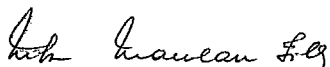


ALGORITMOS PARA PROBLEMAS DE EQUILÍRIO  
EM REDES

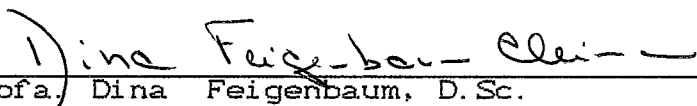
Victor Manuel Parada Daza

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE POS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:



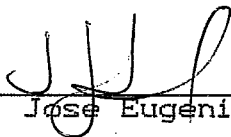
Prof. Nelson Maculan Filho, D. Habil.  
(Presidente)



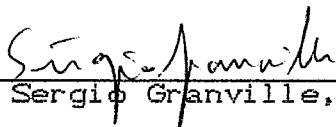
Prof.ª Dina Feigenbaum, D.Sc.



Prof.ª Lourdes Zmetek, D.Sc.



Prof. José Eugênio Leal, D.In.



Prof. Sérgio Granville, Ph.D.

PARADA DAZA, VICTOR MANUEL

Algoritmos Para Problemas de Equilíbrio em Redes (Rio de Janeiro), 1989.

VII, 130 p. (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1988).

Tese - Universidade Federal de Rio de Janeiro, COPPE.

1. Problemas de Equilíbrio de Precos, Problemas de Equilíbrio de Tráfego, Problemas de Equilíbrio Não Simétrico, Inequações Variacionais, Complementaridade Não Linear, Programação Matemática.

I. COPPE/UFRJ II. Título (Serie).

RESUMO DA TESE APRESENTADA A COPPE UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS (D. Sc.)

ALGORITMOS PARA PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO  
EM REDES

Victor Manuel Parada Daza

Novembro de 1989

ORIENTADOR: Prof. Nelson Maculan Filho

PROGRAMA : Engenharia de Sistemas e Computação.

Nesta tese são abordados os problemas de equilíbrio em redes de transporte, especificamente os problemas de equilíbrio de tráfego e equilíbrio de preços. São apresentadas diversas formulações e algoritmos de solução sobre uma ótica comum. Um algoritmo é proposto para o caso em que eles são formulados mediante inequações variacionais, proporcionando um conjunto de resultados numéricos para diversas redes.

ABSTRACT OF THESES PRESENTED TO COPPE/UFRJ AS PARTIAL FULFILLMENT OF THE REQUIREMENTS FOR DEGREE OF DOCTOR OF SCIENCE (D.Sc.).

NETWORK EQUILIBRIUM PROBLEM ALGORITHMS

Victor Manuel Parada Daza

November, 1989

THESIS SUPERVISOR: Prof. Nelson Maculan Filho

DEPARTMENT: System Engineering and Computer Science

In this thesis are studied the network equilibrium problems, specifically the traffic equilibrium problem and the price equilibrium problem. In a common way are presented several formulations and algorithms to solve them. An algorithm is proposed for the case that both are formulated as variational inequalities given a set of numerical results on some networks.



## INDICE.

## CAPITULO I.

Introdução. 1

## CAPITULO II.

Formulação de Problemas de Equilíbrio. 3

II.1 Formulação Através de Inequações Variacionais. 4

II.1.1 Problema de Equilíbrio de Preços. 4

II.1.1.1 Problema Geral de Equilíbrio  
Espacial de Preços (GSPEP). 4

II.1.1.2 Problema Padrão de Equilíbrio  
Espacial de Preços (SSPEP). 9

II.1.1.3 Extensão para o caso Multimodal -  
Multiproduto. 11

II.1.2 Problema de Equilíbrio de Tráfego. 16

II.1.3 Equivalência Entre Problemas de  
Equilíbrio de Tráfego e Preços. 20

II.1.4 Problema de Equilíbrio de Preços  
em Redes Congestionadas. 23

II.1.5 Resumo dos Problemas Formulados Como  
Inequações Variacionais. 26

II.2 Formulação Via de Complementaridade  
não Linear. 29

II.3 Formulação Através de Programação Matemática. 33

II.3.1 Problema Geral de Equilíbrio Espacial  
de Preços (GSPEP). 33

II.3.2 SSPEP. 34

II.3.3 GSPEP - Multimodal - Multiproduto. 35

II.3.4 Problema de Equilíbrio de Tráfego. 35

CAPÍTULO III.	
Métodos de Solução Para Problemas de Equilíbrio.	36
III.1 Métodos Para o Problema de Inequações	
Variacionais.	36
III.1.1 Métodos de Linearização.	36
III.1.2 Métodos Não Lineares.	39
III.1.3 Outros métodos	41
III.2 Métodos Para o Problema de Complementaridade	
não Linear.	43
III.2.1 Métodos de Linearizações Sucessivas.	43
III.2.2 Método de Dimensão Variável.	45
III.3 Métodos Para o Problema de Programação	
Matemática.	46
III.3.1 SSPEP.	47
III.3.2 GSPEP.	49
CAPÍTULO IV	
Um Método Para Inequações Variacionais.	53
IV.1 Inequações Variacionais com Restrições	
Lineares de Igualdade.	57
IV.1.1 Um Problema de Programação Matemática	
Equivalente.	57
IV.1.2 Direção de Descida.	62
IV.1.3 Sobre o Tamanho do Passo.	66
IV.1.4 O Algoritmo.	68
IV.2 Inequações Variacionais com Restrições	
Lineares de Igualdade e Não Negatividade.	69
IV.3 Inequações Variacionais com Restrições	
Lineares - Caso Geral.	71

IV.3.1	O Conjunto Ativo, Direção e Tamanho de passo.	71
IV.3.2	O Algoritmo.	78
IV.3.3	Um Exemplo Numérico.	80
IV.4	Antecedentes Numéricos.	87
IV.4.1	Aspectos Básicos.	87
IV.4.2	Resultados Numéricos.	88
IV.4.3	Comentários Adicionais.	89
IV.5	Uma Abordagem Como Problema de Mínimos Quadrados.	91
CAPITULO V.		
	Aplicação em Problemas de Equilíbrio.	94
V.1	Problema de Equilíbrio de Preços.	94
V.1.1	Antecedentes Gerais.	94
V.1.2	Exemplo Clássico.	95
V.1.3	Exemplos Aleatórios.	103
V.2	Problema de Equilíbrio de Tráfego.	117
V.2.1	Antecedentes Gerais.	117
V.2.2	Exemplo Clássico.	108
V.2.3	Exemplos Aleatórios.	111
CAPITULO VI.		
	Discussão.	113
CAPITULO VII		
	Conclusões e Recomendações.	120
	Referências Bibliográficas.	122

## CAPITULO I.

## INTRODUÇÃO.

O problema de prever fluxos de transporte entre dois pontos de uma região tem despertado o interesse de pesquisadores desde as primeiras décadas deste século. KNIGHT em 1924 estudando o fluxo de veículos no tráfego urbano com uma simples descrição intuitiva deu início ao estudo do problema de equilíbrio de tráfego (TEP). Do mesmo modo COURNOT (1938) analisando o fluxo de mercadorias entre New York e Paris deu origem ao estudo do problema espacial de equilíbrio de preços (GSPEP). Nos anos 1956 (BECKMANN et alii) e 1952 (SAMUELSON) respectivamente foram formulados, mediante os recentes avanços da programação matemática da época, como problemas de programação não linear para um caso simples. Com base nessas formulações numerosas situações reais começaram a serem modeladas com o fim de prever por exemplo: quantas pessoas fariam uso de uma nova infraestrutura de transportes no caso do TEP; ou bem em quanto deveria aumentar a produção de gás natural frente a um aumento da demanda na região em estudo, no caso do GSPEP (ver por exemplo os estudos de SOHL, 1984 e FALK et alii, 1984). Isto levou a um aumento dos estudos de pesquisa teórica abordando tanto os métodos de solução como a busca de formulações generalizadas que abrangessem todas as situações reais. Assim, no início dessa década (DAFERMOS, 1981; FLORIAN e LOS, 1982) são estabelecidas formulações mais gerais que incluem o caso em que os fluxos das unidades transportadas dependem de todos os fluxos movimentados na região estudada, dando origem a situações nas quais não é possível escrever um problema de programação matemática que represente o fenômeno em si (caso não simétrico). Tais formulações, que são feitas através de complementaridade não linear e inequações variacionais, levaram ao surgimento de alguns algoritmos para resolver esse tipo de problemas e que podem ser aplicados tanto ao GSPEP como ao TEP.

O presente estudo dá uma abordagem comum a ambos problemas centralizando - se, principalmente, no caso não simétrico com uma formulação via inequações variacionais, chegando até : propôr, testar numericamente e comparar com os já existentes, um novo método iterativo para determinar uma solução.

Para isto, o estudo está organizado da seguinte maneira: no primeiro capítulo são apresentadas as formulações dos problemas nas suas diversas variantes, enquanto que na segunda são abordados os métodos de solução existentes. No terceiro capítulo é apresentado o método proposto e no quarto a sua aplicação em problemas de equilíbrio. No capítulo quinto são abordadas as discussões em torno do estudo e no último, as conclusões e recomendações.

## CAPITULO II

## FORMULAÇÃO DE PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO.

## INTRODUÇÃO.

O problema de Equilíbrio de Tráfego em redes de transporte foi inicialmente estudado por KNIGHT (1924) com interesse em predizer de que maneira as pessoas fazem uso de uma nova infra-estrutura ligada ao transporte ou equivalentemente, como avaliar o benefício de um determinado investimento no setor de transporte de passageiros. A formalização do conceito de equilíbrio de tráfego foi dada por WARDROP (1952) que permitiu a BECKMANN et alii (1956) dar uma formulação matemática para tal problema.

Nas últimas três décadas uma grande quantidade de estudos de origem tanto prática quanto teórica, tem fortalecido a teoria de equilíbrio e gerado novos métodos de solução.

Por outro lado o problema de Equilíbrio Espacial de Preços é formulado para predizer o movimento inter-regional de produtos no caso em que o custo de transporte tem um rol importante para cumprir. Embora esta seja uma situação antiga, ela foi formalizada matematicamente na década de 50 (SAMUELSON, 1952) sendo posteriormente formulada como problema de fluxos em redes. Em anos recentes o interesse por esta problemática tem aumentado enormemente com base em novas aplicações e novos avanços em teoria de problemas de inequações variacionais e complementaridade.

Esse capítulo faz uma revisão de ambos os problemas nas suas diversas estruturas e formulações chegando a estabelecer certas equivalências entre ambos em alguns casos particulares. Também é apresentada uma nova extensão do problema de equilíbrio de preços que modela uma situação na qual diversos produtos são transportados entre varias regiões, mediante varios modos de transporte. Primeiramente (seção II.1) diversas versões dos problemas aqui estudados são formulados por meio de inequações variacionais. Na segunda parte do capítulo (seção II.2), são consideradas formulações mediante complementaridade não linear para

alguns desses problemas. Na terceira seção (seção II.3) são estudados casos particulares nos quais tais problemas podem ser formulados mediante um problema de programação matemática.

## II.1 FORMULAÇÕES ATRAVÉS DE INEQUAÇÕES VARIACIONAIS.

O conceito de inequações variacionais foi inicialmente introduzido como uma ferramenta no estudo das equações diferenciais parciais, mas, atualmente vem sendo usado em um grande número de problemas de equilíbrio que surgem em economia, pesquisa operacional, estudos de transporte, etc.

Para definir o problema de inequação variacional considere - se um mapping  $g: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , onde  $\Omega$  é um subconjunto compacto e não vazio de  $\mathbb{R}^n$ . O problema, que será identificado  $IV(g, \Omega)$ , consiste em determinar um vetor  $x^*$   $\in \Omega$  tal que:

$$g(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (II.1)$$

### II.1.1 PROBLEMA DE EQUILÍBRIO DE PREÇOS.

#### II.1.1.1 PROBLEMA GERAL DE EQUILÍBRIO ESPACIAL DE PREÇOS.

Considere-se uma rede  $G = (N, A)$  associada a uma região física, onde os nós correspondem a sub - regiões e/ou pontos relevantes da região, enquanto que os arcos são ligações entre um subconjunto de tais pontos. É considerado também um conjunto de produtos para serem transportados entre diversos pontos da região, tendo - se para cada um deles o comportamento da oferta e da demanda determinado por funções conhecidas em cada ponto. Também supõe-se conhecida a estrutura de custos de transporte.

Sejam as seguintes definições:

$G=(N, A)$ : Rede associada à região em estudo.

$N$  : Conjunto de nós (subregiões e ou

- pontos relevantes).
- A : Conjunto de arcos (ligações na região).
- P : Conjunto de produtos considerados.
- $d_j^p(\pi)$  : Função demanda para produto p no nó j sendo  $\pi$  o vetor de preços na rede,  $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n)^T$ .
- $s_i^p(\pi)$  : Função de oferta para produto p no nó i como função dos preços.
- $\pi_j^p(d)$  : Inverso da função demanda ; preço do produto p no nó j como função da quantidade demandada,  $d = (d_1, \dots, d_n)^T$ .
- $\pi_i^p(s)$  : Inverso da função oferta ; preço da oferta no nó i em função da quantidade de produto ofertada,  $s = (s_1, \dots, s_n)^T$ .
- $c_a^p(x)$  : Função de custo para produto p no arco a, dependendo do fluxo nos arcos da rede, isto é,  $x = (x_1, \dots, x_{|A|})^T$ .
- $K_{ij}$  : Conjunto de caminhos elementares entre o nó i e o nó j.
- $\delta_{ak}$  : Variável binária, é igual a 1 se arco a pertence ao caminho k e igual a 0 em caso contrario;  $k \in K_{ij}$ ,  $\forall i, j$ .
- $h_k^p$  : Fluxo de produto p no caminho  $k \in K_{ij}$ ,  $\forall i, j$ .

Com essa notação define-se o equilíbrio de preços na rede G da seguinte maneira:

$$\left. \begin{aligned} \pi_i^p(s) + \sum_a \delta_{ak} c_a^p(x) &= \pi_j^p(d) & \text{se } h_k^p > 0 \\ &\geq \pi_j^p(d) & \text{se } h_k^p = 0 \end{aligned} \right\} \forall : k, i, j, p \quad (\text{II.2a})$$

Por outro lado, devem ser mantidas as equações de conservação de fluxos entre os mercados da rede, isto é:

$$d_l^p - s_l^p + \sum_j \sum_{k \in K_{lj}} h_k^p - \sum_i \sum_{k \in K_{il}} h_k^p = 0 \quad \forall p \in P, l \in N \quad (\text{II.2b})$$



e com variáveis não negativas :

$$h_k^p \geq 0 \quad \forall k \in K_{ij}, i, j \in N, p \in P \quad (\text{II.2c})$$

$$s, d \geq 0 \quad (\text{II.2d})$$

O fluxo em cada arco, em função do fluxo dos caminhos que passam por ele, é dado por :

$$x_a^p = \sum_i \sum_j \sum_{k \in K_{ij}} \delta_{ak} h_k^p \quad \forall a, p \quad (\text{II.2e})$$

A condição de equilíbrio apresentada em (II.2a) estabelece a existência de fluxo de produto  $p$  entre dois nós da rede somente no caso em que o preço da oferta na origem, mais o custo de transporte entre a origem e o destino é igual ao preço de venda do produto no destino. Por outro lado a restrição (II.2b) estabelece que todo o fluxo de produto que chega a um determinado nó  $l$  menos o fluxo que deixa o nó deve ser igual à exportação ( ou importação ) total.

O modelo formulado em (II.2) é conhecido na literatura como Problema Geral de Equilíbrio Espacial de Preços ou GSPEP e neste caso como existem varios produtos envolvidos, denomina-se GSPEP - Multiproduto.

Na figura II.1 é mostrado um caso no qual existem três caminhos pelos quais o produto  $p$  pode ser levado do nó  $i$  até o nó  $j$ , com fluxos  $h_1^p$ ,  $h_2^p$ ,  $h_3^p$ , com custos para cada arco dados na função  $c_a^p(x)$ .

Na formulação anterior, não parece trivial encontrar um ponto que satisfaça as condições de equilíbrio e de conservação de fluxo. Portanto se faz necessário determinar algum tipo de transformação do problema que proporcione um outro equivalente que permita, utilizando algum método de solução conhecido, encontrar um ponto de equilíbrio da forma  $(s^{*T}, x^{*T}, d^{*T})$ .

A condição de equilíbrio (II.2a) pode ser transformada em uma inequação variacional equivalente (KINDERLEHRER e

STAMPACCHI A, 1980):

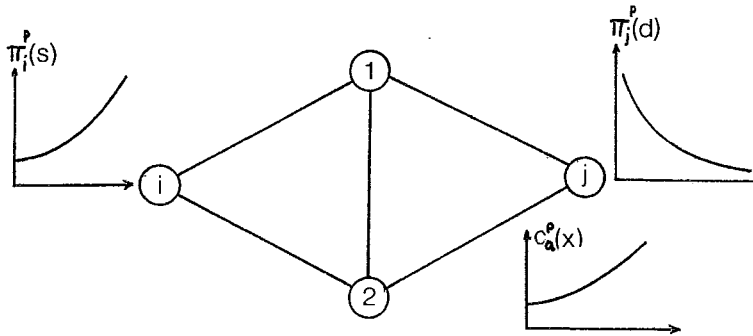


Fig. II.1 Problema geral de equilíbrio espacial de preços.

$$\left[ \pi_i^p(s^*) + \sum_a \delta_{ak} c_a^p(x^*) - \pi_j^p(d^*) \right] (h_k^p - h_k^{p*}) \geq 0$$

$$\forall k \in K_{ij,p} \quad (\text{II.3})$$

Para visualizar mais claramente tal equivalência considera-se:

$$C_{ij}^{p*} = \pi_i^p(s^*) + \sum_a \delta_{ak} c_a^p(x^*) - \pi_j^p(d^*) \quad (\text{II.4})$$

então :

$$\text{se } h_k^{p*} > 0 \text{ e } C_{ij}^{p*} > 0 \Rightarrow C_{ij}^{p*} (h_k^p - h_k^{p*}) < 0 \quad \forall h_k^p < h_k^{p*} \quad (\text{II.5})$$

$$\text{se } h_k^{p*} > 0 \text{ e } C_{ij}^{p*} < 0 \Rightarrow C_{ij}^{p*} (h_k^p - h_k^{p*}) < 0 \quad \forall h_k^p > h_k^{p*} \quad (\text{II.6})$$

$$\text{logo } h_k^{p*} > 0, C_{ij}^{p*} (h_k^p - h_k^{p*}) \geq 0 \text{ se e somente se } C_{ij}^{p*} = 0 \quad (\text{II.7})$$

Por outro lado:

$$\text{se } h_k^{p*} = 0, \Rightarrow C_{ij}^{p*} (h_k^p - h_k^{p*}) \geq 0 \quad \forall C_{ij}^{p*} \geq 0, h_k^p \geq 0 \quad (\text{II.8})$$

Assim (II.7) e (II.8) demonstram que (II.2a) é equivalente com (II.3).

A relação (II.3) pode ser colocada de uma maneira mais resumida se todos os termos em  $k, i, j, p$  forem somado, com o que tem-se:

$$\begin{aligned} & \sum_i \sum_j \sum_{k \in K_{ij}} \sum_p \pi_i^p(s^*) (h_k^p - h_k^{p*}) + \sum_i \sum_j \sum_{k \in K_{ij}} \sum_p \sum_a \delta_{ak} c_a^p(x^*) (h_k^p - h_k^{p*}) \\ & - \sum_i \sum_j \sum_{k \in K_{ij}} \sum_p \pi_j^p(d^*) (h_k^p - h_k^{p*}) \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{II.9})$$

Arranjando de maneira adequada os somatórios e relacionando com equação (II.2b) e (II.2e) tem-se:

$$\begin{aligned} & \sum_i \sum_p \pi_i^p(s^*) (s_i^p - s_i^{p*}) + \sum_a \sum_p c_a^p(x^*) (x_a^p - x_a^{p*}) \\ & - \sum_j \sum_p \pi_j^p(d^*) (d_j^p - d_j^{p*}) \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{II.10})$$

Definindo o conjunto de vetores coluna :

$$\pi(s^*) = (\pi_i^p(s^*)) \quad i=1, \dots \dots |N|, p=1 \dots \dots |P|$$

$$C(x^*) = (c_a^p(x^*)) \quad a=1, \dots \dots |A|, p=1 \dots \dots |P|$$

$$s = (s_i^p) \quad i=1, \dots \dots |N|, p=1 \dots \dots |P|$$

$$d = (d_j^p) \quad j=1, \dots \dots |N|, p=1 \dots \dots |P|$$

$$\pi(d^*) = (\pi_j^p(d^*)) \quad j=1, \dots \dots |N|, p=1 \dots \dots |P|$$

A inequação (II.10) pode ser transformada em:

$$\pi(s^*)^T (s - s^*) + C(x^*)^T (x - x^*) - \pi(d^*)^T (d - d^*) \geq 0 \quad (\text{II.11})$$

Ainda é possível compactar a expressão anterior definindo um vetor  $X$  e um mapping  $g(X)$  da seguinte maneira:

$$g(X^*) = (\pi(s^*)^T \ C(x^*)^T \ -\pi(d^*)^T)^T \quad (\text{II.12})$$

$$X = (s^T \ x^T \ d^T)^T \quad (\text{II.13})$$

Portanto (II.11) pode também ser apresentada como um problema de inequação variacional :

$$\text{Determinar } X^* \in \Omega ; \quad g(X^*)^T (X - X^*) \geq 0 \quad \forall X \in \Omega \quad (\text{II.14})$$

onde  $\Omega$  é o espaço definido pelas restrições (II.2b) até (II.2e).

#### II.1.1.2 PROBLEMA PADRÃO DE EQUILÍBRIO ESPACIAL DE PREÇOS (SSPEP).

No caso em que o problema de equilíbrio de preços é formulado em um digrafo bipartido  $G = (N, A)$  (figura II.2), correspondente a uma região com  $n$  pontos ou subregiões todas elas consumindo e produzindo um determinado produto o problema é chamado Problema Padrão de Equilíbrio Espacial de Preços (SSPEP: Standard Spatial Price Equilibrium Problem) e devido a que, o problema de transporte clássico é um caso particular do anterior também é identificado como Problema de Transporte Generalizado. Neste caso os caminhos da expressão (II.2) são arcos com custos  $c_{ij}(t)$ , sendo  $t_{ij}$  o vetor de fluxo de produtos transportados entre dois suconjuntos de  $N$  definidos por  $N_1$  e  $N_2$ .

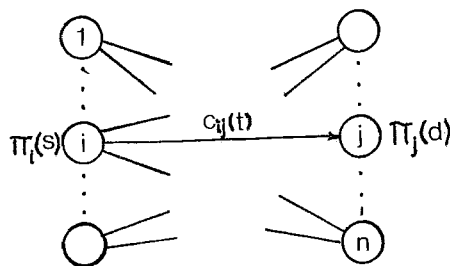


Fig. II.2 Problema padrão de equilíbrio espacial de preços.

A formulação matemática de tal equilíbrio é apresentada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} \pi_i(s) + c_{ij}(t) &= \pi_j(d) & \text{se } t_{ij} > 0 \\ &\geq \pi_j(d) & \text{se } t_{ij} = 0 \end{aligned} \quad \forall i, j \quad (\text{II.15a})$$

$$s_i = \sum_j t_{ij} \quad \forall i \in N_1; \quad d_j = \sum_i t_{ij} \quad \forall j \in N_2 \quad (\text{II.15b})$$

$$t_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \quad (\text{II.15c})$$

Para esse caso tem-se uma equivalência similar àquela do GSPEP. De maneira que a condição de equilíbrio dada na relação (II.15a) é equivalente a:

$$(\pi_i(s^*) + c_{ij}(t^*)) (t_{ij} - t_{ij}^*) - \pi_j(d^*) (t_{ij} - t_{ij}^*) \geq 0 \quad (\text{II.16})$$

notando que:

$$\text{se } t_{ij}^* > 0 \text{ então } \pi_i(s^*) + c_{ij}(t^*) - \pi_j(d^*) = 0$$

e se:

$$\text{se } t_{ij}^* = 0 \text{ então } \pi_i(s^*) + c_{ij}(t^*) - \pi_j(d^*) \geq 0 \text{ e } t_{ij} > 0$$

somando (II.16) para todo  $i, j$  tem-se:

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j \pi_i(s^*) (t_{ij} - t_{ij}^*) - \sum_i \sum_j c_{ij}(t^*) (t_{ij} - t_{ij}^*) \\ + \sum_i \sum_j \pi_j(d^*) (t_{ij} - t_{ij}^*) \geq 0 \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

utilizando a notação vetorial análoga à anteriormente definida e substituindo (II.15b) e (II.15c) em (II.17) a inequação variacional se transforma-se em:

$$\pi(s^*)^T (s - s^*) + c(t^*)^T (t - t^*) - \pi(d^*)^T (d - d^*) \geq 0 \quad (\text{II.18})$$

### II.1.1.3. EXTENSÃO PARA O CASO MULTIMODAL - MULTIPRODUTO.

Nesta seção é considerada uma extensão do Problema Geral de Equilíbrio Espacial de Preços para o caso em que, além do conjunto de produtos, há um conjunto de modos de transporte. Na prática, tal situação corresponde a transportar em uma determinada região, diversos produtos, entre os vários centros fazendo uso de ferrovia, rodovia, etc., cada um deles com funções de custos que representam as características próprias de cada modo.

É considerada também a situação particular, na qual determinado produto possa utilizar somente alguns dos modos disponíveis na região.

A situação antes descrita define a existência de transferências de produtos entre modos, num determinado nó da região. Por exemplo, pode-se transferir um determinado produto do modo ferroviário, para modo rodoviário, em algum ponto da região devido à não existência de ferrovia no resto do percurso até o destino final do produto, ou bem, porque o modo rodoviário tem um custo menor para tal trecho e tal produto.

Analogamente ao trabalho de GUELAT et alii(1987), correspondente ao problema de alocação de fluxos de matrizes O/D em redes de transporte de carga, o aspecto multimodal é modelado na própria rede, isto é, se entre dois pontos da região em estudo é possível transportar o produto entre dois modos de transporte, se associa um digrafo permitindo a existência de arcos paralelos que representam o fluxo de produto correspondente com cada modo. Veja-se por exemplo na figura II.3 a modelagem na rede de dois modos de transporte entre os pontos A e B.

Ao modo  $m_1$  correspondem dois arcos no digrafo associado que são  $(A, B, m_1)$  e  $(B, A, m_1)$  isto é, um em cada sentido. Situação similar se apresenta para o modo 2.

O caso de transferências entre modos também pode ser modelado na rede criando alguns nós artificiais, especificamente um por cada transferência possível tal como apresentado na figura II.4.



Fig. II.3 Rede multimodal.

Existem três modos de transporte envolvidos; o produto chega ao nó B pelo modo  $m_1$  e deixa o nó pelos modos  $m_2$  e  $m_3$ . Os arcos  $(B, B1)$  e  $(B, B2)$  representam as duas transferências possíveis de produto. Evidentemente cada arco de transferência tem um custo associado que corresponde ao custo de traslado de produto entre os modos de transporte  $m_1, m_2$  e  $m_1, m_3$ .

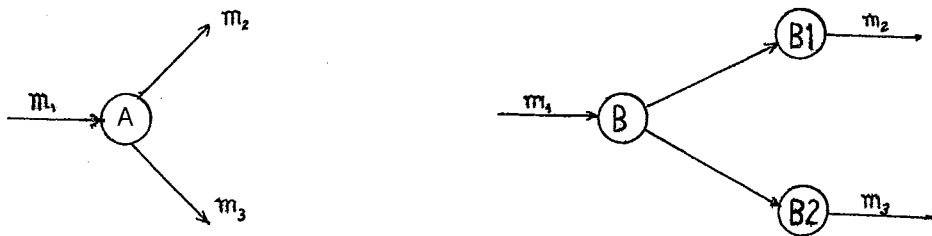


Fig. II.4 Representação de transferências.

Assim, é possível identificar o digrafo estendido associado à região em estudo por  $G = (N, A, T)$  sendo  $N$  o conjunto total de nós incluindo nós artificiais de transferência,  $A$  o conjunto de arcos de modos de transporte e  $T$  o conjunto de arcos de transferência.

