

**PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA COM RISCO MÍNIMO:
ALGORÍTMOS E APLICAÇÕES A PROBLEMAS DE PLANEJAMENTO**

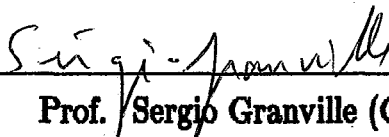
Francisco José Negreiros Gomes

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D.Sc.) EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

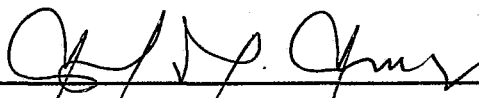
Aprovada por:




**Prof. Nelson Maculan Filho (UFRJ)
(Presidente)**



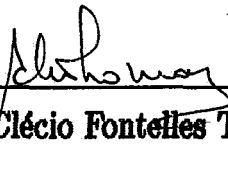
Prof. Sergio Granville (CEPEL)



Prof. Carlos Alberto Nunes Cosenza (UFRJ)



Prof. Geraldo Galdino de Paula Junior (UFV)



Prof. Antônio Clécio Fontelles Thomaz (UFC)

**RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
MAIO DE 1988**

NEGREIROS GOMES , FRANCISCO JOSÉ

**Programação Estocástica com Risco Mínimo:
Algoritmos e Aplicações a Problemas de Planejamento
[Rio de Janeiro] 1988**

**VIII, 82 p., 29,7cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,
Engenharia de Sistemas e Computação 1988)**

**Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro,
COPPE ,**

**1. Programação Estocástica I. COPPE/UFRJ
II Título (série)**

**À *Juanhe*, uma trindade na qual
me apoio**

A G R A D E C I M E N T O S

Ao **orientador** e amigo, **Professor Nelson Maculan**, pela dedicação e paciência durante a **elaboração** deste trabalho.

Ao **professor Clécio Thomaz**, pela amizade e **colaboração** em **diversos** trabalhos de pesquisa que subsidiaram esta tese.

Aos **tios Paulo** e **Lola** pela acolhida **durante os primeiros tempos** do curso e pelo incentivo ao longo dessa jornada.

Aos meus pais, **Miguel** e **Rosa Maria**, os **quais** cultivaram em mim o **gosto** pela **pesquisa** e me deram todas condições para isto.

Ao amigo **Hélio Moura**, o qual **proporcionou acesso** a **diversas** ferramentas **computacionais** que **contribuíram** para o **desenvolvimento** do sistema **PORTFOL**.

Ao colega e amigo Paulo **Villela**, o qual sugeriu a linha de **pesquisa** objeto desta tese.

Aos **professores, técnicos**, pessoal de apoio administrativo e **colegas** do **Programa** de Engenharia de **Sistemas** que direta ou **indiretamente colaboraram** para o **sucesso** deste **trabalho**.

Ao Departamento de **Estatística** e Matemática Aplicada da Universidade Federal do Ceará, ao Departamento de **Matemática** da Universidade Federal do **Espírito Santo** e à **CAPES/PICD**, pelo suporte **financeiro** concedido para **elaboração** desta pesquisa.

Resumo da % Apresentada & COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.).

**PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA COM RISCO MÍNIMO:
ALGORÍTMOS E APLICAÇÕES A PROBLEMAS DE PLANEJAMENTO**

**Francisco José Negreiros Gomes
Maio 1988**

Orientador: Nelson Maculan Filho

Programa: Engenharia de **Sistemas** e Computação

Neste estudo tratamos com modelos e **métodos de otimização estocástica**. Em primeiro lugar, fazemos uma revisão sucinta do estado da arte da programação **estocástica**. Em seguida, nos concentramos nos modelos com risco mínimo e probabilidade nas restrições, desde a **caracterização** do problema, até o desenvolvimento do sistema **computacional** que **implementa** os **algoritmos** propostos. No final, apresentamos algumas **aplicações** do modelo de programação **estocástica** com risco mínimo a problemas de planejamento nas áreas de finanças, pesca industrial e economia agrícola.

Abstract of thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.).

**STOCHASTIC PROGRAMMING WITH MINIMUM RISK:
ALGORITHMS AND APPLICATIONS TO PLANNING PROBLEMS**

Francisco José Negreiros Gomes

May 1988

Chairman: Nelson Maculan Filho

Department: Systems Engineering and Computation

In this work, we deal with **models and methods of stochastic optimization**. **First**, we **make a brief review** of the **state of art of stochastic programming**. Then, we concentrate **in models** of minimum risk and chance **constraints, starting with problem characterization until the computational system development which implements the proposed algorithms**. Finally, we **present some applications** of the **minimum risk stochastic programming model to planning problems in finance, industrial fisheries and agricultural economics**.

Índice

Capítulo I. INTRODUÇÃO	1
Capítulo II. O ESTADO DA ARTE DA PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA	
2.1 Introdução	5
2.2 Problemas de Programação Estocástica	7
2.3 Problemas de Distribuição	8
2.4 Problemas com Restrições Probabilísticas	10
2.5 Problemas com Recursividade	12
2.6 Métodos Quasigradientes Estocásticos	13
2.7 Dualidade em Programação Estocástica	15
2.7.1 Interpretação Econômica do Primal	15
2.7.2 O Programa Dual Estocástico	18
2.7.3 Equivalência Econômica entre Modelos	20
2.8 Biblioteca de Códigos de Programas Estocásticos	23
2.8.1 Decomposição em Programação Estocástica	23
2.8.2 Aproximação Semi-Estocástica	24
2.8.3 Otimizador de Programação Estocástica com Recursividade	25
2.8.4 Códigos para Problemas com Restrições Probabilísticas	25
Capítulo III. PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA COM RISCO MÍNIMO	
3.1 Modelos para o Problema PERM	28
3.1.1 Seleção de Portfólios	28
3.1.2 Modelo PERM com Probabilidade Máxima	31
3.2 Métodos para Resolução de Problemas PERM	34
3.2.1 Método Paramétrico Quadrático	34
3.2.2 Método de Transformação Quadrática Direta	40
3.2.3 Generalização do Problema PERM	44
3.3 PORTFOL - Sistema de Apoio à Análise de Problemas PERM	45
3.3.1 Estrutura Computacional do Sistema PORTFOL	46
3.3.2 Leitura, Especificação e Geração do Problema	48
3.3.3 Implementação da Geração do Problema	52

3.3.4 Adaptação e Solução	53
3.3.5 Relatórios de Saída	54
3.3.6 Testes do Código	54
Capítulo IV. APLICAÇÕES À PROBLEMAS DE PLANEJAMENTO	
4.1 Seleção de Investimentos	57
4.2 Otimização da Pesca Industrial	60
4.2.1 A Pesca Industrial do Nordeste do Brasil	61
4.2.2 Modelo de Otimização da Estação de Pesca	62
4.2.3 Resultados do Modelo de Pesca	66
4.2.4 Preços Sombra do Nível de Estoque	68
4.3 Alocação de Terras para Agricultura	70
Capítulo V. CONCLUSÕES	73
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	76

Capítulo I INTRODUÇÃO

As rápidas mudanças **ambientais** que **ocorrem** hoje acarretam a **necessidade** de modelos e **métodos capazes** de tratar com a **incerteza** inerente aos sistemas **relacionados** com economia, **meteorologia**, energia, ecologia, etc. Sistemas que envolvem **interações** entre o homem, natureza e **tecnologia** estão sujeitos a distúrbios que podem **ser** diferentes de qualquer coisa que tenha acontecido no passado. **Além disso**, muitos sistemas são complicados para **permitir** que sejam feitas medidas precisas sobre o estado do sistema. A incerteza, a **não-estacionalidade** e o **desequilíbrio estão presentes** na maioria dos sistemas que desejamos analisar e controlar.

De forma a **tratar** com tais **situações**, devemos **desenvolver** sistemas que **possam** facilitar **nossa resposta** à **incerteza** e às **condições** de **mudanças no nosso** ambiente. Um procedimento **geral** para a modelagem das **incertezas**, o qual tem sido aplicado **com sucesso** numa grande variedade de problemas, é atribuir, explícita ou **implícitamente**, uma medida de probabilidade para as quantidades do problema. **Isto nos leva** a **modelos de otimização estocástica**, chamados **programas estocásticos se eles** tomam uma estrutura que parece com aquela de problemas de programação linear ou **não-linear**.

Neste estudo damos prosseguimento à pesquisa que iniciamos em **NEGREIROS[47]** com a **análise** de problemas de **Programação Estocástica** usando uma **série** de abordagens **sem**, no entanto, nos **preocupar** com **algoritmos computacionais**, salvo aquele que **implementou** o modelo SEPE (**Solução Experimental de Programação Estocástica**), o qual mesclava **simulação** de **variáveis** aleatórias (**parâmetros** do modelo) e **programação** linear.

Aqui **nossa preocupação maior reside no** estudo, **desenvolvimento** e **implementação** de **algoritmos** para **resolver** algumas **classes específicas** de problemas de **Programação Estocástica**, com **ênfase** em problemas com **Risco Mínimo** e **Probabilidade nas Restrições**.

De uma forma geral, **abordamos** o **seguinte** tipo de **problemas** de **Programação Matemática**:

$$\begin{aligned} & \min E\{f(x, \omega)\} \\ & \text{sujeito a} \\ & E\{g^i(x, \omega)\} \leq 0, \quad i = 1, \dots, m \\ & x \in X \end{aligned} \tag{1.1}$$

onde E **representa** a esperança matemática, $f(x, \omega)$ e $g(x, \omega)$ são **funções** do vetor aleatório ω e da variável de **decisão** x do espaço **n -dimensional** X . Por exemplo, x pode ser o **nível** de estoque de um certo produto, cuja demanda tem um **valor aleatório** w .

No segundo capítulo, apresentamos uma revisão sobre o estado da arte da **Programação Estocástica**, **descrevendo** os tipos de **modelos** mais usados e os mais recentes desenvolvimentos de **algoritmos computacionais**.

Em primeiro lugar, **analisamos** os problemas de **Distribuição** os **quais podem** ser definidos como segue:

$$\begin{aligned} & \max c'x \\ & \text{sujeito a} \\ & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

onde o vetor de **decisão** x é **escolhido** depois da **realização** do vetor **aleatório** (A, b, c) . Para esta classe de problemas, o que se deseja é construir procedimentos para determinar

as distribuições de probabilidade do vetor solução $x = x_0(A, b, c)$ e do valor ótimo de $\pi_0 = c'x$.

Em seguida, revisamos os problemas com Restrições Probabilísticas, cuja formulação é a seguinte:

$$\begin{aligned} \max E\{c'x\} \\ \text{sujeito a} \\ \Pr\{Ax \leq b\} \geq \alpha \\ x \geq 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

onde o conjunto de restrições lineares probabilísticas, a nível α , se transforma noutro de restrições determinísticas não-lineares.

Depois, abordamos problemas com **Recursividade**, isto é, problemas, onde primeiro **resolve-se** a partir de uma estimativa para o lado direito das **restrições** (2.5.1) e, num segundo estágio, faz-se uma **correção** com relação a **quaisquer** discrepâncias de **violações** das **restrições** através de um problema **recursivo**, após a **realização dos parâmetros** considerados aleatórios.

Nesse ponto, **analisamos** os **Métodos Quasigradientes Estocásticos**, os quais permitem resolver problemas de **otimização cujas** componentes (função objetivo e **restrições**) sejam de **difícil avaliação**. **Dá, a necessidade** de se trabalhar com **estimativas de tais funções**.

No item seguinte, apresentamos um **esboço** da Teoria de **Dualidade** em Programação **Estocástica** usando os problemas com **recursividade** e aqueles com **restrições probabilísticas** para interpretar a **solução dual** e estudar a **equivalência** entre **modelos**.

Na Última parte do Capítulo II, **descrevemos** alguns **métodos** que **foram** desenvolvidos e **implementados** pelo projeto ADO/IIASA, **cujas** biblioteca de programas **computacionais** exprime o estado da arte dos **algoritmos** em **otimização estocástica**.

O Capítulo III contitue-se de uma contribuição à solução de problemas pertencentes a classe de problema de Programação **Estocástica** com **Risco Mínimo** (PERM) e **Probabilidade** nas **Restrições**. Supondo que os **coeficientes** da função objetivo seguem uma **distribuição** de probabilidade normal **multivariada**, deduzimos o equivalente **determinístico**

do modelo. Com o estudo das condições de otimalidade (Kuhn-Tucker) do programa não-linear equivalente, reduzimos o problema a um programa pseudo-quadrático e sugerimos alguns algoritmos para sua resolução. Em seguida, apresentamos o código computacional PORTFOL que é uma implementação dos algoritmos descritos.

No Capítulo IV apresentamos algumas aplicações do modelo PERM a problemas de planejamento. Primeiro, estudamos o problema de Seleção de Investimentos em fundos de ações.

Em seguida, apresentamos um modelo original que visa maximizar a contribuição de uma frota pesqueira observando restrições operacionais, econômicas e biológicas. Os resultados de tal modelo definem uma política de pesca para a frota pesqueira existente no Norte e Nordeste do Brasil.

Por último aplicamos o modelo PERM num problema de economia agrícola referente ao plantio de culturas com restrições de irrigação.

Capítulo II

O ESTADO DA ARTE DA PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA

2.1 Introdução

Problemas de **otimização** geralmente tratam com **parâmetros** considerados números **fixos** conhecidos. No **entanto**, em muitas **situações** práticas, somente conhecemos a **natureza estocástica** dos **coeficientes** (**p.ex.** demanda, capacidade, custo, **etc.**), daí surgem os Modelos de **Otimização Estocástica**.

Neste **caso**, o **procedimento** mais comum seria substituir cada **parâmetro** aleatório do modelo por **seu** valor esperado correspondente e, então, **resolver** o problema de **Programação Matemática** resultante. No entanto, tal **método** pode **gerar** uma **soluções** estatisticamente **inviável**", o que pode ser comprovado através de um exemplo apresentado por **ALBUQUERQUE[1]**.

Exemplo 2.1

Seja o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a} \\ a_1 x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ a_2 x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

onde (a_1, a_2) é um vetor cujos elementos são variáveis aleatórias independentes com distribuições uniformes dadas por $a_1 \sim U[0, 4]$ e $a_2 \sim U[1, 3]$. Aplicando o conceito de valor esperado, temos

$$E(a_1) = \frac{1}{4} \int_0^4 a_1 da_1 = 2 \quad \text{e} \quad E(a_2) = \frac{1}{3} \int_1^3 a_2 da_2 = 2$$

substituindo estes valores no problema original

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a} \\ 2x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ 2x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

que tem solução ótima dada por $(x_1^*, x_2^*) = (1, 1)$. Se tentarmos verificar até que ponto a solução do problema acima é viável com relação ao problema original, teremos a seguinte probabilidade:

$$\begin{aligned} \Pr\{(a_1, a_2) \mid a_1 x_1^* + 2x_2^* \geq 4 \text{ e } a_2 x_1^* + x_2^* \geq 3\} &= \\ \Pr\{(a_1, a_2) \mid a_1 \geq 2 \text{ e } a_2 \geq 2\} &= \\ \Pr\{a_1 \geq 2\} \cdot \Pr\{a_2 \geq 2\} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Portanto, podemos dizer que a solução do problema original tem probabilidade 0.75 de ser inviável. Assim a implementação de uma solução obtida por esse processo pode ser desastrosa.

O desenvolvimento de formulações e técnicas de programação matemática para estudar e resolver certas classes de problemas de otimização estocástica, iniciou-se independentemente por BEALE[5], DANTZIG[13], TINTNER[66], CHARNES e COOPER[11] e, mais recentemente, WALKUP e WETS[74].

Básicamente os métodos de programação estocástica tem uma característica em comum: incorporam as distribuições de probabilidade dos parâmetros de modo a converter o problema probabilístico para uma forma determinística e, então, definem um conjunto de regras contendo certas condições de otimalidade.

2.2 Problemas de Programação Estocástica

Essencialmente, existem dois tipos de modelos em programação estocástica, o modelo "Passivo" e o modelo "Ativo".

As formulações que seguem o modelo passivo, também chamado de "espere e veja", são baseadas na hipótese de que temos condições de esperar pela realização das variáveis aleatórias e tomar decisões com informação completa sobre tal realização, isto é, se $(\hat{A}, \hat{b}, \hat{c})$ é uma realização do vetor aleatório (A, b, c) , temos que resolver o programa linear abaixo:

$$\begin{aligned} \max z &= \hat{c}'x \\ \text{sujeito a} \\ \hat{A}x &\leq \hat{b} \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Neste caso, estaríamos preocupados com duas questões: (i) Qual a esperança do valor ótimo de (2.2.1)? e (ii) Qual a variância deste valor ótimo? Em geral, nosso interesse será na distribuição de probabilidade do valor ótimo de (2.2.1).

Quando uma decisão sobre x tem que ser tomada antes ou, pelo menos, sem o conhecimento da realização das variáveis aleatórias, então estamos diante do modelo ativo, também conhecido como "aqui e agora".

Uma decisão sobre x é uma medida de probabilidade P_x sobre um espaço de Borel $X \subset \mathbb{R}$ (por exemplo, $\{x \mid c \leq b\}$). Uma interpretação prática de uma decisão é a

hipótese de que quase sempre tomamos nossa decisão com os x 's resultando de uma simulação de Monte-Carlo da distribuição de probabilidade P_{π} escolhida.

Os modelos que utilizam as formulações de Programação Estocástica com Recursividade e Programação com Restrições Probabilísticas se encaixam na abordagem "aqui e agora", enquanto que os problemas de Distribuição seguem o modelo "espere e veja".

2.3 Problemas de Distribuição

Esta classe de problemas resulta da suposição de que o vetor de decisão x da versão aleatória de (2.2.1) é escolhido somente depois da realização do vetor aleatório (A, b, c) . O problema busca teórica e computacionalmente as distribuições do vetor solução $x_0 = x_0(A, b, c)$ e do valor ótimo $\pi_0 = c'x_0$

Teoricamente, o problema é resolvido considerando-se matrizes $m \times (m+n)$ e $n \times (m+n)$, aumentadas da matriz unitária, (AI) e $(A'I_n)$, correspondentes ao tableau compacto do Simplex, veja p.ex. LUEMBERGER[39]. Para cada uma das $\binom{m+n}{n}$ escolhas de bases primais e duais, os pares selecionados dentre suas colunas respectivas são matrizes $P_k(m \times m)$ e $D_k(n \times n)$ não singulares. Cada uma das seleções define uma região de decisão

$$\Delta_k = \{(A, b, c) \in R_{mn+m+n} | P_k^{-1}b \geq 0, D_k^{-1}c \geq 0\}$$

com (A, b, c) variando parametricamente.

Em princípio as distribuições de x_0 e π_0 (e as variáveis duais y_0) podem ser calculadas explicitamente pela avaliação da distribuição condicional dos seus valores $x_k = P_k^{-1}b_k$, $\pi_k = c'_k x_k$ e $y_k = D_k^{-1}c_k$ sobre os elementos de uma disjunção do espaço de decisões. Em geral, contudo, as transformações (para determinar as regiões de decisão) são de complexidade proibitiva, de forma que a literatura dá mais ênfase a casos especiais de esquemas aproximativos.

O problema de distribuição tem quatro tipos de abordagens computacionais: análise de erro, análise de pós-otimização, análise de sensibilidade e problemas de decisão.

Para a análise de erro, não é de nosso conhecimento que exista na literatura um

estudo completo sobre o erro computacional gerado a partir do método Simplex. Mesmo assim, **alguns** autores, DEMPSTER[15] e PRÉPOKA[59], **apresentaram resultados importantes sobre a propagação de erros iniciais nos dados**, usando a *Lei dos Grandes Números*.

