

Um Estudo de Problemas Combinatórios em Grafos Perfeitos

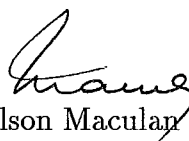
Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Tese submetida ao corpo docente da Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências em Engenharia de Sistemas e Computação.

Aprovada por:



Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.
(Presidente)



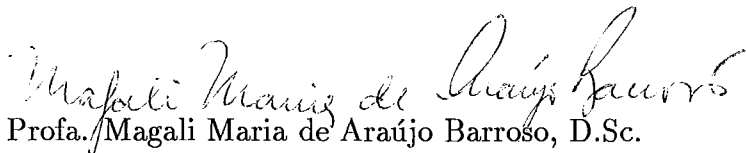
Prof. Nelson Maculan Filho, D.Sc.



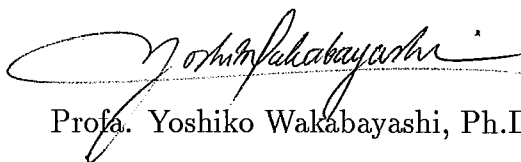
Profa. Sheila Veloso, D.Sc.



Prof. Valmir Barbosa, Ph.D.



Profa. Magali Maria de Araújo Barroso, D.Sc.



Profa. Yoshiko Wakabayashi, Ph.D.

Rio de Janeiro, RJ — Brasil
Dezembro de 1990

FIGUEIREDO, Celina Miraglia Herrera de

Um Estudo de Problemas Combinatórios em Grafos Perfeitos

[Rio de Janeiro] 1990.

viii, 107 p., 29,7 cm

(COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1990)

Tese—Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Grafos perfeitos. 2. Teoria dos grafos. 3. Complexidade de algoritmos.

I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

A Bruna, Silvia
e ao futuro.

Agradecimentos

O trabalho de pesquisa para esta tese foi realizado na Universidade de Waterloo e na Universidade Federal do Rio de Janeiro. Agradeço o carinho com que fui acolhida em ambas as instituições.

Sou grata ao Prof. Bruce Reed que me ensinou a apreciar a classe dos grafos perfeitos e me apresentou os problemas considerados nesta tese durante a minha estadia na Universidade de Waterloo.

Ao Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter agradeço o interesse com que tem acompanhado a minha pesquisa e, em especial, a sua cuidadosa orientação durante o período de redação.

Ao Prof. Frédéric Maffray agradeço várias sugestões para este trabalho. Ele me convenceu de que a integração via eletrônica é possível.

Gostaria ainda de agradecer à Valérie Tardif pelo entusiasmo que compartilhou comigo quando estudamos juntas problemas sobre grafos perfeitos.

Aos colegas Célia Mello, Márcia Cerioli e Petrucio Viana agradeço o cuidado com que leram este texto.

Agradeço a assistência que Juan Pizzorno tem me prestado na utilização da rede BITNET.

Agradeço ao Luiz Henrique de Figueiredo a paciência com que tem acompanhado o meu aprendizado do processador de textos \LaTeX .

Ao Prof. Jonas de Miranda Gomes agradeço a permissão para utilização do Setor de Computação do IMPA/CNPq.

Aos professores Nelson Maculan, Sheila Veloso, Valmir Barbosa, Magali Barroso e Yoshiko Wakabayashi agradeço a participação na banca examinadora desta tese.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.).

Um Estudo de Problemas Combinatórios em Grafos Perfeitos

Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Dezembro de 1990

Orientador: Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter.

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação.

Uma coloração para um grafo é uma partição do seu conjunto de vértices em subconjuntos onde os vértices são dois a dois não adjacentes. O problema de decisão NÚMERO CROMÁTICO, isto é, decidir se um grafo admite uma coloração com um tamanho dado, é *NP*-completo.

Um grafo é dito bom quando admite uma coloração e uma clique com o mesmo tamanho. Provamos que o problema de reconhecimento para esta classe de grafos é *NP*-completo.

Um grafo é dito perfeito quando todo subgrafo induzido é bom.

O problema NÚMERO CROMÁTICO, quando restrito à classe dos grafos perfeitos, passa a ser polinomial. Ainda se procuram, porém, algoritmos combinatórios para a resolução deste problema nesta classe.

Consideramos técnicas para o desenvolvimento de algoritmos eficientes para a resolução de problemas combinatórios em grafos perfeitos.

Um subconjunto de vértices num grafo é dito homogêneo, quando a sua substituição por qualquer um dos seus elementos produz grafos isomorfos. Utilizamos uma decomposição através de conjuntos homogêneos para resolver os problemas de otimização combinatória COLORAÇÃO MÍNIMA PONDERADA e CLIQUE MÁXIMA PONDERADA.

Um par de vértices num grafo é dito uma dupla par quando não existe caminho induzido ímpar entre eles. Uma técnica para algoritmos em grafos perfeitos consiste na contração de duplas pares. É *co-NP*-completo testar se um grafo admite uma dupla par. Provamos que uma subclasse de grafos perfeitos, obtida ao se proibir dois subgrafos, é quase-paridade, isto é, um grafo desta classe que não seja trivial, contém uma dupla par ou o seu complemento contém uma dupla par.

Abstract of thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment for the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.).

A Study of Combinatorial Problems on Perfect Graphs

Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

December of 1990

Thesis Supervisor: Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter.

Department: Computation and Systems Engineering.

A colouring for a graph is a partition of its vertex set into subsets such that their vertices are pairwise non-adjacent. The decision problem CHROMATIC NUMBER, i.e., to decide whether a graph admits a colouring of a given size, is *NP*-complete.

A graph is good when it admits a colouring and a clique of the same size. We prove that the recognition problem for this class of graphs is *NP*-complete.

A graph is perfect when all its induced subgraphs are good.

The problem CHROMATIC NUMBER, when restricted to the class of perfect graphs, turns out to be polynomial. Nevertheless, combinatorial algorithms which solve this problem for this class are still being sought.

We consider techniques for devising efficient algorithms for solving combinatorial problems on perfect graphs.

A homogeneous set is a subset of vertices whose substitution by any of its elements produces isomorphic graphs. We solve the combinatorial optimization problems MINIMUM WEIGHTED COLOURING and MAXIMUM WEIGHTED CLIQUE by developing a decomposition procedure using homogeneous sets.

A pair of vertices is an even pair when there is no odd induced path between them. A technique to devise algorithms on perfect graphs consists of contracting on even pairs. It is *co-NP*-complete to test for the existence of an even pair in a graph. We prove that a subclass of perfect graphs, obtained by forbidding two subgraphs, is quasi-parity, i.e., any non-trivial graph in this class either contains an even pair or its complement contains an even pair.

Índice

1	Introdução	1
1.1	Grafos Perfeitos	1
1.2	Descrição da Tese	3
1.3	Definições Básicas	4
2	Coloração e Grafos Perfeitos	9
2.1	Algoritmo Guloso	10
2.2	Decomposição	16
2.3	Contração	21
3	Complexidade	28
3.1	Grafos Bons	28
3.2	Tabuleiros	32
3.3	Paridade	37
4	Conjuntos Homogêneos	40
4.1	Conjuntos Homogêneos e Substituição	40
4.2	Teorema dos Grafos Perfeitos	42
4.3	Teste para Conjuntos Homogêneos	45
4.4	Árvore de Conjuntos Homogêneos	50
4.5	Problemas de Otimização	53
4.6	Uma Generalização: Pares Homogêneos	59
4.7	Separando Grafos Minimalmente Imperfeitos de Grafos Tabuleiros	64
5	Touros	67

5.1	A Conjectura Forte para Grafos sem Touros	68
5.2	O Reconhecimento dos Grafos Perfeitos sem Touros	71
5.3	O Teorema	73
5.4	Lemas	74
5.5	Um Algoritmo	85
6	Conclusão	87
	Bibliografia	90
	Apêndice	95

Lista de Figuras

1.1	Interseção de três áreas.	3
1.2	Touro.	6
1.3	P_4 e C_5	7
2.1	Grafo colorido com quatro cores.	9
2.2	Algoritmo guloso de coloração.	10
2.3	Ciclo induzido ímpar e ciclo induzido par.	11
2.4	Obstrução.	12
2.5	Diagrama para lema: obstrução.	13
2.6	Coloração ótima com uma ordem simplicial.	15
2.7	Coloração ótima com uma ordem transitiva.	15
2.8	$\max(\chi(P_4), \chi(P_5)) \neq \chi(C_7)$	17
2.9	Um grafo imperfeito pode ter filhos perfeitos.	18
2.10	Diagrama para lema: ciclo induzido.	19
2.11	Árvore de cliques.	20
2.12	Contração de um par de vértices.	22
2.13	Contração não preserva clique máxima.	22
2.14	Contração não preserva nem clique máxima nem número cromático.	22
2.15	Admitir dupla par não é auto-complementar.	23
2.16	Seqüência de contrações pares.	24
2.17	Coloração através de descontrações.	25
2.18	Clique máxima através de descontrações.	25
2.19	Um grafo que não é quase-paridade.	27
3.1	Dois grafos 4-coloríveis.	29

3.2	Grafo bom.	30
3.3	Grafos M_1 e M_2	30
3.4	Grafo M_3	31
3.5	Grafo minimalmente imperfeito.	34
3.6	Grafo tabuleiro e não minimalmente imperfeito.	35
4.1	Grafo bipartido completo e ciclo induzido.	41
4.2	Grafo G com conjunto homogêneo H	41
4.3	Substituição.	42
4.4	Entrada para o algoritmo.	49
4.5	Árvore de conjuntos homogêneos.	50
4.6	Touro, casa e dominó.	52
4.7	Castelo.	52
4.8	Decomposição homogênea.	55
4.9	Árvore de cliques máxima.	57
4.10	Decomposição homogênea.	59
4.11	Grafo bipartido e ciclo induzido ímpar	60
4.12	Grafo G com par homogêneo (Q_1, Q_2)	60
4.13	Árvore de pares homogêneos.	62
4.14	Decomposição não eficiente.	64
4.15	Anti-gêmeos.	65
5.1	Touro.	67
5.2	C_6 -estendido.	68
5.3	Castelo.	69
5.4	H_0	69
5.5	Roda.	71
5.6	Castelo rotulado.	71
5.7	\overline{C}_6	73
5.8	Conjunto induz um touro.	75
5.9	Conjunto induz um touro.	75
5.10	Conjunto induz um touro.	75

5.11	Caso $ C = 6$.	76
5.12	$\text{dist}(y, C) = 0$	76
5.13	$\text{dist}(y, C) = 1$	77
5.14	$\text{dist}(y, C) = 2$	77
5.15	$\text{dist}(y, C) \geq 3$	77
5.16	Ciclo ímpar.	78
5.17	Caso 1: $(a_i, v_2) \in E(G)$.	78
5.18	Caso 1.1: touro.	79
5.19	Caso 1.2: touro.	80
5.20	Caso 2: touro.	81
5.21	Ciclo induzido de tamanho 6.	82
5.22	Caso 1: C_6 -estendido.	82
5.23	Caso 2: C_6 -estendido.	83
5.24	Caso 2: C_6 -estendido.	83
5.25	Caso 2: C_6 -estendido.	84
6.1	Garra e Diamante	87
6.2	C_6 -estendido admite dupla par	89
A.1	Grafo X_i correspondendo à variável x_i .	96
A.2	Grafo C_j correspondendo à cláusula c_j .	96
A.3	Diagrama para o grafo U .	97

Capítulo 1

Introdução

Eu sou o Alfa e o Omega.
(Apoc. 1,8)

1.1 Grafos Perfeitos

Um grafo é perfeito quando todo subgrafo induzido admite uma coloração e uma clique com o mesmo tamanho.

Esta definição procurou unificar três teoremas clássicos da teoria dos grafos, a saber: o teorema de König para grafos bipartidos [Kö 31], o teorema de Dilworth para grafos de comparabilidade [Dl 50] e o teorema de Hajnal e Surányi para grafos triangularizados [HaSu 58].

Teorema 1.1 [Kö 31] *Num grafo bipartido, o número mínimo de vértices suficientes para cobrir todas as arestas é igual ao número máximo de arestas independentes.*

Teorema 1.2 [Dl 50] *O número máximo de elementos dois a dois incomparáveis num conjunto parcialmente ordenado é igual ao número mínimo de cadeias que podem particioná-lo.*

Teorema 1.3 [HaSu 58] *O complemento de um grafo triangularizado é perfeito.*

Claude Berge introduziu o conceito de grafo perfeito no início dos anos 60 e propôs duas conjecturas para esta classe: uma sobre o seu carácter auto-complementar e outra sobre a sua caracterização por subgrafos induzidos proibidos:

- **CONJECTURA FRACA DOS GRAFOS PERFEITOS:** Um grafo é perfeito se e somente se o seu complemento é perfeito.

- **CONJECTURA FORTE DOS GRAFOS PERFEITOS:** Um grafo é perfeito se e somente se nem o grafo nem o seu complemento contêm um ciclo induzido ímpar com mais de três vértices.

A primeira conjectura, provada por Lovász em 1972, é conhecida como o teorema dos grafos perfeitos [Lo 72]. Já a segunda conjectura, ainda em aberto, é conhecida como a conjectura forte dos grafos perfeitos.

Uma outra linha de pesquisa considera o estudo dos grafos perfeitos como um ramo da complexidade computacional.

Garey e Johnson, em seu livro sobre problemas *NP*-completos [GaJo 79], listaram doze problemas considerados em aberto, dado que, embora pertencessem à classe *NP*, não era conhecido então se algum deles era *NP*-completo.

Em 1981, Johnson iniciou uma coluna no *Journal of Algorithms* com o objetivo de atualizar os problemas apresentados em seu livro e também enunciar novos problemas em aberto. Nesta época, seis problemas da lista original tinham sido resolvidos, entre os quais PROGRAMAÇÃO LINEAR. Foi adicionado então um novo problema, a saber, GRAFO PERFEITO, isto é, o problema de reconhecimento para a classe dos grafos perfeitos.

Observamos que o problema GRAFO PERFEITO não fez parte da lista original porque, naquela época, ainda não se sabia se este problema pertencia a *NP*.

Na verdade, duas estratégias provaram que este problema, de fato, pertence a *co-NP*: propriedades combinatórias dos grafos particionáveis [Ca 82] e o método do elipsóide para programação linear [GrLoSc 81]. Observamos que Grötschel, Lovász e Schrijver, na verdade, desenvolveram um algoritmo para resolver, em tempo polinomial, os problemas de otimização combinatória COLORAÇÃO MÍNIMA e CLIQUE MÁXIMA, associados respectivamente aos parâmetros que definem a classe dos grafos perfeitos. As versões de decisão destes dois problemas de otimização combinatória são *NP*-completos, o que revela a forte condição de dualidade que define esta classe de grafos. Ainda procuramos algoritmos para estes dois difíceis problemas de otimização baseados exclusivamente em propriedades combinatórias dos grafos perfeitos.

Na mais recente atualização da lista de problemas em aberto [Jo 89], dos doze problemas originais, apenas três continuam em aberto, a saber, ISOMORFISMO DE GRAFOS, NÚMERO COMPOSTO e TRIANGULAÇÃO MÍNIMA, além do problema GRAFO PERFEITO, que fora incluído posteriormente.

Finalmente, dado que a propriedade hereditária que define esta classe de grafos é uma igualdade minimax, podemos considerar o estudo de grafos perfeitos como um ramo da otimização combinatória.

O diagrama da figura 1.1 procura representar as três áreas da teoria da computação mencionadas, indicando a classe dos grafos perfeitos na sua interseção.

Como referências, podemos citar dois livros específicos do tema: [Go 80] para algoritmos eficientes para subclasses de grafos perfeitos e [BeCh 84] para uma co-

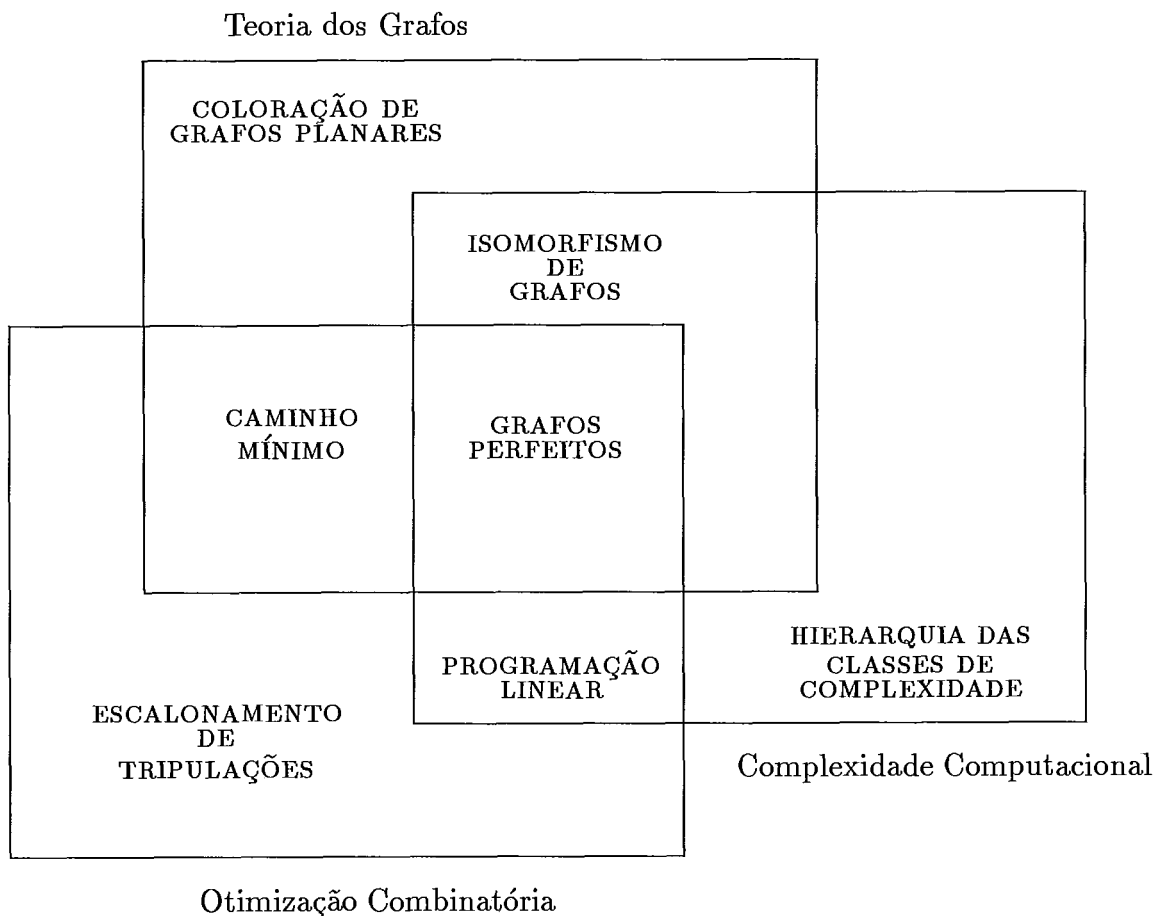


Figura 1.1: Interseção de três áreas.

letânea dos tópicos principais para o estudo desta classe. Em língua portuguesa, citamos as teses de Barroso [Ba 87], Mendonça [Md 87] e Villanueva [Vi 89].

1.2 Descrição da Tese

Este trabalho considera e procura contribuir para três aspectos do problema de coloração em grafos perfeitos.

Consideramos, primeiramente, no capítulo 3, a complexidade do problema de decisão NÚMERO CROMÁTICO e a tentativa de se definir uma classe de grafos onde o cálculo deste parâmetro, em geral difícil, seja polinomial. Em particular, provamos que o problema de reconhecimento para a classe de grafos onde o número cromático é igual ao tamanho de uma maior clique é *NP*-completo. Apresentamos, também, uma prova de que o problema de reconhecimento para grafos imperfeitos pertence a *NP*, um resultado de Cameron [Ca 82].

A seguir, consideramos o desenvolvimento de algoritmos eficientes para colorir subclasses de grafos perfeitos. É estudado, no capítulo 4, um tipo de decomposição

que permite resolver o problema de reconhecimento, bem como o de COLORAÇÃO MÍNIMA e CLIQUE MÁXIMA, para subclasses de grafos perfeitos. Esta decomposição, através de conjuntos homogêneos, foi definida por Lovász quando provou o teorema dos grafos perfeitos [Lo 72]. Na verdade, consideramos um problema de otimização mais geral, a saber, o problema de COLORAÇÃO MÍNIMA PONDERADA. Obtemos teoremas de decomposição que nos permitem resolver este problema de otimização para subclasses de grafos perfeitos. Uma generalização do conceito de conjunto homogêneo é considerada através do estudo de pares homogêneos. Também são obtidos teoremas de decomposição para o problema de coloração mínima ponderada neste caso.

Finalmente, consideramos, no capítulo 5, a relação de inclusão entre duas classes de grafos perfeitos, a saber, a classe dos grafos perfeitos sem touros e a classe dos grafos quase-paridade. Esta última foi definida por Meyniel [Me 87], a partir de uma estrutura conhecida como dupla par, cuja existência conduz a algoritmos eficientes para a coloração ótima de certas subclasses de grafos perfeitos.

Foi conjecturado por Reed que todo grafo perfeito sem touros é quase-paridade [Re 89]. Determinamos um grafo, chamado C_6 -estendido, que nos permite provar que todo grafo perfeito sem touros, sem C_6 -estendidos e cujo complemento não contém um C_6 -estendido, é um grafo quase-paridade, isto é, caso não seja um grafo trivial, contém uma dupla par ou o seu complemento contém uma dupla par. A prova, sendo construtiva, nos permite exibir em tempo polinomial, caso a entrada não seja uma clique, uma dupla par no grafo ou no seu complemento.

Observamos, porém, que foi demonstrado recentemente que é *co-NP*-completo testar a existência de uma dupla par em um grafo. Esta prova [Bi 89] será apresentada em um apêndice.

Para melhor apreciação destes resultados, apresentamos no capítulo 2 um resumo das técnicas que têm sido utilizadas para resolver o problema de coloração na classe dos grafos perfeitos.

Concluimos este trabalho com uma discussão no capítulo 6 sobre as conjecturas apresentadas e sugerimos direções para futura pesquisa.

1.3 Definições Básicas

Apresentamos nesta seção algumas definições básicas utilizadas ao longo desta tese.

Um **grafo** $G = (V, E)$ consiste de um conjunto finito não-vazio V de **vértices** e de um conjunto E de **arestas**, onde cada aresta é um par não ordenado de vértices distintos. Denotaremos o conjunto de **vértices** de um grafo G por $V(G)$ ou simplesmente por V caso não haja ambigüidade.

Dizemos que um grafo é **trivial** quando só possui um vértice.

Dada uma aresta $e = (x, y) \in E$, dizemos que x e y são as **extremidades** de e .

Neste caso, x e y são ditos **adjacentes** ou **vizinhos** e dizemos que x vê y . Caso um vértice x veja dois vértices adjacentes y e z , dizemos que x vê a aresta (y, z) .

Um vértice que vê todos os demais vértices no grafo é dito **universal**.

Dizemos que um grafo é **estrela** caso admita um vértice universal.

O conjunto de vértices adjacentes a um dado vértice v em um grafo G é chamado a **vizinhança** de v em G e será denotado por $N_G(v)$ ou simplesmente por $N(v)$ caso não haja ambigüidade.

Analogamente, denotaremos por $N_G(T)$ a **vizinhança** de um conjunto T de vértices no grafo G , isto é, o conjunto de vértices adjacentes a algum vértice $t \in T$, no grafo G .

O **complemento** de um grafo G , denotado por \overline{G} , é o grafo com o mesmo conjunto de vértices de G e tal que dois vértices distintos são adjacentes em \overline{G} se e somente se não são adjacentes em G .

Dizemos que uma propriedade é **auto-complementar** quando é satisfeita pelo grafo e pelo seu complemento. Analogamente, definimos uma classe de grafos auto-complementar ou fechada por complementação.

Um grafo $H = (W, F)$ é dito um **subgrafo** de um grafo $G = (V, E)$ caso $W \subseteq V$ e $F \subseteq E$, e denotaremos por $H \leq G$. Dado um conjunto de vértices $W \subseteq V$, dizemos que um subgrafo $H = (W, F)$ de um grafo $G = (V, E)$ é **induzido** por W se toda aresta de G com extremidades em W pertence a F . Denotaremos por $H = G_W$, o subgrafo $H \leq G$ induzido por $W \subseteq V$.

O grafo $G \setminus v$, obtido do grafo G pela remoção de um vértice v , é o subgrafo induzido pelo conjunto $V \setminus \{v\}$. Analogamente, o grafo $G \setminus H$, obtido do grafo G pela remoção de um subgrafo H , é o subgrafo induzido pelo conjunto $V(G) \setminus V(H)$.

Definimos o **grafo de linha** $L(G)$ associado a um grafo G como o grafo cujos vértices são as arestas de G e cujas arestas são os pares de arestas incidentes em G .

Dizemos que uma propriedade é **hereditária** caso seja satisfeita pelo grafo e por todos os seus subgrafos induzidos. Analogamente, definimos uma classe de grafos hereditária.

Dizemos que dois grafos são **isomorfos** caso exista uma bijeção entre os seus conjuntos de vértices que preserve adjacência.

Quando G não contém subgrafo induzido isomorfo a H , dizemos que G é um grafo **sem H 's** ou que G **não contém** um H .

Considere, por exemplo, o grafo auto-complementar $G = (V, E)$, onde $V = \{a, b, c, d, e\}$ e $E = \{(a, b), (b, c), (c, a), (a, d), (b, e)\}$. Este grafo, conhecido como **touro**, está representado na figura 1.2.

Consideremos a classe dos grafos sem touros. Como esta classe é definida através de um subgrafo induzido proibido, obtemos uma classe de grafos hereditária. Além disso, como um touro é auto-complementar, obtemos também uma classe auto-

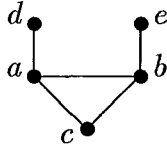


Figura 1.2: Touro.

complementar.

Seja \mathcal{A} uma coleção de conjuntos e X um conjunto em \mathcal{A} . Dizemos que X é **maximal** em \mathcal{A} se não for subconjunto próprio de nenhum elemento de \mathcal{A} . Dizemos que X é **máximo** em \mathcal{A} se nenhum elemento de \mathcal{A} tem cardinalidade maior que a de X . Analogamente, obtemos os conceitos **minimal** e **mínimo**.

Dada uma classe de grafos não hereditária \mathcal{C} , dizemos que um grafo em \mathcal{C} é **minimalmente** \mathcal{C} caso nenhum dos seus subgrafos induzidos próprios pertença a \mathcal{C} .

Dados dois vértices x e y de um grafo $G = (V, E)$, definimos um **caminho** entre x e y como uma seqüência $P = [x = v_0, v_1, \dots, v_k = y]$ onde os vértices v_i são distintos e $(v_i, v_{i+1}) \in E$.

Dizemos que P é um **caminho induzido** entre x e y caso o conjunto de vértices de P seja minimal.

Um **ciclo** é uma seqüência $C = [v_0, v_1, \dots, v_k]$ tal que $[v_0, v_1, \dots, v_{k-1}]$ é um caminho, $v_0 = v_k$ e $k \geq 3$.

Analogamente, dizemos que C é um **ciclo induzido** quando o seu conjunto de vértices é minimal.

Dizemos que um grafo é um **cociclo** ou um **cociclo induzido** caso o seu complemento seja um ciclo ou um ciclo induzido, respectivamente.

O **tamanho** de um caminho é o seu número de arestas. O **tamanho** de um ciclo ou de um cociclo é o seu número de vértices. A **paridade** de um caminho, de um ciclo, ou de um cociclo, é a paridade do seu tamanho.

A **distância** entre dois vértices numa mesma componente conexa de um grafo é o tamanho de um menor caminho entre eles.

Dado um grafo $G = (V, E)$, denotaremos por n o número de vértices $|V|$ e por m o número de arestas $|E|$. O **tamanho** $|G|$ do grafo G é n .

Uma **corda** em um ciclo é uma aresta no grafo cujas extremidades são vértices não consecutivos no ciclo.

Uma corda é dita **triangular** quando suas extremidades são vértices a distância dois no ciclo.

Denotaremos por P_k e C_k o caminho induzido por k vértices e o ciclo induzido por k vértices, respectivamente (veja figura 1.3). Observamos que $|P_k| = k - 1$ e $|C_k| = k$.



Figura 1.3: P_4 e C_5 .