Define-se adicionalmente:

$M$  : Conjunto total de modos de transporte.

$c_t^p(x_t)$ : Função de custo de transferência  $t$  em função do fluxo transferido  $x_t$ .

$K_{ij}$  : Conjunto de caminhos entre  $i$  e  $j$  na rede estendida

$$G = (N, A, T).$$

$\delta_{tk}$  : Variável binária , 1 se  $t \in k$  , 0 c.c.

As condições de equilíbrio para a rede estendida  $G=(N, A, T)$  são :

$$\begin{aligned} \pi_i^p(s) + \sum_a \delta_{ak} c_a^p(x) + \sum_t \delta_{tk} c_t^p(x_t) &= \pi_j^p(d) \quad \text{se } h_k^p > 0 \\ &\geq \pi_j^p(d) \quad \text{se } h_k^p = 0 \end{aligned}$$

$$\dots \quad \forall k \in K_{ij} , p \in P, i, j \in N \quad (\text{II.19a})$$

As equações de conservação de fluxo são :

$$s_i^p = \sum_j \sum_{k \in K_{ij}} h_k^p \quad \forall i \in N , p \in P \quad (\text{II.19b})$$

$$d_j^p = \sum_t \sum_{k \in K_{ij}} h_k^p \quad \forall j \in N , p \in P \quad (\text{II.19c})$$

E com fluxos não negativos:

$$h_k^p \geq 0 \quad \forall k \in K_{ij} , i, j \in N, p \in P \quad (\text{II.19d})$$

O fluxo no arco é dado como:

$$x_a^p = \sum_t \sum_j \sum_{k \in K_{ij}} \delta_{ak} h_k^p \quad \forall a \in A, p \in P \quad (\text{II.19e})$$

e o fluxo na transferência como:

$$x_t^p = \sum_j \sum_{k \in K_{ij}} \delta_{tk} h_k^p \quad \forall t \in T, p \in P \quad (\text{II.19f})$$

Analogamente à equação (II.3), as condições de equilíbrio anteriores para o caso em estudo podem ser colocadas para um ponto de equilíbrio  $(\pi_i^* , x_a^* , x_t^* , \pi_j^* )$  segundo :



$$\left[ \pi_i^P(s^*) + \sum_a \delta_{ak} c_a^P(x^*) + \sum_t \delta_{tk} c_t^P(x_t^*) - \pi_j^P(d^*) \right] (h_k^P - h_k^{P*}) \geq 0$$

$$\forall k \in K_{ij}, p \in P, \quad (\text{II.20})$$

Somando todas as equações da forma (II.20) tem-se:

$$\sum_t \sum_j \sum_{k \in K_{ij}} \sum_p \pi_i^P(s^*) (h_k^P - h_k^{P*}) + \sum_t \sum_j \sum_{k \in K_{ij}} \sum_p \sum_a \delta_{ak} c_a^P(x^*) (h_k^P - h_k^{P*})$$

$$+ \sum_t \sum_j \sum_{k \in K_{ij}} \sum_p \sum_t \delta_{tk} c_t^P(x_t^*) (h_k^P - h_k^{P*}) - \sum_t \sum_j \sum_{k \in K_{ij}} \sum_p \pi_j^P(d^*) (h_k^P - h_k^{P*}) \geq 0$$

$$\dots (\text{II.21})$$

Substituindo equações (II.19b), (II.19c), (II.19e), (II.19f) em (II.21) :

$$\sum_t \sum_p \pi_i^P(s^*) (s_i^P - s_i^{P*}) + \sum_a \sum_p c_a^P(x^*) (x_a^P - x_a^{P*}) +$$

$$\sum_t \sum_p c_t^P(x_t^*) (x_t^P - x_t^{P*}) - \sum_p \sum_j \pi_j^P(d^*) (d_j^P - d_j^{P*}) \geq 0 \quad (\text{II.22})$$

Escrevendo (II.22) de forma vetorial:

$$\pi(s^*)^T (s - s^*) + C_A(x_A^*)^T (x_A - x_A^*) + C_T(x_T^*)^T (x_T - x_T^*)$$

$$- \pi(d^*)^T (d - d^*) \geq 0 \quad (\text{II.23})$$

E finalmente definindo vetores coluna :

$$g(x^*) = ( \pi(s^*)^T \quad C(x_A^*)^T \quad C(x_T^*)^T \quad -\pi(d^*)^T )^T \quad (\text{II.24})$$

$$X = ( s^T \quad x_A^T \quad x_T^T \quad d^T )^T \quad (\text{II.25})$$

e portanto o problema de inequações variacionais é :

$$\text{Determinar } X^* \in \Omega ; \quad g(X^*)^T(X - X^*) \geq 0 \quad \forall X \in \Omega \quad (\text{II.26})$$

sendo  $\Omega$  o espaço definido pelas restrições (II.19b) até (II.19f).

### II.1.2. EQUILIBRIO DE TRAFEGO.

Uma das etapas importantes do planejamento em transportes consiste em determinar o fluxo de diversas modalidades na rede a partir de : uma certa infraestrutura da região estudada (ruas, interseções, linhas de trânsito, etc), de um conjunto de políticas para o funcionamento do sistema e da demanda por viagens entre os diversos pontos da região. Tais fluxos, são comumente medidos em unidades de transporte por unidade de tempo.

Intuitivamente pode-se pensar que, senão houver alterações em algum dos três elementos antes mencionados para caracterizar o sistema, depois de um certo tempo os fluxos deverão estabelecer-se em algum "estado estacionário" ou estado de equilíbrio, tal como acontece com outros fenômenos da natureza como é no caso do fluxo de fluidos ou no caso do fluxo de corrente elétrica. Assim por exemplo, se o sistema de transporte está em equilíbrio e existe a criação de um centro de venda de produtos alimentícios dentro da região estudada, é provocado, um aumento da demanda por viagens até o lugar que esta desestabilizando o sistema. Contudo pode-se esperar que depois de um período determinado de tempo, como por exemplo, uma semana ou um mes, o sistema atinge um novo estado de equilíbrio de fluxo de transporte. Tentando estabelecer um critério para determinar as distribuições de tráfego sobre rotas alternativas e que permitam atingir um estado de equilíbrio em redes de transporte WARDROP(1952) formula os seguintes princípios:

i) Os tempos de viagem em todas as rotas realmente usadas são iguais e menores que o tempo que experimentaria um unico veículo em qualquer rota não usada.

ii) O tempo médio de viagem é mínimo.

O primeiro critério ( condição de equilíbrio do usuário) é interessante de um ponto de vista prático, pois leva a pensar que o fluxo de tráfego, tende para uma situação de equilíbrio na qual nenhum motorista pode

diminuir seu tempo de viagem ao mudar para uma nova rota. Por outro lado, o segundo critério (condição de equilíbrio do sistema) é mais eficiente no sentido que diz relação com a minimização do tempo médio de viagem de um veículo.

Matematicamente o equilíbrio do usuário (primeiro principio de Wardrop) pode ser caracterizado tendo em conta as mesmas definições de variáveis numa rede  $G=(N,A)$  considerada, no equilíbrio de preços para o caso multiproduto (TORRES, 1987; SHEFFI, 1985; STEENBRINK, 1974; etc.), assim sendo define-se adicionalmente:

$c_k^p(h)$  : Custo de cada caminho  $k$  para produto  $p$  que une um par  $(i,j)$ .

$u_{ij}^p$  : Custo do caminho de custo mínimo que une  $(i,j)$  para produto  $p$ .

e tendo-se que:

$$c_k^p(h) = \sum_a \delta_{ak} c_a^p(x) \quad \forall k \in K_{ij}; i,j,p \in P \quad (\text{II.27})$$

$$u_{ij}^p = \min_{k \in K_{ij}} c_k^p(h) \quad \forall i,j,p \in P \quad (\text{II.28})$$

De maneira que o equilíbrio do usuário é atingido para:

$$\left. \begin{array}{l} c_k^p(h) - u_{ij}^p = 0 \quad \text{se } h_k^p > 0 \\ c_k^p(h) - u_{ij}^p \geq 0 \quad \text{se } h_k^p = 0 \end{array} \right\} \quad \forall k \in K_{ij}, i,j,p \quad (\text{II.29a})$$

Cada vetor de fluxos de caminhos na rede deve satisfazer as condições de conservação de fluxo e de não negatividade na rede, tal como acontece com o Problema Geral de Equilíbrio Espacial de Preços.

Alternativamente tais equações podem ser colocadas definindo a demanda fixa de viagem para cada par  $(i,j)$  e para cada produto  $p$  como  $g_{ij}^p$  de modo que:

$$\sum_k h_k^p = g_{ij}^p \quad \forall i,j,p \quad (\text{II.29b})$$

$$h_k^p \geq 0 \quad \forall k \in K_{ij}; i, j; p \in P \quad (\text{II.29c})$$

$$x_a^p = \sum_i \sum_j \sum_{k \in K_{ij}} \delta_{ak} h_k^p \quad \forall a, p \quad (\text{II.29d})$$

O problema (II.29) é conhecido na literatura como problema de equilíbrio de tráfego multimodal em redes de transporte. Evidentemente, no caso de existir só um modo a considerar a formulação é exatamente a mesma, não considerando o superíndice p.

Analogamente à transformação das condições de equilíbrio de preços, pode-se estabelecer a condição de equilíbrio de tráfego equivalente da seguinte maneira:

$$\left[ c_k^p(h^*) - u_{ij}^{p*} \right] (h_k^p - h_k^{p*}) \geq 0 \quad \forall k \in K_{ij}; i, j; p \quad (\text{II.30})$$

onde  $h^*$  e  $u_{ij}^{p*}$  são as variáveis de equilíbrio que satisfazem (II.29a). Somando para todo k, i, j e p tem-se a inequação:

$$\sum_i \sum_j \sum_k \sum_p \left[ c_k^p(h^*) - u_{ij}^{p*} \right] (h_k^p - h_k^{p*}) \geq 0 \quad (\text{II.31})$$

equivalentemente substituindo (II.27) e (II.39d) :

$$\sum_p \sum_a c_a^p(x^*) (x_a^p - x_a^{p*}) \geq 0 \quad (\text{II.32})$$

e definindo adequadamente vetores :

$$C(x^*) = (c_a^p(x^*)) \quad a=1, \dots \dots |A|, p=1, \dots \dots |P|$$

$$X = (x_a^p) \quad a=1, \dots \dots |A|, p=1, \dots \dots |P|$$

tem-se o problema de inequações variacionais equivalente:

$$\text{Determine } X^* \in \Omega ; \quad C(X^*)^T (X - X^*) \geq 0 \quad \forall X \in \Omega. \quad (\text{II.33})$$

onde  $\Omega$  é o conjunto definido pelas restrições (II.29b), (II.29c) e (II.29d), e sendo  $X$  o fluxo multimodal que satisfaz a conservação de fluxo na rede. Portanto (II.33) é a inequação variacional que representa o problema de equilíbrio de tráfego para uma rede  $G = (N, A)$  considerando vários modos de transporte.

### II.1.3 EQUIVALÊNCIA ENTRE PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO DE PREÇOS E TRÁFEGO.

Os problemas estudados nas seções II.1.1 e II.1.2 podem ser unificados numa estrutura comum. Especificamente é o caso do problema geral de equilíbrio espacial de preços em redes e o problema de equilíbrio de tráfego.

Para isto escrevamos novamente as condições de equilíbrio de preços e tráfego:

$$\left. \begin{aligned} \pi_i(s) + \sum_a \delta_{ak} c_a(x) - \pi_j(d) &= 0 \quad \text{se } h_k > 0 \\ &\geq 0 \quad \text{se } h_k = 0 \end{aligned} \right\} \forall k \in K_{ij}, i, j \quad (\text{II.34})$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_a \delta_{ak} c_a(x) - u_{ij} &= 0 \quad \text{se } h_k > 0 \\ &\geq 0 \quad \text{se } h_k = 0 \end{aligned} \right\} \forall k \in K_{ij}, i, j \quad (\text{II.35})$$

Seja uma rede  $G = (N, A)$  na qual para cada par  $(i, j)$  é associado um nó artificial  $m$  ligado à rede pelos arcos  $(m, i)$  e  $(j, m)$  tal como mostrado na figura (II.5).

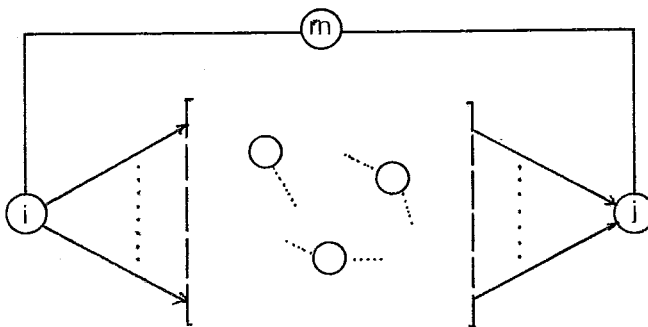


Fig. II.5 Nó artificial  $m$ .

Para esse caso se define  $M$  como conjunto de todos os nós  $m$  associado a cada par de nós da rede aumentada  $G' = (N', A')$  e além disso, associam-se custos e fluxos aos arcos  $(j, m)$  e  $(m, i)$  da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} c_{jm} &= -\pi_j(d) & ; & & c_{mi} &= \pi_i(s) \\ x_{jm} &= d_j & ; & & x_{mi} &= s_i \end{aligned}$$

Logo as condições de equilíbrio de preços se transformam em:

$$\begin{aligned} c_{mi}(x_{mi}) + \sum_a \delta_{ak} C_a(x) + c_{jm}(x_{jm}) &= 0 \quad \text{se } h_k > 0 \\ &\geq 0 \quad \text{se } h_k = 0 \\ &\dots\dots\dots \forall k \in K_{mm}, m \end{aligned} \quad \text{(II.36)}$$

ou equivalentemente na rede aumentada:

$$\left. \begin{aligned} \sum_a \delta_{ak} C_a(x) &= 0 \quad \text{se } h_k > 0 \\ &\geq 0 \quad \text{se } h_k = 0 \end{aligned} \right\} \quad \forall k \in K_{ij}, i, j \quad \text{(II.37)}$$

Por outro lado assume-se que  $u_{mm} = 0$  e portanto o equilíbrio de tráfego mostrado em (II.36) aplicado na rede estendida também se transforma em (II.37), para cada par  $(i, j)$  ou equivalentemente para cada nó artificial  $m \in M$ .

De maneira que o Problema Geral de Equilíbrio Espacial de preços em uma rede  $G=(N, A)$ , corresponde a um problema de equilíbrio de tráfego em uma rede aumentada  $G'=(N', A')$ , com uma escolha adequada dos custos e fluxos dos novos arcos na rede e considerando um nó artificial  $m$  para cada par origem - destino da rede original.

De forma compacta o problema é colocado como:

$$\text{Determinar } X^* \in \Omega ; C(X^*)^T (X - X^*) \geq 0 \quad \forall X \in \Omega \quad \text{(II.38)}$$

onde  $X^* = (x_a)_{a \in A}$  e  $C(X^*) = (c_a(x))_{a \in A}$  para o problema de equilíbrio de tráfego e :

$$X^* = (x_a)_{a \in A'}, \text{ e } C(X^*) = (c_a(x))_{a \in A'}, \text{ para o GSPEP.}$$



Entretanto  $\Omega$  é formado por equações de conservação de fluxo na rede  $G = (N, A)$  para o PET e pelo mesmo tipo de equações para a rede  $G' = (N; A')$  para o GSPEP.

#### II.1.4 PROBLEMA DE EQUILÍBRIO DE PREÇOS EM REDES CONGESTIONADAS.

Um recente estudo de FISK (1987) apresenta o problema de equilíbrio de preços em redes multimodais congestionadas, que corresponde a uma situação na qual vários produtos, são transportados por vários modos de transporte entre diversos pontos de uma região (centróides), utilizando como critério para determinação do fluxo o primeiro princípio de Wardrop (equilíbrio do usuário) e mantendo o equilíbrio dos preços dos produtos transportados. Isto representa uma situação em que ambos equilíbrios devem ser estabelecidos simultaneamente.

A formulação, supondo que são conhecidas explicitamente as funções de demanda  $s(\pi)$  e  $d(\pi)$  para os nós da rede, é a seguinte:

$$\left. \begin{aligned} c_k^P(h) - u_{ij} &= 0 \quad \text{se } h_k^P > 0 \\ &\geq 0 \quad \text{se } h_k^P = 0 \end{aligned} \right\} \forall k \in K_{ij}, i, j, p \quad (\text{II.39a})$$

$$\left. \begin{aligned} \pi_i^P + u_{ij}^P - \pi_j^P &= 0 \quad \text{se } T_{ij}^P > 0 \\ &\geq 0 \quad \text{se } T_{ij}^P = 0 \end{aligned} \right\} \forall i, j, p \quad (\text{II.39b})$$

$$\sum_k h_k^P = T_{ij}^P \quad \forall i, j, p \quad (\text{II.39c})$$

$$s_i^P(\pi) = \sum_j T_{ij}^P \quad \text{ou} \quad s_i^P(\pi) = A_i^P \quad \forall i, p \quad (\text{II.39d})$$

$$d_j^P(\pi) = \sum_i T_{ij}^P \quad \text{ou} \quad d_j^P(\pi) = B_j^P \quad \forall j, p \quad (\text{II.39e})$$

$$h_k^P, \pi_i^P, \pi_j^P, T_{ij}^P \geq 0 \quad \forall i, j, p, k \in K_{ij} \quad (\text{II.39f})$$

Sendo que todas as variáveis conservam a notação das seções

anteriores e:

- $p$  : produto  $p$   
 $T_{ij}^p$  : fluxo entre  $i$  e  $j$  para o produto  $p$ .  
 $u_{ij}^p$  : custo de equilíbrio sobre os caminhos usados para o produto  $p$ .  
 $A_i^p$  : Produção total de  $p$  em  $i$ .  
 $B_j^p$  : Consumo total de  $p$  em  $j$ .

A condição (II.39a) corresponde ao equilíbrio de fluxos na rede que é uma rede multimodal onde são representados os diversos modos de transporte. Tal equilíbrio é estabelecido no primeiro princípio de Wardrop antes apresentado. As equações (II.39b) são a condição de equilíbrio de preços que deve se manter entre duas regiões  $i$  e  $j$ . Por outro lado (II.39c) relaciona o fluxo nos caminhos e o fluxo total entre cada par de nós e para cada produto. Equações (II.39d) e (II.39e) estabelecem a relação entre fluxo total em equilíbrio que chega (ou sai) de cada centróide da região em estudo. Finalmente as restrições (II.39f) expressam a não negatividade de fluxos e preços. Reordenando os termos e definindo adequadamente os vetores análogamente às seções II.1.1 e II.1.2 é possível escrever a inequação variacional equivalente como:

$$\begin{aligned}
 & \left[ s(\pi_i^*) - ACT^* \right]^T (\pi_i - \pi_i^*) - \left[ d(\pi_j) - BCT^* \right]^T (\pi_j - \pi_j^*) \\
 & + \left[ \pi_i^* + u^* - \pi_j^* \right]^T (T - T^*) + \left[ C(h^*) - u^* \right]^T (h - h^*) \geq 0 \quad \text{(II.40)}
 \end{aligned}$$

De forma compacta o problema pode ser colocado como

$$\text{Determinar } X^* \in \Omega ; g(X^*)^T (X - X^*) \geq 0 \quad \forall X \in \Omega \quad \text{(II.41)}$$

sendo:

$$g(X) = \left[ s(\pi_i) - ACT, -d(\pi_j) + BCT, \pi_i + u - \pi_j, c(h) - u \right]$$

$$X = (\pi_I^T, \pi_J^T, T^T, h^T)^T$$

e sendo:  $\pi_I = (\pi_{i,p,i}^P)$ ;  $\pi_J = (\pi_{j,p,j}^P)$ ;  $T = (T_{i,j,p}^P)$

vetores coluna de preços de produção, de demanda e vetor de fluxos respectivamente.  $\Omega$  o conjunto para o qual  $X$  é viável.

Para resolver tal problema pode ser utilizado algum dos algoritmos conhecidos de inequações variacionais. FISK(1987) demonstra a existência e unicidade para tal solução. A formulação (II.39) inclui casos nos quais não existe um equilíbrio entre oferta e demanda numa região dada, o que é uma situação frequente por exemplo, quando existem produtores ineficientes dentro da região ou quando um produto tem pouca procura na área em que está sendo produzido.

### II.1.5 RESUMO DOS PROBLEMAS FORMULADOS COMO INEQUAÇÕES VARIACIONAIS.

Em todos os casos estudados nas seções anteriores determina-se uma inequação variacional que representa o problema. A diferença entre eles ( do ponto de vista puramente matemático ) está somente na definição de vetores. Um resumo das características de cada problema pode ser encontrado no quadro II.1.

É importante notar que todas as formulações são do tipo arco - caminho, isto é, as equações de conservação de fluxo na rede são escritas utilizando como variável o fluxo dos caminhos que unem cada par de nós  $i$  e  $j$ . Contudo, tais equações também podem ser formuladas utilizando como variável o fluxo de cada arco da rede, ou seja da forma nó-arco. Embora a formulação do primeiro tipo antes mencionado seja a mais comum, existem vários estudos específicos para o segundo caso, principalmente devido ao fato que para redes de grande porte, o número de caminhos envolvidos pode resultar inviável numericamente.

Consideremos a formulação nó-arco para o GSPEP:

- Equações de conservação de fluxo nos mercados da rede  $G=(N,A)$  para um produto só:

$$d_i - s_i + \sum_{a \in A_i^+} x_a - \sum_{a \in A_i^-} x_a = 0 \quad \forall i \in N \quad (\text{II.42})$$

$$s, d, x \geq 0 \quad (\text{II.43})$$

Equações de conservação de fluxo para  $G'=(N', A')$ , definida na seção II.1.3:

$$\sum_{a \in A_i^+} x_a - \sum_{a \in A_i^-} x_a = 0 \quad \forall i \in N' \quad (\text{II.44})$$

$$x \geq 0$$

onde :

$A_i^+$  : Conjunto de arcos que saem do nó  $i$ ,

$A_i^-$  : Conjunto de arcos que chegam ao nó  $i$ .

Portanto se  $B$  é a matriz de incidência nó - arco para a rede aumentada  $G'$  a inequação variacional correspondente pode ser formulada como :

$$\text{Determinar } C(X^*)^T(X - X^*) \geq 0 \quad \forall X \in \Omega \quad (\text{II.45})$$

$$\Omega = \{X; BX=b, X \geq 0\}, \quad b = 0.$$

No caso do problema de equilíbrio de tráfego o vetor  $b$  corresponde com  $g_{ij}$  da equação (II.29b).

De qualquer forma, as variáveis consideradas em cada formulação permitem obter variáveis correspondentes, isto é, se são conhecidas variáveis de fluxos de caminhos, as correspondentes a fluxo de arco podem se obter mediante o uso de equação (II.2e). Para o caso inverso, ou seja quando as variáveis conhecidas são os fluxos dos arcos, os fluxos em caminhos podem ser obtidos a partir do algoritmo formulado por DRISSI - KAITOUNI (1988).

PROBLEMA	$G=(N, A)$	$X$	$g(X)$
SSPEP	D. B.	$(s^T, t^T, d^T)$	$(\pi(s)^T, c(t)^T, -\pi(d)^T)^T$
GSPEP-M	Rede	$(s^T, x^T, d^T)$	$(\pi(s)^T, c(x)^T, -\pi(d)^T)^T$
GSPEP-M-M	Rede	$(s^T, x_A^T, x_T^T, d^T)$	$(\pi(s)^T, c(x)^T, c(x)^T, -\pi(d)^T)^T$
TEP	Rede	$(x)$	$C(x)$
GSPEP-TEP	Rede	$(\pi_I^T, \pi_J^T, T^T, h^T)$	$(s(\pi_I)^T - A^T D^T, -d(\pi_J)^T + b^T D^T, \pi_I^T + u^T - \pi_J^T, c(h-u))^T$

Problema geral: Determinar  $X^* \in \Omega$ ;  $g(X^*)^T (X - X^*) \geq 0 \quad \forall X \in \Omega$ ,

$\Omega = \{X \mid X \text{ satisfaz conservação de fluxo}\}$  e

- SSPEP : Problema Padrão de Equilíbrio Espacial de Preços,  
 GSPEP : Problema Geral de Equilíbrio Espacial de Preços,  
 GSPEP-M : GSPEP Multimodal,  
 GSPEP-M-M: GSPEP-M Multiproduto,  
 TEP : Problema de Equilíbrio de Tráfego,  
 GSPEP-TEP: Problema Combinado SPEP-TEP.  
 D. B. : Digrafo Bipartido.

Nota: Todos os vetores são definidos como vetores coluna.

Quadro II.1 Resumo de formulação por Inequações Variacionais

## II.2 FORMULAÇÃO VIA COMPLEMENTARIDADE NÃO LINEAR.

O problema de equilíbrio de preços nas suas diversas modalidades, também tem sido formulado como um problema de complementaridade não linear (PCNL) ver por exemplo os estudos de : FRIESZ et alii(1984), PANG e CHANG(1982), PANG e LEE(1981), ou TOBIN(1988). Tal fato, em alguns casos, pode ser diretamente derivado a partir da formulação do problema como inequações variacionais, utilizando o teorema de equivalência formulado por KINDERLEHRER e STAMPACCHIA(1980), no qual para um problema de inequações definido por:

$$\text{Determinar } x^* \in \Omega \quad g(x^*)^T(x-x^*) \geq 0, \quad \forall x \geq 0 \quad (\text{II.45})$$

$$g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

existe um problema de complementaridade não linear equivalente definido por :

$$g(x)^T x = 0, \quad (\text{II.46})$$

$$g(x) \geq 0, \quad x \geq 0 \quad (\text{II.47})$$

Contudo, tal problema pode ser obtido diretamente a partir da formulação inicial das condições de equilíbrio. Considere - se por exemplo o GSPEP (Problema Geral de Equilíbrio Espacial de Preços). Para esse caso dois tipos de formulações como PCNL podem ser estabelecidos tal como no caso de inequações variacionais. Um primeiro que inclui como variável o fluxo dos caminhos (tipo arco - caminho) e o outro cujas variáveis são os fluxos nos arcos denominada nó - arco.

