos ainda ẽ mais intensa. EVEN e ITAI em (8) discutem algumas maneiras para efetuar a ordenação dos elementos de um conjunto N segundo uma permutação P . A cada uma delas eles associam um grafo circular. Dedicaremos a prõxima seçaõ ã apresentaçaõ de alguns dos resultados por eles obtidos.

II.4. A ORDENAÇÃO DE UM CONJUNTO N SEGUNDO UMA PERMUTAÇÃO P E SUA RELAÇÃO COM OS GRAFOS CIRCULARES

Seja o conjunto $N = \{1, 2, \dots, n\}$ e seja $P = \langle P(1), P(2), \dots, P(n) \rangle$ uma permutação dos elementos de N . Os autores de (8) discutem o problema de ordenar os elementos de N segundo P , utilizando um sistema de filas e outro de pilhas em paralelo na sua soluçaõo. Mostram que este problema pode ser traduzido como um problema de coloração dos grafos construĩdos a partir de certas prõpriedades inerentes aos dispositivos utilizados.

Nesta seçaõo, exporemos os resultados obtidos por eles quando utilizam um sistema de pilhas em paralelo, ilustrado pela figura (II.4.1).

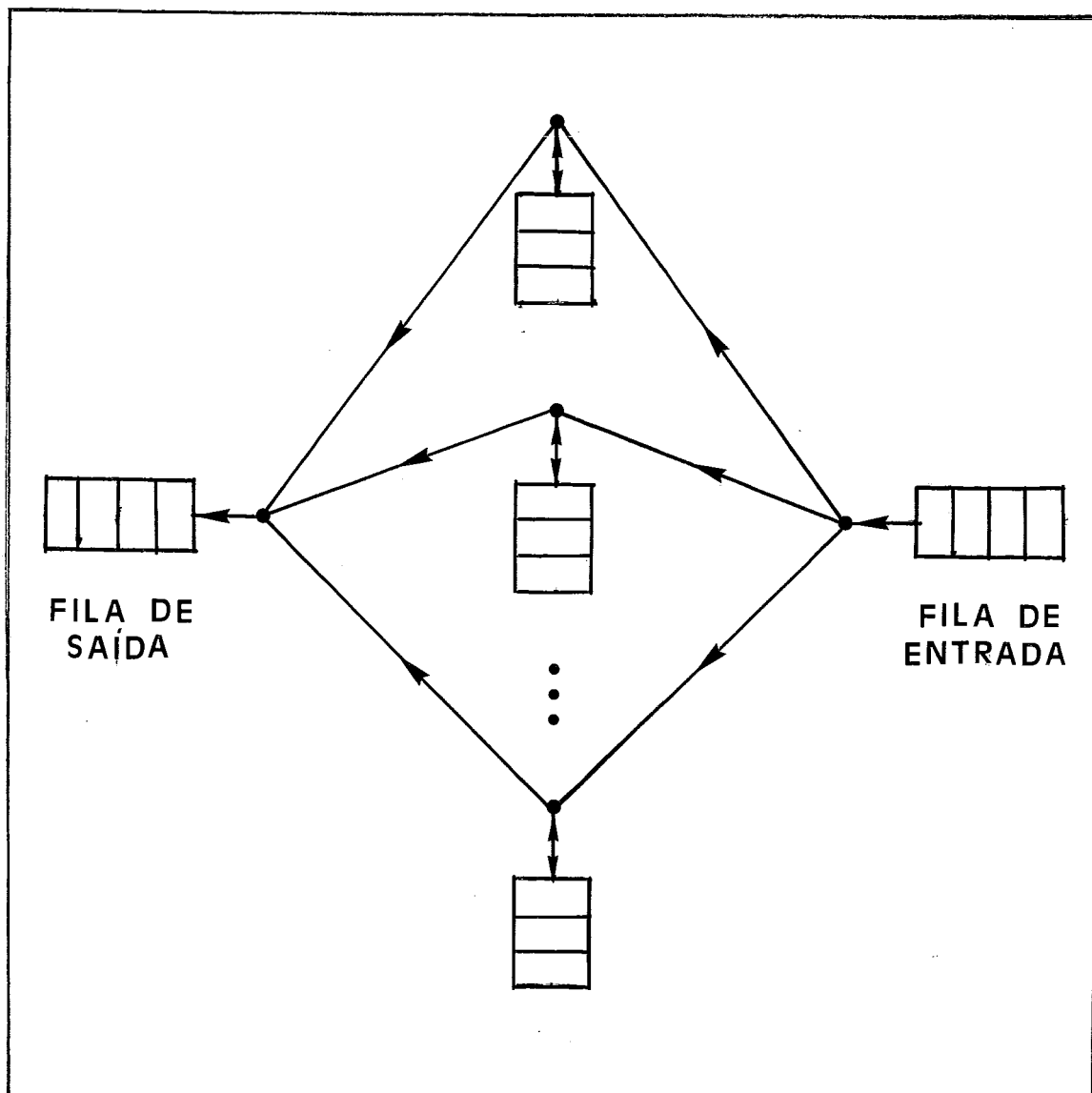


Figura II.4.1.

O sistema de pilhas em paralelo se compõe de:

- uma fila de entrada que inicialmente armazena os elementos do conjunto N.
- uma fila de saída na qual o resultado final será armazenado, ou seja, os elementos do conjunto N estarão na ordem estabelecida por P.
- um conjunto de pilhas em paralelo.

Neste sistema são permitidos dois movimentos:

- (i) mover o primeiro elemento da fila de entrada para o topo de uma das pilhas.
- (ii) mover o elemento que ocupa o topo de uma das pilhas para a última posição da fila de saída.

Não é permitida, portanto, a transferência de um elemento de uma pilha para outra, bem como o retorno de um elemento de uma das pilhas para a fila de entrada ou a retirada de qualquer elemento da fila de saída.

Usando este sistema, nós podemos efetuar tal ordenação através da aplicação dos movimentos (i) e (ii) repetidas vezes. Algumas restrições sobre a alternância ou não destes movimentos podem ser feitas. Consideramos aqui dois casos:

CASO 1 - Carregamento Irrestrito

Neste caso, não há alternância dos movimentos. Primeiramente o movimento (i) é aplicado n vezes e, em seguida, o movimento (ii) passa a ser aplicado o mesmo número de vezes. Desta forma, só depois que toda a fila de entrada for esvaziada e seus elementos estiverem distribuídos adequadamente entre as pilhas é que o preenchimento da fila de saída é iniciado.

CASO 2 - Carregamento Restrito ao Descarregamento

Aqui, os movimentos devem ser empregados de modo a permitir a transferência de cada elemento para a fila de saída, tão logo ele esteja disponível no topo de uma das pilhas.

Consideremos como exemplo o conjunto $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ e a permutação $P = \langle 1, 4, 5, 2, 3, 6 \rangle$. A figura (II.4.2) mostra a configuração do sistema em cada fase do processo de ordenação de

N segundo P utilizando carregamento irrestrito, enquanto que a figura (II.4.3) ilustra as etapas do processo quando o carregamento do sistema é restrito a seu descarregamento.

passo	fila de saída	pilhas				fila de entrada
0		<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	1 2 3 4 5 6
1		1	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	2 3 4 5 6
2		1	2	<input type="text"/>	<input type="text"/>	3 4 5 6
3		1	2	3	<input type="text"/>	4 5 6
4		1	4 2	3	<input type="text"/>	5 6
5		1	4 2	5 3	<input type="text"/>	6
6		1	4 2	5 3	6	
7	1	<input type="text"/>	4 2	5 3	6	
8	1 4	<input type="text"/>	2	5 3	6	
9	1 4 5	<input type="text"/>	2	3	6	
10	1 4 5 2	<input type="text"/>	<input type="text"/>	3	6	
11	1 4 5 2 3	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	6	
12	1 4 5 2 3 6	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>	

Figura II.4.2

passo	fila de saída	pilhas	fila de entrada
0		<input type="text"/> <input type="text"/>	1 2 3 4 5 6
1		<input type="text" value="1"/> <input type="text"/>	2 3 4 5 6
2	1	<input type="text"/> <input type="text"/>	2 3 4 5 6
3	1	<input type="text" value="2"/> <input type="text"/>	3 4 5 6
4	1	<input type="text" value="2"/> <input type="text" value="3"/>	4 5 6
5	1	<input type="text" value="4/2"/> <input type="text" value="3"/>	5 6
6	1 4	<input type="text" value="2"/> <input type="text" value="3"/>	5 6
7	1 4	<input type="text" value="5/2"/> <input type="text" value="3"/>	6
8	1 4 5	<input type="text" value="2"/> <input type="text" value="3"/>	6
9	1 4 5 2	<input type="text"/> <input type="text" value="3"/>	6
10	1 4 5 2 3	<input type="text"/> <input type="text"/>	6
11	1 4 5 2 3	<input type="text" value="6"/> <input type="text"/>	
12	1 4 5 2 3 6	<input type="text"/> <input type="text"/>	

Figura II.4.3

Como podemos observar, no primeiro caso foram necessárias quatro pilhas para resolver o problema, enquanto que no segundo bastaram duas. Se fizermos restrição quanto ao número de pilhas a serem utilizadas surgem questões como estas:

- É possível ordenar os elementos de um conjunto N segundo uma permutação P , usando um sistema de k pilhas em paralelo?
- Qual o número mínimo de pilhas capaz de resolver o problema?

Em certos casos podemos responder tais questões de forma simples, em outros, não. Esta foi a conclusão que EVEN e ITAI apresentaram em (8).

A seguir, apresentaremos as justificativas teóricas que os levaram a tal conclusão, embora tenhamos empregado recursos diferentes aos aplicados por eles.

Definimos uma fila SS, inicialmente vazia, a ser construída durante o processo de ordenação de N segundo P. Para cada movimento realizado, inserimos em SS o elemento que foi transferido, quer seja da fila de entrada para o conjunto de pilhas ou deste para a fila de saída. Quando a fila de saída contiver os elementos de N na ordem que eles estão em P, SS conterá todos os elementos de N e cada um deles ocorrendo duas vezes. Logo SS é uma sequência circular.

Como exemplo vamos considerar a ordenação de $N = \{1,2,3,4,5,6\}$ segundo $P = \langle 1,4,5,2,3,6 \rangle$ cujas configurações do sistema de pilhas nas várias fases do processo estão nas figuras (II.4.2) e (II.4.3). Estudaremos, primeiro, a ordenação que utilizou carregamento irrestrito. Nela todos os n elementos da fila de entrada são transferidos para o conjunto de pilhas na ordem que se apresentam em N. Depois eles são transferidos do conjunto de pilhas para a fila de saída, segundo a ordem de P. Logo $SS = |1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 1\ 4\ 5\ 2\ 3\ 6|$. Agora, vamos construir a sequência correspondente ao processo de ordenação quando usamos o carregamento restrito. Inicialmente $SS = \emptyset$. O elemento 1 é transferido da fila de entrada (f_e) para o conjunto de pilhas (C_p), então $SS = |1|$, depois o 1 é novamente transferido de C_p para a fila de saída (f_s) e assim $SS = |1\ 1|$. Depois o 2, o 3 e o 4 vão de f_e para C_p e o de 4 de C_p para f_s , logo

$SS = |1\ 1\ 2\ 3\ 4\ 4|$. Em seguida o 5 é transferido de f_e para C_p e, imediatamente, deste para f_s , assim $SS = |1\ 1\ 2\ 3\ 4\ 4\ 5\ 5|$. Depois o 2 e o 3 que estavam em C_p vão para f_s , nesta ordem e $SS = |1\ 1\ 2\ 3\ 4\ 4\ 5\ 5\ 2\ 3|$ e, finalmente, o 6 se transfere de f_e para C_p e dele para f_s , portanto $SS = |1\ 1\ 2\ 3\ 4\ 4\ 5\ 5\ 2\ 3\ 6\ 6|$.

Evidentemente, existe um grafo circular G associado à sequência SS . O teorema a seguir relaciona a coloração do grafo G com o número de pilhas necessário para fazer a ordenação de N segundo P .

TEOREMA II.4.1 - Seja G_p o grafo circular associado à sequência SS obtida durante o processo de ordenação de N segundo a permutação P . G_p pode ser colorido com k cores se, e somente se, for possível efetuar tal ordenação utilizando k pilhas.

PROVA

Seja $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k$ uma partição de $V(G_p)$ tal que os elementos da parte V_ℓ são coloridos com a cor ℓ , $\ell = 1, 2, \dots, k$. Sejam i e j dois elementos arbitrários de qualquer uma das partes, então $(i, j) \notin G_p$. Sendo assim, e supondo $i < j$, temos:

- 1) $SS^{-1}(E(i)) < SS^{-1}(E(j)) < SS^{-1}(D(j)) < SS^{-1}(D(i))$, ou
- 2) $SS^{-1}(E(i)) < SS^{-1}(D(i)) < SS^{-1}(E(j)) < SS^{-1}(D(j))$.

Se 1) for verdadeiro, então i saiu da fila de entrada antes de j e depois j foi transferido do conjunto de pilhas para a fila de saída antes de i . Portanto, i e j podem pertencer à mesma pilha em qualquer um dos tipos de carregamento: irrestrito ou restrito. Se 2) for verdadeiro, então não há possibilida

de que o tipo de carregamento utilizado seja o irrestrito já que i é transferido do conjunto de pilhas para a fila de saída antes do j ter deixado a fila de entrada. Contudo, utilizando o carregamento restrito, é possível que eles passem pela mesma pilha, embora nunca simultaneamente. Concluímos, portanto, que podemos ordenar N segundo P utilizando k pilhas.

Agora, vamos supor que seja possível ordenar os elementos de N segundo P utilizando k pilhas. Então, haverá um momento durante o processo de ordenação em que as k pilhas estejam sendo utilizadas. Isto significa que em cada par de pilhas distintas existem dois elementos, um em cada pilha, que não podem pertencer a uma mesma pilha. Sejam i e j tais elementos e supondo $i < j$, temos:

(1) Se o carregamento utilizado for o irrestrito então $P^{-1}(i) < P^{-1}(j)$.

(2) Caso seja o restrito, então $\exists \ell / i < j < \ell$ e $P^{-1}(\ell) < P^{-1}(i) < P^{-1}(j)$.

No primeiro caso, como devemos esvaziar a fila de entrada para iniciar a fase de descarregamento das pilhas, todos os elementos de N são anteriores na sequência a qualquer dos elementos de P . Assim $SS^{-1}(E(i)) < SS^{-1}(E(j)) < SS^{-1}(D(i)) < SS^{-1}(D(j))$ e portanto $(i, j) \in G_p$. No segundo caso, como qualquer elemento ℓ de N vem na sequência numa posição anterior à ocupada por $P^{-1}(\ell)$, temos:

$$SS^{-1}(E(i)) < SS^{-1}(E(j)) < SS^{-1}(E(\ell)) < SS^{-1}(D(\ell)) < SS^{-1}(D(i)) < SS^{-1}(D(j))$$

e, portanto, (i, j) também é uma aresta de G_p . Logo, i e j não podem ter a mesma cor e se são necessárias k pilhas para particionar o conjunto N , de modo que todas as arestas de G_p são definidas por vértices pertencentes a partes diferentes então k cores são necessárias para colorir os vértices de G_p .

△

Evidentemente, se k é o número mínimo de pilhas necessárias para efetuar a ordenação de N segundo P , o grafo G_p tem como número cromático k .

Sejam os grafos G_1 e G_2 da figura (II.4.4). G_1 é o grafo associado à sequência $SS_1 = |1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 1\ 4\ 5\ 2\ 3\ 6|$ construída quando ordenamos o conjunto $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ segundo a permutação $P = \langle 1, 4, 5, 2, 3, 6 \rangle$ usando carregamento irrestrito. Já o grafo G_2 se associa à sequência $SS_2 = |1\ 1\ 2\ 3\ 4\ 4\ 5\ 5\ 2\ 3\ 6\ 6|$ quando ordenamos o mesmo conjunto N segundo a mesma permutação P , só que agora utilizamos o carregamento restrito.

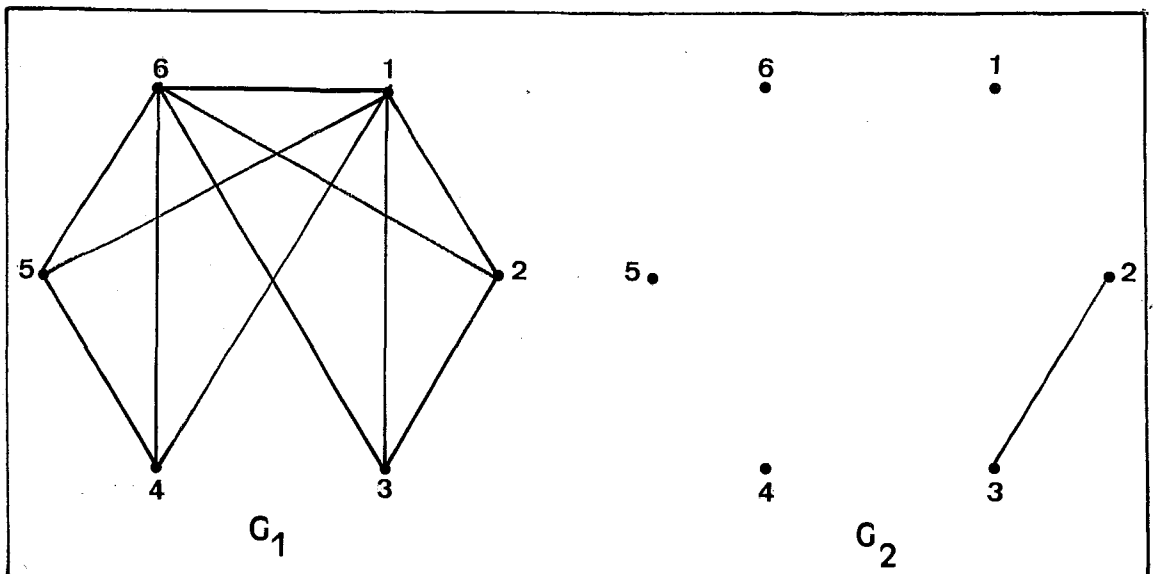


Figura II.4.4.

O grafo G_1 tem número cromático igual a 4 e seu conjunto de vértices pode ser assim particionado $\{\{1\},\{2,4\},\{3,5\},\{6\}\}$ de modo que cada uma das partes tenha seus vértices coloridos com uma das quatro cores. O número cromático do grafo G_2 é 2 e seus vértices podem ser assim agrupados: $\{\{1,2,4,5,6\},\{3\}\}$. Comparando estas observações com a distribuição dos elementos de N no conjunto das pilhas nas figuras (II.4.2) e (II.4.3), verificamos o que o teorema (II.4.1) já nos garantia: a igualdade entre o número de pilhas do sistema utilizado para efetuar a ordenação de N segundo P e o número cromático do grafo circular associado à sequência obtida durante o processo de ordenação.

Observando a sequência SS_2 constatamos que ela gera um grafo que possui quatro vértices isolados. Estes vértices são associados aos intervalos que têm o extremo esquerdo e o direito consecutivos na sequência SS_2 e na realidade eles não influenciam o número cromático de G_2 . Retirando tais intervalos de SS_2 , obtemos $|2\ 3\ 2\ 3|$ que deriva um grafo de mesmo número cromático que G_2 . EVEN e ITAI inclusive fazem a eliminação destes vértices e os denominam vértices artificiais. Tal denominação, porém, parece não se aplicar a estes vértices, devido a forma que utilizamos na obtenção da sequência circular através do citado processo de ordenação. No entanto, quando fazemos a operação inversa, que veremos a seguir, ela nos parece perfeitamente adequada.

No que consiste esta operação inversa? Bem, nela partimos da sequência S da qual o grafo circular conexo G se deriva e temos por objetivo determinar uma permutação P , dos elementos de um conjunto N no qual $V(G)$ está contido, de modo que a sequência SS , formada durante o processo de ordenação de N se

gundo P usando carregamento restrito, gere um grafo G' tal que $E(G') = E(G)$. Evidentemente, os números cromáticos de G e G' serão iguais e coincidirão também com o número de pilhas utilizadas durante o processo de ordenação que origina SS , conforme o teorema (II.4.1) garante.

Algumas considerações sobre a sequência SS devem ser feitas para que possamos obtê-la de forma eficiente.

- (1) Os extremos esquerdos dos intervalos de SS correspondem aos elementos de N quando dispostos na ordem em que se encontram na fila de entrada.
- (2) Os extremos direitos dos intervalos de SS estão ordenados segundo a fila de saída cuja ocorrência dos elementos é estabelecida pela permutação P . É esta, portanto, a subsequência de SS que nos interessa.
- (3) Como o tipo de carregamento utilizado é o restrito, devemos lembrar que qualquer transferência de elementos da fila de entrada para o conjunto de pilhas só é permitida enquanto o elemento que deve ocupar a próxima posição da fila de saída não estiver disponível no conjunto de pilhas, para a imediata transferência.

Seja S_1 a primeira subsequência maximal de extremos esquerdos de S . Seus elementos ocupam as $|S_1|$ primeiras posições da fila de entrada e dela são transferidos para o conjunto de pilhas ininterruptamente. Devido à maximalidade de S_1 , o elemento de S que ocupa a posição $|S_1| + 1$ é um extremo direito. Como supomos G conexo, o elemento da $|S_1|$ -ésima posição de S é diferente daquele que ocupa a posição $|S_1| + 1$. Mas, então,

como o extremo esquerdo associado a este primeiro extremo direito se encontra em S numa de suas $|S_1| - 1$ primeiras posições significa que ele foi transferido da fila de entrada para o conjunto de pilhas e lá permaneceu até que toda S_1 estivesse nas pilhas. De acordo com a consideração (3), isto só se justifica quando existe um elemento que vem depois de S_1 na fila de entrada e ocupa a primeira posição em P . Evidentemente, o intervalo que este elemento determina em SS não pertence a S e deverá ser nela inserido, daí porque chamá-lo de intervalo artificial. Ele não sobrepõe a nenhum dos intervalos de S já que seus extremos esquerdo e direito ocupam em SS posições consecutivas e imediatamente posteriores à posição ocupada pelo último elemento da sequência S_1 .

Surgindo em S uma nova subsequência maximal de extremos esquerdos, a mesma operação deve ser repetida. Assim, logo após a i -ésima subsequência, devemos inserir os extremos do intervalo artificial a_i e, ao término do processo, teremos encontrado SS . A partir desta sequência, a obtenção da permutação P é imediata.

Como exemplo, vamos considerar a sequência $S = |1\ 2\ 3\ 4\ 1\ 5\ 6\ 3\ 4\ 7\ 2\ 6\ 5\ 7|$ e nela distinguiremos três subsequências contíguas maximais de extremos esquerdos:

$$S_1 = |1\ 2\ 3\ 4| \quad , \quad S_2 = |5\ 6| \quad \text{e} \quad S_3 = |7| \quad .$$

Assim, aplicando o processo citado, obtemos a sequência $SS = |1\ 2\ 3\ 4\ a_1\ a_1\ 1\ 5\ 6\ a_2\ a_2\ 3\ 4\ 7\ a_3\ a_3\ 2\ 6\ 5\ 7|$. A permutação P é, portanto, $\langle a_1\ 1\ a_2\ 3\ 4\ a_3\ 2\ 6\ 5\ 7 \rangle$ onde $4 < a_1 < 5$, $6 < a_2 < 7$ e $a_3 > 7$.

Este processo fornece, para cada sequência circular S , uma única sequência SS e o número de intervalos artificiais que foram inseridos em S para obter SS foi estritamente o suficiente para que nosso objetivo fosse atingido. Isto não significa que este número de vértices artificiais seja o necessário. Vamos considerar duas novas sequências S^* e S^{**} obtidas de S por intermédio de rotações, que nada mais são do que mudanças na escolha do arco do diagrama no qual tomamos o ponto inicial para a obtenção da sequência. Sejam

$$S^* = |2\ 3\ 4\ 1\ 5\ 6\ 3\ 4\ 7\ 2\ 6\ 5\ 7\ 1| \quad e$$

$$S^{**} = |1\ 5\ 6\ 3\ 4\ 7\ 2\ 6\ 5\ 7\ 1\ 2\ 3\ 4|$$

Aplicando em S^* e S^{**} o processo para obtenção das permutações P^* e P^{**} encontramos em S^* duas subsequências contíguas maximais de extremos esquerdos: $S_1^* = \langle 2\ 3\ 4\ 1\ 5\ 6 \rangle$ e $S_2^* = \langle 7 \rangle$ e assim $SS^* = |2\ 3\ 4\ 1\ 5\ 6\ a_1\ a_1\ 3\ 4\ 7\ a_2\ a_2\ 2\ 6\ 5\ 7\ 1|$.