Um **grafo orientado** $\vec{G} = (V, \vec{E})$, consiste de um grafo com uma orientação no seu conjunto de arestas, isto é, cada aresta é um par ordenado de vértices distintos. Denotamos o par ordenado $(x, y) \in \vec{E}$ por \vec{xy} .

Uma **orientação semitransitiva** de grafo $G = (V, E)$ é um grafo orientado $\vec{G} = (V, \vec{E})$, tal que se \vec{xy} e $\vec{yz} \in \vec{E}$ então $\vec{xz} \in \vec{E}$. Já uma **orientação transitiva** é uma orientação semitransitiva que não produz ciclos orientados.

Um conjunto **estável** ou **independente** é um subconjunto de vértices dois a dois não adjacentes.

Uma **clique** ou um **grafo completo** é um grafo onde quaisquer dois vértices são adjacentes. Denotamos por K_r uma clique induzida por r vértices.

Uma **cobertura por estáveis** ou **coloração** é uma partição do conjunto de vértices onde cada classe da partição é um conjunto estável.

Uma **cobertura por cliques** é uma partição do conjunto de vértices onde cada classe é uma clique.

Definimos um grafo como **bom** caso admita uma coloração e uma clique do mesmo tamanho.

Definimos um grafo como **perfeito** caso todo subgrafo induzido seja bom. Grafos que não são perfeitos são ditos **imperfeitos**.

Definimos um grafo como **Berge** quando não contém um ciclo induzido ímpar ou um cociclo induzido ímpar de tamanho maior que três.

O **problema de reconhecimento** associado a uma classe C de grafos é definido como o seguinte problema de decisão:

- Problema : CLASSE C
 Dados : Grafo G
 Pergunta : G pertence à classe C ?

Usaremos a seguinte notação para parâmetros de um grafo G :

Denotaremos por $\omega(G)$ o tamanho de uma maior clique.

Denotaremos por $\alpha(G)$ o tamanho de um maior conjunto estável.

Denotaremos por $\chi(G)$ o tamanho de uma menor cobertura por estáveis.

Denotaremos por $\kappa(G)$ o tamanho de uma menor cobertura por cliques.

Observamos que as desigualdades $\omega(G) \leq \chi(G)$ e $\alpha(G) \leq \kappa(G)$ são sempre

satisfeitas.

Também obtemos, por definição, as igualdades $\omega(G) = \alpha(\overline{G})$ e $\chi(G) = \kappa(\overline{G})$.

Denotamos por P a classe dos problemas cuja solução pode ser encontrada eficientemente por um algoritmo, isto é, em tempo polinomial no tamanho da entrada.

Um problema de decisão é dito ser **não-determinístico polinomial** caso qualquer exemplar *SIM* para o problema possua um certificado sucinto, isto é, verificável em tempo polinomial no tamanho do exemplar. Denotamos esta classe de problemas de decisão por NP .

Obtemos o **complemento** de um problema de decisão ao considerarmos o problema que admite as respostas *SIM* e *NÃO* invertidas. A classe dos problemas *co-NP* contém os problemas de decisão cujo complemento pertence a NP .

Um problema em NP é dito ser **completo** caso qualquer problema em NP possa ser polinomialmente transformável a ele. Esta classe de problemas NP -completos inclui portanto os problemas mais difíceis da classe de problemas NP .

Capítulo 2

Coloração e Grafos Perfeitos

Uma **coloração** para um grafo é uma atribuição de cores aos seus vértices tal que dois vértices adjacentes não recebam uma mesma cor. Em outras palavras, uma coloração para um grafo é uma partição do seu conjunto de vértices em conjuntos estáveis.

A figura 2.1 representa um grafo colorido com quatro cores, onde cada cor é representada por um inteiro. Observamos que, para este grafo, não é possível encontrar uma partição em um número menor de conjuntos estáveis.

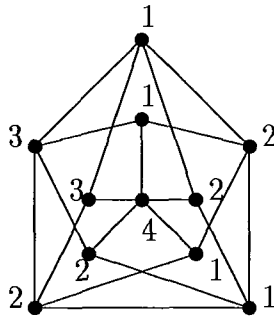


Figura 2.1: Grafo colorido com quatro cores.

O **número cromático** de G , $\chi(G)$, é o parâmetro associado ao grafo G para o menor inteiro k tal que G admite uma coloração com k cores.

O problema de decisão associado ao cálculo deste parâmetro pergunta se um grafo G dado admite uma coloração com um dado número k de cores:

Problema : NÚMERO CROMÁTICO
Dados : Grafo G , inteiro k
Pergunta : $\chi(G) \leq k$?

Este problema é *NP*-completo [Ka 72].

Consideraremos este problema de decisão sob o aspecto de complexidade computacional no capítulo 3. Em particular, provaremos que o problema de reconhecimento para a classe de grafos G que satisfazem $\chi(G) = \omega(G)$ é *NP*-completo.

Para a classe dos grafos perfeitos, o problema NÚMERO CROMÁTICO pertence a $NP \cap co-NP$. Na verdade, o método do elipsóide, uma forma de resolver problemas em programação linear, fornece um algoritmo polinomial para o problema NÚMERO CROMÁTICO, quando restrito a esta classe [GrLoSc 81]. Observamos porém, que este algoritmo teórico não evidencia as características combinatórias desta classe de grafos.

Veremos, neste capítulo, como técnicas clássicas para o desenvolvimento de algoritmos seqüenciais permitem encontrar eficientemente uma coloração ótima para certas classes de grafos perfeitos.

Na verdade, não só encontramos algoritmos eficientes para subclasses de grafos perfeitos, como também definimos novas subclasses ao caracterizarmos os grafos perfeitos para os quais determinada técnica é adequada.

São considerados o MÉTODO GULOSO, a DIVISÃO E CONQUISTA e a ALTERAÇÃO ESTRUTURAL. Para detalhes sobre estas técnicas, bem como algoritmos computacionais para grafos, nos referimos a [Sz 84].

2.1 Algoritmo Guloso

Uma maneira natural de colorir os vértices de um grafo é colocá-los numa ordem total e então atribuir cores segundo o critério:

- Considere os vértices na seqüência dada pela ordem total.
- Começando com a cor 1, atribua a cada vértice a menor cor não usada para colorir os seus vizinhos.

Observe que este processo de coloração seqüencial não colore vértices adjacentes com a mesma cor e, portanto, fornece de fato uma coloração para o grafo.

Chamaremos o processo descrito acima de **algoritmo guloso de coloração**, dado que procuramos encontrar uma solução ótima para o problema de coloração usando apenas informação local.

O diagrama da figura 2.2 representa a aplicação deste algoritmo ao grafo P_4 , um caminho induzido com quatro vértices. A ordem total do conjunto de vértices considerada foi $a < d < b < c$.

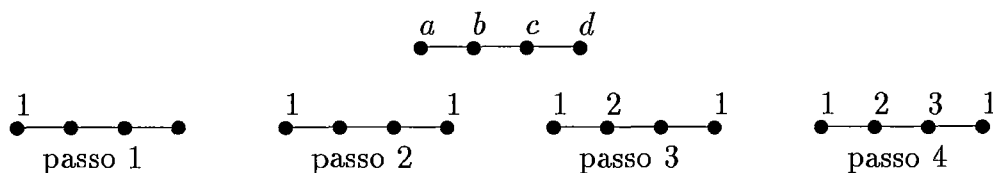


Figura 2.2: Algoritmo guloso de coloração.

Observe que a utilização desta ordem total coloriu o grafo bipartido P_4 com três cores.

É natural, então, perguntar quando o algoritmo guloso de coloração colore um grafo G de forma ótima, isto é, com $\chi(G)$ cores.

Denotaremos por $(G, <)$ um grafo G com uma ordem total $<$ associada ao seu conjunto de vértices.

Chamamos de **número de Grundy**, que denotamos por $\mathcal{G}(G, <)$, a maior cor utilizada pelo algoritmo guloso de coloração, ao considerarmos como entrada o grafo totalmente ordenado $(G, <)$.

Observamos que, por definição, o número cromático de um grafo G é no máximo igual ao número de Grundy de qualquer grafo totalmente ordenado $(G, <)$. Na verdade, podemos ordenar as classes de uma coloração ótima para G e obter a igualdade

$$\chi(G) = \min_{<} \mathcal{G}(G, <).$$

Logo, todo grafo admite uma ordem total no seu conjunto de vértices tal que o algoritmo guloso de coloração o colora de forma ótima.

Vamos considerar propriedades estruturais de colorações seqüenciais. Consideramos então os subgrafos induzidos de um grafo e tentamos caracterizar os grafos que admitem uma ordem total no seu conjunto de vértices tal que, para todo subgrafo induzido ordenado $(H, <)$, obtemos a igualdade

$$\chi(H) = \mathcal{G}(H, <).$$

Considere, por exemplo, na figura 2.3, os ciclos induzidos C_5 e C_6 , de tamanhos, respectivamente, cinco e seis.

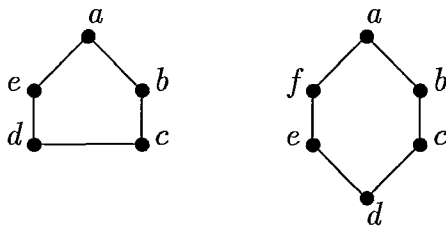


Figura 2.3: Ciclo induzido ímpar e ciclo induzido par.

Dado que $\chi(C_5) = 3$, qualquer ordem total no seu conjunto de vértices colorirá seqüencialmente o grafo ordenado correspondente com pelo menos três cores. Logo, qualquer $(C_5, <)$ conterà um caminho induzido de tamanho quatro ordenado, $(P_4, <)$, colorido seqüencialmente com três cores.

Por outro lado, ao considerarmos o grafo bipartido C_6 , vemos que a ordem total $a < b < c < d < e < f$, por exemplo, colore seqüencialmente todos os seus subgrafos induzidos ordenados de maneira ótima.

Dizemos que uma ordem total num grafo é **perfeita** quando cada subgrafo induzido ordenado é colorido pelo algoritmo guloso de coloração de forma ótima.

É natural então tentar caracterizar os grafos que admitem uma ordem perfeita no seu conjunto de vértices. Dado que, por definição, esta classe é hereditária, buscamos uma caracterização por subgrafos proibidos.

Dado um caminho induzido com quatro vértices, P_4 , isto é, $V(P_4) = \{a, b, c, d\}$ e $E(P_4) = \{(a, b), (b, c), (c, d)\}$, dizemos que o grafo totalmente ordenado, $(P_4, <)$, é uma **obstrução** caso $a < b$ e $d < c$.

Representamos no diagrama da figura 2.4 uma obstrução, indicando, para uma aresta (x, y) , com uma flecha de x para y , a relação $x < y$.

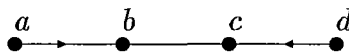


Figura 2.4: Obstrução.

Como foi mostrado na figura 2.2, uma ordem perfeita não pode conter uma obstrução.

Na verdade, podemos caracterizar as ordens perfeitas usando este subgrafo induzido ordenado. Para apresentar esta caracterização, precisamos da seguinte propriedade sobre cliques maximais em grafos que admitem uma ordem total que não contém obstrução [Ch 84b]:

Lema 2.1 *Sejam G um grafo e C uma clique tal que todo vértice $v \in C$ tem um vizinho $p(v) \notin C$. Suponha que os vértices $p(v)$ são dois a dois não adjacentes. Se existe uma ordem total $(G, <)$ dos vértices de G que não cria obstruções e tal que $p(v) < v$, para todo $v \in C$, então algum $p(v)$ é adjacente a todos os vértices em C .*

Prova: Argumentamos por indução no número de vértices de C .

Se a clique C só possui um vértice, a condição é trivialmente satisfeita.

Agora, para cada $v \in C$, a hipótese de indução garante a existência de um vértice $v' \in C$ tal que $p(v')$ é adjacente a todos os vértices em C exceto, possivelmente, v .

Basta então mostrar que, para algum v , $p(v')$ é adjacente a v .

Suponha, por absurdo, que isto não é verdade. Então, para todo v em C , temos que $p(v')$ não é adjacente a v . Isto diz que a função $v \in C \mapsto v' \in C$ é injetora. De fato, se $v \neq u$ então $v' \neq u'$, já que $p(v')$ será adjacente a u . Como C é um conjunto finito, esta função é uma bijeção.

Em particular, tomando v como o vértice de C que aparece primeiro na ordem que não cria obstruções, existem $b, c \in C$ tais que $b' = v$ e $c' = b$ (veja o diagrama da figura 2.5).

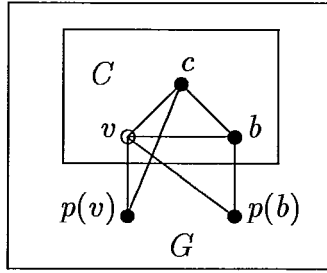


Figura 2.5: Diagrama para lema: obstrução.

Mas então os vértices $p(b)$, b , c e $p(v)$ induzem uma obstrução. \square

O teorema 2.1 [Ch 84b] caracteriza as ordens perfeitas através de um subgrafo induzido ordenado.

Teorema 2.1 *Uma ordem é perfeita se e somente se não contém obstruções.*

Prova: A condição é necessária porque, como já foi observado, uma obstrução é colorida com três cores e o número cromático de P_4 é dois.

Mostraremos a suficiência da condição por indução no número de vértices do grafo. Se o grafo G tem apenas um vértice então a condição é trivialmente satisfeita.

Suponha que $(G, <)$ é um grafo ordenado com uma ordem total que não cria obstruções. Seja $k = \mathcal{G}(G, <)$. Observe que a propriedade de não criar obstruções é hereditária e, portanto, por indução, para todo $A \subseteq V$, a ordem restrita a G_A é perfeita. Basta mostrar então que $\chi(G) = k$. Vamos exibir uma clique de tamanho k e portanto obter $\omega(G) = \chi(G) = k$.

Para isso, considere o menor i tal que existem $u_{i+1}, u_{i+2}, \dots, u_k$, vértices dois a dois adjacentes, onde u_j é colorido com cor j . Caso $i > 0$, cada u_j tem um vizinho $p(u_j)$ tal que $p(u_j) < u_j$ e cor de $p(u_j) = i$. Agora, como todos os vértices $p(u_j)$ têm a mesma cor, eles são dois a dois não adjacentes. Mas então o lema 2.1 implica a existência de um vértice v com cor i adjacente a todos os vértices u_j , o que contraria a minimalidade de i . \square

Um grafo é **perfeitamente ordenável** se admite uma ordem perfeita. Observe que, dado um grafo com uma ordem total $(G, <)$, ao considerarmos os parâmetros número cromático $\chi(G)$, tamanho de uma clique máxima $\omega(G)$ e número de Grundy $\mathcal{G}(G, <)$, obtemos as desigualdades

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \mathcal{G}(G, <).$$

Observamos que a prova do teorema 2.1 garante que, quando um grafo admite uma ordem perfeita $(G, <)$, obtemos a igualdade $\omega(G) = \mathcal{G}(G, <)$ e con-

seqüentemente a igualdade dos três parâmetros:

$$\omega(G) = \chi(G) = \mathcal{G}(G, <).$$

Além disso, dado que a classe dos grafos perfeitamente ordenáveis é, por definição, uma classe hereditária, obtemos o seguinte corolário:

Corolário 2.1 [Ch 84b] *Todo grafo perfeitamente ordenável é perfeito.*

Na verdade, a definição da classe dos grafos perfeitamente ordenáveis veio generalizar duas subclasses básicas de grafos perfeitos.

Dizemos que um grafo é **triangularizado** caso não contenha um ciclo induzido de tamanho maior ou igual a quatro. Observe que esta classe de grafos é, por definição, hereditária. Para um estudo completo dos grafo triangularizados nos referimos a [Vi 89].

Podemos caracterizar esta classe através de um tipo de ordem perfeita. Um vértice é dito **simplicial** caso a sua vizinhança induza uma clique no grafo. O seguinte teorema caracteriza a classe dos grafos triangularizados em termos de vértices simpliciais:

Teorema 2.2 [Di 61] *Um grafo é triangularizado se e somente se todo subgrafo induzido contém um vértice simplicial.*

Portanto, um grafo é triangularizado se e somente se admite uma ordem total nos seus vértices, $v_1 < v_2 < \dots < v_n$, satisfazendo a seguinte propriedade: cada v_i é um vértice simplicial no subgrafo induzido $G_{\{v_1, \dots, v_i\}} \leq G$. Chamamos esta ordem total de **ordem simplicial**. Observamos que uma ordem simplicial pode ser obtida eficientemente por uma busca em largura lexicográfica [RoTaLu 76]. Além disso, por definição, dada uma ordem simplicial $(G, <)$, esta ordem induz uma ordem simplicial para todo subgrafo induzido ordenado $(H, <)$ de $(G, <)$.

Agora, dada uma ordem simplicial $(G, <)$, temos $\omega(G) = \mathcal{G}(G, <)$. Esta ordem total é portanto perfeita. Obtemos, assim, que todo grafo triangularizado é perfeitamente ordenável.

No diagrama da figura 2.6, consideramos um grafo G triangularizado, com uma ordem simplicial $a < b < c < d < e$. O algoritmo guloso de fato o colore com $\omega(G) = 3$ cores.

Um grafo é dito de **comparabilidade** caso admita uma ordem parcial sobre o seu conjunto de vértices tal que dois vértices são comparáveis se e somente se são adjacentes.

Portanto, dado um grafo de comparabilidade $G = (V, E)$, podemos orientar as suas arestas da seguinte maneira: $(u, v) \in E$ é orientada de u para v se e somente

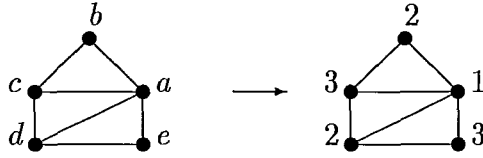


Figura 2.6: Coloração ótima com uma ordem simplicial.

se $u < v$ na ordem parcial. Como G é um grafo de comparabilidade, esta orientação será transitiva.

Denotamos um grafo com uma orientação nas arestas por $\vec{G} = (V, \vec{E})$. Logo, um grafo de comparabilidade G admite uma orientação transitiva no seu conjunto de arestas, isto é, uma orientação acíclica $\vec{G} = (V, \vec{E})$ tal que se $\vec{x}\vec{y}$ e $\vec{y}\vec{z} \in \vec{E}$ então $\vec{x}\vec{z} \in \vec{E}$.

Observe que esta classe de grafos é, por definição, hereditária.

Também podemos caracterizar a classe dos grafos de comparabilidade em termos de uma ordem perfeita.

Dado um grafo com uma orientação acíclica \vec{G} obtemos uma ordem total no conjunto de vértices $v_1 < v_2 < \dots < v_n$, satisfazendo a seguinte propriedade: cada v_i é uma fonte no subgrafo induzido orientado $\vec{G}_{\{v_i, \dots, v_n\}} \leq \vec{G}$. Caso a orientação acíclica seja transitiva, chamamos a ordem total obtida nos vértices de **ordem transitiva**.

Obtemos, portanto, que todo grafo de comparabilidade G admite uma ordem transitiva $(G, <)$ e, por definição, $\omega(G) = \mathcal{G}(G, <)$.

Observe que, por definição, dada uma ordem transitiva $(G, <)$, esta ordem induz uma ordem transitiva para todo subgrafo induzido ordenado $(H, <)$ de $(G, <)$.

Logo esta ordem total é perfeita e todo grafo de comparabilidade é perfeitamente ordenável.

Observamos que podemos reconhecer se um grafo admite uma orientação transitiva eficientemente [Gh 62].

No diagrama da figura 2.7, consideramos um grafo G de comparabilidade com uma orientação transitiva nas suas arestas. A ordem transitiva considerada é $a < b < c < d < e$. O algoritmo guloso de fato colore este grafo com $\omega(G) = 3$ cores.

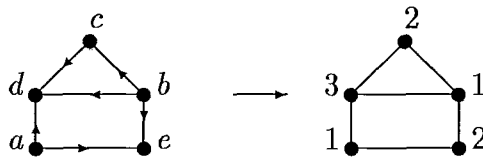


Figura 2.7: Coloração ótima com uma ordem transitiva.

A definição da classe dos grafos perfeitamente ordenáveis tem estimulado a descoberta de várias subclasses de grafos perfeitos na tentativa de resolver dois problemas:

Problema 2.1 *Caracterizar a classe dos grafos perfeitamente ordenáveis por uma família de subgrafos proibidos minimais.*

Problema 2.2 *Encontrar um algoritmo eficiente para reconhecer se um grafo é perfeitamente ordenável.*

Uma resposta parcial a esses problemas foi obtida recentemente, quando foi provado que o problema de reconhecimento para a classe dos grafos perfeitamente ordenáveis é *NP*-completo [MiPf 90].

Finalmente, um estudo de algoritmos para coloração de grafos perfeitos usando orientações pode ser encontrado em [Ta 89].

2.2 Decomposição

Consideramos nesta seção a aplicação da técnica *DIVISÃO E CONQUISTA* para resolver os problemas de reconhecimento e otimização combinatória *CLIQUE MÁXIMA* e *NÚMERO CROMÁTICO* para subclasses dos grafos perfeitos.

Um **corte** para um grafo é um conjunto de vértices cuja remoção fornece um grafo que não é conexo. Dado um corte S num grafo G , as componentes conexas de $G \setminus S$ têm conjuntos de vértices V_1, V_2, \dots, V_k , digamos. Dizemos que cada subgrafo $G_i = G_{[V_i, \cup S]}$ é um **filho** de G em relação ao corte S . Dizemos também que o grafo G é obtido **por identificação** dos filhos G_i em relação ao corte S .

A técnica *DIVISÃO E CONQUISTA* procura reduzir a solução de um problema à solução de subproblemas da mesma natureza que o problema original.

Neste caso, dada uma classe hereditária de grafos, gostaríamos de reduzir a coloração de um grafo à coloração de seus filhos em relação a um certo corte.

Na verdade, dado um certo tipo de corte, gostaríamos de decompor o grafo recursivamente, obtendo uma árvore de decomposição em cujas folhas, grafos que não admitem tal corte, o problema original tivesse solução trivial.

Tentamos, então, responder às seguintes perguntas em relação a alguns tipos de cortes:

1. Como se comporta ω ?
2. Como se comporta χ ?
3. Como se comporta a perfeição?
4. Podemos testar a existência deste corte eficientemente?
5. Podemos construir uma árvore de decomposição associada a este corte eficientemente?

6. Podemos caracterizar as folhas desta árvore de decomposição?
7. Podemos associar subclasses de grafos perfeitos a este tipo de corte?

O lema 2.2 estuda o comportamento do parâmetro ω em relação a um corte qualquer.

Lema 2.2 *Seja G um grafo com corte S e filhos G_1, G_2, \dots, G_k . Então*

$$\omega(G) = \max_{i=1}^k \omega(G_i).$$

Prova: Sendo cada G_i um subgrafo induzido de G , obtemos a desigualdade: $\omega(G) \geq \max_{i=1}^k \omega(G_i)$.

Suponha, por absurdo, que esta desigualdade é estrita, isto é, que $\omega(G) > \max_{i=1}^k \omega(G_i)$.

Seja então K uma clique máxima de G . Por hipótese, $K \not\subseteq G_i$ e, portanto, existem vértices x_i, x_j em K com $x_i \in G_i \setminus S$ e $x_j \in G_j \setminus S$.

Mas $(x_i, x_j) \in E(G)$, o que contradiz S ser um corte para G . \square

O exemplo apresentado na figura 2.8 mostra que não obtemos um resultado análogo para o parâmetro χ . Dado um ciclo induzido ímpar, qualquer corte que seja um conjunto independente terá como filhos grafos bipartidos.

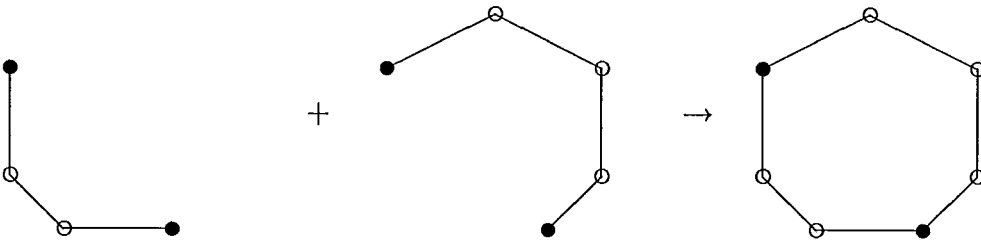


Figura 2.8: $\max(\chi(P_4), \chi(P_5)) \neq \chi(C_7)$.

Já a figura 2.9 mostra que, mesmo que o grafo tenha número cromático e tamanho de uma maior clique igual ao máximo dos parâmetros nos filhos, podemos ter um grafo imperfeito obtido por identificação de grafos perfeitos em relação a este corte.

Um grafo é dito **minimalmente imperfeito** quando não é perfeito mas cada um dos seus subgrafos induzidos próprios é perfeito.

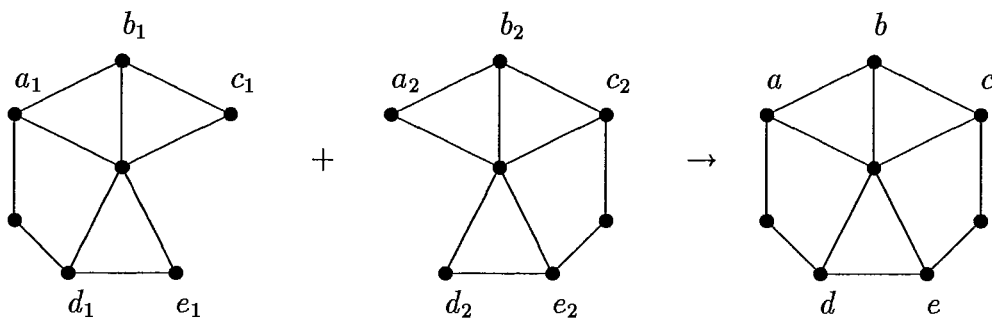


Figura 2.9: Um grafo imperfeito pode ter filhos perfeitos.

Uma condição necessária para que a identificação de grafos perfeitos em relação a um tipo de corte preserve a propriedade de ser perfeito é que nenhum grafo minimalmente imperfeito admita tal tipo de corte.

Um **corte clique** é um corte cujos vértices induzem uma clique.

O teorema 2.3 a seguir [Re 86] justifica porque consideramos este tipo de corte para a coloração de grafos perfeitos.

Teorema 2.3 *Nenhum grafo minimalmente imperfeito contém um corte clique.*

Prova: Suponha, por absurdo, que G é um grafo minimalmente imperfeito com um corte clique C . Seja G_1 um filho de G em relação a C e $G_2 = G \setminus (G_1 \setminus C)$.

Cada G_i é um subgrafo induzido próprio de G e portanto perfeito. Considere cada G_i colorido com uma coloração com $\omega(G_i)$ cores. Como cada vértice em C recebe uma cor diferente em ambas as colorações, podemos numerar as classes de cada coloração, de modo que as duas colorações concordem nos vértices do corte clique C .

Agora, ao considerar a união destas colorações, obtemos uma coloração para G com $\omega(G)$ cores, uma contradição. \square

Concluimos, portanto, que um grafo obtido por identificação de grafos perfeitos através de uma clique é perfeito. Além disso, podemos calcular o número cromático de um grafo que admite corte clique a partir do cálculo para os filhos deste grafo em relação ao corte.

Na verdade, existe um algoritmo $O(nm)$ para determinar se um grafo admite um corte clique [Wh 81]. A correção deste algoritmo está baseada na seguinte condição necessária para um grafo não admitir corte clique:

Lema 2.3 *Um grafo que não admite corte clique ou é uma clique ou contém um ciclo induzido de tamanho maior que três.*

Prova: Suponha que um grafo G não contém um corte clique. Caso G não seja uma clique, existem dois vértices não adjacentes em G , x e y digamos. Seja $N = N(x)$ e seja M o subconjunto de N formado pelos elementos que vêm a componente Y de $G_{V \setminus N}$ que contém y .

Como M é um corte separando x de y , temos que M não é uma clique. Existem então dois vértices v e w não adjacentes em M . Seja P um caminho induzido em G com extremidades v e w e vértices interiores em Y (veja o diagrama da figura 2.10).