### II.2.1 FORMULAÇÃO ARCO - CAMINHO.

Para esse caso podemos reescrever o problema antes formulado (equações II.2a até II.2e) segundo:

$$(\pi_i^p + c_k^p - \pi_j^p) h_k^p = 0 \quad \forall: i, j, p, k \in K_{ij} \quad (\text{II.48a})$$



$$\pi_i^p + c_k^p - \pi_j^p \geq 0 \quad \forall: i, j, p, k \in K_{ij} \quad (\text{II.48b})$$

$$s_j^p(\pi) - d_j^p(\pi) - Q_j^p = 0 \quad \forall: p, j \quad (\text{II.48c})$$

$$h_k^p \geq 0 \quad \forall: p, k \in K_{ij} \quad (\text{II.48d})$$

$$\pi_j^p \geq 0 \quad \forall: p, j \quad (\text{II.48e})$$

e onde  $Q_j^p$  é definido por :

$$Q_j^p = s_j^p(\pi) - d_j^p(\pi) \quad \forall p, j \quad (\text{II.49})$$

ou :

$$Q_j^p = \sum_l \sum_{k \in K_{ji}} h_k^p - \sum_l \sum_{k \in K_{ij}} h_k^p \quad \forall p, j \quad (\text{II.50})$$

Notando que:

$$Q_j^p \begin{cases} > 0 \text{ se o mercado } j \text{ é um exportador de produto } p, \\ < 0 \text{ se o mercado } j \text{ é um importador de produto } p, \\ = 0 \text{ em outro caso.} \end{cases}$$

No caso em que:

$$d_j^p(\dots, \pi_{j-1}^p, 0, \pi_{j+1}^p, \dots) - s_j^p(\dots, \pi_{j-1}^p, 0, \pi_{j+1}^p, \dots) \geq 0 \quad \forall j. \quad (\text{II.51})$$

ou seja, a quantidade demandada de um determinado produto em um determinado mercado excede a quantidade oferecida no mesmo mercado com preço nulo ; FRIESZ et alii(1984) apresentam o seguinte problema equivalente com (II.49) :

$$(\pi_i^p + c_k^p - \pi_j^p) h_k^p = 0 \quad \forall: i, j, p, k \in K_{ij} \quad (\text{II.52a})$$

$$\pi_i^p + c_k^p - \pi_j^p \geq 0 \quad \forall: i, j, p, k \in K_{ij} \quad (\text{II.52b})$$

$$(s_j^p(\pi) - d_j^p(\pi) - Q_j^p) \pi_j^p = 0 \quad \forall: p, j \quad (\text{II.52c})$$

$$s_j^p(\pi) - d_j^p(\pi) - Q_j^p \geq 0 \quad \forall p, j \quad (\text{II.52d})$$

$$h_k^p \geq 0 \quad \forall p, k \in K_{ij} \quad (\text{II.52e})$$

$$\pi_j^p \geq 0 \quad \forall p, j \quad (\text{II.52f})$$

Definindo :

$$x = \begin{bmatrix} h \\ \pi \end{bmatrix}$$

sendo  $h$  o vetor composto de elementos  $h_k^p \quad \forall p, k \in K_{ij}, i, j$  e  $\pi$  o vetor com elementos  $\pi_j^p \quad \forall p, j$ , entretanto:

$$g(x) = \left[ \pi_i^p + c_k^p - \pi_j^p \quad (\forall p, i, j, k \in K_{ij}), \quad s_j^p(\pi) - d_j^p(\pi) - Q_j^p \quad (\forall p, j) \right] \quad \dots (\text{II.53})$$

então o problema (II.52) pode ser escrito como:

$$g(x)^T x = 0, \quad (\text{II.46})$$

$$g(x) \geq 0, \quad x \geq 0. \quad (\text{II.47})$$

### II.2.2 FORMULAÇÃO NÓ - ARCO PARA O GSPEP.

Neste caso as equações de conservação de fluxo são colocadas através da variável  $x_a^p$  que identifica o fluxo de produto  $p$  que passa pelo arco  $a$ . Ou seja, neste caso a variável que representa importação ou exportação de produto  $p$  num determinado mercado deve se escrever como:

$$Q_j^p = \sum_{a \in A_j^+} x_a^p - \sum_{a \in A_j^-} x_a^p \quad \forall p, j \quad (\text{II.54})$$

onde:

$A_j^+$  : Conjunto de arcos que chegam no nó  $j$ .

$A_j^-$  : Conjunto de arcos que saem do nó  $j$ .

Entretanto as equações equivalentes às (II.52) com uma suposição similar são:

$$(n_i^p + c_a^p - \pi_j^p) x_a^p = 0 \quad \forall p, a=(i, j) \quad (\text{II.55a})$$

$$n_i^p + c_a^p - \pi_j^p \geq 0 \quad \forall p, a=(i, j) \quad (\text{II.55b})$$

$$(s_j^p(\pi) - d_j^p(\pi) - Q_j^p) \pi_j^p = 0 \quad \forall p, j \quad (\text{II.55c})$$

$$s_j^p(\pi) - d_j^p(\pi) - Q_j^p \geq 0 \quad \forall p, j \quad (\text{II.55d})$$

$$x_a^p \geq 0 \quad \forall p, a=(i, j) \quad (\text{II.55e})$$

$$\pi_j^p \geq 0 \quad \forall p, j \quad (\text{II.55f})$$

e definindo

$$x = \begin{bmatrix} x \\ \pi \end{bmatrix}$$

sendo  $x$  o vetor de fluxo nos arcos por produto,  $\pi$  tal como definido na formulação arco-caminhos analogamente escolhendo uma forma adequada para a função  $g$  tal como:

$$g(x) = \left[ n_i^p + c_a^p - \pi_j^p \quad (\forall p, a=(i, j)), \quad s_j^p(\pi) - d_j^p(\pi) - Q_j^p \quad (\forall p, j) \right] \quad (\text{II.56})$$

o problema de complementaridade assume a forma de equações (II.46) e (II.47).

É importante notar que a formulação em função de fluxo em arcos se torna muito importante em redes de grande tamanho, devido a que, em tais casos as variáveis que denotam os fluxos em caminhos atingem números exageradamente altos, inviabilizando implementações em computador.

### II.3 FORMULAÇÃO ATRAVÉS DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA.

Existe um caso particular em que um problema de inequação variacional (equação II.1) tem um problema de programação matemática equivalente. Isto acontece porque uma inequação variacional é a condição de otimalidade global de um problema de programação não linear no caso em que o mapping  $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x))$  é o gradiente de alguma função convexa em  $\Omega$  e que será identificada por  $f(x)$ . Esse é um caso particular porque a função  $f(x)$  nem sempre existe para um mapping dado, ou equivalentemente nem todo mapping é gradiente de alguma função. A condição necessária e suficiente para tal existência é que o Jacobiano do mapping  $g(x)$  seja simétrico (HOTPELLING, 1932), caso no qual  $g(x)$  é a própria matriz Hessiana da função.

Assim, o problema de programação matemática equivalente com o problema (II.1) é:

$$\underset{x \in \Omega}{\text{Minimizar}} f(x) = \sum_i \int_0^x g_i(\alpha) d\alpha \quad (\text{II.57})$$

Para exemplificar a situação estudam - se os casos simétricos dos problemas GSPEP, SSPEP, TEP.

#### II.3.1 PROBLEMA GERAL DE EQUILÍBRIO ESPACIAL DE PREÇOS (GSPEP).

Consideremos o GSPEP - Multimodal, formulado como problema de inequação variacional na seção II.1.1.1. Para esse caso a condição de simetria se dá quando tanto o inverso das funções de oferta e demanda, como as funções de custos são separáveis por produto. Assim o problema de minimização equivalente é:

$$\begin{aligned} \text{Min } F(s, x, d) = & \sum_t \sum_p \int_0^{s_i^p} \pi_i^p(\alpha) d\alpha_i^p + \sum_a \sum_p \int_0^{x_a^p} c_a^p(\beta) d\beta_a^p \\ & - \sum_j \sum_p \int_0^{d_j^p} \pi_j^p(\gamma) d\gamma_j^p \end{aligned} \quad (\text{II.58})$$

s. a (II.2b), (II.2c), (II.2d), (II.2e).

### II.3.2 PROBLEMA PADRÃO DE EQUILÍBRIO ESPACIAL DE PREÇOS.

Para esse problema, formulado como inequação variacional na expressão (II.18), a condição de simetria também se dá para funções inverso da demanda, inverso da oferta, e custos separáveis, dando origem ao problema convexo:

$$\begin{aligned} \text{Min } F(s, t, d) = & \sum_t \int_0^{a_i} \pi_i(\alpha) d\alpha + \sum_t \sum_p \int_0^{t_{ij}} c_{ij}(\beta) d\beta \\ & - \sum_j \int_0^{d_j} \pi_j(\alpha) d\alpha \end{aligned} \quad (\text{II.59})$$

s. a (II.15b) e (II.15c)

Quando as funções de preços de oferta e demanda e as funções de custos são lineares o problema (II.59) mediante um desenvolvimento analítico, se transforma no problema de transporte clássico (TAHA, 1982; BAZARAA, 1979), razão pela qual o SSPEP - simétrico também se denomina Problema de Transporte Generalizado, tal como indicado no item II.1.1.

### II.3.3 GSPEP - MULTIMODAL - MULTIPRODUTO.

A formulação mediante um problema de inequação variacional para esse caso é apresentada nas equações (II.23) a (II.26) e o problema simétrico é:

$$\begin{aligned} \text{Min } F(s, x_A, x_T, d) = & \sum_t \sum_p \int_0^{s_t^p} \pi_t^p(\alpha) d\alpha^p + \sum_a \sum_p \int_0^{x_a^p} c_a^p(\beta) d\beta^p \\ & + \sum_t \sum_p \int_0^{x_t^p} c_t^p(\beta) d\beta^p - \sum_j \sum_p \int_0^{d_j^p} \pi_j^p(\gamma) d\gamma^p \end{aligned} \quad (\text{II.60})$$

s. a (II.19b), (II.19c), (II.19d), (II.19e) e (II.19f).

### II.3.4 PROBLEMA DE EQUILÍBRIO DE TRÁFEGO.

Para esse problema a situação de Jacobiano simétrico se apresenta quando o custo de viagem do usuário para cada modo, está representado por uma função que depende somente do fluxo no arco correspondente  $x_a^p$ , e portanto o problema equivalente é:

$$\text{Minimize } F(x) = \sum_p \sum_a \int_0^{x_a^p} c_a^p(x) dx \quad (\text{II.61})$$

s. a

$x$  satisfaz (II.29b), (II.29c) e (II.29d)

O problema anterior tem sido amplamente estudado através de uma serie de trabalhos durante as últimas décadas (AASHTIANI e MAGNANTI ,1981; DAFERMOS 1971; FLORIAN, 1971, etc.) sendo primeiramente formulado por BECKMAN et alii (1956).

## CAPÍTULO III.

## MÉTODOS DE SOLUÇÃO PARA PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO.

No capítulo anterior foram formulados problemas de equilíbrio de preços e tráfego nas suas diversas modalidades e características, isto é, nos casos gerais, como inequações variacionais e complementaridade não linear ou em casos particulares como problemas de programação matemática em que o Jacobiano do mapping  $g(x)$  é simétrico. Também foram analisados dois tipos de formulação, um em que as equações de conservação de fluxo são colocadas da forma arco - caminho, e outra em que são colocadas como sendo de tipo nó-arco.

Esse capítulo apresenta os diversos métodos que tem sido desenvolvidos para obter uma solução ao problema de equilíbrio formulado no capítulo anterior, considerando separadamente cada situação, isto é, para o problema formulado como inequações variacionais (seção III.1), para o problema formulado como complementaridade não linear (seção III.2) e para a formulação correspondente ao caso simétrico (seção III.3).

## III.1 MÉTODOS PARA INEQUAÇÕES VARIACIONAIS.

Nessa seção são estudados os métodos para resolver os problemas de equilíbrio formulados no capítulo anterior (preços e tráfego), quando colocados como uma inequação variacional da forma:

$$\text{IV}(g, \Omega) : \text{Determinar } x^* \in \Omega, \text{ tal que :} \\ g(x^*)^T (x - x^*) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega. \quad (\text{III.1})$$

sendo  $g$  um mapping monótono  $g : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $e \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  um conjunto compacto (fechado e limitado).

## III.1.1 MÉTODOS DE LINEARIZAÇÃO.

Essa família de métodos atua iterativamente,

resolvendo em cada etapa um subproblema, também uma inequação variacional, que provém de aproximar o mapping  $g(x)$  através de uma linearização em torno de um ponto  $x^k$  e definido como:

$$g^k(x) = g(x^k) + J(x^k)(x - x^k) \quad (\text{III.2})$$

onde  $J(x)$  é uma matriz quadrada de ordem  $n$ . Assim, o subproblema pode ser escrito como (PANG e CHAN, 1982) :

$$\text{IVC}g^k, \Omega : \text{Determinar } x^{k+1} \in \Omega, \text{ tal que :} \\ g^k(x^{k+1})^T(x - x^{k+1}) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega. \quad (\text{III.3})$$

De maneira que o algoritmo geral pode ser simplesmente formulado como resolvendo uma seqüência de subproblemas, tal como formalizado no algoritmo (III.A).

#### ALGORITMO III.A.

Início

Escolha  $x^0 \in \Omega$ ,  $\varepsilon$  (precisão desejada)

$k \leftarrow 0$ ;

Repetir

Resolver  $\text{IVC}g^k, \Omega$ ; ( $\Rightarrow x^{k+1}$ )

$k \leftarrow k+1$ ;

Até  $\|x^k - x^{k-1}\| \leq \varepsilon$ ;

fim.

Os diferentes métodos da família surgem a partir das diversas características que a matriz  $J(x)$  pode assumir, assim tem-se:

#### a) Método de Newton.

Para esse caso o mapping  $g(x)$  deve ser diferenciável e  $J(x^k) = \nabla g(x^k)$ , que representa o Jacobiano de  $g(x)$  avaliado no ponto  $x^k$  (EAVES, 1978; EAVES e SAIGAL, 1972; DRISSI-KAITOUNI e FLORIAN, 1987; DRISSI-KAITOUNI, 1988).



## b) Método Quase - Newton.

Nesse caso a matriz  $J(x^k)$  é uma aproximação do Jacobiano (JOSEPHY, 1979).

## c) Método de relaxações sucessivas (SOR).

Para esse caso, a matriz  $J(x^k) = L(x^k)$  ou bem  $U(x^k) + D(x^k)/\omega^*$ , onde  $\omega^*$  é o parâmetro de relaxação compreendido entre 0 e 2 e,  $D(x^k)$ ,  $L(x^k)$  e  $U(x^k)$  são matrizes formadas a partir do Jacobiano considerando a parte diagonal, a parte estritamente triangular inferior e a parte estritamente triangular superior, respectivamente (CORTEGA e RHEINBOLDT, 1970).

## d) Método de Jacobi.

O método considera  $J(x^k) = D(x^k)$ , sendo  $D(x^k)$  a matriz composta pela parte diagonal do Jacobiano (DRISSI-KAITOUNI e FLORIAN, 1987; DRISSI-KAITOUNI, 1988).

## e) Método de Projeção.

A matriz  $J(x^k) = G$  é uma matriz simétrica constante e definida positiva (DAFERMOS, 1980 e 1983).

Para os dois últimos casos (d,e) pode -se demonstrar que existe um problema quadrático equivalente com  $IV(g^k, \Omega)$  que se pode escrever :

$$\text{Minimizar } (g(x^k) - J(x^k)x^k)^T x + .5x^T J(x^k)x \quad (\text{III.4a}) \\ x \in \Omega$$

Portanto nesses casos o algoritmo geral se traduz em resolver uma seqüência de problemas quadráticos (Alg.III.B).

O método de projeção recebe esse nome porque a solução do subproblema  $IV(g^k, \Omega)$ , também pode ser identificada como a projeção do ponto  $x^k - G^{-1}g(x^k)$  sobre o conjunto  $\Omega$ , proporcionando o ponto  $x^{k+1}$ . Tal projeção corresponde com a solução do seguinte subproblema (BERTSEKAS e GAFNI, 1982) :

$$\text{Minimizar } \|x^k - G^{-1}g(x^k) - y\|_G \quad (\text{III.5}) \\ y \in \Omega$$

com  $\| \cdot \|_G$  definida por:

$$\|x\|_G = (x^T G x)^{1/2} \quad (\text{III.6})$$

É comum encontrar na literatura da área a notação  $P_\Omega^G(z)$  para identificar a solução de tal problema, ou a projeção do ponto  $z$  no espaço  $\Omega$ , referente à norma  $G$  (GLOWINSKI et alii., 1976).

Resultados numéricos para esses dois métodos, podem ser encontrados, além dos estudos já mencionados, nos trabalhos de NAGURNEY (1984,1986,1987) que apresenta uma série de resultados comparativos e HARKER (1988) que propõe uma técnica de aceleração.

Os resultados teóricos de convergência dos métodos de linearização são apresentados no estudo de PANG e CHAN (1982).

#### ALGORITMO III.B.

Início

Escolha  $x^0 \in \Omega$ ,  $\varepsilon$  (precisão desejada)

$k \leftarrow 0$ ;

Repetir

Resolver :

Minimizar  $(g(x^k) - J(x^k)x^k)^T x + .5x^T J(x^k)x$   
 $x \in \Omega$

Com solução  $x^{**}$ ;

$k \leftarrow k+1$ ;

$x^k \leftarrow x^{**}$ ;

Até  $\| x^k - x^{k-1} \| \leq \varepsilon$ ;

fim.

#### III.1.2 MÉTODOS NÃO LINEARES.

O mais importante método desse grupo é o método de Jacobi não linear, conhecido também como método de Diagonalização ou método de Relaxação. Análogamente aos métodos lineares, esse método também gera um subproblema que

é uma inequação variacional, mas, nesse caso sendo não linear. A vantagem da geração de tal subproblema é obtida mediante a fixação de variáveis de tal modo que o subproblema tenha Jacobiano simétrico e portanto um subproblema de programação matemática equivalente. Tal fixação é dada por:

$$g^k(x, x^k) = ( g_1^k(x_1, x_2^k, \dots, x_n^k), g_2^k(x_1^k, x_2, \dots, x_n^k), \dots, \dots, g_n^k(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n) )^T \quad (\text{III.7})$$

Esse fato permite escrever o Jacobiano como:

$$\nabla g^k(x, x^k) = \text{Diagonal} \left[ \frac{\partial g_1^k(x_1, x^k)}{\partial x_1}, \frac{\partial g_2^k(x_2, x^k)}{\partial x_2}, \dots, \dots, \frac{\partial g_n^k(x_n, x^k)}{\partial x_n} \right] \quad (\text{III.8})$$

De maneira que o subproblema  $IV(g^k, \Omega)$  tem o seguinte subproblema equivalente:

$$\text{Minimizar } \sum_{i=1}^n \int_0^x i g_i^k(s, x^k) ds \quad (\text{III.9a})$$

s.a

$$x \in \Omega \quad (\text{III.9b})$$

Assim o algoritmo geral é aquele formulado na seção anterior (algoritmo III.B) substituindo o subproblema de programação quadrática pelo problema (III.9).

A convergência do algoritmo de diagonalização, também é apresentada no trabalho de PANG e CHAN (1982), sendo também independentemente desenvolvida por FLORIAN e SPIESS (1982). Ambos estudos demonstram taxa linear de convergência:

$$\| x^k - x^* \|_D \leq r^k \| x^0 - x^* \| \leq r^k \delta \quad (\text{III.10})$$

sendo  $\| \cdot \|_D$  a norma gerada pela matriz diagonal, composta dos elementos diagonais do Jacobiano de  $g(x)$  e  $r$  um número

positivo menor que uma unidade. Certamente, na medida que  $k$  tende para  $\infty$ ,  $\|x^k - x^*\|$  tende para zero.

HARKER (1988) propõe um método para acelerar a convergência do algoritmo, baseado numa generalização do método PARTAN, corrigindo o fato de que  $x^k$ , geralmente, oscila ao redor do ponto  $x^*$ .

### III.1.3 OUTROS MÉTODOS.

Existe um outro método que não obedece a estrutura dos apresentados em seções III.1.1 e III.1.2. Proposto nos estudos de DUSSAULT e MARCOTTE (1985), MARCOTTE e GUELAT (1985, 1988), o método estende a idéia da função "gap" definida originalmente para problemas de programação convexa (HEARN, 1981), ao caso de inequações variacionais, com Jacobiano não necessariamente simétrico.

Assim a função "gap" estendida ao problema  $IV(g, \Omega)$  definido na equação (III.1), assume a forma:

$$G(x) = \max_{y \in \Omega} g(x)^T(x - y) \quad (\text{III.11})$$

com  $G(x) = 0, \forall x \in S \subset \Omega$ , sendo  $S$  o conjunto das soluções do problema  $IV(g, \Omega)$ . Por outro lado  $G(x) > 0 \forall x \notin S$ .

Utilizando esses conceitos o problema (III.1) pode ser formulado como um problema não convexo:

$$\text{Minimizar } G(x), \text{ s.a. } x \in \Omega \quad (\text{III.12})$$

para o qual existe um algoritmo sublinearmente convergente formulado por MARCOTTE (1985). Contudo as, seguintes suposições devem ser tidas em conta :

- i)  $\Omega = \{x ; Ax \leq b\}$ , é um conjunto não vazio e compacto,  $A$  é uma matriz de  $m$  por  $n$  ( $m \leq n$ ),  $b \in \mathbb{R}^m$ .
- ii)  $g(x)$  é continuamente diferenciável e monótono em  $\Omega$ .

Com essas suposições a função gap pode se transformar em outra equivalente:

$$G(x) = g(x)^T x + \underset{\lambda}{\text{Mínimo}} b^T \lambda \quad (\text{III.13a})$$

s. a

$$g(x) + A^T \lambda = 0 \quad (\text{III.13b})$$

$$\lambda \geq 0 \quad (\text{III.13c})$$

sendo  $\lambda$  a variável dual associada ao poliedro não vazio e compacto  $\Omega$ .

As equações(III.13) dão origem ao seguinte problema equivalente:

$$\underset{x \in \Omega, \lambda \geq 0}{\text{Minimizar}} h(x, \lambda) = g(x)^T x + b^T \lambda \quad (\text{III.14a})$$

s. a

$$g(x) + A^T \lambda = 0 \quad (\text{III.14b})$$

O algoritmo proposto é um que resolve o problema anterior mediante um método de aproximações lineares sucessivas tanto da função objetivo como, do conjunto de restrições, assim em uma etapa  $k$  o subproblema linear é:

$$\text{Minimizar } (g(x^k) + g'(x^k)x^k)^T y + b^T \mu \quad (\text{III.15a})$$

$$g(x^k) + g'(x^k)^T (y - x^k) + A^T \mu = 0 \quad (\text{III.15b})$$

$$y \in \Omega, \mu \geq 0 \quad (\text{III.15c})$$

cuja solução é denotada por  $(y^k, \mu^k)$ . Uma busca é efetuada para determinar o tamanho do passo  $\alpha \in [0,1]$  para atualizar a variável  $x$ , enquanto a variável  $\lambda$  é atualizada mediante solução do subproblema:

$$\underset{\mu}{\text{argmin}} b^T \mu \quad (\text{III.16a})$$

s. a

$$g(x) + A^T \mu = 0 \quad (\text{III.16b})$$

$$\mu \geq 0 \quad (\text{III.16c})$$

O procedimento é formalmente colocado no algoritmo III.C. O algoritmo apresenta convergência quadrática, isto é :

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \frac{\|x^{k+1} - x^*\|}{\|x^k - x^*\|^2} < \infty \quad (\text{III.17})$$

O algoritmo quando aplicado ao problema de equilíbrio de tráfego em redes de grande porte apresenta um rendimento comparável ao método de diagonalização anteriormente explicado.

#### ALGORITMO III. C.

Início

Escolha  $x^0 \in \Omega$ ;

Resolver:  $\text{Argmin } b^T \mu$  s.a  $g(x^0) + A^T \mu = 0, \mu \geq 0$ ;

$k \leftarrow 0$ ;

Enquanto não ótimo, faça

Resolver problema (III.15);  $\{\Rightarrow (y^k, \mu^k)\}$

Se  $G(y^k) \leq 0.5G(x^k)$  faça  $\alpha^* \leftarrow 1$ ;

Senão  $\alpha^* \in \text{argmin } G(x^k + \alpha(y^k - x^k)), \alpha \in [0,1]$ ;

$x^{k+1} \leftarrow x^k + \alpha^*(y^k - x^k)$ ;

$\mu^{k+1} \leftarrow \text{Argmin } b^T \mu$  s.a  $g(x^{k+1}) + A^T \mu = 0, \mu \geq 0$ ;

$k \leftarrow k + 1$ ;

Fim enquanto;

Fim.

### III.2 MÉTODOS PARA O PROBLEMA DE COMPLEMENTARIDADE NÃO LINEAR.

Nesta seção são estudados os métodos propostos na literatura para resolver o problema de complementaridade não linear definido por:

$$\text{Determinar } x ; g(x)^T x = 0, g(x) \geq 0, x \geq 0. \quad (\text{III.18})$$

onde  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , é um mapping monótono.

#### III.2.1 MÉTODO DE LINEARIZAÇÕES SUCESSIVAS.

Esse método consiste em resolver o problema (III.18),

determinando as soluções de uma seqüência de problemas de complementaridade linear que são o resultado de efetuar uma linearização do mapping  $g$ , em torno de um ponto  $x^k$ . De maneira que em cada ponto se tem o problema linear (FRIESZ et alii, 1983) :

$$(g(x^k) + g'(x^k)(x - x^k))^T x = 0 \quad (\text{III.19a})$$

$$g(x^k) + g'(x^k)(x - x^k) \geq 0 \quad (\text{III.19b})$$

$$x \geq 0 \quad (\text{III.19c})$$

Tal problema é de complementaridade linear (PCL), que tem algoritmos eficientes para ser resolvido, como é o caso do algoritmo de Lemke (MURTY, 1988), para o qual existem pacotes que permitem resolver problemas de grande porte com razoável esforço computacional. Estudos recentes (KOJIMA e YOSHISE, 1987), apresentam novas técnicas para resolver o PCL em tempo polinomial, baseadas em métodos de pontos interiores utilizados na resolução de problemas de programação linear. Contudo, para esse tipo de algoritmos não existe até agora nenhuma implementação tão eficiente quanto aquelas existentes para o algoritmo de Lemke.

A convergência do algoritmo seqüencial foi demonstrada por FRIESZ et alii (1983), para o problema de equilíbrio de preços. O esquema do método é dado no algoritmo III.D.

#### ALGORITMO III.D.

Início

Escolha  $x^0, \varepsilon$ ;

$k \leftarrow 0$ ;

Repetir

Formar em  $x^k$  o problema (III.19);

Determinar a solução  $x^{k+1}$  do problema (III.19);

$k \leftarrow k + 1$ ;

Até  $\|x^{k+1} - x^k\| < \varepsilon$

fim.

## III.2.2 MÉTODO DE DIMENSÃO VARIÁVEL.

Esse método é baseado no fato em que se existe um par  $(g_j(x), x_j)$  não negativo e tal que:

$$g_j(x)x_j = 0, \quad \forall j$$

então  $x$  é uma solução para o problema de complementaridade. Isto permite separar um conjunto de variáveis que são diferentes de zero e que se denota por  $J = \{ j ; x_j \neq 0 \}$ . Assim, para manter a complementaridade de cada par  $(g_j(x), x_j)$ , isto é, com o seu produto nulo, é necessário que  $g_j(x) = 0, \forall j \in J$ , o que pode ser garantido resolvendo o sistema:

$$g_j(x) = 0 \quad \forall j \in J \quad (\text{III.20})$$

Notar que  $g_j(x)x_j = 0 \forall j \notin J$ , isto porque  $x_j = 0$  para todo  $j \notin J$ . Inicialmente o conjunto  $J$  é determinado para algum ponto inicial  $x^0$ . Nas etapas posteriores  $J$  deve ser atualizado dado que podem existir  $g_j(x) < 0$  para  $j$  que não pertencem ao conjunto  $J$ , ou também, a própria solução do sistema pode proporcionar valores negativos para as variáveis  $x_j$ ,  $g_j(x)$  ou ambos para algum  $j \in J$ . O procedimento de atualização considera uma revisão de todos os índices após a resolução do sistema até encontrar o primeiro caso de negatividade, seja em  $x$  ou em  $g(x)$ . No caso de ser em  $g(x)$  em um determinado índice  $t$ , então esse é incluído no conjunto  $J$ , isto quer dizer que  $g_t(x)$  será nulo após a resolução do sistema. No caso de ser a variável  $x$  a que apresenta a componente negativa (componente  $t$ ), então  $x_t$  é obrigada a ser zero retirando  $t$  do conjunto  $J$  e retirando por tanto  $g_t(x)$  do sistema. O procedimento de atualização continua até que nenhum índice possa ser encontrado tendo  $x_t$  ou  $g_t(x)$  negativos. Tais idéias se encontram formalizadas no algoritmo III.E.



## ALGORITMO III.E.

Início

Escolha  $x^0$ ;Determine  $J^0$ ; $k \leftarrow 0$ ;

Repetir

Resolver  $g(x) = 0, \forall j \in J^k; \quad (\Rightarrow x^*)$ Formar  $x^{k+1}$  substituindo em  $x^k$  os  $x_j^*$   $\forall j \in J^k$ ;Avaliar  $g_j(x^{k+1}) \quad \forall j \in J^k$ ;Procurar primeiro índice  $t$  tal que  $g_t(x^{k+1}) < 0$ ou  $x_t^{k+1} < 0$ ;Se  $g_t(x^{k+1}) < 0$ , então  $J^{k+1} = J^k \cup \{t\}$ ;Se  $x_t^{k+1} < 0$  então $x_t^{k+1} \leftarrow 0$ ; $J^{k+1} \leftarrow J^k - \{t\}$ 

Fim se;

 $k \leftarrow k + 1$ ;Até  $J^{k-1} = \emptyset$ ;

Fim.