Em S^{**} temos apenas uma subsequência contígua maximal de extremos esquerdos que é

$$S_1^{**} = |1\ 5\ 6\ 3\ 4\ 7\ 2| \quad e \text{ assim}$$

$$SS^{**} = |1\ 5\ 6\ 3\ 4\ 7\ 2\ a_1\ a_1\ 6\ 5\ 7\ 1\ 2\ 3\ 4|.$$

Neste exemplo, podemos verificar que o processo utilizado para a determinação de G' cria um número de vértices artificiais que depende da escolha da sequência circular utilizada para representar o grafo. Evidentemente, caso fosse possível, o ideal seria optar por aquela, cujo número de intervalos artificiais inseridos fosse mínimo. Porém, não foi obtida ainda uma forma eficiente para nos proporcionar a escolha ótima. Na seção III.2.3 voltaremos a este assunto.

Agora, já podemos responder à questão sobre o número mínimo de pilhas necessárias para fazer a ordenação de N segundo P . Verificamos que, quando usamos o carregamento irrestrito, o grafo circular associado à sequência S obtida durante o processo de ordenação é um grafo de permutação, já que S é da forma: $|1\ 2\ 3\ \dots\ n\ P(1)\ P(2)\ P(3)\ \dots\ P(n)|$. EVEN e ITAI citam o algoritmo $O(n^2)$ de EVEN, PNUELI e LEMPEL que determina o número cromático de grafos de permutação. Já JOHNSON em (19) cita um algoritmo $O(n \log n)$, portanto mais eficiente que o primeiro, para resolver o problema. Tal algoritmo foi descrito por GOLUMBIC em (17).

Vejamos, agora, quando usamos o carregamento restrito. Se $P(1)$ foi igual a n , evidentemente recaímos no caso anterior e sabemos que o grafo obtido é de permutação. Isto não significa que se numa dada permutação $P(1) \neq n$, o grafo associado à ordenação de N segundo P não seja de permutação.

Como exemplo podemos citar: $P_1 = \langle 1, 5, 2, 3, 4 \rangle$. A sequência SS_1 associada ao processo de ordenação de $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ segundo P_1 é: $SS_1 = |1\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 5\ 2\ 3\ 4|$ e como $P_1(1) \neq 5$ não podemos garantir a priori que SS_1 gera um grafo de permutação. Entretanto, a permutação $P_2 = \langle 5, 2, 3, 4, 1 \rangle$ dá origem à sequência $SS_2 = |1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 5\ 2\ 3\ 4\ 1|$ que gera um grafo de permutação isomorfo ao grafo gerado por SS_1 .

Existem, também, permutações cujas sequências construídas no processo de ordenação geram grafos circulares que não são de permutação. Seja, por exemplo, a permutação $P = \langle 5, 2, 7, 4, 1, 6, 3 \rangle$. Ela dá origem à seguinte sequência: $SS = |1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 5\ 2\ 6\ 7\ 7\ 4\ 1\ 6\ 3|$. O grafo G gerado por SS pode ser visto na figura (II.4.5).

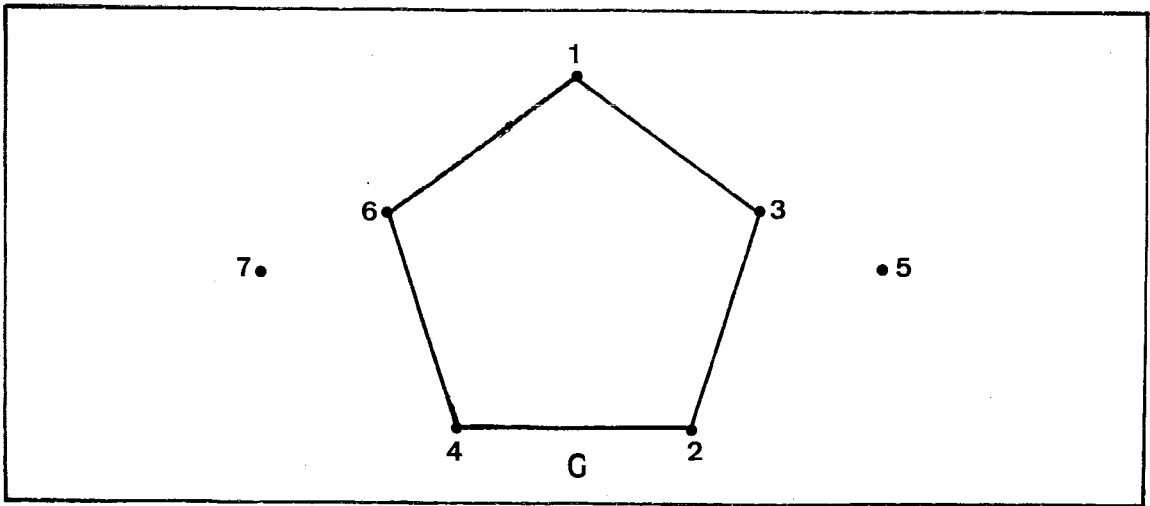


Figura II.4.5.

Como podemos observar, o grafo G possui três componentes conexos, induzidos pelos seguintes conjuntos de vértices: $\{5\}$, $\{7\}$, e $\{1,2,3,4,6\}$. Este último conjunto de vértices gera um ciclo sem cordas de comprimento 5, isto é, um C_5 e podemos verificar facilmente que não existe orientação alguma que possamos atribuir às suas arestas para que o digrafo resultante seja transitivo. Como ele não possui corda alguma ele não pode possuir também, nenhum caminho de comprimento 2. Sendo assim considerando 1 como fonte, vamos direcionar as arestas $(1,3)$ e $(1,6)$, respectivamente, de 1 para 3 e de 1 para 6. Consequentemente, as arestas $(2,3)$ e $(4,6)$ devem ser direcionadas assim: de 2 para 3 e de 4 para 6. Resta-nos direcionar a aresta $(2,4)$. E, neste ponto, chegamos a uma contradição já que, devido à direção de $(2,3)$, ela deve ser direcionada de 2 para 4, mas devido a direção de $(4,6)$, sua direção deverá ser de 4 para 2. Sendo assim, o grafo G não é de permutação. O problema da determinação do número cromático de um grafo circular que não é de permutação não foi resolvido por EVEN e ITAI. Eles diziam que ainda não tinham encontrado um algoritmo eficiente capaz de resol

vê-lo. Desde 1980, entretanto, tal problema foi resolvido, em bora o algoritmo eficiente não tenha sido encontrado. É que segundo JOHNSON em (19), GAREY e colaboradores provaram que es te problema é NP-completo.

CAPÍTULO III

CLIQUE MÁXIMAS EM GRAFOS CIRCULARES

III.1. PRELIMINARES

O problema da determinação de uma clique máxima de grafos circulares não é um problema trivial, já que, para algumas famílias destes grafos, o número de cliques maximais cresce exponencialmente com o número de vértices. Este fato é confirmado quando observamos o diagrama circular da figura (III.1.1). Ele contém $n/3$ ternos de cordas $a_i, b_i, c_i, 1 \leq i \leq n/3$, que satisfazem as propriedades:

- (a) Duas cordas quaisquer de um mesmo terno nunca se interceptam.
- (b) Todas as cordas de dois ternos distintos sempre se interceptam.

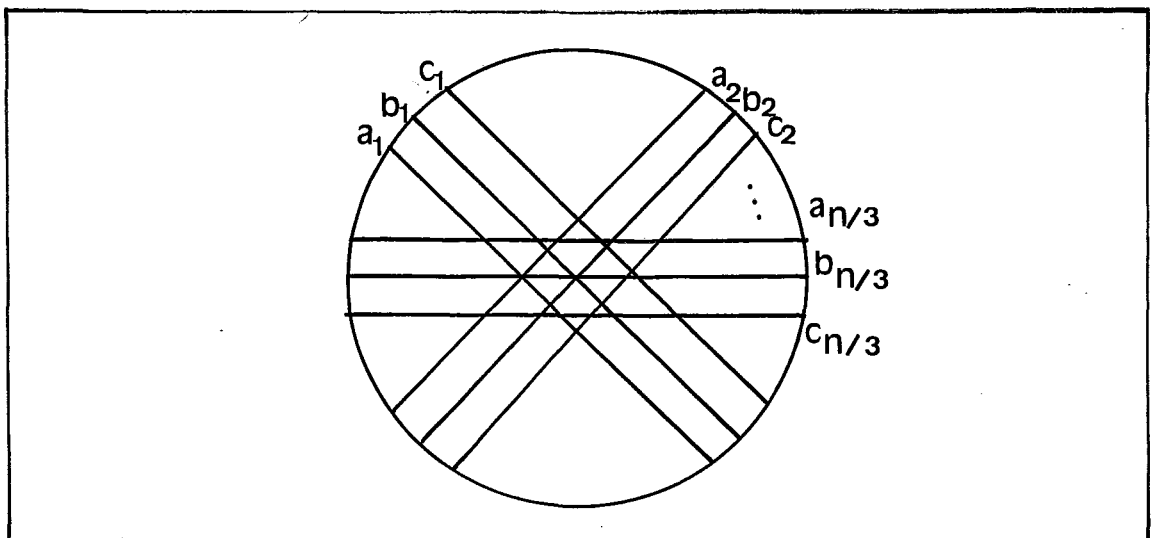


Figura III.1.1.

Toda clique maximal do grafo circular gerado pelo citado diagrama contém exatamente uma corda de cada um dos $n/3$ ternos. Portanto, ele possui $3^{n/3}$ cliques maximais.

Os dois primeiros algoritmos que apresentaremos neste capítulo se aplicam na determinação de uma clique máxima de grafos circulares. O de Gavril, elaborado em 1973, é de complexidade $O(n^3)$ e o de Buckingham que, em 1980, aprimorando a idéia do primeiro, obteve um algoritmo $O(n + m \log_2 w)$ onde w é a cardinalidade de clique máxima de G . Depois, abordaremos um algoritmo $O(n^2)$, cuja finalidade é determinar não apenas uma mas todas as cliques máximas de grafos circulares, apresentado por Rotem e Urrutia em 1981.

Finalmente, trataremos de expor os algoritmos de Buckingham (1980) e Hsu (1985) destinados aos grafos circulares valorados. As cliques máximas nestes grafos são aquelas que, ao invés de possuírem a maior cardinalidade, congregam os vértices cujos pesos perfazem a maior soma.

Tendo como objetivo a uniformização da linguagem em todos os algoritmos, o grafo circular G será representado por uma das sequências circulares que o gera.

Uma clique maximal $C = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ por induzir um subgrafo completo de G corresponde a uma subsequência completa maximal S' de S da forma:

$$S' = |v_1, v_2 \dots v_p \ v_1 \ v_2 \ \dots \ v_p|$$

Evidentemente, o problema de determinar uma clique máxima do grafo circular G é equivalente ao de encontrar uma subsequência completa máxima S' de S .

III.2. CLIQUE MAXIMAS EM GRAFOS CIRCULARES

III.2.1. ALGORITMO DE GAVRIL

O algoritmo elaborado por GAVRIL e publicado em (15) foi o primeiro a ser desenvolvido para esta classe de grafos.

Gavril observou que se S_x é a subsequência de S que gera o subgrafo de G induzido pelo conjunto de vizinhos do vértice x e se x pertence a uma clique máxima C de G , então a sequência S'_x correspondente a C é uma subsequência completa máxima de S_x da forma: $|v_1 v_2 \dots v_p v_1 v_2 \dots v_p|$. A estratégia utilizada por ele para determinar uma clique máxima de G consiste na obtenção das sequências S_x , para todo intervalo x de S . Após encontrar as sequências S_x , em cada uma delas, ele determina a subsequência completa máxima S'_x que contém x , da forma acima mencionada. E, finalmente, dentre estas, encontra aquela que se constitui pelo maior número de elementos.

Como exemplo, vamos considerar o grafo da figura (III.2.1) que apresenta também o diagrama circular do qual o grafo se deriva.

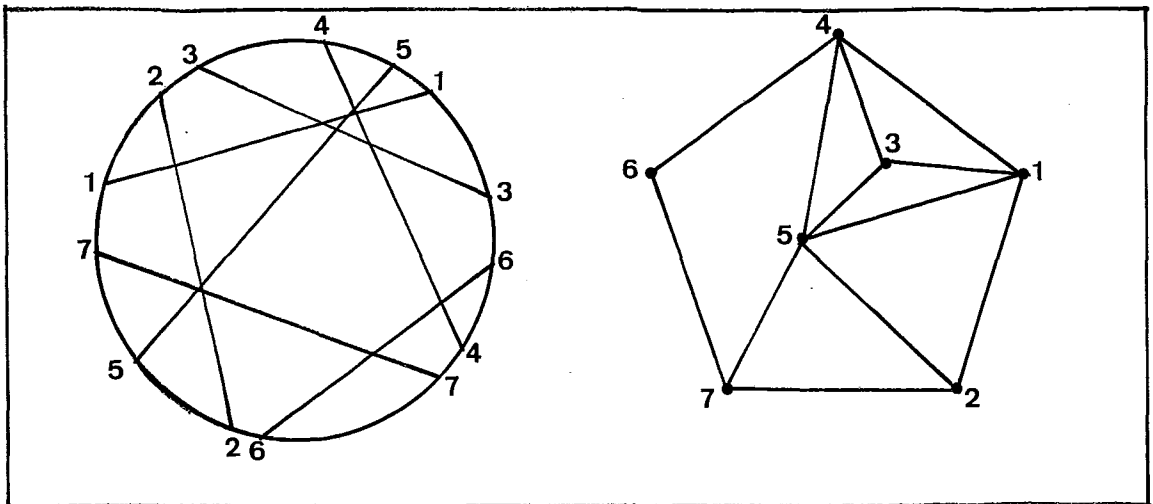


Figura III.2.1.

Como podemos observar, a sequência $S = |1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 3\ 6\ 4\ 7\ 6\ 2\ 5\ 7|$ representa o citado grafo.

Em S identificamos as seguintes subsequências:

$$S_1 = |1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 3\ 4\ 2\ 5|$$

$$S_2 = |1\ 2\ 5\ 1\ 7\ 2\ 5\ 7|$$

$$S_3 = |1\ 3\ 4\ 5\ 1\ 3\ 4\ 5|$$

$$S_4 = |1\ 3\ 4\ 5\ 1\ 3\ 6\ 4\ 6\ 5|$$

$$S_5 = |1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 3\ 4\ 7\ 2\ 5\ 7|$$

$$S_6 = |4\ 6\ 4\ 7\ 6\ 7|$$

$$S_7 = |2\ 5\ 6\ 7\ 6\ 2\ 5\ 7|$$

Nas sequências acima distinguimos as subsequências completas máximas que contêm x da forma $|v_1\ v_2\ \dots\ v_p\ v_1\ v_2\ \dots\ v_p|$:

$$S'_1 = |1\ 3\ 4\ 5\ 1\ 3\ 4\ 5|$$

$$S'_2 = |1\ 2\ 5\ 1\ 2\ 5|$$

$$S'_3 = |1\ 3\ 4\ 5\ 1\ 3\ 4\ 5|$$

$$S'_4 = |1\ 3\ 4\ 5\ 1\ 3\ 4\ 5|$$

$$S'_5 = |1\ 3\ 4\ 5\ 1\ 3\ 4\ 5|$$

$$S'_6 = |4\ 6\ 4\ 6|$$

$$S'_7 = |2\ 5\ 7\ 2\ 5\ 7|$$

Destas, a de maior número de elementos é a $S'_1 = |1\ 3\ 4\ 5\ 1\ 3\ 4\ 5|$. Portanto, $C = \{1, 3, 4, 5\}$.

Vamos agora estudar a complexidade deste processo encontrada por Gavril.

Ele determina para cada vértice x , o subgrafo de G induzido pelo conjunto dos vértices que compõe S_x . Em seguida, ele encontra a clique máxima de cada um destes subgrafos. Co

mo cada um deles é um grafo de permutação, Gavril emprega o algoritmo $O(n^2)$ de EVEN e colaboradores dado em (9). Esta operação deve ser repetida uma vez para cada vértice do grafo e, assim, a complexidade do algoritmo é $O(n^3)$. Trabalhando com a sequência circular S , ao invés de usar o grafo como Gavril, podemos melhorar a complexidade deste processo. Falaremos so bre isto na próxima seção.

III.2.2. ALGORITMO DE BUCKINGHAM

BUCKINGHAM em (6) aprimorou o algoritmo de Gavril em alguns pontos que detalharemos a seguir.

Seja C uma clique máxima de G . Estudando S_x , para cada x pertencente a C , podemos determinar a mesma clique C , $|C|$ vezes. Isto aconteceu no exemplo anterior. Determinamos $C = \{1,3,4,5\}$ ao estudarmos S_1, S_3, S_4 e S_5 . Buckingham conseguiu evitar isto, retirando x de S tão logo S_x fosse estudada. Assim, ele inicia o processo com a sequência original S e, a seguir, identifica o intervalo cujo extremo direito ocupa a menor posição em S . Seja x este intervalo, determina então S_x , que denotaremos por S^*_x já que a cada iteração a sequência S é alterada pela exclusão de um intervalo. Em seguida, ele encontra uma clique máxima do grafo gerado por S^*_x e exclui x de S . O processo é repetido até que S fique vazia. Com este procedimento Buckingham consegue que S^*_x seja formada apenas pelos vértices adjacentes a x , de rótulos superiores ao dele. Isto significa que os intervalos que a definem têm somente seus extremos esquerdos entre os extremos de x . Assim, se

$S = |1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 3\ 6\ 4\ 7\ 6\ 2\ 5\ 7|$ temos:

$$S^*_1 = |1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 3\ 4\ 2\ 5|$$

$$S^*_2 = |2\ 5\ 7\ 2\ 5\ 7|$$

$$S^*_3 = |3\ 4\ 5\ 3\ 4\ 5|$$

$$S^*_4 = |4\ 5\ 6\ 4\ 6\ 5|$$

$$S^*_5 = |5\ 7\ 5\ 7|$$

$$S^*_6 = |6\ 7\ 6\ 7|$$

$$S^*_7 = |7\ 7|$$

Na determinação da sequência S'_x , que corresponde a uma clique máxima do grafo gerado por S_x , Gavril procurava em S_x uma subsequência crescente máxima da forma:

$|v_1\ v_2\ \dots\ v_p\ v_1\ v_2\ \dots\ v_p|$. Buckingham observou que usando S^*_x ao invés de S_x , a determinação de S^*_x torna-se bem mais fácil já que em S^*_x os extremos esquerdos dos intervalos estão em ordem crescente e, além disso, ocupam as posições relativas de sua primeira metade. Assim ele percebeu que não precisava se preocupar com a primeira metade de S^*_x . A disposição dos elementos em sua segunda metade é que define a clique procurada. Buscou, então, definir uma forma eficiente de compreender o comportamento dos elementos na segunda metade de S^*_x , sem que fosse necessário obtê-la explicitamente.

Assim, tão logo seja conhecida a primeira metade de S^*_x , que é denotada por Γ_x^+ , o algoritmo a substitui pela sequência $\text{End}(\Gamma_x^+)$. A i -ésima posição de $\text{End}(\Gamma_x^+)$ contém o endereço em S do extremo direito do intervalo que ocupa a mesma posição em Γ_x^+ , $\forall i$. Cada uma das subsequências crescentes de $\text{End}(\Gamma_x^+)$ é constituída pelos endereços dos elementos que definem uma clique no grafo gerado por S^*_x . O algoritmo se propõe a identificar uma que seja máxima.

A etapa de obtenção dos endereços dos extremos direitos de cada intervalo \bar{e} feita preliminarmente. Assim, quando cada subsequência Γ_x^+ for determinada, a substituição dela por $\text{End}(\Gamma_x^+)$ pode ser feita imediatamente.

A sequência que estamos considerando como exemplo \bar{e} $S = |1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 3\ 6\ 4\ 7\ 6\ 2\ 5\ 7|$ e na figura (III.2.2) encontramos a tabela de endereços dos extremos direitos de seus intervalos.

x	1	2	3	4	5	6	7
End(x)	6	12	7	9	13	11	14

Figura III.2.2

Agora, para cada intervalo x de S , determinamos Γ_x^+ e $\text{End}(\Gamma_x^+)$. Aplicando um algoritmo para obter a subsequência crescente máxima em cada uma das sequências $\text{End}(\Gamma_x^+)$ temos:

$$\Gamma_1^+ = \langle 1, 2, 3, 4, 5 \rangle, \quad \text{End}(\Gamma_1^+) = \langle 6, 12, 7, 9, 13 \rangle$$

$$\text{e} \quad \max_{\text{End}(\Gamma_1^+)} = \langle 6, 7, 9, 13 \rangle$$

$$\Gamma_3^+ = \langle 3, 4, 5 \rangle, \quad \text{End}(\Gamma_3^+) = \langle 7, 9, 13 \rangle$$

$$\text{e} \quad \max_{\text{End}(\Gamma_3^+)} = \langle 7, 9, 13 \rangle$$

$$\Gamma_4^+ = \langle 4, 5, 6 \rangle, \quad \text{End}(\Gamma_4^+) = \langle 9, 13, 11 \rangle$$

$$\text{e} \quad \max_{\text{End}(\Gamma_4^+)} = \langle 9, 13 \rangle$$

$$\Gamma_6^+ = \langle 6, 7 \rangle, \quad \text{End}(\Gamma_6^+) = \langle 11, 14 \rangle$$

$$\text{e} \quad \max_{\text{End}(\Gamma_6^+)} = \langle 11, 14 \rangle$$

$$\Gamma_2^+ = \langle 2, 5, 7 \rangle, \text{End}(\Gamma_2^+) = \langle 12, 13, 14 \rangle$$

$$\text{e } \max_{\text{End}(\Gamma_2^+)} = \langle 12, 13, 14 \rangle$$

$$\Gamma_5^+ = \langle 5, 7 \rangle, \text{End}(\Gamma_5^+) = \langle 13, 14 \rangle$$

$$\text{e } \max_{\text{End}(\Gamma_5^+)} = \langle 13, 14 \rangle$$

$$\Gamma_7^+ = \langle 7 \rangle, \text{End}(\Gamma_7^+) = \langle 14 \rangle$$

$$\text{e } \max_{\text{End}(\Gamma_7^+)} = \langle 14 \rangle$$

A sequência de cardinalidade máxima entre todas as $\max_{\text{End}(\Gamma_x^+)}^+$,
é evidentemente $\langle 6, 7, 9, 13 \rangle$, cujos elementos são os endereços
dos extremos direitos dos intervalos do conjunto $C = \{1, 3, 4, 5\}$
que é uma clique máxima de G .

Agora vamos estudar a complexidade do algoritmo. A de-
terminação das sequências Γ_i^+ para cada i , tem complexidade de
 $O(n)$.

Antes deste processo podemos determinar os endereços
dos extremos direitos dos intervalos e assim, através de Γ_i^+ ,
temos imediatamente $\text{End}(\Gamma_i^+)$. Para cada $\text{End}(\Gamma_i^+)$, devemos deter-
minar a subsequência crescente máxima e o algoritmo utilizado
tem complexidade de $O(d \log_2(p+1))$ onde d é o tamanho da sequên-
cia $\text{End}(\Gamma_i^+)$ e p é o comprimento da subsequência crescente máxima
de $\text{End}(\Gamma_i^+)$.

Como o algoritmo é processado n vezes, então a comple-
xidade total é limitada por $O(\sum_{i=1}^n d_i \log_2 w)$ onde w é a card-
nalidade da subsequência crescente máxima. Como cada d_i é o
grau do vértice i no subgrafo de G induzido pelos vértices de
 Γ_i^+ , $\sum_{i=1}^n d_i = m$, isto é o número de arestas de G . Assim obtemos:
 $O(n + m \log_2 w)$.