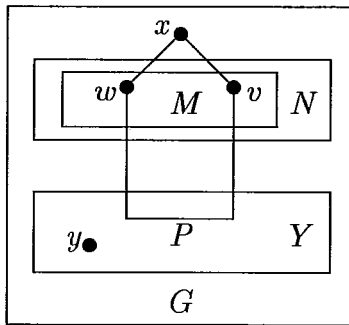


Figura 2.10: Diagrama para lema: ciclo induzido.

Obtemos o ciclo desejado ao considerar o subgrafo induzido pelos vértices de P e x . \square

Dado um grafo G , definimos recursivamente uma **árvore de cliques** $T(G)$ do seguinte modo. Cada vértice é rotulado com um subgrafo induzido de G . A raiz da árvore $T(G)$ é rotulada com o grafo G . Se G não tem corte clique então a árvore $T(G)$ será o grafo trivial. Caso contrário, encontramos um corte clique C de G e os filhos do vértice G em $T(G)$ serão os filhos G_1, G_2, \dots, G_k do grafo G em relação ao corte clique C . Agora, a sub-árvore $T(G_i)$ rotulada por G_i é uma árvore de cliques para o grafo G_i .

O diagrama da figura 2.11 apresenta uma árvore de cliques.

O lema 2.4 abaixo estuda o tamanho de uma árvore de cliques em função do número de vértices do grafo.

Lema 2.4 *Uma árvore de cliques para um grafo com n vértices tem no máximo $n^2 + 1$ vértices.*

Prova: Considere uma árvore de cliques $T(G)$ para um grafo G . Dado um vértice H não raiz, temos que H possui um irmão I em $T(G)$. Por definição de árvore de cliques, H e I se interceptam numa clique C que é corte clique para o pai de H e I na árvore $T(G)$. Sejam então $x \in H \setminus C$ e $y \in I \setminus C$. Rotule H por (x, y) .

Como $T(G)$ é uma árvore de cliques, por construção, a interseção de dois vértices de $T(G)$, quando não é vazia, induz uma clique em G . Logo não podemos ter dois

vértices na árvore $T(G)$ rotulados com o mesmo par. Isto prova que $T(G)$ tem, no máximo, $n^2 + 1$ vértices. \square

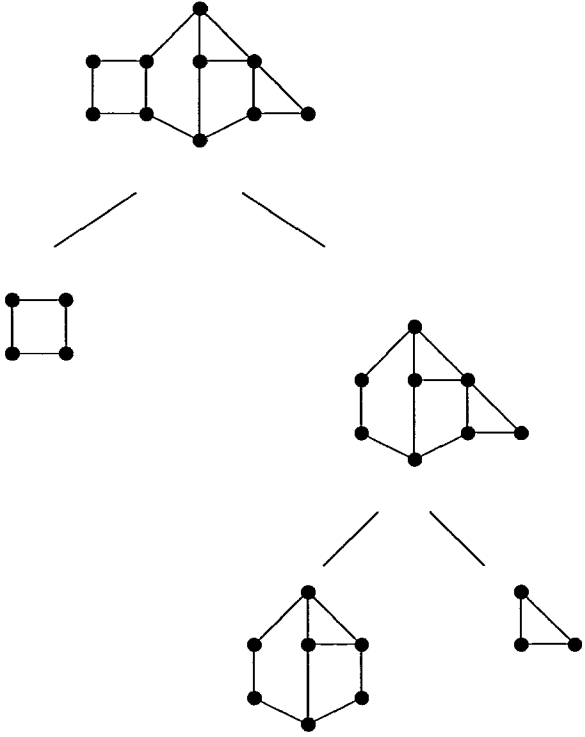


Figura 2.11: Árvore de cliques.

O teorema 2.4 abaixo caracteriza os grafos perfeitos cuja árvore de cliques tem como folhas grafos que são cliques.

Teorema 2.4 [Di 61] *Um grafo é triangularizado se e somente se todo subgrafo induzido que não é uma clique contém um corte clique.*

Observe que a decomposição através de cortes cliques fornece uma demonstração de que todo grafo triangularizado é perfeito, além de algoritmos eficientes para resolver os problemas de reconhecimento e otimização combinatória CLIQUE MÁXIMA e NÚMERO CROMÁTICO para esta classe.

Uma generalização natural do conceito de corte clique é obtida quando exigimos que apenas um dos vértices do corte seja adjacente aos demais vértices no corte.

Um grafo é dito uma **estrela** quando possui um vértice universal. Um **corte estrela** é um corte cujos vértices induzem um subgrafo estrela. Tal corte foi considerado por Chvátal quando provou:

Teorema 2.5 [Ch 85] *Nenhum grafo minimalmente imperfeito contém um corte estrela.*

Por outro lado, como foi mostrado na figura 2.9, a identificação de dois grafos perfeitos através de uma estrela nem sempre origina um outro grafo perfeito.

Também é natural considerarmos o conceito dual a corte clique definindo um **corte estável** como um corte que é um conjunto estável no grafo.

Observe que a figura 2.8 mostrou que a identificação por um conjunto estável não preserva a propriedade de ser perfeito. Este tipo de corte foi estudado por Tucker, que provou:

Teorema 2.6 [Tu 83] *Seja um grafo com um corte estável tal que nenhum ciclo induzido ímpar maior que três no grafo intercepta o corte. O grafo é k -colorível se e somente se os filhos do grafo em relação ao corte estável são k -coloríveis.*

Logo, a identificação de dois grafos perfeitos através de um conjunto estável será um grafo perfeito se e somente se não cria um ciclo induzido ímpar maior que três.

Observamos que é *NP*-completo testar se um grafo admite um ciclo induzido ímpar maior que três contendo um dado vértice [Bi 89].

Além disso, também é *NP*-completo testar se um grafo admite um corte estável [Ch 89].

Consideramos no capítulo 4 outro tipo de decomposição para a qual os problemas de otimização combinatória CLIQUE MÁXIMA e NÚMERO CROMÁTICO podem ser resolvidos de modo eficiente para subclasses de grafos perfeitos.

2.3 Contração

Consideramos nesta seção o uso da técnica ALTERAÇÃO ESTRUTURAL através de sucessivas contrações de pares não adjacentes de vértices num grafo. Obtemos assim uma seqüência de grafos que pode ser utilizada para resolver os problemas COLORAÇÃO MÍNIMA e CLIQUE MÁXIMA no grafo original.

Dados dois vértices não adjacentes x, y num grafo $G = (V, E)$, consideramos o grafo obtido a partir de G por contração dos vértices x, y num só vértice x' . Mais precisamente, definimos o grafo $G^{xy} = (V^{xy}, E^{xy})$ da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V^{xy} &= V \setminus \{x, y\} \cup \{x'\} \\ E^{xy} &= E_{G \setminus \{x, y\}} \cup \{vx' : v \in V \setminus \{x, y\}, v \in N_G(x) \cup N_G(y)\}. \end{aligned}$$

Dizemos que G^{xy} foi obtido por **contração** dos vértices x, y no grafo G .

A figura 2.12 apresenta um exemplo de um grafo obtido por contração.

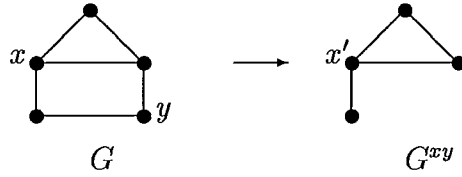


Figura 2.12: Contração de um par de vértices.

Embora o grafo G^{xy} não seja necessariamente um subgrafo induzido de G , por construção, valem as seguintes propriedades para os respectivos parâmetros número cromático χ e tamanho da maior clique ω :

$$\begin{aligned}\chi(G^{xy}) &\geq \chi(G) \\ \omega(G^{xy}) &\geq \omega(G).\end{aligned}$$

Observe que estas desigualdades podem ser estritas, como mostram os exemplos abaixo.

No exemplo apresentado na figura 2.13, a contração de um par de vértices não adjacentes num ciclo induzido de tamanho cinco, fornece um grafo com clique máxima estritamente maior.

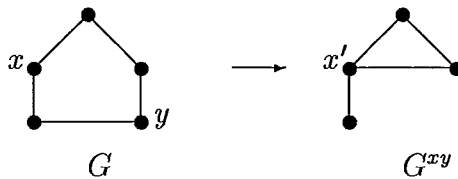


Figura 2.13: Contração não preserva clique máxima.

Já no exemplo da figura 2.14, a contração de um par de vértices a distância três num ciclo induzido de tamanho seis fornece um grafo com clique máxima e número cromático estritamente maiores.

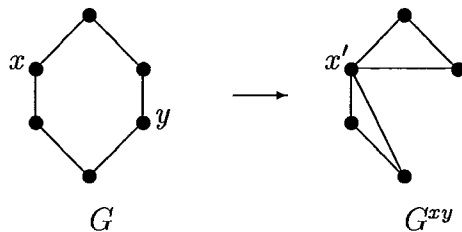


Figura 2.14: Contração não preserva nem clique máxima nem número cromático.

A aplicação recursiva desta operação de contração de pares de vértices não adjacentes gera uma seqüência de grafos cujo último elemento é um grafo completo. Para este tipo de grafo, o cálculo dos parâmetros χ e ω é trivial.

Vamos estabelecer restrições sobre o par de vértices a ser contraído de modo a garantir que os parâmetros χ e ω não sejam aumentados ao longo desta seqüência de contrações.

Dois vértices formam uma **dupla par** num grafo quando não existe um caminho induzido ímpar entre eles.

Apresentamos na figura 2.15 um exemplo de um grafo que admite uma dupla par e um exemplo de um grafo que não contém dupla par. Observe que estes dois exemplos mostram que admitir uma dupla par não é uma propriedade auto-complementar.

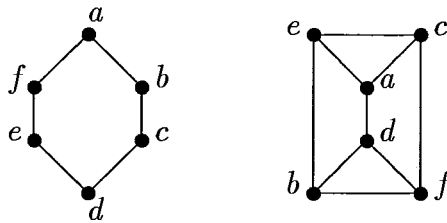


Figura 2.15: Admitir dupla par não é auto-complementar.

O lema 2.5 a seguir [Me 87] prova que contrair uma dupla par preserva o número cromático e o tamanho de uma maior clique.

Lema 2.5 *O grafo obtido por contração de uma dupla par tem o mesmo número cromático e tamanho de uma maior clique que o grafo original.*

Prova: Seja $\{x, y\}$ uma dupla par num grafo G . Observamos que sempre valem as desigualdades $\omega(G^{xy}) \geq \omega(G)$ e $\chi(G^{xy}) \geq \chi(G)$. Suponha que $\omega(G^{xy}) > \omega(G)$. Então existe em G uma clique K de tamanho $\omega(G)$ tal que $N_G(x) \cup N_G(y) \supseteq K$ mas $N_G(x) \not\supseteq K$ e $N_G(y) \not\supseteq K$. Seja $a \in K \setminus N_G(x)$ e $b \in K \setminus N_G(y)$. Então $[x, a, b, y]$ é um caminho induzido de tamanho três entre x e y , uma contradição.

Por outro lado, como não existe caminho induzido ímpar entre x e y , existe uma coloração ótima para G na qual x e y têm a mesma cor. De fato, dada uma coloração ótima para G , onde x e y têm cores diferentes, considere o grafo H induzido pelos vértices que têm a mesma cor de x ou a mesma cor de y .

Como, em particular, não existe caminho induzido ímpar entre x e y no grafo H , temos que os vértices x e y não podem estar na mesma componente conexa de H . Basta então trocar as duas cores na componente conexa de H que contém x para obter uma coloração ótima para G onde x e y têm a mesma cor.

Agora, dada uma coloração de G onde x e y têm a mesma cor, podemos obter uma coloração de G^{xy} com o mesmo número de cores ao atribuir a x' a mesma cor de x e de y e atribuindo aos outros vértices de G^{xy} a mesma cor que na coloração de G . \square

Na verdade, podemos provar que a contração de uma dupla par num grafo preserva a propriedade de ser perfeito:

Corolário 2.2 *O grafo obtido por contração de uma dupla par num grafo perfeito também é perfeito.*

Prova: Seja G um grafo perfeito contendo uma dupla par $\{x, y\}$. Considere o grafo G^{xy} obtido por contração da dupla par $\{x, y\}$ em G .

Queremos estabelecer a igualdade $\omega(H) = \chi(H)$ para todo subgrafo induzido de G^{xy} . Seja $H < G^{xy}$ um subgrafo induzido próprio de G^{xy} .

Caso H não contenha o vértice x' , temos que H é um subgrafo induzido próprio de G , logo perfeito.

Caso H contenha o vértice x' , então H foi obtido por contração da dupla par $\{x, y\}$ num subgrafo induzido próprio de G contendo $\{x, y\}$. Logo H é perfeito. \square

Uma **seqüência de contrações pares** para um grafo G é uma seqüência $G = G_0, G_1, \dots, G_k$ tal que G_k é uma clique e, para $1 \leq i \leq k$, G_i é obtido de G_{i-1} por uma contração de uma dupla par $\{x_{i-1}, y_{i-1}\}$.

Apresentamos uma seqüência de contrações pares na figura 2.16. Em particular, este exemplo mostra que nem todo grafo que admite uma seqüência de contrações pares é perfeito.

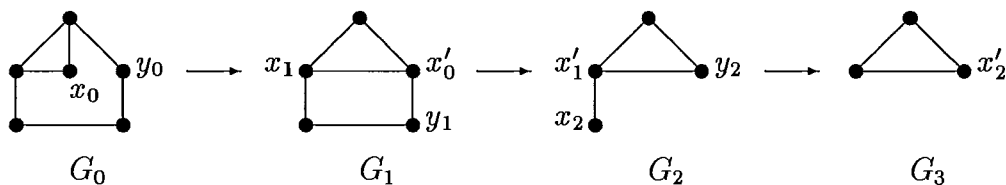


Figura 2.16: Seqüência de contrações pares.

Pelo lema 2.5, se G_0, G_1, \dots, G_k é uma seqüência de contrações pares para G , então $\omega(G) = \chi(G) = |G_k|$. Na verdade, podemos obter, ao percorrer a seqüência no sentido de G_k até G_0 , uma coloração mínima e uma clique máxima para o grafo $G = G_0$. De fato, para obter uma coloração mínima para G_{i-1} , dada uma coloração mínima para G_i , simplesmente colorimos x_{i-1} e y_{i-1} com a cor de x'_{i-1} . Por outro lado, para obter uma clique máxima de G_i , basta notar que a substituição de x'_{i-1} por x_{i-1} ou a substituição de x'_{i-1} por y_{i-1} , fornece uma clique máxima em G_{i-1} .

O diagrama da figura 2.17 percorre a seqüência de contrações pares da figura 2.16 de G_k para G_0 obtendo uma coloração mínima para G a partir de uma coloração mínima de $G_3 = K_3$.

Agora no diagrama da figura 2.18 a seqüência de contrações pares é percorrida para encontrar uma clique máxima para G .

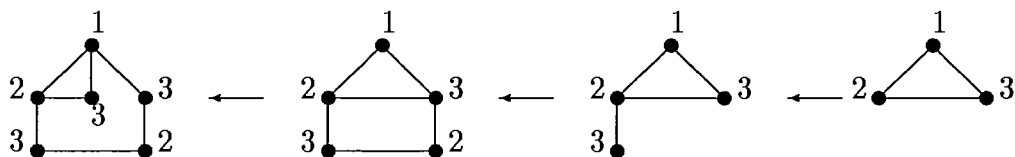


Figura 2.17: Coloração através de descontrações.

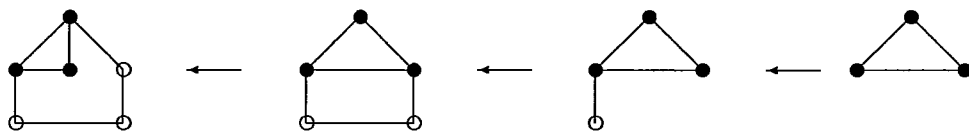


Figura 2.18: Clique máxima através de descontrações.

Portanto, se podemos encontrar uma seqüência de contrações pares para um grafo em tempo polinomial, então podemos colorir este grafo, de forma ótima, em tempo polinomial.

Podemos citar algumas classes de grafos perfeitos onde esta estratégia pode ser usada.

Dizemos que um grafo é **fracamente triangularizado** se nem o grafo nem o seu complemento contém um ciclo induzido de tamanho pelo menos cinco. Esta subclasse auto-complementar de grafos perfeitos [Hy 85] generaliza a classe dos grafos triangularizados porque o complemento de um ciclo induzido de tamanho pelo menos seis contém um ciclo induzido de tamanho quatro. Todo grafo fracamente triangularizado, que não é uma clique, contém um **dupla 2**, isto é, um par de vértices tal que qualquer caminho induzido entre eles tem tamanho dois [HyHoMa 89].

Como podemos verificar eficientemente se um grafo admite uma dupla 2 e como a contração de uma dupla 2 num grafo fracamente triangularizado fornece um novo grafo fracamente triangularizado [HyHoMa 89], obtemos um algoritmo polinomial para encontrar uma coloração ótima e uma clique máxima para esta classe de grafos.

Dizemos que um grafo é **Meyniel** caso não contenha um ciclo induzido ímpar de tamanho pelo menos cinco ou um ciclo ímpar de tamanho pelo menos cinco com exatamente uma corda. Esta classe também é uma subclasse dos grafos perfeitos [Me 76]. A seqüência de contrações pares neste caso contrai, em cada passo, um par de vértices não adjacentes que tenham o maior número de vértices adjacentes em comum [He 90].

Na verdade, podemos generalizar estes dois exemplos de subclasses de grafos perfeitos.

Dizemos que um grafo é **perfeitamente contraível** se todo subgrafo induzido admite uma seqüência de contrações pares. Obtemos como corolário do lema 2.5 que a classe dos grafos perfeitamente contraíveis é subclasse dos grafos perfeitos.

Em particular, os grafos fracamente triangularizados e os grafos Meyniel são perfeitamente contraíveis.

Portanto, dada uma classe hereditária de grafos, isto é, para todo elemento da classe todos os seus subgrafos induzidos também pertencem a esta classe, se podemos encontrar uma seqüência de contrações pares para cada grafo da classe então esta classe é uma subclasse de grafos perfeitos.

Na verdade, podemos ainda generalizar a classe dos grafos perfeitamente contraíveis [Me 87].

Lema 2.6 *Num grafo minimalmente imperfeito, existe um caminho ímpar entre qualquer par de vértices.*

Prova: Seja $G = (V, E)$ um grafo minimalmente imperfeito e suponha, por absurdo, que G contém uma dupla par $\{x, y\}$. Considere o grafo G^{xy} , obtido de G por contração de x, y . Então pelo lema 2.5 temos:

$$\chi(G^{xy}) = \chi(G) > \omega(G) = \omega(G^{xy}).$$

Como G é um grafo minimalmente imperfeito, cada subgrafo próprio de G é perfeito. Logo, cada subgrafo próprio de G^{xy} é perfeito, o que implica que G^{xy} é minimalmente imperfeito.

Além disso, pelo corolário 3.2,

$$\begin{aligned} \omega(G)\alpha(G) &= |V| - 1 \\ \omega(G^{xy})\alpha(G^{xy}) &= |V^{xy}| - 1 = |V| - 2. \end{aligned}$$

Portanto $\omega(G)(\alpha(G) - \alpha(G^{xy})) = 1$, uma contradição. pois $\omega(G) \geq 2$. \square

Dizemos que um grafo é **quase-paridade estrita** se cada um dos seus subgrafos induzidos, que não é uma clique, contém uma dupla par. O lema 2.6 implica que todo grafo quase-paridade estrita é perfeito.

Além disso, por definição, todo grafo perfeitamente contraível é quase-paridade estrita.

Na verdade, foi conjecturado que estas duas classes são iguais [Bt 90]:

Conjectura 2.1 *Todo grafo quase-paridade estrita é perfeitamente contraível.*

Dizemos que um grafo é **quase-paridade** se cada um dos seus subgrafos induzidos, que não é trivial, contém uma dupla par ou o seu complemento contém uma dupla par. O teorema dos grafos perfeitos implica que a classe dos grafos quase-paridade também é uma subclasse dos grafos perfeitos.

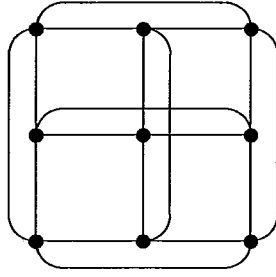


Figura 2.19: Um grafo que não é quase-paridade.

O exemplo da figura 2.19 exibe um grafo perfeito que não é quase-paridade [FiTa 89]. Este grafo, auto-complementar, é o grafo de linha $L(K_{3,3})$.

Observamos que o problema de decisão DUPLA PAR, isto é, testar se um grafo admite uma dupla par, é *co-NP*-completo. Este resultado será analisado com detalhe no capítulo 3.

Entretanto, como várias subclasses de grafos perfeitos são perfeitamente contraíveis, temos a seguinte conjectura [Re 90]:

Conjectura 2.2 *Podemos determinar se um grafo perfeito contém uma dupla par em tempo polinomial.*

Como evidências em favor da validade desta conjectura, citamos os grafos fracamente triangularizados e os grafos Meyniel mencionados acima.

Provaremos no capítulo 5 que uma subclasse de grafos perfeitos é quase-paridade.

Capítulo 3

Complexidade

Discutimos neste capítulo, relações entre a classe dos grafos perfeitos e a teoria dos problemas *NP*-completos, isto é, o estudo desta classe de grafos do ponto de vista de complexidade computacional.

Na teoria dos grafos, o cálculo de vários parâmetros e o teste para existência de várias estruturas correspondem a problemas de decisão *NP*-completos.

Em particular, os problemas de decisão associados ao cálculo dos dois parâmetros que definem a classe dos grafos perfeitos, a saber, o tamanho de uma maior clique e o tamanho de uma coloração mínima, são *NP*-completos.

Mostraremos que decidir se um grafo tem tamanho de uma maior clique igual ao seu número cromático é *NP*-completo. Isto não significa que o problema de reconhecimento para a classe dos grafos perfeitos também seja *NP*-completo. Na verdade, sabe-se que este problema de decisão pertence a *co-NP* [Ca 82]. Apresentaremos uma prova combinatória deste resultado.

O problema de reconhecimento para a classe dos grafos perfeitos é considerado um famoso problema em aberto na teoria da complexidade computacional, isto é, ainda não se sabe se este problema de decisão é *NP*-completo [Jo 89].

3.1 Grafos Bons

Consideramos nesta seção os dois parâmetros e a relação de dualidade que definem a classe dos grafos perfeitos.

Dado um grafo G , o parâmetro $\chi(G)$ é o número cromático de G , isto é o tamanho de uma coloração mínima para G .

Já o parâmetro $\omega(G)$ expressa o tamanho de uma maior clique de G , isto é, de um maior subgrafo completo do grafo.

Dado que uma coloração é uma partição do conjunto de vértices em conjuntos estáveis, obtemos uma desigualdade entre estes dois parâmetros. Para qualquer

grafo G ,

$$\omega(G) \leq \chi(G).$$

O cálculo de cada um destes dois parâmetros é considerado um problema combinatório difícil. Mais precisamente, considere os seguintes problemas de decisão:

Problema	: NÚMERO CROMÁTICO	Problema	: CLIQUE MÁXIMA
Dados	: Grafo G , inteiro k	Dados	: Grafo G , inteiro k
Pergunta	: $\chi(G) \leq k$?	Pergunta	: $\omega(G) \geq k$?

Estes dois problemas de otimização combinatória são *NP*-completos [Ka 72].

Analisemos com um pouco mais de detalhe as desigualdades acima.

Para apreciarmos a dificuldade de se calcular estes parâmetros, ou melhor de se estabelecer, dado um inteiro k , cada desigualdade, considere os dois grafos da figura 3.1:

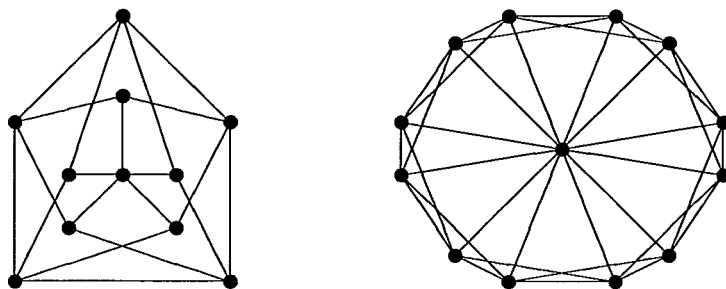


Figura 3.1: Dois grafos 4-coloríveis.

Ambos os grafos têm número cromático igual a 4. Para estabelecer este fato, duas desigualdades devem ser verdadeiras, a saber $\chi(G) \leq 4$ e $\chi(G) \geq 4$, para cada um dos grafos G .

Observe que para estabelecer a desigualdade $\chi(G) \leq 4$ é suficiente, para cada um dos dois grafos, que seja exibida uma coloração que particione o conjunto dos vértices em 4 conjuntos estáveis. Isto mostra que, na verdade, a propriedade de ser k -colorível, caso seja verdadeira, admite um certificado sucinto, isto é, o problema NÚMERO CROMÁTICO pertence à classe *NP*.

Consideremos agora a desigualdade $\chi(G) \geq 4$. Os dois grafos da figura 3.1 exemplificam como, em geral, esta desigualdade parece ser mais difícil de ser comprovada. Mais especificamente, no grafo da esquerda não conseguimos, até o momento, um argumento mais curto do que analisar caso a caso usando todas as possíveis colorações para atestar que de fato 4 cores são necessárias. Já no grafo da direita, a existência de uma clique de tamanho 4 estabelece facilmente que, neste caso, $\chi(G) \geq 4$.

Observe que há, aparentemente, uma diferença de dificuldade entre os problemas NÚMERO CROMÁTICO e CLIQUE MÁXIMA. Considere as respectivas restrições destes dois problemas de decisão, apresentadas abaixo, obtidas ao fixarmos o valor de k :

Problema	: k -NÚMERO CROMÁTICO	Problema	: k -CLIQUE MÁXIMA
Dados	: Grafo G	Dados	: Grafo G
Pergunta	: $\chi(G) \leq k$?	Pergunta	: $\omega(G) \geq k$?

Embora o problema k -CLIQUE MÁXIMA seja certamente polinomial, o mesmo não ocorre para o problema k -NÚMERO CROMÁTICO; para $k \geq 3$ este problema é NP -completo [Ka 72].

Por outro lado, dado um par (G, k) , tanto a propriedade de que G contém uma clique de tamanho k quanto G admite uma k -coloração são problemas NP -completos.

Um grafo é dito **bom** caso possua número cromático igual ao tamanho de uma maior clique.

Logo, para esta classe, os problemas NÚMERO CROMÁTICO e CLIQUE MÁXIMA estão tanto em NP quanto em $co-NP$.

Observe que pedir a igualdade entre os parâmetros número cromático e clique máxima, apenas para o grafo, diz pouco sobre a estrutura do mesmo. Qualquer grafo pode ser imerso num grafo bom através da adição de uma clique com tamanho suficientemente grande.

A figura 3.2 exhibe um grafo bom que contém um C_5 como subgrafo induzido.

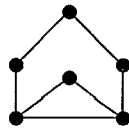


Figura 3.2: Grafo bom.

Podemos construir grafos que não são bons com número cromático arbitrariamente grande. De fato, considere uma família de grafos M_k definida da seguinte forma. O grafo M_1 é o ciclo induzido de tamanho 5. Para $k > 1$, o grafo M_k é o grafo obtido ao se adicionar ao ciclo induzido de tamanho 5 uma clique de tamanho $k - 1$ tal que cada vértice desta clique é universal no grafo. Observe que cada elemento M_k desta família tem tamanho de uma clique máxima igual a $k + 1$ e número cromático igual a $k + 2$. Logo nenhum elemento desta família é bom.

A figura 3.3 mostra os dois primeiros elementos desta família.



Figura 3.3: Grafos M_1 e M_2 .

Considere o problema de reconhecimento para a classe dos grafos bons:

Problema	: GRAFO BOM
Dados	: Grafo G
Pergunta	: G é bom ?

Podemos mostrar que este problema de decisão é difícil do ponto de vista de complexidade computacional:

Teorema 3.1 *Reconhecer se um grafo é bom é NP-completo.*

Prova: Mostremos primeiro que GRAFO BOM é um problema de decisão em *NP*.

Um certificado sucinto para a igualdade $\chi(G) = \omega(G)$ é uma coloração C para o grafo G e uma clique $K \leq G$ do mesmo tamanho.