O algoritmo III.E foi desenvolvido inicialmente para problemas de complementaridade linear (MURTY, 1974), e estendido posteriormente para o problema de complementaridade não linear por HABETLER e KOSTREVA (1978), sendo especializado para o problema geral de equilíbrio espacial de preços por TOBIN (1988), reportando uma série de resultados numéricos.

## III.3 MÉTODOS PARA O PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA.

Nesta seção são abordados os métodos usualmente utilizados na resolução de alguns dos problemas antes estudados no caso particular do Jacobiano do mapping  $g(x)$  (da formulação do problema como inequação variacional), ser simétrico. Especificamente são analisados o SSPEP, o GSPEP e o TEP

### III.3.1 PROBLEMA PADRÃO DE EQUILÍBRIO ESPACIAL DE PREÇOS.

O problema formulado no capítulo anterior apresenta o seguinte formato:

$$\begin{aligned} \text{Min } F(s, t, d) = & \sum_i \int_0^{a_i} \pi_i(\alpha) d\alpha + \sum_i \sum_j \int_0^{t_{ij}} c_{ij}(\beta) d\beta \\ & - \sum_j \int_0^{d_j} \pi_j(\gamma) d\gamma \end{aligned} \quad \text{(III.21a)}$$

s. a

$$s_i = \sum_j t_{ij} \quad \forall i; \quad d_j = \sum_i t_{ij} \quad \forall j \quad \text{(III.21b)}$$

$$t_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \quad \text{(III.21c)}$$

Quando as funções de preços da oferta e da demanda e as funções de custos de transporte são contínuas, limitadas, e monótonas e ainda, a função de preços da demanda decrescente enquanto as outras duas crescentes, a função  $F(s, t, d)$  é convexa, sendo portanto as condições de Karush - Kuhn - Tucker necessárias e suficientes.

O problema (III.21) ainda pode ser simplificado, substituindo as restrições de igualdade na função objetivo, gerando o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \text{Min } F(s, t, d) = & \sum_i \int_0^{\sum_j t_{ij}} \pi_i(\alpha) d\alpha + \sum_i \sum_j \int_0^{t_{ij}} c_{ij}(\beta) d\beta \\ & - \sum_j \int_0^{\sum_i t_{ij}} \pi_j(\gamma) d\gamma \end{aligned} \quad \text{(III.22a)}$$

s. a

$$t_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \quad \text{(III.22b)}$$

Esse problema obedece ao formato geral : Minimizar  $F(x)$  s.a  $x \geq 0$ , para o qual a programação não linear proporciona uma serie de algoritmos (MINOUX, 1986; FLETCHER, 1980; LUENBERGER, 1984, etc.). Vários estudos tem sido desenvolvidos, estabelecendo comparações numéricas para esses diversos algoritmos, são esses:

- \* Frank & Wolfe (ZUBIETA, 1986; FRIESZ, HARKER e TOBIN, 1984; NAGURNEY, 1987).
- \* Gradiente Reduzido (ZUBIETA, 1986).
- \* Simplex Convexo (ZUBIETA, 1986).
- \* Gauss - Seidel - Newton (FERLAND, ZUBIETA e SPIESS, 1986)
- \* MINOS -Lagrangiano Aumentado (ZUBIETA, 1986).

Para o método de Frank & Wolfe, determinar uma direção de descida, requiere-se resolver um problema linear. Supondo que se tem uma solução viável inicial  $t_{ij}^k$ , para todo par  $i, j$ . Tal problema pode ser escrito:

$$\begin{aligned} \text{Min } F_L(t) = & \sum_i \pi_i (\sum_j t_{ij}^k) \sum_j t_{ij} + \sum_i \sum_j c_{ij} (t_{ij}^k) t_{ij} \\ & - \sum_j \pi_j (\sum_i t_{ij}^k) \sum_i t_{ij} \end{aligned} \quad (\text{III.22a})$$

$$\text{s.a} \quad t_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \quad (\text{III.22b})$$

O problema tem uma solução trivial dada por:

$$\begin{aligned} t_{ij} &= t_{ij}^m \quad \text{se} \quad \sum_i \pi_i (\sum_j t_{ij}^k) + c_{ij} (t_{ij}^k) - \sum_i \pi_i (\sum_j t_{ij}^k) < 0 \\ t_{ij} &= 0 \quad \text{em caso contrário,} \end{aligned}$$

sendo  $t_{ij}^m$  um limite superior ao envio de produtos no arco  $(i, j)$ . De maneira que direção de descida na etapa  $k$  é dada por:

$$p_{ij}^k = t_{ij} - t_{ij}^k \quad (\text{III.23})$$

e o comprimento de passo  $\lambda^*$ , é determinado resolvendo o problema unidimensional:

$$\begin{aligned} \text{Min } F(\lambda) = \sum_i \int_0^j \pi_i(\alpha) d\alpha + \sum_i \sum_j \int_0^{t_{ij}^k + \lambda p_{ij}^k} c_{ij}(\beta) d\beta \\ - \sum_j \int_0^{t_{ij}^k + \lambda p_{ij}^k} \pi_j(\gamma) d\gamma \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

O novo valor para  $t_{ij}$  é definido por:

$$t_{ij}^{k+1} = t_{ij}^k + \lambda^* p_{ij}^k \quad (\text{III.25})$$

O processo se repete até que algum critério de parada seja satisfeito.

### III.3.2 PROBLEMA GERAL DE EQUILIBRIO ESPACIAL DE PREÇOS (GSPEP).

Esse problema (formulado no capítulo anterior) é usualmente apresentado com as restrições de oferta e demanda de produto de forma compacta. Considere-se o GSPEP para um produto com o fim de facilitar a compreensão do método a ser explicado podendo contudo, ser facilmente estendido para o caso multimodal. Analogamente ao problema anterior (SSPEP), a função objetivo é convexa quando as funções de preços e custos são bem comportadas, isto é, contínuas limitadas, monótonas, crescentes a de preços da oferta e custos e decrescentes a de preços de demanda. A formulação é:

$$\begin{aligned} \text{Min } F(s, x, d) = \sum_i \int_0^{a_i} \pi_i(\alpha) d\alpha + \sum_i \sum_j \int_0^{x_{ij}} c_{ij}(\beta) d\beta \\ - \sum_j \int_0^{d_j} \pi_j(\gamma) d\gamma \end{aligned} \quad (\text{III.26a})$$

s. a

$$s_i - d_i + \sum_j \sum_{k \in K_{ij}} h_k - \sum_t \sum_{k \in K_{ij}} h_k = 0, \quad \forall i \in N \quad (\text{III.26b})$$

$$h_k \geq 0, \quad \forall k \in K_{ij}; \quad s, d \geq 0 \quad \forall j \in N \quad (\text{III.26c})$$

$$x_a = \sum_t \sum_j \sum_{k \in K_{ij}} \delta_{ak} h_k, \quad \forall a \quad (\text{III.26d})$$

Notar que a restrição (III.26b) é equivalente às restrições (II.2b) e (II.2c), quando se considera um produto só. O problema (III.26) é um, com função objetivo não linear com restrições de fluxo na rede, para o qual vários estudos apresentam resultados numéricos e analíticos. Esses são:

- \* Frank & Wolfe (FRIESZ, HARKER e TOBIN, 1984).
- \* MINOS - Gradiente Reduzido (TOBIN e FRIESZ, 1983; ROWSE, 1984)
- \* Newton (DRISSI - KAITOUNI e FLORIAN, 1987).

Para o caso particular do método de Frank & Wolfe, o problema linear que determina a direção de descida numa etapa 1 é:

$$\begin{aligned} \text{Min } F_L(s, h, d) = & \sum_t \pi_t (s_t^l) s_t + \sum_t \sum_j \sum_{k \in K_{ij}} c_k (h^l) h_k \\ & - \sum_j \pi_j (d_j^l) d_j \end{aligned} \quad (\text{III.27})$$

s. a (III.26b) e (III.26c).

Para cada par  $i, j$  pode se calcular o caminho mínimo  $\tau_{ij}^l$  e o custo associado  $c_k(\tau_{ij}^l) = c_{ij}^{l*} \leq c_k(h^l) \quad \forall k \in K_{ij}$ . O resultado de minimizar  $F(s, h, d)$  permanece inalterado ao substituir  $c_{ij}^{l*}$  por  $c_k(h^l)$ . Portanto o problema linear também pode ser escrito equivalentemente como:

$$\begin{aligned} \text{Min } F_L(s, h, d) = & \sum_i \pi_i (s_i^l) s_i + \sum_i \sum_j c_{ij}^{l*} \sum_{k \in K_{ij}} h_k \\ & - \sum_j \pi_j (d_j^l) d_j \end{aligned} \quad (\text{III.28})$$

s. a (III.26b) e (III.26c)

Definindo a nova variável:

$$T_{ij} = \sum_{k \in K_{ij}} h_k \quad \forall i, j \quad (\text{III.29})$$

O problema se transforma em:

$$\text{Min } F_L(s, h, d) = \sum_i \pi_i (s_i^l) s_i + \sum_i \sum_j c_{ij}^{l*} T_{ij} - \sum_j \pi_j (d_j^l) d_j \quad \dots (\text{III.30a})$$

s. a

$$s_i - d_i + \sum_j T_{ij} - \sum_j T_{ji} = 0, \quad \forall i \in N \quad (\text{III.30b})$$

$$s, d, T \geq 0 \quad (\text{III.30c})$$

Por outro lado, tem se que:

$$s_i = \sum_j T_{ij} \quad e \quad d_i = \sum_j T_{ji} = 0, \quad \forall i \in N \quad (\text{III.31})$$

O problema finalmente pode ser escrito como:

$$\text{Min } F_L(T) = \sum_i \sum_j \left[ \pi_i (s_i^l) + c_{ij}^{l*} - \pi_j (d_j^l) \right] T_{ij} \quad (\text{III.32a})$$

s. a

$$\sum_i T_{ij} \leq D_j, \quad \forall j \quad (\text{III.32b})$$

$$T_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j \quad (\text{III.32c})$$

Esse último problema tem uma solução analítica que pode ser obtida por simples inspeção.

$$T_{ij} = \begin{cases} D_j & \text{se } \pi_i(s_i^l) + c_{ij}^{l*} - \pi_j(d_j^l) < 0 \\ 0 & \text{em caso contrário.} \end{cases} \quad (\text{III.33})$$

sendo  $D_j$  a quantidade máxima de produto que pode ser enviada entre os nós  $i$  e  $j$ .

Com  $T_{ij}$  pode - se determinar cada fluxo no arco de finindo o conjunto  $W_a = \{(i,j); a \in T_{ij}\}$ , que identifica todos os pares  $(i,j)$  que utilizam o arco  $a$  no caminho mínimo, de maneira que:

$$x_a = \sum_{(i,j) \in W_a} T_{ij} \quad \forall a. \quad (\text{III.34})$$

A direção de descida do método de Frank & Wolfe é determinada por:

$$p^l = (s, x, d) - (s^l, x^l, d^l) \quad (\text{III.35})$$

e o comprimento de passo  $\lambda^*$ , determinado por:

$$\lambda^* = \underset{\lambda \in [0, 1]}{\operatorname{argmin}} F(x^l + \lambda p^l) \quad (\text{III.36})$$

e o novo fluxo pode ser obtido a partir de:

$$x^{l+1} = x^l + \lambda^* p^l \quad (\text{III.37})$$

## CAPÍTULO IV.

## UM MÉTODO PARA INEQUAÇÕES VARIACIONAIS.

## INTRODUÇÃO.

Existem dois problemas que nos últimos anos tem despertado o interesse de inúmeros centros de pesquisa, recebendo em muitos casos um tratamento comum. São esses os problemas de Equilíbrio de Tráfego e o problema de Equilíbrio de Preços em suas diversas modalidades ver por exemplo os estudos de AASHTIANI e MAGNANTI (1981), BECKMANN et alii (1956); FERNANDEZ et alii (1983); FISK e NGUYEN (1982); FRIESZ et alii (1983), etc.). Embora, ambos sejam de natureza totalmente diferente, dado que o primeiro se relaciona com fluxo de veículos e o segundo com fluxo de produtos, apresentam uma série de características coincidentes, tal como é apresentado no capítulo II deste estudo. A característica mais importante comum a ambos, é que quando formulados, levam ao mesmo tipo de problema matemático, isto é, um problema de complementaridade não linear, ou um problema de inequações variacionais denotado por  $IV(g, \Omega)$  ou, simplesmente, um problema de programação matemática num caso particular.

Esse capítulo em particular, estuda principalmente o caso geral de jacobiano assimétrico com o problema formulado como inequação variacional.

Um dos métodos que tem merecido uma grande quantidade de estudos, por parte de pesquisadores da área, para resolver o problema  $IV(g, \Omega)$  é o método de linearização em suas diversas variantes apresentado na seção II.1.1. Tal método é uma generalização do método de Newton e para resolver sistemas não lineares de equações (DIEMIDOVICH, 1987), que basicamente consiste em resolver uma série de problemas lineares, que resultam da substituição de cada uma das equações pela sua linearização em cada ponto. A solução do sistema linear proporciona um novo ponto, sobre o qual, é efetuada uma nova linearização, e assim por diante, até atingir a



solução do sistema. No quadro IV.1 o processo iterativo é resumido para : sistemas não lineares (A), sendo identificando em cada ponto  $x^k$ , um subproblema linear que para este caso, tem uma solução analítica no ponto  $x^{k+1}$  obtido em cada etapa calculando a matriz inversa do Jacobiano  $J$ . Para inequações variacionais a linearização é similar, de maneira que em cada ponto  $x^k$  é gerado um novo subproblema, também de inequação variacional, mas, que tem um problema de programação matemática equivalente, especificamente, no caso de  $\Omega$  ser um conjunto definido por restrições lineares, um problema de programação quadrática para qualquer matriz  $H$  simétrica e, ao, menos semidefinida positiva .

No terceiro caso do quadro IV.1, (C) é apresentado o resumo do processo iterativo do método de Newton para programação matemática, isto é, minimização de uma função objetivo não linear convexa, sobre um conjunto convexo. Em cada ponto é efetuada uma aproximação quadrática da função objetivo (FLETCHER, 1981).

Nos três casos existem duas características similares, a primeira dela é a linearização do mapping correspondente e a segunda é a de atingir a solução mediante a transformação de um problema difícil numa seqüência de outros mais "fáceis", utilizando aqui este termo, para identificar um conjunto de problemas para os quais existem diversos algoritmos de comprovada eficiência numérica. A relação entre os casos A e B tem sido amplamente explorada não somente para o método de Newton, mas, também para outros algoritmos conhecidos na solução de sistemas não lineares (AHN, 1982; JOSEPHY, 1979).

Entretanto existem poucos estudos tentando estabelecer um paralelo entre os casos B e C, que eventualmente poderiam permitir o uso de algoritmos da programação não linear. De antemão poderiam ser esperados resultados promissores se fizéssemos o seguinte raciocínio: - Um problema de programação não linear definido por, Minimizar  $f(x)$  s.a  $x \in \Omega$ ,  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  convexa

CA) SIST. DE EQ.	(CB) IV(G, Ω)	(CC) PROG. MAT.
$F(x) = 0$	$\text{Det. } x^* \in \Omega ;$ $g(x^*)^T (x - x^*) \geq 0$ $\forall x \in \Omega$	Minimizar $f(x)$ s. a $x \in \Omega$
$F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $x \in \mathbb{R}^n$	$g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ $x \in \mathbb{R}^n$	$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}^n$
$x^k :$  $F(x^k) +$ $J(x^k)^T (x - x^k) = 0$	$x^k :$  $\text{Det. } x^{k+1} \in \Omega ;$ $\left[ g(x^k) + H(x^k) \right.$ $\left. (x^{k+1} - x^k) \right]^T (x - x^{k+1})$ $\geq 0$ $\forall x \in \Omega.$	$x^k :$  Minimizar $f(x^k) +$ $\nabla f(x^k)^T (x - x^k) +$ $(x - x^k)^T \nabla^2 f(x^k)$ $(x - x^k)$ s. a $x \in \Omega.$
$x^{k+1} = x^k +$ $J^{-1}(x^k) F(x^k)$	$x^{k+1}$ solução de Minimizar $\left[ g(x^k) + \right.$ $\left. H(x^k) x^k \right]^T (x - x^k) +$ $.5x^T H(x^k) x$ s. a $x \in \Omega$	$x^{k+1}$ é solução do problema quadrá - tico.

Quadro IV.1 Método de Newton.

contínua e diferenciável tem uma condição de otimalidade global definida pela inequação no ponto  $x^* \in \Omega$ :  $\nabla f(x^*)^T (x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$ , sendo  $\Omega$  um conjunto compacto. Isto significa geometricamente que no ponto  $x^*$  todas as direções viáveis formam um ângulo menor que 90 graus com o gradiente, de maneira que os algoritmos de programação não linear determinam a solução da inequação que define tal condição. Ou em outras palavras, algoritmos de programação não linear resolvem implicitamente uma inequação variacional.

Neste estudo pretende - se determinar o paralelo existente entre o problema  $IV(g, \Omega)$  com Jacobiano não necessariamente simétrico e o problema de programação não linear, através de métodos de primeira ordem tal como o método do gradiente projetado, aproveitando a existência de um problema de programação matemática equivalente com o problema de inequações variacionais. Isto leva a propôr uma família de métodos de solução para o caso específico de  $\Omega$  ser um conjunto não vazio formado por restrições lineares, fato que será útil para aplicação na determinação de uma solução para problemas de equilíbrio com Jacobiano não simétrico. Tais métodos resultam numa generalização de métodos conhecidos na programação não linear. Assim, um novo ponto de partida é dado para estabelecer os aspectos teóricos e numéricos que caracterizem essa relação.

Deste modo, o capítulo é organizado em cinco seções; a primeira delas estuda o caso no qual existem somente restrições lineares de igualdade, sendo na segunda considerado um caso mais geral ao incluir também restrições de não negatividade. A generalização para o caso de restrições lineares é apresentada na seção IV.3. Na quarta parte são apresentados resultados numéricos utilizando o método proposto. No fim do capítulo é colocada uma abordagem que mostra como os métodos para problemas de mínimos quadrados podem ser utilizados para este caso.

## IV.1 INEQUAÇÕES VARIACIONAIS COM RESTRIÇÕES DE IGUALDADE.

## IV.1.1 UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA EQUIVALENTE.

Considere-se o problema de inequações variacionais  $IV(g, \Omega)$  definido por :

$$\text{Determinar } x^* \in \Omega \quad g(x^*)^T(x-x^*) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{IV.1})$$

sendo  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  um conjunto não vazio convexo e compacto e  $g$  um mapping monótono  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ . É interessante definir a monotonicidade para um mapping  $g(x)$  (MARCOTTE e GUELAT, 1988), assim  $g(x)$  é:

i) Monótono em  $\Omega$  se

$$(x - y)^T(g(x) - g(y)) \geq 0, \text{ ou} \\ (x - y)^T g'(x)(x - y) \geq 0 \quad \forall x, y \in \Omega$$

ii) Estritamente Monótono em  $\Omega$  se:

$$(x - y)^T(g(x) - g(y)) > 0, \text{ ou} \\ (x - y)^T g'(x)(x - y) > 0 \quad \forall x, y \in \Omega$$

iii) Fortemente Monótono em  $\Omega$  se :

$$(x - y)^T(g(x) - g(y)) \geq \eta \|x - y\|^2, \quad \eta > 0 \text{ ou} \\ (x - y)^T g'(x)(x - y) \geq \eta \|x - y\|^2 \quad \forall x, y \in \Omega$$

As expressões que usam  $g'(x)$  são aplicadas no caso em que o mapping  $g(x)$  é continuamente diferenciável em  $\Omega$ . Notar que no caso do mapping ser um gradiente de alguma função  $f$  os conceitos anteriores correspondem ao caso da função ser convexa, estritamente convexa e fortemente convexa respectivamente. Pode ser demonstrado também que o conjunto solução de  $IV(g, \Omega)$  é compacto e convexo se  $g(x)$  é monótono. Por outro lado se  $\Omega$  é um conjunto compacto o teorema de ponto fixo de Kakutani (KAKUTANI, 1941) garante que ao menos uma solução existe para o problema de inequações variacionais  $IV(g, \Omega)$ .

O problema (IV.1) tem um problema de programação matemática equivalente no caso do Jacobiano do mapping ser simétrico, tal como foi apresentado na capítulo II,

contudo para o caso geral, isto é, quando o Jacobiano não é simétrico tal situação não parece ser evidente para qualquer conjunto  $\Omega$ . Em particular quando  $\Omega$  é definido através de um conjunto de restrições lineares de igualdade, existe um problema de programação matemática equivalente (DRISSI-KAKITOUNI, 1987), que aqui é apresentado mediante o seguinte teorema :

TEOREMA IV.1.

Para o problema IV(g, $\Omega$ ) definido em (IV.1), com  $\Omega$  dado por:  $\Omega = \{x; Ax=b\}$  sendo A uma matriz de ordem m por n e de posto completo, existe um problema de programação matemática equivalente dado por:

$$\text{Minimizar } G(x) = \left[ g(x)^T P g(x) \right]^{1/2} \quad (\text{IV.2a})$$

$$\text{s.a } x \in \Omega \quad (\text{IV.2b})$$

onde P é a matriz de projeção no espaço nulo da matriz A e dada por:

$$P = I - A^T(AA^T)^{-1}A. \quad (\text{IV.2c})$$

E ainda, se  $x^*$  é solução ótima do problema 1, então :

$$\begin{aligned} G(x^*) &= 0 \text{ e} \\ G(x) &\geq 0 \quad \forall x \in \Omega. \end{aligned}$$

Demonstração

Considere-se um subproblema de programação matemática definido por :

$$\Gamma(x) = \text{Min}_d g(x)^T d \quad (\text{IV.3a})$$

s.a

$$Ad = 0 \quad (\text{IV.3b})$$

$$d^T d = 1 \quad (\text{IV.3c})$$

É importante notar que tal problema foi originalmente estabelecido como um subproblema para determinar a direção de descida de métodos de primeira ordem em programação não linear (BAZARAA, 1979; FLETCHER, 1981, etc.) sendo  $g(x)$  o gradiente de alguma função.

O problema (IV.3) tem uma solução analítica determinada a seguir: associam-se variáveis duais  $\alpha$  às restrições (IV.3b) e  $\beta$  à restrição (IV.3c) e se estabelecem às condições de Karush-Kuhn-Tucker num ponto  $(\alpha, d, \beta)$ , de maneira que:

$$g(x) + A^T \alpha + \beta d = 0 \quad \text{(IV.4a)}$$

$$Ad = 0 \quad \text{(IV.4b)}$$

$$d^T d = 0 \quad \text{(IV.4c)}$$

pondo em evidencia  $\alpha$  da equação (IV.4a) :

$$A^T \alpha = -g(x) - \beta d \quad \text{(IV.5)}$$

premultiplicando pela matriz A:

$$AA^T \alpha = -Ag(x) - \beta Ad \quad \text{(IV.6)}$$

dado que  $\text{rank}(A) = m$ , existe  $(AA^T)^{-1}$  e como  $Ad = 0$ , tem-se:

$$\alpha = -(AA^T)^{-1} Ag(x) \quad \text{(IV.7)}$$

substituindo  $\alpha$  na equação (IV.4a) tem-se:

$$g(x) - A^T (AA^T)^{-1} Ag(x) + \beta d = 0 \quad \text{(IV.8)}$$

logo:

$$\beta d = - (I - A^T (AA^T)^{-1} A) g(x) \quad \text{(IV.9)}$$

e denotando por  $P = I - A^T (AA^T)^{-1} A$  :

$$\beta d = -Pg(x) \quad \text{(IV.10)}$$

utilizando a equação 4c, tem - se:

$$(\beta d)^T (\beta d) = \beta^2 d^T d = \beta^2 \quad \text{(IV.11)}$$

substituindo (IV.10) em (IV.11):

$$(-Pg(x))^T(-Pg(x)) = \beta^2 \quad (\text{IV.12})$$

$$\beta = (g(x)^T P^2 g(x))^{1/2} \quad (\text{IV.13})$$

A matriz de projeção  $P$  no espaço nulo da matriz  $A$  tem duas propriedades importantes (BAZARAA, 1979) :

- i) É semi - definida positiva,  $x^T P x \geq 0, \forall x \in \mathbb{E}^n$
- ii) É idempotente  $P = P^2$ ,

de modo que  $\beta^2 = g(x)^T P g(x)$  e :

$$\beta = \sqrt{g(x)^T P^2 g(x)} \quad (\text{IV.14})$$

ou equivalentemente:

$$\beta = \sqrt{(Pg(x))^T (Pg(x))} = \|Pg(x)\| \quad (\text{IV.15})$$

finalmente substituindo (IV.14) em (IV.10) , a solução da equação é:

$$d = - \frac{Pg(x)}{\|Pg(x)\|} = - \frac{Pg(x)}{(g(x)^T P g(x))^{1/2}} \quad (\text{IV.16})$$

e assim :

$$\Gamma(x) = g(x)^T d \quad (\text{IV.17})$$

$$\Gamma(x) = - \frac{g(x)^T P g(x)}{(g(x)^T P g(x))^{1/2}} \quad (\text{IV.18})$$

$$\Gamma(x) = - (g(x)^T P g(x))^{1/2} \quad (\text{IV.19})$$

Define se:  $G(x) = - \Gamma(x) = (g(x)^T P g(x))^{1/2}$ .

Para relacionar o subproblema de direção (IV.3) e o problema IV(g,Ω) é necessário fazer a seguinte análise:

\* Para todo  $x \in \Omega$  com  $g : \Omega \in \mathbb{R}^n$  e  $P$  semi-definida positiva, então  $G(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$ .

\* Se  $x^*$  é solução do problema de inequações variacionais  $IV(g, \Omega)$  então  $G(x^*) \geq 0$ . Agora, por contradição suponha que existe um  $x^o \in \Omega$  tal que :

$$g(x^*)^T (x^o - x^*) > 0$$

e seja  $x' = 2x^* - x^o \in \Omega$  porque :

$$Ax' = 2Ax^* - Ax^o = 2b - b = b,$$

então:

$$\begin{aligned} g(x^*)^T (x' - x^*) &= g(x^*)^T (2x^* - x^o - x^*) = g(x^*)^T (x^* - x^o) = \\ &- g(x^*)^T (x^o - x^*) < 0 \end{aligned}$$

o que contradiz o fato de  $x^*$  ser solução do problema  $IV(g, \Omega)$ . Então  $x^o$  não pode existir e portanto :

$$g(x^*)^T (x - x^*) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad \text{(IV.20)}$$

ou equivalentemente:

$$g(x^*)^T d = 0 \quad \forall d \in \Omega_d \quad \text{(IV.21)}$$

$$\Omega_d = \{d ; Ad = 0\}$$

$$d = x - x^* \quad \forall x \in \Omega,$$

$\Omega_d$  é definido com base em que  $Ax = b$  e  $Ax^* = b$ , logo :

$$Ax - Ax^* = b - b = 0 \Rightarrow A(x - x^*) = 0 \Rightarrow Ad = 0.$$

Substituindo (IV.21) em (IV.17) :

$$\Gamma(x^*) = g(x^*)^T d^* = 0$$



para qualquer que seja o valor de  $d^*$  e em particular para  $d^*$  tal que  $d^{*T}d^* = 1$ . Logo  $\Gamma(x^*) = 0 \Rightarrow G(x^*) = 0$ . Logo se  $G(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$  e  $G(x^*) = 0$  sendo  $x^* \in \Omega$  a solução do  $IV(g, \Omega)$  para estabelecer o problema equivalente

$$\text{Minimizar } G(x) = (g(x)^T P g(x))^{1/2} \quad (IV.22a)$$

s. a

$$x \in \Omega = \{x ; Ax=b\} \quad (IV.22b)$$

■

#### IV.1.2 SOBRE UMA DIREÇÃO DE DESCIDA.

No teorema da seção anterior foi apresentado o subproblema de direção viável que na realidade, não é mais do que o próprio problema de determinar a direção de descida do método de Zoutendijk (BAZARAA, 1979; MINOUX 1986) para resolver um problema convexo da forma:

$$\text{Minimizar } f(x)$$

s. a

$$x \in \Omega$$

sendo  $g(x)$  do problema (IV.3) correspondente com o gradiente da função  $f$  avaliada num ponto  $x^k$  e normalmente denotado por  $\nabla f(x^k)$ . Essa situação identifica um caso particular, o caso simétrico, isto é, o Jacobiano de  $g(x)$  é simétrico. No caso geral em que o jacobiano não é simétrico, tal problema de programação matemática não existe porque a função  $f(x)$  não pode ser explicitada analiticamente.