III.2.3. ALGORITMO DE ROTEM E URRUTIA

ROTEM e URRUTIA em (26) obtiveram um algoritmo mais eficiente que os dois primeiros apresentados, para a determinação de uma clique máxima em grafos circulares, seguindo a mesma linha de raciocínio de Gavril e Buckingham. E, através da inserção de poucos comandos, numa operação que não compromete a complexidade do algoritmo, eles passam a obter não apenas uma, mas todas as cliques máximas do grafo em questão.

Os autores observaram que no algoritmo de Buckingham, apesar de ser um aprimoramento do de Gavril, ainda poderia ser melhorado já que ele trabalhava com algumas subsequências de S que não eram maximais, isto é, que se incluíam em outras e, portanto, o estudo delas não contribuiria para a obtenção de uma nova clique.

Eles, então, teriam que identificar as subsequências maximais de S e destas obter as que correspondem a uma clique máxima dos subgrafos de G gerados por elas.

Verificaram que em (8), Even e Itai identificaram subsequências com estas características quando inseriam intervalos artificiais em S em posições estratégicas, obtendo uma nova sequência, a SS , definida no Capítulo II. Os grafos gerados pelas sequências S e SS têm o mesmo número cromático e, não considerando os vértices artificiais, eles possuem as mesmas cliques maximais. Na seção II.4 fizemos uma descrição completa deste processo. Ele consiste na inserção do intervalo artificial a_i , $i = 1, 2, \dots, k$ em S , após a i -ésima sequência maximal de extremos esquerdos. Assim, podemos distinguir em SS , k subsequências SSa_i , $i = 1, 2, \dots, k$, constituídas pe

los intervalos de rótulos inferiores ao de a_i , cujos extremos esquerdos se localizam em posições anteriores à do extremo esquerdo de a_i e cujos extremos direitos ocupam posições posteriores à do extremo direito de a_i .

Se $C = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ é uma clique máxima de G , evidentemente a sequência $|v_1 v_2 \dots v_p v_1 v_2 \dots v_p|$ é uma subsequência de SSa_j para algum intervalo artificial a_j de SS . A justificativa para esta afirmação resume-se na seguinte constatação: como o extremo direito de v_1 ocupa em SS uma posição posterior à do extremo esquerdo de v_p , haverá entre eles um intervalo artificial, digamos a_j , que é inserido após a sequência maximal contígua de extremos esquerdos na qual v_p se inclui. E devido ao processo pelo qual SSa_j é formada, ela tem $|v_1 v_2 \dots v_p v_1 v_2 \dots v_p|$ como uma de suas subsequências.

Assim, ao invés de determinarem a subsequência de S gerada pelos elementos de Γ_x^+ , $\forall x$, como Buckingham solicita, Rotem e Urrutia determinam apenas as de SSa_i , $\forall a_i$ artificial.

Para isto eles determinam P em SS , que nada mais é que a sequência dos extremos direitos dos intervalos que a formam. O primeiro elemento de P , por construção, corresponde ao primeiro intervalo artificial de SS , o intervalo a_1 .

Seja a_i o intervalo artificial mais recentemente encontrado. Todo elemento de P de rótulo inferior ao de a_i e que se localiza à sua direita pertence a SSa_i .

Aqueles que formarem a maior subsequência crescente de SSa_i constituem uma clique máxima do grafo gerado por esta subsequência. Quando um novo vértice maior que a_i for encontrado este será o mais recente intervalo artificial encontrado e o mesmo processo deve ser repetido.

Os autores não determinam as sequências SSa_i , bem como as suas subsequências completas máximas separadamente para cada a_i . Eles fazem tudo simultaneamente e, com isto, conseguem diminuir a complexidade para $O(n^2)$.

Como exemplo, consideremos a sequência $S = |1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 1\ 3\ 6\ 4\ 7\ 6\ 2\ 5\ 7|$. Logo $SS = |1\ 2\ 3\ 4\ 5\ a_1\ a_1\ 1\ 3\ 6\ a_2\ a_2\ 4\ 7\ a_3\ a_3\ 6\ 2\ 5\ 7|$ e portanto $P = \langle a_1, 1, 3, a_2, 4, a_3, 6, 2, 5, 7 \rangle$ onde $5 < a_1 < 6$, $6 < a_2 < 7$ e $a_3 > 7$. O elemento a_1 é o primeiro intervalo artificial encontrado pelo algoritmo.

Em seguida, ele encontra o elemento 1, e como $1 < a_1$ ele o coloca no conjunto de filas relativas a a_1 , para que a subsequência crescente máxima seja determinada.

Assim, $Q_1^{a_1} = 1$.

O próximo elemento é o 3, e $3 < a_1$, logo:

$$Q_1^{a_1} = 1$$

$$Q_2^{a_1} = 3.$$

Em seguida, ele encontra a_2 que é maior que a_1 , portanto a_2 é o segundo intervalo artificial.

O outro elemento é 4.

Como $4 < a_1$ e $4 < a_2$ ele será inserido no conjunto de filas dos dois elementos. Logo, temos:

$$Q_1^{a_1} = 1$$

$$Q_1^{a_2} = 4$$

$$Q_2^{a_1} = 3$$

$$Q_3^{a_1} = 4$$

O próximo elemento é a_3 e como $a_3 > a_2$ ele é o terceiro intervalo artificial.

Em seguida vem 6. Mas como $6 > a_1$ ele não entra no conjunto de suas filas. Sendo $6 < a_2$ e $6 < a_3$ temos:

$$Q_1^{a_2} = 4 \quad Q_1^{a_3} = 6$$

$$Q_2^{a_2} = 6$$

Depois vem o 2, que é menor que a_1 , a_2 e a_3 . Logo:

$$Q_1^{a_1} = 1 \quad Q_1^{a_2} = 4, 2 \quad Q_1^{a_3} = 6, 2$$

$$Q_2^{a_1} = 3, 2 \quad Q_2^{a_2} = 6$$

$$Q_3^{a_1} = 4$$

O outro elemento é o 5, e ele deverá ser inserido nas filas de a_1 , a_2 e a_3 .

$$Q_1^{a_1} = 1 \quad Q_1^{a_2} = 4, 2 \quad Q_1^{a_3} = 6, 2$$

$$Q_2^{a_1} = 3, 2 \quad Q_2^{a_2} = 6, 5 \quad Q_2^{a_3} = 5$$

$$Q_3^{a_1} = 4$$

$$Q_4^{a_1} = 5$$

Finalmente, o último elemento é o 7, e como $7 > a_1$, $7 > a_2$ e $7 < a_3$ ele deverá ser inserido apenas no conjunto de filas de a_3 .

$$\text{Assim, } Q_1^{a_3} = 6, 2$$

$$Q_2^{a_3} = 5$$

$$Q_3^{a_3} = 7$$

A configuração final dos três conjuntos de filas é:

$$Q_1^{a_1} = 1 \quad Q_1^{a_2} = 4, 2 \quad Q_1^{a_3} = 6, 2$$

$$Q_2^{a_1} = 3, 2 \quad Q_2^{a_2} = 6, 5 \quad Q_2^{a_3} = 5$$

$$Q_3^{a_1} = 4 \quad Q_3^{a_3} = 7$$

$$Q_4^{a_1} = 5$$

Como a_1 tem o maior conjunto de filas, SSa_1 contém a subsequência contígua completa máxima formada pelo intervalos de $C = \{1,3,4,5\}$ que é a clique máxima encontrada.

O algoritmo utilizado por Rotem e Urrutia, para determinar uma subsequência crescente máxima de uma sequência dada, é uma pequena alteração do algoritmo tradicional. Nesta, toda a sequência, da qual se quer obter a subsequência crescente máxima, é utilizada como entrada. Enquanto que, no usado pelos autores, apenas um elemento da sequência dada torna-se conhecido em cada iteração. Seja x o elemento de P que está sendo examinado pelo algoritmo. Se x é maior que o último intervalo artificial encontrado, então, ele passa a ser um deles. Caso contrário, ele poderá pertencer a várias das subsequências SSa_i , $i = 1, 2, \dots, K$. Tão logo x é identificado como elemento da subsequência SSa_j , ele é inserido no conjunto de filas $Q_j^{a_j}$, utilizado para obter a clique máxima do grafo gerado por SSa_j .

Utilizando ainda uma variável auxiliar para armazenar a fila que x passou a ocupar em Q^a_j , eles conseguem otimizar a busca da posição de x em $Q^{a_{j-1}}$, caso $x \in S_{a_{j-1}}$. Assim, reduzem a complexidade do processo de $O(n \log n)$ para $O(n)$.

Existem exatamente n intervalos não artificiais e k artificiais. Para cada intervalo não artificial foram feitas $O(n)$ comparações e para cada intervalo artificial apenas uma. Assim a complexidade final é $O(n^2 + k)$ ou simplesmente $O(n^2)$ já que k é $O(n)$.

III.3. CLIQUES MÁXIMAS EM GRAFOS CIRCULARES VALORADOS

III.3.1. INTRODUÇÃO

Consideremos, agora, os grafos valorados nos quais a cada vértice é associado um valor numérico denominado peso. Os algoritmos que vimos anteriormente também podem ser aplicados a estes grafos, desde que os pesos dos vértices sejam iguais. Caso contrário, uma clique valorada máxima possui a soma dos pesos dos vértices que a compõem máxima entre todas as demais. Sendo assim, não podemos aplicar os processos anteriores para identificar a clique máxima em um grafo valorado porque eles procuram a de maior cardinalidade.

III.3.2. ALGORITMO DE BUCKINGHAM

BUCKINGHAM em (6) desenvolveu um algoritmo para determinar a subsequência crescente valorada máxima da sequência Γ_x^+ , de extremos direitos dos intervalos de S_x^* , para cada intervalo x de uma sequência S da qual um grafo valorado se deriva. Depois de todas se tornarem conhecidas ele identifica aquela cuja soma dos pesos de seus vértices é máxima.

Inicialmente, o procedimento define uma variável $\ell(y)$ associada a todo y da sequência Γ_x^+ e atribui a ela o valor do peso de y . O valor de $\ell(y)$ a cada etapa do processamento vai sendo atualizado, de modo que sempre armazene o peso da subsequência crescente máxima encontrada que tem y como último elemento.

Fazendo q igual a Γ_x^+ , o algoritmo chama o procedimento recursivo $\text{Proc}(i)$, onde i é o primeiro elemento de q . O procedimento $\text{Proc}(i)$ percorre sequencialmente q da esquerda para a direita e para cada j , tal que j forme uma subsequência crescente com i . Portanto, para $i < j$, ele faz

$$\ell(j) = \max\{\ell(j), \ell(i) + \text{peso}(j)\}.$$

Caso $i > j$, $\langle i, j \rangle$ não é uma sequência crescente e o procedimento $\text{Proc}(j)$ é chamado recursivamente. No momento em que todo elemento j de q tiver seu valor de $\ell(j)$ atualizado, i é excluído de q .

Consideremos como exemplo a sequência $S = |1\ 2\ 3\ 4\ 5$
 $1\ 4\ 2\ 3\ 5|$ e seja 1 o peso dos vértices 1, 2, 3 e 5 e seja 3 o peso do vértice 4.

$$q = \langle 1, 4, 2, 3, 5 \rangle$$

$$\ell(1) = \ell(2) = \ell(3) = \ell(5) = 1 \quad \text{e} \quad \ell(4) = 3$$

$$\ell(4) = \max\{\ell(4), \ell(1) + \text{peso}(4)\} = 4$$

$$\ell(2) = \max\{\ell(2), \ell(1) + \text{peso}(2)\} = 2$$

$$\ell(3) = \max\{\ell(3), \ell(1) + \text{peso}(3)\} = 2$$

$$\ell(5) = \max\{\ell(5), \ell(1) + \text{peso}(5)\} = 2$$

Retirando 1 de q , ela torna-se:

$$q = \langle 4, 2, 3, 5 \rangle$$

Como $2 \leq 4$, então, estudaremos a subsequência $\langle 2, 3, 5 \rangle$ de q .

$$\ell(3) = \max\{\ell(3), \ell(2) + \text{peso}(3)\} = 3$$

$$\ell(5) = \max\{\ell(5), \ell(2) + \text{peso}(5)\} = 3$$

Retirando 2 de q ela torna-se:

$$q = \langle 4, 3, 5 \rangle$$

Como $3 < 4$, devemos estudar a subsequência $\langle 3, 5 \rangle$ de q .

$$\ell(5) = \max\{\ell(5), \ell(3) + \text{peso}(5)\} = 4$$

Retirando 3 de q , temos:

$$q = \langle 4, 5 \rangle$$

$$\ell(5) = \max\{\ell(5), \ell(4) + \text{peso}(5)\} = 5$$

Retirando 4 de q , ela torna-se

$$q = \langle 5 \rangle$$

e como $\ell(5)$ tem o valor máximo, a sequência que a originou é a

procurada. Logo $\{1,4,5\}$ é a clique valorada máxima de G .

Vamos determinar, agora, a complexidade do algoritmo. Inicialmente, para identificar as sequências S_i^* , $\forall i$, a complexidade é de $O(n)$. Depois, para cada sequência Γ_i^+ de extremos direitos de S_i^* ele determina os valores de $\ell(j)$, $\forall j \in \Gamma_i^+$. Isto é feito em $O(|\Gamma_i^+|)$. Em seguida, para cada j , tal que $i < j$, ele atualiza o valor de $\ell(j)$; Mas sendo $i < j$, existe a aresta (i,j) no subgrafo $G(\Gamma_i^+)$ a complexidade deste processo é $O(\text{grau}_{G(\Gamma_i^+)}(i))$. Quando i é excluído da sequência, o processo é repetido para o elemento i' que ocupa a primeira posição da sequência. A complexidade final do processo é, portanto, $O(m_{G(\Gamma_i^+)})$, isto é, da ordem do número de arestas de $G(\Gamma_i^+)$ e, assim, para cada i temos: $O(m_{G(\Gamma_i^+)} + |\Gamma_i^+|)$. Mas, isto nos conduz a $O(\sum_{i=1}^n O(m_{G(\Gamma_i^+)} + |\Gamma_i^+|))$ que é limitado por $O(m\Delta + m)$ ou simplesmente $O(m\Delta)$, onde Δ é o grau máximo de G . $O(m\Delta)$ é a complexidade para determinar as cliques valoradas máximas de $Q(\Gamma_i^+)$, $\forall i$. A clique máxima é aquela de maior peso, logo, de vemos acrescentar $O(n)$ naquela complexidade.

Finalmente, a complexidade resultante é $O(n + m\Delta)$.

III.3.3. ALGORITMO DE HSU

Em (18) HSU apresenta um algoritmo $O(n^2 + m \log \log n)$ para determinar uma clique valorada máxima de grafos circulares.

Primeiramente, ele determina, para cada intervalo i de S , a clique de maior peso do grafo gerado por S_i^+ . Depois, entre elas, com $O(n)$ comparações ele determina a máxima.

Inicialmente o algoritmo faz para cada i :

$$\lambda(i) = \text{peso}(i)$$

$$\lambda(j) = 0, \quad \forall j \in \Gamma_i^+ \text{ e } j \neq i.$$

Ao término do processamento, a variável $\lambda(i)$ armazena o peso da clique máxima de $G(\Gamma_i^+)$ que contém i .

Em seguida, para todo $j \in \Gamma_i^+ - \{i\}$, o algoritmo faz $\lambda(j) = \text{peso}(j) + \max\{\lambda(k) / k \in \Gamma_i^+ \cap \Gamma_j^-\}$.

Hsu percebeu que, se $k_1 < k_2$, o extremo direito de k_1 ocupa em S uma posição posterior ao de k_2 e, além disso, se $\lambda(k_1) < \lambda(k_2)$, o valor de $\lambda(k_1)$ não será nunca usado no cálculo dos $\lambda(j)$, para $j > k_2$. Assim, quando existem dois intervalos nas condições de k_1 e k_2 ele diz que k_2 domina k_1 .

Podemos, então, acelerar o processamento eliminando todos os intervalos dominados. E com os dominantes formar uma sequência crescente, de modo que a escolha do $\lambda(k)$ máximos tenha uma complexidade de $O(\log n)$. Aplicando um modo mais sofisticado para implementar as filas de prioridade, baseando-se na idéia de Van Emde Boas, reduz-se a complexidade para $O(\log \log n)$.

Para excluir os intervalos dominados, a operação anterior deverá ser repetida $O(\text{grau}(i))$ vezes. Logo, para cada i , a complexidade do processo é $O(\text{grau}(i) \log \log n)$ e a final é $O(n^2 + m \log \log n)$ já que $O(n^2)$ é a necessária para formar as listas de adjacências dos vértices.

Como exemplo, vamos considerar a sequência: $S := | 1 2 3 4 5 1 4 2 3 5 |$ com os pesos: $\text{peso}(1) = \text{peso}(2) = \text{peso}(3) = \text{peso}(5) = 1$ e $\text{peso}(4) = 3$.

$\Gamma_1^+ = \{1,2,3,4,5\}$. Seja λ a seqüência dos $\lambda(i)$ dominantes.

$$\lambda(1) = 1 \text{ e } \lambda(2) = \lambda(3) = \lambda(4) = \lambda(5) = 0.$$

$$\lambda = \langle \lambda(1) \rangle$$

$$\begin{aligned} \lambda(2) &= \text{peso}(2) + \max\{\lambda(k), k < 2\} = \\ &= \text{peso}(2) + \lambda(1) = 2 \end{aligned}$$

$$\lambda = \langle \lambda(1), \lambda(2) \rangle$$

$$\begin{aligned} \lambda(3) &= \text{peso}(3) + \max\{\lambda(1), \lambda(2)\} \\ &= 1 + 2 = 3 \end{aligned}$$

$$\lambda = \langle \lambda(1), \lambda(2), \lambda(3) \rangle$$

$$\lambda(4) = \text{peso}(4) + \max\{\lambda(1)\} \quad \text{j\`a que}$$

$$4 \notin \Gamma_1^+ \cap \Gamma_2^- \text{ e } 4 \notin \Gamma_1^+ \cap \Gamma_3^-$$

$$\lambda(4) = 3 + 1 = 4$$

como $\lambda(4) > \lambda(2)$ e $\lambda(4) > \lambda(3)$

4 domina 2 e 3. Logo

$$\lambda = \langle \lambda(1), \lambda(4) \rangle$$

$$\begin{aligned} \lambda(5) &= \text{peso}(5) + \max\{\lambda(1), \lambda(4)\} \\ &= 1 + 4 = 5 \end{aligned}$$

$$\lambda = \langle \lambda(1), \lambda(4), \lambda(5) \rangle$$

E assim $C_{(1)} = \{1,4,5\}$ e esta ser\`a a clique valorada m\`axima de G.

CAPÍTULO IV

ORIENTAÇÃO COBERTA

IV.1. CONCEITOS E NOTAÇÃO

Seja G um grafo arbitrário e \vec{G} uma orientação acíclica de G . Sejam v e w dois vértices de \vec{G} , tais que v é um ancestral próprio de w . Denotaremos por $\vec{G}_{v,w}$ o subgrafo de \vec{G} induzido pelos vértices simultaneamente descendentes de v e ancestrais de w .

Dizemos que $(v,w) \in E(\vec{G})$ é uma aresta de cobertura se, e somente se, o subgrafo $\vec{G}_{v,w}$ for transitivo.

Observando a figura (IV.1.1) podemos notar que todas as arestas da orientação \vec{G}_1 de G_1 são de cobertura. Para o grafo G_2 apresentamos duas orientações acíclicas \vec{G}_2 e \vec{G}'_2 . Na orientação \vec{G}_2 a aresta (v_1, v_4) não é de cobertura, já que o subgrafo induzido pelos vértices que são simultaneamente descendentes de v_1 e ancestrais de v_4 não é transitivo. Para isto, falta-lhe a aresta (v_1, v_3) . A orientação \vec{G}'_2 , entretanto, é totalmente constituída por arestas de cobertura. Uma orientação acíclica que possui esta característica é denominada orientação coberta. Desta forma, os grafos G_1 e G_2 da figura (IV.1.1) admitem orientação coberta.

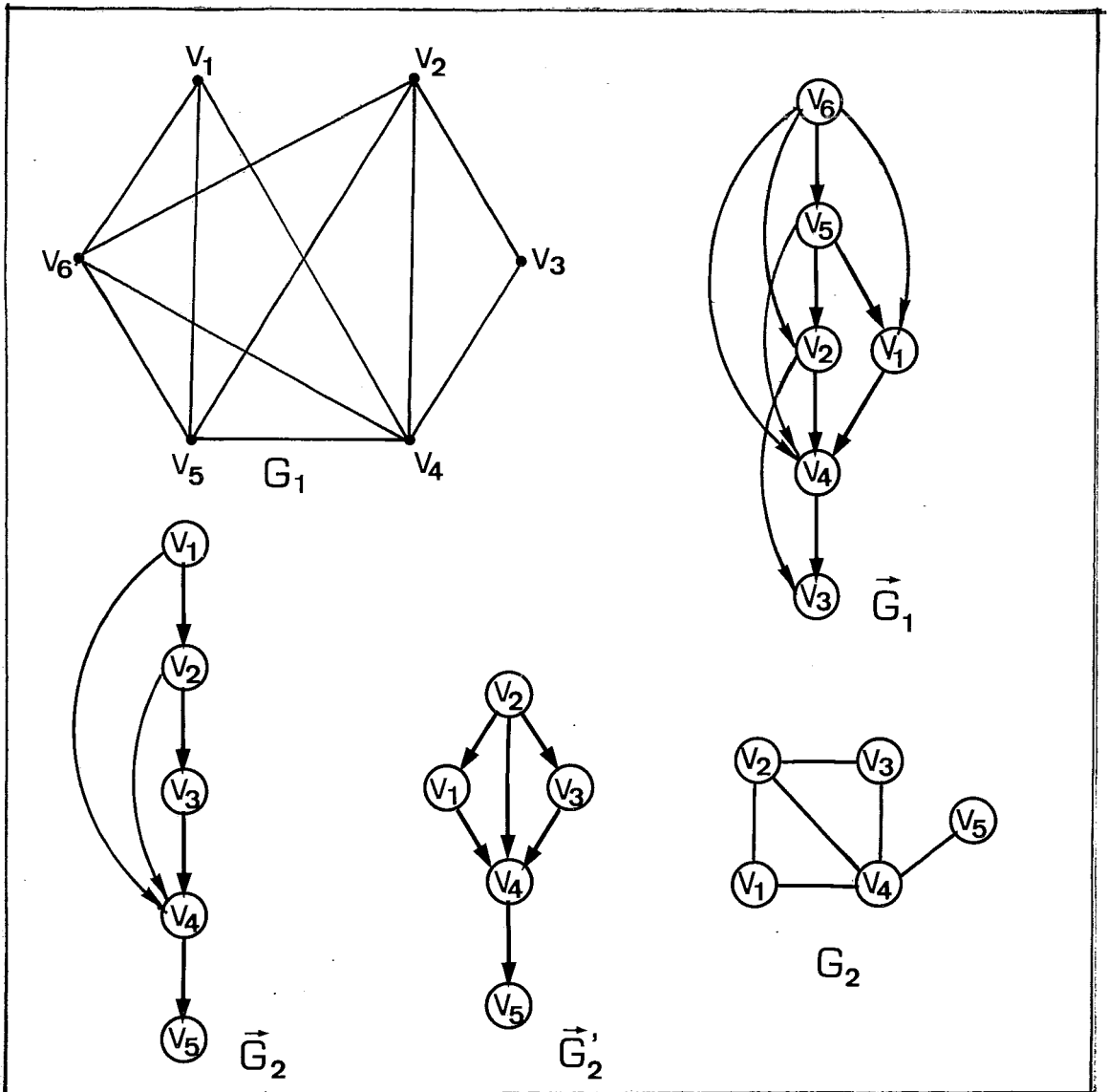


Figura IV.1.1.

Dentre as classes de grafos que admitem esta orientação, podemos citar a dos grafos de comparabilidade. Isto se deve ao fato de eles admitirem orientação transitiva, na qual todas as arestas são de cobertura.