Dado que a desigualdade $\chi(G) \geq \omega(G)$ é sempre válida, obtemos:

$$\chi(G) \leq |C| = |K| \leq \omega(G) \leq \chi(G).$$

Logo vale a igualdade dos parâmetros número cromático e tamanho de uma maior clique para o grafo G .

Para mostrar que GRAFO BOM é na verdade *NP*-completo, consideramos o seguinte problema *NP*-completo:

Problema : 3-NÚMERO CROMÁTICO
 Dados : Grafo G
 Pergunta : $\chi(G) \leq 3$?

Apresentamos, a seguir, uma transformação polinomial do problema 3-NÚMERO CROMÁTICO para o problema GRAFO BOM. Mostraremos que, dado um exemplar geral G para o problema 3-NÚMERO CROMÁTICO, podemos construir um exemplar particular G_0 para o problema GRAFO BOM satisfazendo a propriedade:

$$\chi(G) \leq 3 \iff G_0 \text{ é bom.}$$

Dado um grafo G , caso G possua uma clique de tamanho 4, o grafo G_0 será M_3 , apresentado na figura 3.4, segundo a definição da família acima.

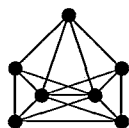


Figura 3.4: Grafo M_3 .

Caso contrário, isto é, se G não possui clique de tamanho 4, então G_0 será a identificação de G e K_3 , o grafo completo com três vértices, através de um vértice.

Caso $\chi(G) \leq 3$ então, como $\omega(G) \leq \chi(G)$, temos que G não tem clique de tamanho 4 e portanto G_0 terá

$$\omega(G_0) = \max(\omega(G), \omega(K_3)) = 3 = \max(\chi(G), \chi(K_3)) = \chi(G_0).$$

O grafo G_0 será portanto um grafo bom.

Caso $\chi(G) > 3$ e $G_0 = M_3$ então G_0 não é bom.

Finalmente, caso $\chi(G) > 3$ e $G_0 \neq M_3$, então G_0 não é bom pois $\omega(G_0) = 3$. \square

Dizemos que um grafo é **perfeito** quando o grafo e cada subgrafo induzido próprio é bom.

A figura 3.2 apresentou um grafo bom que não é perfeito.

Considere o problema de reconhecimento para a classe de grafos perfeitos:

Problema : GRAFO PERFEITO
Dados : Grafo G
Pergunta : G é perfeito ?

Observamos que, para provar que um grafo é perfeito, temos que provar que todos os seus subgrafos induzidos são bons. Já para provar que um grafo não é perfeito, temos que exibir algum subgrafo induzido H que não seja $\omega(H)$ -colorível.

Mostraremos na próxima seção que, na verdade, o complemento deste problema de decisão, isto é, o problema de reconhecimento para a classe dos grafos imperfeitos, está em NP .

Quanto ao problema GRAFO PERFEITO, embora em $co-NP$, ainda não foi decidido se este problema de decisão é NP -completo [Jo 89].

Observamos que a condição de dualidade que define a classe dos grafos perfeitos torna possível a existência de algoritmos polinomiais para os problemas clique máxima e número cromático nesta classe. Porém tais algoritmos são baseados no método do elipsóide [GrLoSc 81]. Ainda se procuram, portanto, algoritmos de natureza combinatória para estes problemas de otimização na classe dos grafos perfeitos.

3.2 Tabuleiros

O teorema dos grafos perfeitos prova que a classe dos grafos perfeitos é auto-complementar. Na verdade, ao provar este resultado, Lovász estabeleceu um fato mais forte:

Teorema 3.2 [Lo 72] *Um grafo G é perfeito se e somente se para todo subgrafo induzido $H \leq G$ a seguinte desigualdade vale:*

$$\alpha(H)\omega(H) \geq |H|.$$

Mostramos a seguir como de fato o teorema acima implica o teorema dos grafos perfeitos.

Corolário 3.1 *A classe dos grafos perfeitos é auto-complementar.*

Prova: Dado um grafo perfeito G , pela condição de Lovász temos que, para todo subgrafo induzido $H \leq G$

$$\alpha(H)\omega(H) \geq |H|.$$

Como $\alpha(\overline{H}) = \omega(H)$ e $\omega(\overline{H}) = \alpha(H)$ temos que,

$$\alpha(\overline{H})\omega(\overline{H}) = \alpha(H)\omega(H) \geq |H| = |\overline{H}|,$$

o que implica a condição de Lovász para \overline{H} .

Portanto, o grafo \overline{G} também é perfeito. \square

Lembramos que um grafo é **minimalmente imperfeito** quando não é perfeito mas cada um dos seus subgrafos induzidos próprios é perfeito.

Observe que, por definição, esta classe de grafos é auto-complementar.

Como exemplos de grafos minimalmente imperfeitos, podemos citar os ciclos e cociclos induzidos ímpares de tamanho maior que três. Na verdade, a conjectura forte de Berge afirma que estes são os únicos grafos minimalmente imperfeitos.

O teorema 3.2 fornece uma condição necessária para que um grafo seja minimalmente imperfeito.

Corolário 3.2 *Se G é minimalmente imperfeito então $\alpha(G)\omega(G) + 1 = |G|$.*

Prova: Dado qualquer vértice do grafo minimalmente imperfeito G , o teorema 3.2 estabelece que

$$\alpha(G \setminus v)\omega(G \setminus v) \geq |G \setminus v| = |G| - 1.$$

Além disso, como G não é perfeito, temos $\alpha(G)\omega(G) < |G|$.

Portanto, $|G| - 1 \leq \alpha(G \setminus v)\omega(G \setminus v) \leq \alpha(G)\omega(G) < |G|$, o que implica a igualdade $\alpha(G)\omega(G) + 1 = |G|$. \square

Como sempre temos as desigualdades $\alpha(G \setminus v) \leq \alpha(G)$ e $\omega(G \setminus v) \leq \omega(G)$, no caso de um grafo minimalmente imperfeito G , temos a igualdade $\alpha(G \setminus v)\omega(G \setminus v) = \alpha(G)\omega(G)$, o que implica $\alpha(G \setminus v) = \alpha(G)$ e $\omega(G \setminus v) = \omega(G)$.

Obtemos assim, outra condição necessária para que um grafo seja minimalmente imperfeito.

Lema 3.1 *Se G é minimalmente imperfeito então, dado qualquer vértice v de G , o grafo $G \setminus v$ pode ser particionado em $\omega(G)$ conjuntos estáveis de tamanho $\alpha(G)$ e em $\alpha(G)$ cliques de tamanho $\omega(G)$.*

Prova: Como G é minimalmente imperfeito, dado um vértice v de G temos $\alpha(G \setminus v) = \alpha(G)$ e $\omega(G \setminus v) = \omega(G)$.

Agora, como $G \setminus v$ é perfeito, este grafo pode ser colorido com $\chi(G \setminus v) = \omega(G \setminus v) = \omega(G)$ cores. Como $|G \setminus v| = \omega(G)\alpha(G)$, o PRINCÍPIO DAS GAVETAS garante que cada conjunto estável na partição terá tamanho máximo.

Agora, como \overline{G} também é minimalmente imperfeito, uma partição de $\overline{G \setminus v}$ em $\omega(\overline{G})$ conjuntos estáveis de tamanho $\alpha(\overline{G})$ fornece uma partição de $G \setminus v$ em $\alpha(G)$ cliques de tamanho $\omega(G)$. \square

Observe que cada conjunto estável, por definição, intercepta uma clique em, no máximo, um vértice.

Considere por exemplo C_7 , o ciclo induzido por 7 vértices, representado na figura 3.5. Este grafo é minimalmente imperfeito. Neste caso obtemos, ao remover qualquer um de seus vértices, uma partição em três cliques máximas e uma partição em dois conjuntos estáveis máximos do grafo restante.

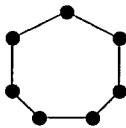


Figura 3.5: Grafo minimalmente imperfeito.

Procuramos encontrar condições que caracterizem a classe dos grafos minimalmente imperfeitos.

Chamamos um grafo G de **tabuleiro** caso satisfaça:

- $|G| = \alpha(G)\omega(G) + 1$.
- Dado $v \in V(G)$, $G \setminus v$ pode ser particionado em $\omega(G)$ conjuntos estáveis de tamanho $\alpha(G)$ e em $\alpha(G)$ cliques de tamanho $\omega(G)$.

Observe que, por definição, esta classe de grafos é auto-complementar.

Embora todo grafo tabuleiro seja imperfeito, a figura 3.6 mostra um grafo tabuleiro que não é minimalmente imperfeito. De fato, a remoção de qualquer vértice deste grafo produz um grafo que pode ser particionado em três cliques de tamanho três ou em três conjuntos estáveis de tamanho três e tal grafo tem um conjunto estável de tamanho três e uma clique máxima de tamanho três. Por outro lado, este grafo não é minimalmente imperfeito porque contém um C_5 como subgrafo induzido próprio.

Considere o problema de reconhecimento para a classe dos grafos imperfeitos:

Problema : GRAFO IMPERFEITO
 Dados : Grafo G
 Pergunta : G é imperfeito ?

Podemos usar a classe dos grafos tabuleiros para mostrar que este problema de decisão pertence a NP .

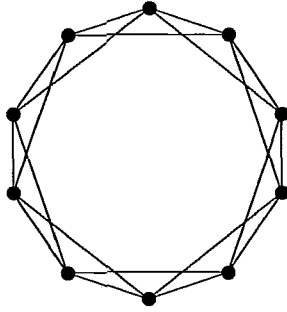


Figura 3.6: Grafo tabuleiro e não minimalmente imperfeito.

Observe que a classe dos grafos tabuleiros não é hereditária.

Um grafo é dito **minimalmente tabuleiro** quando é tabuleiro mas cada um dos seus subgrafos induzidos próprios não é tabuleiro.

Mostremos primeiro que um grafo é imperfeito se e somente se contém um subgrafo induzido que é tabuleiro.

Lema 3.2 *Um grafo é minimalmente imperfeito se e somente se é minimalmente tabuleiro.*

Prova: Pelo lema 3.1, todo grafo minimalmente imperfeito é tabuleiro. Além disso, qualquer subgrafo induzido próprio de um grafo minimalmente imperfeito, sendo perfeito, não será tabuleiro. Logo todo grafo minimalmente imperfeito é minimalmente tabuleiro.

Reciprocamente, todo grafo minimalmente tabuleiro é imperfeito. Caso não seja minimalmente imperfeito, conterà um subgrafo induzido próprio minimalmente imperfeito e portanto tabuleiro, uma contradição. Logo todo grafo minimalmente tabuleiro é minimalmente imperfeito. \square

À primeira vista não temos um certificado sucinto para o problema de reconhecimento da classe dos grafos tabuleiros:

Problema : GRAFO TABULEIRO
 Dados : Grafo G
 Pergunta : G é tabuleiro ?

Definimos um grafo G como sendo **particionável** caso existam inteiros r, s com $r, s \geq 2$ tais que, para cada vértice v de G , o grafo $G \setminus v$ pode ser particionado em r cliques de tamanho s e s conjuntos estáveis de tamanho r .

Lema 3.3 *Um grafo é tabuleiro se e somente se é particionável.*

Prova: Dado um grafo tabuleiro G , como este grafo é imperfeito temos que G não é uma clique, isto é, $\alpha(G) > 1$ e G não é induzido por um conjunto estável, isto

é, $\omega(G) > 1$. Logo, por definição, G será um grafo particionável com $r = \alpha(G)$ e $s = \omega(G)$.

Reciprocamente, dado um grafo particionável G , como $G \setminus v$ pode ser particionado em r cliques de tamanho s e s conjuntos estáveis de tamanho r , temos que $|G| = rs + 1$ e

$$s \leq \omega(G \setminus v) \leq \chi(G \setminus v) \leq s.$$

Logo, obtemos as igualdades

$$s = \omega(G \setminus v) = \chi(G \setminus v) = s.$$

Agora seja K uma clique de tamanho máximo no grafo G e seja $x \in V(G \setminus K)$.

Temos $\omega(G) = |K| = \omega(G \setminus x) = s$, logo $\omega(G) = s$.

Do mesmo modo, $\alpha(G) = r$, o que mostra que G é um grafo tabuleiro. \square

Estamos prontos então para estabelecer que GRAFO IMPERFEITO é um problema em NP [Ca 82].

Teorema 3.3 *Reconhecer se um grafo é imperfeito é um problema em NP .*

Prova: Um certificado sucinto para um grafo imperfeito G é um subgrafo induzido particionável $T \leq G$.

Mais precisamente, exibimos um certificado de que T é de fato subgrafo induzido de G .

Além disso, exibimos $|V(T)|$ tabuleiros de tamanho rs que estabelecem, para cada vértice v de T , a partição de $T \setminus v$ em r cliques de tamanho s e s conjuntos estáveis de tamanho r .

Para cada tabuleiro podemos verificar que, de fato, cada conjunto de tamanho s induz uma clique, cada conjunto de tamanho r é estável e cada vértice de $T \setminus v$ aparece exatamente uma vez. \square

Observamos que todas as propriedades apresentadas neste capítulo para grafos minimalmente imperfeitos são satisfeitas, por definição, pelos grafos tabuleiros.

Para conseguirmos caracterizar a classe dos grafos minimalmente imperfeitos precisamos obter propriedades desta classe que não são satisfeitas por todos os grafos tabuleiros.

Um exemplo de uma propriedade que separa a classe dos grafos tabuleiros da classe dos grafos minimalmente imperfeitos será obtida na seção 4.7.

3.3 Paridade

Consideramos neste parágrafo a conjectura forte dos grafos perfeitos do ponto de vista de complexidade computacional.

Dado um ciclo induzido ímpar C_{2k+1} , com $k > 1$, temos

$$\chi(C_{2k+1}) = 3 > 2 = \omega(C_{2k+1}).$$

Portanto, nenhum grafo perfeito contém um ciclo induzido ímpar com mais de três vértices.

Quando a classe dos grafos perfeitos foi definida, foram enunciadas duas conjecturas [Be 61]:

- **CONJECTURA FORTE DOS GRAFOS PERFEITOS:** Um grafo é perfeito se e somente se nem o grafo nem o seu complemento contém um ciclo induzido ímpar com mais de três vértices.
- **CONJECTURA FRACA DOS GRAFOS PERFEITOS:** Um grafo é perfeito se e somente o seu complemento é perfeito.

A conjectura fraca dos grafos perfeitos já foi provada [Lo 72] e, a partir deste resultado, podemos enunciar a conjectura forte dos grafos perfeitos como:

- Um grafo e seu complemento são perfeitos se e somente se nem o grafo nem o seu complemento contém um ciclo induzido ímpar com mais de três vértices.

Definimos um grafo como **Berge** quando não contém um ciclo induzido ímpar ou um cociclo induzido ímpar de tamanho maior que três. Podemos então enunciar a conjectura forte dos grafos perfeitos como:

- Todo grafo Berge é perfeito.

Para algumas classes de grafos a conjectura forte já foi provada.

Por exemplo, sabemos que um grafo planar é perfeito se e somente se não contém um ciclo induzido ímpar com mais de três vértices [Tu 73]. Como $C_5 = \overline{C}_5$ e \overline{C}_{2k+1} não é planar para $k \geq 3$, temos que a conjectura forte dos grafos perfeitos vale para a classe dos grafos planares.

Por outro lado, também sabemos que, se um grafo não contém um ciclo induzido ímpar maior que 3 ou um ciclo ímpar maior que três com exatamente uma corda, então o grafo é perfeito [Me 76]. Um grafo perfeito deste tipo é chamado de grafo **Meyniel**.

A conjectura forte dos grafos perfeitos, caso verdadeira, estabelece uma caracterização desta classe. Como ainda não se sabe se o problema **GRAFO PERFEITO** é

NP-completo, isto é, o problema de reconhecimento, do ponto de vista de complexidade computacional, está em aberto, é natural considerar as implicações que esta caracterização traz sob este aspecto.

Consideremos primeiro o problema:

Problema : CICLO INDUZIDO
Dados : Grafo G
Pergunta : G contém um ciclo induzido?

Um processo de busca resolve eficientemente este problema.

A restrição de paridade ou, mais precisamente, o problema de decisão CICLO INDUZIDO ÍMPAR, também pode ser resolvido em tempo polinomial por um processo de busca. Na verdade, este é o problema de reconhecimento para a classe dos grafos bipartidos.

Consideramos então o seguinte problema de decisão:

Problema : CICLO INDUZIDO ÍMPAR ≥ 5
Dados : Grafo G
Pergunta : G contém um ciclo induzido ímpar ≥ 5 ?

Embora a complexidade deste problema ainda não tenha sido estabelecida, podemos mencionar alguns resultados parciais.

Observe que um algoritmo eficiente para o problema CICLO INDUZIDO ÍMPAR ≥ 5 e a validade da conjectura forte dos grafos perfeitos implicariam que o problema de reconhecimento para a classe dos grafos perfeitos pertence à classe P .

Consideremos de novo a classe dos grafos planares. Já é conhecido um algoritmo polinomial para o reconhecimento dos grafos planares perfeitos [Hs 87]. Isto implica que o problema CICLO INDUZIDO ÍMPAR ≥ 5 , quando restrito à classe dos grafos planares, pertence a P . De fato, dado um grafo planar, testamos eficientemente se este grafo é perfeito. Caso a resposta seja SIM, sabemos que este grafo não contém ciclo induzido ímpar maior ou igual a 5. Caso contrário, sabemos que este grafo necessariamente contém um ciclo induzido ímpar maior ou igual a 5.

Além disso, também temos que o problema de reconhecimento para a classe dos grafos Meyniel tem complexidade polinomial [BuFo 84].

Em contraste com estes resultados, os seguintes problemas são *NP*-completos [Bi 89]:

Problema : u -CICLO ÍMPAR
Dados : Grafo G , vértice $u \in V(G)$
Pergunta : G contém um ciclo induzido ímpar ≥ 5 contendo u ?

Problema : $\{u, v\}$ -CICLO
Dados : Grafo G , vértices $u, v \in V(G)$
Pergunta : G contém um ciclo induzido contendo $\{u, v\}$?

Os seguintes problemas de decisão continuam, porém, em aberto [FiTa 89]:

Problema 3.1 *Determinar a complexidade do problema CICLO INDUZIDO ÍMPAR ≥ 5 .*

Problema 3.2 *O problema de reconhecimento para a classe de grafos Berge é co-NP-completo?*

Apresentamos no Apêndice uma demonstração de que os problemas u -CICLO ÍMPAR e $\{u, v\}$ -CICLO são NP-completos [Bi 89].

Esta prova descreve uma transformação polinomial usando o seguinte problema NP-completo clássico:

Problema : 3-SAT
Dados : Expressão booleana na forma normal conjuntiva,
onde cada cláusula tem exatamente 3 literais.
Pergunta : A expressão booleana é satisfatível?

Na verdade, mostraremos, também neste Apêndice, como esta transformação polinomial pode ser utilizada para mostrar que os seguintes problemas são co-NP-completos:

Problema : $\{u, s\}$ -DUPLA PAR
Dados : Grafo G , vértices $u, s \in V_G$
Pergunta : O par $\{u, s\}$ induz uma dupla par em G ?

Problema : DUPLA PAR
Dados : Grafo G
Pergunta : G contém uma dupla par?

Terminamos esta seção com duas conjecturas que consideram o problema de decisão DUPLA PAR restrito à classe dos grafos perfeitos [Re 90].

Conjectura 3.1 *Podemos determinar em tempo polinomial se dois vértices dados em um grafo perfeito formam uma dupla par.*

Conjectura 3.2 *Podemos determinar se um grafo perfeito contém uma dupla par e encontrá-la, caso exista, em tempo polinomial.*

Como evidência positiva para estas conjecturas podemos citar algumas subclasses de grafos perfeitos, consideradas no capítulo 2, onde estas afirmações são verdadeiras: os grafos fracamente triangularizados [HyHoMa 89] e os grafos Meyniel [He 90].

No capítulo 5 consideramos o problema DUPLA PAR restrito à classe dos grafos perfeitos sem touros.

Capítulo 4

Conjuntos Homogêneos

Consideramos neste capítulo um tipo de estrutura básica para o estudo da classe dos grafos perfeitos: os conjuntos homogêneos.

Mostramos como esta estrutura aparece como ferramenta na demonstração do teorema dos grafos perfeitos. Esta demonstração fornece um teorema de decomposição, o que nos leva a considerar a árvore de conjuntos homogêneos.

Os problemas de otimização combinatória CLIQUE MÁXIMA e COLORAÇÃO MÍNIMA são estudados mediante esta decomposição.

Concluimos este capítulo considerando uma generalização desta estrutura: os pares homogêneos. Apresentamos alguns problemas em aberto relacionados.

4.1 Conjuntos Homogêneos e Substituição

Dizemos que um subconjunto H dos vértices de um grafo $G = (V, E)$ é um **conjunto homogêneo** quando satisfaz

- $N(v) \cap H = H$ ou $N(v) \cap H = \phi$, para todo $v \in V \setminus H$
- $|H| \geq 2$ e $|G \setminus H| \geq 2$.

Observe que pedir somente a primeira condição geraria um conceito trivial.

Para melhor apreciarmos a definição de conjunto homogêneo, apresentamos na figura 4.1, tanto um exemplo de um grafo que contém um conjunto homogêneo, quanto um exemplo de um grafo que não contém conjunto homogêneo.

Observe que, na verdade, qualquer grafo bipartido completo suficientemente grande, isto é, com mais de dois vértices, admite conjunto homogêneo.

Por outro lado, qualquer ciclo induzido suficientemente grande, isto é, com mais de quatro vértices, não admite conjunto homogêneo.



Figura 4.1: Grafo bipartido completo e ciclo induzido.

A existência de um conjunto homogêneo $H \subset V$ particiona o subconjunto de vértices $V \setminus H$ em dois conjuntos, digamos A e B , onde

$$A := \{v \in V : N(v) \cap H = H\}$$

$$B := \{v \in V : N(v) \cap H = \emptyset\}.$$

Podemos então representar um grafo que possui conjunto homogêneo como o diagrama da figura 4.2:

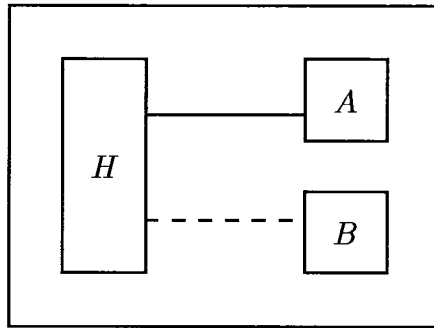


Figura 4.2: Grafo G com conjunto homogêneo H .

Nele representamos as propriedades de adjacência do conjunto homogêneo H em relação aos conjuntos A e B .

A linha contínua entre os conjuntos A e H representa a propriedade de que cada vértice de A é adjacente a cada vértice de H . Já a linha tracejada entre os conjuntos B e H representa o fato de que cada vértice de B não é adjacente a nenhum vértice de H .

Observe que conter um conjunto homogêneo é, por definição, uma propriedade auto-complementar.

Denotaremos por H tanto o conjunto homogêneo $H \subset V$ quanto o subgrafo induzido $G_H < G$.

Dados dois grafos disjuntos G e H e um vértice x de G , considere a seguinte construção de um grafo G' : Tome a união disjunta dos grafos $G \setminus x$ e H e, para cada par de vértices y, z com $y \in G \setminus x$ e $z \in H$, adicione a aresta $(y, z) \in E(G')$ se e somente se $(x, y) \in E(G)$.

Neste caso dizemos, que o grafo G' foi obtido por **substituição** de x por H em G .

A figura 4.3 apresenta um grafo obtido por substituição de um vértice por um caminho induzido com três vértices num ciclo induzido com quatro vértices.

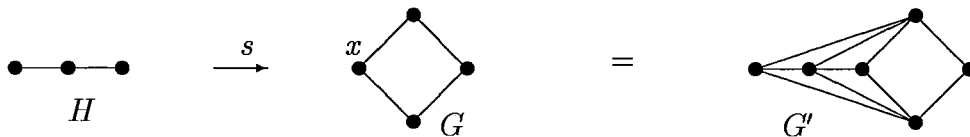


Figura 4.3: Substituição.

Observe que o grafo resultante admite, neste caso, um conjunto homogêneo.

A relação entre conjunto homogêneo e este processo de substituição fica estabelecida pelo lema a seguir:

Lema 4.1 *Um grafo possui um conjunto homogêneo se e somente se foi obtido por substituição.*

Prova: Suponha que o grafo G possua um conjunto homogêneo H . Então, para qualquer vértice $x \in H$, o grafo G é obtido por substituição de x por H no grafo $G \setminus (H \setminus x)$.

Por outro lado, caso G tenha sido obtido por substituição do vértice x em G' por um grafo H , então os vértices de H formam um conjunto homogêneo em G com $A = N_{G'}(x)$ e $B = N_{G'}(x)$. \square

4.2 Teorema dos Grafos Perfeitos

A noção de conjunto homogêneo aparece como ferramenta para a demonstração do teorema dos grafos perfeitos, que estabelece que esta classe de grafos é auto-complementar [Lo 72].

Para apresentar esta prova, precisamos da seguinte caracterização dos grafos perfeitos:

Teorema 4.1 *Um grafo G é perfeito se e somente se para todo subgrafo induzido $H \leq G$ existe um conjunto estável S interceptando todas as cliques máximas de H .*

Prova: A condição é necessária. Dado que, por definição de grafo perfeito, qualquer subgrafo induzido $H \leq G$ admite uma coloração com $\omega(H)$ cores, basta considerar S como uma classe de coloração desta partição.

Observe que, na verdade, a condição é necessária para qualquer grafo H que admita uma coloração com $\omega(H)$ cores.

A condição é suficiente. Argumentamos por indução no número de vértices do grafo G .

Suponha que para todo subgrafo induzido $H \leq G$ existe um conjunto estável S interceptando todas as cliques máximas de H . Em particular, existe um conjunto estável T que intercepta todas as cliques máximas de G . Considere o subgrafo $G \setminus T < G$.

Por hipótese de indução, este subgrafo próprio é perfeito, logo: $\omega(G \setminus T) = \chi(G \setminus T)$. Além disso, por escolha de T , $\omega(G \setminus T) = \omega(G) - 1$.

Agora, considerando T e mais as classes de uma coloração ótima de $G \setminus T$ obtemos, uma coloração ótima para G com $\omega(G)$ cores.

Portanto, $\chi(G) = \omega(G)$ e a hipótese de indução implica que G é perfeito. \square

Usando a caracterização fornecida pelo teorema 4.1, podemos então provar que o processo de substituição preserva a propriedade de ser perfeito.

Teorema 4.2 *Se um vértice de um grafo perfeito é substituído por um grafo perfeito então o grafo resultante é perfeito.*

Prova: Suponha que G e H são grafos perfeitos e que substituímos um vértice x de G pelo grafo H obtendo o grafo G' .

Pelo teorema 4.1, para mostrar que G' é perfeito, é suficiente exibir, para cada um dos seus subgrafos induzidos, um conjunto estável interceptando todas as suas cliques máximas.

Por construção de G' , cada subgrafo induzido que não é subgrafo induzido de G ou de H deve conter pelo menos dois vértices de H e um vértice de G . Os vértices de H formarão então um conjunto homogêneo neste subgrafo induzido de G' .

Portanto, basta mostrar que G' contém um conjunto estável que intercepta todas as cliques máximas de G' .

Pela caracterização dos grafos perfeitos dada pelo teorema 4.1, o grafo H possui um conjunto estável S tal que $\omega(H \setminus S) < \omega(H)$.

Como G é perfeito, podemos considerar uma coloração de G com $\omega(G)$ cores. Seja T a classe desta partição contendo o vértice x .

Considere agora o conjunto $U = S \cup (T \setminus x)$.

Mostremos primeiro que este conjunto é estável em G' . De fato, cada vértice em $T \setminus x$ não é adjacente a x e portanto, por construção de G' pelo processo de substituição, cada vértice de $T \setminus x$ não é adjacente a elemento de S .

Resta mostrar que o conjunto estável U de fato intercepta cada clique máxima em G' .

Considere agora K , uma clique máxima em G' .

Caso $K \cap H \neq \emptyset$ então K intercepta H numa clique máxima de H e portanto a escolha de S garante que S intercepta $K \cap H$, logo U intercepta K .

Caso $K \cap H = \emptyset$ então K é uma clique máxima de $G \setminus x$. Por escolha de T , temos que T encontra K , e como $K \cap H = \emptyset$, na verdade, $T \setminus x$ encontra K . Logo U intercepta K . \square

Podemos reformular o teorema 4.2 de modo a relacionar conjuntos homogêneos e a classe dos grafos minimalmente imperfeitos.