Na análise de **pós-otimização**, DYSON e SWAITES[18-20] sugeriram métodos promissores para **geração** de uma **solução** aproximada dos problemas de **distribuição** baseados na definição, em termos de uma restrição não-linear adicional, da região contendo um parâmetro b do lado direito com probabilidade conjunta $(1 - \alpha)$. Mais recentemente, DEMPSTER e PAPAGAKI-PAPAU LIAS[17] apresentaram um **método** onde todos os parâmetros do problema são aleatórios e independentes. A ideia A usar uma **aritmética intervalar probabilística, chamada aritmética de quantis**, para **calcular as distribuições** aproximadas da **decisão** ótima e do valor da **função** objetivo de um programa linear em cada região de **decisão**.

A análise de sensibilidade de programas lineares em ambiente aleatório foi o que deu origem aos problemas de distribuição **introduzidos** por TINTNER[66] na área de **economia agrícola**. Nesse contexto, **espera-se** que a **variação nos parâmetros** seja **substancial** e, em muitas **aplicações práticas, algumas** informações sobre **essa variação pode** ser obtida a partir de **amostragem**, SENGUPTA[62]. **Esta** abordagem **se** aplica melhor quando **somente** os parâmetros da **função** objetivo, ou pelo **dual** o vetor b do lado direito, ou **ambos, são** aleatórios, de forma que **as regiões de decisão correspondem** a submatrizes fixas da matriz de **restrições** A . Em particular, **esta** metodologia foi aplicada por NEGRETIROS COMES e MACULAN[48] para **alocação** de uma frota pesqueira.

WETS[80] **discute** o **dissecamento** do espaço de **parâmetros** em regiões de **decisão** interiores **disjuntas** e **estabelece** que tal **dissecamento** é um **poliedro** complexo no caso onde b ou c (**não ambos**) **são** aleatórios. FOOTE[29] apresenta um **algoritmo** tipo **Simplex** para a **geração** das bases que **determinam as** regiões de **decisão** neste caso.

Observando o problema de **integração múltipla** das **funções** densidade sobre as regiões de **decisão dissecadas**, WETS[80] **concluiu** que o problema não pode ser resolvido numericamente de forma eficiente quando o **número** de parâmetros for maior que quatro,

Para reduzir o **esforço computacional** na **geração** de regiões de **decisão** e calcular as **integrais múltiplas** sobre elas, BEREANU[6] apresenta uma **metodologia** que tenta **parametrizar** a **variação** aleatória do problema em **termos** de **poucos** parâmetros, Ele

descreve o código computacional **STOPRO** que implementa seu algoritmo para quando o problema é bem colocado no sentido de possuir um valor ótimo que provavelmente é finito, com somente um parâmetro aleatório. Em seguida, ele descreve o método *integração cartesiana* que é uma parametrização de pequena dimensão dos coeficientes aleatórios, um de cada vez.

Qualquer procedimento baseado em **integração** múltipla **numérica** torna-se impraticável a medida que o número de **parâmetros** aleatórios cresce um pouco. Até o presente, o método aplicado mais intensamente para obter **soluções** (aproximadas) para os problemas de distribuição é a análise de *Monte Carlo* - sugerida inicialmente por DANTZIG e MANDASKY[14]. Neste método, se obtém uma grande quantidade de **realizações** dos **parâmetros** aleatórios, usando *números pseudo-aleatórios*, e os programas **lineares** resultantes são **resolvidos** e classificados para gerar **aproximações empíricas** das **distribuições das decisões ótimas** e do valor ótimo. Os métodos de Monte Carlo tem provado serem bastante eficientes na prática para **avaliação** de **funções estocásticas**, como, por exemplo, em modelos de planejamento **energético**.

Outra abordagem para problemas de distribuição envolve a aproximação discreta da **distribuição** de probabilidade **conjunta** de (A, b, c) . WOLSEY[82] propôs um método que, trabalhando com uma aproximação suficientemente **ajustada**, **calcula** uma hierarquia de **distribuições** para x_0 e π_0 pelo **refinamento** sucessivo de **partições** do espaço de probabilidade **discreta correspondente**. Esta abordagem tem sido empregada em **problemas** de **programação** inteira **dinâmica** para **seleção** de **projetos**.

1.4 Problemas com Restrições Probabilísticas

A **formulação** do problema (2.2) com **restrições probabilísticas** é a seguinte:

$$\begin{aligned} \max z &= Ec'x \\ \text{sujeito a} \\ \Pr\{A'ix \leq \beta_i\} &\geq \alpha_i, \quad i = 1, \dots, m \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.4.1}$$

Este modelo apresenta restrições não lineares **determinísticas implícitas** - chamadas de **restrições** de chance - **sobre** o vetor de **decisão** x , as quais **especificam** a **satisfação** das

restrições aleatórias correspondentes a níveis de confiabilidade α_i . O método requer que o vetor de decisão x seja escolhido "antes" que o vetor (A, b, c) seja realizado de tal forma que a probabilidade de violação subsequente da restrição envolvendo a i -ésima linha a'_i de A e o coeficiente do lado direito β_i correspondente não exceda um nível prescrito $1 - \alpha_i$.

Quando A é fixa, as restrições de (2.4.1) podem ser expressas, em termos das funções de distribuição marginal F_{β_i} das componentes de b , como restrições com inequações lineares

$$Ax \leq \Phi \quad (2.4.2)$$

onde $\phi_i = \max\{\xi : F_{\beta_i}(\xi) \leq 1 - \alpha_i\}$. Quando (A, b) segue uma distribuição normal multivariada, CHARNES e COOPER[11] apresentaram um procedimento semelhante o qual produz restrições (determinísticas) quadráticas envolvendo médias, covariâncias e a distribuição de probabilidade normal padrão.

Um avanço considerável na manipulação e representação explícita de restrições probabilísticas resultou da teoria de medidas logaritmicamente côncavas desenvolvida por PRÉPOKA[58]. Uma medida P de Borel num espaço euclidiano E é logaritmicamente côncava se, para qualquer par de subconjuntos convexos X e Y de E e todo $\lambda \in [0, 1]$, temos que

$$P\{\lambda X + (1 - \lambda)Y\} \geq P\{X\}^\lambda P\{Y\}^{(1-\lambda)} \quad (2.4.3)$$

Além disso, PRÉPOKA[58] analisou a situação quando se tem uma única restrição probabilística conjunta

$$P\{Ax \leq b\} \geq \alpha \quad (2.4.4)$$

que estabelece um sistema de confiabilidade a nível α .

Vale salientar que as formulações de programação estocástica com restrições probabilísticas não penalizam explicitamente as violações de restrições, nem tão pouco fornecem recurso para reverter tal violação depois que se toma a decisão ótima.

2.5 Problemas com Recursividade

Em princípio, vamos considerar a formulação de WALKUP & WETS [74] para programas estocásticos com recursividade:

$$\begin{aligned}
 \min z &= cx + E_{\xi}\{qy\} \\
 \text{s. a} \\
 Ax &\leq b \\
 Tx + Wy &= \xi, \quad \xi \in \Xi \\
 x, y &\geq 0
 \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

onde $A(m \times n), T(m \times n), W(m \times R), c(1 \times n), q(l \times R), b(m \times 1)$ são matrizes fixas e $\xi(m \times 1)$ é um vetor aleatório com esperança finita, definido no espaço de probabilidade (Ξ, U, \mathcal{F}) , onde Ξ é o espaço amostral com uma σ -álgebra \mathcal{U} de conjuntos e \mathcal{P} uma medida de probabilidade em \mathcal{U} , FELLER[27].

Este problema pertence à classe de problemas de programação estocástica onde se procura uma solução "aqui e agora". O problema (2.5.1) representa um processo de decisão a dois estágios, o qual pode ser interpretado com segue:

seleciona-se $x \Rightarrow$ observa-se $\xi \Rightarrow$ seleciona-se y

A primeira decisão é selecionar os níveis de atividades $x = \hat{x}$, depois observar o evento aleatório $\xi = \hat{\xi}$ e, finalmente, permitir uma ação corretiva y para ratificar quaisquer discrepâncias entre ξ e Tx , i.e.,

$$\begin{aligned}
 \min qy \\
 \text{s. a} \\
 Wy &= \hat{\xi} - T\hat{x} \\
 y &\geq 0
 \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

No primeiro estágio, x é escolhida de forma a garantir que exista pelo menos uma ação recursiva viável. No segundo estágio, a decisão y é tomada quando não existirem mais incertezas no problema. Aqui supomos que o problema (2.5.1) tem solução ótima limitada, cuja discussão detalhada pode ser encontrada em WETS[76] e WALKUP & WETS[74].

A perda pode ser expressa como uma penalidade linear por partes, i. e., $W = (I_m, -I_m)$ e (2.5.2) toma o seguinte aspecto:

$$\begin{aligned} & \text{Min } q^+ y^+ + q^- y^- \\ & \text{s. a} \\ & y^+ - y^- = \hat{\xi} - T\hat{x} \\ & y^+, y^- \geq 0 \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

Note que (2.5.3) não faz restrição sobre o conjunto X de x viável para (2.5.1), o qual é, então, chamado de um problema com *recurso simples*. No caso de (A, q) fixo, através do dual de (2.5.3), é fácil ver que quando b tem *esperança finita* a *decisão* inicial resulta numa perda *esperada* finita $E\rho(x) = E\pi_o(b - Ax)$ que é uma função convexa e contínua sobre x e $\pi_o : \epsilon \rightarrow \pi_o(\epsilon)$.

No caso de programas *estocásticos* com *multiestágio*, BIRGE[8] e LOUVEAUX[38] apresentaram algoritmos que podem ser considerados como *extensões* do algoritmo *L shaped* de VAN SLYKE e WETS[72], cuja *descrição* detalhada pode ser encontrada em NEGREIROS GOMES[47].

2.6 Métodos Quasigradientes Estocásticos

Os métodos *quasigradientes estocásticos* (QGE) são algoritmos *estocásticos* para resolver problemas gerais de otimização restrita com funções não convexas e não diferenciáveis. O interesse por *procedimentos* desse tipo reside em duas *razões*. Primeiro, *processos determinísticos* são casos especiais de *processos estocásticos* e, portanto, os *procedimentos* de programação *estocástica* nos dão meios para construir algoritmos mais eficientes e flexíveis. Segundo, uma grande variedade de problemas aplicados não podem ser formulados nem resolvidos com o uso de técnicas *determinísticas* de *otimização*.

Os métodos QGE permitem resolver problemas de *otimização* com funções objetivo e restrições de tal natureza complexa que é impossível calcular valores precisos para essas funções. A ideia básica desta abordagem é usar estimativas *estatísticas* para valores das funções e suas derivadas em vez de valores precisos. Para problemas de *programação estocástica*, os métodos QGE generalizam o método de *aproximação estocástica irrestrita*

da esperança de uma função aleatória, WASON[75], para problemas que envolvem restrições gerais.

Os métodos QGE fazem parte da linha de pesquisa em problemas de otimização estocástica na União Soviética, cujo desenvolvimento está registrado nos trabalhos de ERMOLIEV e NURMINSKI[25], onde eles aplicam técnicas de otimização quasi-gradiente não-diferenciável à minimização da esperança matemática de uma função aleatória sujeita a restrições não-lineares determinísticas, ERMOLIEV[23], que contem uma revisão sistemática do desenvolvimento dos métodos QGE, e, recentemente, ERMOLIEV e GAI-VORONSKI[24], onde se discute os vários procedimentos e suas implementações computacionais e aplicações a problemas de localização.

Os métodos QGE tratam com problemas do seguinte tipo:

$$\begin{aligned} \min F(x) &= E_{\omega} f(x, \omega) \\ \text{sujeito a} \\ x &\in X \end{aligned} \tag{2.6.1}$$

onde x representa as variáveis de decisão, X o conjunto de restrições e ω A uma variável aleatória pertencente ao espaço de probabilidade (Ξ, U, \mathcal{F}) , definido na seção 2.6. Considera-se um número limitado de observações L função aleatória $f(x, \omega)$ em cada iteração de modo a determinar a direção do próximo passo. Os erros resultantes são suavizados até que o processo de otimização termine (que acontece quando o tamanho do passo é suficientemente pequeno).

O algoritmo QGE tem a seguinte forma:

$$x^{n+1} = \pi(x^n - \rho_n v^n) \tag{2.6.2}$$

onde x^n é a aproximação corrente da solução ótima, ρ_n o tamanho do passo, $\pi_X(x) = \arg \min_{z \in X} \|x - z\|$, e v^n é uma direção aleatória do passo. Esta direção pode ser, por exemplo, uma estimativa estatística do gradiente (ou subgradiente no caso não diferenciável) da função $F(x)$, então $v^n = \xi^n$ tal que

$$E(\xi^n \mid x^1, x^2, \dots, x^n) = F_X(x^n + a^n) \tag{2.6.3}$$

onde a^n decresce quando o número de iterações cresce, e o vetor u^n é chamado de um *quasigradiente estocástico* da função $F(x)$.

O algoritmo (2.6.2) – (2.6.3) pode ser aplicado a problemas com restrições mais gerais formuladas em termos de esperanças matemáticas

$$E_{\omega} f^i(x, \omega) \geq 0, \quad i = 1, \dots, m \quad (2.6.4)$$

pelo uso de funções **lagrangeanas** ou de penalidade.

2.7 Dnalidade em Programação Estocástica

Neste item estudaremos modelos de programação **estocástica** com relação a interpretação econômica e dualidade, baseados nas ideias propostas por GARSTKA[33] e WETS[79] para problemas com recursividade e GARSTKA[34] e EISNER & OLSEN[22] sobre a equivalência econômica entre problemas com recursividade e os problemas com restrições probabilísticas.

Com a obtenção do **equivalente determinístico** referente ao problema (2.5.1), através das condições de **Kuhn-Tucker**, é possível encontrar programas **duais** e apresentar uma interpretação econômica para eles. No entanto, WETS[78] formulou o programa dual estocástico de (2.5.1), o qual tem uma interpretação econômica mais coerente que o dual do equivalente determinístico.

2.7.1 Interpretação Econômica do Primal

De acordo com WETS[77], podemos escrever o programa (2.5.1) na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \min \quad & cx + E_{\xi}(qy(\xi)) \\ \text{s. a} \quad & \\ & -Ax \geq -b \\ & Tx + Wy(\xi) = \xi, \quad \xi \in \Xi \\ & x, y(\xi) \geq 0 \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

e seja $(x^*, y^*(\xi))$ uma solução ótima de (2.7.1), onde y é uma função $(y : R^m \rightarrow P)$.

Vamos imaginar o problema (2.7.1) como um programa clássico de produção com os seguintes elementos:

ξ_i : demanda aleatória para cada m produtos finais;

x : operação de cada uma das n atividades primárias;

c_j : custo unitário para operar a atividade primária j ;

b_i : quantidade de recurso i disponível;

a_{ij} : quantidade de recurso i gasto para operar cada unidade de atividade primária j ($i = 1, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$);

t_{ij} : número de unidades do produto primário j necessário para produzir uma unidade do produto final i ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, A$);

w_{ij} : número de unidades do produto final i obtida da operação da ação de recursividade j a nível unitário ($i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, R$);

q_j : custo de operar a atividade secundária j a nível unitário;

y : atividades secundárias ou de recursividade;

A demanda ξ é satisfeita pela operação de dois conjuntos distintos de processos de produção. Um conjunto de n atividades primárias é selecionado antes que ξ seja observada. Depois que ξ fica conhecida, o tomador de decisão pode contratar um conjunto de atividades secundárias ou recursivas. As restrições determinísticas ($Ax \leq b$) refletem limitações de matérias primas necessárias para obter as atividades primárias. cx representa o custo de executar um plano primário x específico. As atividades primárias podem ser vistas como produção de subcomponentes ou módulos que mais tarde são combinados (antes que ξ seja observada) em produtos finais. A tecnologia de combinar atividades primárias para a formação do produto final está embutida na matriz T . Se os produtos primário e final forem idênticos ($T = I$), mas ocorre um crescimento ou deterioração no estoque, então T seria uma matriz diagonal (com fatores de crescimento ou deterioração na diagonal). Geralmente, T representa a tecnologia de combinar subcomponentes no produto final.

Uma vez que se tenha determinado os níveis das atividades em x , é possível que exista uma discrepância entre a produção recém calculada do produto final, Tx , e a demanda realizada ξ . As atividades secundárias ou recursivas entram para ratificar tais discrepâncias. A tecnologia das n atividades recursivas está contida na matriz W . Desta forma, o problema de recursividade com ξ conhecida é o seguinte problema de programação matemática:

$$\begin{aligned} \min \quad & qy(\xi) \\ \text{s. a} \quad & \\ & Wy(\xi) = \xi - Tx \\ & y(\xi) \geq 0 \end{aligned} \tag{2.7.2}$$

Supondo que estamos diante de um problema com recursividade simples, $W = [I, -I]$, as atividades recursivas representariam, por exemplo, a obtenção do produto final i numa fonte externa se $\xi_i > (Tx)_i$ ou armazenagem do produto i se a produção excede a demanda, $(Tx)_i > \xi_i$. Em geral, W representa qualquer tipo de tecnologia de emergência, por exemplo:

- a. procura em fontes externas
- b. turnos especiais de produção
- c. transforme de excesso de produção em componentes básicos, etc.

Assim, podemos dizer que a solução do problema primal (2.7.1) estabelece níveis primários de produção e define uma função recursiva $y(\xi)$, tal que os custos esperados de operação para ambas atividades primárias e secundárias, de forma a atender a demanda aleatória ξ , sejam mínimos.

2.7.2. O Programa Dual Estocástico

WETS[78] formulou o **programa dual estocástico** de (2.7.1), o qual **não** inclui as **variáveis primais**, como em outros **programas duais não-lineares**, como segue:

$$\begin{aligned} \max & -\delta b + E_{\xi} \pi(\xi) \xi \\ \text{s. a} & \\ & -\delta A + E \pi(\xi) T \leq c \\ & \pi(\xi) W \leq q, \forall \xi \in \Xi \\ & \delta \geq 0, \pi(\xi) \text{ irrestrito} \end{aligned} \tag{2.7.3}$$

A **solução** de (2.7.2) consiste no por $(\delta, \pi(\xi))$, onde δ é um **vetor m dimensional** e π é uma **função vetorial** ($\pi : R^m \rightarrow R^m$).

Esta **formulação representa** o **problema do tomador de decisão dual** (empregueiro ou **fornecedor**) que **faz** ao **tomador de decisão primal** (emprededor) a seguinte proposta:

"O empregueiro aceita comprar **todos recursos** do **emprededor** a um **preço** δ_i por unidade de b_i ($i = 1, \dots, m$) e entregar produtos finais ao **emprededor** o **bastante** para atender exatamente **as m demandas** realizadas"

Com isso, o empregueiro está interessado em maximizar o lucro esperado de **suas** vendas, **menos** o que pagou **pelas mercadorias** do emprededor. Ele **cobra** ao emprededor $\pi_i(\xi)$ por cada unidade do produto final i dado que ξ é o vetor de demandas **realizadas**.

Condizente com a **notação** usada para o problema **primal**, temos que:

δ_i : preço por unidade de **recurso** i

$\pi_i(\xi)$: preço por unidade do produto final i

$E_{\xi} \pi_i(\xi)$: valor esperado do produto final i .

Evidentemente, o empregueiro deve especificar um preço de compra **para os** recursos e estabelecer **preços** de venda para cada **nível** de demanda ξ que possa **ser** realizada.