A figura (IV.1.2) ilustra orientações cobertas em (a) e (c) e não cobertas em (b) e (d). O grafo subjacente dos digrafos das partes (a) e (b) da referida figura é um grafo circular, enquanto que o subjacente dos outros dois digrafos não o é. Através destes exemplos observamos a existência de grafos circulares e não circulares que admitem uma orientação coberta.

Na próxima seção, provaremos que admitir uma orientação coberta é uma característica da classe dos grafos circulares.

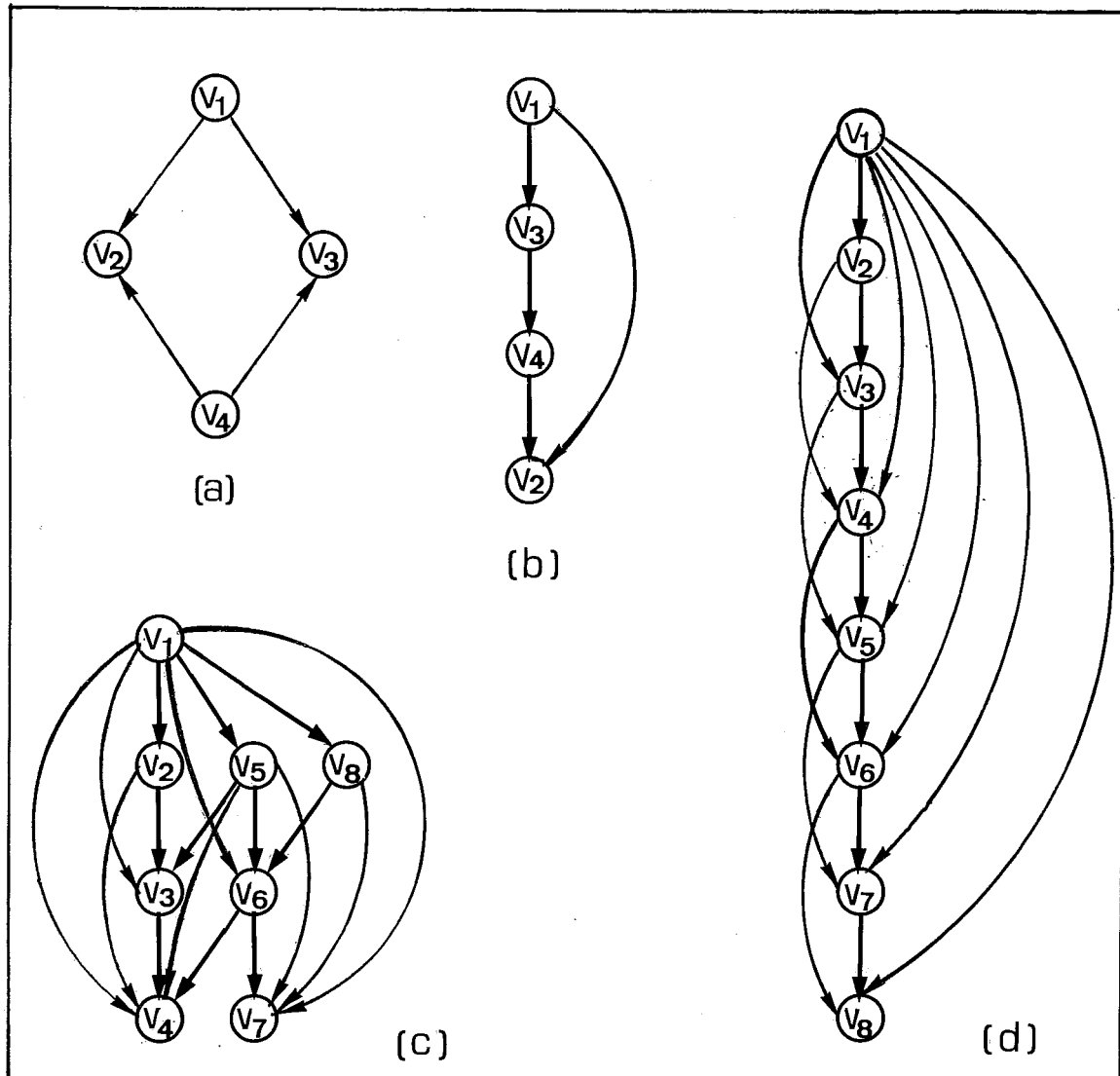


Figura IV.1.2.

E os grafos que não admitem tal orientação? Eles existem? O grafo da figura (IV.1.3(a)) responde afirmativamente a esta pergunta. Trata-se de um dos grafos de MYCIELSKI, como consta em (28). Na seção IV.3 apresentaremos a prova de que ele não admite orientação coberta. Isto decorre do fato de ele ser o menor grafo sem triângulo que não possui orientação acíclica alguma sem arestas implícitas por transitividade.

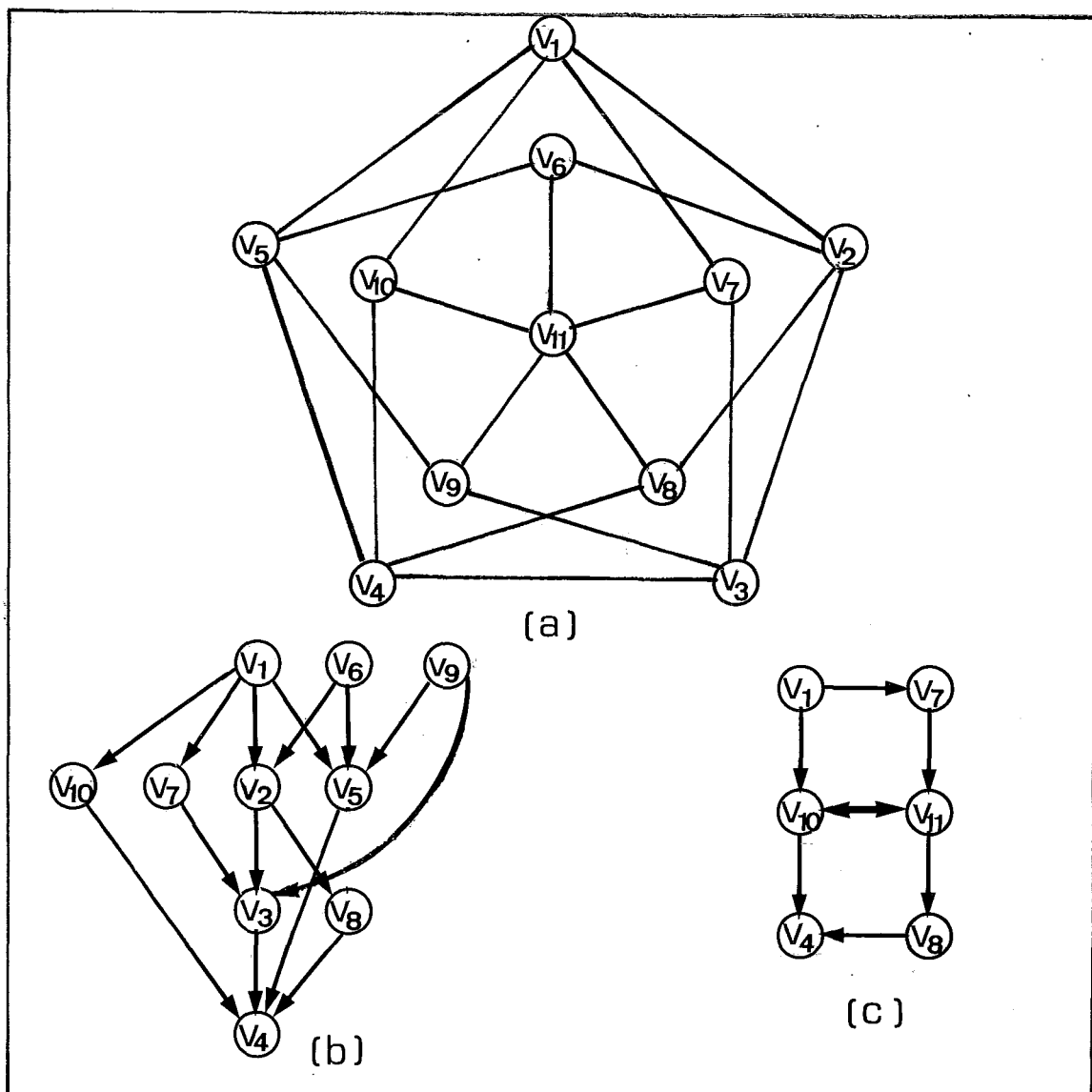


Figura IV.1.3.

Apenas como uma ilustração adicional, vamos procurar atribuir orientações às arestas do grafo G da figura (IV.1.3(a)) com o objetivo de obter uma orientação coberta e veremos que isto é impossível. Como o citado grafo é conexo e não possui triângulos, todas as cliques têm cardinalidade 2. Logo, não pode ocorrer nenhuma aresta implícita por transitividade. Além disso, devemos ter o cuidado de obter uma orientação acíclica.

Podemos iniciar o processo de orientação pelo ciclo $\langle v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_1 \rangle$, obtendo as seguintes arestas: (v_1, v_2) , (v_2, v_3) , (v_3, v_4) , (v_5, v_4) e (v_1, v_5) . As arestas não orienta-

das do ciclo $\langle v_1, v_2, v_3, v_7, v_1 \rangle$ devem ser, então, as seguintes: (v_1, v_7) e (v_7, v_3) . (v_2, v_8) e (v_8, v_4) completam as orientações do ciclo $\langle v_2, v_3, v_4, v_8, v_2 \rangle$. (v_9, v_5) e (v_9, v_3) podem ser as arestas do ciclo $\langle v_3, v_4, v_5, v_9, v_3 \rangle$ enquanto que (v_1, v_{10}) e (v_{10}, v_4) completam o ciclo $\langle v_1, v_5, v_4, v_{10}, v_1 \rangle$. (v_6, v_2) e (v_6, v_5) podem ser as arestas do ciclo $\langle v_1, v_2, v_6, v_5, v_1 \rangle$. Até o momento conseguimos obter uma orientação coberta para o subgrafo de G induzido pelos vértices de $V(G) - \{v_{11}\}$, que pode ser vista na figura (IV.1.3(b)).

Agora devemos orientar as arestas que têm o vértice v_{11} como um de seus extremos. Como o ciclo $\langle v_6, v_2, v_8, v_{11}, v_6 \rangle$ já tem as arestas (v_6, v_2) e (v_2, v_8) orientadas, devemos orientar as restantes assim: (v_6, v_{11}) e (v_{11}, v_8) . Em $\langle v_6, v_{11}, v_9, v_5, v_6 \rangle$ existem as arestas (v_6, v_5) , (v_9, v_5) e (v_6, v_{11}) , logo, a outra deverá ser (v_9, v_{11}) . Enquanto que $\langle v_3, v_7, v_{11}, v_9, v_3 \rangle$ já possui as arestas (v_7, v_3) , (v_9, v_3) e (v_9, v_{11}) , portanto, (v_7, v_{11}) deverá ser a outra aresta. Finalmente, resta-nos orientar a aresta que tem como extremos os vértices v_{10} e v_{11} . Devemos observar que ela faz parte dos dois ciclos a seguir: (1) $\langle v_1, v_7, v_{11}, v_{10}, v_1 \rangle$ e (2) $\langle v_4, v_8, v_{11}, v_{10}, v_4 \rangle$. De acordo com o ciclo (1) ela deverá ser (v_{10}, v_{11}) e segundo o ciclo (2) ela deverá ser (v_{11}, v_{10}) e, assim, chegamos a uma contradição, ilustrada pela figura (IV.1.3(c)). Podemos recomeçar o processo de orientação das arestas, já que utilizamos apenas uma das possibilidades, contudo esgotaremos todas elas e não conseguiremos obter uma orientação coberta para o grafo G .

Surge, agora, a questão da importância da introdução deste novo conceito. Afinal, em que os grafos que admitem orientação coberta diferem dos demais? E na classe dos grafos que

a admitem, qual a razão que nos faz preterir as orientações não cobertas em função destas?

Buscaremos as respostas para estas questões no próprio conceito de orientação coberta. Lembramos que, para um grafo G admitir uma orientação coberta é necessário que exista uma orientação acíclica na qual todas as arestas sejam de cobertura. E, uma aresta (v,w) é de cobertura se, e somente se, o subdigrafo $\vec{G}_{v,w}$ de \vec{G} induzido pelos vértices simultaneamente descendentes de v e ancestrais de w for transitivo. Ora, isto significa que os vértices de cada caminho de v a w em \vec{G} definem uma clique de G e que a clique $\{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ de G constitui o caminho $\langle v_1, v_2, \dots, v_p \rangle$ em \vec{G} . Além disso, se (v,w) for uma aresta de cobertura especial em \vec{G} , ela definirá uma clique maximal de G . Esta equivalência de conceitos aliada à facilidade de obtermos uma orientação coberta para grafos circulares, nos impulsionou ao estudo deste assunto. Os resultados obtidos se encontram distribuídos no restante deste capítulo e no próximo.

IV.2. ORIENTAÇÃO COBERTA EM GRAFOS CIRCULARES

A figura (IV.1.2) contém em suas partes (a) e (b) duas orientações acíclicas para o mesmo grafo circular, o ciclo sem cordas de quatro vértices. Apenas a primeira delas é uma orientação coberta. Admitir uma orientação coberta é, como já dissemos, uma característica dos grafos circulares e é sobre este assunto que trataremos a seguir.

Consideremos um grafo circular G conhecido através

de uma seqüência circular S que o representa. Durante o processo de formação de S dado na seção II.2, os vrtices de G são rotulados e estes mesmos rótulos serão utilizados na obtenção de uma orientação \vec{G} de G . Orientando cada aresta de G do vértice de menor para o de maior rótulo encontramos \vec{G} , que é uma orientação acíclica de G , a qual identificamos como obtida de S .

Na figura (IV.2.1) há um diagrama circular, cujas cordas foram rotuladas para que a seqüência circular S fosse de terminada. Há também o grafo circular G gerado pelo diagrama, e \vec{G} que é uma orientação acíclica de G obtida de S .

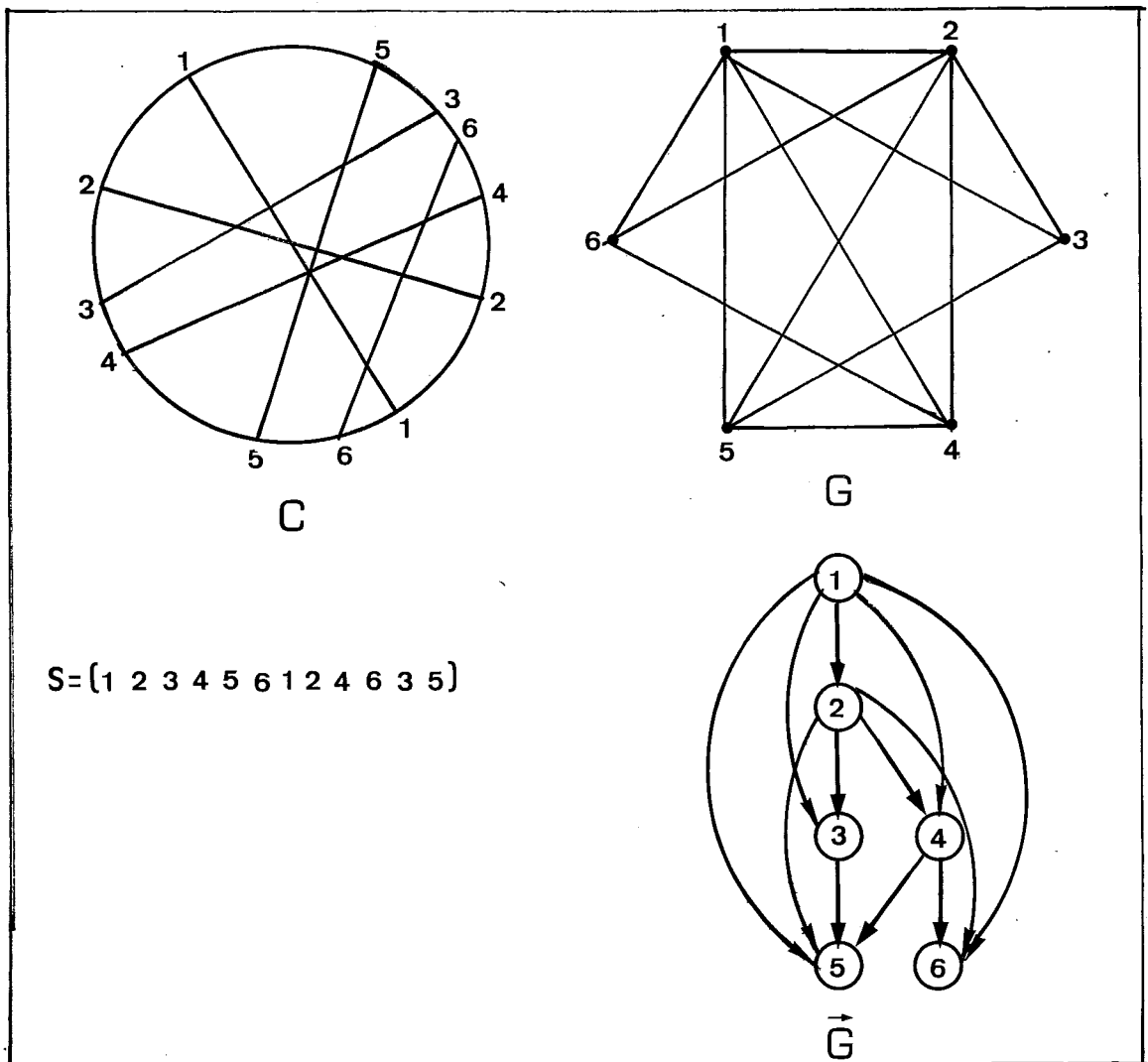


Figura IV.2.1.

A seguir, provaremos que esta orientação acíclica \vec{G} , obtida de forma imediata a partir de S , é também uma orientação coberta de G . Para isto, entretanto, torna-se necessário apresentarmos algumas propriedades dos grafos circulares. A primeira delas relaciona as posições dos extremos esquerdos e direitos dos intervalos de S que correspondem aos vértices de um caminho em \vec{G} e resume-se no teorema a seguir.

TEOREMA IV.2.1 - Se v e w ($v < w$) são vértices do grafo circular G e elementos de um caminho orientado P de \vec{G} , então, os extremos esquerdo e direito de v ocorrem, respectivamente, antes dos extremos esquerdo e direito de w em S .

PROVA

Seja $P' = \langle v = u_0, u_1, u_2, \dots, u_k = w \rangle$, $k \geq 1$, o subcaminho de P cujos extremos são v e w . Lembrando que $S^{-1}(E(u))$ e $S^{-1}(D(u))$ denotam, respectivamente, as posições ocupadas pelos extremos esquerdo e direito de u em S e que se a aresta $(u_i, u_j) \in E(\vec{G})$, então, $S^{-1}(E(u_i)) < S^{-1}(E(u_j)) < S^{-1}(D(u_i)) < S^{-1}(D(u_j))$, podemos escrever:

$$S^{-1}(E(u_i)) < S^{-1}(E(u_{i+1})) < S^{-1}(D(u_i)) < S^{-1}(D(u_{i+1}))$$

para todo i , $0 \leq i < k$.

Logo, como $u_0 = v$ e $u_k = w$, para todo j , $1 \leq j \leq k$, temos:

$$(A) \quad S^{-1}(E(v)) < S^{-1}(E(u_j)) \leq S^{-1}(E(w))$$

$$(B) \quad S^{-1}(D(v)) < S^{-1}(D(u_j)) \leq S^{-1}(D(w)).$$

Δ

Consideremos, como exemplo, o grafo da figura (IV.2.1) e deste vamos examinar o caminho $P = \langle 1, 2, 4, 6 \rangle$. A figura (IV.2.2) contém a tabela das posições ocupadas pelos extremos esquerdo e direito de cada intervalo de S que corresponde a um vértice de G . Observando-a comprovamos que:

$$(A) \ S^{-1}(E(1)) < S^{-1}(E(2)) < S^{-1}(E(4)) < S^{-1}(E(6))$$

$$(B) \ S^{-1}(D(1)) < S^{-1}(D(2)) < S^{-1}(D(4)) < S^{-1}(D(6)).$$

u	1	2	3	4	5	6
$S^{-1}(E(u))$	1	2	3	4	5	6
$S^{-1}(D(u))$	7	8	11	9	12	10

Figura IV.2.2.

A segunda propriedade, à qual nos referimos, é uma consequência da primeira e nós a utilizaremos não só para provar o principal resultado desta seção (Teorema IV.2.2) como também para justificar o algoritmo que determina todas as cliques maximais de grafos circulares que será apresentado no próximo capítulo.

COROLÁRIO IV.2.1 - Sejam v e w ($v < w$) dois vértices do grafo circular G e elementos de um caminho orientado P de \vec{G} . Se $(v, w) \in E(\vec{G})$, então, $(v, u) \in E(\vec{G})$ para todo u ($u \neq v$), simultaneamente descendente de v e ancestral de w em P .

PROVA

Seja $P' = \langle v = u_0, u_1, u_2, \dots, u_k = w \rangle$, $K \geq 1$, o subcaminho de P de extremos v e w . O Teorema (IV.2.1) garante que:

$$(A) \quad S^{-1}(E(v)) < S^{-1}(E(u_1)) \dots < S^{-1}(E(w)) \quad e$$

$$(B) \quad S^{-1}(D(v)) < S^{-1}(D(u_1)) \dots < S^{-1}(D(w)).$$

Além disso, como $(v, w) \in E(\vec{G})$ temos: $S^{-1}(E(v)) < S^{-1}(E(w)) < S^{-1}(D(v)) < S^{-1}(D(w))$. Logo reunindo a última relação com (A) e (B), concluímos que:

$$(C) \quad S^{-1}(E(v)) < S^{-1}(E(u_i)) < S^{-1}(D(v)) < S^{-1}(D(u_i))$$

onde $u_i \in V(P')$ e $0 < i < K$.

Ora, os vértices que pertencem a $P' - \{v, w\}$ são exatamente aqueles vértices u que simultaneamente descendem de v e antecedem w em P e, como (C) se verifica, $(v, u) \in E(\vec{G})$.

Δ

Para ilustrar o último resultado, vamos observar o grafo G representado pela sequência S da figura (IV.2.3). Em \vec{G} encontramos a aresta $(2,7)$ e dois caminhos entre seus vértices: $P_1 = \langle 2,3,4,6,7 \rangle$ e $P_2 = \langle 2,3,5,6,7 \rangle$. Como podemos observar, além da aresta $(2,3)$ que pertence aos dois caminhos, as arestas $(2,4)$, $(2,6)$ e $(2,5)$ também pertencem a \vec{G} .

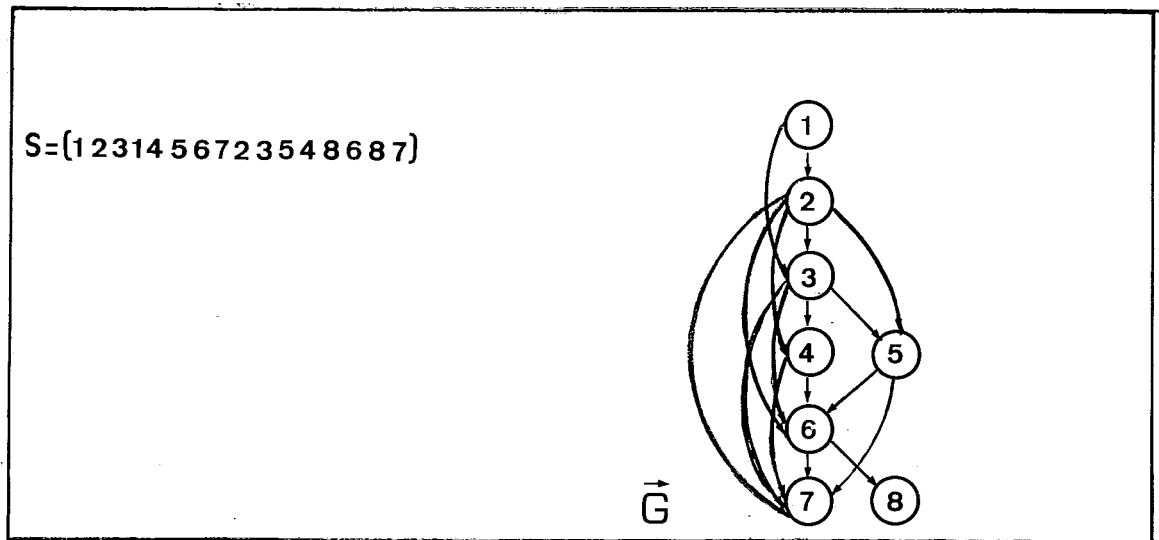


Figura IV.2.3.