Corolário 4.1 *Nenhum grafo minimalmente imperfeito contém um conjunto homogêneo.*

Prova: Suponha por absurdo que um grafo minimalmente imperfeito G contenha um conjunto homogêneo H .

Dado qualquer vértice $x \in H$, considere os subgrafos induzidos H e $G \setminus (H \setminus x)$ do grafo G .

Por definição de grafo minimalmente imperfeito, estes dois subgrafos induzidos próprios são perfeitos.

Como G é obtido por substituição de x por H em $G \setminus (H \setminus x)$ o teorema 4.2 implica que G é perfeito, uma contradição. \square

Estamos prontos então para apresentar uma demonstração do teorema dos grafos perfeitos [Lo 72].

Teorema 4.3 *Um grafo é perfeito se e somente se o seu complemento é perfeito.*

Prova: Seja G um grafo perfeito e considere o seu complemento \overline{G} . Como a propriedade de ser perfeito é hereditária, basta mostrar que \overline{G} contém um conjunto independente cuja remoção destrói todas as cliques máximas de \overline{G} .

Traduzindo então a condição de \overline{G} para G , queremos exibir uma clique K tal que $\alpha(G \setminus K) < \alpha(G)$.

Suponha que não existe tal clique em G .

Então para cada clique K de G , existe um conjunto independente S_K em $G \setminus K$ tal que $|S_K| = \alpha(G)$.

Logo, enumerando por K_1, K_2, \dots, K_r todas as cliques de G , para cada $1 \leq i \leq r$, existe um conjunto independente máximo em G , digamos S_i , disjunto de K_i .

Agora, para cada vértice x do grafo G , denote por $\omega(x)$ o número de conjuntos S_i contendo x . Substitua cada vértice x em G por um grafo completo com $\omega(x)$ vértices, obtendo um grafo perfeito G' .

Calculemos agora $\omega(G')$ e $\chi(G')$.

Uma clique máxima em G' será união de cliques de G' obtidas por substituições em algum grafo completo K_i de G .

Portanto,

$$\omega(G') = \sum_{x \in K_i} \omega(x) = \sum_{j=1}^r |S_j \cap K_i| \leq r - 1.$$

Observe que a desigualdade à direita é justificada porque o termo correspondente a $j = i$ é zero e cada outro é no máximo 1.

Por outro lado, por construção de G' ,

$$|V(G')| = \sum_{x \in V} \omega(x) = \sum_{i=1}^r |S_i| = r\alpha(G) = r\alpha(G').$$

Além disso, por definição dos parâmetros χ e α , vale a desigualdade

$$\chi(G')\alpha(G') \geq |V(G')|.$$

Logo

$$\chi(G') \geq \frac{|V(G')|}{\alpha(G')} = r.$$

e portanto, $\chi(G') > \omega(G')$, o que contradiz G' ser perfeito. \square

4.3 Teste para Conjuntos Homogêneos

Dados um grafo $G = (V, E)$ e um subconjunto T do conjunto de vértices V , denotamos por $N(T)$ a **vizinhança** de T , isto é, o conjunto de vértices adjacentes a algum vértice em T .

Logo um subconjunto próprio H de V será homogêneo em G caso ele contenha pelo menos dois vértices e, para cada $v \in H$, a igualdade $N(v) \setminus H = N(H)$ for satisfeita.

Observe que a propriedade de ser homogêneo não é hereditária, isto é, um subconjunto próprio de um conjunto homogêneo não é necessariamente homogêneo.

Seja H um conjunto homogêneo de G . Dizemos que H é **minimal** se nenhum subconjunto próprio de H é homogêneo.

Por outro lado, dizemos que dois vértices $x, y \in V$ são **homogeneizáveis** caso exista um conjunto homogêneo contendo ambos.

O lema 4.2 garante que existe um único menor conjunto homogêneo contendo um par de vértices $\{x, y\}$ homogeneizáveis.

Lema 4.2 *Se dois conjuntos homogêneos se interceptam em mais de um vértice então a sua interseção é um conjunto homogêneo.*

Prova: Sejam então H_1 e H_2 dois conjuntos homogêneos não disjuntos num grafo com $|H_1 \cap H_2| \geq 2$.

Como H_1 e H_2 são conjuntos homogêneos, os vértices em $H_1 \cap H_2$ têm os mesmos vizinhos em $V \setminus H_1$ e em $V \setminus H_2$ e portanto também em $(V \setminus H_1) \cup (V \setminus H_2) = V \setminus (H_1 \cap H_2)$, o que implica que $H_1 \cap H_2$ é homogêneo. \square

Obtemos assim o resultado:

Corolário 4.2 *Existe um único menor conjunto homogêneo contendo cada par de vértices homogeneizáveis.*

Prova: Basta tomar a interseção de todos os conjuntos homogêneos contendo um dado par de vértices homogeneizáveis. \square

Dados dois vértices homogeneizáveis x, y , denotamos por H_{xy} o menor conjunto homogêneo contendo ambos, isto é, o conjunto homogêneo contendo x, y tal que nenhum dos seus subconjuntos próprios contendo estes dois vértices é homogêneo.

O conjunto homogêneo H_{xy} está portanto bem definido, dado um par de vértices $\{x, y\}$ homogeneizáveis. Observe porém que H_{xy} não é necessariamente um conjunto homogêneo minimal.

Apresentamos abaixo um algoritmo que testa, em tempo $O(n^2)$, se um par de vértices é homogeneizável em um grafo. Obtemos assim um algoritmo $O(n^4)$ para testar a existência de um conjunto homogêneo num grafo.

A idéia do algoritmo é natural. Dado um par de vértices x, y do grafo, tenta-se particionar os vértices restantes em dois conjuntos: o dos vértices adjacentes a x e a y , e o dos vértices não adjacentes nem a x nem a y .

Caso isso não seja possível, isto é, existem vértices adjacentes a apenas um entre x e y , consideramos o conjunto composto por x e y e estes vértices que vêm parcialmente o conjunto $\{x, y\}$.

Repetimos então o processo, tentando particionar o conjunto dos vértices restantes.

Algoritmo 4.1 *Testa se um par de vértices são homogeneizáveis num grafo.*

Dados: Grafo $G = (V, E)$ e dois vértices $x, y \in V$.

Saida: SIM ou NÃO.

Se a resposta for SIM, o algoritmo também fornece uma partição dos vértices de G nos conjuntos H, A , e B tais que:

$$\begin{aligned} H &= \text{conjunto homogêneo de } G \text{ contendo } x, y \\ A &= \{v \in V : N(v) \cap H = H\} \\ B &= \{v \in V : N(v) \cap H = \phi\}. \end{aligned}$$

1. Crie cinco conjuntos de vértices de G : A, B, C, C' e H .
2. $H := \{x, y\}$
 $A := N(x) \cap N(y)$
 $B := V \setminus (\{x, y\} \cup N(x) \cup N(y))$
 $C := V \setminus (\{x, y\} \cup A \cup B)$
3. Se $H = V$ retorne NÃO e pare.
4. Se $C = \phi$ retorne (SIM, H, A, B) e pare.
5. $C' := \phi$
 Para cada $z \in C$
 $C' := C' \cup (N(z) \cap B) \cup (A \setminus N(z))$
6. $H := H + C$
 $A := A \setminus C'$
 $B := B \setminus C'$
 $C := C'$
 Vá para 3.

Passamos a considerar a correção e a eficiência do algoritmo 4.1. Chamamos de **iteração** cada seqüência dos passos 3, 4, 5 e 6 executada pelo algoritmo.

Lema 4.3 *O algoritmo 4.1 testa se um par de vértices são homogeneizáveis.*

Prova: O algoritmo pára porque se $N(x) \neq N(y)$ então o algoritmo executa várias iterações até que $H = V$ ou $C = \phi$.

O algoritmo constrói uma seqüência de conjuntos

$$\{x, y\} = H_0 \subset H_1 \subset \dots \subset H_t$$

ao adicionar, na i -ésima iteração, os vértices em $V \setminus H_i$ que vêem o conjunto H_i parcialmente obtendo o conjunto H_{i+1} , para $0 \leq i \leq t - 1$.

O último elemento desta seqüência ou será igual a V ou será um conjunto homogêneo contendo $\{x, y\}$.

Mostremos agora que $\{x, y\}$ são homogeneizáveis se e somente se o algoritmo termina com $H_t \neq V$.

Suponha por absurdo que $\{x, y\}$ seja homogeneizável mas que $H_t = V$.

Então por definição do conjunto homogêneo H_{xy} temos

$$\{x, y\} = H_0 \subseteq H_{xy} \subset H_t;$$

logo existe um índice $i \leq t$ tal que $H_{i-1} \subseteq H_{xy}$ mas $H_i \not\subseteq H_{xy}$.

Por construção, $H_i \setminus H_{i-1}$ é o conjunto dos vértices que vêm H_{i-1} parcialmente. Logo, qualquer vértice em $H_i \setminus H_{xy}$ estará em $H_i \setminus H_{i-1}$ e será um vértice que vê H_{xy} parcialmente, o que é uma contradição.

Por outro lado, suponha que o algoritmo pára com $H_t \neq V$.

A condição de parada garante que H_t satisfaz a igualdade $N(w) \setminus H_t = N(H_t)$, para todo $w \in H_t$. Logo H_t é um conjunto homogêneo contendo $\{x, y\}$.

Suponha que $H_{xy} \neq H_t$. Então, por definição, $\{x, y\} \subseteq H_{xy} \subset H_t$, o que implica a existência de algum vértice em $H_t \setminus H_{xy}$ que vê H_{xy} parcialmente, uma contradição. \square

Observe que a prova da correção do algoritmo mostra que, na verdade, no caso dos vértices x e y serem homogeneizáveis, o algoritmo encontra H_{xy} , o menor conjunto homogêneo contendo $\{x, y\}$.

Discutimos agora a eficiência do algoritmo 4.1.

Lema 4.4 *O algoritmo 4.1 é eficiente.*

Prova: Caso o par $\{x, y\}$ não seja um conjunto homogêneo, o algoritmo executa iterações até que $H = V$ ou $C = \phi$.

Como cada vértice do grafo G pertence ao conjunto C no máximo uma vez e executamos o passo 5 percorrendo a lista de adjacências de cada $z \in C$, obtemos que a complexidade do processo é $O(n^2)$. \square

Apresentamos a seguir dois exemplos da execução do algoritmo acima.

Considere o grafo apresentado na figura 4.4.

As seqüências de passos respectivamente para os pares de vértices $\{a, b\}$ e $\{a, c\}$ fornecerão respostas distintas.

Para a entrada $\{a, b\}$, o algoritmo retorna que este par não está contido num conjunto homogêneo do grafo.

Já para a entrada $\{a, c\}$, o algoritmo retorna o menor conjunto homogêneo contendo este par de vértices, isto é, o conjunto $\{a, c, d\}$. Observe que o conjunto $\{a, c, d, e\}$ é o maior conjunto homogêneo contendo os vértices a e c .

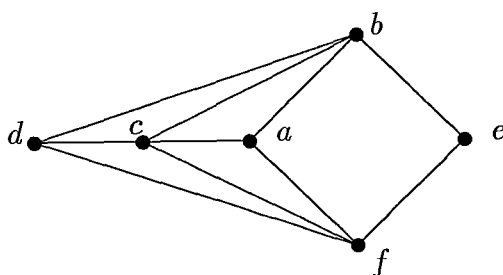


Figura 4.4: Entrada para o algoritmo.

Dados: $\{a, b\}$
 Inicialização: $H := \{a, b\}$
 $A := \{c\}$
 $B := \phi$
 $C := \{d, e, f\}$
 Iteração 1: $C' := \{c\}$
 $H := \{a, b, d, e, f\}$
 $A := \phi$
 $B := \phi$
 $C := \{c\}$
 Iteração 2: $C' := \phi$
 $H := V$
 $A := \phi$
 $B := \phi$
 $C := \phi$
 Iteração 3: retorna NÃO.

Dados: $\{a, c\}$
 Inicialização: $H := \{a, c\}$
 $A := \{b, f\}$
 $B := \{e\}$
 $C := \{d\}$
 Iteração 1: $C' := \phi$
 $H := \{a, c, d\}$
 $A := \{b, f\}$
 $B := \{e\}$
 $C := \phi$
 Iteração 2: retorna (SIM, $\{a, c, d\}, \{b, f\}, \{e\}$).

Obtemos assim um algoritmo $O(n^4)$ para testar a existência de um conjunto homogêneo num grafo, ao percorrer $O(n^3)$ listas de adjacências.

Agora suponha que os pares $\{x, y\}$ sejam analisados em ordem lexicográfica.

Tentamos assim evitar a consideração de pares de vértices que já sabemos ser não homogeneizáveis. Mais precisamente o número de vezes que percorremos uma lista de adjacências agora é

$$\sum_{i=1}^n (n-i)i = \frac{n^3 - n}{6}.$$

Obtemos, portanto, a redução de apenas um fator constante em relação à estratégia original.

4.4 Árvore de Conjuntos Homogêneos

Dado que podemos testar se um grafo G contém um conjunto homogêneo em tempo polinomial e que a operação de substituição preserva a propriedade de ser perfeito, é natural considerarmos um processo de decomposição usando conjuntos homogêneos recursivamente.

Dado um grafo G , construímos a seguinte árvore binária $T(G)$: cada vértice é rotulado por um par (G_1, H_1) onde H_1 é conjunto homogêneo de G_1 . Caso G_1 não tenha conjunto homogêneo, rotule-o por (G_1, ϕ) , e o vértice em questão corresponde a uma folha. Cada vértice não folha (G_1, H_1) tem dois filhos, resultantes da decomposição de G_1 em H_1 e $G_1 \setminus (H_1 \setminus x)$, onde x é qualquer vértice de H_1 .

Chamaremos esta árvore de **árvore de conjuntos homogêneos**.

O diagrama da figura 4.5 exibe uma árvore de conjuntos homogêneos.

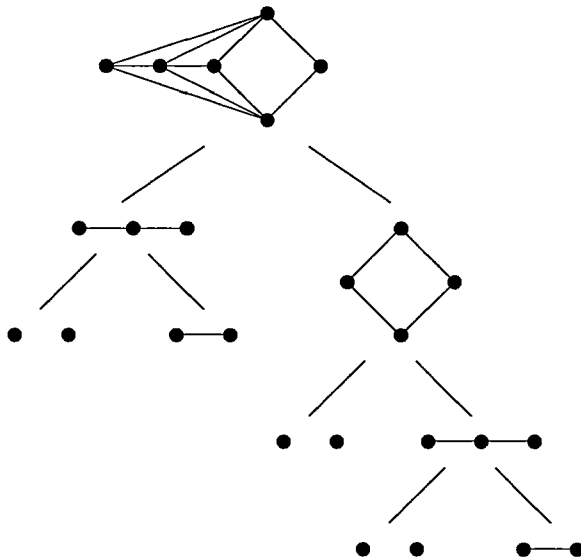


Figura 4.5: Árvore de conjuntos homogêneos.

Observe que, neste caso, foi escolhido um conjunto homogêneo minimal em cada decomposição.

O tamanho da árvore, isto é, o seu número de vértices foi, neste caso, igual a $9 = 2|V_G| - 3$.

Mostramos a seguir que podemos obter uma expressão linear para o tamanho de qualquer árvore de conjuntos homogêneos em função do número de vértices do grafo.

Lema 4.5 *A árvore de conjuntos homogêneos de um grafo G tem tamanho linear no número de vértices de G .*

Prova: Dado um grafo $G = (V, E)$ e uma árvore de conjuntos homogêneos $T(G)$, denote por $|T(G)|$ o número de vértices nesta árvore.

Mostraremos, por indução em $|V|$, que o número de vértices em $T(G)$ é no máximo $2|V| - 3$, caso $|V| \geq 2$.

Caso $|V| = 2$ então G não possui conjunto homogêneo e $|T(G)| = 1$.

Suponha que a afirmação é correta para grafos com número de vértices estritamente menor que $|V|$.

Calculemos então o tamanho de $T(G)$, uma árvore de conjuntos homogêneos para G com $|V| > 2$.

Caso $T(G)$ possua mais de um vértice, o grafo G possui conjunto homogêneo, digamos H , e consideramos as sub-árvores $T(H)$ e $T(G \setminus (H \setminus x))$, onde $x \in H$.

Então

$$\begin{aligned} |T(G)| &= |T(H)| + |T(G \setminus (H \setminus x))| + 1 \\ &\leq 2|V(H)| - 3 + 2|V(G \setminus (H \setminus x))| - 3 + 1 \\ &= 2(|V(H)| + |V(G \setminus (H \setminus x))|) - 6 + 1 \\ &= 2(|V| + 1) - 5 \\ &= 2|V| - 3. \end{aligned}$$

□

Observe então que, dado um grafo G , podemos construir uma árvore de conjuntos homogêneos em tempo polinomial.

Uma pergunta natural é determinar que classe de grafos corresponde às folhas neste processo de decomposição por conjuntos homogêneos.

Dado que o processo de substituição preserva a propriedade de ser perfeito, os grafos minimalmente perfeitos não admitem conjunto homogêneo.

Podemos citar os seguintes resultados que respondem parcialmente à pergunta acima para grafos perfeitos.

Consideramos primeiro no teorema 4.4 um resultado de Ghouilla-Houri que considera conjuntos homogêneos em grafos de comparabilidade. É provado que o processo

de substituição preserva a propriedade de ser de comparabilidade e que as folhas de uma árvore de conjuntos homogêneos de um grafo que admite uma orientação semitransitiva são, na verdade, grafos de comparabilidade. Portanto, podemos obter uma orientação transitiva para um grafo de comparabilidade orientando semitransitivamente as folhas de uma árvore de conjuntos homogêneos.

Teorema 4.4 [Gh 62] *Um grafo é de comparabilidade se e somente se admite uma orientação semitransitiva.*

Já um resultado de Olariu diz precisamente qual é o fecho da classe dos grafos sem triângulos em relação ao processo de substituição.

Teorema 4.5 [Ol 90] *Um grafo não contém como subgrafo induzido um touro, uma casa ou um dominó (figura 4.6), se e somente se as folhas de uma árvore de conjuntos homogêneos são grafos sem triângulos.*

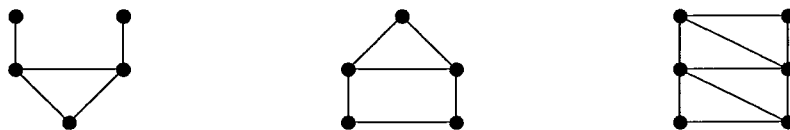


Figura 4.6: Touro, casa e dominó.

Um resultado de Chvátal e Sbihi estuda o fecho de grafos sem triângulos e seus complementos por substituição.

Teorema 4.6 [ChSb 87] *Todo grafo tem precisamente uma das seguintes propriedades:*

- G pode ser obtido de grafos sem triângulos e seus complementos por sucessivas substituições.
- G ou \overline{G} contém um touro ou um castelo (figura 4.7).

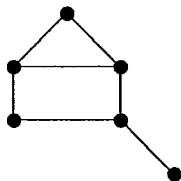


Figura 4.7: Castelo.

4.5 Problemas de Otimização

Nesta seção, analisamos como o processo de decomposição usando a árvore de conjuntos homogêneos pode ser usado para resolver problemas de otimização combinatoria.

Consideramos os seguintes problemas:

CLIQUE MÁXIMA: Encontrar uma clique máxima num grafo.

COLORAÇÃO MÍNIMA: Encontrar uma partição mínima do conjunto de vértices de um grafo em conjuntos estáveis.

Observamos que, embora as respectivas versões de decisão dos problemas acima sejam problemas *NP*-completos, o método do elipsóide permite resolvê-los eficientemente para grafos perfeitos.

Na verdade, vamos considerar as respectivas versões ponderadas destes problemas de otimização. Considere então um grafo (G, p) com pesos inteiros positivos nos vértices.

CLIQUE MÁXIMA PONDERADA: Encontre uma clique onde a soma dos pesos nos vértices seja máxima no grafo.

COLORAÇÃO MÍNIMA PONDERADA: Encontre conjuntos estáveis S_1, S_2, \dots, S_t , não necessariamente disjuntos, e inteiros $X(S_1), X(S_2), \dots, X(S_t)$ tais que:

1. Para todo vértice do grafo, a soma dos inteiros $X(S_i)$ associados a conjuntos S_i contendo este vértice é maior ou igual que o peso deste vértice.
2. A soma dos inteiros $\sum_{1 \leq i \leq t} X(S_i)$ é mínima entre os conjuntos de inteiros satisfazendo 1.

A decomposição de um grafo G em relação a um conjunto homogêneo H considera os subgrafos H e $G \setminus (H \setminus x)$, onde x é qualquer vértice de H . Isto é, o grafo G pode ser visto como obtido por substituição do vértice x de $G \setminus (H \setminus x)$ pelo grafo H .

É natural então resolver os problemas ponderados para G usando as soluções dos problemas ponderados para os subgrafos H e $G \setminus (H \setminus x)$ da seguinte forma:

1. Resolva o problema ponderado para H .
2. Resolva o problema ponderado para $G \setminus (H \setminus x)$, atribuindo, como peso de x , o resultado do problema resolvido para H .

Consideremos primeiro o problema CLIQUE MÁXIMA PONDERADA no grafo ponderado (G, p) .

Denotamos por $\omega_p(G)$, o valor de uma clique máxima ponderada para o grafo ponderado (G, p) .

Com esta notação podemos descrever a estratégia acima da seguinte forma:

1. Encontre $\omega_p(H)$.
2. Considere o grafo ponderado $(G \setminus (H \setminus x), \tilde{p})$, onde dado $y \in G \setminus (H \setminus x)$,

$$\tilde{p}(y) = \begin{cases} p(y) & \text{se } y \neq x \\ \omega_p(H) & \text{se } y = x. \end{cases}$$

3. Encontre $\omega_{\tilde{p}}(G \setminus (H \setminus x))$.

A correção desta estratégia para este problema é justificada pelo seguinte resultado:

Lema 4.6 *Seja (G, p) um grafo com pesos nos vértices e seja H um conjunto homogêneo de G . Então $\omega_p(G) = \omega_{\tilde{p}}(G \setminus (H \setminus x))$, onde x é qualquer vértice de H .*

Prova: Dada uma clique L em $(G \setminus (H \setminus x), \tilde{p})$, podemos construir uma clique em (G, p) do mesmo peso.

De fato, temos dois casos a considerar:

Se $x \notin L$ então por definição de $(G \setminus (H \setminus x), \tilde{p})$, L será, na verdade, uma clique em (G, p) com $\omega_p(L) = \omega_{\tilde{p}}(L)$.

Se $x \in L$ então considere M , uma clique em (G, p) tal que $\omega_p(M \cap H) = \omega_p(H)$ e $M \setminus H = L \setminus x$. Então

$$\omega_{\tilde{p}}(L) = \tilde{p}(x) + \omega_{\tilde{p}}(L \setminus x) = \omega_p(H) + \omega_p(L \setminus x) = \omega_p(M)$$

e portanto, fica estabelecida a desigualdade

$$\omega_p(G) \geq \omega_{\tilde{p}}(G \setminus (H \setminus x)).$$

Agora suponha

$$\omega_p(G) > \omega_{\tilde{p}}(G \setminus (H \setminus x)).$$

Seja K uma clique máxima em (G, p) . Então $\omega_p(K) = \omega_p(G)$.

Mostraremos como construir uma clique em $(G \setminus (H \setminus x), \tilde{p})$ com o mesmo peso que a clique K .

De novo, temos dois casos a considerar:

Se $K \cap H = \emptyset$ então por definição de $(G \setminus (H \setminus x), \tilde{p})$, K será, na verdade, uma clique máxima ponderada em $(G \setminus (H \setminus x), \tilde{p})$ com

$$\omega_{\tilde{p}}(K) = \omega_p(K) = \omega_p(G) > \omega_{\tilde{p}}(G \setminus (H \setminus x)),$$

uma contradição.

Por outro lado, se $K \cap H \neq \emptyset$, então, por definição de conjunto homogêneo, a clique $N = K \cap H$ é clique máxima ponderada de (H, p) .

Logo

$$\omega_p(G) = \omega_p(K) = \omega_p(N) + \omega_p(K \setminus H) = \tilde{p}(x) + \omega_{\tilde{p}}(K \setminus H) \leq \omega_{\tilde{p}}(G \setminus (H \setminus x)),$$

uma contradição. \square

Observe que a demonstração do lema 4.6 é construtiva.

Dado um grafo G com conjunto homogêneo H , podemos obter uma clique máxima ponderada de (G, p) a partir de cliques máximas ponderadas em (H, p) e $(G \setminus (H \setminus x), \tilde{p})$.

De fato, se N é clique máxima ponderada em (H, p) e L é clique máxima ponderada em $(G \setminus (H \setminus x), \tilde{p})$, temos dois casos a considerar.

Se $x \notin L$ então L será clique máxima ponderada em (G, p) .

Caso contrário, isto é, $x \in L$, então a clique ponderada induzida pelos vértices de $(L \setminus x) \cup N$ será clique máxima ponderada de (G, p) .

O diagrama da figura 4.8 representa a decomposição de um grafo G em relação a um conjunto homogêneo H .

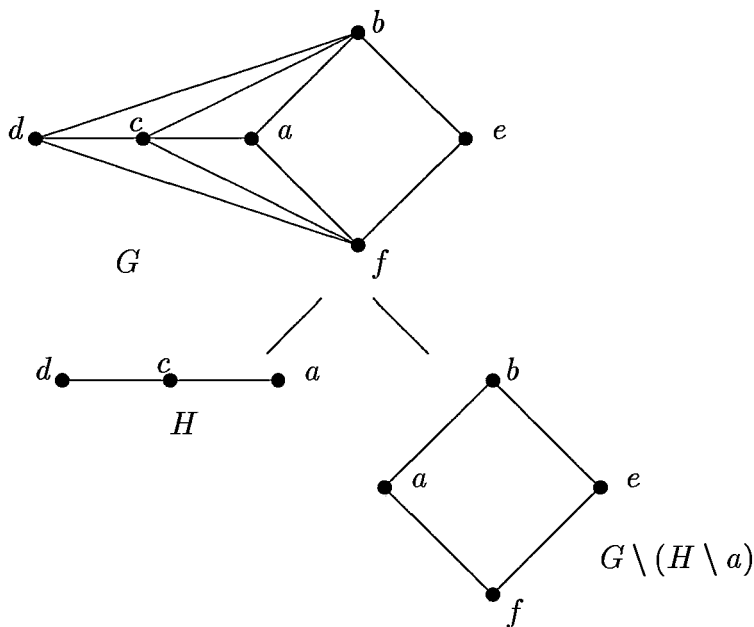


Figura 4.8: Decomposição homogênea.

Consideremos duas diferentes distribuições de pesos para (G, p) e respectivos cálculos de uma clique máxima ponderada.

Suponha primeiro a seguinte distribuição de pesos para os vértices do grafo ponderado (G, p) : $p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = p(f) = 1$ e $p(e) = 4$.

Neste caso, $\omega_p(H) = 2$ e portanto o grafo ponderado $(G \setminus (H \setminus a), \tilde{p})$ terá pesos $\tilde{p}(a) = 2$, $\tilde{p}(b) = \tilde{p}(f) = 1$ e $\tilde{p}(e) = 4$.

Para este grafo ponderado, temos $\omega_{\tilde{p}}(G \setminus (H \setminus a)) = 5$ e L , uma clique máxima ponderada em $(G \setminus (H \setminus a), \tilde{p})$, não contém o vértice a .

Portanto, $L = G_{\{b,e\}}$ será clique máxima ponderada em (G, p) .

Agora suponhamos que todos os vértices do grafo ponderado (G, p) tenham o mesmo peso, isto é, $p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = p(e) = p(f) = 1$.

Neste caso, $\omega_p(H) = 2$ e portanto o grafo ponderado $(G \setminus (H \setminus a), \tilde{p})$ terá pesos $\tilde{p}(a) = 2$ e $\tilde{p}(b) = \tilde{p}(e) = \tilde{p}(f) = 1$.

Para este grafo ponderado, encontramos $\omega_{\tilde{p}}(G \setminus (H \setminus a)) = 3$ e qualquer clique máxima ponderada em $(G \setminus (H \setminus a), \tilde{p})$ contém o vértice a .