O primeiro conjunto de restrições do programa dual

$$-\sum_{i=1}^m \delta_i a_{ij} + \sum_{i=1}^m E\pi_i(\xi)t_{ij} \leq c_j$$

reflete que o empreendedor está ciente dos custos relevantes e da tecnologia das atividades primárias. **Se** ele escolhe **não** vender seus **recursos**, o empreendedor pode operar a atividade primária j a um custo **unitário** c_j . Portanto, ele poderia relutar em vender **seus** recursos e comprar o produto final do empreiteiro, a **não** ser que o preço de compra esperado de todo produto final resultante da operação da atividade j ao **nível** unitário, $\sum_{i=1}^m E\pi_i(\xi)t_{ij}$, menos os recebimentos das vendas de todos **recursos** consumidos pela atividade primal j , ao **nível** de produção unitário, for menor que c_j . O empreiteiro reconhece a **lógica** desta restrição e deve incluí-la como uma restrição com relação a seleção de seus preços.

O segundo tipo de restrições

$$\sum_{i=1}^m \pi_i(\xi)w_{ij} \leq q_j, \quad j = 1, \dots, m$$

diz que para qualquer ξ , os preços de venda do empreiteiro devem ser escolhidos de tal forma que o custo para o empreendedor de todo produto final, que poderia ser obtido a partir da operação da atividade **recursiva** j a **nível** unitário, não deve ultrapassar q_j . Isto sugere que o empreendedor também sabe da disponibilidade de ações **recursivas** e não estaria disposto a comprar produtos **provinientes** de qualquer **ação recursiva** a mais que o **custo** que ele mesmo teria se executasse tal ação.

O problema dual do empreiteiro mostrou-se mais complicado, já que a **especificação** completa da **função** $\pi(\xi)$ constitui uma tarefa difícil. No caso de **recursividade** simples, $W = [I - I]$ e $g = [q^+, q^-]$, a função dual de preço tem, para $\chi^* (m \times 1) = Tz^*$, o seguinte formato:

$$\pi_i(\xi_i) = \begin{cases} -q_i^-, & \text{se } \chi^* > \xi_i; \\ +q_i^+, & \text{ao contrário.} \end{cases}$$

O empreendedor (primal) **não** aceitaria vender sua **matéria** prima e comprar produtos **acabados**, a **não** ser que ele tenha em **mãos** a tabela completa de preços $\pi(\xi)$ o que, para uma W arbitrária, não é evidente.

2.7.3. Equivalência Econômica Entre Modelos de Programação Estocástica

Aqui discutiremos as equivalências matemáticas entre programas estocásticos com recursividade e programas estocásticos com restrições probabilísticas, dando ênfase às “implicações econômicas” destas equivalências.

No programa estocástico com recursividade, o vetor aleatório ξ está associado a uma função distribuição \mathcal{F} , absolutamente contínua e crescente em ξ ; \mathcal{F}_j denota a distribuição marginal de $\xi_j (j = 1, \dots, \bar{m})$ e Ξ denota o suporte da distribuição de ξ . Além disso, supomos que qy é uma função convexa separável em cada y_i .

Definimos um programa estocástico com probabilidade nas restrições como segue:

$$\begin{aligned} \min E_{\xi}(cx) \\ \text{s. a} \\ Ax \geq b \\ \Pr(Tx \geq \xi) \geq \alpha \\ x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.7.4}$$

onde \Pr denota probabilidade, α é um vetor \bar{m} dimensional com $0 \leq \alpha_i \leq 1$ e c, x, b, T e ξ são definidos da mesma forma que em (1.1). Nas restrições probabilísticas, x é selecionado quando a i -ésima restrição for satisfeita em $\alpha_i \cdot 100\%$ das vezes, uma vez que ξ é realizada.

GARTSKA[33] definiu a equivalência matemática para tais programas estocásticos, com A, T, c e b fixos, da seguinte maneira:

“para um dado qy e W no programa (2.5.1), é possível encontrar um vetor α para o programa (2.7.4) tal que a solução de (2.7.4) para este α é também ótima em (2.5.1). Reciprocamente, para o programa (2.7.4) e uma certa matriz de recursividade W , é possível encontrar um $q(y)$ para (2.5.1) que tem a mesma solução ótima que o programa com restrições probabilísticas correspondente.”

No caso de recurso simples, $W = [I, -I]$ em (2.5.1), então y e q podem ser particionadas em (y^+, y^-) e (q^+, q^-) com dimensões $(\bar{m} \times 1)$, $(m \times 1)$, $(1 \times a)$ e $(1 \times \bar{m})$ respectivamente. WILLIAMS[81] e WETS[77] mostraram, usando métodos diferentes,

a equivalência matemática entre (2.5.1) e (2.7.4). Basicamente, a metodologia para verificação desta equivalência está contida no seguinte teorema:

Teorema 2.7.5. Dado um programa *estocástico* de *recursividade* simples com solução, existe um programa de restrições *probabilísticas* equivalente. De forma semelhante, um programa com *restrições probabilísticas* com solução ótima x^0 tem um programa *linear* de *recursividade simples* associado com solução ótima x^0 .

Para isto, seja

$$\mathcal{F}_{\xi_i}(x_i^0) = \frac{q_i^+ - \pi_i^0}{q_i^+ + q_i^-} \quad (2.7.6)$$

onde π^0 é parte de uma solução ótima para

$$\begin{aligned} & \max \delta b + \pi x^0 \\ & \text{s. a} \\ & \delta A + \pi T \leq c \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

Dado um programa *estocástico* com *recursividade*, de solução ótima x^0 , o nível *a* correspondente ao programa com *restrições probabilísticas* equivalente é encontrado resolvendo-se (2.7.7) com $x^0 = T x^0$ para encontrar π^0 e então definindo $\alpha_i = \frac{q_i^+ - \pi_i^0}{q_i^+ + q_i^-}$. Começando-se com o programa de *restrições probabilísticas* com solução ótima x^0 , o programa de *recursividade* equivalente é encontrado definindo-se $x_i^0 = \mathcal{F}_{\xi_i}^{-1}(\alpha_i)$ e depois resolvendo-se (2.7.7) para encontrar π^0 , e finalmente escolhendo-se q_i^+ e q_i^- para satisfazer (2.7.6) com $\mathcal{F}_{\xi_i}(x_i^0) = \alpha_i$.

Podemos fazer uma análise de sensibilidade em cada α_i , supondo que os outros α_i s permaneçam constantes. O resultado desta análise nos permitirá fazer ilustrações sobre o comportamento dos custos de penalidade para uma dada restrição, quando o α_i correspondente sofre alteração e, por conseguinte, tecer comentários sobre a significância econômica da equivalência matemática. Fazendo $q_i^- = 0$, verificamos a magnitude de q_i^+ , determinada por $q_i^+ = \pi_i(x^0)/(1 - \alpha_i)$. A medida que α_i cresce, $x_i^0 = \mathcal{F}_{\xi_i}^{-1}(\alpha_i)$ também cresce. Enquanto a base ótima permanecer inalterada, $\pi_i(x^0)$ permanece constante em (2.7.7). α_i pode aumentar até um ponto onde a nova base se tome ótima com um novo valor $\pi_i(x^0)$ correspondente maior que o valor original. Da mesma forma, quando α_i decresce, x_i^0 decresce e $\pi_i(x^0)$ pode decrescer.

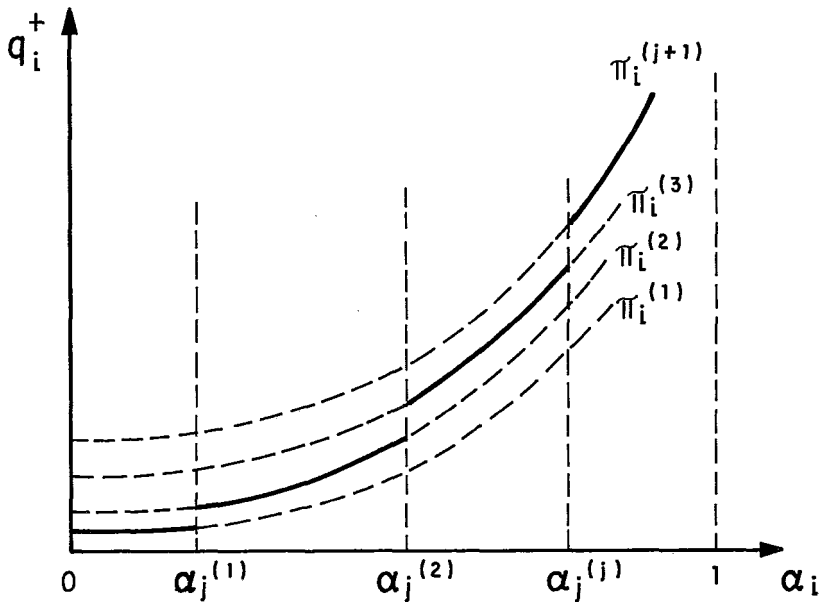


Figura 2.7.8. Análise Paramétrica das Variáveis Duais

Analisando a figura (2.7.8), os $\alpha_i^{(k)}$'s denotam valores de α_i nos quais muda a base ótima do programa (2.7.7). $\pi_i^{(k)}$, denota o valor de uma variável dual ótima (constante) no intervalo $(\alpha_i^{(k-1)}, \alpha_i^{(k)})$. Sempre que a base Ótima muda, fica evidente um salto brusco no valor do custo de penalidade q_i^+ . Note que q_i^+ pode ser zero no intervalo $[0, \alpha_i^{(1)})$ se $\pi_i(\chi_i^0)$ é zero, e que q_i^+ pode ser $+\infty$ em $(\alpha_i^{(j)}, 1]$ se este conjunto particular de intervalos de confiança torna o problema inviável. A descontinuidade das funções $q_i^+(\alpha)$ nos leva a concluir que embora problemas do tipo (2.5.1) sejam matematicamente equivalentes a problemas do tipo (2.7.4), o relacionamento refletido pelo comportamento dos custos de penalidade não é muito intuitivo.

Para o caso em que a matriz W fixa é arbitrária, GARSTKA[32] mostrou que as relações de equivalência entre (2.5.1) e (2.7.4) são puramente matemáticas, uma vez que a estrutura de penalidade suposta pelo tomador de decisão com restrições probabilísticas não é a mesma de um programa estocástico com recursividade.

A obtenção de programas duais estocásticos é mais precisa do que o dual utilizando as condições de Kuhn-Tucker do equivalente primal determinístico. De qualquer forma, a especificação do dual estocástico é mais complicada do que a do primal, uma vez que a definição das funções $\pi(\xi)$, representando os multiplicadores (variáveis duais) estocásticos, não é evidente quando a matriz de transformação W é arbitrária.

Do ponto de vista matemático, vimos que os problemas estocásticos com recursividade são equivalentes aos programas com restrições probabilísticas. No entanto, pela análise de sensibilidade dos níveis de probabilidade α_i^j , ficou evidente a desconinuidade das funções de custo q_i^j , dificultando o relacionamento econômico entre os dois tipos de programas.

2.8 Biblioteca de Códigos de Programação Estocástica

Durante a elaboração de nossa pesquisa, implementamos alguns códigos computacionais contendo rotina para resolver problemas de Programação Estocástica. Estas rotinas fazem parte da coleção de códigos do Projeto ADO do IIASA (International Institute of Applied Systems Analysis) e representam o estado da arte dos algoritmos de Programação Estocástica discutidos neste capítulo e em ERMOLIEV e WETS[26].

A implementação foi feita num computador DIGITAL VAX/750 sob o sistema operacional VMS. Uma descrição mais profunda dessa biblioteca será objeto do próximo trabalho, NEGREIROS GOMES e MACULAN[49].

2.8.1 Decomposição em Programação Estocástica - DAPE

Este código está baseado no método *L-shaped* de VAN SLYKE e WETS[72] para programas estocásticos a dois estágios. O algoritmo particular para esta implementação foi desenvolvido por BIRGE[9] na Universidade de Michigan. As rotinas que se referem a resolução de programação linear foram incorporadas a partir do programa LPM-1 desenvolvido por PFEFFERKORN e TOMLIN[60] na Universidade de Stanford. O código está escrito em FORTRAN IV.

O programa linear estocástico multiestágio considerado pelo código DAPE tem a seguinte forma geral:

$$\begin{aligned}
 \min z &= c_1 x_1 + E_{\xi_2} \{ \min c_2 x_2 \} + \dots + E_{\xi_T} \{ \min c_T x_T \} \\
 &\text{sujeito a} \\
 &Ax_1 = b_1 \\
 &B_1 x_1 + A_2 x_2 = \xi_2 \\
 &\dots \dots \\
 &B_{T-1} x_{T-1} + A_T x_T = \xi_T \\
 &x_t \geq 0, \quad t = 1, \dots, T \\
 &\xi_t \in \Xi_t, \quad t = 1, \dots, T
 \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

onde c_t é um vetor conhecido em R^{n_t} para $t = 1, \dots, T$, b_1 é um vetor conhecido do R^{m_1} , ξ_t é um vetor aleatório m_t -dimensional definido no espaço de probabilidade $(\Xi_t, \mathcal{U}_t, F_t)$ para $t = 2, \dots, T$ e A_t e B_t são matrizes reais conhecidas de dimensões apropriadas. E_{ξ_t} representa a esperança matemática de ξ_t .

2.8.2. Aproximação Semi Estocástica

Este método foi desenvolvido por MARTI[43] e pode ser aplicado para resolver problemas de otimização estocástica do seguinte tipo:

$$\begin{aligned}
 \min F(x) \\
 x \in D
 \end{aligned} \tag{2.8.2}$$

onde D é um subconjunto convexo fechado de R^n , $F = F(x)$ é uma função convexa de valor médio definida por

$$F(x) = Eu[A(\omega) - b(\omega)], \quad x \in R^n \tag{2.8.3}$$

Aqui $[A(\omega), b(\omega)]$ representa uma matriz $m \times (n + 1)$ aleatória e u é uma função convexa de perda em R^m tal que o valor médio $F(x)$ em (2.8.3) seja real para cada $x \in R^n$.

Problemas da forma (2.8.2) surgem em diferentes enfoques, por exemplo:

- Programação linear Estocástica com Recursividade

- . Otimização de Portfólios
- . Minimização de Erros
- . Previsão Estatística
- . Funções de Decisão Ótima.

Este código foi escrito em FORTRAN IV na Universidade de Bonn por A. Boehme.

2.8.3 Otimizador de Programação Estocástica com Recursividade

O código SPORT (Stochastic Programming Optimizer with Recourse and Tenders) é uma implementação do método de linearização interna de NAZARETH e WETS [46] para problemas estocásticos com recurso. Ele foi escrito em FORTRAN IV por NAZARETH [45] e usa a versão 4.9 do MINOS (*Mathematical Interactive Nonlinear Optimization System*) do Laboratório de Sistemas de Otimização da Universidade de Stanford. para resolver os subproblemas de programação não-linear resultantes.

O código SPORT resolve problemas lineares estocásticos a dois estágios com recursividade da forma (2.6.1) – (2.6.2). A versão atual resolve esse tipo de problema apenas para recurso simples, i.e., $W = [I, -I]$, vetor do lado direito estocástico com distribuição de probabilidade discreta conhecida e vetores de penalidade q^+ e q^- associados com escassez e excesso respectivamente. Assim, (2.6.2) pode ser reescrito como

$$Q(x, w) = \min_{y^+, y^- \geq 0} [q^+ y^+ + q^- y^- \mid I y^+ - I y^- = h(x) - T(x)] \quad (2.8.4)$$

onde $q^+, q^- \geq 0$, e a i -ésima linha de $h(\epsilon)$ pode assumir valores h_{i1}, \dots, h_{ik_i} , onde $h_{i,j} < h_{i,j+1}$ com probabilidade p_{i1}, \dots, p_{ik_i} . Este código também permite que o usuário especifique um peso para o valor de recursividade.

2.8.4 Código para Problema com Restrições Probabilísticas

Este código se baseia no algoritmo do hiperplano de suporte descrito por VEINOTT [73] e foi desenvolvido por Tamas Szantai da Universidade Técnica de Budapeste. O

código foi escrito em FORTRAN 77 e usa as rotinas de LANB e POWELL[40] para resolver os subproblemas de programação linear.

O código resolve problemas de programação estocástica com restrições probabilísticas do seguinte tipo:

$$\begin{aligned} & \min c'x \\ & \text{sujeito a} \\ & Ax = b \\ & \Pr(Dx \geq \beta) \geq p \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{2.8.5}$$

onde A é uma matriz ($m \times n$) conhecida, D é uma matriz ($s \times n$), b e p são conhecidos e de dimensões apropriadas e β_1, \dots, β_s tem distribuição de probabilidade normal conjunta com valores esperados

$$E(\beta_1) = \mu_1, \dots, E(\beta_s) = \mu_s,$$

variâncias

$$D^2(\beta_1) = \delta_1^2, \dots, D^2(\beta_s) = \delta_s^2,$$

e matriz de correlação

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \dots & r_{1s} \\ r_{21} & 1 & \dots & r_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{s1} & r_{s2} & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Nas restrições lineares podem ser incluídas inequações assim como também é possível especificar limites superiores para as variáveis.

Capítulo III

PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA COM RISCO MÍNIMO

Neste capítulo **estudaremos** o Problema de **Programação Estocástica com Risco Mínimo (PERM)** a partir do trabalho desenvolvido por **ARARUNA[3]**, o qual analisa um conjunto de **portifólios disponíveis** e seleciona o **subconjunto** que oferece o maior benefício ao incorporador e, ao mesmo tempo, reduz seu nível de risco.

O modelo leva em **consideração os benefícios de cada portfólio**, a **alocação dos recursos disponíveis** e a **interação** entre os **diversos portfólios**. Além disso, fica caracterizada a influência dos **fatores** de risco na tomada de **decisão**.

Consideramos que tanto o **retorno** quanto a demanda, de **recursos** tem um **comportamento aleatório**. Por **isso**, o **problema** é tratado com um modelo **PERM** o qual incorpora as **distribuições de probabilidade** das **variáveis aleatórias** do modelo.

De forma a conseguir um procedimento **sistemático** para solução do problema **PERM**, apresentamos uma metodologia para reduzir o problema original a um problema de **programação quadrática** equivalente através do estudo das condições de **Kuhn-Tucker**.

Em seguida, **descrevemos algoritmos computacionais** para o problema PERM. O primeiro chamamos de **pseudo-quadrático**, pois ele resolve o problema **através de parametrizações quadráticas sucessivas**. O **segundo**, por reduzir diretamente o problema **PERM** a um problema de programação quadrática **estrita** por meio de **transformações** aplicadas aos **parâmetros**, denominamos de método **quadrático direto**. No final, apresentamos o código **computacional PORTFOL** que é uma **implementação** dos **algoritmos** analisados.

3.1 Modelos para o Problema PERM

Agora apresentaremos alguns modelos que são equivalentes ao problema PERM e, através deles chegar a algoritmos para resolver tal problema.

3.1.1. Seleção de Portfólios

As formulações mais completas do problema de seleção de portfólios são aquelas que, baseados em programação matemática, buscam a otimização da alocação de recursos, cujas disponibilidades são variáveis aleatórias. ARARUNA [3], usando o trabalho de FREEMAN e CEAR[31], apresentou o seguinte modelo geral:

$$\begin{aligned} & \max F(x_{11}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{NM_n}, r_{11}, \dots, r_{ij}, \dots, r_{NM_n}) \\ & \text{sujeito a} \\ & \Pr\left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} a_{ijkt} x_{ij} \leq b_{kt}\right) \geq \alpha_{kt} \quad t = 0, \dots, T; \quad k = 1, \dots, K \quad (A1) \\ & \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij} \leq 1, \quad i = 1, \dots, N \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M_i, \quad x_{ij} \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

onde $F(x_{ij}, r_{ij})$ é a função objetivo do retorno; r_{ij} é a variável aleatória que mede o valor presente do projeto i , versão j ; a_{ijkt} é a quantidade de recurso tipo k , necessário ao projeto i , versão j , no período t ; b_{kt} é a disponibilidade do recurso tipo k no período t ; N é o número total de projetos; M_i é o número de versões alternativas do projeto i ; T é o número de períodos no horizonte de planejamento; K é o número de categorias de recursos; α_k representa o nível de probabilidade de satisfação da k -ésima restrição e x_{ij} é a variável de decisão correspondente ao projeto i , versão j .