Agora, já dispomos da teoria necessária para provar o que afirmamos no início desta seção.

TEOREMA IV.2.2 - A orientação acíclica \vec{G} , obtida a partir de S é uma orientação coberta do grafo circular G .

PROVA

Na orientação acíclica \vec{G} , podemos distinguir dois tipos de arestas: as que pertencem à redução transitiva \vec{G}_T de \vec{G} e as implícitas por transitividade.

Suponhamos, em primeiro lugar, que (v, w) seja uma aresta pertencente a $E(\vec{G}_T)$.

A aresta (v, w) é de cobertura, pois o digrafo $\vec{G}_{v, w}$ é transitivo, já que é constituído apenas pelos vértices v e w e pela aresta que eles definem.

Agora, vamos supor que (v, w) seja uma aresta implícita por transitividade, logo, existem outros caminhos de v a w em \vec{G} de comprimento maior ou igual a 2. Sejam P_1, P_2, \dots, P_r os caminhos de v a w pertencentes a \vec{G}_T . Eles são do tipo:

$P = \langle v = u_0, u_1, \dots, u_k = w \rangle$, sendo $k > 1$.

De acordo com o corolário (IV.2.1), as arestas (v, u_i) com $0 < i < k$, pertencem a $E(\vec{G})$. Logo, o conjunto de v\u00e9rtices $V' = \bigcup_{j=1}^r V(P_j)$ \u00e9 um subconjunto de Γv dos vizinhos do v\u00e9rtice v em \vec{G} . Como o grafo $G(\Gamma v)$ \u00e9 de Permuta\u00e7\u00e3o e sendo $G(V')$ um subgrafo induzido dele, $G(V')$ tamb\u00e9m \u00e9 de Permuta\u00e7\u00e3o.

Mas $\vec{G}_{v,w}$ nada mais \u00e9 que o digrafo obtido de $G(V')$ ap\u00f3s orientarmos suas arestas do v\u00e9rtice de menor para o de maior n\u00famero. Logo, $\vec{G}_{v,w}$ \u00e9 transitivo e (v,w) \u00e9, portanto, uma aresta de cobertura.

\u0394

Na figura (IV.2.4), encontramos o digrafo $\vec{G}_{2,7}$, um subdigrafo de \vec{G} da figura (IV.2.3). Podemos constatar que ele \u00e9 transitivo, verificando que a exist\u00eancia das arestas (u_i, u_j) e (u_j, u_k) implica na exist\u00eancia de (u_i, u_k) .

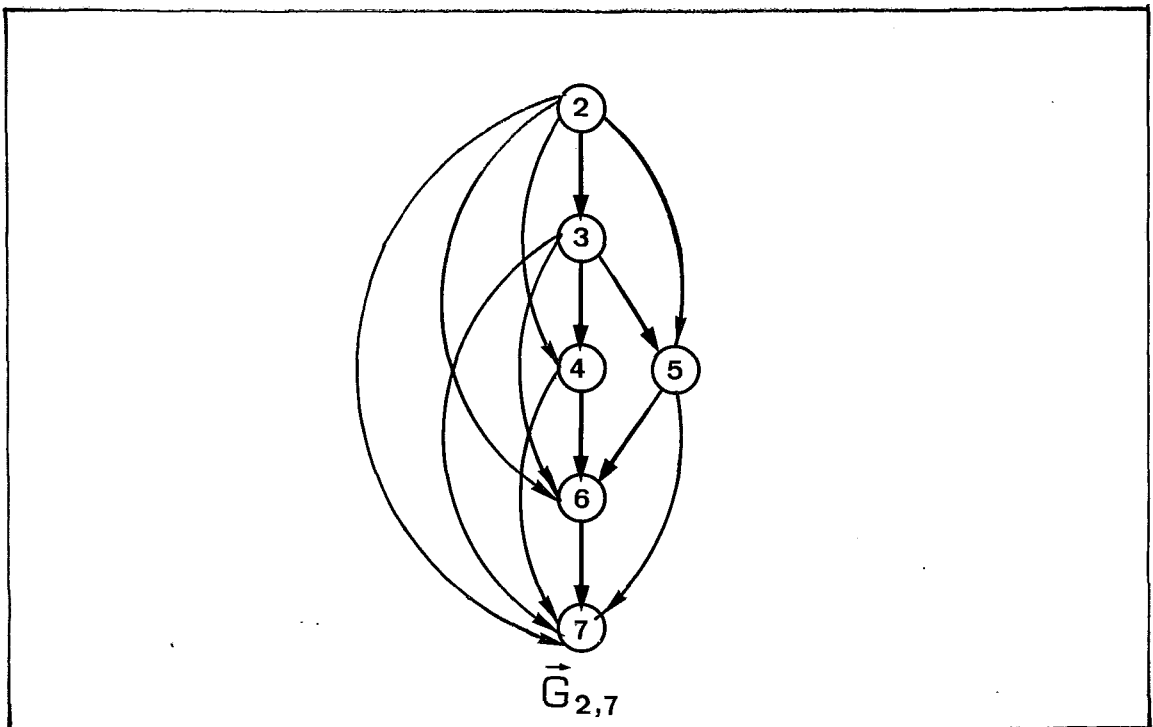


Figura IV.2.4.

IV.3. ORIENTAÇÃO COBERTA EM UM GRAFO QUALQUER

Sabemos que nem todo grafo admite orientação coberta e que a classe de grafos que a admite não congrega apenas os grafos circulares. Porém, se G é um grafo circular, podemos obter, como vimos na seção anterior, em tempo linear, uma orientação coberta \vec{G} para G . Esta facilidade, entretanto, não é encontrada quando trabalhamos com um grafo qualquer. Mostraremos, posteriormente, que o problema de verificar se um grafo qualquer admite orientação coberta é NP-completo. Antes, porém, será necessário apresentarmos dois tipos de grafos e um teorema que os relaciona.

Um grafo é denominado de anti-comparabilidade se ele admite uma orientação acíclica na qual nenhuma das arestas é implícita por transitividade. Baseando-nos nesta definição, deduzimos que todo grafo de anti-comparabilidade não possui triângulos, já que qualquer orientação imposta a suas arestas conduz à obtenção de um ciclo ou de uma aresta implícita por transitividade.

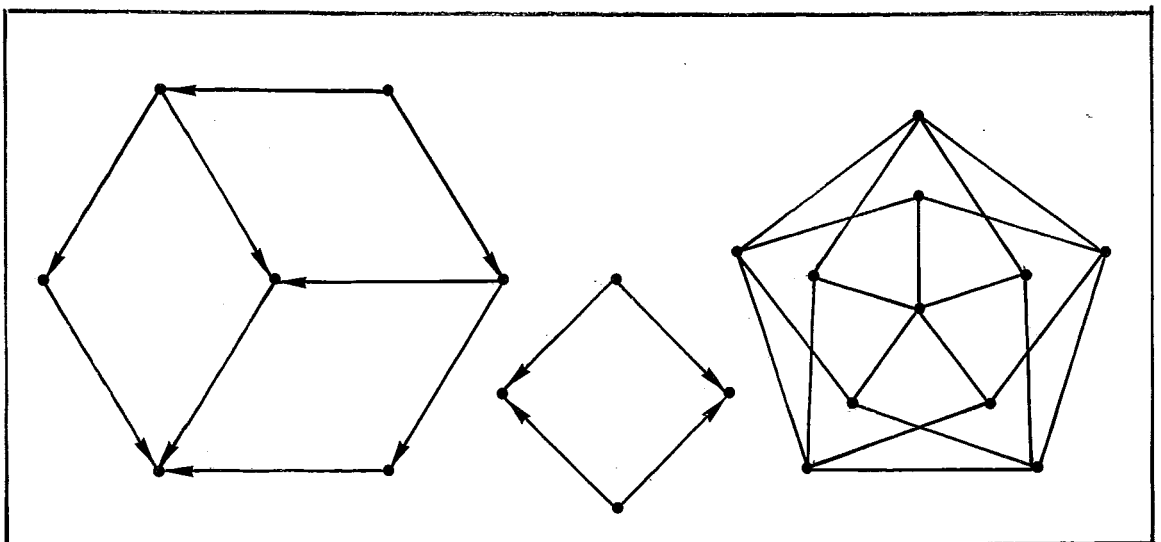


Figura IV.3.1.

Na figura (IV.3.1) encontramos uma orientação acíclica e sem arestas implícitas por transitividade para dois grafos de anti-comparabilidade, sendo o primeiro um grafo não circular e o segundo circular. O terceiro grafo apresentado não é circular nem de anti-comparabilidade. Não existe uma forma de orientarmos suas arestas sem obtermos um ciclo ou uma aresta implícita por transitividade. Este mesmo grafo nos serviu de exemplo na seção IV.1 quando introduzimos o conceito de orientação coberta.

Agora, vamos concentrar nossas atenções nos grafos que não possuem triângulos e demonstrar o seguinte teorema:

TEOREMA IV.3.1 - Seja G um grafo sem triângulos. G admite orientação coberta se, e somente se, G é de anti-comparabilidade.

PROVA

Supondo que G admite orientação coberta, seja \vec{G} esta orientação. Seja $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$, $k > 2$, um caminho qualquer em \vec{G} . A aresta $(v_1, v_k) \notin E(\vec{G})$, pois, caso contrário, como \vec{G} é uma orientação coberta, existiriam as arestas (v_1, v_i) em \vec{G} para todo i , $1 < i < k$. Isto, entretanto, contradiz o fato de G ser sem triângulos. Logo, \vec{G} é acíclica e não possui arestas implícitas por transitividade, portanto, G é de anti-comparabilidade. Agora, vamos supor o contrário, que G seja de anti-comparabilidade. Logo, ele admite uma orientação acíclica e sem arestas implícitas por transitividade. Em \vec{G} , para todo $v \in V(\vec{G})$, todo caminho de v a w , sendo $w \in A^+(v)$, é constituído apenas pela aresta (v, w) . Isto implica que $\vec{G}_{v,w}$ é transitivo e que \vec{G} é

uma orientação coberta.

Δ

O teorema anterior nos garante que o problema de verificar se um grafo sem triângulos admite orientação coberta e o que verifica se o mesmo grafo é de anti-comparabilidade têm a mesma complexidade, já que os dois conceitos são equivalentes.

A importância desta constatação se deve ao fato de ter sido recentemente provado por J. NESETRIL e V. RODL (22), que o problema de verificar se um grafo é de anti-comparabilidade é NP-completo. Logo, o outro problema, que vem a seguir a apresentado como Problema 2 também é NP-completo.

Sejam os problemas:

Problema 1

Dados: Um grafo G

Questão: G admite orientação coberta?

Problema 2

Dados: Um grafo G sem triângulos.

Questão: G admite orientação coberta?

O Problema 2 é uma restrição do Problema 1, já que o conjunto de dados deste contém o do Problema 2 e compartilham da mesma questão. Baseando-nos nos fatos anteriormente citados, podemos, então, apresentar o seguinte resultado:

TEOREMA IV.3.2 - O Problema 1 é NP-completo.

PROVA

O primeiro passo que devemos seguir para obter esta prova resume-se em verificar se o Problema 1 pertence à classe NP. Isto, porém, é imediato já que, se dispomos de uma orientação coberta \vec{G} de G , podemos fazer em tempo polinomial a constatação de que para toda $(v,w) \in E(\vec{G})$, $\vec{G}_{v,w}$ é transitivo. Finalmente, como o Problema 2 é NP-completo e também é uma restrição do Problema 1, concluímos que o Problema 1 é NP-completo.

Δ

CAPÍTULO V

CLIQUEs MAXIMAIS DE GRAFOS CIRCULARES

V.1. INTRODUÇÃO

No capítulo III, fizemos a exposição dos algoritmos encontrados na literatura destinados a identificar cliques máximas de grafos circulares. Apresentaremos agora um algoritmo que determina todas as cliques maximais dos grafos desta classe, fundamentado em propriedades decorrentes da capacidade deles de admitir orientação coberta. A complexidade do algoritmo é $O(n.m + n.\alpha)$, onde n , m e α são, respectivamente, o número de vértices, o de arestas e o de cliques maximais do grafo.

TSUKIYAMA e colaboradores descrevem em (29) um algoritmo $O(nm\alpha)$ para determinar todos os conjuntos independentes maximais de um grafo qualquer. Como cada conjunto independente maximal de um grafo G equivale a uma clique maximal de seu complemento \bar{G} e vice-versa, o algoritmo deles pode ser aplicado para a obtenção de todas as cliques maximais de um grafo arbitrário. No entanto, o algoritmo que aqui desenvolveremos, especificamente para os grafos circulares, é mais eficiente que o geral. Existem outros algoritmos para enumeração de cliques maximais de classes especiais de grafos, tais como o de GAVRIL em (16) para grafos cordais e intervalados. Entretanto, até o momento não existe algoritmo específico para os grafos circulares.

Ainda neste capítulo, obteremos através de um algoritmo polinomial o número de cliques maximais de um grafo circu

lar dado e apresentaremos também o limite superior que este número pode atingir.

V.2. AS ARESTAS DE COBERTURA MAXIMAL DE \vec{G} E AS CLIQUES MAXIMAIS DE G .

Consideremos o grafo circular G da figura (V.2.1), que também exibe uma sequência circular S representante de G , a orientação coberta \vec{G} de G e sua redução transitiva \vec{G}_T .

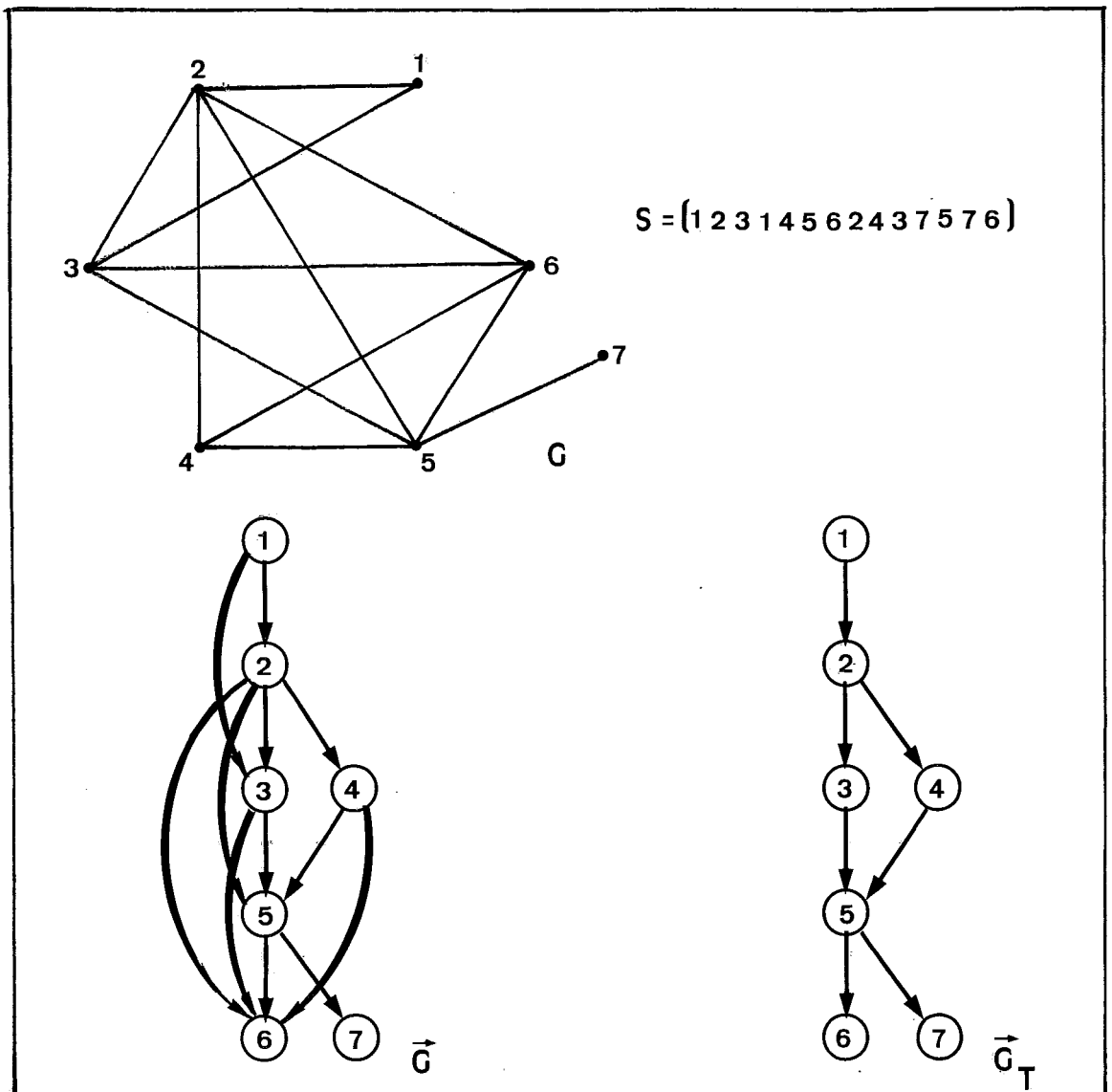


Figura V.2.1.

Por definição, todas as arestas pertencentes a $E(\vec{G})$ são de cobertura. Porém, podemos destacar algumas delas que possuem uma propriedade que não é comum a todas as demais. Estamos nos referindo às arestas de cobertura maximal e (v,w) é assim denominada se, e somente se, não existir $(v', w') \in E(\vec{G})$ diferente de (v,w) tal que, simultaneamente, v' seja ancestral de v e w' descendente de w .

Em \vec{G} da figura (V.2.1), identificamos como arestas de cobertura maximal $(1,3)$, $(2,6)$ e $(5,7)$ e em seu grafo subjacente G existem quatro cliques maximais: $\{1,2,3\}$, $\{2,3,5,6\}$, $\{2,4,5,6\}$ e $\{5,7\}$.

Observando cada uma das arestas de cobertura maximal de \vec{G} notamos que os vértices que as definem são extremos de um ou mais caminhos em \vec{G}_T e que os vértices de cada um destes caminhos constituem uma clique maximal de G .

Esta constatação, entretanto, não é uma particularidade do grafo circular da figura (V.2.1). O teorema que apresentaremos em seguida comprova que esta é uma característica dos grafos que admitem orientação coberta nos quais os circulares se incluem.

TEOREMA V.2.1 - Seja G um grafo que admite uma orientação coberta \vec{G} e seja \vec{G}_T a redução transitiva de \vec{G} . Existe uma correspondência biunívoca entre as cliques maximais de G e os conjuntos de vértices dos caminhos de \vec{G}_T definidos pelos extremos das arestas de cobertura maximal de \vec{G} .

PROVA

Primeiramente, vamos provar a implicação direta. Seja C uma clique maximal de G e seja $v = u_0 < u_1 < \dots < u_k = w$ a ordenação dos vértices de C segundo os seus rótulos em \vec{G} . Como entre cada par (u_i, u_j) , $0 \leq i < j \leq k$, de vértices de C existe uma aresta em G , tal aresta também pertence a \vec{G} já que G é seu grafo subjacente. O caminho $P = \langle v = u_0, u_1, \dots, u_k = w \rangle$ é um caminho de \vec{G}_T , pois caso contrário, existiria pelo menos uma aresta (u_i, u_{i+1}) pertence a P , $0 \leq i < k$, implícita por transitividade. Isto acarretaria a existência de um vértice t em $V(\vec{G})$, $u_i < t < u_{i+1}$ e um caminho P' entre u_i e u_{i+1} contendo t . Mas, como \vec{G} é uma orientação coberta de G , $\vec{G}_{v,w}$ é transitivo e o subgrafo de G induzido pelos vértices de $V(P) \cup V(P')$ seria um grafo completo. Como $V(P) = C$ e $t \in V(P') - V(P)$, C não seria uma clique maximal de G contrariando, assim, a hipótese. Além disso, como v e w são, respectivamente, o vértice de menor e o de maior rótulo de C , a aresta (v', w') definida pelos vértices: v' ancestral de v e w' descendente de w , não pertence a $E(\vec{G}) - \{(v, w)\}$, pois, se pertencesse, mais uma vez a condição de maximalidade de C seria atingida, já que $\vec{G}_{v', w'}$ seria transitivo. Logo, (v, w) é uma aresta de cobertura maximal. Agora, vamos provar a implicação inversa. Seja (v, w) uma aresta de cobertura maximal de \vec{G} , então como $\vec{G}_{v,w}$ é transitivo, os vértices de cada caminho P em \vec{G}_T de v a w induzem um subgrafo completo de G e, portanto, uma clique de G . Para mostrarmos que tal clique é também maximal, vamos supor que não o seja e cairemos numa contradição. Seja C uma clique maximal de G que contém, além dos elementos do caminho $P = \langle v = u_0, u_1, \dots, u_k = w \rangle$, pelo menos,

um vértice t . Como em \vec{G}_T não existem arestas implícitas por transitividade e t é adjacente a todos os vértices de $V(P)$ em G , ou $t < v$ ou $t > w$. A ocorrência do primeiro caso implica na existência da aresta (t,w) em \vec{G} e do segundo caso (v,t) em \vec{G} contrariando assim o fato de (v,w) ser uma aresta de cobertura maximal.

Δ

V.3. ALGORITMO PARA DETERMINAR TODAS AS CLIQUES MAXIMAIS DE GRAFOS CIRCULARES

Como vimos na seção anterior, as cliques maximais de um grafo G que admite orientação coberta \vec{G} correspondem aos conjuntos de vértices de todos os caminhos na redução transitiva \vec{G}_T de \vec{G} , limitados pelos vértices v e w , que definem as arestas (v,w) de cobertura maximal de \vec{G} .

Sabemos que um grafo circular G admite orientação coberta e que a partir de uma sequência circular S que o representa podemos facilmente obter tal orientação. Conhecemos também algoritmos que determinam a redução transitiva de um digrafo acíclico. Resta-nos, então, estabelecer um processo para a obtenção das arestas de cobertura maximal de uma orientação coberta para que possamos construir o algoritmo desejado.

TEOREMA V.3.1 - Seja G um grafo circular, \vec{G} uma orientação coberta de G e (v,w) uma aresta de \vec{G} . Se em \vec{G} , $A^+(v) \cap A^+(w) = \emptyset$ e $A^-(v) \cap A^-(w) = \emptyset$, então (v,w) é uma aresta de cobertura maximal.

PROVA

Se $A^+(v) \cap A^+(w) = \emptyset$ implica que não existe w' descendente próprio de v e w tal que $(v, w') \in E(\vec{G})$. Caso $A^-(v) \cap A^-(w) = \emptyset$ então não existe v' ancestral próprio de v e w tal que $(v', w) \in E(\vec{G})$. Como não existem tais arestas o corolário IV.2.1 garante que a aresta (v', w') também não pertence a $E(\vec{G})$. Logo (v, w) é de cobertura maximal.

△

Consideremos o grafo G da figura (V.2.1) e vamos verificar quais das arestas (v, w) de \vec{G} satisfazem as duas propriedades: (A) $A^+(v) \cap A^+(w) = \emptyset$ e (B) $A^-(v) \cap A^-(w) = \emptyset$. Na figura (V.3.1) podemos observar as listas de adjacência $A^+(v)$ e $A^-(v)$ para todo $v \in V(\vec{G})$.

v	$A^+(v)$	$A^-(v)$
1	2, 3	
2	3, 4, 5, 6	1
3	5, 6	1, 2
4	5, 6	2
5	6, 7	2, 4, 3
6	-	2, 4, 3, 5
7	-	5

Figura V.3.1.