Tomando L , a clique máxima ponderada em $(G \setminus (H \setminus a), \tilde{p})$ induzida por $\{a, b\}$, e N , a clique máxima ponderada em (H, p) induzida por $\{a, c\}$, temos que $(L \setminus a) \cup N = G_{\{a,b,c\}}$ será uma clique máxima ponderada em (G, p) .

Portanto, dada a árvore de conjuntos homogêneos para um grafo G , caso saibamos resolver o problema de clique máxima ponderada para as folhas, então sabemos resolvê-lo para o grafo G .

Exemplificamos, a seguir, como a estratégia proposta para resolver o problema CLIQUE MÁXIMA PONDERADA utiliza uma árvore de conjuntos homogêneos.

Considere o diagrama da figura 4.9. Neste caso, o grafo $G = G_9$ tem todos os vértices com peso igual a um.

Observe que os problemas correspondentes aos vértices desta árvore serão resolvidos em POSTORDER, isto é, percorrendo a árvore de conjuntos homogêneos usando a seguinte regra recursiva: visite a sub-árvore à esquerda, visite a sub-árvore à direita e visite a raiz. Encontramos $\omega_p(G_1) = 1$, $\omega_{\tilde{p}}(G_2) = 2 = \omega_p(G_3)$, $\omega_p(G_4) = 1$, $\omega_p(G_5) = 1$, $\omega_{\tilde{p}}(G_6) = 2 = \omega_p(G_7)$, $\omega_{\tilde{p}}(G_7) = 2 = \omega_p(G_8)$ e $\omega_{\tilde{p}}(G_8) = 3 = \omega_p(G_9) = \omega_p(G)$.

Consideremos agora o problema COLORAÇÃO MÍNIMA PONDERADA no grafo ponderado (G, p) .

Denotamos por $\chi_p(G)$, o valor de uma coloração mínima ponderada para o grafo ponderado (G, p) .

Com esta notação podemos descrever a estratégia acima da seguinte forma:

1. Encontre $\chi_p(H)$.
2. Considere o grafo ponderado $(G \setminus (H \setminus x), \tilde{p})$, onde dado $y \in G \setminus (H \setminus x)$,

$$\tilde{p}(y) = \begin{cases} p(y) & \text{se } y \neq x \\ \chi_p(H) & \text{se } y = x. \end{cases}$$

3. Encontre $\chi_{\tilde{p}}(G \setminus (H \setminus x))$.

A correção desta estratégia para este problema é justificada pelo seguinte resultado:

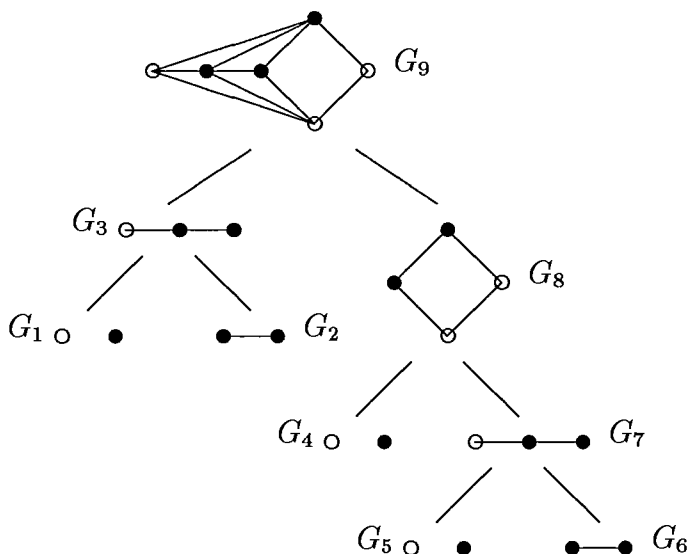


Figura 4.9: Árvore de cliques máxima.

Lema 4.7 *Seja (G, p) um grafo com pesos nos vértices e seja H um conjunto homogêneo de G . Então $\chi_p(G) = \chi_{\tilde{p}}(G \setminus (H \setminus x))$, onde x é qualquer vértice de H .*

Prova: Seja $((T_1, \dots, T_t), (X(T_1), \dots, X(T_t)))$ uma coloração mínima ponderada para (G, p) . Então

$$\sum_{i=1}^t X(T_i) = \chi_p(G).$$

Dada a definição de $\chi_p(H)$ e fato de H ser um conjunto homogêneo de G , concluímos que a soma dos pesos dos conjuntos estáveis que não interceptam o conjunto A , definido na figura 4.2, é maior ou igual a $\chi_p(H)$.

Considere agora o grafo ponderado $(G \setminus (H \setminus x), \tilde{p})$. Vamos definir uma coloração ponderada para $(G \setminus (H \setminus x), \tilde{p})$ com peso $\chi_p(G)$. Para tal, cubra o grafo $(G \setminus H), \tilde{p}$ com a coloração ponderada $((T_1 \setminus x, \dots, T_t \setminus x), (X(T_1), \dots, X(T_t)))$. Agora adicione o vértice x a todos os conjuntos estáveis $T_i \setminus x$ em $(G \setminus H), \tilde{p}$ que não interceptam A .

Assim encontramos uma cobertura de $(G \setminus (H \setminus x), \tilde{p})$ por conjuntos estáveis tal que, para todo vértice deste grafo ponderado, a soma dos pesos dos conjuntos estáveis que contém este vértice é pelo menos igual ao peso deste vértice.

Estabelecemos assim que, para qualquer vértice x de H ,

$$\chi_p(G) \geq \chi_{\tilde{p}}(G \setminus (H \setminus x)).$$

Agora, considere uma coloração mínima ponderada para $(G \setminus (H \setminus x), \tilde{p})$ com, digamos (T_1, \dots, T_t) , cobrindo o vértice x . Então

$$\sum_{i=1}^t X(T_i) \geq \tilde{p}(x).$$

Considere agora $((S_1, \dots, S_s), (X(S_1), \dots, X(S_s)))$ uma coloração mínima ponderada para (H, p) .

Considere os conjuntos estáveis que cobrem o vértice x na ordem T_1, \dots, T_t . Vamos substituir cada conjunto estável T_i por conjuntos estáveis $T_i \setminus \{x\} \cup S_j$ de modo que

$$\sum_{j=i}^s X(T_i \setminus \{x\} \cup S_j) \leq X(T_i)$$

$$\sum_{i=i}^t X(T_i \setminus \{x\} \cup S_j) = X(S_j).$$

Para tal, considere os conjuntos estáveis (S_1, \dots, S_s) nesta ordem e cubra cada conjunto estável S_j , com conjuntos estáveis $T_i \setminus \{x\} \cup S_j$, para conjuntos estáveis T_i tais que $i = \min\{k : \sum_{j=1}^s X(T_k \setminus \{x\} \cup S_j) < X(T_k)\}$.

Para cada $1 \leq i \leq t$, se $\sum_{j=1}^s X(T_i \setminus \{x\} \cup S_j) < X(T_i)$ então adicione um conjunto estável $T_i \setminus \{x\}$ com $X(T_i \setminus \{x\}) = X(T_i) - \sum_{j=1}^s X(T_i \setminus \{x\} \cup S_j)$.

Construímos assim uma coloração ponderada para (G, p) com peso $\chi_{\tilde{p}}(G \setminus (H \setminus x))$.

Obtemos portanto a igualdade

$$\chi_p(G) = \chi_{\tilde{p}}(G \setminus (H \setminus x)),$$

onde x é qualquer vértice de H . \square

Consideremos como exemplo a decomposição representada na figura 4.10 de um grafo G em relação a um conjunto homogêneo H :

Suponha primeiro a seguinte distribuição de pesos para os vértices do grafo ponderado (G, p) : $p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = p(f) = 1$ e $p(e) = 4$.

Neste caso, $\chi(H) = 2$ e a coloração mínima ponderada para (H, p) é: $S_1 = \{d, a\}$, $S_2 = \{c\}$; $X(S_1) = 1$, $X(S_2) = 1$.

Logo, o grafo ponderado $(G \setminus (H \setminus a), \tilde{p})$ terá pesos $\tilde{p}(a) = 2$, $\tilde{p}(b) = \tilde{p}(f) = 1$ e $\tilde{p}(e) = 4$.

Para este grafo ponderado temos $\chi_{\tilde{p}}(G \setminus (H \setminus a)) = 5$ e uma coloração mínima ponderada é: $T_1 = \{a, e\}$, $T_2 = \{b, f\}$; $X(T_1) = 4$, $X(T_2) = 1$.

Portanto uma coloração mínima ponderada para (G, p) será: $U_1 = \{c, e\}$, $U_2 = \{a, d, e\}$, $U_3 = \{e\}$, $U_4 = \{b, f\}$; $X(U_1) = 1$, $X(U_2) = 1$, $X(U_3) = 2$, $X(U_4) = 1$.

Agora suponha que todos os vértices do grafo ponderado (G, p) tenham o mesmo peso, isto é, $p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = p(e) = p(f) = 1$.

Neste caso, $\chi(H) = 2$ e a coloração mínima ponderada para (H, p) é: $S_1 = \{d, a\}$, $S_2 = \{c\}$; $X(S_1) = 1$, $X(S_2) = 1$.

Logo, o grafo ponderado $(G \setminus (H \setminus a), \tilde{p})$ terá pesos $\tilde{p}(a) = 2$ e $\tilde{p}(b) = \tilde{p}(f) = \tilde{p}(e) = 1$.

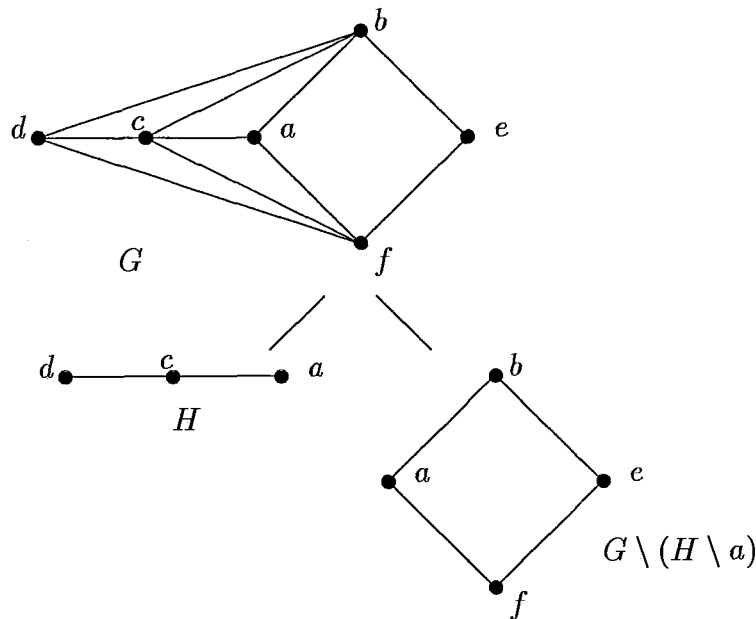


Figura 4.10: Decomposição homogênea.

Para este grafo ponderado temos $\chi_{\tilde{p}}(G \setminus (H \setminus a)) = 3$ e uma coloração mínima ponderada é: $T_1 = \{a, e\}$, $T_2 = \{b, f\}$; $X(T_1) = 2$, $X(T_2) = 1$.

Portanto uma coloração mínima ponderada para (G, p) será neste caso: $U_1 = \{c, e\}$, $U_2 = \{a, d, e\}$, $U_3 = \{b, f\}$; $X(U_1) = 1$, $X(U_2) = 1$, $X(U_3) = 1$.

4.6 Uma Generalização: Pares Homogêneos

Nesta seção estudamos uma generalização do conceito de conjunto homogêneo.

Dizemos que um par de conjuntos disjuntos de vértices (Q_1, Q_2) num grafo G é um **par homogêneo** quando satisfaz:

- Cada vértice de $G \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ é adjacente ou a todo conjunto Q_1 ou a nenhum vértice de Q_1 .
- Cada vértice de $G \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ é adjacente ou a todo conjunto Q_2 ou a nenhum vértice de Q_2 .
- $|Q_1| \geq 2$ ou $|Q_2| \geq 2$.
- $|G \setminus (Q_1 \cup Q_2)| \geq 2$.

Para melhor apreciarmos a definição de par homogêneo, apresentamos na figura 4.11 um exemplo de um grafo contendo um par homogêneo e um exemplo de um grafo que não contém par homogêneo. Observe que nenhum destes dois grafos admite conjunto homogêneo.

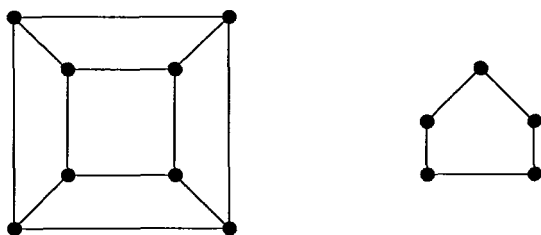


Figura 4.11: Grafo bipartido e ciclo induzido ímpar .

Observe que a existência de um par homogêneo (Q_1, Q_2) de conjuntos de vértices de G , particiona o subconjunto de vértices $G \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ em quatro conjuntos, digamos A, B, C_1, C_2 onde

$$\begin{aligned}
 A &:= \{v \in V : N(v) \cap (Q_1 \cup Q_2) = Q_1 \cup Q_2\}, \\
 B &:= \{v \in V : N(v) \cap (Q_1 \cup Q_2) = \phi\}, \\
 C_1 &:= \{v \in V : N(v) \cap Q_1 = Q_1, N(v) \cap Q_2 = \phi\}, \\
 C_2 &:= \{v \in V : N(v) \cap Q_2 = Q_2, N(v) \cap Q_1 = \phi\}.
 \end{aligned}$$

Podemos então representar um grafo que possui um conjunto homogêneo como o diagrama da figura 4.12.

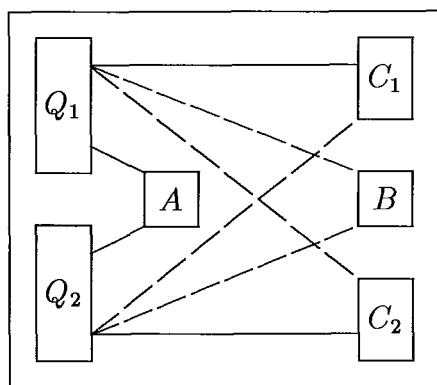


Figura 4.12: Grafo G com par homogêneo (Q_1, Q_2) .

Uma linha contínua entre dois conjuntos representa a propriedade de que cada vértice de um conjunto é adjacente a cada vértice do outro conjunto. Já a linha pontilhada entre conjuntos representa a propriedade de que nenhum vértice de um conjunto é adjacente a nenhum vértice do outro conjunto.

Observe que todo grafo que admite um conjunto homogêneo suficientemente grande, isto é, de tamanho pelo menos três admite trivialmente um par homogêneo. Logo, podemos ver o conceito de par homogêneo como uma generalização do conceito de conjunto homogêneo.

O teorema seguinte estabelece a relação entre pares homogêneos e a classe dos grafos perfeitos:

Teorema 4.7 [ChSb 87] *Nenhum grafo minimalmente imperfeito contém par homogêneo.*

Observe que o teorema acima justifica as restrições de cardinalidade impostas na definição de par homogêneo.

De fato, se pedíssemos que tanto Q_1 quanto Q_2 fossem não vazios então qualquer par de vértices num grafo com pelo menos quatro vértices formaria um par homogêneo. Além disso, se pedíssemos que $V \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ fosse não vazio então qualquer grafo com pelo menos quatro vértices teria um par homogêneo.

Este teorema foi utilizado para demonstrar que a conjectura forte dos grafos perfeitos vale para a classe dos grafos sem touros. Consideraremos no capítulo 5 a classe dos grafos perfeitos sem touros.

Tentamos estabelecer um teorema de decomposição através de pares homogêneos para resolver os dois problemas de otimização CLIQUE MÁXIMA PONDERADA e COLORAÇÃO MÍNIMA PONDERADA em subclasses de grafos perfeitos.

Gostaríamos então de responder às seguintes questões:

Problema 4.1 *Testar eficientemente a existência de um par homogêneo num grafo.*

Problema 4.2 *Construir eficientemente uma árvore de decomposição usando pares homogêneos que permita reduzir a resolução de problemas de otimização.*

Embora estas duas questões ainda se encontrem em aberto, apresentamos abaixo uma tentativa de resolver a segunda questão.

Dado um grafo, construímos a seguinte árvore: cada vértice é rotulado por um par $(G, (Q_1, Q_2))$ onde (Q_1, Q_2) é par homogêneo do grafo G .

Caso G não tenha par homogêneo, rotule-o por (G, ϕ) , e o vértice em questão corresponde a uma folha.

Cada vértice não folha $(G, (Q_1, Q_2))$, tem quatro filhos, resultantes da decomposição de G em $Q_1, Q_2, Q_1 \cup Q_2$ e G' .

O grafo G' é obtido a partir de G , com par homogêneo (Q_1, Q_2) , através de substituição do par homogêneo por três novos vértices, segundo as propriedades de adjacência representadas na figura 4.12. O conjunto de vértices de G' será $V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2) \cup \{q_1, q_2, q\}$. Se $v \in V(G) \setminus (Q_1 \cup Q_2)$ então $N_{G'}(v) = N_G(v)$. Agora, $N_{G'}(q_1) = C_1 \cup A$, $N_{G'}(q_2) = C_2 \cup A$, $N_{G'}(q) = A$.

Chamamos esta árvore de **árvore de pares homogêneos**.

A figura 4.13 apresenta um exemplo desta decomposição.

Agora considere o problema CLIQUE MÁXIMA PONDERADA no grafo ponderado (G, p) .

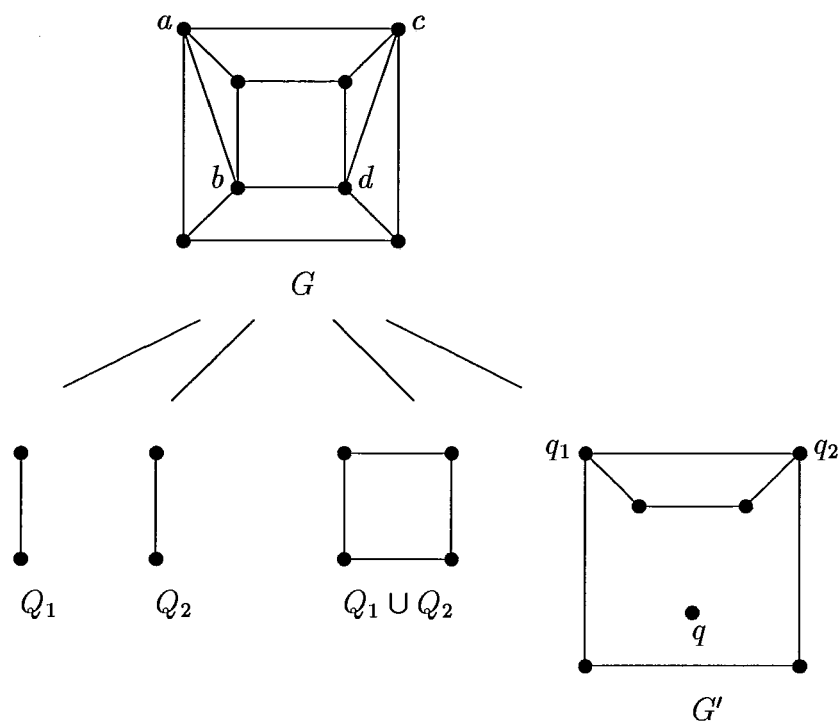


Figura 4.13: Árvore de pares homogêneos.

Denotamos por $\omega_p(G)$, o valor de uma clique máxima ponderada para o grafo ponderado (G, p) .

Suponha que G admite um par homogêneo (Q_1, Q_2) .

Consideremos a seguinte estratégia, usando a decomposição do grafo G descrita acima nos grafos $Q_1, Q_2, Q_1 \cup Q_2$ e G' :

1. Encontre $\omega_p(Q_1), \omega_p(Q_2), \omega_p(Q_1 \cup Q_2)$.
2. Considere o grafo ponderado (G', \tilde{p}) , onde dado $y \in G'$,

$$\tilde{p}(y) = \begin{cases} p(y) & \text{se } y \neq q_1, q_2, q \\ \omega_p(Q_1) & \text{se } y = q_1 \\ \omega_p(Q_2) & \text{se } y = q_2 \\ \omega_p(Q_1 \cup Q_2) & \text{se } y = q. \end{cases}$$

3. Encontre $\omega_{\tilde{p}}(G')$.

A correção desta estratégia para este problema é justificada pelo seguinte resultado:

Lema 4.8 Dado (G, p) , um grafo com pesos nos vértices. Seja (Q_1, Q_2) um par homogêneo de G . Então $\omega_p(G) = \omega_{\tilde{p}}(G')$.

Prova: Dada uma clique em (G', \tilde{p}) , digamos L , podemos construir uma clique em (G, p) do mesmo peso.

De fato, temos dois casos a considerar:

Se L não contém nem q_1 , nem q_2 , nem q então, por definição de (G', \tilde{p}) , L será, na verdade, uma clique em (G, p) com $\omega_p(L) = \omega_{\tilde{p}}(L)$.

Caso $L \cap \{q_1, q_2, q\} \neq \emptyset$, observamos que, por construção de G' , a clique L contém apenas um dentre q_1, q_2 e q .

Sem perda de generalidade, assumimos que $q_1 \in L$. Considere M , uma clique em (G, p) tal que $\omega_p(M \cap Q_1) = \omega_p(Q_1)$ e $M \setminus Q_1 = L \setminus q_1$. Então

$$\omega_{\tilde{p}}(L) = \tilde{p}(q_1) + \omega_{\tilde{p}}(L \setminus q_1) = \omega_p(Q_1) + \omega_p(L \setminus q_1) = \omega_p(M).$$

Portanto fica estabelecida a desigualdade

$$\omega_p(G) \geq \omega_{\tilde{p}}(G')$$

Agora suponha

$$\omega_p(G) > \omega_{\tilde{p}}(G')$$

Seja K uma clique máxima em (G, p) . Então $\omega_p(K) = \omega_p(G)$.

Mostraremos como construir uma clique em (G', \tilde{p}) com o mesmo peso que a clique K .

De novo temos dois casos a considerar:

Se $K \cap (Q_1 \cup Q_2) = \emptyset$ então por definição de (G', \tilde{p}) , K será, na verdade, uma clique máxima ponderada em (G', \tilde{p}) com

$$\omega_{\tilde{p}}(K) = \omega_p(K) = \omega_p(G) > \omega_{\tilde{p}}(G'),$$

uma contradição.

Por outro lado, se $K \cap (Q_1 \cup Q_2) \neq \emptyset$, então por definição de par homogêneo, a clique $N = K \cap (Q_1 \cup Q_2)$ é clique máxima ponderada de $(Q_1 \cup Q_2, p)$, ou de (Q_1, p) , ou de (Q_2, p) .

Sem perda de generalidade, assumimos que N é clique máxima ponderada de (Q_1, p) . Logo

$$\omega_p(G) = \omega_p(K) = \omega_p(N) + \omega_p(K \setminus Q_1) = \tilde{p}(q_1) + \omega_{\tilde{p}}(K \setminus Q_1) \leq \omega_{\tilde{p}}(G'),$$

uma contradição. \square

Infelizmente, podemos construir exemplos onde a árvore de pares homogêneos é infinita.

Considere, por exemplo, como grafo G , o grafo completo K_5 . Escolhemos como par homogêneo (Q_1, Q_2) de G , um grafo trivial e uma clique de tamanho dois.

Obtemos, portanto, $Q_1 \cup Q_2 = K_3$, e o grafo $G' = K_5 = G$ (veja o diagrama da figura 4.14).

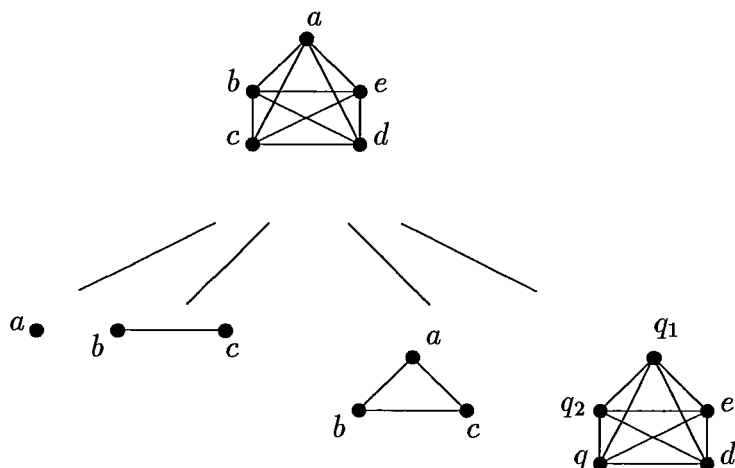


Figura 4.14: Decomposição não eficiente.

4.7 Separando Grafos Minimalmente Imperfeitos de Grafos Tabuleiros

A conjectura forte dos grafos perfeitos procura caracterizar os grafos minimalmente imperfeitos como sendo precisamente os ciclos e os cociclos induzidos ímpares de tamanho maior ou igual a cinco.

Esta conjectura tem motivado a descoberta de várias propriedades dos grafos minimalmente imperfeitos.

A demonstração apresentada no capítulo 3 de que o problema GRAFO IMPERFEITO pertence à classe NP se baseia na caracterização dos grafos minimalmente imperfeitos como sendo exatamente os grafos minimalmente tabuleiros.

Na verdade, a maior parte das propriedades conhecidas dos grafos minimalmente imperfeitos são também válidas para os grafos tabuleiros.

Como exemplos de propriedades que são satisfeitas por estas duas classes podemos citar a não existência de duplas pares, provada para grafos minimalmente imperfeitos [Me 87] e generalizada para grafos tabuleiros [Re 87], e a não existência de cortes estrêla provada tanto para grafos minimalmente imperfeitos quanto para grafos tabuleiros [Ch 85].

A existência de cortes estrêla generaliza a existência de conjuntos homogêneos como provamos no lema 5.1. Logo, obtemos que a existência de conjuntos ho-

homogêneos é outra propriedade que não separa a classe dos grafos tabuleiros dos grafos minimalmente imperfeitos.

Por outro lado, mostraremos a seguir que a existência de um par homogêneo é uma propriedade que separa estas duas classes.

Dizemos que dois vértices x e y num grafo G são **gêmeos** caso satisfaçam:

- $N_{G \setminus \{y\}}(x) = N_{G \setminus \{x\}}(y)$
- $|G \setminus \{x, y\}| \geq 2$.

Logo, por definição, qualquer par de gêmeos induz um conjunto homogêneo num grafo.

Portanto, nenhum grafo tabuleiro contém um par de gêmeos.

Por outro lado, dois vértices x, y num grafo G são ditos **anti-gêmeos** caso satisfaçam:

- $G \setminus \{x, y\} = N(x) \cup N(y)$
- $N(x) \cap N(y) = \phi$.

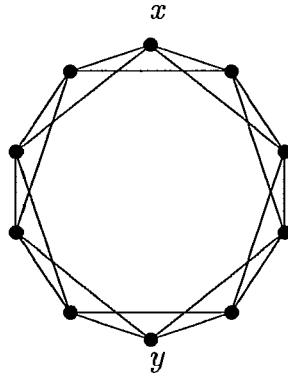


Figura 4.15: Anti-gêmeos.

O lema 4.9 mostra que, num grafo suficientemente grande, todo par de anti-gêmeos assegura a existência de um par homogêneo.

Lema 4.9 *Todo grafo com pelo menos cinco vértices que contém dois anti-gêmeos contém um par homogêneo.*

Prova: Seja G um grafo com anti-gêmeos x_1, x_2 .

Defina $Q_i := N(x_i) \setminus \{x_1, x_2\}$ para $i = 1, 2$.

Então Q_1 ou Q_2 tem pelo menos dois vértices e pela definição de anti-gêmeos, (Q_1, Q_2) formam um par homogêneo para G . \square

Como nenhum grafo minimalmente imperfeito contém um par homogêneo, temos que nenhum grafo minimalmente imperfeito contém um par de anti-gêmeos.

Na verdade, esta segunda propriedade foi provada independentemente [Ol 88].

Agora, considere o grafo da figura 4.15.

Como foi provado na seção 3.2, este grafo é tabuleiro. Por outro lado, o par de vértices $\{x, y\}$ marcado é um par de anti-gêmeos e portanto um par homogêneo para este grafo.

Logo a existência de um par de anti-gêmeos, ou, mais geralmente, a existência de um par homogêneo, é uma propriedade que separa a classe dos grafos minimalmente imperfeitos dos grafos tabuleiros.