Geométricamente tal subproblema pode ser interpretado (CROBSON e PACCA, 1986) como a procura de um vetor sobre o espaço nulo de  $A$ , que corresponda como vetor  $-g(x)$  que, no caso simétrico é a direção de máxima descida (Figura IV.1).

A solução de tal problema é o vetor  $d^*$ , equivalente à projeção ortogonal de  $-g(x)$  sobre o espaço nulo da matriz  $A$ , limitado por uma bola unitária que impede que esta projeção proporcione um valor  $-\infty$  para  $g(x^k)^T d$ .

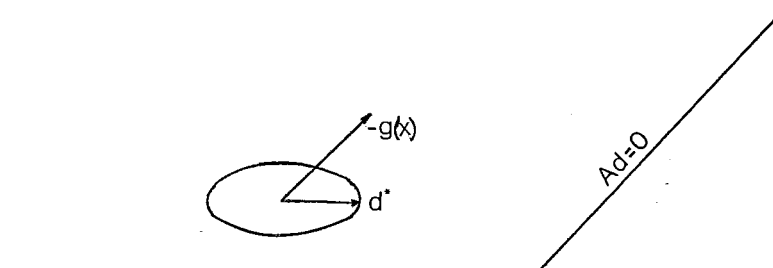


Figura IV.1. Projecção sobre o espaço nulo da matriz A.

Esses fatos sugerem um esquema iterativo para resolver o problema  $IV(g, \Omega)$  com  $\Omega = \{x; Ax = b\}$ , no qual, em cada etapa seja determinada uma direção que indique a trajetória a seguir para atingir a solução.

Deve-se notar que a solução do problema  $IV(g, \Omega)$  deve ser tal que qualquer direção viável deve formar um ângulo menor ou igual a 90 graus com o vetor  $g(x)$ .

Contudo, nada garante que a solução do problema 3 para o caso não simétrico proporciona uma direção que permita aproximar - se da solução do problema  $IV(g, \Omega)$ . O teorema seguinte permite afirmar que  $d^*$  é efetivamente uma direção em tal sentido.

#### Teorema IV.2.

Se  $g(x)$  é um mapping monótono e  $Pg(x)$  não é nulo então  $d^* = -Pg(x)/\|Pg(x)\|$  é uma direção de descida viável para o problema de programação matemática equivalente (IV.22) com  $IV(g, \Omega)$ , onde  $\Omega = \{x; Ax = b\}$  e A é uma matriz de posto completo.

Demonstração:

Seja  $d^*$  solução do subproblema (IV.3) então :

$$d^* = - \frac{Pg(x)}{\|Pg(x)\|} = - \frac{Pg(x)}{(g(x)^T Pg(x))^{1/2}} \quad (\text{IV.16})$$

Por outro lado  $G(x) = (g(x)^T Pg(x))^{1/2}$  de maneira que o gradiente da função em algum ponto  $x$  é dado por:

$$\nabla G(x) = .5(g(x)^T Pg(x))^{-1/2} (g'(x)^T Pg(x) + g(x)^T Pg'(x)) ,$$

onde,  $g'(x)$  é o Jacobiano da função  $g(x)$  não simétrico no caso geral.:

$$\nabla G(x) = \frac{(g'(x)^T Pg(x))^T + g(x)^T Pg'(x)}{2(g(x)^T Pg(x))^{1/2}}$$

$$\nabla G(x) = \frac{g'(x)^T Pg(x)}{(g(x)^T Pg(x))^{1/2}} \quad (\text{IV.23})$$

Logo utilizando a equação (IV.22):

$$\nabla G(x)^T d^* = - \frac{(g'(x)^T Pg(x))^T Pg(x)}{(g(x)^T Pg(x))^{1/2}}$$

$$\nabla G(x)^T d^* = - \frac{(Pg(x))^T g'(x) Pg(x)}{(g(x)^T Pg(x))^{1/2}} \quad (\text{IV.24})$$

Lembrando a definição de mapping monótono  $g: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$  tem-se que ao fazer  $d = x - y$ , então a relação anterior é equivalente com:

$$d^T g'(x) d \geq 0 \quad \forall d \in \Omega_d ,$$

portanto ao substituir (IV.16) em (IV.24) pode - se concluir que:

$$\nabla G(x)^T d^* = - d^{*T} g'(x) d^* < 0 \quad (\text{IV.25})$$

e portanto  $d^*$  é uma direção de descida para o problema (IV.22). ■

Notar que o resultado estabelecido é geral, no sentido que, para uma função de tipo  $G(x)$  para qualquer matriz de projeção,  $d^*$  tal como antes definida é uma direção de descida viável sempre que o produto  $Pg(x)$  seja diferente de zero.

O teorema (IV.2) indica que a partir de um determinado ponto  $x^k \in \Omega$ , pode ser encontrada uma direção que defina uma trajetória que leve até a solução do problema  $IV(g, \Omega)$ , para isso deve ser feita uma análise para determinar até que ponto  $x^{k+1}$ , é necessário caminhar na direção  $d^k$ , o que é abordado em detalhe na seção seguinte.

O seguinte lema, apresenta um problema de programação matemática equivalente a  $IV(g, \Omega)$  que será útil nas análises posteriores.

#### Lema IV.1.

A solução  $x^*$  para o problema  $IV(g, \Omega)$  definido em (IV.1) com  $\Omega$  sendo um conjunto compacto, deve ser solução de um problema de programação linear definido como

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } g(x^*)^T x, \\ & \text{s. a } x \in \Omega. \end{aligned}$$

#### Demonstração:

O  $IV(g, \Omega)$  pode ser colocado equivalentemente:

Determinar  $x^* \in \Omega$ ;  $g(x^*)^T x \geq g(x^*)^T x^*$ ;  $\forall x \in \Omega$ , que também pode - se escrever:

$$x^* = \operatorname{argmin} g(x^*)^T x \quad \text{s. a } x \in \Omega. \quad (\text{IV.26}) \blacksquare$$

Notar que com base no lema anterior pode ser verificado que um ponto  $\bar{x} \in \Omega = \{ x ; Ax = b \}$  tal que  $Pg(\bar{x})$  seja nulo

satisfaz as condições de otimalidade (IV.26), pois.

$$Pg(\bar{x}) = (I - A^T(AA^T)^{-1}A)g(\bar{x}) = 0$$

$$g(\bar{x}) - A^T(AA^T)^{-1}Ag(\bar{x}) = 0$$

seja  $u = -(AA^T)^{-1}Ag(\bar{x})$ , logo

$$g(\bar{x}) + A^T u = 0 \quad (\text{IV.27})$$

Por outro lado, as condições de Karush - Kunh - Tucker num ponto  $(x, \alpha)$  para IV.26 (lema IV.1), são

$$g(x) + A^T \alpha = 0 \quad (\text{IV.28})$$

indicando que, se  $(\bar{x}, u)$  satisfaz (IV.27), então também satisfaz condições de otimalidade para (IV.26) sendo portanto solução do problema  $IV(g, \Omega)$ .

#### IV.1.3 TAMANHO DO PASSO.

Definida uma direção em um ponto  $x^k$  pode - se determinar um novo ponto viável, que será identificado por  $x^{k+1}$ , que garanta uma diminuição na função  $G(x)$ . No caso simétrico, isto é, quando o Jacobiano da função  $g(x)$  é simétrico em cada ponto da região viável, tal ponto é determinado a partir de uma busca unidimensional ao longo do raio definido por  $x^k$  e  $d^k$  denotado por  $\text{raio}(x^k, d^k)$ . Neste caso, deve se tentar estabelecer uma generalização da busca, determinando a solução de inequação variacional unidimensional sobre  $\text{raio}(x^k, d^k)$  :

$$\begin{aligned} &\text{Determinar } x^{k+1} \in \text{raio}(x^k, d^k); \\ &g(x^{k+1})^T(x - x^{k+1}) \geq 0 \quad \forall x \in \text{raio}(x^k, d^k) \quad (\text{IV.29}) \end{aligned}$$

Qualquer ponto sobre  $\text{raio}(x^k, d^k)$  pode ser denotado por:

$x = x^k + \alpha d^k$ ,  $\alpha \geq 0$   
 sendo o ponto procurado  $x^{k+1} = x^k + \alpha^* d^k$ , assim  
 substituindo ambas equações em (IV.29) tem-se o  
 problema unidimensional equivalente:

$$\begin{aligned}
 &\text{Determinar } \alpha^* \geq 0 ; \\
 &(\alpha - \alpha^*)g(x^k + \alpha^* d^k)^T d^k \geq 0, \quad \forall \alpha \geq 0 \quad (\text{IV.30})
 \end{aligned}$$

O problema anterior, apresenta uma solução analítica em casos extremos ou uma solução numérica, tal como mostrado no lema IV.2.

#### Lema IV.2.

A solução da inequação variacional unidimensional (IV.30) é dada por:

- a)  $\alpha^* = 0$  se  $g(x^k + \alpha d^k)^T d^k > 0 \quad \forall \alpha \geq 0$ ,
- b) Ou,  $\alpha^*$  tem vários valores dados pelas raízes positivas da equação:

$$g(x^k + \alpha d^k)^T d^k = 0,$$

e ainda, se a solução é atingida no caso a,  $x^k$  é a solução do problema  $IV(g, \Omega)$  definido em (IV.1).

#### Demonstração.

A solução da inequação variacional pode ser obtida por simples inspeção, assim:

- Se  $g(x^k + \alpha d^k)^T d^k < 0 \quad \forall \alpha \geq 0$ , então  $\alpha - \alpha^* \leq 0 \quad \forall \alpha$ , o que se cumpre somente se  $\alpha^* = \alpha$ , contudo, isto indica que a função sempre pode ser diminuída ao longo da direção  $d^k$  o que contradiz o fato da função  $G(x)$  ser inferiormente limitada em zero, portanto essa situação nunca se apresenta.
- Análogamente se  $g(x^k + \alpha d^k)^T d^k > 0 \quad \forall \alpha \geq 0$ , então  $\alpha - \alpha^* \geq 0 \quad \forall \alpha$  se cumpre somente se  $\alpha^* = 0$ .
- Se  $\alpha^*$  não é nenhum dos valores extremos então para garantir a desigualdade " $\geq$ " na inequação (IV.30)

necessariamente  $g(x^k + \alpha d^k)^T d^k$  deve ser nulo para algum  $\alpha^* \in (0, \infty)$ .

Entretanto, no caso de  $\alpha^* = 0$  a equação (IV.30) se transforma em :

$$\Rightarrow \begin{aligned} \alpha g(x^k)^T d^k &\geq 0 & \forall \alpha \geq 0, \\ g(x^k)^T d^k &\geq 0 & \forall \alpha \geq 0, \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

mas,  $\Gamma(x^k) = g(x^k)^T d^k \leq 0 \quad \forall x^k \in \Omega$ , logo (IV.31) é válida somente para  $g(x^k)^T d^k = 0$ , e pelo teorema (IV.1)  $\Gamma(x^k) = 0$  indica que  $x^k$  é a solução do problema  $\text{IV}(g, \Omega)$  antes definido.

#### IV.1.4 O ALGORITMO.

Com base no analisado nas seções anteriores pode - se propôr um algoritmo para o problema  $\text{IV}(g, \Omega)$  com  $\Omega = \{x; Ax = b\}$ , sendo  $A$  uma matriz de posto completo de ordem  $m$  por  $n$ , e sendo  $g$  um mapping monótono. Tal algoritmo procede iterativamente sobre o espaço nulo da matriz  $A$ , efetuando em cada etapa uma projeção ortogonal até atingir o criterio de parada  $G(x) = 0$ . O maior esforço computacional de cada etapa é executado na resolução de equação não linear definida no lema IV.2.

#### ALGORITMO IV. A.

Início

Determinar  $x^0 \in \Omega$

$\alpha^* \leftarrow 1;$

$k \leftarrow 0;$

$P \leftarrow I - A^T(AA^T)^{-1}A;$

Enquanto  $Pg(x^k)$  ou  $\alpha^*$  não nulo, faça

$d^k \leftarrow -Pg(x^k) / \|Pg(x^k)\|;$

Resolver:

Determine  $\alpha^* \geq 0$  tal que :

$(\alpha - \alpha^*)g(x^k + \alpha^* d^k)^T d^k \geq 0, \quad \forall \alpha \geq 0;$

$x^{k+1} \leftarrow x^k + \alpha^* d^k;$

$k \leftarrow k + 1;$

Fim Enquanto;

Fim.

#### IV.2 INEQUAÇÕES VARIACIONAIS COM RESTRIÇÕES LINEARES DE IGUALDADE E NÃO NEGATIVIDADE.

Na seção anterior foi analisado o caso em que a região de pontos na qual se encontra a solução (um conjunto convexo e compacto) é definida por restrições lineares de igualdade. Nessa seção são estendidos esses resultados para uma situação na qual existem adicionalmente restrições de não negatividade impostas sobre cada uma das variáveis, de modo que, o problema é encontrar  $x^* \in \Omega$  que satisfaça a inequação IV.1, sendo  $\Omega$  definido por:

$$\Omega = \{ x \in \mathbb{R}^n; Ax = b, x \geq 0 \},$$

com A uma matriz de ordem m por n e de posto completo. O procedimento apresentado para esse caso é desenvolvido de forma intuitiva sem entrar numa análise formal e que é colocada na seção seguinte para um caso mais geral.

Para esse caso pode - se pensar numa estratégia tipo conjunto ativo, utilizada em algoritmos da programação não linear, isto é, em cada novo ponto obtido num processo iterativo são identificadas as restrições de não negatividade que estão ativas ( $x_j = 0$ ). Com isso as linhas correspondentes às variáveis ativas podem ser adicionadas à matriz A obtendo uma nova matriz  $A^\circ$  caracterizando uma região viável que somente contém restrições de igualdade :

$$A^\circ x = b^\circ$$

sendo:

$$A^\circ = \left[ \begin{array}{c} - \\ \frac{A}{E} \\ - \end{array} \right]; \quad b^\circ = \left[ \begin{array}{c} - \\ \frac{b}{0} \\ - \end{array} \right]; \quad E (q \times n)$$

ou seja, a matriz E é formada por q linhas de tipo

$$(0, \dots, 1, \dots, 0),$$

que são as correspondentes ao conjunto  $J^\circ = \{j; x_j = 0\}$ . Cna realidade existe uma maneira implícita de considerar restrições de não negatividade sem incrementar o tamanho da



matriz  $A$ , isto será considerado mais adiante). Assim, qualquer ponto viável e em particular  $x^{k+1}$  deve satisfazer :

$$A^{\circ} x^{k+1} = b^{\circ},$$

portanto a direção  $d^k = x^{k+1} - x^k$  deve satisfazer:

$$A^{\circ} d^k = 0;$$

isto garante que as variáveis  $x_j \in J^{\circ}$  continuam viáveis depois de efetuar um passo do tipo:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha d^k \geq 0, \quad \alpha \geq 0 \quad (\text{IV.32})$$

e para garantir que variáveis que não pertencem ao conjunto  $J^{\circ}$  são também positivas deve-se atender:

$$\alpha \leq -x_j^k / d_j^k \quad \forall d_j^k < 0 \quad (\text{IV.33a})$$

$$\alpha \geq 0 \quad (\text{IV.33b})$$

Daqui se tem o máximo valor que  $\alpha$  pode atingir, denotado por  $\alpha_m$  e dado por:

$$\alpha_m = \underset{j \notin J^{\circ}}{\text{mínimo}} \left( -x_j^k / d_j^k, d_j^k < 0 \right) \quad (\text{IV.34})$$

Portanto a resolução da inequação variacional unidimensional que permite determinar o tamanho do passo  $\alpha$  é definido por:

Determinar  $\alpha^* \in [0, \alpha_m]$  tal que;

$$(\alpha - \alpha^*) g(x^k + \alpha^* d^k)^T d^k \geq 0, \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_m] \quad (\text{IV.35})$$

Por outro lado ao analisar o problema (IV.26) tem-se que, com a introdução de restrições de não negatividade aparece um limite para os correspondentes valores  $\lambda_j$  que devem ser não negativos na solução ótima de

tal problema.

Com relação à função  $G(x)$  definida no teorema IV.1, não parece evidente verificar uma diminuição na seqüência  $\{x^k\}$  correspondentes aos pontos gerados pelo procedimento, devido a que tal função varia de acordo com a matriz  $A^o$ , isto é segundo o conjunto ativo considerado em cada etapa. Contudo a direção definida por:

$$d^k = -P^o g(x^k) / \|P^o g(x^k)\|;$$

é uma boa estimativa para atingir um ponto  $G(x^*) = 0$ , no sentido que o teorema IV.1 é válido para cada conjunto  $J^o$ .

Adicionalmente deve ser mencionado que o fato do problema considerado possuir apenas restrições de não negatividade, permite diminuir o número de cálculos da matriz de projeção, pois fixar  $r$  variáveis no seu limite é equivalente com remover as  $r$  colunas correspondentes da matriz  $A$ . Assim através de todas as etapas o número de restrições explicitamente consideradas é constante ( $m$ ).

#### IV.3 INEQUAÇÕES VARIACIONAIS COM RESTRIÇÕES LINEARES - CASO GERAL.

Nessa seção são generalizados os resultados das seções anteriores, isto é considerando a existência de restrições lineares de igualdade e desigualdade. Para isto é utilizada a técnica de identificar o conjunto de restrições de desigualdade ativas em cada ponto da região viável, o que permite estabelecer o problema equivalente para o caso em que o espaço nulo considerado é composto pelas restrições de igualdade e aquelas de desigualdade que estão ativas no ponto.

##### IV.3.1 CONJUNTO ATIVO, DIREÇÃO E TAMANHO DE PASSO.

Deseja-se abordar a determinação de uma solução para um problema do tipo:

IVCg,  $\Omega$ : Determinar  $x^* \in \Omega$  tal que:

$$g(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (\text{IV.36a})$$

$$\Omega = \{ x ; Ax = b, Bx \geq h \} \quad (\text{IV.36b})$$

sendo  $A$  e  $B$  matrizes de ordem  $m$ , por  $n$  e  $l$  por  $n$  respectivamente e de posto completo, e  $g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  um mapping monótono.

Alguns resultados teóricos podem ser estendidos diretamente a partir das seções anteriores, enquanto outros, merecem uma análise mais detalhada.

Primeiramente consideremos as duas possibilidades existentes para as restrições de desigualdade, ou seja se elas são ativas ou inativas fato que matematicamente é representado definindo o conjunto  $J^o$  da seguinte maneira:

$$J^o = \{ j ; B_j^T x = h_j \} \quad e \quad J = \{ 1, \dots, n \}$$

sendo  $B_j$  a  $j$ -ésima linha da matriz  $B$  e  $h_j$  a correspondente componente do vetor  $h \in \mathbb{R}^l$ . Assim (IV.36b) num determinado ponto  $x$  pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ -B_j x &\leq -h_j \quad \forall j \in J \end{aligned}$$

denotando por  $E$  a matriz cujas linhas são  $B_j \forall j \in J^o$ , pode se definir a matriz  $A^o$  como:

$$A^o = \begin{bmatrix} A \\ \hline -E \end{bmatrix}_{(m+q) \times n}$$

sendo  $q$  o número de restrições de desigualdade ativas igual a  $|J^o|$ .

Requer - se uma direção viável, isto é, que garanta que o próximo ponto  $x^{k+1}$  tenha o mesmo conjunto  $J^o$ , ou seja:

$$\text{Minimizar } g(x^k)^T d \quad \text{s.a. } Ad = 0, Ed = 0, d^T d = 1 \quad (\text{IV.37})$$

Supondo que  $A^o$  é de posto completo o problema de direção

tem solução análtica (Ver teorema IV.1) dada  $P^{\circ}g(x^k) \neq 0$  por:

$$d^k = - \frac{P^{\circ}g(x^k)}{\|P^{\circ}g(x^k)\|} \quad (\text{IV.38a})$$

$$P^{\circ} = I - A^{\circ T}(A^{\circ}A^{\circ T})^{-1}A^{\circ}. \quad (\text{IV.38b})$$

sendo portanto o problema de programação matemática equivalente com (IV.36) em um ponto  $x$ :

$$\text{Minimizar } G(x) = (g(x)^T P^{\circ} g(x))^{1/2} \quad (\text{IV.39a})$$

s. a

$$x \in \Omega = \{x ; Ax=b, Bx \geq h\} \quad (\text{IV.39b})$$

Analogamente pode-se visualizar fáclmente que o resultado de teorema (IV.2) pode ser estendido de maneira que  $d$  tal como calculada em (IV.38) em algum ponto  $x \in \Omega$  é uma direção de descida para (IV.39).

No entanto a interpretação de tal equivalência requer uma análise cuidadosa, devido ao fato da matriz de projeção não ser a mesma para toda a região viável, isto é, o conjunto de restrições de desigualdade muda em cada novo vértice. Portanto, o problema de equivalência pode ser estabelecido quando o conjunto de restrições ativas é aquele que corresponde ao conjunto ativo ótimo  $J^*$ , contudo, como este não é conhecido de antemão a estratégia a seguir é procurar uma direção no plano tangente associado ao conjunto  $J^{\circ}$ , que garanta pelo menos uma diminuição na função  $G(x)$ .

Por outro lado, o caso em que  $P^{\circ}g(x^k) = 0$ , para algum  $x^k \in \Omega$ , não indica necessariamente que tal ponto é uma solução do problema como estabelecido no lema (IV.1). Isto porque, ao existirem restrições de desigualdade, a condição de otimalidade de um problema de programação matemática está sujeita ao critério de não negatividade

de variáveis duais associadas ao problema (considera-se o problema de programação matemática apresentado no lema IV.1). O seguinte lema analisa com mais detalhe essa situação.

Lema IV.3.

Seja  $x^k \in \Omega = \{x; Ax = b, Bx \geq h\}$  tal que  $P^\circ g(x^k) = 0$  e seja  $\mu \equiv -(A^\circ A^{\circ T})^{-1} A^\circ g(x^k)$  o vetor que corresponde aos multiplicadores associados às restrições do espaço  $\Omega$ , sendo  $\mu^1$  correspondendo às restrições de igualdade e  $\mu^2$  aqueles associados às restrições de desigualdade, tal que  $\mu = (\mu^1 T, \mu^2 T)^T$ , então o ponto  $x^k$  é uma solução do problema  $IV(g, \Omega)$  se e somente se  $\mu^2 \geq 0$ .

Demonstração.

Seja  $x^k \in \Omega$ , isto é,  $Ax^k = b, Bx^k \geq h$  então:

$$\begin{aligned} P^\circ g(x^k) &= (I - A^{\circ T} (A^\circ A^{\circ T})^{-1} A^\circ) g(x^k) = 0 \\ &= g(x^k) - A^{\circ T} (A^\circ A^{\circ T})^{-1} A^\circ g(x^k) = 0 \end{aligned}$$

se  $\mu = -(A^\circ A^{\circ T})^{-1} A^\circ g(x^k) = 0$ , pode se escrever:

$$P^\circ g(x^k) = g(x^k) + A^{\circ T} \mu$$

mas,  $A^{\circ T} = (A^T, -E^T)$  e  $\mu = (\mu^1, \mu^2)^T$

$$P^\circ g(x^k) = g(x^k) + A^T \mu^1 - E^T \mu^2 = 0 \quad (IV.40)$$

Por outro lado o problema análogo a (IV.25) e equivalente a  $IV(g, \Omega)$  sendo dado por:

$$\text{Minimizar } g(x^*)^T x \quad (IV.41a)$$

s. a

$$Ax = b \quad \dots \lambda \quad (IV.41b)$$

$$Bx \geq 0 \quad \dots \gamma \quad (IV.41c)$$

com condições de Karush - Kunh - Tucker no ponto  $(x, \lambda, \gamma)$ :

$$g(x^*) + A^T \lambda - E^T \gamma = 0 \quad (\text{IV.42a})$$

$$\gamma_j \geq 0 \quad \forall j \in J^* \quad (\text{IV.42b})$$

sendo  $J^*$  o conjunto de restrições de desigualdade ativas no ponto  $(x, \lambda, \gamma)$ . Assim, um ponto  $(x^k, \mu^1, \mu^2)$  que satisfaz (IV.40) é um ponto Karush - Kunh - Tucker para o problema (IV.41), (e portanto solução do IV(g,  $\Omega$ )), sempre que todos os valores do vetor  $\mu^2$  sejam não negativos. ■

O lema anterior deixa em aberto o caso em que  $P^\circ g(x^k)$  é nulo para algum vetor  $x^k$  com pelo menos uma variável  $\mu_j^2 < 0$ ,  $j \in J^\circ$ . Neste caso é possível determinar uma direção viável dada por  $-Pg(x^k)$ , sendo  $P$  uma matriz de projeção sobre um novo espaço nulo definido no seguinte lema.

Lema IV.4.

Se existe um ponto  $x^k \in \Omega = \{x ; Ax = b, Bx \geq h\}$  tal que,  $P^\circ g(x^k) = 0$  e com pelo menos um elemento  $\alpha_p^2$  negativo do vetor  $\mu = -(A^\circ A^{\circ T})^{-1} A^\circ g(x^k)$ , a nova matriz de projeção  $P$  eliminando a linha correspondente na matriz  $A^\circ$  é tal que  $Pg(x^k) \neq 0$ .

Demonstração.

Suponha-se que no ponto  $x^k$ ,  $Pg(x^k) = 0$ , sabendo que  $P^\circ g(x^k) = 0$ , então:

$$P^\circ g(x^k) = (I - A^{\circ T} (A^\circ A^{\circ T})^{-1} A^\circ) g(x^k) = 0 \quad (\text{IV.43})$$

$$g(x^k) + A^{\circ T} \mu = 0 \quad (\text{IV.44})$$

sendo  $\mu$  tal como definido no lema anterior. Suponha que ao eliminar da matriz  $A^\circ$  a linha correspondente a algum elemento de  $\mu^2$  negativo se obtém a matriz  $A$ , ( $\mu^2$  tal como

definido no lema anterior), então é possível escrever:

$$A^{\circ T} \mu = A^T u + \mu_p r_p^T \quad (\text{IV.45})$$

onde  $u$  é o vetor  $\mu$  sem considerar o elemento  $\mu_p$ , e  $r_p$  é o vetor com os elementos da linha  $p$  removida de  $A^{\circ}$ . Entretanto, com base na suposição inicial:

$$Pg(x^k) = g(x^k) + A^T u = 0 \quad (\text{IV.46})$$

e substituindo (IV.45) em (IV.44):

$$g(x^k) + A^T u + \mu_p r_p^T = 0 \quad (\text{IV.47})$$

sustraindo (IV.47) de (IV.46) :

$$\mu_p r_p^T = 0 \quad (\text{IV.48})$$

mas o fato de  $\mu_p$  ser negativo e  $r_p^T$  ter elementos não nulos leva a uma contradição da suposição básica e portanto  $Pg(x^k) \neq 0$ . ■

Do lema anterior se desprende que a definição da matriz de projeção leva a determinar uma nova direção, sobre o espaço nulo de um novo conjunto de restrições. Essa direção garante que a função  $g(x)^T Pg(x)$  tem uma diminuição.