Estas listas de adjacência podem ser determinadas quando visitamos sequencialmente da esquerda para direita os elementos de S . Utilizamos uma lista L , inicialmente vazia, para armazenar o elemento v no momento em que seu extremo esquerdo é acessado. E quando seu extremo direito for alcançado ele deverá ser dela retirado. Antes, porém, de efetuarmos a retirada de v de L devemos inserir cada $w \in L$ que se encontra à direita de v em $A^+(v)$ e, simultaneamente, inserir v em $A^-(w)$. Para justificar este procedimento vamos lembrar que (v,w) é uma aresta de \vec{G} se, e somente se, $S^{-1}(E(v)) < S^{-1}(E(w)) < S^{-1}(D(v)) < S^{-1}(D(w))$.

Examinando todas as arestas pertencentes a $E(\vec{G})$ concluímos que apenas as arestas $(1,3)$, $(2,6)$ e $(5,7)$ satisfazem, simultaneamente, a (A) e a (B) e, portanto, como já era esperado elas são as arestas de cobertura maximal de \vec{G} .

A complexidade do processo que utilizamos para determinar as arestas de cobertura maximal de \vec{G} é $O(mn)$ pois, para cada uma das m arestas $(v,w) \in E(\vec{G})$, determinamos $A^+(v) \cap A^+(w)$ e $A^-(v) \cap A^-(w)$. Como os elementos das listas A^+ estão ordenados segundo as posições de seus extremos esquerdos em S e os das listas A^- de acordo com as posições de seus extremos direitos, a complexidade para efetuarmos cada operação é $O(n)$.

Agora já podemos apresentar o algoritmo que determina todas as cliques maximais de um grafo circular G .

Em seu passo inicial, o algoritmo constrói a partir da sequência S , que está representando o grafo G , a orientação coberta \vec{G} e sua redução transitiva \vec{G}_T . Em seguida, ele determina as arestas de cobertura maximal de \vec{G} e, para cada uma destas

arestas, digamos (v,w) , o algoritmo insere no conjunto $R(v)$, inicialmente vazio, o vértice w . Assim, os vértices para os quais o conjunto $R(v)$ é não vazio são marcados e os demais desmarcados.

O passo geral se constitui dos seguintes comandos: se todos os vértices estiverem desmarcados, o algoritmo termina. Caso contrário, seja v um vértice marcado e associado a ele existe um digrafo \vec{G}_{T_v} de \vec{G}_T induzido pelos vértices, simultaneamente descendentes de v e ancestrais de w , $\forall w \in R(v)$. O algoritmo, então, determina todos os caminhos entre a fonte v e os sumidouros w deste digrafo, desmarca o vértice v e repete o passo geral.

A complexidade deste algoritmo é $O(n.m + n.\alpha)$ e assim obtida: No passo inicial o processo de maior complexidade é aquele que determina as arestas de cobertura maximal e como já a determinamos sabemos que é de $O(n.m)$. A determinação de \vec{G} tem complexidade de $O(n + m)$ e a da redução transitiva \vec{G}_T de \vec{G} é de no máximo $O(n.m)$, por ser idêntica à complexidade do processo de obtenção do fecho transitivo em digrafos acíclicos, como mostra AHO e colaboradores em (1). No passo geral, para encontrar todas as cliques maximais de G , o algoritmo determina todos os caminhos entre os vértices v e w , extremos das arestas de cobertura maximal de \vec{G} em \vec{G}_{T_v} , que é um digrafo acíclico e sem arestas implícitas por transitividade.

Portanto, isto pode ser realizado em $O(n)$ por clique, fazendo uma busca irrestrita em profundidade, de acordo com o algoritmo a seguir:

Dados: digrafo \vec{G}_{T_V}

procedimento $P(S)$

colocar S na fila Q

para $w \in A^+(S)$ efetuar

$P(w)$

Se $A^+(S) = \emptyset$ então

listar os elementos da fila Q

retirar S de Q

definir uma fila Q , vazia

$P(v)$ (v é a raiz de \vec{G}_{T_V})

Vamos agora aplicar este algoritmo ao grafo G da figura (V.2.1) para o qual já determinamos uma orientação coberta \vec{G} , a redução transitiva \vec{G}_T de \vec{G} e as arestas de cobertura maximal de \vec{G} que são: $(1,3)$, $(2,6)$ e $(5,7)$. Bem, agora vamos determinar os conjuntos $R(v)$, $\forall v \in V(\vec{G})$. Eles são: $R(1) = \{3\}$, $R(2) = \{6\}$, $R(5) = \{7\}$ e $R(3) = R(4) = R(6) = R(7) = \emptyset$.

Os digrafos \vec{G}_{T_V} , para $v \in V(\vec{G})$ cujo $R(v) \neq \emptyset$, podem ser observados na figura (V.3.2).

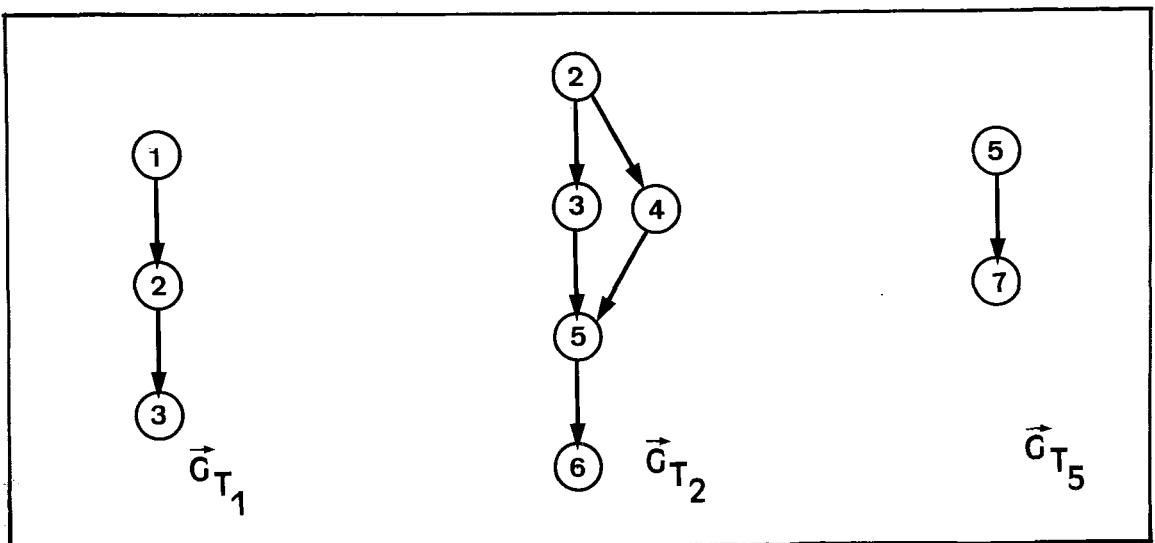


Figura V.3.2.

Na mesma figura podemos observar que os caminhos das fontes aos sumidouros destes digrafos são constituídos pelos conjuntos de vértices: $\{1,2,3\}$, $\{2,3,5,6\}$, $\{2,4,5,6\}$ e $\{5,7\}$. Estes conjuntos são, portanto, as cliques maximais do grafo G como nos garante o teorema (V.2.1).

V.4. O NÚMERO DE CLIQUES MAXIMAIS DE GRAFOS CIRCULARES

Na seção anterior definimos o digrafo \vec{G}_{T_v} como o subdigrafo de \vec{G}_T , induzido pelos vértices simultaneamente descendentes de v e ancestrais de w , para todo w que define com v uma aresta de cobertura maximal de \vec{G} . Vimos também que o conjunto de vértices de cada caminho maximal de \vec{G}_{T_v} é uma clique maximal de G .

Seja $\vec{G}_{T_v, t(v)}$ o subdigrafo obtido quando adicionamos a \vec{G}_{T_v} um novo vértice $t(v)$ e as arestas $(w, t(v))$ para todo w sumidouro de \vec{G}_{T_v} . Assim, o número de caminhos entre a fonte v e o sumidouro $t(v)$ de $\vec{G}_{T_v, t(v)}$ é igual ao número de cliques maximais de G , que possui v como seu vértice de menor rótulo.

Apresentaremos, a seguir, um algoritmo que determina este valor para o subdigrafo $\vec{G}_{T_v, t(v)}$ de \vec{G}_T . Para determinarmos o número total de cliques maximais de G , devemos aplicar o referido algoritmo uma vez para cada v , tal que, $R(v) \neq \emptyset$ e em seguida adicionar aos resultados obtidos nas várias aplicações. Julgamos conveniente a apresentação deste algoritmo já que não conhecemos resultado similar para grafos gerais.

No passo inicial o algoritmo constrói o digrafo $\vec{G}_{T_v, t(v)}$ a partir de \vec{G}_{T_v} . Em seguida, ele define $\alpha(v) := 1$ e

$\alpha(w) := 0$, para todo $w \in V(\vec{G}_{T_{v,t(v)}}) - \{v\}$ e faz $D = \vec{G}_{T_{v,t(v)}}$.

No passo geral, se o digrafo D contiver apenas um único vértice, o algoritmo termina e em $\alpha(t(v))$ está registrado o número de caminhos maximais de $\vec{G}_{T_{v,t(v)}}$. Caso contrário, seja z um vértice do digrafo sem predecessores. Para cada z' da lista de adjacência $A^+(z)$ no digrafo, o algoritmo faz $\alpha(z') := \alpha(z') + \alpha(z)$. Em seguida, o vértice z é removido de D e o passo geral é repetido.

O teorema a seguir assegura que em $\alpha(t(v))$ está registrado o número de caminhos de v a $t(v)$ em $\vec{G}_{T_{v,t(v)}}$. E, o número de cliques maximais do grafo circular G é dado por:

$$\alpha = \sum_{\forall v | R(v) \neq \emptyset} \alpha(v)$$

TEOREMA V.4.1 - Ao término do algoritmo acima para cada $z' \in V(\vec{G}_{T_{v,t(v)}})$, o valor de $\alpha(z')$ é o número de caminhos existentes em $\vec{G}_{T_{v,t(v)}}$ de v a z' .

PROVA

Se o vértice z' é adjacente a v , então, existe um único caminho entre v e z' constituído pelos dois vértices e pela aresta (v, z') . O algoritmo faz em seu passo inicial: $D = \vec{G}_{T_{v,t(v)}}$, logo a primeira vez que seu passo geral é executado, v é a única fonte de D . Sendo assim, ele é que será excluído de D e $\forall z' \in A^+(v)$ o algoritmo incrementa $\alpha(v)$, que é igual a 1, em $\alpha(z')$. Sendo inicialmente nulo o valor de $\alpha(z')$, após esta operação ele torna-se 1. Como não existe em D outro vértice que é

predecessor de z' , o valor de $\alpha(z')$ não se altera mais durante o processamento e registra exatamente o número de caminhos entre v e z' em $\vec{G}_{T_{v,t(v)}}$.

Suponhamos, agora, que o passo geral esteja sendo processado pela k -ésima vez, $K > 1$, e que z' , diferente de $t(v)$, é a fonte de D a ser dele excluída. Suponhamos também que: para todo $z \in A^-(z')$, $\alpha(z)$ armazena o número de caminhos entre v e z . Para alcançarmos z' a partir de z em $\vec{G}_{T_{v,t(v)}}$ dispomos de uma única opção, através da aresta (z, z') , portanto, o número de caminhos de v a z' passando por z é exatamente $\alpha(z)$. Logo, o número total de caminhos de v a z' é dado por

$$\sum_{\forall z \in A^-(z')} \alpha(z)$$

No algoritmo o valor de $\alpha(z')$ é inicialmente nulo e para cada vértice $z \in A^-(z')$ que é excluído de D , o valor de $\alpha(z)$ é incrementado ao de $\alpha(z')$. Quando todos os vértices pertencentes a $A^-(z')$ já não se encontram mais em D , $\alpha(z')$ é exatamente

$$\sum_{\forall z \in A^-(z')} \alpha(z)$$

△

A complexidade do algoritmo é linear para cada v cujo $R(v) = \emptyset$, mas, na determinação dos conjuntos $R(v)$, $\forall v \in V(G)$, empregamos um algoritmo $O(n.m)$ como pode ser visto na seção anterior. Logo é esta a complexidade do processo que determina o número de cliques maximais de um grafo circular.

Como exemplo vamos considerar o grafo circular representado pela sequência $S = |1234516783582476|$ e na figura (V.4.1) observamos a orientação coberta \vec{G} e sua redução transitiva \vec{G}_T .

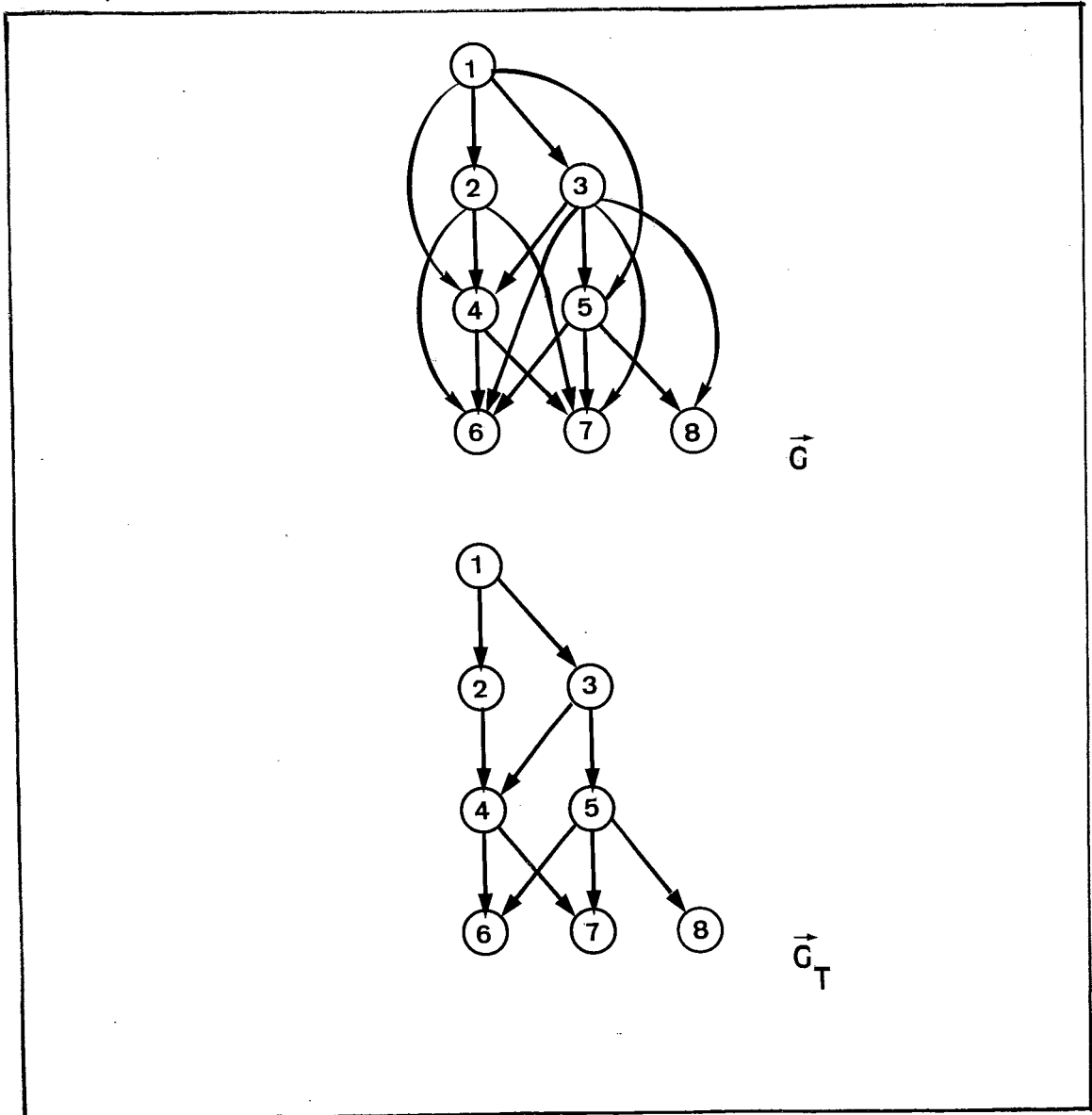


Figura V.4.1.

As arestas de cobertura maximal de \vec{G} são $(1,4), (1,5), (2,6), (2,7), (3,6), (3,7)$ e $(3,8)$. E: assim $R(1) = \{4,5\}$, $R(2) = \{6,7\}$, $R(3) = \{6,7,8\}$ e $R(4) = R(5) = R(6) = R(7) = R(8) = \emptyset$.

A figura (V.4.2) contém os digrafos $\vec{G}_{T_1,t(1)}$, $\vec{G}_{T_2,t(2)}$ e $\vec{G}_{T_3,t(3)}$ obtidos através de \vec{G}_{T_1} , \vec{G}_{T_2} e \vec{G}_{T_3} , conforme mencionamos no início desta seção.

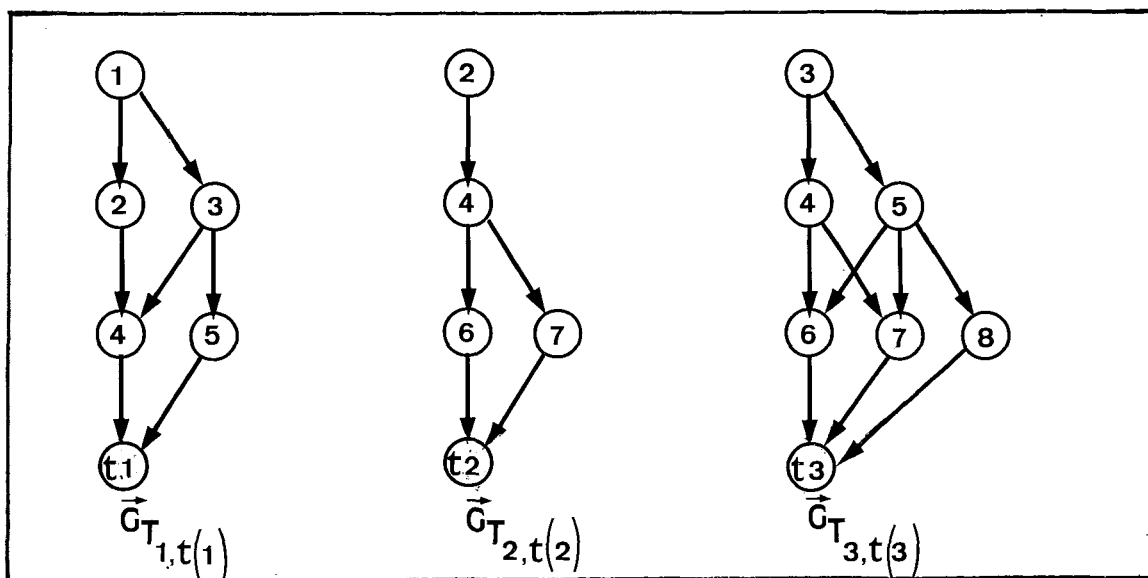


Figura V.4.2.

Tendo $\vec{G}_{T_3,t(3)}$ como entrada, o algoritmo para determinar o número de caminhos de 3 a t(3) se comporta da seguinte forma: No passo inicial temos: $D = \vec{G}_{T_3,t(3)}$, $\alpha(3) = 1$ e $\alpha(4) = \alpha(5) = \alpha(6) = \alpha(7) = \alpha(8) = \alpha(t(3)) = 0$. Na primeira execução do passo geral, o vértice sem predecessores é o 3 e $A^+(3) = \{4,5\}$ assim, temos: $\alpha(3) = 1$, $\alpha(4) = \alpha(5) = 1$ e $\alpha(6) = \alpha(7) = \alpha(8) = \alpha(t(3)) = 0$. O vértice 3 é excluído de D e a figura (V.4.3) mostra o novo digrafo D que para evitar confusão nós o denotamos por D_1 .

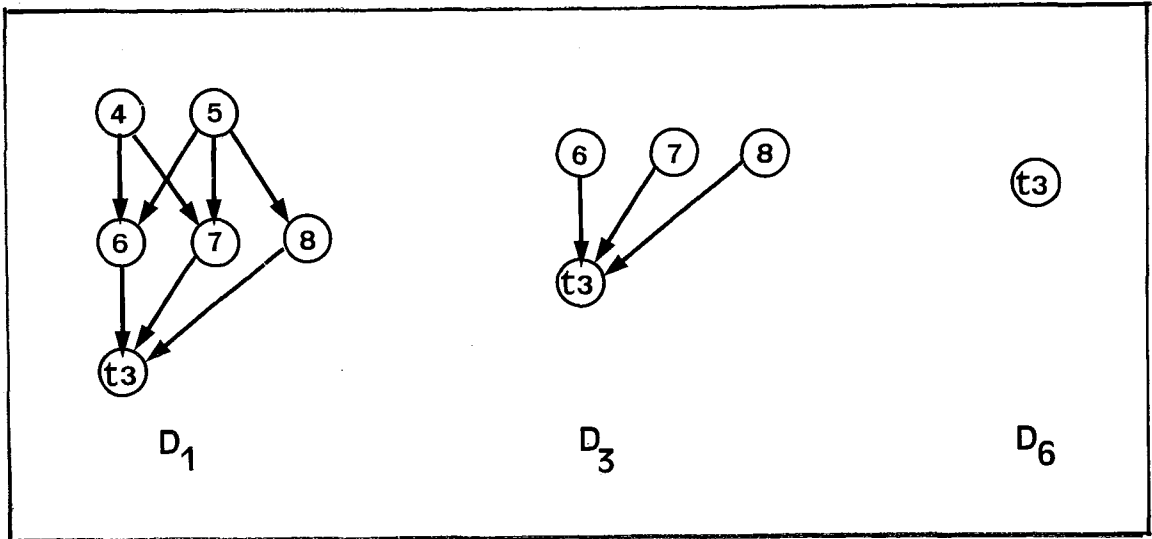


Figura V.4.3.

Agora temos duas fontes em D_1 . O v\u00e9rtice 4 e o v\u00e9rtice 5. Excluindo o v\u00e9rtice 4 devemos adicionar $\alpha(4)$ em $\alpha(6)$ e $\alpha(7)$, pois $A^+(4) = \{6,7\}$ e obtemos o digrafo D_2 que possui apenas o v\u00e9rtice 5 como fonte. Excluindo o v\u00e9rtice 5 de D_2 , obtemos o digrafo D_3 da figura (V.4.3) e, agora temos: $\alpha(3) = \alpha(4) = \alpha(5) = 1$, $\alpha(6) = \alpha(7) = 2$, $\alpha(8) = 1$ e $\alpha(t(3)) = 0$. Ao retirarmos o v\u00e9rtice 6 de D_3 , $\alpha(t(3))$ passa a ser igual a 2 e obtemos D_4 . Retirando 7 de D_4 , obtemos D_5 e $\alpha(t(3)) = 4$. O v\u00e9rtice 8 \u00e9 a fonte de D_5 , quando o exclu\u00edmos obtemos D_6 ilustrado na figura (V.4.3) e $\alpha(t(3)) = 5$.

Como o digrafo D_6 possui apenas o v\u00e9rtice $t(3)$, o algoritmo termina e o valor de $\alpha(t(3))$ que \u00e9 igual a 5 indica o n\u00famero de caminhos existentes em $\vec{G}_{T_3, t(3)}$ de 3 a $t(3)$.

Os valores de $\alpha(t(1)) = 3$ e $\alpha(t(2)) = 2$ obtidos de forma an\u00e1loga ao de $\alpha(t(3))$ s\u00e3o agora a ele adicionados, e, o resultado da opera\u00e7\u00e3o, que \u00e9 10, indica o n\u00famero de cliques m\u00e1ximos do grafo G .

V.5. LIMITE SUPERIOR PARA O NÚMERO DE CLIQUES MAXIMAIS DE GRAFOS CIRCULARES

Consideremos um grafo de permutação conexo G . Como ele também é circular, G admite uma orientação coberta \vec{G} . Seja F o conjunto das fontes de \vec{G} .