Capítulo 5

Touros

Uma **dupla par** é um par de vértices num grafo, que não admite um caminho induzido ímpar entre eles.

Consideramos na seção 2.3 como a existência desta estrutura permite resolver problemas de otimização combinatória para subclasses de grafos perfeitos.

Em particular, o lema 2.5 prova que a contração de uma dupla par preserva o tamanho de uma maior clique e o número cromático de um grafo.

Portanto, podemos tentar resolver os problemas de otimização CLIQUE MÁXIMA e NÚMERO CROMÁTICO usando sucessivas contrações de duplas pares. Tal técnica foi bem sucedida para várias subclasses de grafos perfeitos. Citamos, por exemplo, os grafos fracamente triangularizados [HyHoMa 89] e os grafos Meyniel [He 90].

Comentamos na seção 3.3 sobre a dificuldade de testar a existência de uma dupla par num grafo. Na verdade, apresentamos no apêndice a demonstração de Bienstock [Bi 89] de que este problema é *co-NP*-completo.

Neste capítulo consideramos a existência de duplas pares para uma subclasse de grafos perfeitos definida através de subgrafos proibidos.

Um **touro** é o grafo auto-complementar apresentado na figura 5.1:

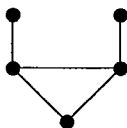


Figura 5.1: Touro.

Um grafo é **Berge** quando não contém um ciclo induzido ímpar ou um cociclo induzido ímpar de tamanho maior que três.

A conjectura forte dos grafos perfeitos propõe que todo grafo Berge é perfeito. Esta conjectura foi mostrada para grafos sem touros por Chvátal e Sbihi [ChSb 87].

Um algoritmo de tempo polinomial para o reconhecimento de grafos perfeitos

sem touros foi apresentado por Reed e Sbihi [ReSb 90].

Já os problemas de otimização combinatória CLIQUE MÁXIMA e NÚMERO CROMÁTICO continuam em aberto para esta subclasse de grafos perfeitos.

Um C_6 -estendido é o grafo apresentado na figura 5.2.

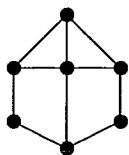


Figura 5.2: C_6 -estendido.

Mostraremos que um grafo perfeito sem touros, sem C_6 -estendidos e cujo complemento não contém um C_6 -estendido, é **quase-paridade**, isto é, caso não seja trivial, contém uma dupla par ou o seu complemento contém uma dupla par.

5.1 A Conjectura Forte para Grafos sem Touros

Descrevemos nesta seção o resultado de Chvátal e Sbihi [ChSb 87], onde a conjectura forte dos grafos perfeitos é provada para a classe dos grafos que não admitem um touro como subgrafo induzido.

Fica estabelecida então a igualdade entre as classes dos grafos Berge sem touros e a dos grafos perfeitos sem touros.

Este resultado é obtido a partir de uma nova propriedade para grafos minimalmente imperfeitos, a saber, todo grafo minimalmente imperfeito não contém um par homogêneo. Esta propriedade foi comentada na seção 4.6 quando definimos esta extensão dos conjuntos homogêneos.

Observe que, para provar a conjectura forte dos grafos perfeitos para uma classe hereditária de grafos, é suficiente provar que todo grafo Berge nesta classe satisfaz uma propriedade que nenhum grafo minimalmente imperfeito satisfaz.

O primeiro resultado que Chvátal e Sbihi provaram para grafos sem touros foi:

Teorema 5.1 [ChSb 87] *Todo grafo sem touros G satisfaz uma das características abaixo:*

- G contém um conjunto homogêneo.
- G ou \overline{G} não contém triângulos.
- G ou \overline{G} contém um castelo (figura 5.3).

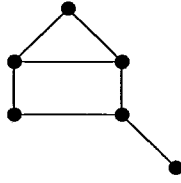


Figura 5.3: Castelo.

Observe que o conjunto de características do teorema 5.1 define uma classe auto-complementar, assim como a classe dos grafos sem touros. Usando este teorema pode-se provar:

Teorema 5.2 [ChSb 87] *Todo grafo sem touros G satisfaz uma das características abaixo:*

- G contém um C_5 .
- G ou \overline{G} não contém triângulos.
- G ou \overline{G} contém um corte estrela.
- G contém um H_0 (figura 5.4).

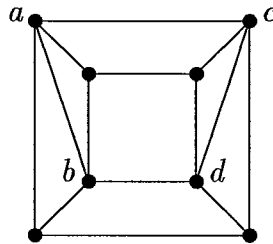


Figura 5.4: H_0 .

Para apreciarmos a relação entre as condições apresentadas no teorema 5.1 e no teorema 5.2, observamos a seguinte relação entre os conceitos corte estrela e conjunto homogêneo.

Lema 5.1 *Se um grafo contém um conjunto homogêneo então o grafo ou o seu complemento contém um corte estrela.*

Prova: Suponha que G é um grafo com conjunto homogêneo H . Por definição, $|H| \geq 2$. Usaremos a partição dos vértices de G nos conjuntos A , B e H , dada pela figura 4.2.

Caso tanto A quanto B sejam não vazios então $S = \{x\} \cup A$ é um corte estrela, onde x é qualquer vértice de H .

Agora, pela definição de conjunto homogêneo, $G \setminus H$ é não vazio.

Se $B = \emptyset$ então \overline{G} é desconexo e qualquer vértice de H é corte estrela para \overline{G} .

Se $A = \emptyset$ então G é desconexo e qualquer vértice de H é corte estrela. \square

Dado que a classe dos grafos perfeitos é auto-complementar, podemos então considerar o conceito de corte estrela como uma generalização do conceito de conjunto homogêneo.

Observe que o grafo H_0 , apresentado na figura 5.4, é auto-complementar. Na verdade, este grafo admite um par homogêneo (Q_1, Q_2) , onde $Q_1 = \{a, b\}$ e $Q_2 = \{c, d\}$. Chvátal e Sbihi provaram que, se um grafo sem touros G contém um H_0 , então o par homogêneo (Q_1, Q_2) está contido num par homogêneo de G . Isto é, o grafo G admite um par homogêneo (Q'_1, Q'_2) com $Q_1 \subseteq Q'_1$ e $Q_2 \subseteq Q'_2$.

Teorema 5.3 [ChSb 87] *Todo grafo sem touros contendo um H_0 contém um par homogêneo.*

Agora, usando os teoremas 5.2 e 5.3, mostremos que, de fato, a conjectura forte dos grafos perfeitos é satisfeita para a classe dos grafos sem touros.

Suponha que existe um grafo Berge sem touros que não é perfeito. Como a classe dos grafos Berge sem touros é hereditária, existe então um grafo Berge sem touros minimalmente imperfeito.

Observe que, por definição, a classe dos grafos Berge sem triângulos é precisamente a classe dos grafos bipartidos, uma subclasse dos grafos perfeitos.

Agora, como citamos nos teoremas 2.5 e 4.7, as outras condições fornecidas pelos teoremas 5.2 e 5.3, não podem ser satisfeitas por um grafo minimalmente imperfeito, o que nos conduz a uma contradição.

Por outro lado, as características encontradas por Chvátal e Sbihi não fornecem um algoritmo eficiente para o reconhecimento de um grafo perfeito sem touros.

De fato, considere primeiro o teorema 5.1. Mostramos no capítulo 4 como construir uma árvore de decomposição usando conjuntos homogêneos. Entretanto, não temos ainda um teorema de decomposição usando castelos.

Considere agora o teorema 5.2. Como comentamos na seção 2.2, ainda não temos um teorema de decomposição usando cortes estrelas.

Quanto ao teorema 5.3, como foi comentado na seção 4.6, ainda não temos um teorema de decomposição usando pares homogêneos.

5.2 O Reconhecimento dos Grafos Perfeitos sem Touros

O trabalho de Reed e Sbihi [ReSb 90] conseguiu desenvolver um algoritmo eficiente para reconhecer se um grafo é perfeito sem touros.

Em primeiro lugar, foram estabelecidas condições suficientes para que um grafo sem touros contenha um conjunto homogêneo.

Uma **roda** é um grafo que contém um vértice universal cuja remoção resulta em um ciclo induzido de tamanho pelo menos 6. A figura 5.5 mostra uma roda onde o ciclo induzido tem tamanho exatamente 6.

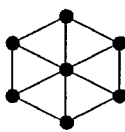


Figura 5.5: Roda.

Teorema 5.4 [ReSb 90] *Todo grafo sem touros, que contém uma roda com pelo menos 8 vértices, contém um conjunto homogêneo.*

Na seção 5.4 apresentaremos uma generalização deste teorema ao retirarmos a restrição sobre o tamanho da roda.

Também foram estabelecidas condições suficientes para um teorema de decomposição usando o grafo castelo.

Teorema 5.5 [ReSb 90] *Seja G um grafo sem touros e sem C_5 's tal que nem G nem \overline{G} contém uma roda com pelo menos 8 vértices. Se o grafo contém um castelo rotulado como na figura 5.6, então o grafo G é perfeito se e somente se $G \setminus x$ é perfeito.*

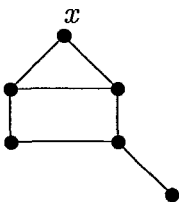


Figura 5.6: Castelo rotulado.

Obtemos então o seguinte teorema:

Teorema 5.6 [ReSb 90] *Todo grafo sem touros G satisfaz uma das seguintes propriedades:*

- G contém um ciclo induzido de tamanho 5.
- G ou \overline{G} não contém triângulos.
- G contém um conjunto homogêneo.
- G ou \overline{G} contém um castelo. Além disso, dado qualquer castelo rotulado como na figura 5.6, G é perfeito se e somente se $G \setminus x$ é perfeito.

Agora, os teoremas 5.4, 5.5 e 5.6 fornecem a correção do seguinte algoritmo eficiente para o reconhecimento dos grafos perfeitos sem touros:

Algoritmo 5.1 *Testa se um grafo é perfeito sem touros.*

Dados: Grafo $G = (V, E)$.

Saída: SIM ou NÃO.

1. Se G contém um touro então retorne NÃO e pare.
Se G contém um C_5 então retorne NÃO e pare.
Caso contrário $L = \{G\}$.
2. Se $L = \phi$ então retorne SIM e pare.
Caso contrário remova o primeiro grafo H de L .
3. Se H não contém triângulos então
Se H é bipartido vá para 2.
Caso contrário retorne NÃO e pare.
4. Se \overline{H} não contém triângulos então
Se \overline{H} é bipartido vá para 2.
Caso contrário retorne NÃO e pare.
5. Se H contém conjunto homogêneo S e $x \in S$ então
Defina $H_1 = H \setminus (S \setminus x)$ e $H_2 = H$.
Adicione H_1 e H_2 à lista L .
Vá para 2.
6. Encontre um castelo em H .
Rotule-o como na figura 5.6.
Defina $H' = H \setminus x$.
Adicione H' à lista L .
Vá para 2.

Observamos que, embora o teorema 5.6 forneça um algoritmo eficiente para o problema de reconhecimento para a classe dos grafos sem touros, ele não resolve os problemas de otimização CLIQUE MÁXIMA e NÚMERO CROMÁTICO para esta classe.

Um resultado parcial foi obtido no capítulo 4 quando estudamos a aplicação da árvore de conjuntos homogêneos para resolver estes problemas de otimização combinatória.

Porém, ainda não temos um teorema de decomposição usando castelos para resolver estes problemas de otimização.

Portanto, os seguintes problemas ainda estão em aberto:

Problema 5.1 *Encontrar eficientemente uma clique máxima num grafo perfeito sem touros.*

Problema 5.2 *Encontrar eficientemente uma coloração mínima num grafo perfeito sem touros.*

Tentamos então usar outra estratégia, a saber, a de contrações de duplas pares para a classe dos grafos perfeitos sem touros.

5.3 O Teorema

Descrevemos nesta seção o principal resultado deste capítulo, a saber, a prova de que todo grafo perfeito sem touros, sem C_6 -estendidos e cujo complemento não contém um C_6 -estendido, é quase-paridade.

Considere o complemento do ciclo induzido de tamanho seis. Apresentamos a sua representação planar na figura 5.7.

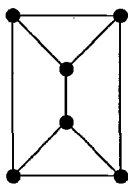


Figura 5.7: \overline{C}_6 .

Este grafo é um exemplo de um grafo perfeito sem touros que não é uma clique e não possui uma dupla par. Logo, nem todo grafo perfeito sem touros é quase-paridade estrita.

Observe porém que o grafo \overline{C}_6 é quase-paridade.

A seguinte conjectura foi proposta por Reed [Re 89]:

Conjectura 5.1 *Todo grafo perfeito sem touros é quase-paridade.*

Provaremos que esta conjectura é verdadeira para a classe dos grafos sem C_6 -estendidos. Mais precisamente, demonstraremos o seguinte resultado:

Teorema 5.7 *Todo grafo Berge sem touros, sem C_6 -estendidos e cujo complemento não contém um C_6 -estendido, é quase-paridade.*

A estratégia da prova consiste na demonstração de seis lemas, ingredientes para a prova do teorema central.

5.4 Lemas

Nos lemas abaixo, estaremos considerando como estender duplas pares de subgrafos induzidos para duplas pares do grafo. Começamos considerando no lema 5.2 o caso quando o subgrafo é induzido por um conjunto homogêneo.

Lema 5.2 *Dado um grafo que admite um conjunto homogêneo, qualquer dupla par do subgrafo induzido pelo conjunto homogêneo é uma dupla par do grafo.*

Prova: Suponha que o grafo G possua um conjunto homogêneo H . Suponha que $\{x, y\}$ é uma dupla par do subgrafo G_H induzido pelo conjunto homogêneo. Por definição de conjunto homogêneo, dados quaisquer vértices $x, y \in G_H$

$$N_{G \setminus (H \setminus x)}(x) = N_{G \setminus (H \setminus y)}(y).$$

Portanto qualquer caminho induzido com extremidades x e y , contendo vértices de $G \setminus H$, tem comprimento 2.

Assim, se não existe caminho induzido ímpar com extremidades x e y em G_H , também não existe tal caminho em G .

Logo $\{x, y\}$ é também uma dupla par de G . \square

Consideramos a seguir, o caso quando o subgrafo é um ciclo induzido par de tamanho pelo menos seis.

Estudamos primeiro no lema 5.3 o que um vértice externo a um ciclo induzido num grafo sem touros pode ver deste ciclo.

Lema 5.3 *Seja C um ciclo induzido de tamanho pelo menos seis num grafo sem touros G e seja $x \in G \setminus C$. Se x vê uma aresta de C então x satisfaz uma das seguintes propriedades:*

- x vê todo C .
- x vê exatamente três vértices consecutivos de C .
- $|C| = 6$ e $C \cup x$ induz um C_6 -estendido.

Prova: Suponha que x vê uma aresta de C mas não vê todo ciclo C .

Rotule então os vértices de C como v_1, v_2, \dots, v_k considerando os índices módulo k , com $(v_i, v_{i+1}), (x, v_1), (x, v_2) \in E(G)$ mas $(x, v_3) \notin E(G)$.

Se x vê algum vértice $v_i \in C \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_k\}$ então o conjunto $\{x, v_1, v_2, v_3, v_i\}$ induz um touro como mostra a figura 5.8.

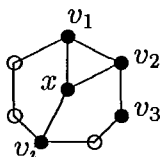


Figura 5.8: Conjunto induz um touro.

Além disso, x tem que ver v_k porque, caso contrário, $\{x, v_1, v_2, v_3, v_k\}$ induz um touro como mostra a figura 5.9.

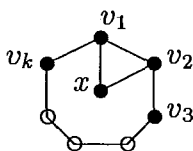


Figura 5.9: Conjunto induz um touro.

Resta examinar a existência da aresta xv_4 .

Se $|C| > 6$ então $(x, v_4) \in E(G)$ implica que o conjunto $\{v_{k-1}, v_k, v_1, x, v_4\}$ induz um touro como mostra a figura 5.10.

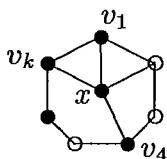


Figura 5.10: Conjunto induz um touro.

Quando $|C| = 6$ podemos então ter $(x, v_4) \in E(G)$ e neste caso $C \cup x$ induz um C_6 -estendido como mostra a figura 5.11. \square

O lema 5.4 apresenta uma condição suficiente para que um grafo sem touros contenha um conjunto homogêneo.

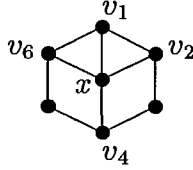


Figura 5.11: Caso $|C| = 6$.

Lema 5.4 *Todo grafo sem touros, que contém uma roda, contém um conjunto homogêneo.*

Prova: Seja G um grafo sem touros com uma roda R . Então o grafo R pode ser decomposto como $R = C \cup \{x\}$, onde C é um ciclo induzido com pelo menos 6 vértices e x é adjacente a todo vértice de C .

Defina A como o conjunto dos vértices de G que vêm todo C .

Seja C_0 , a componente conexa de $G \setminus G_A$ que contém C .

Mostraremos que C_0 é um conjunto homogêneo de G .

Como C_0 contém C e não contém o vértice x , segue que $2 \leq |C_0| < |G|$.

Por outro lado, todo vértice em $G \setminus C_0$ ou pertence a A ou, por definição de C_0 , não é adjacente a nenhum vértice de C_0 . Portanto, basta mostrar que todo vértice de A vê na verdade todo C_0 , isto é, que x vê todo C_0 .

O argumento será por indução na distância de elementos de C_0 ao grafo C . Dado $y \in C_0$, considere um caminho induzido P_y de comprimento mínimo em C_0 de y até C .

Se $|P_y|=0$ então $y \in C$ e, por definição, x é adjacente a y , como mostra a figura 5.12.

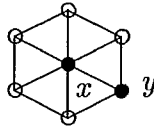


Figura 5.12: $\text{dist}(y, C) = 0$

Portanto podemos assumir que $|P_y| \geq 1$ e que x vê todos os elementos $z \in C_0$ tais que $|P_z| < |P_y|$.

Se $|P_y|=1$ então y vê um vértice de C . Agora y vê pelo menos uma aresta de C porque, caso contrário, existem vértices c_1, c_2, c_4 em C tais que $(c_1, c_2) \in E$, $(c_4, c_1) \notin E$, $(c_4, c_2) \notin E$, $(y, c_4) \notin E$, $(y, c_1) \in E$ e o conjunto $\{y, c_1, c_2, c_4, x\}$ induz um touro.

Como y vê uma aresta de C mas $y \notin A$, podemos escolher c_1, c_2, c_4 em C tais que $(y, c_1), (c_1, c_2) \in E$ mas $(y, c_2), (y, c_4), (c_1, c_4), (c_2, c_4) \notin E$. Mas agora x tem que ver

y porque, caso contrário, $\{x, c_1, c_2, c_4, y\}$ induz um touro como mostra a figura 5.13.

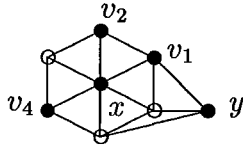


Figura 5.13: $\text{dist}(y, C) = 1$

Se $|P_y|=2$ então, porque $P_y \subseteq C_0 \subseteq G \setminus G_A$, sabemos que y vê algum z que é adjacente a algum vértice, mas não a todos de C . Por indução, x é adjacente a z . Agora, z não vê todo C e portanto existem vértices v_1 e v_4 não adjacentes tal que z vê v_1 mas z não vê v_4 . Mas agora, caso x não veja y , o conjunto $\{x, z, v_1, v_4, y\}$ induz um touro como mostra a figura 5.14.

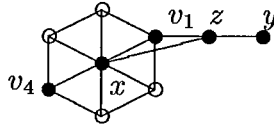


Figura 5.14: $\text{dist}(y, C) = 2$

Finalmente, se $|P_y| \geq 3$, então considere y, z, w , os primeiros três vértices de um caminho P_y de y até C em C_0 . E seja v algum vértice de C que w não vê. Como P_y é mínimo, z e y também não vêem v . Mas, por indução, (w, x) e $(z, x) \in E$.

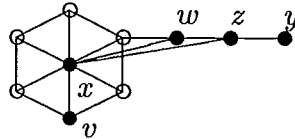


Figura 5.15: $\text{dist}(y, C) \geq 3$

Agora, caso x não veja y , o conjunto $\{x, v, w, z, y\}$ induz um touro como mostra a figura 5.15. \square

Nos três lemas abaixo estaremos considerando grafos Berge, sem touros e sem rodas que contêm um ciclo induzido par de comprimento pelo menos seis.

Consideramos um par de vértices não adjacentes neste ciclo induzido par de comprimento pelo menos seis como candidato natural a ser uma dupla par nesta classe de grafos.

O lema 5.5 estuda o comprimento de um caminho induzido ímpar ligando este par de vértices candidato a dupla par.

Lema 5.5 *Seja G um grafo Berge, sem touros e sem rodas. Suponha que G contém um ciclo induzido por C de comprimento pelo menos seis. Se uma dupla par a distância dois em C não se estende a uma dupla par de G então qualquer caminho induzido ímpar em G ligando esta dupla par tem comprimento três.*

Prova: Seja G um grafo satisfazendo as hipóteses acima.

Se $|C| = 2k$ com $k \geq 3$, então rotule os vértices de C como v_1, v_2, \dots, v_{2k} considerando os índices módulo $2k$, e $v_i v_{i+1} \in E(G)$.

Considere $\{v_1, v_3\}$ um par de vértices a distância dois em C .

Suponha que $\{v_1, v_3\}$ não se estende a uma dupla par de G .

Seja $P = [v_1 = a_0, a_1, \dots, a_{2t+1} = v_3]$, onde $t > 1$, um caminho induzido ímpar ligando v_1 a v_3 em G , de comprimento pelo menos 5.

Considere o ciclo ímpar $Y = [v_1, P, v_3, v_2, v_1]$ (veja a figura 5.16).

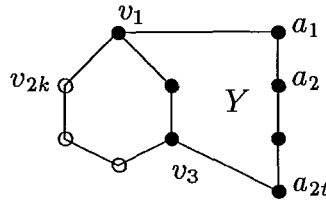


Figura 5.16: Ciclo ímpar.

Como G é Berge, este ciclo ímpar tem cordas.

Como o caminho P é sem cordas, qualquer corda do ciclo ímpar Y é incidente a v_2 .

Caso 1: Y tem uma corda triangular.

Assuma sem perda de generalidade que $(v_2, a_1) \in E(G)$.

Como a_1 vê a aresta $(v_1, v_2) \in E(C)$ então a_1 vê pelo menos três vértices consecutivos de C . Como P é sem cordas, $(a_1, v_3) \notin E(G)$, o que implica $(a_1, v_{2k}) \in E(G)$.

Mostraremos por indução em i que $(v_2, a_i) \in E(G)$, para $1 \leq i \leq 2t$ como mostra a figura 5.17.

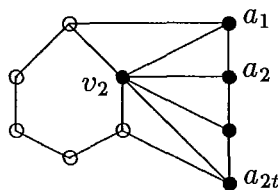


Figura 5.17: Caso 1: $(a_i, v_2) \in E(G)$.

Observe que isto implica que todos os vértices interiores de P pertencem a $G \setminus C$.

Usaremos como base para a indução que $(v_2, a_1), (v_2, a_2) \in E(G)$. Observe que, caso $(v_2, a_2) \notin E(G)$, o conjunto $\{v_1, v_2, v_3, a_1, a_2\}$ induz um touro.

Agora, suponha por indução que $(v_2, a_i) \in E(G)$ para $1 \leq i \leq 2t - 2$.

Então $(v_2, a_{2t-1}) \in E(G)$ porque, caso contrário, $\{v_2, v_3, a_{2t-3}, a_{2t-2}, a_{2t-1}\}$ induz um touro.

Agora $(v_2, a_{2t}) \in E(G)$ porque, caso contrário, $\{v_1, v_2, a_{2t-2}, a_{2t-1}, a_{2t}\}$ induz um touro.

Caso 1.1 $|C| > 6$.

Mostraremos primeiro que $(v_{2k-1}, a_i) \notin E(G)$, para $1 \leq i \leq 2t$.

Como a_1 vê v_1, v_2, v_{2k} , o lema 5.3 implica que $(v_{2k-1}, a_1) \notin E(G)$.

Suponha por indução que $(v_{2k-1}, a_i) \notin E(G)$, para $1 \leq i \leq 2t - 1$.

Caso $(v_{2k-1}, a_{2t}) \in E(G)$, o ciclo ímpar $[a_{2t}, v_{2k-1}, v_{2k}, v_1, v_2, a_{2t}]$ implica que $(v_{2k}, a_{2t}) \in E(G)$. Mas então a_{2t} vê a aresta $(v_{2k-1}, v_{2k}) \in E(C)$, além de ver o vértice v_2 , o que contradiz o lema 5.3.

Mostramos, a seguir, por indução em i , que $(v_{2k}, a_i) \in E(G)$ para $1 \leq i \leq 2t$.

Usaremos como base para a indução que $(v_{2k}, a_1), (v_{2k}, a_2) \in E(G)$. Observe que, caso $(v_{2k}, a_2) \notin E(G)$, conjunto $\{v_{2k-1}, v_{2k}, v_1, a_1, a_2\}$ induz um touro.

Assumindo por indução em i que $(v_{2k}, a_i) \in E(G)$ para $1 \leq i \leq 2t - 1$, concluímos que $(a_{2t}, v_{2k}) \in E(G)$ porque, caso contrário, $\{v_{2k-1}, v_{2k}, a_{2t-2}, a_{2t-1}, a_{2t}\}$ induz um touro.

Agora, porque a aresta $(a_i, v_{2k-1}) \notin E(G)$, para $1 \leq i \leq 2t$, obtemos que o conjunto $\{v_{2k-1}, v_{2k}, a_{2t-1}, a_{2t}, v_3\}$ induz um touro, como mostra a figura 5.18, o que é uma contradição.

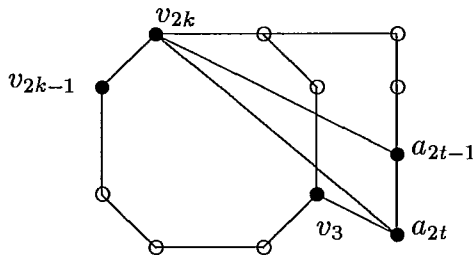


Figura 5.18: Caso 1.1: touro.

Caso 1.2 $|C| = 6$

Mostremos primeiro que $(a_i, v_6) \in E(G)$, para $1 \leq i \leq 2t$.

Usaremos como base para a indução que $(a_1, v_6), (a_2, v_6) \in E(G)$. Observe que, caso $(a_2, v_6) \notin E(G)$, conjunto $\{v_6, a_1, a_2, v_2, v_3\}$ induz um touro.

Assumindo por indução em i que $(a_i, v_6) \in E(G)$ para $1 \leq i \leq 2t-1$, concluímos que $(a_{2t}, v_6) \in E(G)$ porque, caso contrário, $\{v_1, v_6, a_{2t-2}, a_{2t-1}, a_{2t}\}$ induz um touro.

Por simetria, também obtemos que $(a_i, v_4) \in E(G)$, para $1 \leq i \leq 2t$.

Agora $(v_5, a_{2t-1}) \in E(G)$ porque, caso contrário, $\{v_5, v_6, a_{2t-1}, a_{2t}, v_3\}$ induz um touro.

Analogamente $(v_5, a_2) \in E(G)$.

Observe também que $(v_5, a_1), (v_5, a_{2t}) \notin E(G)$.

Agora considere o ciclo ímpar $Z := [v_5, a_2, P, a_{2t-1}, v_5]$.

Caso $|Z| = 3$ então o conjunto $\{a_1, a_2, a_3, a_4, v_5\}$ induz um touro.

Caso $|Z| > 3$ então, como G é Berge, o ciclo ímpar Z contém uma corda.

Logo v_5 vê dois vértices consecutivos em P .

Portanto existem índices i, j, k tais que $(v_5, a_i), (v_5, a_{i+1}), (v_5, a_k) \in E(G)$, $(v_5, a_j) \notin E(G)$ e $\{v_5, a_i, a_{i+1}, a_j, a_k\}$ induz um touro como mostra a figura 5.19.

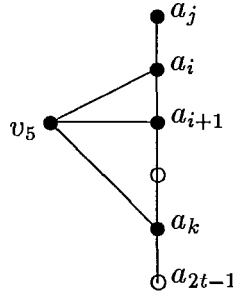


Figura 5.19: Caso 1.2: touro.