Um modelo adequado para seleção de projetos ou investimentos será aquele capaz de gerar soluções eficientes, MARKOWITZ[42], isto é, busca maximizar o valor esperado do retorno, mantendo uma variância mínima, ou seja, com um menor risco possível.

Pelo uso da forma completa da distribuição de probabilidade do retorno, ARARUNA[3] apresentou uma formulação que reduz a insuficiência estatística da média e da variância,

como segue:

$$\max \Pr \{R \geq c\} \quad (3.b.1)$$

ou ainda,

$$\min \Pr \{R \leq c\} \quad (3.b.2)$$

onde c representa o **limite de sobrevivência econômica para o** retorno da **aplicação** financeira. Pela hipótese de que o **valor esperado** E e a **variância** V do retorno R são medidas estatísticas suficientes para determinar a probabilidade de que o retorno seja superior **ao** nível crítico c , ARARUNA[3], usando a desigualdade de Chebyshev, determinou o seguinte limite superior:

$$\Pr\{ | R - E | \geq E - c\} \leq V/(E - c)^2 \quad (3.c.1)$$

ou

$$\Pr\{E - R \geq E - c\} \leq V/(E - c)^2 \quad (3.c.2)$$

ou ainda,

$$\Pr\{R \leq c\} \leq V/(E - c)^2 \quad (3.c.3)$$

Portanto, operando com o limite superior, temos

$$\min [V/(E - c)^2] \quad (3.c.4)$$

ou, de outra forma

$$\max [(E - c)/V^{1/2}] \quad (3.c.5)$$

supondo que os retornos r_{ij} são variáveis **aleatórias** independentes, a média e a **variância** são dados por:

$$E = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij} \mu_{ij} \quad (3.d.1)$$

$$V = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij} \sigma_{ij}^2 \quad (3.d.2)$$

onde μ_{ij} e σ_{ij} correspondem a média e a variância do retorno r_{ij} respectivamente. Daí, Araruna[3] obteve o seguinte modelo:

$$\begin{aligned} & \max \left[\frac{(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij} \mu_{ij} - c)}{(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij} \sigma_{ij}^2)^{1/2}} \right] \\ & \text{sujeito a} \\ & \Pr\left(\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{M_i} a_{ijkt} x_{ij} \leq b_{kt}\right) \geq \alpha_{kt} \quad t = 0, \dots, T; \quad k = 1, \dots, K \quad (\text{A2}) \\ & \sum_{j=1}^{M_i} x_{ij} \leq 1, \quad i = 1, \dots, N \\ & x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, M_i \end{aligned}$$

O modelo (A2) é equivalente a (A1) pela relaxação das restrições de **integralidade**.

Com o intuito de simplificar a **notação** do problema **PERM**, vamos supor que o conjunto de **restrições** possa ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} & \Pr\left(\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i\right) \geq \alpha_i \quad (\text{3.e.1}) \\ & x_j \geq 0, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

com a_{ij} 's constantes e b_i variáveis aleatórias independentes com **distribuição de probabilidade** $N(\bar{b}_i, \sigma_{b_i}^2)$. Assim,

$$\Pr\left(\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i\right) = \Pr\left(\frac{b_i - \bar{b}_i}{\sigma_{b_i}} \geq \frac{\sum_j a_{ij} x_j - \bar{b}_i}{\sigma_{b_i}}\right) \quad (\text{3.e.2})$$

por hipótese podemos afirmar que o lado esquerdo da desigualdade é uma variável **aleatória** normalizada, ou seja, $\frac{b_i - \bar{b}_i}{\sigma_{b_i}} \sim N(0, 1)$. Logo, a **restrição probabilística** fica:

$$F\left[\left(\sum_j a_{ij} x_j - \bar{b}_i\right)/\sigma_{b_i}\right] \geq \alpha_i \quad (\text{3.e.3})$$

ou ainda

$$\left(\sum_j a_{ij} x_j - \bar{b}_i\right)/\sigma_{b_i} \leq F^{-1}(\alpha_i) \quad (\text{3.e.4})$$

onde

$$F(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_s^{\infty} e^{-y^2/2} dy \quad (3.e.5)$$

Se tomarmos sempre $\alpha_i \geq 0.5$, então $F^{-1}(\alpha_i) \leq 0$, obtemos o equivalente determinístico seguinte:

$$\sum_j a_{ij} x_j \leq b_i^* \quad (3.e.6)$$

onde $b_i^* = \bar{b}_i - q_i \sigma_{b_i}$ e $q_i = -F^{-1}(\alpha_i)$.

Neste caso, a função objetivo toma a seguinte forma:

$$\max \frac{(\sum_j \mu_j x_j - c)}{(\sum_i \sum_j v_{ij}^2 x_i x_j)^{1/2}} \quad (3.e.7)$$

onde v_{ij} é a covariância do retorno i com relação ao retorno j .

3.1.2. Modelo PERM com Probabilidade Máxima

Agora estudaremos o seguinte modelo de programação estocástica:

$$\begin{aligned} \max_x \quad & \Pr(r'x \geq c) \\ & Ax = b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

onde $x = (x_1, \dots, x_n)$ são variáveis de decisão e $r = (r_1, \dots, r_n)$ representa o vetor cujas componentes são os retornos (variáveis aleatórias), e corresponde ao nível crítico de risco. KATAOKA[36] chamou este problema de Modelo de Programação Estocástica com Probabilidade Máxima.

Para resolver o problema probabilístico (3.1.1), é necessário reduzir o mesmo ao seu equivalente determinístico considerando duas hipóteses. Primeiro, vamos supor que o vetor r segue uma distribuição de probabilidade multinormal com média \bar{r} e variância V , onde V é a matriz de covariâncias v_{ij} entre r_i e r_j . Além disso, supomos também que $x'Vx > 0$, ou seja, V é definida positiva, BAZARAA e SHETTY[7].

Seja o seguinte problema de **programação** linear

$$\begin{aligned} \max \bar{r}'x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned} \tag{P0}$$

o qual admite, por **hipótese**, uma solução \bar{x} **limitada**.

Teorema 3.1.0. O problema (3.1.1) original **C** *equivalente* ao seguinte programa **não-linear**:

$$\begin{aligned} \max h(x) = \frac{\bar{r}'x - c}{\sqrt{x'Vx}} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned} \tag{P1}$$

cuja solução ótima é dada por \bar{x} .

Prova: Invertendo a ordem da desigualdade, somando $\bar{r}'x$ e dividindo tudo por $\sqrt{x'Vx}$ temos:

$$\Pr(\bar{r}'x \geq c) = \Pr\left(\frac{\bar{r}'x - \bar{r}'x}{\sqrt{x'Vx}} \leq \frac{\bar{r}'x - c}{\sqrt{x'Vx}}\right)$$

onde, devido à primeira hipótese, $\frac{(\bar{r}' - \bar{r}')x}{\sqrt{x'Vx}}$ é uma variável aleatória com distribuição $N(0, 1)$, de forma que

$$\Pr(\bar{r}'x \geq c) = \int_{-\infty}^{h(x)} e^{-y^2/2} dy$$

e assim **temos** o problema (P1). \diamond

Como a **função** objetivo **não** é côncava, **não** podemos **usar** os métodos para resolução de **programação** não-linear convexa. Com o intuito de superar tal dificuldade, KATAOKA[36] **propos** o seguinte problema **para** facilitar na **determinação** da **solução** de (P1):

$$\begin{aligned} \max g(x) = \bar{r}'x - q\sqrt{x'Vx} \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned} \tag{P2}$$

onde q é **uma** constante **paramétrica**.

Seja x^* ou $x^*(q)$ a solução ótima do problema (P2). Como **estamos** supondo que $x'Vx > 0$, para $x \neq 0$, a função $g(x)$ é estritamente **côncava** sobre $Ax = b, x \geq 0$.

Teorema 3.1.1. *O problema (P2) tem uma e somente uma solução ótima.*

KATAOKA[36] apresentou um algoritmo para (P2) introduzindo o seguinte programa quadrático:

$$\begin{aligned} \max f(x) &= \lambda r'x - \frac{1}{2}\sqrt{x'Vx} \\ Ax &= b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{P3}$$

onde λ é um parâmetro positivo. Seja z ou $\hat{x}(\lambda)$ a solução ótima do problema (P3). O próximo resultado estabelece uma relação entre a solução de (P3) e (P2).

Teorema 3.1.2. *Uma condição necessária e suficiente para a solução ótima $\hat{x}(\lambda)$, do problema (P3), ser solução ótima de (P2) é que*

$$\lambda q = \sqrt{\hat{x}'(\lambda)V\hat{x}(\lambda)} \tag{3.1.2}$$

Prova: Seja a função lagrangeana do problema (P2)

$$\mathcal{L}(x, u) = r'x - q\sqrt{x'Vx} - u'(Ax - b) \tag{3.1.3}$$

Uma condição necessária e suficiente para x^* ser solução ótima é que exista um vetor r^* tal que

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_j} = r_j - q \frac{x^{*'}V_j}{\sqrt{x^{*'}Vx^*}} - u^{*'}A_j \begin{cases} = 0, & \text{se } x_j^* > 0; \\ \leq 0, & \text{se } x_j^* = 0 \end{cases} \tag{3.1.4}$$

e

$$Ax^* = b \tag{3.1.5}$$

Por outro lado, uma condição necessária e suficiente para $\hat{x}(\lambda)$ ser solução ótima para o problema (P3) é que exista um vetor \hat{u} tal que

$$\lambda \bar{r}_j - \hat{x}'_{\lambda} V_j - u^{*'}A_j \begin{cases} = 0, & \text{se } \hat{x}_j(\lambda) > 0; \\ \leq 0, & \text{se } \hat{x}_j(\lambda) = 0 \end{cases} \tag{3.1.6}$$

e

$$A\hat{x}(\lambda) = b \tag{3.1.7}$$

Supondo que a **condição (3.1.2)** seja satisfeita por $\hat{x}(\lambda)$ e a **solução** de tal **equação** $\hat{x}(\lambda^*)$, dividindo (3.1.6) por A^* e **usando** (3.1.2), temos

$$r_j - \frac{q x^*(\lambda) V_j}{\sqrt{\hat{x}'(\lambda^*) V \hat{x}(\lambda^*)}} - \frac{\hat{u}'(\lambda^*)}{\lambda^*} A_j \begin{cases} = 0, & \text{se } \hat{x}_j(\lambda^*) > 0; \\ \leq 0, & \text{se } \hat{x}_j(\lambda^*) = 0 \end{cases} \quad (3.1.8)$$

então $x^* = \hat{x}(\lambda^*)$, $u^* = \hat{u}(\lambda^*)/\lambda^*$ satisfazem também (3.1.4) e (3.1.5). De outra forma, quando x^* satisfaz (3.1.4) e (3.1.5) com $A = \sqrt{x^{*'} V x^*}/q$, $\hat{x} = x^*$ e $\hat{u} = u^*$, então \hat{x} e \hat{u} satisfazem (3.1.6) e (3.1.7). \diamond

Na **proxima seção** ficará **estabelecida** a **equivalência** entre os **problemas (P3)** e **(P1)**, e **assim** poderemos afirmar que o problema **(P1)** é **equivalente** a **(P2)**.

3.2 Métodos para Resolução do Problema PERM

Nesta parte discutiremos dois métodos para resolver o problema PERM. **Primeiro**, abordaremos o método **paramétrico** quadrático, o qual retrata nossa contribuição **teórica** à **programação estocástica**. Em seguida, tratamos com um método de **transformação** direta a um problema estritamente quadrático equivalente ao problema PERM. Para ambos **métodos**, **apresentamos** os **algoritmos correspondentes** em **notação procedural**.

3.2.1 Método Paramétrico Quadrático (Pseudoquadrático)

Agora **mostraremos** que o problema **(P3)** é **equivalente** ao problema **(P1)**. **Para isto**, **vamos** tomar as **seguintes hipóteses**:

(H1) O valor esperado do problema **(P1)** é limitado, i.e., $R \equiv \max_{x \in X} \hat{r}'x < +\infty$, para $x \in X = \{Ax = b, x \geq 0\}$.

(H2) $c < R$, o nível crítico é menor que o valor esperado.

(H3) $0 \notin X$, a solução nula **não** pertence ao politopo.

A **última** hipótese serve apenas para não considerarmos casos triviais da **solução** de **risco mínimo - srm**. A primeira **hipótese** é uma condição suficiente para a existência

de uma c -srm (solução de risco mínimo a nível c) para cada $c < R$. A hipótese (H2) é equivalente a afirmar que existe $x \in X$ tal que $f'x > c$, i.e., $h_c(x) > 0$. Note que a função h_c é pseudocôncava, MANGASARIAN[41].

Os resultados que se seguem serão expressos em termos da seguinte equação:

$$\chi(\lambda) = c \quad (3.2.1)$$

onde

$$\chi(\lambda) = b'y_\lambda/\lambda \quad (3.2.2)$$

ou

$$\chi(\lambda) = f'\hat{x}_\lambda - (1/\lambda)\hat{x}'_\lambda V \hat{x}_\lambda \quad (3.2.3)$$

que é uma função de valores reais, definida e contínua para $A > 0$.

Lema 3.1. Se a hipótese (H1) se verifica, então $\chi(+\infty) = R$.

O resultado essencial que buscamos é a condição necessária e suficiente para \hat{x}_λ ser solução ótima em (P1), i.e., ser uma c -srm. Pelas hipóteses (H1)-(H3), z^* é uma c -srm se, e somente se, $x^* = \hat{x}_{\lambda^*}$, onde λ^* é uma solução da equação (3.2.1).

Teorema 3.3. Se z^* for uma c -srm, onde $c < R$, então existe uma solução positiva λ^* da equação (3.2.1) tal que $x^* = \hat{x}_{\lambda^*}$.

Prova: Seja

$$\lambda^* \equiv (x^{*'} V x^*) / (f'x^* - c) \quad (3.2.4)$$

onde $\lambda^* > 0$, desde que $f'x^* - c > 0$, pois $c < R$. Dado que $h_c(x^*) \geq h_c(x)$, para cada $x \in X$, e que $k^{1/2} \leq (k+1)/2$, onde $k \geq 0$, temos:

$$(f'x - c) / (f'x^* - c) \leq (x' V x / x^{*'} V x^*)^{1/2} \leq \frac{1}{2} [(x' V x / x^{*'} V x^*) + 1]$$

multiplicando ambos lados por $x^{*'} V x^*$, adicionando $\lambda^* c - \frac{1}{2} x' V x$ e usando (3.2.4), temos:

$$\lambda^* f'x - \frac{1}{2} x' V x \leq \lambda^* c + \frac{1}{2} x^{*'} V x^* = \lambda^* f'x^* - \frac{1}{2} x^{*'} V x^*$$

para cada $x \in X$. Portanto, x^* é ótima em (P3), para $\lambda = \lambda^*$, i.e., $x^* = \hat{x}_{\lambda^*}$. Então (3.2.4) se reduz a $\chi(\lambda^*) = c$. \diamond

Corolário. Para cada $c < R$, $c \neq 0$, existe no máximo uma c -*srn*.

Prova: Suponha que x_1 e x_2 sejam ambas c -*srn*'s. Segue-se do Teorema 3.3 que $x_1 = x_2 = x_{\lambda_c}$, onde λ_c é a solução de (3.2.1) (única, pois $c \neq 0$). \diamond

Teorema 3.4. Suponha que (H3) se verifique. Se $\lambda > 0$ é uma solução da equação (3.2.1), então x_λ é uma c -*srn*.

Prova: Pelo Lema 3.1 e KATAOKA[36], \hat{x}_λ é ótima em

$$\max_{x \in X} \lambda r'x - (\hat{x}'_\lambda V \hat{x}_\lambda)(x'Vx)^{1/2}$$

assim

$$\lambda r'\hat{x}_\lambda - \hat{x}'_\lambda V \hat{x}_\lambda \geq \lambda r'x - (\hat{x}'_\lambda V \hat{x}_\lambda)^{1/2}(x'Vx)^{1/2}$$

para cada $x \in X$. Dividindo a equação por $\lambda(x'Vx)^{1/2} > 0$ e levando em conta, a partir de (3.2.1), que

$$(\hat{x}'_\lambda V \hat{x}_\lambda)^{1/2} \lambda = (r'\hat{x}_\lambda - c)/(\hat{x}'_\lambda V \hat{x}_\lambda)^{1/2}$$

obtemos que $h_c(\hat{x}_\lambda) > h_c(x)$, para cada $x \in X$, i.e., \hat{x}_λ é ótima em (P1).

Corolário 1. Pelas hipóteses (H1) e (H2) existe, para cada $c < R$, uma única c -*srn*, (exceto para $c = 0$).

Prova: A equação (3.2.1) tem solução λ_c e, de acordo com o teorema 3.1.2, \hat{x}_{λ_c} é uma c -*srn*. A unicidade, para $c \neq 0$, resulta do corolário do teorema 3.3. \diamond

Corolário 2. Com as hipóteses de multinormalidade, (H1) e (H3), a função de probabilidade máxima $p(c)$, definida por

$$p(c) = \max_{x \in X} \Pr(r'x \geq c) \tag{3.2.5}$$

para $c < R$, é estritamente decrescente com relação a c .

Prova: Óbviamente $p(c_1) \geq p(c_2)$ para quaisquer reais $c_1 < c_2$. Seja $c_1 < c_2 < R$, ($c_1 \neq 0$). Pelo corolário 1, existem as *srn* $x_{c_1}^*$ e $x_{c_2}^*$. Se $x_{c_1}^* = x_{c_2}^*$, então $p(c_1) > p(c_2)$ e assim podemos supor que $x_{c_1}^* \neq x_{c_2}^*$. Então, se $p(c_1) = p(c_2)$, $x_{c_2}^*$ também é uma *srn* e, portanto, pelo corolário do teorema 3.1, $x_{c_1}^* = x_{c_2}^*$, o que contradiz a hipótese, logo $p(c_1) > p(c_2)$. \diamond

Corolário 3. *Pelas hipóteses (H1)-(H3), x^* será ótima em (P1) se, e somente se $x^* = x_{\lambda^*}$, onde λ^* maximiza $h_c(x_\lambda)$ para $\lambda > 0$.*

Prova: ver GEOFFRION[35].

Agora podemos escrever o algoritmo paramétrico, o qual sintetiza os resultados acima usando um pseudo código semelhante com a linguagem Pascal.

Procedimento PERM (\bar{r}, V, c, A, b, x^*)

inicio

$$\lambda_1 \leftarrow c_1 \leftarrow 0;$$

$$k \leftarrow 1$$

enquanto $c_k < c$

inicio

MONTAR_MODELO($\lambda_k, \bar{r}, V, c, A, b, Q_k, q_k$);

RESOLVE_QUAD(x_k^*, Q_k, q_k);

$$\lambda_{k+1} \leftarrow (x_k^{*T} V x_k^*) / (\bar{r}^T x_k^* - c);$$

$$c_{k+1} \leftarrow \bar{r}^T x_k^* - \frac{1}{\lambda} x_k^{*T} V x_k^*;$$

$$k \leftarrow k + 1$$

fim

* x_{k-1}^* é uma c -srm *

fim

Procedimento MONTAR_MODELO($\lambda, \bar{r}, V, c, A, b, Q, q$)

inicio

inicio

* prepara o modelo de programação **quadrática** *

$$\begin{aligned} \max f(z) \in \lambda \bar{r}'x - \frac{1}{2}x'Vx \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned} \quad (P3)$$

* na forma complementar de Lemke *

fim

Procedimento RESOLVE-QU AD(Z, Q, q)

inicio

* resolve o problema de complementaridade de Lemke *

$$\begin{aligned} W - Qz = q \\ w_j \geq 0, z_j \geq 0, j = 1, \dots, n + m \\ w_j z_j = 0, j = 1, \dots, n + m \end{aligned} \quad (P3')$$

* pelo método de Lemke *

fim

fim

* fim do algoritmo *

O teorema 3.5 garante a convergência do algoritmo paramétrico no que diz respeito a evolução do parâmetro λ_k durante o processo.