A solução do problema unidimensional sobre o raio  $(x^k, d^k)$  também deve garantir a viabilidade do novo ponto, por isso deve-se ter especial cuidado com restrições de desigualdade. Neste sentido o fato de  $A^{\circ} d$  ser nulo garante que o ponto  $x^{k+1}$  é viável em todas as componentes correspondentes às restrições que compõem a matriz  $A^{\circ}$ , logo somente devem ser estudadas as restrições não ativas para identificar um limite no tamanho do passo. Seja  $i$  o índice de uma restrição não ativa então segue que:

$$B_i x^{k+1} \geq h_i \quad \text{para algum } i \notin J^{\circ} \quad (\text{IV.49})$$

$$B_i(x^k + \alpha d^k) \geq h_i \quad \text{para algum } i \in J^0 \quad \text{(IV.50)}$$

$$B_i x^k + \alpha B_i d^k \geq h_i \quad \text{para algum } i \in J^0. \quad \text{(IV.51)}$$

Como  $x^k$  é um ponto viável ( $B_i x^k \geq h_i$ ), então se  $B_i d^k > 0$  a viabilidade está garantida para todo  $\alpha \geq 0$ . Por outro lado se  $B_i d^k < 0$ , então  $\alpha$  deve satisfazer:

$$\alpha = \frac{h_i - B_i x^k}{B_i d^k} \quad \forall i \in J^0 \quad \text{(IV.52)}$$

e portanto o máximo valor de  $\alpha$  é dado por:

$$\alpha_m = \underset{i \in J^0}{\text{mínimo}} \left\{ \frac{h_i - B_i x^k}{B_i d^k}, \quad B_i d^k < 0 \right\} \quad \text{(IV.53)}$$

Com base no anterior a inequação variacional unidimensional análoga com (IV.30) é:

Determinar  $\alpha^* \in [0, \alpha_m]$  tal que;

$$(\alpha - \alpha^*)g(x^k + \alpha d^k)^T d^k \geq 0, \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_m] \quad \text{(IV.54)}$$

cuja solução é analisada no lema a seguir:

Lema IV.5.

A solução da inequação variacional definida em (IV.54) é dada por:

a)  $\alpha^* = \alpha_m$  se  $g(x^k + \alpha d^k)^T d^k < 0 \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_m]$

b)  $\alpha^* = 0$  se  $g(x^k + \alpha d^k)^T d^k > 0 \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_m]$

c)  $\alpha^*$  são as raízes contidas no intervalo  $[0, \alpha_m]$  da equação:

$$g(x^k + \alpha d^k)^T d^k = 0$$



E ainda no caso em que  $\alpha^* = 0$ ,  $x^k$  é solução do problema  $IV(g, \Omega)$  sendo  $\Omega = \{ x; Ax = b, Bx \geq h \}$

Demonstração.

- a) Se  $g(x^k + \alpha d^k)^T d^k < 0 \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_m]$ , então  $\alpha - \alpha^* \leq 0$  para todo  $\alpha$  no intervalo se e somente se  $\alpha^* = \alpha_m$ .
- b) O caso contrario,  $g(x^k + \alpha d^k)^T d^k > 0$ ,  $\alpha - \alpha^* \leq 0 \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_m]$  se e somente se  $\alpha^* = 0$ .
- c) Se nem o caso a nem o caso b é satisfeito em algum ponto, a inequação (IV.54) só é satisfeita quando:

$$g(x^k + \alpha d^k)^T d^k = 0,$$

para algum  $\alpha \in [0, \alpha_m]$ .

Finalmente a demonstração para o caso de  $\alpha^* = 0$  determinar a solução do problema  $IV(g, \Omega)$ , pode ser feita de maneira similar àquela do lema (IV.3). ■

#### IV.3.2 O ALGORITMO.

O algoritmo a formular neste caso deve determinar em cada etapa a direção  $d^k$ , correspondente a uma projeção do mapping no espaço nulo da matriz definida por restrições de igualdade e desigualdade ativas no ponto. No caso de tal direção ser diferente de zero, procura-se um novo ponto resolvendo a inequação variacional unidimensional no intervalo que garante a viabilidade. Por outro lado no caso da direção ser nula existem duas possibilidades, ou o ponto atual é a solução de  $IV(g, \Omega)$  ou deve-se procurar uma nova direção em outro espaço nulo. Esse procedimento está formalizado no algoritmo IV.B.

## ALGORITMO IV. B.

Início

Determinar  $x^0 \in \Omega = \{x; Ax=b, Bx \geq h\}$ Identifique  $J^0$  e  $A^0$ ;Escolha  $\alpha^* \neq 0$ ; $k \leftarrow 0$ ;

Repetir

 $P^0 \leftarrow I - A^{0T}(A^0 A^{0T})^{-1} A^0$ ; $d^k \leftarrow -P^0 g(x^k) / \|P^0 g(x^k)\|$ ;Se  $d^k \neq 0$  faça

$$\alpha_m = \underset{i \in J^0}{\text{mínimo}} \left\{ -\frac{h_i - B_i x^k}{B_i d^k}, B_i d^k < 0 \right\};$$

Resolver:

Determine  $\alpha^* \in [0, \alpha]$  tal que :

$$(\alpha - \alpha^*)g(x^k) + \alpha^* d^k)^T d^k \geq 0, \forall \alpha \in [0, \alpha_m];$$

$$x^{k+1} \leftarrow x^k + \alpha^* d^k;$$

Atualize  $J^0$  e  $A^0$ ;

$$k \leftarrow k + 1;$$

Senão

$$\mu \leftarrow -(A^0 A^{0T})^{-1} A^0 g(x^k);$$

Se  $\mu_p^2 < 0$  para algum  $p$  façaRetirar de  $A^0$  a linha correspondente ( $\Rightarrow A$ );

$$A^0 \leftarrow A; J^0 \leftarrow J^0 - \{p\};$$

Fim se;

Até  $g(x^{k-1})^T P^0 g(x^{k-1}) = 0$  e  $\mu^2 \geq 0$  ou  $\alpha^* = 0$ ;

Fim.

## IV.3.3 UM EXEMPLO NUMÉRICO.

A seguir considera-se um exemplo numérico que permite visualizar o avanço do método num caso com restrições de igualdade linear e não negatividade.

Considere o problema :

$$\text{Determinar } x^* \in \Omega \quad g(x^*)^T (x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega$$

onde:

$\Omega :$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 5x_2 + x_4 &= 5 \\ x_j &\geq 0 \quad j = 1, 2, 3, 4. \end{aligned}$$

Considere se o mapping  $g(x)$  monótono, com jacobiano assimétrico definido no estudo de MARCOTTE (1988):

$$g(x) = (x_1^2 + 4x_1x_2, x_2^2 + 4x_1x_2, 0, 0)$$

Iteração 1.

Considere um ponto viável inicial  $x^0 = (2, 0, 0, 3)^T$  sendo o correspondente valor do mapping:  $g(x^0) = (4, 0, 0, 0)^T$ . As restrições de não negatividade ativas no ponto são  $x_2 \geq 0$  e  $x_3 \geq 0$  devido a que  $x_2 = x_3 = 0$ . De maneira que a matriz  $A^0$  é dada como:

$$A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

que corresponde a:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + 5x_2 + x_4 &= 5 \\ -x_2 &= 0 \\ -x_3 &= 0 \end{aligned}$$

calculando  $A^0 A^{0T}$  e  $(A^0 A^{0T})^{-1}$  tem se:

$$A^{\circ} A^{\circ T} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 & -1 \\ 6 & 27 & -5 & 0 \\ -1 & -5 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^{\circ} A^{\circ T})^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ -3 & 4 & 18 & -3 \\ 2 & -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

logo:

$$A^{\circ T} (A^{\circ} A^{\circ T})^{-1} A^{\circ} = I \Rightarrow P^{\circ} = \text{O(mat.nula)} \Rightarrow P^{\circ} g(x^{\circ}) = 0,$$

De modo que é necessário calcular os multiplicadores mediante:

$$\mu = -(A^{\circ} A^{\circ T})^{-1} A^{\circ} g(x^{\circ}) = - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Pode ser eliminada qualquer uma das restrições de não negatividade pois ambas tem multiplicadores negativos. Escolha se a eliminação de  $x_2 \geq 0$  e calcule se a matriz P:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A A^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ 6 & 27 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A A^T)^{-1} = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 27 & -6 & 27 \\ -6 & 2 & -6 \\ 27 & -6 & 45 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{18} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 16 \end{pmatrix}$$

$$-Pg(x^{\circ}) = (-2/9, 2/9, 0, -8/9)^T$$

$$\|d^{\circ}\| = 2\sqrt{2}/3 \Rightarrow d^{\circ} = (-\sqrt{2}/6, \sqrt{2}/6, 0, -2\sqrt{2}/3)$$

Determinando o máximo valor que  $\alpha$  pode atingir:

$$\alpha_m = \text{mínimo} \{ -x_j^0/d_j^0, \quad d_j^0 < 0 \}$$

$$\alpha_m = \text{mínimo} \{ 6\sqrt{2}, 9\sqrt{2}/4 \} = 9\sqrt{2}/4$$

Resolvendo a inequação variacional unidimensional, primeiramente deve-se analisar o produto:

$$(\alpha - \alpha^*)g(x^k + \alpha d^k)^T d^k \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_m]$$

tendo se que:

$$\begin{aligned} g(x^k + \alpha d^k)^T d^k &= [d_1^3 + d_2^3 + 4d_1 d_2 (d_1 + d_2)] \alpha^2 + \\ & [2x_1^2 d_1 + 2x_2^2 d_2 + 4(d_1 + d_2)(x_1 d_2 + x_2 d_1)] \alpha + \\ & [x_1^2 d_1 + x_2^2 d_2 + 4(d_1 + d_2)x_1 x_2] \alpha \end{aligned}$$

sendo  $d_j$  e  $x_j$  a  $j$ -ésima componente do vetor  $d$  e  $x$  respectivamente. Os superíndices  $k = 0$  neste caso não são colocados, para facilitar a leitura da expressão. Substituindo  $x^0$  e  $d^0$  tem se:

$$g(x^k + \alpha d^k)^T d^k = 2\alpha/9 - 2\sqrt{2}/3,$$

o que leva a concluir que:

$$g(x^k + \alpha d^k)^T d^k < 0 \quad \forall \alpha \in [0, \alpha_m]$$

de modo que uma solução da inequação variacional é:

$$\alpha^* = \alpha_m = 9\sqrt{2}/4$$

Atualizando o ponto  $x$ ,  $x^1 = x^0 + \alpha^* d^0$ :

$$x^1 = (5/4, 3/4, 0, 0)^T$$

Verifica-se se o ponto atualizado é a solução, para isto se

calcula:

$$g(x^1) = (85/16, 69/16, 0, 0)^T$$

logo:

$$g(x^1)^T P g(x^1) = \frac{1}{18} (85/16, 69/16, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 85/16 \\ 69/16 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= 1/18$$

logo:

$$(g(x^1)^T P g(x^1))^{1/2} = 1/3\sqrt{2}$$

Notar que no ponto  $x^0$ :

$$g(x^0)^T P g(x^0) = \frac{1}{18} (4, 0, 0, 0) \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 16/18$$

e por tanto:

$$(g(x^0)^T P g(x^0))^{1/2} = 4/3\sqrt{2}$$

o que significa que  $G(x)$  diminui em  $1/\sqrt{2}$ .

Iteração 2.

$$x^1 = (5/4, 3/4, 0, 0)^T, \quad g(x^1) = (85/16, 69/16, 0, 0)^T$$

As restrições de não negatividade ativas no ponto são as correspondentes a  $x_3$  e  $x_4$  sendo a matriz  $A^a$  dada por:

$$A^a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e então:

$$A^{\circ} A^{\circ T} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 & 0 \\ 6 & 27 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^{\circ} A^{\circ T})^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 13 & -3 & 13 & -3 \\ -3 & 1 & -3 & 1 \\ 13 & -3 & 21 & -3 \\ -3 & 1 & -3 & 9 \end{pmatrix}$$

e

$$A^{\circ T} (A^{\circ} A^{\circ T})^{-1} A^{\circ} = I \Rightarrow P^{\circ} = \text{O(mat. nula)} \Rightarrow P^{\circ} g(x^1) = 0$$

e calculando os multiplicadores:

$$\mu = -(A^{\circ} A^{\circ T})^{-1} A^{\circ} g(x^1) = (-89/16, 2/8, -89/16, 2/8)$$

de maneira que pode ser eliminada a restrição que corresponde à variável  $x_3$  gerando uma nova situação:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A A^T = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 6 & 27 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (A A^T)^{-1} = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 26/3 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow P = \frac{1}{42} \begin{pmatrix} 25 & -5 & -20 & 0 \\ -5 & 1 & 4 & 0 \\ -20 & 4 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-Pg(x^1) = (-445/168, 89/168, 356/168, 0)^T$$

$$\|d^1\| = 89/4\sqrt{42} / 3 \Rightarrow d^1 = (-5/\sqrt{42}, 1/\sqrt{42}, 4/\sqrt{42}, 0)$$

Calculando  $\alpha_m$ :

$$\alpha_m = \text{mínimo} \left\{ -x_j^1/d_j^1, d_j^1 < 0 \right\}$$

$$\alpha_m = \left( (5/4) / (5/\sqrt{42}) \right) = \sqrt{42}/4$$

e resolvendo a equação unidimensional deve-se estudar o

termo:

$$g(x^1 + \alpha d^1)^T d^1 = -44\alpha^2 / (42)^{3/2} + 52\alpha / 21 - 89 / 4(42)^{1/2}$$

que tem uma raiz no intervalo  $[0, \alpha_m]$  :

$$\alpha_m = 1.5416623$$

e atualizando o ponto tal que  $x^2 = x^1 + \alpha^* d^1$  tem-se :

$$x^2 = (0.0605818, 0.9878837, 0.9515346, 0.0000000)^T,$$

Avaliando a função  $g(x)$ :

$$g(x^2) = (0.2430613, 1.2153055, 0.0000000, 0.0000000)^T$$

e substituindo

$$(g(x^2)^T P g(x^2))^{1/2} = 0.0000000$$

e portanto  $x^* = x^2$ . É importante notar que a função  $G(x)$  diminui desde  $x^1$  até  $x^2$  em 11.79 pois

$$(g(x^1)^T P g(x^1))^{1/2} = 3.4300000$$

Na figura (IV.2) é representada a região viável do problema em  $\mathbb{R}^2$  indicando que, ao considerar outros pontos iniciais tais como  $x^0 = (0, 1, 1, 0)$  ou  $(5/4, 3/4, 0, 0)$  o algoritmo também converge em uma iteração. Por outro lado incluindo a restrição adicional:

$$x_1 + x_2 - x_5 = 1/2$$

no ponto  $(0.25, 0.25, 1.5, 3.5, 0.0)$  com  $G(x) = 5.32 \times 10^{-13}$ .



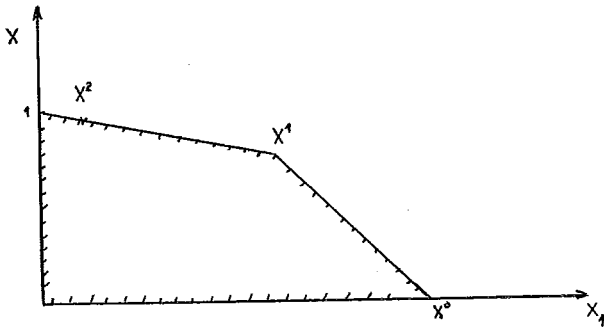


Figura IV.2 Região viável.

## IV. 4 ANTECEDENTES NUMÉRICOS

Nesta seção são abordados alguns aspectos relevantes que surgem quando é efetuada uma implementação computacional do algoritmo.

## IV. 4.1 Aspectos Básicos

## a) Resolução da Inequação Variacional Unidimensional.

Tal inequação é definida em equação (IV.54) e para o caso em que a solução não é dada por  $\alpha^* = 0.0$  nem  $\alpha^* = \infty$  se transforma numa equação não linear de uma variável só, do tipo:

$$f(\alpha) = g(x^k + \alpha d^k)^T d^k = \sum_{j=1}^n g_j(x^k + \alpha d^k)^T d_j^k = 0 \quad \text{(IV.55)}$$

utilizando o método de Newton (ORTEGA e RHEINBOLDT, 1970) a partir de um valor  $\alpha^0$  conhecido o processo iterativo é executado da seguinte maneira:

$$\alpha^{l+1} \leftarrow \alpha^l - \frac{f(\alpha^l)}{f'(\alpha^l)} \quad \text{(IV.56)}$$

## b) Matriz Inversa.

Para calcular a inversa da matriz  $(A^{\circ} A^{\circ T})$  utiliza-se o método de Gauss - Jordan com pivoteamento completo (VIGNES, ALT e PICHAT, 1980) contudo, como em cada etapa do algoritmo é retirada ou colocada uma restrição da matriz  $A^{\circ}$ , se requer somente uma atualização a referida matriz reduzindo o número de cálculos necessários. Assim se  $A^{\circ}$  é a matriz de uma etapa qualquer do algoritmo tal que  $(A^{\circ} A^{\circ T})^{-1}$  é conhecida na etapa seguinte a nova matriz inversa que pode ser obtida a partir de:

$$(A^{\circ} A^{\circ T})^{-1} = \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} \gamma (A^{\circ} A^{\circ T})^{-1} + \gamma (A^{\circ} A^{\circ T})^{-1} A^{\circ} e (A^{\circ} e)^T (A^{\circ} A^{\circ T})^{-1} & (A^{\circ} A^{\circ T})^{-1} A^{\circ} e \\ (A^{\circ} e)^T (A^{\circ} A^{\circ T})^{-1} & 1 \end{bmatrix} \quad \dots \text{(IV.57)}$$

onde :

$$\gamma = e^T e - (A^0 e)^T (A^0 A^0 T)^{-1} A^0 e \quad (\text{IV.58})$$

sendo  $e$  um vetor com todos os elementos nulos a não ser aquele correspondente à variável que se torna ativa ou inativa na etapa, que é igual a 1.

c) Ponto inicial.

O ponto inicial para este caso deve ser um tal que tenha o número mínimo de restrições de desigualdade ativas. Isto pode ser garantido começando as iterações com um ponto interior à região viável para o qual existem métodos de comprovada eficiência numérica.

#### IV.4.2 RESULTADOS NUMÉRICOS.

Para estudar o comportamento do algoritmo consideram - se principalmente problemas de inequações variacionais com Jacobiano não simétrico. Com este fim propõe-se um mapping dado por:

$$g(x) = (g_1(x_1), \dots, \dots, g_n(x_n)) + \delta(D - D^T)x \quad (\text{IV.59})$$

sendo  $D$  uma matriz de ordem  $n$  por  $n$  e  $\delta$  um número real. O Jacobiano é dado por

$$g'(x) = \text{Diag}(g'_1(x_1), \dots, \dots, g'_n(x_n)) + \delta(D - D^T) \quad (\text{IV.60})$$

onde  $\text{Diag}$  denota a matriz diagonal com elementos não nulos correspondendo às derivadas de cada elemento da primeira parte da equação (IV.59). Notar que esse Jacobiano é não simétrico para qualquer matriz  $D$  não simétrica. O parâmetro  $\delta$  é colocado somente para ter a facilidade de tornar o mapping num gradiente a qualquer momento.

Por outro lado as funções  $g_j(x_j) \forall j = 1, \dots, n$ , são definidas por polinômios, visto que é esse tipo de função o que representa bem funções de custo associados aos problemas do interesse deste estudo (Problemas de Equilíbrio). Assim:

$$g_j(x_j) = \sum_{i=0}^5 \rho_{ij} x_j^i \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (\text{IV.61})$$

$$g'_j(x_j) = \sum_{i=1}^5 i \rho_{ij} x_j^{i-1} \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (\text{IV.62})$$

O esquema anterior permite, mediante geração aleatória dos parâmetros, preparar com relativa facilidade uma série de problemas para serem testados numericamente.

Diversos conjuntos  $\Omega$  são considerados para completar os exemplos. Um ponto interior é gerado por métodos previamente implementados (MACULAN et alia, 1987).

Para cada conjunto  $\Omega$  são resolvidos três problemas diferentes, cada um dos quais corresponde a uma semente diferente do gerador de números aleatórios. Esses, são os casos identificados por A, B e C na tabela (IV.1).

A implementação computacional é feita em microcomputador compatível com IBM - PC com clock de 10 MHz utilizando linguagem PASCAL.

Na tabela (IV.1) também é mostrado o número de iterações e o tempo de execução utilizado pelo algoritmo em cada caso. O conjunto  $\Omega$  é caracterizado na segunda coluna pelo número de restrições e o número de variáveis.

#### IV.4.3 COMENTARIOS ADICIONAIS.

Os resultados da tabela anterior mostram que o algoritmo é viável numericamente, isto é, pode ser utilizado com tempos razoáveis de uso de máquina e com um número aceitável de iterações para os problemas analisados. Infelizmente não se tem conhecimento de experiências numéricas que permitam estabelecer algum tipo de comparação para o problema aqui abordado. Os estudos que analisam o aspecto numérico de problemas IV(g, $\Omega$ ) se referem principalmente a um caso em que  $\Omega$  é definido pelo conjunto de restrições de conservação de fluxos em redes correspondente a problemas de equilíbrio. Essa estrutura de problemas será analisada com mais detalhe no capítulo seguinte.

PROBLEMA N°	MAPPING TIPO	N° ITERAÇÕES	TEMPO DE EXECUÇÃO(s)
1 (3x5)	A	2	3.62
	B	2	3.65
	C	3	7.79
2 (3x7)	A	7	21.53
	B	9	55.20
	C	4	11.36
3 (7x10)	A	3	14.60
	B	7	117.92
	C	4	19.00
4 (7x11)	A	4	31.85
	B	5	35.90
	C	3	22.24

Tabela IV.1 Resultados Numéricos.

## IV.5 UMA ABORDAGEM COMO PROBLEMA DE MÍNIMOS QUADRADOS.

A partir da demonstração do teorema (IV.1) pode ser concluído que o problema de inequação variacional também pode ser formulado como um problema equivalente de mínimos quadrados (GILL et alia., 1981). Isto porque se procura um mínimo global, que corresponde ao valor zero da função  $\bar{G}(x)$  tal como caracterizado no primeiro teorema desse capítulo, portanto pode se pensar em minimizar somente  $g(x)^T P g(x)$  e como se mostra no teorema mencionado a matriz de projeção é simétrica e idempotente, de modo que:

$$\bar{G}(x) = g(x)^T P g(x) = g(x)^T P^T P g(x) \quad (\text{IV.63})$$

definindo  $h(x) = P g(x)$ , tem - se:

$$\bar{G}(x) = h(x)^T h(x) = \|h(x)\|_2^2 = \sum_{i=1}^n h_i(x)^2 \quad (\text{IV.64})$$

e por tanto o problema de mínimos quadrados equivalente é:

$$\text{Minimizar } \bar{G}(x) = h(x)^T h(x) \quad (\text{IV.65a})$$

s. a

$$x \in \Omega = \{ x \in \mathbb{R}^n; Ax = b \} \quad (\text{IV.65b})$$

Embora problemas de mínimos quadrados podem ser resolvidos por algum método de programação não linear, em muitas situações parece mais conveniente utilizar métodos especificamente particularizados para esse tipo de problema. Alguns desses métodos são, Gauss - Newton, Levenberg - Marquandt, Aproximações Quase - Newton, etc. Todos eles se baseiam no fato da solução ótima do problema ser um número real positivo pequeno.

Seja  $J(x)$  o Jacobiano de  $h(x)$  e  $H_i(x)$  a matriz Hessiana de  $h_i(x)$ . Podem ser escritas a primeira e segunda derivada da função  $\bar{G}(x)$  como:

$$\bar{G}'(x) = J(x)^T h(x) \quad (\text{IV.66a})$$

$$\bar{G}''(x) = J(x)^T J(x) + \sum_{i=1}^n h_i(x) H_i(x) \quad (\text{IV.66b})$$

O fato de  $\|h(x^*)\|$  ser pequeno leva a pensar em aproximar a matriz Hessiana considerando somente o primeiro termo, em cada  $x^k \in \Omega$ , isto é:

$$\bar{G}''(x^k) = J(x^k)^T J(x^k). \quad (\text{IV.67})$$

O método de Gauss - Newton determina uma direção de descida  $d^k$  num ponto  $x^k$  a partir da resolução do seguinte sistema linear:

$$J(x^k)^T J(x^k) d^k = - J(x^k)^T h(x^k) \quad (\text{IV.68})$$

É considerado neste estudo que o problema formulado em (IV.65) cumpre com a característica da função objetivo ser nula na solução ótima do problema e portanto, a premissa do método de Gauss - Newton pode ser utilizada para estender tal método para o caso com restrições.

Considere - se inicialmente a existência de restrições do tipo definido em (IV.65b). Para esse caso se propõe uma direção tipo Newton que pode ser obtida a partir da resolução do problema quadrático definido por:

$$\text{Minimizar } Q(d) = ( J(x^k)^T h(x^k) )^T d + 0.5 d^T J(x^k)^T J(x^k) d \quad (\text{IV.69a})$$

s. a

$$d \in \Omega_d = \{d \in \mathbb{R}^m; Ad = 0\} \quad (\text{IV.69b})$$

Esse problema corresponde a uma aproximação quadrática da função  $G(x)$  no ponto  $x^k$  (supondo que o primeiro termo domina o segundo na equação (IV.66), e ele tem solução única quando a matriz  $J(x^k)^T J(x^k)$  é definida positiva. Analiticamente pode se verificar facilmente que tal matriz é ao menos semi - definida positiva .

Identificada uma direção, pode ser determinado o tamanho do passo que garante viabilidade do novo

ponto. Isto pode ser feito resolvendo o problema unidimensional que determina o valor mínimo da função (IV.65a) no raio definido pelo ponto  $x^k$  e a direção  $d^k$ . Tal problema se escreve como:

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar } h(x^k + \alpha d^k)^T h(x^k + \alpha d^k) && \text{(IV.70)} \\ &\alpha \geq 0 \end{aligned}$$

e sua solução,  $\alpha^*$  permite a obtenção de um novo ponto  $x^{k+1}$  viável segundo:

$$x^{k+1} = x^k + \alpha^* d^k.$$

O algoritmo (IV.C) apresenta formalmente o procedimento que resolve em geral um problema de mínimos quadrados não linear com restrições lineares de igualdade.

#### ALGORITMO IV.C.

Início

Determine  $x \in \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; Ax = b, x \geq 0\}$ ;

$k \leftarrow 0$ ;

Enquanto  $G(x^k)$  não nulo, faça

Determine direção  $d^k$ ; (Prob. IV.69)

Determine tam. de passo; (Prob IV.70)

$x^{k+1} \leftarrow x^k + \alpha^* d^k$ ;

$k \leftarrow k + 1$ ;

Fim enquanto;

Fim.



## CAPÍTULO V

## APLICAÇÃO EM PROBLEMAS DE EQUILÍBRIO.

Nesse capítulo, o método desenvolvido para resolver inequações variacionais no capítulo anterior, é aplicado para determinar uma solução aos problemas de equilíbrio estudados nos capítulos II e III do presente estudo, especialmente, Problemas de Equilíbrio de Preços e problemas de Equilíbrio de Tráfego. Evidentemente o principal interesse é analisar o comportamento do algoritmo quando enfrentado a tais problemas com Jacobiano não simétrico. A implementação computacional do algoritmo conserva as características já descritas em seções anteriores, modificando em cada caso apenas aqueles itens nos quais é possível evitar cálculos desnecessários, tendo em conta as estruturas das matrizes envolvidas em cada caso e o fato das restrições de desigualdade serem somente aquelas de não negatividade impostas sobre as variáveis.

## V.1 PROBLEMA DE EQUILÍBRIO DE PREÇOS.

## V.1.1 ANTECEDENTES GERAIS.

Considere - se o Problema Geral de Equilíbrio Espacial de Preços (GSPEP) formulado via inequação variacional em (I.14). Para facilitar a análise considera - se restrições de conservação de fluxo na rede tipo nó - arco. De maneira que o formato geral do problema é:

Determinar  $(s^{*T}, x^{*T}, d^{*T})^T \in \Omega$  tal que:

$$\pi(s^*)^T (s - s^*) + C(x^*)^T (x - x^*) - \pi(d^*)^T (d - d^*) \geq 0$$

$$(s, x, d) \in \Omega \quad (V.1a)$$

sendo  $\Omega$  definido por  $X = (s^T, x^T, d^T)^T$  que satisfaz :

$$-s_i + \sum_{a \in EA_i^+} x_a - \sum_{a \in EA_i^-} x_a + d_i = 0 \quad \forall i \in N \quad (V.1b)$$

$$x, d, s \geq 0 \quad (V.1c)$$

Para este caso a matriz A do algoritmo apresentado no capítulo anterior está formada pela matriz de incidência nó - arco e duas matrizes diagonais que correspondem às variáveis de oferta e demanda. Notar que para uma rede  $G = (N, A)$  com  $m = |N|$  e  $n = |A|$  a matriz A é ordem  $m \times (n + 2m)$ , para o caso em que todos os mercados são consumidores e produtores. Em geral tal matriz pode ser particionada como:

$$A = [S \mid B \mid D]$$

onde  $S = \text{diag}(-1, \dots, -1)$ ;  $D = \text{diag}(1, \dots, 1)$  e B a matriz de incidência nó - arco.