O Teorema (V.2.1) quando aplicado ao grafo de permutação G garante que há uma identificação entre cada clique maximal de G com o conjunto de vértices de um caminho maximal de \vec{G}_{T_v} para algum $v \in F$. Assim, o número de cliques maximais de G é máximo se, e somente se, também é máximo o número de caminhos maximais em \vec{G}_{T_v} , para todo $v \in F$.

O objetivo desta seção é estabelecer o limite superior para o número de cliques maximais de grafos circulares. Provaremos que os grafos circulares que admitem tal limite são de permutação e para obtermos esta prova utilizamos um novo tipo de digrafo cujo conceito é dado a seguir.

Um digrafo acíclico D é denominado em camadas quando existe uma partição $V_1 \cup V_2 \cup \dots \cup V_k = V(D)$ de seu conjunto de vértices $V(D)$ com a propriedade de que cada aresta $(v, w) \in E(D)$ é tal que $v \in V_i$ e $w \in V_{i+1}$ para algum $i < k$. Cada parte V_i da partição é denominada nível. A figura (V.5.1) ilustra um digrafo em camadas de cinco níveis.

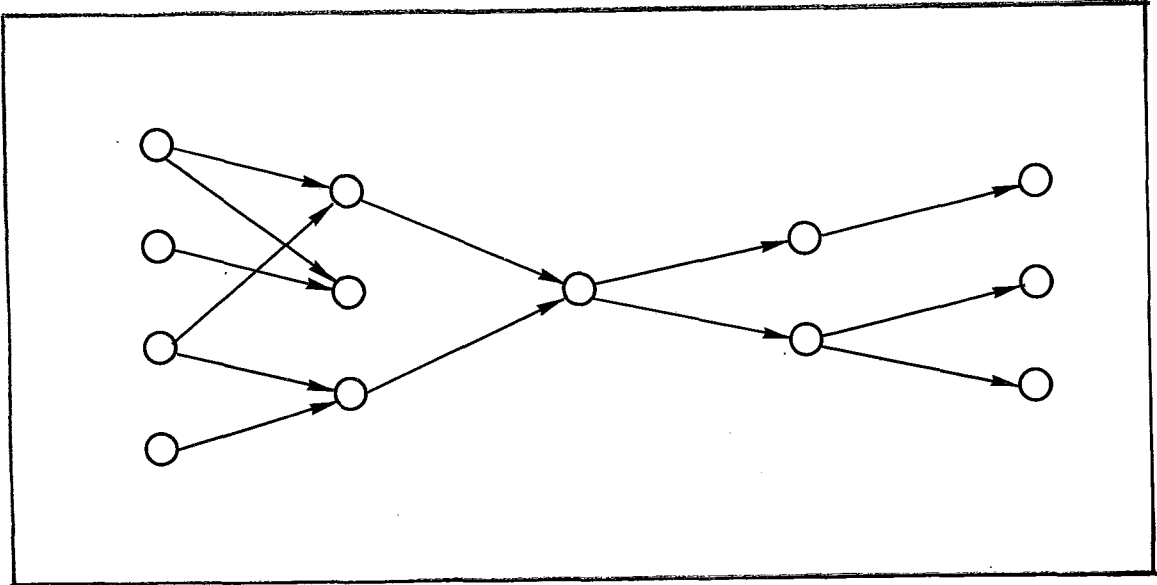


Figura V.5.1.

Como toda aresta de um digrafo em camadas liga vértices pertencentes a níveis adjacentes, concluímos que nele não existe nenhuma aresta implícita por transitividade. Logo um digrafo em camadas é necessariamente anti-transitivo.

Um digrafo em camadas completo é aquele que contém uma aresta entre cada par de vértices localizados em níveis adjacentes. Podemos observar na figura (V.5.2) um exemplar deste digrafo.

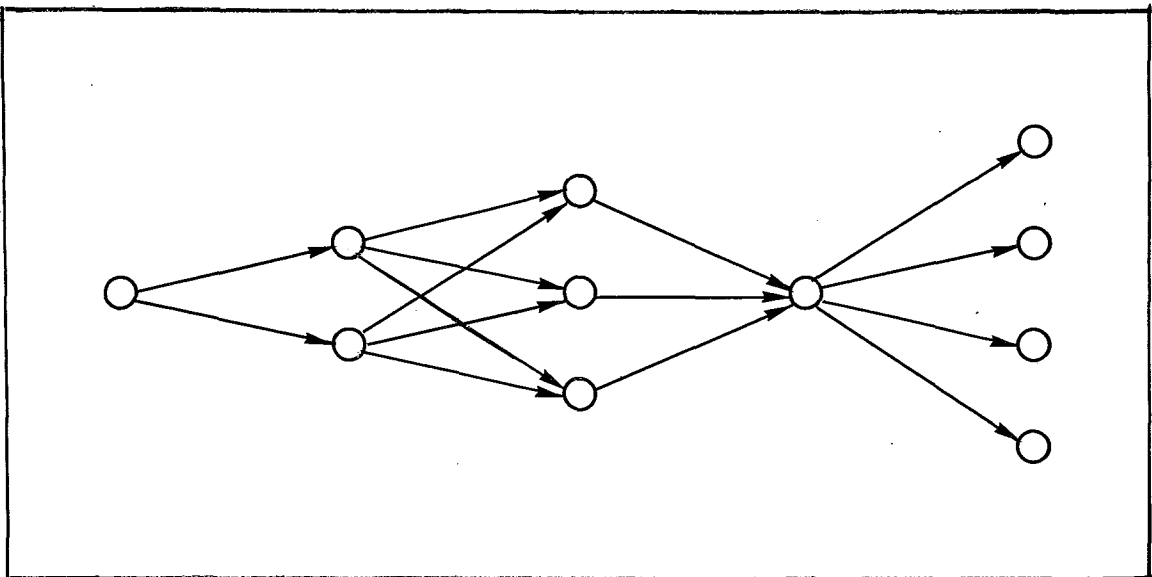


Figura V.5.2.

O teorema a seguir estabelece a configuração da redução transitiva de um digrafo transitivo cujo grafo de permutação subjacente admite o número máximo de cliques maximais possíveis.

TEOREMA V.5.1 - Seja G um grafo de permutação, \vec{G} uma orientação coberta de G e \vec{G}_T sua redução transitiva. Se G admite o número máximo de cliques maximais possíveis então \vec{G}_T é um digrafo em camadas completo.

PROVA

Seja V_0 o conjunto das fontes de \vec{G}_T e para cada vértice $v \in V(\vec{G}_T) - V_0$ seja $\ell(v)$ o comprimento do caminho máximo entre os vértices de V_0 e v .

Seja $V_i = \{v \in V(\vec{G}_T) / \ell(v) = i\}$, $i \geq 1$, e assim $V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_k = V(\vec{G}_T)$ é uma partição do conjunto $V(G)$. Não há arestas em \vec{G}_T entre dois vértices v e w localizadas em uma mesma parte desta partição, pois, caso contrário, $\ell(v) \neq \ell(w)$ o que representa uma contradição. Vamos supor agora que \vec{G}_T não seja um digrafo em camadas completo. Então teremos que estudar dois casos:

CASO 1 - \vec{G}_T é um digrafo em camadas mas não é completo, como o digrafo da figura (V.5.3(a)).

CASO 2 - \vec{G}_T não é um digrafo em camadas, como o da figura (V.5.3(b)).

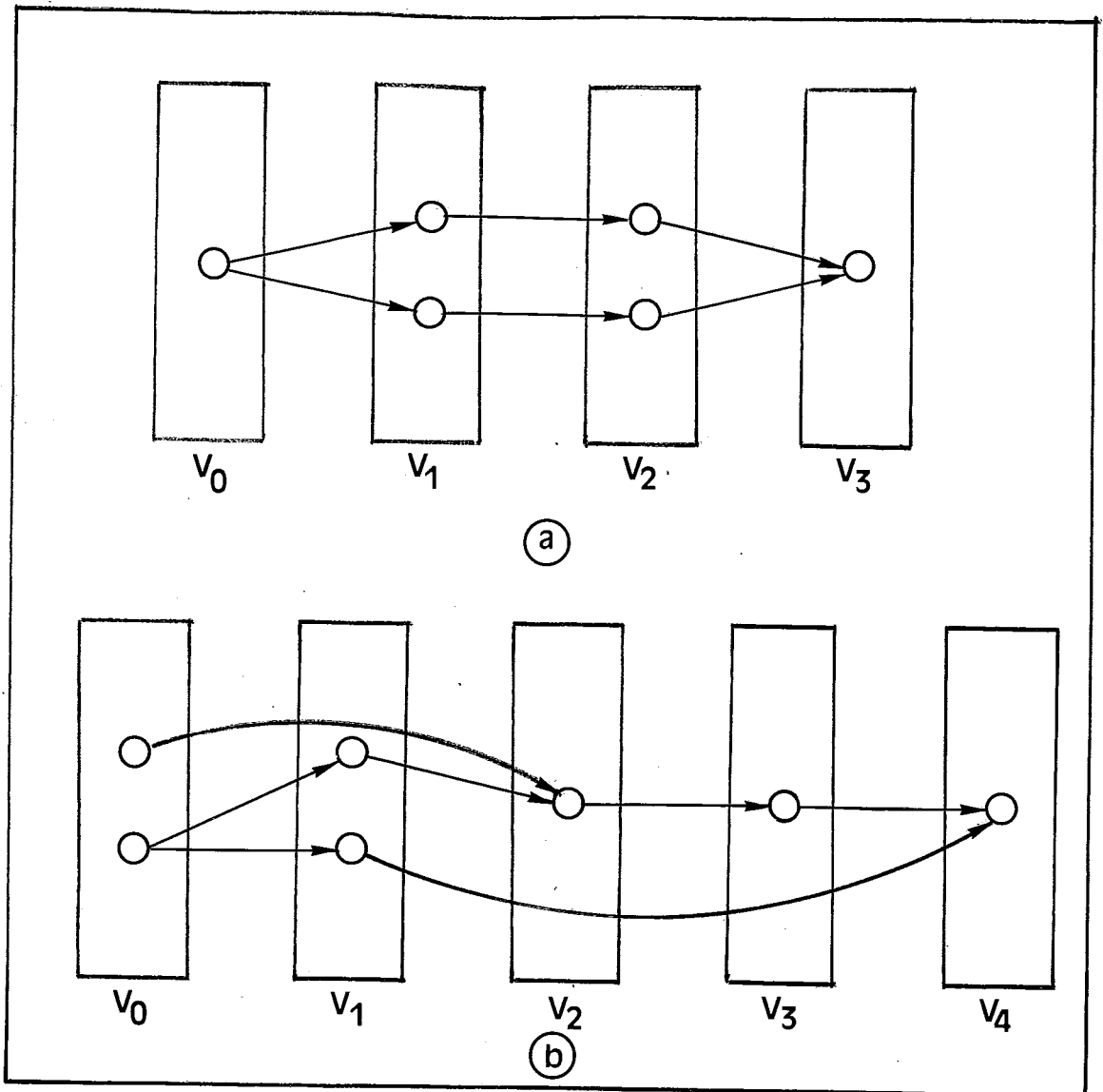


Figura V.5.3.

Estudemos primeiramente o Caso 1. Se \vec{G}_T é um digrafo em camadas não completo, então existe pelo menos um par de vértices v e w localizados em níveis adjacentes que não definem uma aresta em \vec{G}_T . Mas o grafo que tem $\vec{G}_T + (v,w)$ como redução transitiva de uma de suas orientações cobertas tem mais cliques maximais que G ; tendo em vista que ele possui todos os caminhos entre V_0 e V_K que possui \vec{G}_T e mais aqueles que contêm a aresta (v,w) . Isto, entretanto, contradiz a hipótese. Logo os vértices v e w com as referidas características não existem e se \vec{G}_T for um digrafo em camadas, ele é completo.

No Caso 2 se \vec{G}_T não é um digrafo em camadas então, existe uma aresta $(v,w) \in E(\vec{G}_T)$ tal que $v \in V_i$, $w \in V_j$ e $j > i + 1$, como na figura (V.5.4).

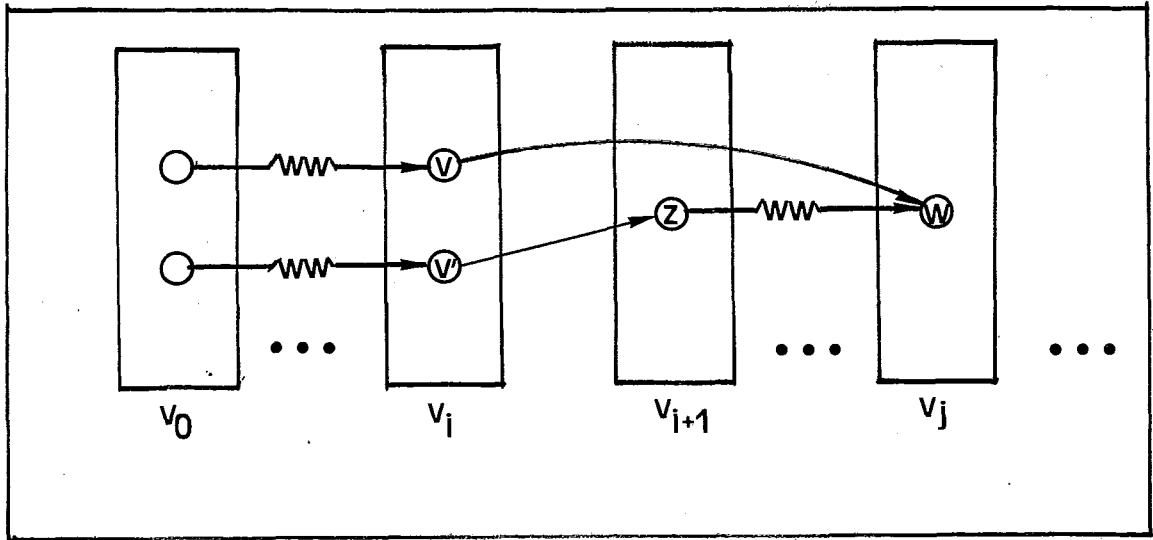


Figura V.5.4.

Como w pertence à parte V_j , então, o caminho máximo entre os elementos de V_0 e ele tem comprimento $\ell(w) = j$. Logo, como $j > i + 1$ este caminho não contém o vértice v da parte V_i da partição. No entanto, ele contém necessariamente um outro vértice da parte V_i , digamos v' , é um vértice da parte V_{i+1} que denotaremos por z . A aresta (v,z) não pertence a $E(\vec{G}_T)$ pois, caso contrário, (v,w) seria uma aresta implícita por transitividade e não pertenceria a \vec{G}_T .

Sem perder a generalidade, podemos supor que a parte V_i da qual diverge a aresta (v,w) seja localizada mais à direita possível dentre todas aquelas que possuem tal propriedade. Isto significa que i é no máximo $K-2$ e que a partir de V_{i+1} o digrafo \vec{G}_T é em camadas e, como vimos no Caso 1, é completo

O grafo que tem como redução transitiva de uma de suas orientações cobertas $\vec{G}_T - (v,w) + (v,z)$ só não terá mais cliques maximais que G se existir apenas um único caminho entre z e w .

Neste caso, o número de cliques maximais dos dois grafos será o mesmo. Mas como a partir de V_{i+1} , \vec{G}_T é um digrafo em camadas completo então cada uma das partes $V_{i+1}, V_{i+2}, \dots, V_j$ conterá um único elemento. Como $i \leq K - 2$, existem pelo menos duas dessas partes. Mas podemos imaginar um outro digrafo, o \vec{G}_T^* assim constituído:

- (a) Suas partes de V_0 e V_i são idênticas às partes de mesmo nome em $\vec{G}_T - (v,w) + (v,z)$.
- (b) Sua parte V_{i+1} contém todos os vértices das partes V_{i+1} a V_j de $\vec{G}_T - (v,w) + (v,z)$.
- (c) Suas partes a partir de V_{i+2} são iguais às partes a partir de V_{j+1} em $\vec{G}_T - (v,w) + (v,z)$.
- (d) \vec{G}_T^* a partir de V_i é um digrafo em camadas completo.

Como o número de elementos de V_{i+1} no novo digrafo é, no mínimo 2, o número de caminhos de V_0 a V_K nele é, no mínimo, o dobro do de \vec{G}_T . Logo, o grafo associado a \vec{G}_T^* possui o número de cliques maximais superior ao de G , contradizendo a hipótese. Concluimos, portanto, que em \vec{G}_T não existe nenhuma aresta com as características de (v,w) que diverge de V_i ou de outra parte de \vec{G}_T . Assim, todas as arestas de \vec{G}_T são definidas por vértices localizados em duas partes adjacentes da partição $V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_K$ e isto nos garante que \vec{G}_T é um digrafo em camadas.

Δ

Associando este último resultado ao do teorema (V.2.1) e sendo V_0, V_1, \dots, V_K os conjuntos de vértices dos $K + 1$ níveis de \vec{G}_T , concluímos que cada elemento do conjunto $V_0 \times V_1 \times \dots \times V_K$ é constituído pelos mesmos vértices que definem uma clique maximal de G . Desta forma, o número de cliques maximais de G é dado por $\alpha = \prod_{i=0}^K |V_i|$, onde $|V_i|$ denota a cardinalidade do conjunto V_i .

A última conclusão nos garante que ter como G_T um digrafo em camadas completo embora seja uma condição necessária para que o grafo G tenha um número máximo de cliques maximais, não é uma condição suficiente. A cada grafo de permutação de n vértices está associada uma partição de seu conjunto de vértices que produz uma configuração ótima para \vec{G}_T , isto é, uma configuração para a qual α é máximo. Sendo o valor de α , o produto do número de elementos de cada nível de \vec{G}_T devemos, pois, identificar aqueles que produzem o maior resultado possível. O teorema a seguir define exatamente tais valores.

TEOREMA V.5.2 - Se G é um grafo de permutação de n vértices, $n > 1$, que possui o número máximo de cliques maximais, então, a partição $V_0 \cup V_1 \cup \dots \cup V_K = V(G)$ associada à configuração ótima de \vec{G}_T é tal que:

$$(a) |V_i| = 3, 0 \leq i \leq K, \text{ se } n \equiv 0 \pmod{3}$$

$$(b) |V_i| = 3, 0 \leq i \leq K-1, \text{ e} \\ |V_K| = 2 \quad \text{se } n \equiv 2 \pmod{3}$$

$$(c) |V_i| = 3, 0 \leq i \leq K-2, \text{ e} \\ |V_{K-1}| = |V_K| = 2 \quad \text{se } n \equiv 1 \pmod{3}$$

(A figura (V.5.5) ilustra a configuração ótima de \vec{G}_T para cada tipo de grafo).

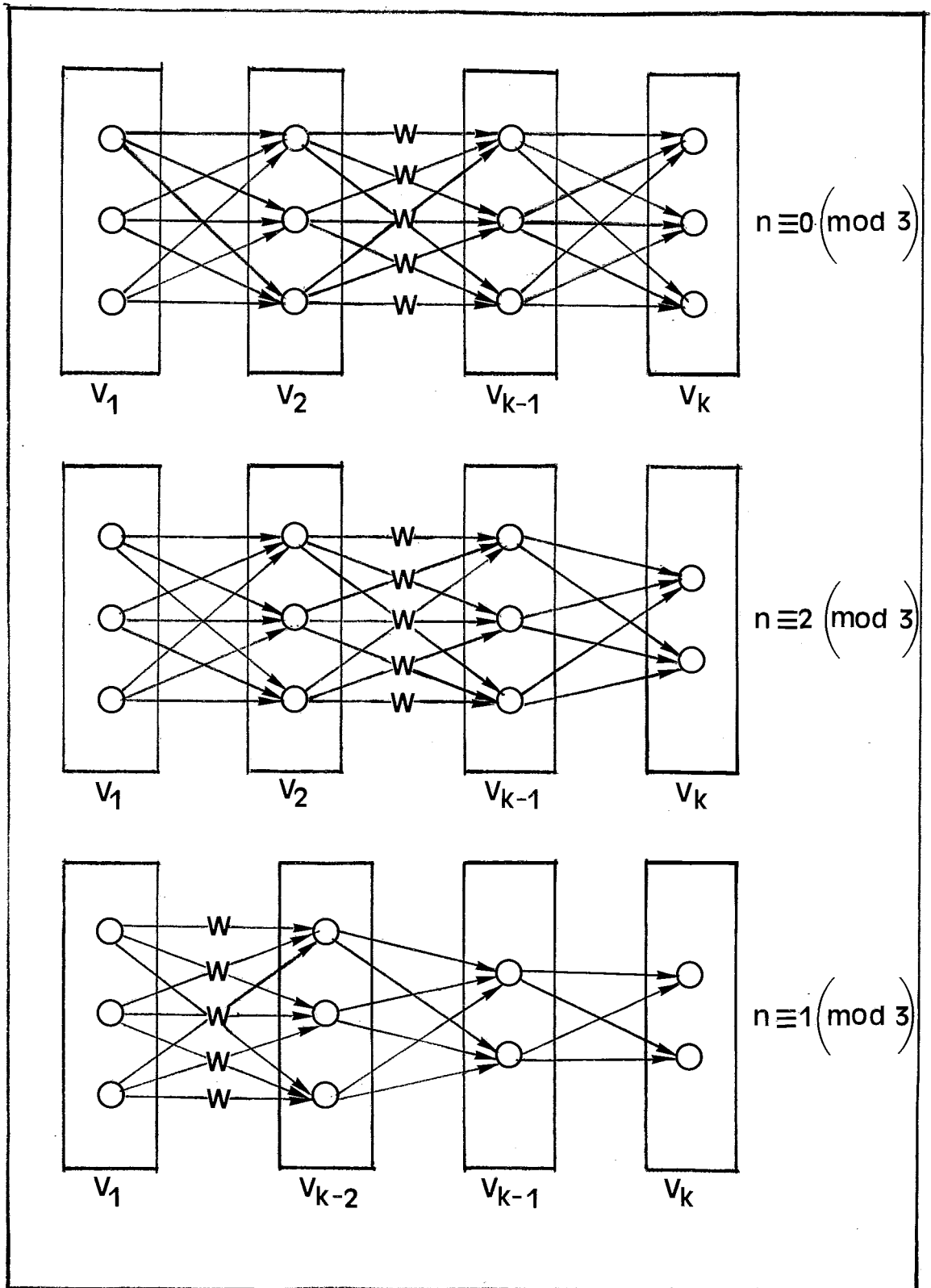


Figura V.5.5.

PROVA

Vamos supor que as cardinalidades das partes da partição não sejam as referidas pelo teorema. Então teremos:

(1) Existirá uma parte V_j tal que $|V_j| = 1$?

Não, caso existisse, \vec{G}_T não seria a configuração ótima, pois eliminando a parte V_j e criando uma nova parte V'_j igual a $V_j \cup V_i$ obteríamos um configuração \vec{G}'_T , para a qual

$$\alpha' = \frac{\alpha}{|V_j|} \times |V'_j| = \frac{\alpha}{|V_j|} \times (|V_j| + 1)$$

que é maior que α .

(2) Existirá uma parte V_i tal que $|V_i| \geq 5$?

Para esta pergunta, a resposta também é negativa, pois, se tal parte existisse poderíamos substituí-la por duas outras partes, a V_{i_0} e V_{i_1} tais que $|V_{i_0}| = 3$ e $|V_{i_1}| = |V_i| - 3$. Como $3(p-3) > p$ se $p \geq 5$,

$$\alpha' = \frac{\alpha}{|V_i|} \times |V_{i_0}| \times |V_{i_1}|$$

é maior que α e, sendo assim, \vec{G}_T não seria a configuração ótima.

Então, até agora, já está provado que se \vec{G}_T é uma configuração ótima para G então a cardinalidade de cada uma das partes da partição a ela associada é 2, 3 ou 4. Se substituirmos, caso existirem, as partes V_i da partição tais que $|V_i| = 4$, por duas outras de dois elementos cada uma, a

nova partição produz o mesmo produto da primeira. Logo, se a primeira corresponde a uma configuração ótima, a segunda também corresponderá. Agora, surge uma nova questão:

- (3) Na nova partição existirão três ou mais partes V_i , tais que $|V_i| = 2$?

Também responderemos esta questão com o não, tendo em vista que se tais partes existissem seria possível substituir cada terço delas por duas de cardinalidade 3 e assim como $3 \times 3 > 2 \times 2 \times 2$ o valor de α correspondente à nova partição seria superior ao da anterior, contrariando assim a hipótese.