Teorema 3.5. A função

$$\Lambda(\lambda) = (x'_\lambda V x_\lambda) / (r'_\lambda x_\lambda - c)$$

é monótona não-decrescente em λ e tem limite finito.

h Para $\lambda \rightarrow \infty$, o problema (P3) se reduz a

$$\begin{aligned} \max -\frac{1}{2} x' V x \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{P3}'')$$

que tem solução ótima finita \hat{x}_0 . Assim,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \Lambda(\lambda) = (x'_0 V x_0) / (r'_0 x_0 - c) < \infty$$

Além disso, sejam L e \hat{y} soluções ótimas para λ_x e λ_y respectivamente. Podemos então escrever

$$\lambda_x r'_\lambda \hat{x} - \frac{1}{2} \hat{x}' V \hat{x} \geq \lambda_x r'_\lambda \hat{y} - \frac{1}{2} \hat{y}' V \hat{y}$$

$$\lambda_y r'_\lambda \hat{y} - \frac{1}{2} \hat{y}' V \hat{y} \geq \lambda_y r'_\lambda \hat{x} - \frac{1}{2} \hat{x}' V \hat{x}$$

dividindo a primeira e a segunda inequações por λ_x e λ_y , respectivamente, temos

$$r'_\lambda \hat{x} - \frac{1}{2\lambda_x} \hat{x}' V \hat{x} \geq r'_\lambda \hat{y} - \frac{1}{2\lambda_x} \hat{y}' V \hat{y}$$

$$r'_\lambda \hat{y} - \frac{1}{2\lambda_y} \hat{y}' V \hat{y} \geq r'_\lambda \hat{x} - \frac{1}{2\lambda_y} \hat{x}' V \hat{x}$$

Somando as duas inequações acima, obtemos

$$(\lambda_y - \lambda_x) [\hat{y}' V \hat{y} - \hat{x}' V \hat{x}] \geq 0$$

Então, se $\lambda_y \geq \lambda_x$ temos que $\hat{y}' V \hat{y} \geq \hat{x}' V \hat{x}$. Pelo teorema 3.2.1 temos que $\lambda = \sqrt{x' V x} / q$. Como a função raiz quadrada é monótona crescente, temos que a função Λ é monótona não-decrescente. \diamond

O procedimento que apresentamos acima, além de determinar a solução do problema PERM, possibilita um estudo paramétrico da *probabilidade do máximo*

$$p(c) = \Pr(r'x_c^* \geq c) = \Phi[h_c(x_c^*)]$$

e também permite resolver o *problema do nível máximo* de KATAOKA[36],

$$\max_{x \in X, c \in \mathcal{R}} \{c \mid \Pr(r'x \geq c) \geq \gamma\}$$

ou o seu equivalente determinístico:

$$\max_{x \in X} c = \bar{r}'x - q(x'Vx)^{1/2} \tag{3.2.6}$$

onde $q \equiv \Phi^{-1}(\gamma) > 0$.

Podemos observar que, de acordo com o teorema 3.3, a *svm* é um programa "eficiente" no sentido de Markowitz. Quaisquer métodos para a solução de (P1) estão relacionados com a *fronteira eficiente* de *esperança-variância*, i.e., a solução de (P3).

3.2.2. Método de Transformação Quadrática Direta

Nesta parte, vamos apresentar um procedimento proposto por BERGTHALLER[7] pelo qual se resolve o problema PERM através de uma transformação direta do modelo original (P1) num modelo **estritamente quadrático**. Tal procedimento se baseia no seguinte resultado:

Teorema 3.5. *Sejam $P \subset \mathcal{R}^p$, $Q \subset \mathcal{R}^q$ dois conjuntos, e $f : P \rightarrow \mathcal{R}$, $g : Q \rightarrow \mathcal{R}$ duas funções reais. Se $T : Q \rightarrow P$ é uma transformação tal que*

$$T(Q) = P \tag{3.2.7}$$

$$g = f \circ T \tag{3.2.8}$$

então existe

$$\max_{y \in Q} g(y)$$

e

$$T(Q_0) = P_0$$

onde

$$P_0 = \{x \in P \mid \max_{z \in P} f(z) = f(x)\}$$

$$Q_0 = \{y \in Q \mid \max_{z \in Q} g(z) = g(y)\}$$

Prova: Seja $x_0 \in P_0$ e $y_0 \in Q_0$ tais que $T(y_0) = x_0$. Se y é um ponto arbitrário em Q e $x = Ty$, teremos $f(x) \leq f(x_0)$. A partir de (3.2.8), segue-se que $g(y) \leq g(y_0)$, portanto $Q_0 \neq \emptyset$, $P_0 \subset T(Q_0)$. Da mesma forma, $P_0 \supset T(Q_0)$. \diamond

Este teorema sugere que para resolver o problema $\max_{x \in P} f(x)$, basta solucionar o problema equivalente $\max_{y \in Q} g(y)$ gerado a partir do primeiro através de uma transformação T , satisfazendo as condições impostas pelo teorema.

BERGTHALLER[7] mostrou também que se $0 \neq c < r^*$, onde $z^* = \max\{r'x \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ e $b \not\geq 0$ quando $c < 0$, e se x^* for uma solução ótima do problema (P1), então x^* será única e

$$x_i^* = \frac{c y_i}{r' y - \frac{1}{|c|}} \quad (3.2.9)$$

onde y é a solução ótima do problema de programação quadrática estrita

$$\begin{aligned} \min \quad & y'V y \\ & A^* y \leq b^* \\ & y \geq 0 \end{aligned} \quad (P5)$$

onde

$$a_{ij}^* = |c| a_{ij} - (\text{sinal}\{c\}) r_j b_i \quad (3.2.10)$$

e

$$b_i^* = -\frac{1}{c} b_i \quad (3.2.11)$$

Para o caso em que $c = 0$ tem-se que, se $z^* > 0$ e o problema

$$\max \quad r' \frac{x}{\sqrt{x'V x}} \mid Ax \leq b, x \geq 0 \quad (P5)$$

tem uma solução x^* , então existe $A^* > 0$, tal que (x^*, A^*) é a solução ótima do problema

$$\begin{aligned} \min x'Vx \\ Ax - \lambda b \leq 0 \\ \bar{r}'x = 1 \\ x \geq 0, \lambda \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{P6})$$

Reciprocamente, se $(\hat{x}, \hat{\lambda})$ for uma solução ótima tal que $\hat{x} \neq 0$, $\hat{\lambda} > 0$, então \hat{x} resolve o problema (P5).

O algoritmo correspondente ao método da transformação direta tem a seguinte forma:

Procedimento DIRETO (\bar{r}, V, e, A, b, x^*)

inicio

$$a_{ij}^* \leftarrow |c|a_{ij} - (\text{sinal})\{c\}\bar{r}_j b_i;$$

$$b_i^* \leftarrow -\frac{1}{c} b_i;$$

MONTAR_MODELO(V, A^*, b^*, Q, g);

RESOLVE_QUAD(y^*, Q, g);

$$x_i^* \leftarrow \frac{c y_i^*}{\bar{r}' g - |c|}$$

* x_{k-1}^* é uma c-srm *

fim

Procedimento **MONTAR.MODELO**(V, A, b, Q, q)

inicio

inicio

* prepara o modelo de programação quadrática *

$$\begin{aligned} \min \quad & t(y) = y'Vy \\ & Ay \leq b \\ & y \geq 0 \end{aligned} \tag{P4}$$

* na forma complementar de Lemke *

fim

Procedimento **RESOLVE.QUAD**(y^*, Q, q)

inicio

* resolve o problema de complementaridade de Lemke *

$$\begin{aligned} Wz &= q \\ w_j &\geq 0, \quad z_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, n + m \\ w_j z_j &= 0, \quad j = 1, \dots, n + m \end{aligned} \tag{P3'}$$

pelo método de Lemke *

fim

fim

a **fim do algoritmo** *

3.2.3 Generalização do Problema PERM

Agora, vamos **dedicar** um pouco de **atenção** para, o problema **mais** geral de programação **estocástica** com risco, onde os elementos da matriz **tecnológica** A **também** são **variáveis aleatórias**.

Suponhamos que a_{ij} e b_i **seguem** uma **distribuição** multinormal e $\beta_i \geq 0.5$. A **condição de probabilidade**

$$\Pr\left(\sum_j a_{ij}x_j \leq b_i\right) \geq \beta_i$$

poderá ser transformada numa **inequação** do **seguinte** tipo:

$$\left(\bar{b}_i - \sum_j \bar{a}_{ij}\right) - q_i \sqrt{\sigma_{b_i}^2 + 2 \sum_j v_{ij}x_j + \sum_{jk} v_{ijk}x_jx_k} \geq 0$$

onde $q_i = F^{-1}(\beta_i)$, $\bar{a}_{ij} = E(a_{ij})$, $v_{ij} = E(b_i - \bar{b}_i)(a_{ij} - \bar{a}_{ij})$, $v_{ijk} = (a_{ij} - \bar{a}_{ij})(a_{ik} - \bar{a}_{ik})$.

Pode-se mostrar que a **função** raiz **quadrada** da **inequação** acima ainda é **convexa**. **Portanto**, este problema **mais** geral pode ser resolvido por um método de **programação** não **linear convexa**.

3.3 PORTFOL - Sistema de Apoio à Análise de Problemas PERM

Para a **elaboração** de uma **análise** de **problemas** que **seguem** a formulação de programação estocástica com **risco** mínimo, por exemplo **análise** para a **seleção** de **projetos** ou **investimentos**, o **tomador** de **decisão** carece de **ferramentas** de apoio que **estejam reunidas** no mesmo ambiente computacional.

O sistema PORTFOL **dispõe** de diversas facilidades de **auxílio à análise** de dados de **problemas PERM**, incluindo o **seguinte**:

- a. Editor de entrada de dados
- b. **Métodos** de análise estatística **multivariada**
- c. Gerador de **problemas PERM**
- d. **Otimizador estocástico**
- e. Gerador de relatórios

Estas facilidades estão disponíveis **ao usuário** do sistema através de simples seleção do menu de **opções** e, em qualquer **dúvida**, tem **condições** de obter ajuda **“on line”**, com **explicações detalhadas** sobre o uso de cada **opção**.

A seguir, **discutiremos** a **estrutura computacional** do **sistema PORTFOL**, o formato de entrada de dados de um problema de **risco mínimo típico**, os **módulos** de **geração** do problema, de **complementaridade**, a fase de **solução** do problema **PERM** propriamente dito e os **relatórios** de saída, **sempre** acompanhados de um exemplo **ilustrativo**.

3.3.1 Estrutura Computacional do Sistema PORTFOL

O sistema PORTFOL resolve problemas da forma (3.1) em tres fases principais:

1. fase: Leitura, especificação e geração do problema
2. fase: Adaptação e solução
3. fase: Relatórios

A descrição **destas** fases **está resumida** na figura 3.3. A primeira fase consiste em preparar os **dados** e arquivos que **serão utilizados** pelo **otimizador**. A segunda se refere a **preparação** do problema de complementaridade. Na **última** fase o sistema imprime os **relatórios** com a **solução** ótima encontrada, **fornecendo parâmetros** para **uma**, análise de **sensibilidade posterior**.

Os **módulos** do sistema estão ligados **através de** um programa gerenciador, onde **as entradas de cada módulo são** obtidas **a partir de arquivos intermediários**. Isto quer dizer que **cada módulo** pode ser executado separadamente, sem a **intervenção** do módulo principal.

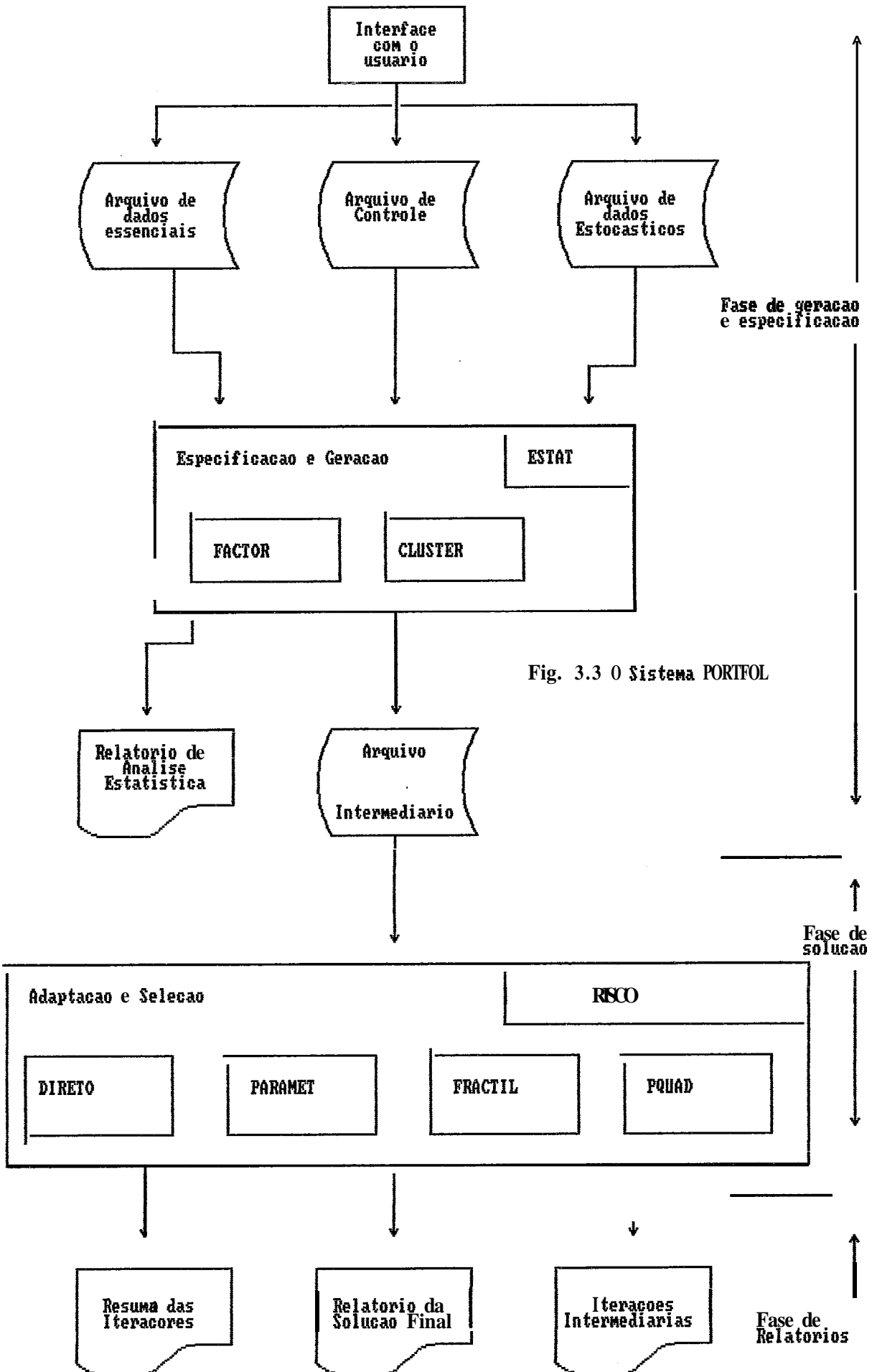


Fig. 3.3 O Sistema PORTFOL

3.3.2 Leitura, Especificação e Geração do Problema

Discutiremos esta fase através de um exemplo. Considere o problema de colheitas, SENGUPTA e PORTILLO-CAMPBELL[63], com atividades que representam a quantidade para cada um dos cinco tipos de colheita. O problema busca maximizar o faturamento dos agricultores, mantendo os níveis de recursos de capital, áreas de plantio e mão-de-obra disponíveis. O recurso de capital é considerado como uma variável aleatória com distribuição normal independente. As atividades são x_1 : milho, x_2 : aveia, x_3 : soja, x_4 : linho e x_5 : trigo.

O problema é formulado usando o modelo de probabilidade máxima o qual tem o seguinte aspecto:

$$\max \sum_{j=1}^5 \bar{r}_j x_j - q \left(\sum_{j=1}^5 v_j x_j^2 \right)^{1/2}$$

sujeito a

$$\text{Terra em Acres : } 0.023x_1 + 0.028x_2 + 0.059x_3 + 0.093x_4 + 0.091x_5 \leq 148$$

$$\text{Capital US : } 0.318x_1 + 0.279x_2 + 0.708x_3 + 0.970x_4 + 1.004x_5 \leq b_2$$

$$\text{M.Obra Período1 : } 0.026x_1 + 0.075x_2 + 0.055x_3 + 0.212x_4 + 0.423x_5 \leq 234$$

$$\text{M.Obra Período2 : } 0.000x_1 + 0.084x_2 + 0.000x_3 + 0.309x_4 + 0.087x_5 \leq 234$$

$$\text{M.Obra Período3 : } 0.053x_1 + 0.000x_2 + 0.117x_3 + 0.000x_4 + 0.000x_5 \leq 182$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 5$$

onde b_2 tem distribuição $N(\mu = 1800, \sigma = 230)$ e o vetor de retorno r tem distribuição normal multivariada $N(\bar{r}, V)$, com $\bar{r} = [1.003, 0.646, 2.369, 2.9143, 1.741]$ e V é a matriz diagonal de variâncias (r_j são consideradas estatisticamente independentes para colheitas diferentes), $v = [0.003, 0.001, 0.004, 0.002, 0.004]$ e $q = 2.33$, correspondente ao nível de probabilidade $\alpha = 0.99$.

Além disso, discutimos a sensibilidade das soluções ótimas variando parametricamente o nível de probabilidade α com os seguintes valores:

α	0.90	0.92	0.95	0.98	0.994
$q(\alpha)$	1.28	1.41	1.64	2.06	2.57

3.3.2.1 Arquivo de Dados Essenciais

Neste arquivo constam dados que correspondem às variáveis de decisão com o seguinte formato:

Comentário	(80A1)
Matriz de Coefficientes A (por linha)	(7F10.4)
(se for por elemento a_{ij})	(2I3,F10.4)
Comentário	(80A1)
Vetor b do lado direito	(7F10.4)
Comentário	(80A1)
Vetor r de retorno líquido	(7F10.4)

3.3.2.2 Arquivo de Dados Estocásticos

Este arquivo corresponde aos dados considerados estocásticos no modelo de risco mínimo. Nele constam os seguintes campos:

Comentário	(80A1)
Matriz de Covariâncias do Retorno	(7F10.4)
Comentário	(80A1)
Desvio Padrão do Vetor b do lado direito	(7F10.4)
Comentário	(80A1)
Vetor α de Probabilidades do Vetor b, $0.5 \leq \alpha_i \leq 1$	(7F10.4)

3.3.2.3 Arquivo de Controle

Neste **arquivo** estão contidas **informações necessárias** para o **processo** de resolução e **confeção** do **relatório** de **saída**, como **segue**:

Nome do Problema	(80A1)
Comentário	(80A1)
Dimensões e Parâmetros fixos	(S13,F12.3,E12.5)
.Número de Restrições	
.Número de Variáveis	
.Matriz de coeficientes (1 = por linha, 0 = por elemento)	
.Nível de Sobrevivência Econômica	
Comentário	(80A1)
Rótulo de Variável 1	(25A1)
:	:
Rótulo da Variável n	(25A1)
Comentário	(80A1)
Rótulo da Restrição 1	(25A1)
:	:
Rótulo da Restrição m	(25A1)

Na atual **versão**, o **número máximo** de **variáveis** e **restrições** é de 100 para **cada** um. No entanto, este número **poderá** ser elevado, dependendo da **memória disponível** no computador hospedeiro.