Para esse tipo de problema um ponto inicial pode ser facilmente obtido fixando valores para  $s_0 = d_0 > 0$  e considerando  $x_0$  como um fluxo viável na rede.

#### V.1.2 EXEMPLO CLASSICO.

Nessa seção é estudado um caso proposto no estudo de FRIESZ et alii (1983) e que tem servido como ponto de referência em diversos outros estudos de problemas de equilíbrio de preços nas suas variadas modalidades, ver por exemplo os estudos de FRIESZ, HARKER e TOBIN (1984), PANG (1984), HARKER (1988) e DRISSI - KAITOUNI (1987). Para este caso a rede considerada é mostrada na figura (V.1) que tem 5 nós e 16 arcos. As funções de custo na rede  $G = (N, A)$  e inversas da demanda e oferta são dadas por :

$$C_a(x) = \rho_{a1} + \rho_{a2} x_a^4 + \delta \sum_{j \neq a} \theta_{aj} x_j^4 \quad \forall a \in A \quad (V.2)$$

$$\pi_i(s) = \eta_{i1} + \eta_{i2} s_i^2 + \delta \sum_{k \neq i} \theta_{ik}^s s_k^2 \quad \forall i \in N \quad (V.3)$$

$$\pi_j(d) = \psi_{j1} - \psi_{j2} d_j^2 + \delta \sum_{k \neq j} \theta_{kj}^d d_k^2 \quad \forall j \in N \quad (V.4)$$

O parâmetro  $\delta$  é colocado para tornar com facilidade o problema não simétrico ( $\delta \neq 0$ ). Os valores dos outros

parâmetros das funções são dados nas tabelas (V.1), (V.2) e (V.3)

nó origem	nó destino	$\rho_{a1}$	$\rho_{a2}$	$\theta_{aj} \times 10^2$ (a, j)
1	2	1.0	0.1	(1,7):1.0; (1,14):2.0
1	4	2.0	0.2	(2,8):1.0; (2,16):3.0
1	5	3.0	0.3	(3,6):3.0; (3,12):2.0
2	1	1.0	0.1	(4,10):1.0; (4,13):4.0
2	3	2.0	0.2	(5,11):5.0; (5,16):1.0
2	5	3.0	0.3	(6,3):1.0; (6,9):6.0 (6,12):1.0
3	2	1.0	0.1	(7,1):2.0; (7,14):7.0
3	4	2.0	0.2	(8,2):3.0; (8,15):2.0
3	5	3.0	0.3	(9,3):2.0; (9,6):1.0 (9,12):5.0
4	1	1.0	0.1	(10,4):4.0; (10,13):1.0
4	3	2.0	0.2	(10,5):2.0; (11,16):1.0
4	5	3.0	0.3	(12,3):3.0; (12,6):2.0 (12,9):9.0
5	1	1.0	0.1	(13,4):3.0; (13,10):1.0
5	2	2.0	0.2	(14,1):3.0; (14,7):2.0
5	3	3.0	0.3	(15,5):3.0; (15,11):1.0
5	4	1.0	0.1	(16,2):1.0; (16,8):6.0

Tabela V.1 Parâmetros da função de custos.

Nó	$\eta_{i1}$	$\eta_{i2}$	$\theta_{i1}^s$	$\theta_{i2}^s$	$\theta_{i3}^s$	$\theta_{i4}^s$	$\theta_{i5}^s$
1	8.0	0.01	0.00	0.04	0.00	0.08	0.02
2	11.0	0.06	0.01	0.00	0.08	0.00	0.02
3	13.0	0.02	0.00	0.03	0.00	0.02	0.01
4	12.0	0.05	0.03	0.00	0.06	0.00	0.01
5	11.0	0.08	0.05	0.03	0.02	0.08	0.00

Tabela V.2 Parâmetros das funções  $\pi(s)$ .

Nó	$\psi_{j1}$	$\psi_{j2}$	$\oplus_{j1}^d$	$\oplus_{j2}^d$	$\oplus_{j3}^d$	$\oplus_{j4}^d$	$\oplus_{j5}^d$
1	10.0	0.03	0.00	-0.02	0.00	-0.02	-0.05
2	20.0	0.02	-0.01	0.00	-0.05	0.00	-0.02
3	30.0	0.01	0.00	-0.03	0.00	-0.03	-0.09
4	20.0	0.02	-0.03	0.00	-0.04	0.00	-0.03
5	8.0	0.03	-0.02	-0.02	-0.03	-0.05	0.00

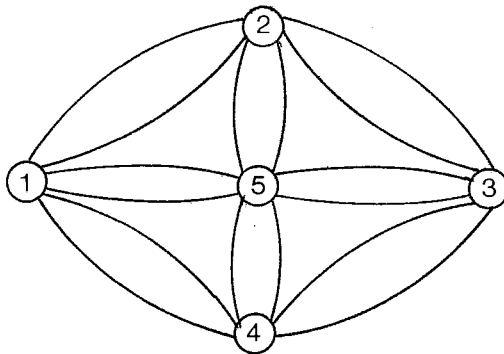
Tabela V.3 Parâmetros das funções  $\pi(d)$ .

Figura V.1 Rede.

Neste caso o mapping  $g(X)$  é da seguinte forma:

$$g(X) = (\pi_i(s)_{i=1..5}, C_a(x)_{a=1..16}, -\pi_j(d)_{j=1..5})^T$$

onde  $X = (s^T, x^T, d^T)^T$ . Assim, o Jacobiano é dado por uma matriz de blocos diagonal identificada por:

$$g'(x) = \begin{bmatrix} \Pi'(s) & \emptyset & \emptyset \\ \emptyset & C'(x) & \emptyset \\ \emptyset & \emptyset & \Pi'(d) \end{bmatrix} \quad (V.5)$$

Onde  $\Pi'(s)$  e  $\Pi'(d)$  são matrizes de ordem  $5 \times 5$  correspondentes aos Jacobianos das funções inversas da oferta e demanda em cada nó da rede respectivamente e  $C'(x)$  é o Jacobiano das funções de custo nos arcos.

A função  $f(\alpha)$  que surge da inequação variacional unidimensional definida no lema IV.5 tem a forma:

$$f(\alpha) = g(X^k + \alpha d^k)^T d^k \quad (V.6)$$

No caso em que  $\alpha^*$  pertence ao intervalo  $(0, \alpha_{\max})$  a equação não linear sendo resolvida pelo método de Newton requer da avaliação de  $f'(\alpha)$ , tal como determinado na seção III.4:

$$f'(\alpha) = d^{kT} g'(X^k + \alpha d^k) d^k \quad (V.7)$$

portanto tal equação pode ser avaliada aproveitando a estrutura da matriz Jacobiano antes definida; para isto considera - se uma partição do vetor direção (não se considera o superíndice k para simplicidade das expressões):

$$d = (d_s^T, d_x^T, d_d^T)^T \quad (V.8)$$

de modo que:

$$f'(\alpha) = d_s^T \Pi'(s + \alpha d_s) d_s + d_x^T C'(x + \alpha d_x) d_x + d_d^T \Pi'(d + \alpha d_d) d_d \quad \dots (V.9)$$

A relação anterior permite avaliar separadamente a contribuição de cada Jacobiano na função  $f'$ .

Com base nos antecedentes o algoritmo (III.B) aplicado para o problema antes definido, permite obter os seguintes resultados numéricos:

i) Grau de não simetria.

O parâmetro  $\delta$  nas equações (V.2) até (V.4) permite verificar a eficiência do algoritmo quando enfrentado a diversos graus de não simetria da matriz Jacobiano. A tabela V.4 apresenta esse comportamento para valores de  $\delta$  que vão desde 1 até 50.

$\delta$	N° iter.	tempo (s)
0.0	35	315.25
1.0	67	266.44
10.0	49	204.00
15.0	46	187.95
20.0	49	191.63
30.0	48	183.06
50.0	cicl.	---

Tabela V.4 Grau de não simetria.

A precisão considerada para o teste de parada foi  $1.0 \times 10^{-3}$  o que se mostrou suficiente para obter resultados de preços com até três decimais invariantes entre as duas últimas iterações.

Na medida que  $\delta$  aumenta o problema se torna mais intratável chegando a apresentar ciclagem em torno da solução quando  $\delta = 50.0$ . Por outro lado o número de iterações também aumenta quando o Jacobiano tende a ser simétrico ( $\delta \rightarrow 0$ ). Neste caso os tamanhos de passo na vizinhança da solução são menores. Nos casos estudados com  $\delta > 50.0$  na maioria dos casos o algoritmo tem tendência para a ciclagem. Contudo no início desta os valores de preços de equilíbrio apresentam precisão até de dois decimais.

O trabalho de HARKER(1988) permite estabelecer algum tipo de comparação dos valores anteriores com os métodos de Projeção (seção III.1.1) e diagonalização (seção III.1.2) quando acelerados com uma técnica PARTAN (LUENERGER, 1984). Tais resultados são apresentados na tabela V.5. Em termos gerais o método proposto tem uma eficiência numérica melhor que o algoritmo de projeção, tanto no número de iterações quanto no tempo de execução, tendo em conta que os resultados da tabela V.5 foram obtidos com um sistema computacional mais rápido (VAX 8600). Por outro lado o algoritmo de diagonalização se apresenta favorável enquanto ao número de iterações, mas isto não é assim em relação ao grau de não simetria do Jacobiano pois, com  $\delta = 15$  o problema tende para ciclagem.

$\delta$	Projeção		Diagonalização	
	N iter.	tempo(s)	N iter.	tempo(s)
1.0	202	1707.38	10.0	123.87
10.0	75	698.10	17.0	165.02
15.0	100	853.17	ciclagem	---

Tabela V.5 Resultados Para método de Projeção e Diagonalização.

ii) Características de convergência.

Um exemplo do procedimento passo a passo é mostrado na tabela (V.6) para  $\delta = 1.0$ . Pode ser identificada uma convergência lenta em torno da solução do problema e a velocidade mais alta enquanto o conjunto ativo não é identificado. Assim, o maior número de iterações é efetuado em pontos próximos da solução.

iii) Exemplo de resultado.

A tabela (V.7) apresenta resultados típicos de equilíbrio de custos em cada arco e o fluxo correspondente para o caso em que  $\delta = 1.0$ . Por outro lado a tabela V.8 inclui os preços assim como as quantidades demandadas e ofertadas em cada ponto da região representada pela rede. Pode ser verificado que tais valores satisfazem as condições de equilíbrio definidas no capítulo II e as restrições de conservação de fluxos na rede.

Iter.	Rest. At.	G(x)	Dif. Relativa
1	16	2523.46528	0.162666
2	17	2514.34276	0.154183
3	18	1334.61881	0.121259
4	19	947.07144	0.092033
5	20	334.06714	0.082735
6	21	20.15805	0.067220
7	22	6.88578	0.043670
8	22	3.95753	0.033479
9	23	1.40576	0.016143
10	23	0.21681	0.013658
11	23	0.18420	0.010452
12	23	0.08536	0.008917
13	23	0.08417	0.007115
14	23	0.04043	0.006065
15	23	0.03982	0.004822
16	23	0.01912	0.004099
17	23	0.01882	0.003247
18	23	0.00903	0.002748
19	23	0.00889	0.002164
20	23	0.00426	0.001821
21	23	0.00419	0.001421
22	23	0.00201	0.001183
23	23	0.00198	0.000911
24	23	0.00095	0.000746
25	23	0.00093	0.000560
26	23	0.00045	0.000445
27	23	0.00044	0.000321
28	23	0.00021	0.000239
29	23	0.00021	0.000158
30	23	0.00010	0.000097
31	23	0.00010	0.000055
32	23	0.00005	0.000000

Tabela V.6 Características da convergência.



Arco (i, j)	$C_a(x)$	$x_a$
(1, 2)	8.6275	2.9553
(1, 4)	8.6193	2.3985
(1, 5)	3.0000	0.0000
(2, 1)	1.0000	0.0000
(2, 3)	5.4002	2.0305
(2, 5)	3.0000	0.0000
(3, 2)	1.0000	0.0000
(3, 4)	2.0000	0.0000
(3, 5)	3.0000	0.0000
(4, 1)	1.0000	0.0000
(4, 3)	5.4087	2.0318
(4, 5)	3.0000	0.0000
(5, 1)	1.0000	0.0000
(5, 2)	3.2100	1.5683
(5, 3)	8.6103	2.0795
(5, 4)	3.2016	2.1661

Tabela V.7 Fluxos e custos de equilíbrios.

nó	Oferta		Demanda	
	$\pi_i$	$s_i$	$\pi_j$	$d_j$
1	8.28	5.35	8.00	0.00
2	16.91	9.93	16.91	12.42
3	22.31	21.58	22.31	27.72
4	16.91	9.91	16.91	12.43
5	13.70	5.81	8.00	0.00

Tabela V.8 Preços de Equilíbrio.

## V.1.3 EXEMPLOS ALEATÓRIOS.

São considerados aqui um conjunto de problemas gerados aleatoriamente conservando a seguinte estrutura geral:

a) REDE A (10 nós e 29 arcos):

Pares Origem/Destino ( $m_1 \times m_1$ ) com funções:

$$\pi_i(s_i) = \eta_{i1} + \eta_{i2} s_i^2 \quad \text{Na origem } i. \quad (\text{V.10a})$$

$$\pi_j(d_j) = \phi_j / (1.0 + d_j) \quad \text{No destino } j. \quad (\text{V.10b})$$

Funções de custos nos arcos.

$$C_a(x) = \rho_{a1} + \rho_{a2} x_a + \delta \sum_{\substack{b=1 \\ b \neq a}}^P \gamma_{ba} x_a \quad (\text{V.10c})$$

Com os seguintes valores gerados aleatoriamente:

Pares O/D :  $p \in \{1, 2, \dots, 10\}$

Função  $\pi_i(s)$  :  $\eta_{i1} \in [1.0, 10.0]$ ;  $\eta_{i2} \in [0.0, 0.01]$   $\forall i$

Função  $\pi_j(d)$  :  $\phi_j \in [1.0, 10.0]$ ;  $\forall j$ ,

Função  $C_a(x)$  :  $\rho_{a1} \in [1.0, 10.0]$ ;  $\rho_{a2} \in [0.0, 1.0]$ ;  
 $\gamma_{ba} \in [0.0, 1.0]$ ;  $\forall a$ .

b) REDE B (16 nós e 28 arcos):

Mesmas características que no caso anterior.

Para todos os casos considerados o critério de parada do algoritmo é quando a função  $G(x)$  atinge um valor inferior a  $1.0 \times 10^{-6}$  o que é suficiente para proporcionar preços de equilíbrio com até quatro decimais invariantes entre as duas últimas iterações, lembrando que ao trabalhar com preços apenas dois decimais tem um significado que são os centavos. Entretanto o ponto inicial obedece às mesmas regras consideradas na resolução do exemplo clássico.

Os resultados são apresentados nas tabelas (V.9) e (V.10). No primeiro caso (rede A), o grau de não simetria

do problema é estudado mediante uma variação do parâmetro  $\delta$  da função de custos, tendo em conta diversas dimensões do problema. Para isto foram considerados diferentes tipos de pares de origem/destino (O/D), ou seja foram fixados pares de nós entre os quais deve ser mantido o equilíbrio de preços. Evidentemente no resto dos nós é respeitada apenas a conservação de fluxos. Esse parâmetro é considerado na tabela (V.9) na segunda coluna. Na terceira, aparece o número de variáveis para cada caso, que é resultado da soma das variáveis de fluxo oferta e demanda. Na coluna correspondente a  $\Delta$  localiza-se a posição relativa entre o ponto inicial e o ponto final do processo iterativo, que é calculada com normas euclidianas segundo:

$$\Delta = \| X^* - X^0 \| / \| X^0 \|.$$

O primeiro fato que se constata observando os resultados obtidos é que o algoritmo converge até uma solução de equilíbrio para o GSPEP num número finito de etapas e com tempos de execução viáveis de se trabalhar em microcomputador.

Uma outra característica interessante de ser analisada é o fenómeno de ciclagem detetado em quatro casos observados nos exemplos 4, 6, 7 e 10, sendo que nos três últimos a eficiência do algoritmo é afetada, o que se reflete no número de iterações. Contudo o algoritmo converge até a solução com a mesma precisão de todos os outros casos, a exceção é o problema número 4 onde não foi possível atingir a precisão do critério de parada anteriormente apresentado, mas, com um valor  $1.0 \times 10^{-5}$  se encontraram preços e custos de equilíbrio com dois decimais inalterados entre as duas últimas iterações.

Tendo em conta o valor de  $\Delta$ , e como era de se esperar, um aumento no grau de não simetria, para um tamanho fixo de problema, se traduz num aumento do número de iterações. Entretanto, para um mesmo grau de não simetria o aumento do tamanho do problema, também se traduz num aumento do número de iterações.

N°	O/D	N° Var.	$\delta$	N° iter.	Tempo (s)	$\Delta$
1	3x3	32	1.0	27	513.55	0.8836
2			10.0	26	634.60	0.9085
3			25.0	32	723.30	0.8932
4			50.0	33	686.10	0.8183
5	5x5	39	1.0	29	951.14	1.1473
6			10.0	51	1747.50	1.2288
7			25.0	47	1008.37	1.0382
8			50.0	44	977.78	1.0390
9	7x7	43	1.0	31	814.16	2.0205
10			10.0	42	1017.82	2.0383
11			25.0	35	1108.45	2.0452
12			50.0	37	1123.60	2.0452

Tabela V.9 GSPEP, Problemas aleatórios, Rede A.

Os dois aspectos antes mencionados também são detectados no tempo de execução, embora não exista uma relação direta entre tempo e número de iterações devido a que a etapa mais cara do algoritmo é o cálculo (ou atualização) da matriz de projeção, que não é alterada entre iterações que não apresentam mudança de conjunto ativo.

Uma outra forma de estudar o grau de não simetria da matriz Jacobiano do mapping do problema de equilíbrio de preços é considerar um índice que proporcione também a fração de pares não simétricos da matriz. Para isto é definido o parâmetro

$$\delta_o = 100a/b \quad (V.11)$$

sendo  $a$  o número de pares de tipo  $(g'(i,j), g'(j,i))_{i \neq j}$  não simétricos e  $b$  o número total de pares. De maneira que  $\delta_o$  representa a percentagem de não simetria da matriz Jacobiano. Na tabela (V.10) isto foi avaliado para a rede B, notando que os exemplos aleatórios da seção anterior foram obtidos com  $\delta_o = 11.1\%$ . O problema considerado neste caso tem 38 variáveis e  $\delta = 1.0$ . Assim, na medida que  $\delta_o$  aumenta tem - se um aumento no número de iterações e no

tempo de execução, contudo obtendo para o pior caso (Jacobiano totalmente "não simétrico") um número de iterações não muito diferente do caso de baixa "não simetria" (11.1%). Esse crescimento em número de iterações para o caso  $\delta_o = 100\%$  em relação a  $\delta_o = 11.1\%$  é de 48%. Gráficamente isto é mostrado na figura (V.2), onde se pode ver o comportamento quase linear com declive menor que 1.

$N^\circ$	$\delta_o$	$N^\circ$ Iter.	Tempo
1	11.1	27	662.84
2	37.0	31	779.11
3	74.1	38	923.95
4	100.0	40	1031.17

Tabela V.10 GSPEP, Problemas aleatórios, rede B.

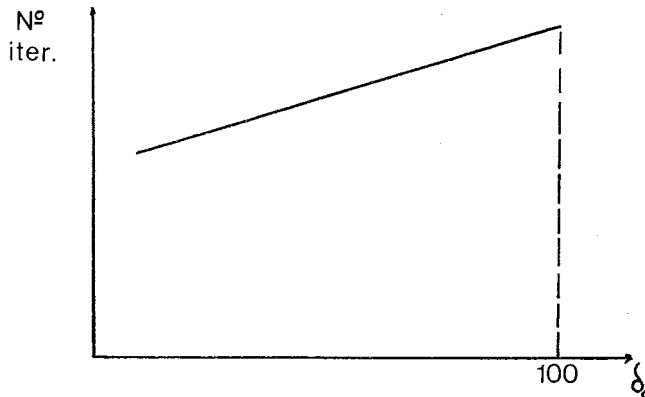


Figura V.2 Número de Iterações vs.  $\delta_o$ .

## V.2 PROBLEMA DE EQUILÍBRIO DE TRÁFEGO (TEP).

### V.2.1 ANTECEDENTES GERAIS.

O problema de equilíbrio de tráfego consiste em determinar fluxos sobre uma rede  $G(N,A)$  que satisfazem as condições de equilíbrio do usuário, dada uma demanda por viagens entre os nós da rede. O problema na sua formulação geral (que considera o fato do Jacobiano do mapping ser não simétrico) é um problema de inequação variacional e portanto pode ser resolvido pelo método proposto. Considere - se a formulação tipo nó arco estudado na seção I.1.5:

$$\text{Det. } x^* \in \Omega; \quad C(x^*)^T(x - x^*) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (V.12)$$

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n; \quad Ax = b, \quad x \geq 0\} \quad (V.13)$$

sendo  $A$  a matriz de incidência nó - arco,  $b$  o vetor de demanda obtido a partir da matriz origem - destino e  $C(x)$  é o mapping que representa o custo dos arcos da rede.

Numéricamente o problema permite obter vantagens da esparsidade da matriz  $A$  considerando a estrutura de rede. Assim por exemplo, o fato do posto da matriz de incidência ser igual a  $n-1$  permite trabalhar com uma restrição a menos, isto garante a existência da matriz inversa de  $(AA^T)$ . Por outro lado a própria matriz  $(AA^T)$  pode ser calculada fazendo uso direto da estrutura de rede, dado que os elementos da diagonal equivalem ao número de arcos que entram e saem do nó  $i$  e os elementos fora da diagonal em posições  $(i,j)$ , além de ser simétricos, correspondem ao número (com sinal menos) de arcos que ligam o par de nós  $(i,j)$ . Análise similar pode ser feita no caso de multiplicação de matrizes onde uma dessas é a própria matriz de incidência.

O ponto inicial a considerar nesse caso também pode ser obtido tendo em conta a estrutura de rede no sentido que para isto pode se fazer uma alocação "tudo ou nada", que consiste em calcular o caminho mínimo entre uma origem e um destino e designa-lhe o valor de toda a carga  $C$  obtida da

matriz O/D). Essa técnica é tipicamente usada em problemas de alocação de fluxos em redes de transporte (SHEFFI, 1987).

### V.2.2 EXEMPLO CLASSICO.

Considera - se nesta seção o exemplo proposto por NGUYEN e DUPUIS (1984) e utilizado em outros estudos como referência numérica (DRISSI - KAÏTOUNI, 1987). Para esse caso os custos do Jacobiano não simétrico são definidos por:

$$C(x) = Hx + h$$

sendo H uma matriz não simétrica de ordem 19x19 que está associada a uma rede de 13 nós. A matriz origem/destino é de ordem 2x2 dada na tabela (V.11), a rede na figura (V.3) e os elementos do mapping na tabela (V.12).

Nó	2	3
1	400.0	800.0
4	600.0	200.0

Tabela V.11 Matriz O/D.

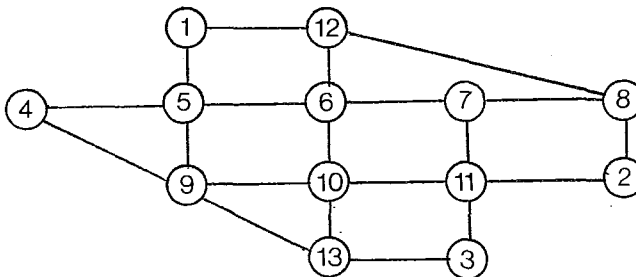


Figura V.3 Rede considerada.

i	j	$H_{ij} \times 10^3$	i	j	$H_{ij} \times 10^3$	i	j	$H_{ij} \times 10^3$	i	j	$H_{ij} \times 10^3$
1	2	10.0	6	1	2.0	10	7	0.2	16	14.0	
	3	5.0		3	1.0		9	5.0	15	10	0.1
	5	1.0		4	0.9		14	2.0		11	11.0
	6	1.2		5	2.0		15	13.0		14	0.2
2	1	1.0		12	0.4		16	12.0		16	0.5
	17	0.2		13	0.2	11	9	0.2	16	10	0.2
	18	0.1	7	5	0.6		15	3.0		14	0.1
3	1	2.0		8	0.1		18	2.0		15	2.0
	4	9.0		9	4.0	12	4	0.5		19	6.0
	5	2.0		10	4.4		6	0.4	17	2	4.0
	6	1.1		17	0.3		8	2.0		5	3.0
4	3	5.0	8	5	0.5		13	2.0		7	0.3
	6	2.0		7	2.0		14	0.3		8	2.0
	12	0.3		12	1.1	13	4	0.1		18	1.0
	13	0.1		14	0.1		6	2.0	18	2	4.0
5	1	3.0		17	0.4		12	1.0		9	4.0
	3	2.0	9	7	0.5		19	1.0		11	0.3
	6	6.0		10	1.0	14	8	0.3		17	2.0
	7	0.4		11	0.6		10	10.0	19	13	2.0
	8	1.0		18	5.0		12	3.0		16	5.0
	17	1.0					15	0.1			

$H_{ii} \times 10^3 = (18.0, 19.0, 15.0, 11.0, 13.5, 17.5, 12.5, 5.5, 13.5, 33.3, 12.5, 9.8, 5.0, 37.0, 20.0, 50.0, 20.0, 11.0, 10.0)$ .

$h_i = (7.0, 9.0, 9.0, 12.0, 3.0, 9.0, 5.0, 13.0, 5.0, 9.0, 9.0, 10.0, 9.0, 6.0, 9.0, 8.0, 7.0, 14.0, 11.0)$

Tabela V.12 Elementos do mapping.

Considerando os dados anteriormente apresentados e considerações numéricas similares com aquelas do GSPEP, o problema foi resolvido rapidamente com um tempo de 48.7 segundos em apenas quatro iterações tal como mostram as tabelas (V.13) e (V.14). O mesmo problema foi resolvido em 16 iterações pelo método de NGUYEN e DUPUIS (1984) onde em cada etapa o algoritmo resolve um problema de programação linear que tem complexidade similar à do método proposto.



Iter.	G(x)
1	$2.486 \times 10^2$
2	$3.246 \times 10^{-2}$
3	$1.645 \times 10^{-6}$
4	$2.866 \times 10^{-8}$

Tabela V.13 TEP, Resultados numéricos.

Arco	Custo	Fluxo
1	25.337443	704.160280
2	19.224283	495.839720
3	19.016641	0.000000
4	20.880000	800.000000
5	15.777182	704.160280
6	12.696641	0.000000
7	20.377515	895.504072
8	17.046601	304.495928
9	18.074359	895.504072
10	18.024060	0.000000
11	20.686389	895.504072
12	12.700341	0.000000
13	13.880000	800.000000
14	20.990287	304.495928
15	21.101363	104.495928
16	23.039441	200.000000
17	21.890277	495.839720
18	20.825706	0.000000
19	21.600000	800.000000

Tabela V.14 Custos de equilíbrio.

### V.2.3 EXEMPLOS ALEATÓRIOS.

O objetivo nesse caso é estudar o comportamento do algoritmo quando enfrentado a diferentes graus de não simetria do Jacobiano do mapping  $G(x)$  para o problema de equilíbrio de tráfego. Para isto é escolhido  $\delta_0$  (tal como definido para o GSPEP) como medida de "não simetria". Vários exemplos são aleatoriamente gerados com diferentes tamanhos de matriz  $O/D$  mantendo uma estrutura geral para o mapping segundo:

$$G(x) = Hx + h.$$

A matriz  $H$  é gerada aleatoriamente com elementos em  $[0.0, 1.0 \times 10^{-3}]$  enquanto que os elementos de  $h$  são escolhidos no intervalo  $[1.0, 10.0]$ . Por outro lado os elementos da matriz  $O/D \in [1.0 \times 10^2, 1.0 \times 10^3]$ . São considerados 5 graus de "não simetria" e três tamanhos de matriz  $O/D$ . A rede considerada é a rede A definida para os problemas de equilíbrio de preços estudados na seção anterior.