Logo, podemos concluir que a partição correspondente à configuração ótima de \vec{G}_T tem no máximo duas partes de cardinalidade 2, e todas as demais de cardinalidade 3. Assim ela poderá ter duas, uma ou nenhuma parte de cardinalidade 2 e como todas as demais têm cardinalidade 3 então o número de partes de cardinalidade igual a 2 depende do resto da divisão de n por 3. Se tal resto for igual a zero, um ou dois teremos nenhuma, duas ou uma parte de cardinalidade 2 conforme consta na tese.

Δ

COROLÁRIO V.5.2 - Se G é um grafo de permutação com $n > 1$, então o número máximo α de cliques maximais de G é dado por:

$$\alpha = \begin{cases} 3^{n/3} & n \equiv 0 \pmod{3} \\ 4 \cdot 3^{(n-4)/3} & n \equiv 1 \pmod{3} \\ 2 \cdot 3^{(n-2)/3} & n \equiv 2 \pmod{3} \end{cases}$$

A prova deste corolário segue facilmente do teorema (V.5.2) tendo em vista que o valor de α é igual ao produto das partes que constituem os níveis da configuração ótima de \vec{G}_T . A figura (V.5.6) mostra os grafos de permutação com $n = 6, 7, 8$ que possuem o número máximo de cliques maximais.

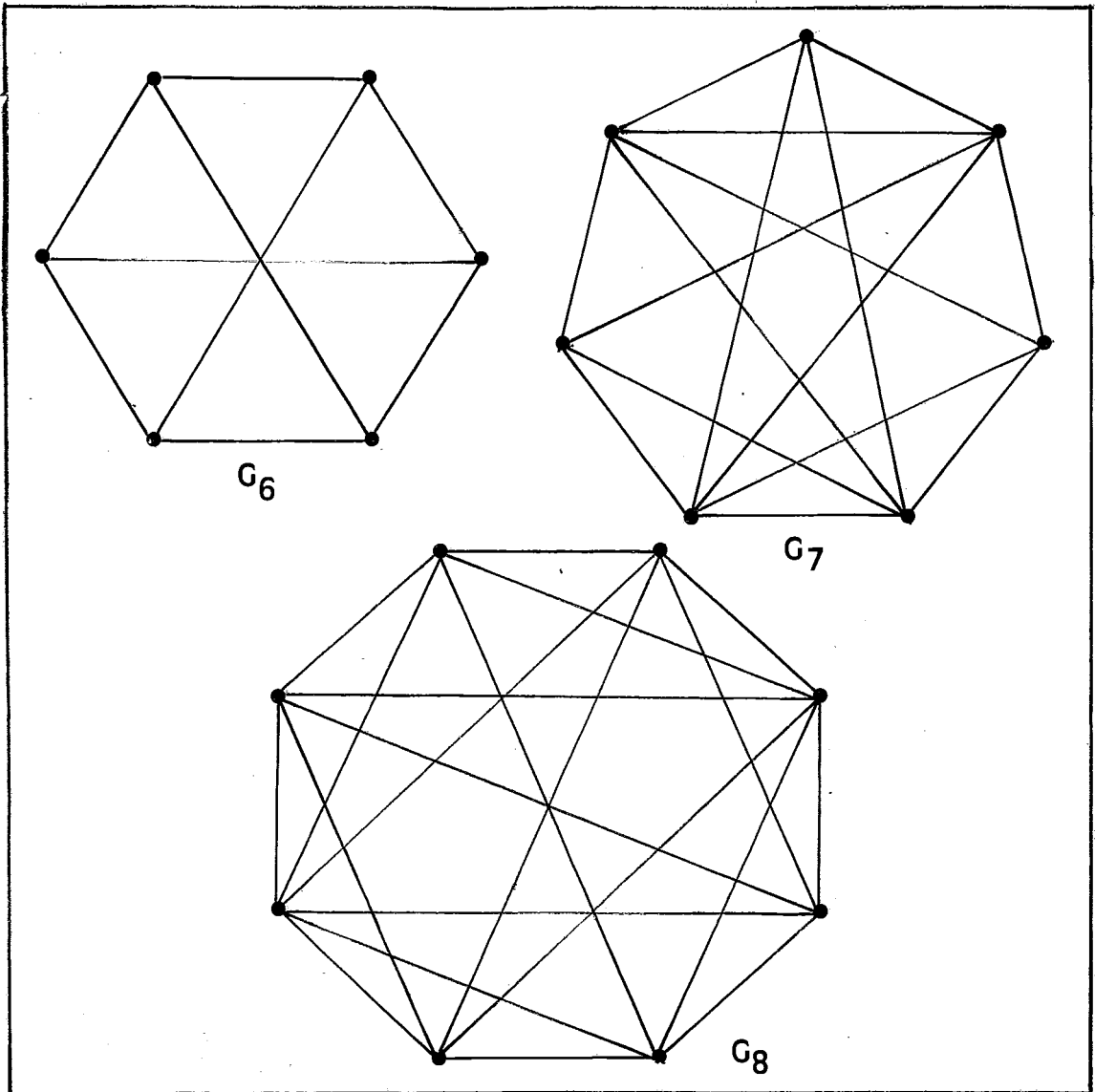


Figura V.5.6.

Para finalizar, ainda nos resta responder uma última pergunta. Seriam os grafos de permutação citados no corolário (V.5.2) os que apresentam o número máximo de cliques maximais dentre os circulares?

Respondendo esta questão vamos considerar que G seja um grafo circular de n vértices, $n > 1$ e seja D um digrafo obtido através da união dos subdigrafos D_v , $\forall v$ fonte de \vec{G} , induzidos pelos vértices de $\{v\} \cup \hat{A}(v)$.

Como o grafo subjacente a D_v é de permutação, a configuração ótima de D_{v_T} é um digrafo em camadas completo.

Seja D_T a união de todos os D_{v_T} , $\forall v$ fonte de \vec{G} . E o número de cliques maximais de G será dado por

$$\alpha = \sum_{\forall v \text{ fonte de } \vec{G}} \alpha_v$$

onde α_v representa o número máximo de cliques maximais do grafo subjacente a D_v .

Podemos, entretanto, limitar α pelo número $|F| \times \alpha^*$, onde $|F|$ é a cardinalidade do conjunto das fontes de \vec{G} e α^* o número máximo de cliques maximais que podemos encontrar num grafo de $n - |F|$ vértices. Isto, porém, significa que cada um dos elementos de F está ligado a todos os demais elementos de $V - F$ e desta forma o grafo circular G é de permutação.

A figura (V.5.7) ilustra os diagramas circulares dos grafos circulares de $n = 6, 7, 8$ que possuem o número máximo de cliques maximais.

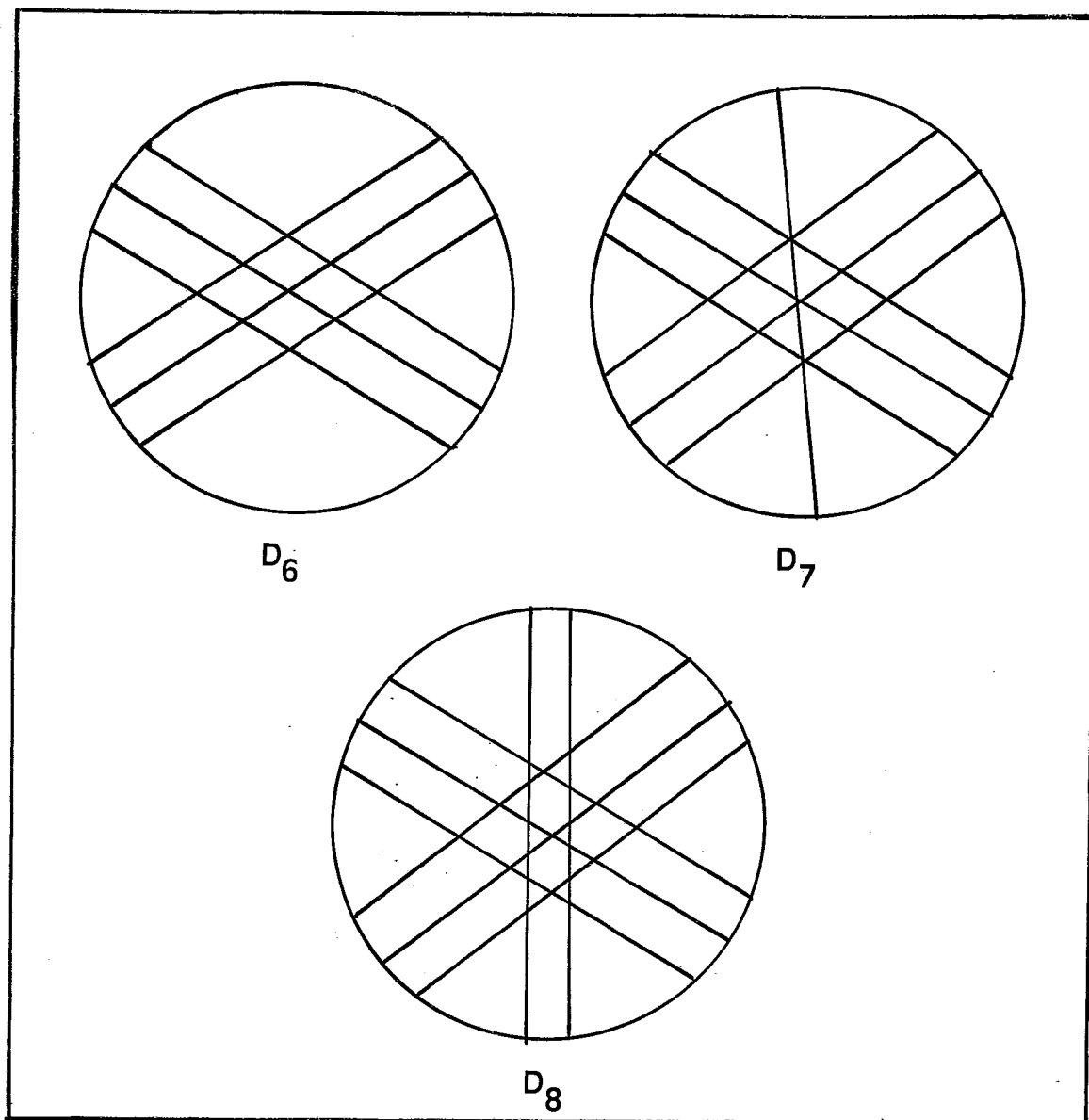


Figura V.5.7.

Como podemos observar através da figura (V.5.6) o número de cliques maximais dos grafos de $n = 6, 7, 8$ são respectivamente $\alpha = 9, 12, 18$.

Os grafos que possuem os números de cliques maximais citados pelo corolário (V.5.2) foram obtidos em 1960 por Raymond Miller e David Muller. Entretanto, estes pesquisadores não publicaram sua descoberta e em 1965, Moon e Moser, conforme consta em (24), os redescobriram independentemente. Por essa razão tais grafos são conhecidos como de Moon-Moser.

CONCLUSÃO

Nos capítulos I e II fizemos a exposição de alguns tópicos relativos à Teoria Geral de Grafos e aos Grafos Circulares que julgamos essenciais para a compreensão dos assuntos aqui abordados.

Uma das primeiras opções que fizemos se refere à forma de representação do Grafo Circular. Escolhemos a sequência circular devido a simplicidade da estrutura de dados na qual ela pode ser implementada. O grafo que ela representa, se preciso for, pode ser resgatado em $O(n + m)$ como vimos no Capítulo V. Além disso, alguns dos algoritmos apresentados no Capítulo III e os que introduzimos nos Capítulos IV e V trabalham com maior eficiência quando o grafo é representado por uma sequência de números do que quando explicitamos seus vértices e arestas.

A atenção que dispensamos aos grafos de permutação se justifica por eles serem um tipo especial dos circulares e, por ser um grafo de permutação, os subgrafos gerados pelos vizinhos de cada um dos vértices de um grafo circular. Também, por ser um grafo circular capaz de representar o processo de ordenação dos elementos de um conjunto N , segundo uma permutação P , usando um sistema de pilhas em paralelo. Todas estas particularidades que envolvem um grafo circular, um grafo de permutação ou simplesmente uma permutação, são utilizadas no desenvolvimento de algoritmos que constam neste trabalho.

Outra opção que fizemos foi a de expor os algoritmos encontrados na literatura para a determinação de cliques máxi

mas em grafos circulares, já que estudamos um processo de obtenção das cliques maximais para os mesmos grafos.

O tipo de orientação em grafos que identificamos, a orientação coberta, foi de fundamental importância na elaboração do algoritmo para determinar as cliques maximais de grafos circulares. Como o complemento de um grafo circular pode não ser circular como a figura C.1 ilustra, o algoritmo para determinar todas as cliques maximais não pode ser usado para determinar todos os seus conjuntos independentes maximais.

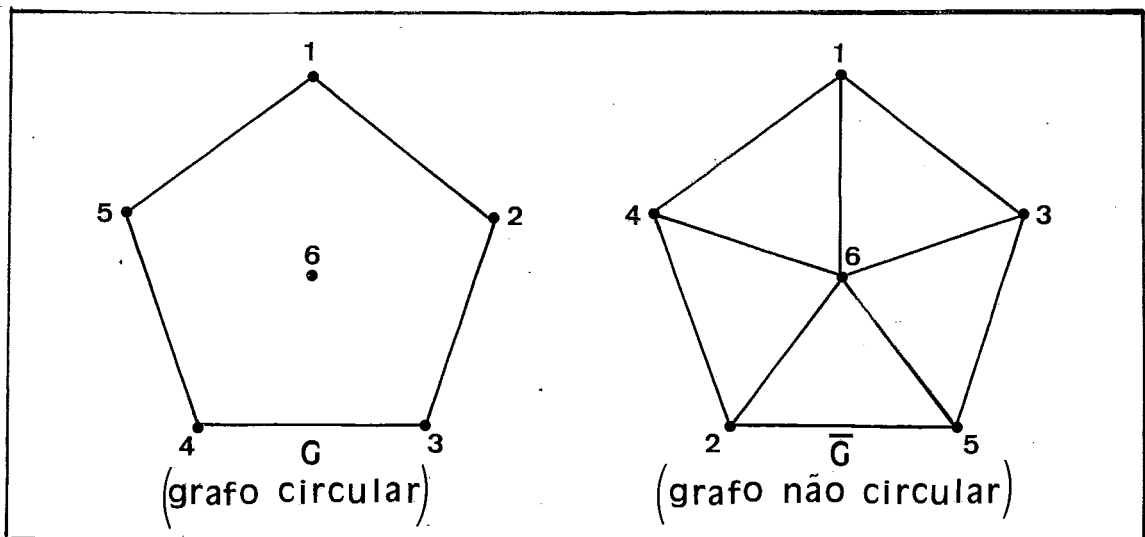


Figura C.1

Mas, o complemento de um grafo circular G gerado pela sequência circular S é a união de dois grafos G_1 e G_2 constituídos pelo mesmo conjunto $V(G)$ de vértices e cujos conjuntos de arestas são assim definidos:

$$E(G_1) = \{(u,v)/\text{os intervalos correspondentes a } u \text{ e } v \text{ obedecem a propriedade de inclusão em } S\}$$

$$E(G_2) = \{(u,v)/\text{os intervalos correspondentes a } u \text{ e } v \text{ obedecem a propriedade de disjunção em } S\}$$

Orientando as arestas de G_1 e G_2 do vértice de menor para o de maior rótulo obtemos em cada caso uma orientação transitiva.

A justificativa para esta afirmação é a seguinte:

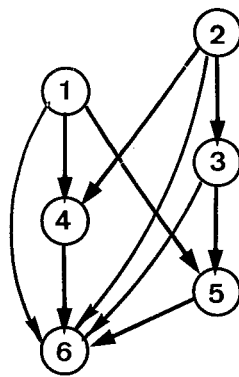
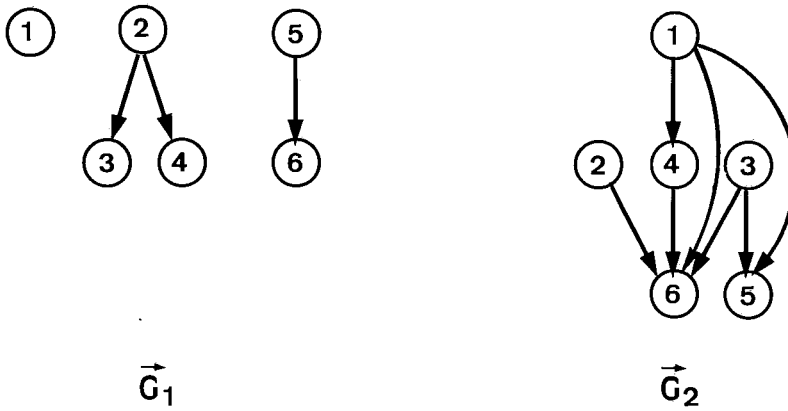
Caso 1 - No digrafo \vec{G}_1 . Sejam (u,v) e (v,w) duas arestas de \vec{G}_1 . Logo $u < v$ e $v < w$ e o intervalo correspondente a u inclui o que corresponde a v e este inclui o correspondente a w . Logo o intervalo u inclui o intervalo w e a aresta $(u,w) \in E(G_1)$. Mas sendo $u < w$; $(u,w) \in E(\vec{G}_1)$.

Caso 2 - No digrafo \vec{G}_2 . Sejam (u,v) e (v,w) duas arestas de \vec{G}_2 .

Os intervalos correspondente a u e v são disjuntos, e os correspondentes a v e w também são disjuntos.

Como $u < v$ e $v < w$, u ocorre em S antes de v e v antes de w . Logo u ocorre antes de w e $(u,w) \in E(\vec{G}_2)$.

Sendo \vec{G}_1 e \vec{G}_2 transitivos, obviamente as orientações impostas a G_1 e G_2 são cobertas. Na união dos dois digrafos, entretanto, isto pode não ocorrer. Em $\vec{G}_1 \cup \vec{G}_2$ da figura (C.2) a ausência da aresta $(2,5)$ justifica esta afirmação.

$$S = (1\ 2\ 3\ 1\ 4\ 3\ 5\ 4\ 2\ 6\ 6\ 5)$$


$$\vec{G}_1 \cup \vec{G}_2$$

Figura C.2

Acreditamos, porém, que dando continuidade a este estudo podemos ainda fazer alguns progressos para a resolução deste problema.

Outra sugestão que podemos apresentar consiste na identificação de novas classes de grafos que admitem orientação coberta. Isto lhes deve proporcionar, pelo menos, a resolução do problema da determinação de todas as cliques maximais e o da clique máxima em tempo polinomial.

JOHNSON afirma em (19) que se encontra ainda em aberto a determinação das complexidades dos problemas : Isomorfismo de Grafos, Partição por Clique, Índice Cromático e Conjunto Dominante particularmente para os grafos circulares. Observamos que o primeiro problema citado permanece em aberto para um grafo qualquer, enquanto que os demais são NP-completos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- (1) AHO, A.V., GAREY, M.R. e ULLMAN, J.D. - "The Transitive Reduction of on Directed Graph", Siam J. Comput., Vol. 1, nº 2, pp. 131-137, (1972).
- (2) AHO, A.V., HOPCROFT, J.E. e ULLAMN, J.D. - "The Design and Analysis of Computer Algorithms", Addison-Wesley Publishing Company, Reading, (1974).
- (3) BOAVENTURA NETTO, P.O. - "Teoria e Modelos de Grafos", Editora Edgard Blucher, Ltda., São Paulo, (1979).
- (4) BONDY, J.A. e MURTY, V.S.R. - "Graph Theory with Applications", The MacMillan Press Ltda., New York, (1976).
- (5) BOUCHET, A. - "Reducing Prime Graphs and Recognizing Circle Graphs", Université du Maine, France, (1985).
- (6) BUCKINGHAM, M.A. - "Circle Graphs", Computer Science Report NS0-21, Courant Institute of Mathematical Sciences, New York, (1980).
- (7) EVEN, S. - "Algorithmic Combinatorics", The MacMillan Company, New York, (1973).

- (8) EVEN, S., ITAI, A. - "Queues, Stacks and Graphs", in: Theory of Machines and Computations, Z. Kohavi. A. Paz ed. Academic Press, New York, pp. 71-86, (1971).
- (9) EVEN, S., PNUELI, A. e LEMPEL, A. - "Permutations Graphs and Transitive Graphs", Journal of the Association for Computing Machinery, vol. 19, nº 3, pp. 400-410, (1972).
- (10) FOURNIER, J.C. - "Une Caractérisation des Graphes de Cordons des", C.R. Acad. SC. Paris, t. 286, serie A, pp. 811-813, (1978).
- (11) FRAYSSEIX, H. - "Local Complementation and Interlacement Graphs", Discrete Mathematics, vol. 33, pp. 29-35, (1981).
- (12) FRAYSSEIX, H. - "A Characterization of Circle Graphs", Europ. J. Combinatorics, Vol. 5, pp. 223-238, (1984).
- (13) GABOR, C.P., HSU, W.L. e SUPOWIT, K.J. - "Recognizing Circle Graphs in Polynomial Time", in Proceedings 26th Ann. Symp. on Foundations of Computer Science, IEEE Computer Society, Los Angeles, (1985).

- (14) GAREY, M.R. e JOHNSON, D.S. - Computers and Intractability - A Guide to the Theory of NP-Completeness, W.H. Freeman and Company, San Francisco, (1979).
- (15) GAVRIL, F. - "Algorithms for a Maximum Clique and a Maximum Independent Set of a Circle Graphs", Networks, Vol. 3, pp. 261-273, (1973).
- (16) GAVRIL, F. - "Algorithms for Minimum Coloring, Maximum Clique, Minimum Covering by Cliques and Maximum Independent Set of a Chordal Graph", Siam J. Comput. Vol. 1, pp. 180-197, (1972).
- (17) GOLUBIC, M.C. - Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs - Academic Press, New York, (1980).
- (18) HSU, W.L. - "Maximum Weight Clique Algorithms for Circular-Arc Graphs and Circle Graphs", Siam J. Comput. Vol. 14, nº 1, pp. 224-231, (1985).
- (19) JOHNSON, D.S. - "The NP-Completeness Column: an Ongoing Guide", Journal of Algorithms, Vol. 6, pp. 434-451, (1985).
- (20) LEUNG, J.Y.T. - "Fast Algorithms for Generating All Maximal Independent Sets of Interval, Circular-Arc and Chordal Graphs", Journal of Algorithms, Vol. 5, pp. 22-35, (1984).

- (21) MOON, J.W. e MOSER, L. - "On Cliques in Graphs", Israel J. Math., vol. 3, pp. 23-28, (1965).
- (22) NEŠETŘIL, J. e RÖDL, V. - "Complexity of Diagrams".
Comunicação Particular.
- (23) READ, R.C., ROTEM, D. e URRUTIA, J. - "Orientations of Circle Graphs", Journal of Graph Theory, vol. 6, pp. 325-341, (1982).
- (24) REINGOLD, E.M., NIERVERGELT, J. e DEO, N. - Combinatorial Algorithms: Theory and Practice, Prentice Hall Inc., Englewood Clifts, New Jersey, (1977).
- (25) ROBINSON, D.F. e FOULDS, L.R. - Diagraphs: Theory and Techniques, Gordon and Breach Science Publishers, New York, (1980).
- (26) ROTEM, D. e URRUTIA, J. - "Finding Maximum Cliques in Circle Graphs", Networks, Vol. 11, pp. 269-278, (1981).
- (27) SUPOWIT, K.J. - "Decomposing a Set of Points into Chains, with Applications to Permutation and Circle Graphs", Information Processing Letters, Vol. 21, pp. 249-252, (1985).

(28) SZWARCFITER, J.L. - Grafos e Algoritmos Computacionais,
Rio de Janeiro, Editora Campus, Ltda.,(1984).

(29) TSUKIYAMA, S., IDE, M., ARIYOSHI, H. e SHIRAKAMA, I. -
"A New Algorithm for Generating all the Maximal
Independent Sets", Siam J. Comput. vol. 6, nº 3,
pp. 505-517, (1977).