1 2 3 4 5 6 7 8
1234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

*** Matriz de Coeficientes Tecnologicos
0.023 0.028 0.059 0.093 0.091
0.318 0.279 0.708 0.970 1.004
8.026 0.075 0.055 0.212 0.423
0.0 0.004 0.0 0.309 0.007
0.053 0.0 0.177 0.0 0.0
*** Vetor do Lado Direito (valor medio)
148.0 1000.0 234.0 234.0 182.0
*** Vetor do Retorno Liquido
1.003 0.646 2.369 2.914 1.741

1 2 3 4 5 6 7 8
1234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

*** Matriz de Covariancias do Retorno
0.003 0.0 0.0 0.0 0.0
0.0 0.001 0.0 0.0 0.0
0.0 0.0 0.004 0.212 0.0
0.0 0.0 0.0 0.002 0.0
0.0 0.0 0.0 0.0 0.004
*** Desvio Padrao do Vetor do Lado Direito
0.0 230.0 0.0 0.0 0.0
*** Vetor de Probabilidades das Restricoes
1.0 0.98 1.0 1.0 1.0

1 2 3 4 5 6 7 8
1234567890123456789012345678901234567890123456789012345678901234567890

*** Problema teste Codigo PORTFOL - Cultura de Verduras (Sengupta e Campbell)
*** N.Restricoes, N.Variaveis, Tipo Leitura, Nivel Sobrev. Econ., Epsilon
5 5 588. 0.100E-07
*** Rotulo das Variaveis
Milho
Aveia
Soja
Linho
Trigo
*** Rotulo das Restricoes
Terra em Acres
Capital em Dolares
Mao-de-Obra-Per.1
Mao-de-Obra-Per.2
Mao-de-Obra-Per.3

3.3.3 Implementação da Geração do Problema

O subsistema **ESTAT** proporciona ao usuário facilidades para calcular automaticamente a matriz de covariâncias juntamente com os valores médios dos retornos, a partir de dados históricos ou observados. Além do mais, no caso de análise de investimentos, é possível fazer uma caracterização de tipos de portfólios, objetivando a redução de dimensionalidade, pelo uso de análise de conglomerados, **NEGREIROS**, **MACULAN** e **COSENZA**[50].

Nesta parte, poderão ser gerados relatórios de análise estatística dos dados básicos do arquivo intermediário para a solução do problema **PERM**.

O arquivo intermediário gerado pelo módulo **ESTAT** contém os dados no formato requerido pelo módulo **RISCO**, isto é, os parâmetros necessários que serão utilizados na fase de solução do problema **PERM**.

3.3.4 Adaptação e Solução

Discutiremos agora a **implementação** do **algoritmos para resolução** do problema PERM **própriamente** dito. **Isto está** contido no **módulo RISCO** que **utiliza** sempre o **submódulo PQUAD** para **resolver** os **subproblemas** de **programação quadrática equivalente**s.

O **submódulo DIRETO** representa a **implementação** do algoritmo de BERGTHALLER[7], onde o problema **(P1)** é transformado no problema **(P4)**. **Este** procedimento é **ideal** para uma análise instantânea do problema PERM.

O **submódulo PARAMET** implementa o algoritmo **paramétrico**, **através** do problema **(P3)**. Seu uso é recomendado quando o **tomador** de **decisão** deseja **fazer** uma **análise** de sensibilidade da probabilidade associada a **vários níveis** de rendimento esperado.

O **submódulo FRACTIL** deve ser empregado na situação em que, por exemplo, o analista financeiro **não** tem condições de obter o **nível** mínimo de sobrevivência econômica, mas gostaria de **maximizar** o nível **mínimo** permissível, para uma probabilidade **associada**.

O **submódulo PQUAD** implementa o algoritmo de **complementaridade** de LEMKE[37] para **resolver** os **subproblemas** de programação **quadrática**. Dada a **estrutura** particular da matriz com a qual **este método** trabalha, **existem** rotina **intermediárias** para sua **construção** a cada **passo** dos **algoritmos** que resolvem o problema de risco. Uma **descrição** detalhada **deste código** pode ser encontrada em NEGREIROS e THOMAZ[54].

3.3.5 Relatórios de Saída

Existem tres tipos de **relatórios** que **são** emitidos pelo **módulo RISCO**, os **quais** **descrevemos** a seguir.

a) **Resumo das Iterações:** Este **relatório** contém o **resultado** de **cada** **iteração** do **algoritmo específico** em uso durante uma **corrida** do **programa RISCO**. Nele aparecem, o **número** da **k-iteração**, o **valor** dos **parâmetros** λ_k e c_k , o **valor** da **função** objetivo, a **probabilidade associada** ao **valor** da **função** objetivo e o **número** de **subiterações** do **algoritmo de Lemke** obtidas pelo **submódulo PQUAD**.

b) **Iterações Intermediárias:** Neste **relatório** **fica impressa** a **solução ótima** para o **subproblema quadrático** resolvido em **cada** **passo** do **algoritmo** selecionado em **RISCO**.

c) **Solução Final:** Aqui ficam dispostos o **número** de **iterações** da **corrida** do **módulo RISCO**, a **variância associada** à **função** objetivo, o **valor Ótimo** da **função** objetivo e o **valor ótimo** do **limite** acima do qual o **valor esperado** do **problema PERM** se situa. Além disso, o **relatório** apresenta o **valor ótimo** das **soluções primal** e **dual rotuladas** e as **respectivas variáveis** de folga.

3.3.6 Testes do Código

O **código PORTFOL** foi extensivamente testado num **equipamento supermicro** Digirede 8000 sob o sistema **operacional Digix (UNIX like)** usando um **compilador FORTRAN 77** para os **módulos RISCO, ESTAT e PQUAD**. O **gerenciamento** da **base de dados** foi **implementado** através do **software UNIFY**. A **interface** dos **vários módulos** foi **desenvolvida** em **linguagem C** com **chamadas ao núcleo** do **sistema**.

Nos **testes**, utilizamos **vários exemplos** da **literatura**. No **entanto**, no **próximo capítulo**, apresentaremos **tres modelos** que **são** tipicamente **problemas PERM** e que foram **resolvidos** através do **código PORTFOL**.

Problema No.1 --- Exemplo de uso do pacote PORTFOL --- Problema Culturas

Metodo Fractile Probabilidade de Satisfacao = 0.99

Numero de Variaveis ... 5
 Numero de Restricoes ... 5
 Nivel de Sobrevivencia Economica ... 5250.000
 Razao de Convergencia ... 0.100E-07

Vetor de Medias de Custos

1.00250 .64550 2.36700 2.91430 1.74000

Matriz de Covariancias dos Custos

.00250	.00000	.00000	.00000	.00000
.00000	.00030	.00000	.00000	.00000
.00000	.00000	.00334	.00000	.00000
.00000	.00000	.00000	.00125	.00000
.00000	.00000	.00000	.00000	.00306

Matriz de Coeficientes Tecnologicos

-.02274	-.02770	-.05852	-.09249	-.09081
-.31772	-.27870	-.70812	-.96956	-1.00356
-.02555	-.07523	-.05485	-.21186	-.42324
.00000	-.08370	.00000	-.30910	-.08650
-.05253	.00000	-.11681	.00000	.00000

Vetor do Lado Direito

dia	-148.00000	-1800.00000	-234.00000	-234.00000	-182.00000
svios	.00000	230.00000	.00000	.00000	.00000
ob. Alfa	1.00000	.99000	1.00000	1.00000	1.00000

----- Solucao Otima do Portfolio -----

Numero de Iteracoes ... 4
 Valor Otimo de Lambda ... 0.90524E+02
 Valor Otimo da Funcao Objetivo ... 0.53303E+04

	Solucao Primal	Folga do Dual
1. Milho	0.12523E+04	0.00000E+00
2. Aveia	0.00000E+00	0.22095E+00
3. Soja	0.99494E+03	0.00000E+00
4. Linho	0.66170E+03	0.00000E+00
5. Trigo	0.00000E+00	0.10997E+01

	Solucao Dual	Folga do Primal
A. Terra em Acres	0.31279E+02	0.00000E+00
B. Capital Dolares	0.00000E+00	0.56041E+02
C. Nao-de-Obra(P1)	0.00000E+00	0.72453E+01

Capítulo IV

APLICAÇÕES À PROBLEMAS DE PLANEJAMENTO

Neste capítulo apresentaremos **algumas** aplicações do modelo **PERM** à problemas de planejamento que envolvem situações de risco.

O primeiro problema se refere a **área** de **seleção** de **investimentos**, onde analisamos um **modelo** para **alocação** de **recursos em** alternativas de **aplicações financeiras tais** como fundo de **ações**, **certificados** de **depósitos bancários** e **mercado futuro**.

Em seguida, estudamos o problema de **otimização** da pesca industrial do nordeste do **Brasil através** de um modelo **PERM** que visa a **maximização** do lucro esperado proporcionado pela frota industrial, observando **restrições operacionais**, econômicas e biológicas. Os resultados obtidos definem uma política de pesca com distribuição espacial e periódica das espécies lagosta e **pargo**.

Por último, tratamos com um problema de economia **agrícola** que visa o **planejamento** do plantio de **culturas** com **restrições** sobre o **uso** da terra e **condições** de **irrigação**.

4.1 Seleção de Investimentos

Existem diversos tipos de **problemas de otimização** na área financeira. Em particular, estamos **interessados naquele** onde um investidor **deseja** analisar **n fundos de ações**. Ele pretende desenvolver uma **política** de investimento que visa determinar **as** proporções **$x_i, i = 1, \dots, n$** que devem ser aplicadas em cada fundo de **ações** que **formam** o **portifólio**.

Naturalmente, **essas proporções** devem ser **não-negativas** e a soma **delas não** deve **ultrapassar** a unidade, isto é

$$\sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \quad (4.1.1)$$
$$x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, n$$

Pelo **estudo** de uma, **série histórica** do lucro proporcionado por cada fundo de **ação**, **fica** evidente a **sua** natureza **estocástica**. **Através** de testes de **aderência**, **observa-se** que o lucro **r_i** do **i -ésimo** fundo de **ações** **se** comporta como uma **variável aleatória** normal com **média \bar{r}_i** . Além **disso**, verifica-se que os lucros **são correlacionados** e, portanto, tem uma **variância** conjunta representada pela matriz de **covariância** $V = (v_{ij})$, onde $v_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$, sendo ρ_{ij} a **correlação** entre os lucros dos fundos de **ações i e j** respectivamente e σ_k o desvio padrão em torno da **média** do lucro do fundo de **ações k** .

Por outro lado, o investidor escolhe um nível mínimo de risco $R > 0$ **para** a rentabilidade de sua aplicação, isto é, ele **deseja maximizar** a probabilidade do seu lucro esperado ser maior que o **nível** de risco R , representado por

$$\max_x \Pr\left\{\sum_{i=1}^n r_i x_i \geq R\right\} \quad (4.1.2)$$

Juntando (4.1.1) com (4.1.2) e pelo uso dos resultados obtidas no capítulo 3, o problema **probabilístico** de seleção de investimentos tem o seguinte equivalente **determinístico**:

$$\begin{aligned} & \max_x \frac{\sum_{i=1}^n r_i x_i - R}{(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_{ij} x_i x_j)^{1/2}} \\ & \text{sujeito a} \\ & \sum_{i=1}^n x_i \leq 1 \\ & x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

Analisando o modelo (4.1.3), vale a seguinte hipótese:

$$R < \max_x \left\{ \sum_{i=1}^n r_i x_i \mid \sum_{i=1}^n x_i \leq 1, x_i \geq 0, i = 1, \dots, n \right\} \quad (4.1.4)$$

que, por sua vez, é equivalente a:

$$R < \max\{r_i\}$$

ou seja, o nível de risco da aplicação é sempre menor que o maior lucro médio proporcionado pelos fundos de ações do portfólio. Esta hipótese é natural, pois ela evita que a probabilidade máxima do lucro esperado seja menor que 50%.

Em termos práticos, vamos considerar o problema de seleção de investimentos com sete tipos de fundos de ações os quais tem as seguintes rentabilidades médias

Fundo	A	B	C	D	E	F	G
Renda	380	180	270	420	300	290	210

e o risco associado ao portfólio é representado pela seguinte matriz de covariâncias:

$$V = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E & F & G \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccccccc} 350 & 0 & 0 & 50 & 0 & 0 & 15 \\ 0 & 25 & 15 & 30 & 0 & 7.5 & 0 \\ 0 & 15 & 100 & 0 & 0 & 0 & 12.5 \\ 50 & 30 & 0 & 450 & 0 & 12.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7 & 5 \\ 0 & 7.5 & 0 & 12.5 & 0 & 75 & 0 \\ 15 & 0 & 12.5 & 0 & 0 & 0 & 50 \end{array} \right) \end{matrix}$$

O investidor deseja analisar o portfólio para dois níveis distintos de rentabilidade mínima, $R = 350$ e $R = 400$.

O sistema **PORTFOL** apresentou a seguinte solução:

Nível	A	D	Lucro	Prob. Risco
350	0.32	0.68	3.526	0.999789
400	0.32	0.68	0.444	0.671479

Embora os **níveis** de risco sejam diferentes, as **soluções apresentaram** valores semelhantes, ou **seja**, o investidor deve aplicar 32% do seu capital em **ações** do fundo A e 68% em **ações** do fundo B. No entanto, a **aplicação** para $R = 400$ seria muito **mais** arriscada.

Neste problema, ainda poderíamos considerar outros tipos de **condições**, como, por exemplo, uma condição sobre a quantidade de recurso de capital **disponível** a ser aplicada no **portifólio**. **Daí**, seria acrescentada a seguinte restrição ao modelo (4.1.3):

$$\sum_{i=1}^n d_i x_i \leq D \quad (4.1.5)$$

onde d_i representaria a quantidade de cotas disponíveis no i -ésimo fundo de **ações** multiplicada pelo **valor** de cada cota e D seria a quantidade **máxima** de recurso existente.

4.2 Otimização da Pesca Industrial

A indústria pesqueira enfrenta anualmente o problema de planejar a estação de pesca de forma a administrar **as operações** dos frigoríficos de **processamento** e **alocação** da frota,

A **exportação** de **caudas** de **lagostas** e **filets** de **pargo** é a atividade **básica** da indústria pesqueira do nordeste e uma grande fonte de divisas para o Brasil.

Desde que **as** captura de lagosta se **tornaram** uma atividade industrial, o governo brasileiro tem estabelecido **portarias** para proteger o **ecossistema** contra a depredação dessa espécie. Contudo, existem muitos aspectos **econômicos** que não **são** considerados nos planos de **regulamentação** de **pescarias**, **uma** vez que o problema de **administração** pesqueira tem **sido** visto como aquele que visa atingir a *produção máxima sustentável (PMS)* em vez de tratar a PMS **sòmente** como uma restrição.

Inicialmente, os conceitos de administração pesqueira eram orientados do ponto de **vista biológico** com a PMS **sendo** a **norma** e o controle dos **estoques** de peixes. Mais tarde, aspectos **econômicos** e **sociológicos** foram reconhecidos na evolução **das políticas** de administração pesqueira, **ANDERSON[2]** e **CATO** e **PROCHASKA[10]**. No final, soluções para problemas de gerência e desenvolvimento de pescarias devem ser economicamente viáveis: pescadores, atacadistas e outros envolvidos devem operar com lucro. **Òbviamente**, nenhum plano para administração de **pescarias** pode operar com **sucesso** apenas com critérios **econômicos**, mas os controles **biológicos** devem ser combinados e modificados pelos controles **econômicos**.

Neste sentido, **NEGREIROS** e **THOMAZ[55]** apresentaram um modelo que melhora a **operação** da frota para uma dada estação de pesca através de um plano **ótimo** de captura, considerando a distribuição espacial e sazonal em **conglomerados oceanográficos** para **as espécies** envolvidas. Além **disso**, o modelo observa **restrições biológicas** e **econômicas**.

Por causa da aleatoriedade presente em **alguns parâmetros** tais como lucro líquido, demanda do mercado e a CPUE (**captura** por **unidade de esforço**), o problema **é** tratado através de um modelo PERM.

4.2.1 O Sistema de Pesca Industrial do Nordeste do Brasil

O estudo do sistema pesqueiro no Brasil sob a luz de **modelos de otimização**, vem sendo praticado desde o trabalho de **NEGREIROS GOMES e MACULAN[48]**. Daí surgiu **um grupo de pesquisa que realizou diversas investigações** com o objetivo de propor **modelos de apoio à tomada de decisão e controle do setor pesqueiro**. Muitos **desses modelos tratam com dinâmica de populações**, [52], [55], [66]–[70]. **Outros, embora considerem condições ecológicas das espécies, estão direcionados** para a sobrevivência da atividade industrial pesqueira, cujo enfoque **passamos a descrever**.

Existem duas espécies principais que tem sido colhidas pela frota comercial na costa do nordeste do **Brasil: lagosta (*Panulirus argus* e *Panulirus laevicauda*) e pargo (*Lutjanus p. poey*)**. A maioria da frota é **composta por barcos lagosteiros, mas quando a estação de pesca da lagosta está fechada, quase todos barcos são transformados em pargueiros com pequenas modificações nos equipamentos**. As lagosta **são** apanhada por armadilha, **chamadas covos, ao longo da costa até 50 metros de profundidade, Os pargos são pescados com linhas de 5 a 15 anzóis em águas mais profundas**.

A **delimitação de áreas de pesca apresenta-se** como um problema não trivial **relacionado** com algumas **condições** oceanográficas tais como localização, profundidade e abundância **das espécies**. **FONTELES e KURISAKA[28]** analisaram estas **condições** para o pargo na região do **Caribe** e encontraram que existe uma correlação positiva **significante** entre a profundidade e a captura. **Através** de uma análise de variância, **PAIVA[57]** concluiu **que a abundância de lagostas está sujeita a variações significantes** entre blocos oceanográficos de **1(um)** grau de lado. Recentemente, **NEGREIROS e THOMAZ[52]** obtiveram **áreas oceanográficas ótimas** através de **análise multivariada** de conglomerados usando **as** variáveis CPUE, captura e **posição geográfica** de cada bloco oceanográfico. As **configurações das áreas de pesca** para as duas espécies e **stá** dispostas **nas figuras (4.2.1) e (4.2.2)**.