Observando a tabela V.15 pode - se ver em primeiro lugar, que o algoritmo proporciona uma solução numérica viável, isto é com um número razoável de iterações e com tempos de execução permissíveis em microcomputador. Por outro lado, o crescimento do tamanho da matriz  $O/D$  não acrescenta maior dificuldade ao problema, fato que era esperado visto que isto não se traduz no número de variáveis.

Existe uma leve tendência para a diminuição no número de iterações quando o grau de não simetria do problema aumenta, isto pode ser observado na tabela (V.15) para um tamanho fixo de matriz  $O/D$ . Nos casos 5,10 e 15 é observado ciclagem para valores da função  $G(x)$  inferiores a  $10^{-6}$ .

N°	O/D	$\delta_o$	N° iter.	Tempo (s)
1	5x5	6.4	23	635.32
2		28.1	21	625.10
3		49.3	20	590.11
4		80.8	21	631.14
5		100.0	20	648.99
6	7x7	6.4	20	633.12
7		28.1	23	574.85
8		49.3	22	583.36
9		80.8	19	510.30
10		100.0	18	554.14
11	10x10	6.4	20	629.53
12		28.1	22	591.16
13		49.3	25	615.76
14		80.8	20	520.14
15		100.0	17	514.21

Tabela V.15 TEP Exemplos Aleatórios.

## CAPÍTULO VI.

## DISCUSSÃO.

O método proposto pode ser comparado aos métodos existentes para resolver os problemas de equilíbrio abordados durante esse estudo desde um ponto de vista teórico; principalmente no referente ao número de operações efetuadas em cada etapa. A seguir são abordados tais aspectos:

- Métodos de Linearização para  $IV(g, \Omega)$ .

Os métodos de Linearização apresentados no capítulo III resolvem o problema de inequações variacionais através de uma seqüência de problemas de programação matemática (quadráticos) que resultam de considerar uma aproximação linear do mapping em torno a um determinado ponto. Sabe-se que tal problema quadrático pode ser resolvido em  $O((m+n)^3 L)$  operações aritméticas formulando e resolvendo as equações de Karush - Khun - Tucker como um problema de complementaridade linear onde  $L$  é o tamanho da entrada de dados do problema (KOJIMA et alii, 1987). No método proposto cada etapa requer apenas um limite superior de  $O(n^3)$  operações no cálculo da matriz de projeção, podendo ainda ser reduzido em  $O(n)$  quando implementadas atualizações sucessivas da matriz inversa.

Resulta interessante analisar a relação existente entre o método proposto e a matriz de projeção. Ambos tem origem em áreas diferentes das ciências, pois o método de projeção que foi especializado para problemas de equilíbrio primeiramente por DAFERMOS (1980), tem a sua origem em problemas variacionais que resultam de fenômenos da física teórica (GLOWINSKI et alii, 1976). O método de projeção determina um novo ponto viável em cada etapa encontrando a solução de um problema de projeção como formulado em equação III.5. Neste sentido esse método também pode ser visto como um método generalizado da programação não linear. Para isto basta substituir  $d^k$  por  $y - x^k$  na função objetivo do problema (III.5), onde  $d^k$  pode ser interpretada

como uma direção de melhora da inequação variacional. Com isto o problema se transforma em:

$$\text{Minimizar } g(x^k)^T d + 0.5d^T Gd \quad (\text{VI.1a})$$

s. a

$$A^* d = 0 \quad (\text{VI.1b})$$

Tal subproblema quadrático de direção é estruturalmente equivalente ao subproblema de Newton, no qual para o caso simétrico a matriz  $G$  corresponde à matriz Hessiana da função minimizada, avaliada no ponto  $x^k$  (GILL et alia, 1978). De maneira que o método de projeção pode ser identificado como um método de Newton generalizado. Por outro lado o método proposto resolve um subproblema de direção linear (problema IV.3) que portanto corresponde a uma generalização do método de direções viáveis ou, equivalentemente, uma generalização do método de gradiente projetado de Rosen (MINOUX, 1986).

Com relação ao tamanho de passo pode - se dizer que o método de projeção usa um tamanho fixo e pequeno ou bem um que é definido por uma seqüência convergente de números reais para garantir a convergência. Os outros métodos de linearização consideram um tamanho de passo unitário, posto que a solução do subproblema quadrático é o novo ponto  $x^{k+1}$ . O método proposto estabelece uma generalização de determinação de passo dos métodos de programação não linear, mediante a solução de uma inequação variacional unidimensional. Isto faz com que o esforço computacional seja maior que nos outros métodos. Por outro lado o fato de dar o maior passo possível garante uma chegada mais rápida até a solução do problema.

Deve ser mencionado que o tamanho de passo do método proposto também pode ser determinado efetuando uma busca linear unidimensional da função  $G(x)$  a partir do ponto  $x^k$ , mas com um maior esforço computacional que aquele utilizado para resolver dita inequação.

- Métodos não lineares para  $IV(c, \Omega)$ .

O método de diagonalização apresentado na seção III.1.2

também resolve uma seqüência de problemas de programação matemática, mas que dessa vez são não quadráticos e que portanto que requerem de um esforço computacional superior àquele que necessita o método proposto.

Por outro lado, o método de DUSSAULT e MARCOTTE (1985), resolve uma seqüência de problemas de programação linear cuja solução requer um esforço superior ao calculo da matriz de projeção em termos do número de operações elementares efetuadas.

#### - Métodos de Complementaridade Não Linear.

Neste caso encontramos características similares às comparações anteriormente feitas, pois a seqüência de problemas a serem resolvidos são de complementaridade linear. Entretanto o método de dimensão variável apresenta subproblemas de resolução mais difícil posto que esses são sistemas não lineares de equações. No primeiro desses dois casos não se tem conhecimento de estudos numéricos que resolvam subproblema de complementaridade linear mediante métodos polinomiais, o que provavelmente proporcione vantagens numéricas em relação ao método de Lemke.

Em todos os casos resulta difícil estabelecer comparações teóricas no que diz relação ao número de iterações o que pode ser feito somente através de testes numéricos executados em condições similares. Uma análise em tal sentido é apresentada no capítulo V mostrando que o método aqui proposto em alguns exemplos se comporta melhor que os métodos de projeção e diagonalização para GSPEP e melhor que o método de Nguyen para o caso de TEP. Contudo isto não garante uma superioridade em todos os casos dada a grande variedade de problemas que podem surgir.

As comparações anteriores são feitas com base nos problemas de equilíbrio de preços e tráfego, que como é sabido tem restrições de não negatividade sobre as variáveis. No caso em que o problema de inequações variacionais a resolver não tem esse tipo de restrição o método proposto apresenta notória superioridade do ponto de vista teórico, dado que ele requer o cálculo de uma única

matriz de projeção durante o processo iterativo. Nesse caso é importante também notar que podem ser utilizados métodos de segunda ordem para obter a solução do problema, tal como o próprio método de Newton. Contudo, visto que o valor mínimo da função  $G(x)$  é nulo é recomendável uma abordagem como problemas de mínimos quadrados tal como apresentado na seção IV.5.

Tal como estabelecido na seção II.1.3 o problema de equilíbrio de preços também pode ser colocado como um problema cuja região viável é uma rede. Logo em ambos os casos a estrutura de rede pode ser utilizada para evitar cálculos desnecessários. Nos métodos que resolvem um subproblema de programação matemática isto é comumente feito utilizando o método de Frank & Wolfe (MINOUX, 1983) que aborda um problema de minimização em redes mediante a resolução de uma seqüência de subproblemas de caminhos mínimos. O método proposto não aproveita diretamente a estrutura de rede do problema, fazendo - o somente na resolução da inequação variacional unidimensional e no cálculo da matriz  $AA^T$ . Nesse sentido parece uma interessante alternativa numérica estudar uma formulação equivalente para o problema de direção formulado na equação (IV.3) com base no estudo de GEROMEL e BAPTISELLA (1981) que formulam o seguinte subproblema de direção:

$$\text{Minimizar } 0.5 \| -g(x^k) - d \|^2 \quad (\text{VI.2a})$$

s. a

$$A^o d = 0 \quad (\text{VI.2b})$$

O problema anterior pode ser resolvido diretamente pelo método de Frank & Wolfe aproveitando a estrutura de rede. Embora isto não tenha sido analisado numericamente nesse estudo dá origem a uma interessante sugestão para futuros estudos.

Um outro aspecto que deve ser discutido em relação aos problemas de equilíbrio aqui abordados é o das capacidades dos arcos da rede. Isto porque problemas de

transporte sempre devem ter em consideração um limite nas unidades de transporte que utilizam uma determinada via. Nos exemplos considerados no capítulo anterior tal parâmetro é considerado implicitamente nas funções de custo, fazendo com que elas assumam valores muito altos na medida que o fluxo tende a atingir a capacidade do arco. Isto matematicamente corresponde a efetuar uma penalização nas funções de custo nos arcos. Contudo, podem existir situações nas quais não é possível evitar restrições explícitas de capacidade no problema. Os métodos em geral absovem sem maior dificuldade essa variante do problema, tendo - a em consideração diretamente no subproblema de direção para garantir a viabilidade do novo ponto. No método proposto isto deve ser considerado tanto no cálculo da direção como no cálculo do tamanho do passo. No cálculo da matriz de projeção, uma variável no seu limite superior (correspondendo com a capacidade) e uma restrição ativa podendo receber tratamento similar com aquele dado às restrições de não negatividade. No tamanho de passo, entretanto, tais restrições devem ser consideradas ao calcular um limite para o passo representado pela variável  $\alpha_m$ .

#### - Aspectos Numéricos.

O método proposto foi testado em variadas situações para resolver um problema com o padrão geral  $IV(g, \Omega)$  nos capítulos IV e V. Ao todo foram rodados 56 casos diferentes verificando em todos eles a viabilidade numérica do algoritmo, tanto no que se refere ao número de iterações quanto ao tempo de máquina quando implementado em microcomputador. Isto leva a crer que o algoritmo também é viável quando aplicado a problemas de grande porte em computadores maiores, fato que não é abordado nesse estudo, mas que indica um caminho a seguir não somente utilizando o algoritmo proposto senão que também testando outros algoritmos sobre os quais existem poucos antecedentes numéricos.

O algoritmo ao se iniciar com um ponto interior,



proporciona uma seqüência não crescente de pontos para a função  $G(x)$ . Nessa seqüência as restrições de desigualdade, (para os casos estudados) vão se tornando ativas sucessivamente até determinar o conjunto ativo no qual se encontra a solução do problema. Assim o número de iterações do problema depende do ponto inicial e portanto esse número é maior quanto maior fôr o número de variáveis.

Existem alguns casos nos quais foi detectado ciclagem do algoritmo, isto também tem sido detetado em outros algoritmos que resolvem problemas de equilíbrio tal como fora visto no capítulo anterior. Duas explicações existem para esse caso. A primeira reportada por GILL et alia (1981) é válida em geral para algoritmos que usam a estratégia de conjunto ativo. Cada vez que uma restrição é retirada desse conjunto é feita uma análise do sinal dos multiplicadores das variáveis, se essa estimativa estiver errada por erro de arredondamento então é retirada do conjunto uma restrição errada que o próprio algoritmo se encarrega de colocá - la novamente no conjunto ativo iniciando com isto o processo de ciclagem. A segunda explicação é com base no fato do algoritmo determinar uma direção correspondente ao mapping projetado no conjunto ativo. No caso do Jacobiano ser simétrico isto não apresenta problema porque o vetor mapping (gradiente) é ortogonal em cada ponto à função. No caso não simétrico tal vetor não é necessariamente ortogonal, de maneira que em pontos próximos da solução um erro de arredondamento no tamanho do passo pode dar um valor superior ao verdadeiro proporcionando uma direção errada que o próprio algoritmo tenta corrigir dando inicio ao processo de ciclagem. Isto leva a sugerir tamanhos de passo menores uma vez que o conjunto ativo é determinado.

Finalmente pode - se mencionar que o método apresentado nesse estudo proporciona uma nova perspectiva para enfrentar o problema de inequações variacionais que provêm de problemas de equilíbrio gerando com isso uma família de

métodos que obedece o esquema geral do algoritmo (VI.A). Deste modo uma linha de pesquisa surge a partir desse trabalho com a identificação de outras direções, tais como Frank & Wolfe, gradiente reduzido, etc.

ALGORITMO VI.A

Início

Escolha  $x^0 \in \Omega$ ;

$k \leftarrow 0$ ;

Enquanto  $G(x^k) \neq 0$  faça

Determinar  $d^k \in \Omega$  que diminua  $G(x)$ ;

Det.  $x^{k+1} \in \text{raio}(x^k, d^k)$ ;  $g(x^{k+1})^T (x - x^{k+1})$

$\forall x \in \text{raio}(x^k, d^k)$ ;

$k \leftarrow k + 1$ ;

Fim enquanto;

Fim.

## CAPÍTULO VI.

## CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES.

As principais conclusões que podem ser extraídas do estudo são:

- A resolução do problema  $IVCg, \Omega$  quando  $\Omega$  é somente composto por restrições lineares de igualdade pode ser através de um método de mínimos quadrados. Para esse  $\Omega$  o método proposto apresenta vantagens no número de operações aritméticas de cada etapa em relação aos outros métodos existentes na literatura.

- Enquanto o método de projeção para resolver  $IVCg, \Omega$  pode ser visto como um método de Newton (para resolver problemas de programação não linear) generalizado, o método proposto corresponde a um método de direções viáveis generalizado ou equivalentemente a um método de gradiente projetado generalizado.

- O método proposto é comparável com outros existentes para resolver o TEP e o GSPEP, tanto no aspecto numérico teórico como no aspecto numérico prático.

- O número de iterações necessárias para resolver problemas de tipo  $IVCg, \Omega$  com o método proposto, aumenta com o tamanho do problema quando o ponto inicial é um ponto interior à região viável.

- Nos 56 casos estudados em microcomputador o algoritmo se apresenta viável numericamente.

As recomendações mais importantes para futuros estudos são:

- Efetuar análise numérica do cálculo da projeção a partir de um problema quadrático tentando melhorar a eficiência computacional do algoritmo.

- Estender o algoritmo para caso de redes de grande

porte trabalhando com computadores maiores e mais rápidos.

- Determinar outras direções possíveis de considerar dentro do esquema geral apresentado no algoritmo VI.A.

- Estabelecer resultados teóricos gerais para o algoritmo VI.A principalmente em relação a sua convergência.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.

- AASHTIANI, H. e MAGNANTI, T. (1981) "Equilibria on a Congested Transportation Network. *SIAM J. Alg. Disc. Math.* 2,3,213-226.
- AHN, B. (1982) "A Gauss-Seidel Iteration for Nonlinear Variational Inequality Problems Over Rectangles. *Operation Research Letters*, 1,3,117-120.
- BAZARAA M. e SHETTY C. (1979) "Nonlinear Programming. Theory and Algorithms" John Wiley and Sons, New York.
- BECKMANN, M., Mc GUIRE, C. e WINSTEN C. (1956) "Etudies in the Economics of Transportation" Yale University Press.
- BERTSEKAS, D. E GAFNI, E. (1982) "Projection Methods for Variational Inequalities with Application to the Traffic Assignment Problem", *Mathematical Programming Study*, 17, 139-159.
- COURNOT, A. (1938) "Mathematical Principles of the Theory of Wealth", Translated by N.T. Bacon, Kelley, New York, 1960.
- DAFERMOS, S. (1971) "An Extended Traffic Assignment Model with Application to Two-Way Traffic". *Transportation Science*, 5, 4, 336-389.
- DAFERMOS, S. (1980) "Traffic Equilibrium and Variational Inequalities", *Transportation Science*, 14, 42-54.
- DAFERMOS, S. (1983) "An Iterative Scheme for Variational Inequalities", *Mathematical Programming*, 26, 40-47.
- DIEMIDOVICH B. e MARON I. (1987) "Computational Mathematics" MIR Publishers, Moscow.
- DRISSI-KAITOUMI, O. (1987) — "Problèmes D'Équilibre Spatial sur Réseau Général et Méthodes de Newton". Thèse Ph.D.,

Université de Montréal, Montréal.

DRISSI-KAITOUMI, O. (1988) "An Algorithm for the Decomposition of Arcs Flows into Path Flows for the GSPEP", Publication N° 569, Centre de Recherche sur les Transports, Montréal.

DRISSI-KAITOUMI, O. e FLORIAN, M. (1987) "An Algorithm for the Spatial Price Equilibrium Problem on a General Networks in the Space of the Path Flows", Publication N° 517, Centre de Recherche sur les Transports, Montréal.

DUSSAULT, J. e MARCOTTE, P. (1985) " A modified Newton Method for Solving Variational Inequalities", Publication N° 379, Centre de Recherche sur les Transports", Université de Montréal, Montréal.

EAVES, B. (1978) "Computing Stationary Points", *Mathematical Programming Study*, 7, 1-14.

EAVES, B. e SAIGAL, R. (1972) "Homotopies for the Computation of Fixed Points on Unbounded Regions", *Mathematical Programming*, 3, 225-237.

FALK, J e McCORMICK G. (1984) "Computational Aspects of the International Coal Trade Model", In *Spatial Price Equilibrium: Advanced in Theory, Computation and Application.* (Vol. 249 Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems) P. Harker (ed.) Springer Verlag, Berlin.

FERLAND, J., ZUBIETA, L. e SPIESS, H. (1986) "Nonlinear Spatial Price Equilibrium", Publication N° 477, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, Montréal.

FERNANDEZ, L., ENRIQUE, J. e FRIESZ, T. (1983) "Equilibrium Predictions in Transportation Markets : The State of the Art" *Transpn. Res.* 17B, 2, 155-172.

FISK, C. (1987) "Spatial Price Equilibrium on Congested Networks" *Transpn. Res.* 21B, 3, 175-182.

FISK, C. e NGUYEN, S. (1982) "Solution Algorithms for Network Equilibrium Models with Asymmetric User Costs" *Transpn. Science* 16, 3, 361-381.

FLETCHER, R. (1980) "Practical Methods of Optimization" John Wiley & Sons, New York.

FLORIAN, M. (1977) "A Traffic Equilibrium Model of Travel by Car and Public Transit Modes". *Transpn Science* 11, 2, 166-179.

FLORIAN, M. , GUELAT, J. e SPIESS, H.(1985) "An Efficient implementation of the PARTAN Variant of the Linear Aproximation Method for the Network Equilibrium Problem", Publication N° 538, Centre de Recherche sur les Transports, Montréal.

FLORIAN, M. e LOS .M. (1982) "A New Look at Static Spatial Price Equilibrium Models" . Publication N° 196, Centre de Recherche sur les Transports, Montréal.

FLORIAN, M. e SPIESS, H.(1982) "The Convergence of Diagonalization Algorithms for Asymmetric Network Equilibrium Problems", *Trpn. Research*, 16B, 6, 477-483.

FRIESZ, T., TOBIN, R., SMITH, T. e HARKER, P. (1983) "A Nonlinear Complementarity Formulation and Soution Procedure for the General Derived Demand Network Equilibrium Problem" *Journal of Regional Science* 23, 3, 337-359.

FRIESZ, T., HARKER, P. e TOBIN, R.(1984) "Alternative Algorithms for General Network Spatial Price Equilibrium Problem" *Journal of Regional Science* 24, 4, 475-507.

GEROMEL, J. e BAPTISELLA, L. (1981) "A Feasible Direction Method for Large Scale Non Convex Program - A Decomposition

Approach", *J. Optimization Theory and Appl.*, 35, 2, 231-250.

GILL, P., MURRAY, W. e WRIGHT, M. (1978) "Practical Optimization", Academic Press, New York.

GLOWINSKI, R., LIONS, J. e TREMOLIÈRES, R. (1976) "Analyse Numérique des Inéquations Variationnelles", DUNOD, Paris.

GUELAT, J., FLORIAN, M. e CRAINIC, T. (1987) A Multimodal Multiproduct Network Assignment Model for Strategic Planning of Freight Flows, Publication N<sup>o</sup> 549, Centre de Recherche sur les Transports, Montréal.

HABETLER, G. e KOSTREVA, M. (1978) "On a Direct Algorithm for Nonlinear Complementarity Problems", *SIAM Journal of Control and Optimization*, 16, 504-511.

HAMMOND, J. e MAGNANTI, T. (1987) "Generalized Descent Method for Asymmetric Systems of Equations", *Mathematics of Operation Research*, 12, 4, 678-699.

HARKER, P. (1988) "Accelerating the Convergence of the Diagonalization and Projection Algorithms for Finite Dimensional Variational Inequalities", *Mathematical Programming*, 41, 29-59.

HEARN, W. (1981) "The Gap Function of Convex Program", *Opn. Research Letters*, 1, 67-71.

HOTELLING, H. (1952) "Edgeworth's Taxation Paradox and the Nature of Demand and Supply Functions", *Journal of Political Economy*, 40, 577-616.

JOSEPHI, N. (1979) "Newton's Methods for Generalized Equations", Tech. Rept N<sup>o</sup> 1964, Math. Research Center, University of Wisconsin.

JOSEPHI, N. (1979) "Quasi-Newton Methods for Generalized Equations", Tech. Rept. 1965, Math. Research Center,



University of Wisconsin.

KAKUTANI, S.(1941) "A Generalization of Brower's Fixed Point Theorem", *Duke Mathematics Journal*, 8, 457-459.

KINDERLEHRER, D. e STAMPACCHIA, G. (1980) "An Introduction to Variational Inequalities and Applications", Academic Press, New York.

KOJIMA, M. e YOSHISE, A.(1987) "A Polynomial Time Algorithm for a Class of Linear Complementarity Problems", Department of Information Sciences, B-193, Tokyo Institute of Information Sciences, Tokyo.

KNIGHT, F. (1924) "Some Fallacies in the interpretation of Social Costs, *Quarterly Journal of Economics*, 38, 582-606.

LUENBERGER, D.(1984) "Introduction to Linear and Nonlinear Programming", Addison Wesley, Massachusetts.

MACULAN, N. PRADENAS L., SATORU, L. e PARADA V. (1987) "O Algoritmo de Karmarkar", *Anais, X Congresso Nacional de Mat. Ap. e Computacional*, 1, 506 - 509.

MARCOTTE, P. e GUELAT, J. (1985) "A Modified Method for Solving the Asymmetric Traffic Equilibrium Problem", Publication N° 404, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, Montréal.

MARCOTTE, P. e GUELAT, J. (1988) "Adaptation of a Modified Method for Solving the Asymmetric Traffic Equilibrium Problem", *Transpn. Science*, 22, 112-124.

MATHIESEN L.(1985) "Computational Experience in Solving Equilibrium Models by a Sequence of Linear Complementarity Problems", *Opn. Research*, 33, 1225-1250.

MINOUX, M. (1986) "Mathematical Programming, Theory and Algorithms, John Wiley & Sons, New York.

MURTY, K. (1988) "Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming", Heldermann Verlag, Berlin.

MURTY, K. (1974) "Note on a Bard-Type Scheme for Solving the Complementarity Problem", *Opsearch*, 11, 123-130.

NAGURNEY, A. (1984) "Comparative Tests of Multimodal Traffic Equilibrium Methods", *Trpn. Research*, 18B, 6, 469-485.

NAGURNEY, A. (1986) "An Algorithm for the Single Commodity Spatial Price Equilibrium Problem", *Regional Science and Urban Economics*, 16, 573-588.

NAGURNEY, A. (1987) "An Algorithm for the Classical Spatial Price Equilibrium Problem", *Opn. Res. Letters*, 6, 2, 93-98.

NAGURNEY, A. (1987) "Computational Comparisons of Spatial Price Equilibrium Methods", *Journal of Regional Science*, 27, 1, 55-76.

NGUYEN, S. (1976) "A Unified Approach to Equilibrium Methods for Traffic Assignment", In *Traffic Equilibrium Methods (Vol.118 Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems)* M. Florian (ed.) Springer Verlag, Berlin.

NGUYEN, S. (1974) "An Algorithm for the Traffic Assignment Problem", *Transpn. Science*, 8, 3, 203-216.

NGUYEN, S. e DUPUIS, C. (1984) "An Efficient Method for Computing Traffic Equilibria in Networks with Asymmetric Transportation Costs", *Transpn. Science*, 18, 2, 185-202.

ORTEGA, J. e REINBOLDT, W. (1970) "Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables", Academic Press, New York.

PANG, J. e CHANG, D. (1982) "Iterative Methods for Variational and Complementarity Problems", *Mathematical Programming*, 24, 284-313.

PANG, J. (1981) "An Equivalence Between two Algorithms for Quadratic Programming", *Mathematical Programming*, 20, 2, 152-165.

PANG, J. e YU, C. (1984) "Linearized Simplicial Decomposition Methods for Computing Traffic Equilibria on Networks", *Networks*, 14, 427-438.

PANG, J. (1984) "Solution of the General Multicommodity Spatial Equilibrium Problem by Variational and Complementarity Methods", *Journal of Regional Science*, 24, 3, 403-414.

PANG, J. e LEE, P. (1981) "A Parametric Linear Complementarity Technique for the Computation of Equilibrium Prices in a Single Commodity Spatial Models", *Mathematical Programming*, 20, 81-102.

POTTS, R. e OLIVER, R. (1972) "Flows in Transportation Networks", Academic Press, New York .

ROBSON, G. e PACCA, H. (1986) "Programação Não Linear", Ed. V Escola de Computação, Belo Horizonte.

ROWSE, J. (1981) "Solving the Generalized Transportation Problem", *Regional Science and Urban Economics*, 11, 57-68.

SAMUELSON, P. (1952) "Spatial Price Equilibrium and Linear Programming", *American Economic Review*, 42, 283-303.

SHEFFI, Y. (1985) "Urban Transportation Networks : Equilibrium Analysis with Mathematical Programming Methods, Prentice-Hall, New Jersey.

SOHL, J. (1984) "An Application of Quadratic Programming to the Deregulation of Natural Gas", In *Spatial Price Equilibrium: Advanced in Theory, Computation and Application*. (Vol. 249 Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems) P. Harker (ed.) Springer Verlag,

Berlin.

STEENBRINK, P. (1974) "Optimization of Transportation Networks", Wiley, New York.

TAHA, H. (1982) "Operations Research, An Introduction ", Macmillan Publishing Co., Inc., New York.

TOBIN, R (1984) "General Spatial Price Equilibria: Sensitivity Analysis for Variational Inequalities and Nonlinear Complementarity Formulations", In Spatial Price Equilibrium: Advanced in Theory, Computation and Application. (Vol. 249 Lectures Notes in Economics and Mathematical Systems) P. Harker (ed.) Springer Verlag, Berlin.

TOBIN, R. (1988) "A Variable Dimension Solution Approach for the General Spatial Price Equilibrium Problem", *Mathematical Programming*, 40, 33-51.

TOBIN, R. e FRIESZ, T. (1983) "Formulating and Solving the Demand Derived Network Equilibrium Problem in Terms of Arcs Variables". *Journal of Regional Science*, 23, 187-198.

TOBIN, R. e FRIESZ, T. (1988) "Sensitivity Analysis for Equilibrium Networks Flow", *Transportation Science*, 22, 4, 242-250.

TORRES, L. (1987) "Contribuição ao Problema de Equilíbrio em Redes", Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

VIGNES, J., ALT, R. e PICHAT, M. (1980) "Algorithmes Numériques Analyse et Mise en Oeuvre 2 - Équations et Systèmes Non Linéaires", Vol. 2, Technip, Paris.

WARDROP, J. (1952) "Some Theoretical Aspects of Road Traffic Research, Proc. Inst. Civil Eng. Part II , 325-378.

ZUBIETA, L. (1987) "Modèles D' Equilibre Spatial et

Méthodes de Résolution", Thèse Ph.D., Université de  
Montréal, Montréal.