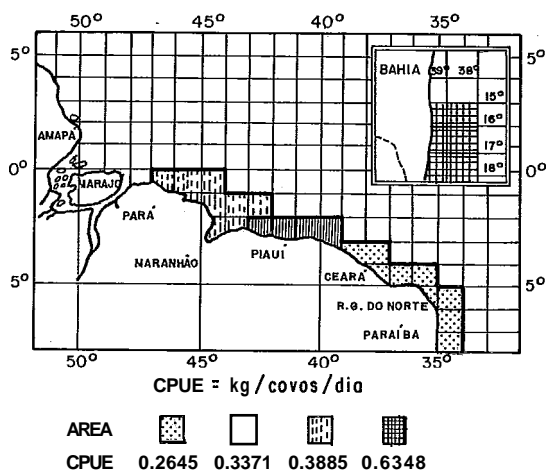


Fig. 4.2.1 Áreas Pesca Lagosta

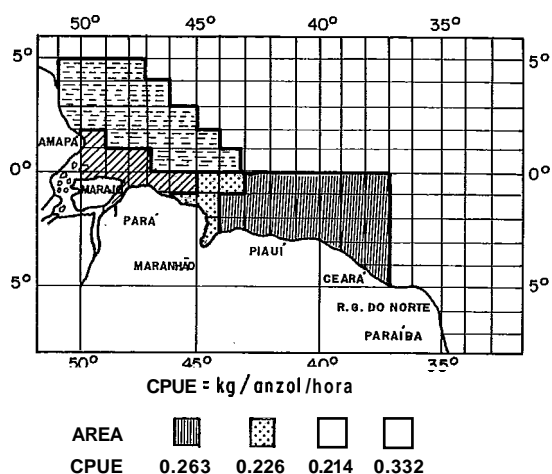


Fig. 4.2.2 Áreas Pesca Pargo

4.2.2 Modelo de Otimização da Estação de Pesca

O objetivo da **administração** pesqueira é fornecer uma **alocação** ótima da pescaria de forma a obter o **máximo** lucro. Evidentemente, o fator determinante do **sucesso** de uma **pescaria** industrial é a **operação** da frota, o qual **será traduzido pelo** desempenho (**contribuição**) da mesma durante a **estação**.

Apresentaremos um modelo **PERM** que **maximiza** a probabilidade do desempenho liquido atingir seu valor esperado, observando um conjunto de restrições **bioeconômicas** que **não** são satisfeitas para uma solução **fixa**, mas a um nível **específico de confiabilidade**. Dai, o problema de **operação** da frota pesqueira toma o seguinte **aspecto**:

$$\begin{aligned} & \max \underline{\text{Pr}}(z \geq \sum_{i=1}^E \sum_{j=1}^{C_i} \sum_{k=1}^{P_i} c_{ijk} x_{ijk}) \\ & \text{sujeito a} \\ & \text{Pr}(\sum_{i=1}^E \sum_{j=1}^{C_i} \sum_{k=1}^{P_i} c_{ijk} x_{ijk} \geq \text{ou} \leq b^r) \geq \beta^r, \quad r = 1, \dots, R \quad (4.2.1) \\ & x_{ijk} \geq 0 \end{aligned}$$

onde x_{ijk} é a variável de decisão representando o número de toneladas da espécie i que deveria ser capturada na área j , no período k . E é o número de espécies envolvidas, C_i é o número de áreas nas quais a espécie i pode ser apanhada e P_i é o número de períodos na estação de pesca da espécie i . Os parâmetros c_{ijk} se referem a contribuição da frota por espécie, área e período, incluindo as despesas (mão-de-obra, provisões, combustível, reparos, apertechos, etc.) e o valor bruto associado a cada tonelada.

O uso de restrições probabilísticas se justifica porque nem sempre tais restrições são satisfeitas para uma solução viável particular, pois os objetivos biológicos muitas vezes se conflitam com as propostas econômicas. Assim os regulamentos baseados na biologia das espécies devem se ajustar com a realidade econômica e vice-versa para cada restrição r a um nível de confiabilidade β^r .

Na função objetivo pode-se notar que o valor esperado da contribuição da frota nem sempre é considerada como uma boa medida para o critério de otimalidade. Embora uma política de pesca $x = (x_{ijk})$ domine outras políticas na esperança matemática da contribuição, ela pode ser mais arriscada no sentido de que uma política de contribuição bem inferior pode ser maior que a de outras políticas, por causa da dispersão de sua distribuição de probabilidade.

Consideramos que os parâmetros do lado direito das restrições, b_r , são variáveis aleatórias com distribuição normal $N(\bar{b}_r, \sigma_{b_r}^2)$. Os coeficientes da função objetivo são componentes de um vetor aleatório $c = (c_{ijk})$ com distribuição normal multivariada $N(\bar{c}, V)$.

As restrições foram divididas em dois conjuntos, biológicas e econômicas. A seguir, decreveremos cada uma delas.

(a) Restrições Biológicas

(a1) Nível de Estoque: A razão da captura pelo esforço de pesca é quase sempre tomada como indicação **aproximada** do nível de estoque corrente de uma **população** de peixes. CLARK[12] mostrou que a CPUE é proporcional à **biomassa** (nível de estoque), ou seja:

$$\sum_{k=1}^4 \frac{1}{q_{ijk} E_{ijk}} x_{ijk} \leq B_{ij}, \quad i = 1, 2; \quad j = i_1, \dots, i_4$$

onde q_{ijk} é o **coeficiente de capturabilidade** da espécie i na área j , no período k e B_{ij} é a biomassa total da espécie i presente na área j . **Estes parâmetros** foram calculados através do modelo produção-estoque devido a FOX[30], no entanto existem outros **métodos** como aqueles descritos por THOMAZ, NEGREIROS e MACULAN[70].

(a2) Esforço Máximo: Quando um recurso **renovável** se reduz a um nível abaixo da PMS, diz-se que ele está **sobreexplorado** e sujeito a se tornar completamente esgotado. Para evitar esta situação, a frota industrial deve operar abaixo do **esforço máximo-EMP**, correspondente à PMS, isto é:

$$\sum_{k=1}^4 \frac{1}{CPUE_{ijk}} x_{ijk} \leq EMP_{ij}, \quad i = 1, 2; \quad j = i_1, \dots, i_4$$

cujas restrições garantem que novos **recrutamentos** entrem para a próxima população **desovante**. Os índices $CPUE_{ijk}$ foram estimados a partir do sistema de informações dos Mapas de Bordo, SUDEPE[65].

(b) Restrições Econômicas

(b1) Capacidade de Processamento: O **esforço máximo econômico** pode ser determinado pelo número e tamanho dos barcos. Uma vez que a frota pesqueira do nordeste do Brasil está **superdimensionada**, consideramos que a **capacidade de processamento** P_{ik} das indústrias pode limitar a taxa de captura de cada espécie i no período k , ou seja:

$$\sum_{j=i_1}^{i_n} h_{ijk} x_{ijk} \leq P_{ik}, \quad i = 1, 2; \quad k = 1, \dots, 4$$

onde h_{ijk} é a taxa de colheita representada pelo índice de concentração de **esforço** proposto por ROCHA e MESQUITA[61]. Dado que existem alguns **subprocessos** industriais (tratamento, **empacotamento**, congelamento, etc) semelhantes **para as duas espécies**,

tem-se uma restrição limitando a capacidade total de processamento:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=i_1}^{i_4} \sum_{k=1}^4 h_{ijk} x_{ijk} \leq P_{\text{Total}}$$

(b2) Restrições Meteorológicas: Neste tipo de tomada de **decisão** um barco C um fator **quasi-fixo**. Existe um limite superior para o número de **dias-barco** em **condições** de pesca. A capacidade de **arrasto** depende da ocorrência ou **não** de mau tempo, representada pelo **número máximo** de **dias-barco** (D_{ik}) para cada **espécie** i no **período** k . Assim, temos:

$$\sum_{j=i_1}^{i_4} \frac{1}{d_{ijk}} x_{ijk} \leq D_{ik}, \quad i = 1, 2; \quad k = 1, \dots, 4$$

onde d_{ijk} é o **valor** esperado do índice $CPU E$ cujo esforço foi medido através do **número** de dias-barco. Por outro lado, barcos **lagosteiros** podem ser transformados em **pargueiros** dependendo da **abundância de peixes em certas áreas**. **Daf**, tem-se **uma restrição** limitando o **número total de barcos disponíveis**:

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=i_1}^{i_4} \sum_{k=1}^4 \frac{1}{d_{ijk}} x_{ijk} \leq D_{\text{Total}}$$

(b3) Restrições de Mercado: Existe um **nível econômico sustentável** de desembarques NED_{ik} que devem ser no **mínimo** igual à colheita planejada. Também, **estas** colheitas **não** podem exceder a demanda esperada do período Y_{ik} . **McGRAW[44]** afirmou que se um pescador planeja um nível de **desembarques** para um período, ele deve **também planejar** o nível de esforço EP **necessário** para colher o produto da pescaria. O esforço tem a vantagem de **estar** fortemente **sob** controle do pescador e **espera-se** que tenha componentes **não** planejadas bem menores que teriam os desembarques. Por esta **razão**, **consideramos** o **esforço** como um coeficiente **tecnológico** uma, vez que ele é uma melhor estimativa para desembarques **planejados** (lado direito **estocástico**) do que **seria** os desembarques reais. Assim tem-se o seguinte subconjunto de restrições:

$$NED_{ik} \leq \sum_{j=1}^{i_n} \frac{EMAX_{ijk}}{EP_{ijk}} x_{ijk} \leq Y_{ik}, \quad i = 1, 2; \quad k = 1, \dots, 4$$

(b4) Limitantes de Captura: As quantidades de cada **espécie** que podem ser colhidas por área, e período devem ser superiores que aos respectivos níveis **mínimos** de captura

NMC sob cada um dos qual o custo de **operação** da frota excede os ganhos, isto é:

$$\text{Período : } \sum_{j=i_1}^{i_4} x_{ijk} \geq NMC_{ik}, \quad i = 1, 2; \quad k = 1, \dots, 4$$

$$\text{Área : } \sum_{k=1}^4 x_{ijk} \geq NMC_{ij}, \quad i = 1, 2; \quad j = i_1, \dots, i_4$$

Os parâmetros **estocásticos** das restrições são os níveis de **biomassa** B_{ij} 's e as demandas do mercado Y_{ij} 's **cujas** distribuições de probabilidade satisfizeram o teste de ajustamento para populações normais.

4.2.3 Resultados do Modelo de Pesca

O modelo descrito no item anterior foi aplicado com dados até **1979** e a solução **comparada** como os resultados obtidos na **estação** de pesca de **1980**. Considerou-se 2 espécies, 4 períodos trimestrais e 4 áreas de pesca para **cada espécie**, perfazendo um total de 33 variáveis de decisão e **66 restrições**, sendo 8 **probabilísticas**. Os parâmetros α e β^r 's foram **fixados** ao nível de 98% de **confiabilidade**.

A **tabela 4.2.1** mostra que a **captura ótima** de lagosta deveria ser 28% menor que a realizada, cujo fato reflete o baixo nível dos coeficientes de **capturabilidade** para a população de lagostas devido o estado de **sobrepesca**.

Em contra partida, a **captura ótima** do **pargo** deveria **atingir níveis** 64% maior que a **real**. Isto indica que grande parte da frota deveria **ser** transformada em barcos **pargueiros**.

Durante a execução do código **PORTFOL**, as **iterações** tiveram o desempenho como está mostrado na tabela 4.2.2 com a solução **ótima** sendo atingida **após 7 iterações**, obtendo um valor ótimo da contribuição da frota em torno de US\$11.7 milhões.

Tabela 4.2.1
Capturas Ótima e Realizada de Lagosta e Pargo
no Norte/Nordeste de Brasil em 1988

Área/ Período	Lagosta					Pargo				
	f	2	3	4	Total	f	2	3	4	Total
Piano ótimo de Pescaria										
1	-	017.3	-	-	887.3	-	-	-	1543.0	1543.0
2	96.5	1343.3	245.5	347.0	1993.4	-	-	-	1266.8	1266.0
3	935.5	-	241.5	-	2137.8	305.9	671.4	352.3	-	1409.0
11	-	-	311.3	354.51	666.0	-	-	-	2544.0	2544.0
Total	12832.8	12121.8	750.8	782.8	5613.0	385.0	671.4	352.3	5363.0	6772.0
Pescaria Realizada										
1	380.11	038.81	248.1	106.0	1581.0	21.71	149.2	97.6	217.91	486.111
2	645.2	1417.6	573.5	427.3	3863.5	107.1	100.2	273.1	443.8	1845.5
3	122.7	681.1	202.0	316.7	1335.3	165.4	33.4	175.5	105.2	559.1
4	25.8	1332.2	382.1	78.3	1818.4	661.6	130.7	695.1	733.1	2228.5
Total	1181.7	4189.6	1496.6	930.4	7798.2	1035.8	495.3	1241.3	1539.2	4144.4

Tabela 4.2.2
Solução Iterativa para o Problema
da Estação de Pesca

Iteração	$r = c'x$	$s = \sqrt{x'Vx}$
1	21.86	7.98
2	19.67	5.79
3	18.21	4.30
4	17.34	3.34
5	16.83	2.80
6	16.55	2.50
7	16.41	2.35

Tabela 4.2.3
Análise das Restrições de Nível de Estoque

Área Pesca	Lagosta (Dual)		Pargo (Folga)
	PL (q=0)	PE (q=2)	PE (q=2)
1	0.216	4.147	18.447
2	8.449	0.181	5.522
3	4.425	0.112	5.641
4	0.124	0.100	3.760

4.2.4 Preços Sombra do Nível de Estoque

O comportamento das pescarias depende fortemente da **biomassa** das **espécies** envolvidas. Portanto, é óbvio que o subconjunto de **restrições** sobre **níveis** de estoque entre em conflito com as propostas econômicas do modelo. Neste sentido, analisamos a sensibilidade destas **restrições através** dos *preços* sombra (**variáveis** duais) **correspondentes**.

Embora não tenhamos feito uma **variação paramétrica** exaustiva com o coeficiente $q = \Phi^{-1}(\alpha)$, os preços sombra do **nível de estoque** da lagosta, ver tabela (4.2.3), são menores para o programa **estocástico** (PE) do que para o programa linear (PL) de **risco** neutro. O efeito **de se** reduzir q aumenta os preços sombra do nível de **estoque**. **Este** fato comprova o estado de **sobrepesca** da **população** de **lagostas** em todas as **áreas** de pesca. Contudo, este **não** é o caso para o **pargo**, o qual apresenta um “boa” folga **nas restrições** de **nível** de estoque como uma **conseqüência** de coeficientes de **capturabilidade** mais altos.

4.3 Alocação de Terras para Agricultura.

Neste item **mostraremos** a utilidade do modelo PERM em economia agrícola. Para isto, apresentaremos uma modelagem **proposta** por SENGUPTA e SFEIR[64] **construída** para analisar o **impacto** de aversão ao risco na produção e decisões sobre **alocação** de **terras** para plantio de culturas diversas com **restrições** de irrigação.

Os dados se baseiam **em** seis tipos de **verduras** (brocolis, couve, couve-flor, aipo, alface e beterraba) que foram usadas para testar o comportamento alocativo do um da **água** em **tais** culturas com respeito **às** seguintes questões:

- a. As **soluções** de **PERM** seriam **mais próximas** do comportamento alocativo **médio observado** que as **soluções** de **programação** linear?
- b. Qual o grau de sensibilidade das **variações** dos preços sombra da água com relação às **mudanças** no parâmetro de aversão ao risco?

Uma vez que o objetivo **é** testar, **através** de um modelo **PERM**, se a aversão ao risco influencia na **alocação** de terras e na **produção das** culturas, vamos considerar que a **função** objetivo, usada **nos** experimentos do sistema **PORTFOL**, possa **assumir** as seguintes formas:

$$z = (1 - \lambda)c'x - \lambda x'Vx, \quad 0 \leq \lambda \leq 1 \quad (4.3.1)$$

$$f(x, \lambda) = c'x - \lambda x'Vx, \quad \lambda > 0 \quad (4.3.2)$$

onde λ varia **parametricamente**. Usando (4.3.1) com **restrições** $Ax \leq b$, $x \geq 0$, podemos **calcular tres conjuntos** de **soluções ótimas**:

- i. **Solução** de programação linear sem risco: $x(L)$, $A = 0$
- ii. **Solução** de **programação quadrática** de risco **mínimo**: $x(Q)$, $\lambda = 1$
- iii. **Solução** de **aversão ao risco**: $x^*(Q)$, quando o valor de λ \in tal que $D^2[\bar{x}, r^*(Q)] = (\bar{x} - x^*)'(\bar{x} - x^*)$ seja **mínima**.

Seja λ^* o valor do parâmetro de aversão ao risco para o qual a **solução** $x^*(Q)$ é obtida **para** um dado r (comportamento **alocativo médio observado**). Então, o **valor** λ^*

de λ na equação (4.3.2) pode ser calculado e o resultado dos experimentos de PERM analisados para variações paramétricas em A e A°. Tais soluções são chamadas

iv. Soluções paramétricas: $x(\lambda, \lambda^0)$

que podem ser comparadas com

v. Soluções com restrições probabilísticas: $x(\alpha)$

onde a função objetivo, em vez de (4.3.1) ou (4.3.2), toma a seguinte forma:

$$g(\alpha) = \bar{c}'x - \alpha(x'Vx)^{1/2}, \quad (4.3.3)$$

onde α é uma constante positiva determinada pela probabilidade

$$\Pr(c'x \geq g) = \alpha \quad (4.3.4)$$

e $c'x \sim N(\bar{c}'x, x'Vx)$. Desta forma, chegamos ao seguinte modelo:

$$\begin{aligned} & \max \sum_{j=1}^6 c_j x_j - \frac{\lambda}{2} \left(\sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^6 x_i x_j v_{ij} \right)^{1/2} \\ & \text{sujeito a} \\ & \sum_{i=1}^6 NA_i x_i \leq DA \\ & \sum_{i=1}^6 NT_i x_i \leq DT \\ & QAI_j \leq x_j \leq QAS_j \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

onde c_j = renda líquida da cultura j por acre colhido,

x_j = número de acres colhidos para a cultura j ,

v_{ij} = covariância entre as rendas das culturas i e j ,

NA_j = quantidade de água necessária por cada acre da cultura j ,

DA = disponibilidade total de água no período,

NT_j = nível de utilização da terra por acre da cultura j ,

DT = disponibilidade total de terra em acres,

QAI_j = quantidade mínima de acres alocada para a cultura j ,

QAS_j = quantidade máxima de acres disponível para a cultura j .

As tabelas (4.3.1)-(4.3.3) descrevem os dados de entrada do modelo acima. A estrutura das soluções ótimas para os casos (i)-(v) estão resumidas nas tabelas (4.3.4) e (4.3.5).

Primeiro, a comparação entre as soluções ótimas $x(L)$, $x(Q)$ e $x^*(Q)$ mostra, em unidades normalizadas (10^7), que a distância $D^2(\bar{x}, x)$ é menor para $x = x^*(Q)$ como segue:

Solução	$D^2(\bar{x}, x)$	λ
$x(L)$	0.4314	0.0
$x(Q)$	0.5477	1.0
$x^*(Q)$	0.1154	2.0

para um valor $\lambda^o = 2.0$ aproximadamente.

Segundo, os valores ótimos das variáveis duais são menores para os modelos PERM do que para o modelo PL de risco neutro, e o efeito de reduzir o parâmetro de aversão ao risco λ leva a um aumento do preço sombra da água como está mostrado na tabela (4.3.6).

Finalmente, usando-se a função objetivo dada por $g(\alpha)$, tem-se que a solução ótima $x(\alpha)$ é idêntica às soluções de programação quadrática, $x(Q)$.

Tabela 4.3.1 Matriz de Covariâncias de custos par acre

	x1	x2	x3	x4	x5	x6
x1	2.59999	5.26545	4.03199	9.28455	4.59422	1.65618
x2		13.96290	8.05601	19.83710	10.56710	4.14380
x3			6.25631	14.30390	7.08274	2.54215
x4				33.47930	16.80190	6.16176
x5					8.60156	3.22880
x6						1.24401

Tabela 4.3.2 Limitantes de Irrigação e Uso da Terra

Restricao	x1	x2	x3	x4	x5	x6	Limites
Água	1.50	1.50	1.50	2.50	1.50	2.83	41.687
Área	0.42	0.42	0.42	0.50	0.33	0.67	9.464

Tabela 4.3.3 Limitantes das Culturas

cultura	coeficiente	limite superior	limite inferior
x1	4.42	2461.75	1477.05
x2	4.42	812.75	487.65
x3	8.42	1865.25	639.15
x4	0.50	5898.13	3538.88
x5	4.33	1223.13	738.88
x6	0.67	329.25	221.55

Tabela 4.3.4 Soluções ótimas para os programas linear e quadrático

Programa	x1	x2	x3	x4	x5	x6
Linear: x(L)	3.516	1.935	1.526	14.781	2.233	330
Risca: x(Q)	3.516	1.161	1.521	7.477	2.223	334

Tabela 4.3.5 Soluções Iterativas para x(2) usando o Sistema PORTFOL

Iteração	$\lambda = 5.0$		$\lambda = 2.0$	
	$\ln c'x$	$\ln (x'Vx)$	$\ln c'x$	$\ln (x'Vx)$
1	8.600	11.70	8.760	11.80
2	9.008	6.19	9.008	6.13
3	9.008	3.09	9.008	3.06
4	9.008	3.09	9.008	3.06

Capítulo V CONCLUSÕES

Uma vez que para resolver **programas estocásticos** deve-se primeiro obter equivalentes **determinísticos**, os **quais são** programas lineares ou não-lineares, a eficiência no cálculo de soluções para o problema original está fortemente relacionada **com** o progresso dos métodos de resolução de **problemas de programação matemática**.

Neste sentido, acreditamos que a pesquisa em técnicas **numéricas** para **otimização estocástica** deve se concentrar na **adequação** ou **transformação** dos **programas probabilísticos** noutros que **aproveitem** bem a **estrutura particular** de **problemas** padrões (p. ex. **programação quadrática**), **com** pequenas **alterações semelhantes** a que apresentamos **para** resolver o problema **PERM**.

Com relação aos procedimentos apresentados, embora o método de transformação direta do modelo **PERM** a um problema **quadrático** seja menos exaustivo, o procedimento **pseudo-quadrático** tem a vantagem de permitir um estudo **paramétrico** da probabilidade do máximo $\Pr(c) = \Pr(r'x_c^* \geq c)$, possibilitando o acompanhamento do processo de **otimização** para vários **níveis** de rentabilidade.

O código **PORTFOL**, o qual implementa **os resultados teóricos** obtidos, representa um **núcleo** para o desenvolvimento de um sistema **direcionado** para a análise de **portfólios** ou investimentos. Com isso, poderíamos elaborar uma ferramenta **computacional** para o analista financeiro, incorporando métodos de **previsão**, análise probabilística do valor presente, **agregação** de alternativas de investimentos e rotinas gráficas para **visualização das simulações**. Este estudo será objeto de um **próximo** trabalho, **NEGREIROS, MACULAN e COSENZA**[51].

Considerando que grande parte dos métodos **computacionais** para **otimização estocástica** está **baseada** no **modelo** de **recursividade**, sugerimos que a pesquisa futura se concentre no estudo da equivalência, **através** da teoria de dualidade **estocástica**, do modelo **PERM** como o problema de recurso simples.

Pela **análise das** aplicações aqui apresentadas, verificamos a utilidade dos modelos **PERM** em problemas de planejamento, **seja** em áreas de puro interesse **econômico** (**p.ex.** seleção de **portfólios**) ou naquelas cujo fator ecológico se **confronta** com as imposições econômicas, as quais são ajustadas através de restrições **probabilísticas** (**p.ex.** modelo de pesca).

Em particular, o uso de programação **estocástica** no gerenciamento da pesca industrial do nordeste do Brasil, pode levar a tomada de medidas de **regulamentação**, como o dimensionamento e **alocação** ótima da frota, com o objetivo de melhorar os ganhos enquanto se impõe controles biológicos ao longo de cada estação de pesca. Além do mais, nosso modelo é uma maneira indireta de **otimizar** outros aspectos da indústria pesqueira tais como processamento de peixes, utilização da frota e equipamentos, **alocação** de **mão** de obra, etc. Certamente, a abrangência deste **assunto não** está totalmente coberta, por exemplo, dividir o esforço de pesca em duas partes: o esforço **associado** em encontrar o peixe, esforço de procura, e o esforço **associado** com a colheita do peixe, uma vez que o pescador gasta a maior parte do seu tempo tentando encontrar o peixe.

Considerando a **preocupação** com a ecologia de uma forma geral, sugerimos a **aplica-**

ção do modelo PERM, utilizando aspectos semelhantes aqueles apresentados no modelo de pesca, a problemas de exploração racional de outros recursos naturais renováveis, para os quais as autoridades governamentais competentes devem dar todo apoio no sentido da formação de grupos de pesquisa interdisciplinares nesta área, como vem sendo praticado em outros países mais desenvolvidos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] ALBUQUERQUE, R. L. M., "Tópicos de Programação Linear Estocástica e Algumas Aplicações", *Tese de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco* (1979).
- [2] ANDERSON, L. G. *The Economics of Fisheries Management*, John Hopkins University Press (1977)
- [3] ARARUNA, A. T., Um Estudo em Otimização Estocástica Visando uma Contribuição à Teoria de Markowitz", *Tese de Doutorado, Programa de Engenharia de Sistemas - COPPE/UFRJ* (1981).
- [4] BAZARAA, M. S. e SHETTY, C. M., *Nonlinear Programming: Theory and Algorithms*, John Wiley & Sons (1979).
- [5] BEALE, E. M. L., "On Minimizing a Convex Function Subject to Linear Inequalities", *J. Royal Stat. Soc.*, B17, pp. 173-184 (1975).
- [6] BEREANU, B., "Some Numerical Methods in Stochastic Linear Programming under Risk and Uncertainty", in *Stochastic Programming*, ed. M. A. H. Dempster, Academic Press (1980).
- [7] BERGTHALLER, C., "A Quadratic Equivalent for the Minimum Risk Problem", *Rev. Roum. Math. Pures et Appl.*, Tome XV, N.1, pp. 17-23 (1970)
- [8] BIRGE, J., "Decomposition and Partitioning Methods for Multistage Stochastic Linear Programs", *Technical Report 82-6, Department of Ind. and Ops. Eng., University of Michigan* (1982).
- [9] BIRGE, J., "An L-shaped Method Computer Code for Multistage Stochastic Linear Programs", in *Numerical Methods for Stochastic Optimization*, eds. Y. Ermoliev e R. J.-B. Wets, Springer Verlag (1985).
- [10] CATO, J.C. e PROCHASKA, "Economic Management Concepts in Small-Scale Spiny Lobster Fisheries", *GCFI Spiny Lobster Workshop* (1980).
- [11] CHARNES, A. e COOPER, W. W., "Chance-Constrained Programming", *Management Science*, 5, pp. 73-70 (1959).
- [12] CLARK, W. C., *Mathematical Bioeconomics: The Optimal Management of Renewable Resources*, John Wiley & Sons, New York (1976).

- [13] DANTZIG, G. B., "Linear Programming under Uncertainty", *Management Science* 1, pp. 197-206 (1955).
- [14] DANTZIG, G. B. e MADANSKY, A., "On the Solution of Two-Stage Linear Programs under Uncertainty", in *Proc. 4th Berkeley Symp. Math. Stat. Prob.* pp. 165-176 (1961).
- [15] DEMPSTER, M. A. H., "Distributions in Interval and Linear Programming" in *Interval Analysis*, ed. E. Hansen, Oxford University Press, London (1980).
- [16] DEMPSTER, M. A. H., "Introduction to Stochastic Programming", in *Stochastic Programming*, ed. M. A. H. Dempster, Academic Press (1980).
- [17] DEMPSTER, M. A. H. e PAPAGAKI-PAPOULIAS, A., "Computational Experience with an Approximate Method for Distribution Problem", in *Stochastic Programming*, ed. M. A. H. Dempster, Academic Press (1980).
- [18] DYSON, R. G. e SWAITHEES, G., "A Global Algorithm for Minimax Solutions to a Stochastic Programming Problem", *Research Paper 61*, Centre for Industrial and Bus. Res., University of Warwick (1975a).
- [19] DYSON, R. G. e SWAITHEES, G., "FORTRAN Codes for a Global Maximax and Local Minimax to the Stochastic Programming Problem", *Research Paper 62*, Centre for Industrial and Bus. Res., University of Warwick (1975b).
- [20] DYSON, R. G. e SWAITHEES, G., "An Approach to Stochastic Programming for Medium term Planning", *Omega*, 4, 479-485 (1976).
- [21] EDWARDS, J., "Documentation for the ADO/SDS Collection of Stochastic Programming Codes", *Working Paper WP-85-02*, International Institute for Applied Systems, Austria (1985).
- [22] EISNER, M. J. e OLSEN, P., "Duality in Probabilistic Programming," *Stochastic Programming* - ed. M. Dempster, Academic Press (1980).
- [23] ERMOLIEV, Y., "Stochastic Quasigradient Methods and Their Applications to Sistema Optimization", *Stochastics* 9, 1-36 (1983).
- [24] ERMOLIEV, Y. e GAVAIRONSKY, A., "Stochastic Quasigradient Methods and Their Implementation", *Working Paper WP-84-55*, International Institute for Applied Systems, Austria (1984).

- [25] ERMOLIEV, Y. e NURMINSKY, A., "Stochastic Quasigradient Algorithms for Minimax Problems in Stochastic Programming", *Stochastic Programming*, ed. M. A. H. Dempster, Academic Press (1980).
- [26] ERMOLIEV, Y. e WETS, R. J.-B., eds., *Numerical Techniques in Stochastic Optimization* Springer-Verlag (1985).
- [27] FELLER, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Volume II, 112-117, John Wiley & Sons, Inc. (1971)
- [28] FONTELLES, A. A. e KURISAKA, S., "Some Oceanographic Conditions Related to the Caribbean Red Snapper Fishery", *Arq. Cien. Mar* 10(2) (1970)
- [29] MOTE, B. L., "A Discussion of the Properties of a Basic Simplex Algorithm for Generating the Decision Regions of Bereanu", *Stochastic Programming*, ed. M. A. H. Dempster, Academic Press (1980).
- [30] FOX, W. W., "Fitting the Generalized Stock Model by Least-Squares and Equilibrium Approximation", *Fishery Bulletin* 37(1) (1975).
- [31] FREEMAN, P. e CEAR, A. E., "Objective Function for R&D Portfolio", *Operarions Research Quarterly* 22(3) (1971).
- [32] GARSTKA, S. J., "Chance-Constrained Equivalent of Stochastic Programs with Fixed Recourse", *CMSBE University of Chicago Report No.7436* (1974).
- [33] GARSTKA, S. J., "An Economic Interpretation of Stochastic Programs", *Mathematical Programming*, 18, 62-67 (1980a).
- [34] GARSTKA, S. J., "Economic Equivalence of Stochastic Programming Models", *Stochastic Programming - ed. M. Dempster*, Academic Press (1980b).
- [35] GEOFFRION, A., "Solving Bi-Criterion Mathematical Programs", *Operarions Research* 15 pp. 39-54 (1971).
- [36] KATAOKA, S., "A Stochastic Programming Model", *Econometrica*, Vol. 31 N. 1-2 (1963).
- [37] LEMKE, C. E., "Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming", *Management Science* 11 pp. 681-689 (1965).

- [38] LOUVEAUX, F., "Multistage Stochastic Programs with Block-Separable Recourse", *Math. Prog. Study* 27 (1986).
- [39] LUENBERGER, D. G., *Introduction to Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley, Reading, Mass. (1973).
- [40] LAND, A. e POWELL, S., *Fortran Codes for Mathematical Programming* John Wiley & Sons (1973).
- [41] MANGASARIAN, O. L., *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York (1969).
- [42] MARKOWITZ, H. M. *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investment*, John Wiley & Sons (1969).
- [43] MARTI, K., "Solving Stochastic Linear Program by Semi-Stochastic Approximation Algorithms", in *Recent Results in Stochastic Programming*, eds. P. Kall e A. Prépoka, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 179, pp. 191-213 (1980).
- [44] MCGRAW, R. L. "The Supply of Effort in a Fishery", *Applied Economics* 13 pp. 245-253 (1981).
- [45] NAZARETH, J. L. "Design and Implementation of a Stochastic Programming Optimizer with Recourse and Tenders", Working Paper WP-85-063, International Institute for Applied Systems, Austria (1985).
- [46] NAZARETH, J. L., e WETS, R. J.-B., "Algorithms for Stochastic Programs: The Case of Nonstochastic Tenders", *Mathematical Programming Study* 28, part II (1986).
- [47] NEGREIROS GOMES, F. J., "Modelo de Programação Linear Aplicado à Pesca", *Tese de Mestrado*, COPPE/UFRJ (1981).
- [48] NEGREIROS COMES, F. J. e MACULAN, N., "Otimização da Pesca Industrial", *Anais do XV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* (1982).
- [49] NEGREIROS GOMES, F. J. e MACULAN, N., "Biblioteca de Códigos de Programação Estocástica", *Relatório Técnico*, Programa de Engenharia de Sistemas COPPE/UFRJ, a ser publicado (1988).
- [50] NEGREIROS GOMES, F. J., MACULAN, N. e COSENZA, C. A. "Agregação de Alternativas de Investimento", submetido ao *IV Congresso Latino-Ibero-Americano de Pesquisa Operacional e Engenharia de Sistemas* (1988).

- [51] **NEGREIROS GOMES, F. J., MACULAN, N. e COSENZA, C. A., "PORTFOL - Sistema de Apoio à Análise Econômica de Portfólios ou Investimentos sob Condições de Risco", submetido ao IV Congresso Latino-Íbero-Americano de Pesquisa Operacional e Engenharia de Sistemas (1988).**
- [52] **NEGREIROS GOMES, F. J. e THOMAZ, A. O. F., "Conglomerados Oceanográficos para Caracterização de Áreas de Pesca", Anais do XVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (1983).**
- [53] **NEGREIROS GOMES, F. J. e THOMAZ, A. C. F., 'A Distribuição Ótima de Idade como Determinante na Pesca de Atuns', Anais do XVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional (1984).**
- [54] **NEGREIROS GOMES, F. J. e THOMAZ, A. C. F., "PQUAD - Código Computacional Para Resolver Problemas de Programação Quadrática - Relatório Técnico DEMA/UFC, a ser publicado (1988).**
- [55] **NEGREIROS GOMES, F. J. e THOMAZ, A. C. F., "Industrial Northeast Brazil Fishing Season Optimization by Stochastic Programming Model", apresentado na 10th Triennial Conference on Operations Research - Washington (USA), Relatório Técnico N.43/84, Programa de Engenharia de Sistemas COPPE/UFRJ (1984).**
- [56] **NEGREIROS GOMES, F. J., THOMAZ, A. C. F. e MACULAN, N., "Stochastic Dynamic Optimization Cohort Model Applied to Lobster Population Harvesting", Relatório Técnico N. 39/84, Programa de Engenharia de Sistemas COPPE/UFRJ (1984).**
- [57] **PAIVA, M. P., "Distribuição do Esforço e Variação de Abundância de Lagosta", Ciência e Cultura Vol. 26(4) (1974).**
- [58] **PRÉPOKA, A., "Logarithmic Concave Measures and Related Topics", in Stochastic Programming, ed. M. A. H. Dempster, Academic Press (1980).**
- [59] **PRÉPOKA, A., "Law of Large Numbers for Random Linear Programs", Math. Systems Theory 6, pp. 277-288 (1972).**
- [60] **PFEFFERKORN, C. E. e TOMLIN, J. A., "Design of a Linear Programming System for ILIAC IV", Technical Report SOL 76-8, Systems Optimization Laboratory, Stanford University (1976).**

- [61] ROCHA, C. A. S. e MESQUITA, A. L. L., "Estudo da Concentração do Esforço Empregado na Pesca de Lagostas no Estado do Ceará (Brasil)", *Arq. Cien. Mar* **14(2)** (1974).
- [62] SENGUPTA, J. K. *Stochastic Programming: Methods and Applications* North Holland, Amsterdam (1972).
- [63] SENGUPTA, J. K. e PORTILLO-CAMPBELL, J. H., "A Fractile Approach to Linear Programming under Risk", *Management Science* **16A**, pp. 298-308(1970).
- [64] SENGUPTA, J. K. e SFEIR, R. L., "Allocative Behaviour under Risk Aversion Through Quadratic Programming Experiments" *Applied Economics* **12**, pp. 367-376 (1980).
- [65] SUDEPE, Sistema de Mapas de *Bordo* (1979).
- [66] TINTNER, G., "Stochastic Linear Programming and Applications to Agricultural Economics" in *Proc. 2nd. Symp. Linear Programming*, ed. H. D. Antosiewicz pp. 197-209 (1955).
- [67] THOMAZ, A. C. F., "Otimização de Sistemas Dinâmicos Não-lineares com Aplicação à Políticas de Pesca", *Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ* (1985).
- [68] THOMAZ, A. C. F. e NEGREIROS GOMES, F. J., "Um Modelo Discreto de Simulação Aplicado à Dinâmica de Lagostas", *Anais do XVI Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* (1983).
- [69] THOMAZ, A. O. F., NEGREIROS GOMES, F. J. e FACÓ, J. L. D. "Dynamic Ecosystem with Optimal Strategy for Catch of Tunas and Tuna Like Fishes in Southeastern Coast of Brazil", *10th Triennial Conference on Operations Research - Washington (USA)* (1984).
- [70] THOMAZ, A. C. F., NEGREIROS GOMES, F. J. e MACULAN, N., "Nonlinear Programming Approach for Computing Fish Stock Production Model Parameters with Application in Catch of Atlantic Tunas", *Relatório Técnico N. 37/84, Programa de Engenharia de Sistemas, COPPE/UFRJ* (1984).
- [71] THOMAZ, A. C. F., NEGREIROS GOMES, F. J. e MACULAN, N., "Controle Ótimo de Capturas de Lagostas", *Anais do XVII Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional* (1984).

- [72] VAN SLYKE, R e WETS, R. J.-B., "*L-shaped Linear Programs with Application to Optimal Control and Stochastic Linear Programs*", *SIAM Journal on Applied Mathematics* Vol. 17, pp. 638-663 (1969).
- [73] VEINOTT, A., "Supporting Hyperplane Method", *Operations Research* Vol. 15, pp. 147-152 (1967).
- [74] D. W. WALKUP D. W. e WETS, R. J.-B., "Stochastic Programs with Recourse", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 15, 1289-1314 (1967).
- [75] WASON, M. T., "Stochastic Approximation", *Tracts in Math and and Math. Phys.* 58, Cambridge University Press, Cambridge (1969).
- [76] WETS, R. J.-B., "Programming under Uncertainty: The equivalent convex Program", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 14, 89-105 (1966).
- [77] WETS, R. J.-B., "Lecture Notes on Stochastic Programming", *University of California at Berkeley, unpublished* (1967).
- [78] WETS, R. J.-B., "Problèmes duaux em programmation stochastique", *Math. Notes* No. 618, Boing Scientific Research Laboratories (1969).
- [79] WETS, R. J.-B., "Stochastic Multipliers, Induced Feasibility and Non-antecipativity in Stochastic Programming", *Stochastic Programming - ed. M. A. Dempster*, Academic Press (1980).
- [80] WETS, R. J.-B., "The Distribution Problem and Its Relation to other Problems in Stochastic Programming", in *Stochastic Programming - ed. M. A. H. Dempster*, Academic Press (1980).
- [81] WILLIAMS, A. C., "On Stochastic Linear Programming", *SIAM Journal of Applied Mathematics*, 19, 927-940 (1965).
- [82] WOLSEY, L. A., "Bounds in Stochastic Programming", *Research Paper*, Manchester Business School (1970).