Caso 2. Y não contém corda triangular.

Neste caso, $(v_2, a_1), (v_2, a_{2t}) \notin E(G)$.

Como G é Berge, o vértice v_2 vê uma aresta de $P \setminus \{v_1, a_1, a_{2t}, v_3\}$.

Agora seja $\{a_i, a_{i+1}, a_{i+2}\}$ um conjunto de vértices em P tal que $(v_2, a_i), (v_3, a_i) \notin E(G)$ mas $(v_2, a_{i+1}), (v_2, a_{i+2}) \in E(G)$.

Então $\{v_2, v_3, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}\}$ induz um touro em G como mostra a figura 5.20.

E isto é uma contradição. \square

O lema 5.6 mostra que podemos fixar o tamanho do ciclo par em seis.

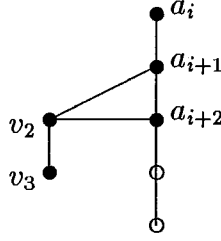


Figura 5.20: Caso 2: touro.

Lema 5.6 *Seja G um grafo Berge, sem touros e sem rodas. Se G contém um ciclo induzido par de tamanho pelo menos oito onde uma dupla par a distância dois não se estende a uma dupla par de G , então G contém um C_6 .*

Prova: Seja C um ciclo induzido par de tamanho pelo menos oito em G .

Rotulemos C como v_1, v_2, \dots, v_{2k} , onde $k \geq 4$ e $(v_i, v_{i+1}) \in E(C)$.

Suponha que o par $\{v_1, v_3\}$ não se estende a uma dupla par de G .

Então, pelo lema 5.5, existe um caminho induzido P de comprimento três entre v_1 e v_3 , digamos $P = [v_1, a, b, v_3]$.

Observe que, se um dos vértices interiores de P , digamos b pertence ao ciclo C , então o outro vértice interior de P vê mais que três vértices consecutivos de C , o que contradiz G ser um grafo sem touros.

Portanto os vértices interiores de P não pertencem a C .

Agora considere o ciclo ímpar $Y = [v_1, P, v_3, v_2, v_1]$.

Como G é Berge, este ciclo tem cordas. E como P é sem cordas, todas as cordas de Y são incidentes a v_2 .

Suponha, sem perda de generalidade, que $(a, v_2) \in E(G)$.

Neste caso, o vértice a vê precisamente os vértices v_1, v_2 e v_{2k} em C .

Agora (b, v_{2k-1}) ou $(b, v_{2k}) \in E(G)$ pois, caso contrário, o conjunto $\{v_{2k-1}, v_{2k}, v_1, a, b\}$ induz um touro.

Observe que caso $(b, v_{2k}) \in E(G)$ então, porque G é Berge, o ciclo ímpar induzido por $\{b, v_{2k}, v_1, v_2, v_3\}$ tem cordas, o que força b a ver mais que três vértices consecutivos do ciclo C .

Portanto $(b, v_{2k-1}) \in E(G)$.

Agora os vértices $\{b, v_{2k-1}, v_{2k}, v_1, v_2, v_3\}$ induzem um ciclo de tamanho 6 sem cordas como mostra a figura 5.21. \square

Finalmente, o lema 5.7 mostra que, caso proibamos também a existência de C_6 -estendidos, então garantimos a existência de duplas pares nesta classe de grafos.

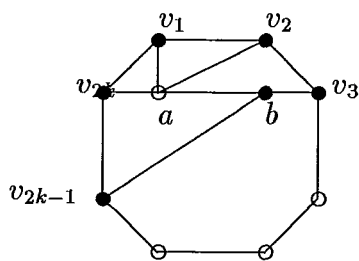


Figura 5.21: Ciclo induzido de tamanho 6.

Lema 5.7 *Seja G um grafo Berge, sem touros e sem rodas. Se G contém um C_6 onde uma dupla par não se estende a uma dupla par de G então G contém um C_6 -estendido.*

Prova: Seja C um grafo isomorfo a C_6 contido em G . Rotulemos os vértices de C como v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 e v_6 , onde $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$.

Suponhamos que o par $\{v_1, v_3\}$ não se estende a uma dupla par de G .

Então existe um caminho induzido P de tamanho três entre v_1 e v_3 digamos $P = [v_1, a, b, v_3]$.

Estudaremos o grafo induzido por $P \cup C$.

Consideraremos dois casos de acordo com o fato de os vértices interiores de P pertencerem a C ou não.

Caso 1. $C \cap \text{int}P \neq \phi$

Sem perda de generalidade, supomos $a \notin C$ e $b = v_4 \in C$.

Como G é Berge e P não tem cordas, temos $(v_2, a), (v_6, a) \in E(G)$ e portanto neste caso o vértice a vê precisamente os vértices v_6, v_1, v_2 e v_4 de C .

Portanto G contém um C_6 -estendido, a saber o subgrafo induzido por C e o vértice a , como mostra a figura 5.22.

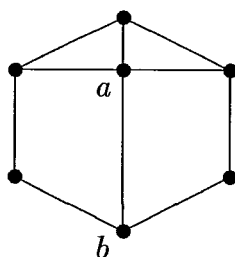


Figura 5.22: Caso 1: C_6 -estendido.

Caso 2. $C \cap \text{int}P = \phi$

Como G é Berge, temos (a, v_2) ou $(b, v_2) \in E(G)$.

Assuma, sem perda de generalidade, que $(a, v_2) \in E(G)$. Isto implica que o vértice a vê três vértices consecutivos v_6, v_1 e v_2 em C .

Caso a também veja v_4 , então G contém um C_6 -estendido, a saber o subgrafo induzido por C e o vértice a , como mostra a figura 5.23.

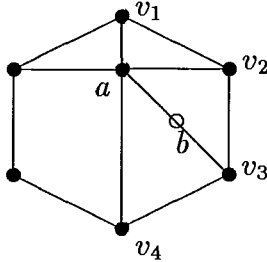


Figura 5.23: Caso 2: C_6 -estendido.

Agora, caso contrário, $(a, v_4) \notin E(G)$ e o vértice a vê precisamente os vértices v_6, v_1 e v_2 em C .

Agora (b, v_5) ou $(b, v_6) \in E(G)$ porque caso contrário o conjunto $\{v_5, v_6, v_1, a, b\}$ induz um touro.

Caso $(b, v_6) \in E(G)$ então, como G é Berge, obtemos que o ciclo ímpar induzido pelo conjunto $\{v_6, v_1, v_2, v_3, b\}$ tem cordas o que implica que b vê exatamente os vértices v_6, v_2, v_3 e v_4 em C .

Portanto, neste caso, G contém um C_6 -estendido, a saber, o subgrafo induzido por C e o vértice b , como mostra a figura 5.24.

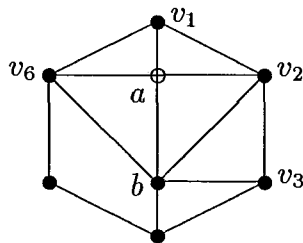


Figura 5.24: Caso 2: C_6 -estendido.

Finalmente, caso $(b, v_6) \notin E(G)$, então $(b, v_5) \in E(G)$.

Então, caso b veja precisamente os vértices v_3 e v_5 em C , o grafo G contém um C_6 -estendido, a saber, o subgrafo induzido por $\{v_1, v_2, v_3, b, v_5, v_6, a\}$ (veja a figura 5.25).

E se b vê precisamente os vértices v_3, v_4 e v_5 então o subgrafo induzido por $\{a, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, b\}$ também é um C_6 -estendido contido em G .

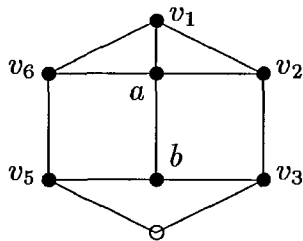


Figura 5.25: Caso 2: C_6 -estendido.

Observe que $(b, v_1) \notin E(G)$ porque P não contém cordas. \square

Estamos prontos para estabelecer o teorema 5.8:

Teorema 5.8 *Todo grafo Berge sem touros, sem C_6 -estendidos e cujo complemento não contém um C_6 -estendido, é quase-paridade.*

Prova: Argumentamos usando indução sobre o número de vértices do grafo G .

Quando G possui um único vértice e é portanto o grafo trivial, o teorema decorre da definição de grafos quase-paridade.

Como a classe dos grafos Berge, sem touros e sem C_6 -estendidos é de hereditariedade, a hipótese de indução significa que todo subgrafo induzido próprio de G é quase-paridade.

Caso G , e portanto o seu complemento \overline{G} , possua um conjunto homogêneo H , o lema 5.2 afirma que qualquer dupla par de G_H se estende a uma dupla par de G .

Por definição, H é um subconjunto próprio de V e portanto a hipótese de indução garante que G_H é quase-paridade. Como, por definição de H , o subgrafo induzido G_H não é trivial, G_H ou \overline{G}_H contém uma dupla par. Portanto, G é quase-paridade.

Podemos portanto assumir que G , e portanto o seu complemento \overline{G} , não contém um conjunto homogêneo. Logo, pelo lema 5.4, G , e portanto \overline{G} não contém uma roda.

Observamos que, se G ser fracamente triangularizado então G é quase-paridade estrita [HyHoMa 89].

Assim podemos assumir que G ou \overline{G} contém um ciclo induzido par de tamanho pelo menos 6. Agora, os lemas 5.6 e 5.7 garantem que, neste caso, as hipóteses do teorema implicam que qualquer dupla par deste ciclo induzido se estende a uma dupla par do grafo. \square

5.5 Um Algoritmo

Observamos que a prova do teorema 5.8 é construtiva e fornece, portanto, um algoritmo eficiente para, dado um grafo perfeito não trivial, sem touros, sem C_6 -estendidos e cujo complemento não contém um C_6 -estendido, encontrar uma dupla par no grafo ou no seu complemento.

De fato, dado um grafo perfeito não trivial, sem touros, sem C_6 -estendidos e cujo complemento não contém um C_6 -estendido, consideramos uma árvore de conjuntos homogêneos associada.

Caso a árvore seja trivial, o grafo original não admite conjunto homogêneo. Caso o grafo seja uma clique, qualquer par de vértices induz uma dupla par no complemento. Caso contrário, procuramos então uma dupla 2. Caso não encontremos uma dupla 2, o grafo não é fracamente triangularizado [HyHoMa 89]. Encontramos então um ciclo induzido par de tamanho pelo menos 6, no grafo ou no complemento do grafo. Agora, qualquer par de vértices a distância dois no ciclo se estende a uma dupla par do grafo original.

Por outro lado, caso o grafo admita conjunto homogêneo, o lema 5.2, reduz o problema a encontrar uma dupla par numa folha da árvore de conjuntos homogêneos.

Algoritmo 5.2 *Encontra uma dupla par num grafo não trivial.*

Dados: Grafo $G = (V, E)$ perfeito sem touros, sem C_6 -estendidos e cujo complemento não contém um C_6 -estendido.

Saida: Uma dupla par em G ou em \overline{G} , se G não é trivial.

1. Se $|V| = 1$ então retorne TRIVIAL e pare.
2. Enquanto G contém conjunto homogêneo H efetuar $G = H$.
3. Se G é uma clique então
Retorne qualquer par de vértices é DUPLA PAR em \overline{G} e pare.
4. Se existem $x, y \in V$ com $G_{V \setminus (N_x \cap N_y)}$ desconexo então
Retorne $\{x, y\}$ é DUPLA 2 em \overline{G} e pare.
5. $C = \phi$
6. Enquanto $C = \phi$ e existir $\{a, b, c\} \subseteq V$ não considerado efetuar
Se $G_{\{a,b,c\}} = P_3$ e $G_{V \setminus [(N_a \cap N_c) \cup N_b]}$ é conexo então
Encontre P , um caminho mais curto entre a e c em $G_{V \setminus [(N_a \cap N_c) \cup N_b]}$.
 $C = G_{P \cup \{b\}}$
Retorne G contém DUPLA PAR.
7. Enquanto $C = \phi$ e existir $\{a, b, c\} \subseteq V$ não considerado efetuar
Se $\overline{G}_{\{a,b,c\}} = P_3$ e $\overline{G}_{V \setminus [(N_a \cap N_c) \cup N_b]}$ é conexo então
Encontre P , um caminho mais curto entre a e c em $\overline{G}_{V \setminus [(N_a \cap N_c) \cup N_b]}$.
 $C = \overline{G}_{P \cup \{b\}}$
Retorne \overline{G} contém DUPLA PAR.

8. Sejam x, y um par de vértices a distância 2 em C .
Retorne $\{x, y\}$ é DUPLA PAR e pare.

Obtemos assim um algoritmo polinomial no número de vértices do grafo G . De fato, dado que este algoritmo constrói implicitamente uma árvore de conjuntos homogêneos, vemos que a sua complexidade é $O(n^5)$.

Capítulo 6

Conclusão

Apresentamos neste capítulo uma coletânea das conjecturas e dos problemas em aberto apresentados neste trabalho como forma para sugerir direções para futura pesquisa.

Quando a classe dos grafos perfeitos foi definida, duas conjecturas foram enunciadas:

- **CONJECTURA FORTE DOS GRAFOS PERFEITOS:** Um grafo é perfeito se e somente se nem o grafo nem o seu complemento contêm um ciclo induzido ímpar com mais de três vértices.
- **CONJECTURA FRACA DOS GRAFOS PERFEITOS:** Um grafo é perfeito se e somente o seu complemento é perfeito.

A conjectura forte, ainda em aberto, tem motivado a maior parte dos resultados na área dos grafos perfeitos.

A sua validade para classes de grafos tais como os planares ou definidos por estruturas proibidas, como os grafos sem garras ou os grafos sem diamantes, tem possibilitado caracterizações para subclasses de grafos perfeitos que fornecem, não só algoritmos eficientes para o seu reconhecimento, como também para os problemas de otimização combinatória **CLIQUE MÁXIMA** e **NÚMERO CROMÁTICO**.



Figura 6.1: Garra e Diamante

A classe dos grafos sem touros é, porém, um exemplo onde a conjectura forte é válida, mas sabe-se apenas que o reconhecimento dos grafos Berge sem touros pode ser feito eficientemente. Resta descobrir algoritmos eficientes para os problemas de otimização combinatória.

Problema 5.1 *Encontrar eficientemente uma clique máxima num grafo perfeito sem touros.*

Problema 5.2 *Encontrar eficientemente uma coloração mínima num grafo perfeito sem touros.*

Uma técnica para o desenvolvimento de algoritmos eficientes é a divisão e conquista. Estudamos como a decomposição através de conjuntos homogêneos pode resolver eficientemente os problemas de reconhecimento e otimização para subclasses de grafos perfeitos.

A generalização obtida ao considerarmos pares homogêneos trouxe as seguintes questões, ainda em aberto, estudadas no capítulo 4:

Problema 4.1 *Testar eficientemente a existência de um par homogêneo num grafo.*

Problema 4.2 *Construir eficientemente uma árvore de decomposição usando pares homogêneos que permita reduzir a resolução de problemas de otimização.*

Uma ferramenta para o desenvolvimento de algoritmos para os problemas de otimização em grafos perfeitos é a contração em duplas pares. A existência de duplas pares em subclasses de grafos perfeitos, ou mais especificamente, a sua inclusão na classe dos grafos quase-paridade estrita, tem, até agora, implicado na sua inclusão na classe dos grafos perfeitamente contraíveis.

Isto nos leva a conjecturar [Bt 90]:

Conjectura 2.1 *Todo grafo quase-paridade estrita é perfeitamente contraível.*

Como evidência para esta conjectura podemos citar os grafos fracamente triangularizados, os grafos Meyniel e os grafos perfeitamente ordenáveis.

Uma subclasse dos grafos perfeitos ainda não considerada sob este aspecto é a classe dos grafos **alternantes** definidos como os grafos que admitem uma orientação onde as direções de arestas alternam em cada ciclo induzido de tamanho pelo menos quatro. Quando definiu esta classe, Hoàng provou que estes grafos são comparabilidade ou possuem um corte estrela [Ho 87].

Na verdade, embora o problema de decisão DUPLA PAR seja *co-NP*-completo, a existência de algoritmos polinomiais para encontrar duplas pares em várias subclasses de grafos perfeitos nos leva a conjecturar [Re 90]:

Conjectura 2.2 *Podemos determinar se um grafo perfeito contém uma dupla par em tempo polinomial.*

O teorema 5.8 prova que todo grafo perfeito sem touros, sem C_6 -estendidos e cujo complemento não contém um C_6 -estendido é quase-paridade. A prova é construtiva e fornece um algoritmo eficiente para encontrar uma dupla par, neste caso, no grafo ou no seu complemento.

A seguinte conjectura, porém, continua em aberto [Re 89]:

Conjectura 5.1 *Todo grafo perfeito sem touros é quase-paridade.*

Observe que o grafo C_6 -estendido é um grafo sem touros perfeito quase-paridade, como mostra a figura 6.2:

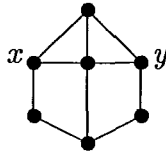


Figura 6.2: C_6 -estendido admite dupla par

A figura 2.19 exibiu um grafo perfeito que não é quase-paridade.

A seguinte caracterização dos grafos Berge foi proposta por Reed [Re 86]:

Conjectura 6.1 *Todo subgrafo induzido H de um grafo Berge satisfaz uma das seguintes propriedades:*

- H ou \overline{H} contém uma dupla par.
- H ou \overline{H} contém um corte clique.
- H ou \overline{H} é um grafo de linha de um grafo bipartido.

Na verdade, ao mencionar os grafos de linha dos grafos bipartidos, voltamos ao teorema de König, o primeiro resultado mencionado neste trabalho.

Observe que a conjectura 6.1 implica a conjectura forte dos grafos perfeitos, isto é, a sua validade de fato prova que todo grafo Berge é perfeito.

Para comentários sobre esta conjectura, bem como mais problemas em aberto em grafos perfeitos, citamos [FiTa 89].

Bibliografia

- [Ba 87] M. A. Barroso, *Orientações em Grafos Circulares e suas Aplicações*, Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, (1987).
- [Be 61] C. Berge, Farbung von graphen, deren samtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind., *Wiss. Z. Martin Luther-Univ., Halle-Wittenberg, Math.-Natur. Reihe* **114** (1961).
- [Be 73] C. Berge, *Graphs and Hypergraphs*, North Holland, Amsterdam, (1973).
- [BeCh 84] C. Berge, V. Chvátal (editors), *Topics on Perfect Graphs*, North Holland, Amsterdam, (1984).
- [Bt 90] M. E. Bertschi, Perfectly Contractile Graphs, *J.C.T. Ser. B* **50** (1990) 222–230.
- [Bi 89] D. Bienstock, On the Complexity of Testing for Odd Induced Holes and Odd Induced Paths, preprint, BellCore, (1989).
- [BuFo 84] M. Buriel, J. Fonlupt, Polynomial Algorithm to Recognize a Meyniel Graph, *Topics on Perfect Graphs*, North Holland, Amsterdam, (1984) 225–252.
- [Ca 82] K. G. Cameron, *Polyhedral and Algorithmic Ramifications of Antichains*, Ph.D. Thesis, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Waterloo, (1982).
- [Ch 84a] V. Chvátal, Notes on Perfect Graphs, in *Progress in Combinatorial Optimization*, Academic Press, New York, (1984).
- [Ch 84b] V. Chvátal, Perfectly Ordered Graphs, *Topics on Perfect Graphs*, North Holland, Amsterdam, (1984) 63–68.
- [Ch 85] V. Chvátal, Star Cutsets, *J.C.T. Ser. B* **39** (1985) 189–199.
- [Ch 87] V. Chvátal, Recent Results on Perfect Graphs, Technical Report DCS-TR-210, Department of Computer Science Research Report, Rutgers University, New Brunswick, (1987).

- [Ch 89] V. Chvátal, comunicação particular.
- [ChSb 87] V. Chvátal, N. Sbihi, Bull-Free Berge Graphs are Perfect, *Graphs and Combinatorics* **3** (1987) 127–139.
- [CoFo] D .G. Corneil, J .P. Fonlupt, Stable Set Bonding in Perfect Graphs and Parity Graphs, a ser publicado.
- [DaMoSa 87] A. D’Atri, M. Moscarini, A. Sassano, The Steiner Tree Problem and Homogeneous Sets, in M. Chytil, L. Janiga, V. Koubek (editors), *Mathematical Foundations of Computer Science*, Lecture Notes in Computer Science **324**, Springer-Verlag, 1989.
- [Di 50] R. P. Dilworth, A Decomposition Theorem for Partially Ordered Sets, *Ann. Math.* **51**, (1950) 161–166.
- [Di 61] G. A. Dirac, On Rigid Circuit Graphs, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **25** (1961) 50–71.
- [FiTa 89] C. de Figueiredo, V. Tardif, Some Problems on Perfect Graphs, Research Report CORR 89-31, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Waterloo, (1989).
- [FoUh 82] J. Fonlupt, J .P. Uhry, Transformations which Preserve Perfectness and H-Perfectness of Graphs, *Annals of Discrete Math.* **16** (1982) 83–95.
- [GaJo 79] M. Garey, D. S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W. H. Freeman, San Francisco, (1979).
- [Gh 62] A. Ghouilla-Houri, Characterization des Graphes non Orientés dont on Peut Orienter les Arrêtes de Manière a Obtenir le Graphe d’une Relation d’Ordre, *C. R. Acad. Sci. Paris* **254** (1962) 1370–1371.
- [Go 80] M. C. Golumbic, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, New York, (1980).
- [GrLoSc 81] M. Grötschel, L. Lovász, A. Schrijver, The Ellipsoid Method and its Consequences in Combinatorial Optimization, *Combinatorica* **1** (1981) 169–197.
- [HaSu 58] A. Hajnal, J. Surányi, Über die Auflösung von Graphen in vollständige Teilgraphen, *Ann. Univ. Sci. Budapest Eötvös Sect. Math.* **1** (1958) 113–121.
- [Hr 69] F. Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, (1969).
- [Hy 85] R. Hayward, Weakly Triangulated Graphs, *J.C.T. Ser. B* **39** (1985) 200–208.

- [Hy 87] R. Hayward, *Perfect Graphs*, Ph.D. Thesis, School of Computer Science, McGill University, Montreal, (1987).
- [HyHoMa 89] R. Hayward, C .T. Hoàng, F. Maffray, Optimizing Weakly Triangulated Graphs, *Graphs and Combinatorics* **5** (1989) 339–349.
- [HyHoMa 89] R. Hayward, C .T. Hoàng, F. Maffray, Optimizing Weakly Triangulated Graphs—erratum, *Graphs and Combinatorics* **6** (1990) 33–35.
- [He 88] A. Hertz, *La Coloration des Sommets d'un Graphe et ses Applications à la Confection d'Horaires*, Thèse de Doctorat, École Polytechnique Fédéral de Lausanne, Lausanne, (1988).
- [He 90] A. Hertz, A Fast Algorithm for Colouring Meyniel Graphs, *J.C.T. Ser. B* **50** (1990) 231–240.
- [HeWe 88] A. Hertz, D. de Werra, Perfectly Orderable Graphs are Quasi-Parity Graphs: A Short Proof, *Discrete Math.* **68** (1988) 111–113.
- [Ho 85] C .T. Hoàng, *Perfect Graphs*, Ph.D. Thesis, School of Computer Science, McGill University, Montreal, (1985).
- [Ho 87] C .T. Hoàng, Alternating Orientation and Alternating Colouration of Perfect Graphs, *J.C.T. Ser. B* **42** (1987) 264–273.
- [Hs 87] W. L. Hsu, Recognizing Planar Perfect Graphs, *Journal of the A.C.M.* **34** (1987) 255–288.
- [Hs 88] W. L. Hsu, Decomposition Operations for Perfect Graphs, *J.C.T. Ser. B* **43** (1988) 70–94.
- [Jo 89] D. S. Johnson, The *NP*-Completeness Column: An Ongoing Guide, *J. of Algorithms* **11** (1989) 144–151.
- [Ka 72] R. M. Karp, Reducibility Among Combinatorial Problems, *Complexity of Computer Computations*, Plenum Press, New York, (1972) 85–103.
- [Kö 31] D. König, Graphen und Matrizen, *Mat. Fit. Lapok* **38** (1931) 116–119.
- [Lo 72] L. Lovász, Normal Hypergraphs and the Perfect Graph Conjecture, *Discrete Math.* **2** (1972) 253–267.
- [Lu 88] A. Lubiw, A Note on Odd/Even Cycles, *Discrete Applied Math.* **22** (1988/89) 87–92.
- [Lu] A. Lubiw, Short-Chorded and Perfect Graphs, a ser publicado em *J.C.T. Ser. B*.
- [Ma 89] F. Maffray, *Structural Results on Perfect Graphs*, Ph.D. Thesis, RUTCOR, Rutgers University, New Brunswick, (1989).

- [MrGaRe 90] S. Markossian, G. Gasparian, B. Reed, *W-Perfect Graphs*, a ser publicado em *J.C.T. Ser. B*.
- [McReSS] C. McDiarmid, B. Reed, A. Schrijver, B. Shepherd, *Induced Cycles in Planar Graphs*, preprint, (1989).
- [Md 87] C. F. X. Mendonça, *Grafos Perfeitos*, Tese de Mestrado, IMECC/UNICAMP, São Paulo, (1987).
- [Me 76] H. Meyniel, On the Perfect Graph Conjecture, *Discrete Math.* **16** (1976) 253–267.
- [Me 87] H. Meyniel, A New Property of Critically Imperfect Graphs and Some Consequences, *Eur. J. Combinatorics* **8** (1987) 313–316.
- [MiPf 90] M. Middendorf, F. Pfeiffer, On the Complexity of Recognizing Perfectly Orderable Graphs, *Discrete Math.* **81** (1990) 327–333.
- [Ol 86] S. Olariu, *Results on Perfect Graphs*, Ph.D. Thesis, School of Computer Science, McGill University, Montreal, (1986).
- [Ol 88] No Anti-twins in Minimal Imperfect Graphs, *J.C.T. Ser. B* **45** (1988) 255–257.
- [Ol 90] S. Olariu, On the Closure of Triangle-Free Graphs under Substitution, *Inf. Proc. Letters* **34** (1990) 97–101.
- [Pr 88] M. Preissmann, *Sur Quelques Problèmes Théoriques et Appliqués de la Théorie des Graphes*, Thèse d'État, Université Joseph Fourier, Grenoble, (1988).
- [Re 86] B. Reed, *A Semi-Strong Perfect Graph Theorem*, Ph.D. Thesis, School of Computer Science, McGill University, Montreal, (1986).
- [Re 87] A Note on Even Pairs, *Discrete Math.* **65** (1987) 317–318.
- [Re 89] B. Reed, comunicação particular.
- [Re 90] B. Reed, Perfection, Parity, Planarity, and Packing Paths, preprint, (1989).
- [ReSb 90] B. Reed, N. Sbihi, Recognizing Bull-Free Perfect Graphs, preprint, (1990).
- [RoTaLu 76] D. J. Rose, R. E. Tarjan, G. S. Lueker, Algorithmic Aspects of Vertex Elimination on Graphs, *SIAM J. Comp.* **5** (1976) 266–283.
- [Sb 80] N. Sbihi, *Algorithmes de Recherche d'un Graphe de Cardinalité Maximum dans un Graphe sans Étoile*, Thèse de troisième cycle, Université Joseph Fourier, Grenoble, (1980).

- [Se 74] D. Seinsche, On a Property of the Class of n -colourable Graphs, *J.C.T. Ser. B* **16** (1974) 191–193.
- [Sz 84] J. L. Szwarcfiter, *Grafos e Algoritmos Computacionais*, Editora Campus, (1984).
- [Ta 89] V. Tardif, *Colouring Oriented Perfect Graphs*, Master Thesis, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Waterloo, (1989).
- [Tu 73] A. Tucker, The Strong Perfect Graph Conjecture for Planar Graphs, *Can. Journal of Math.* **25** (1973) 103–114.
- [Tu 83] A. Tucker, Colouring Graphs with Stable Cutsets, *J.C.T. Ser. B* **34** (1983) 258–267.
- [Tu 87] A. Tucker, Colouring Perfect $(K_4 - e)$ -free Graphs, *J.C.T. Ser. B* **42** (1987) 313–318.
- [Vi 89] M. Villanueva, *Grafos Triangularizados: Caracterizações e Extensões*, Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, (1989).
- [Wh 81] S. Whitesides, An Algorithm for Finding Clique Cut-Sets, *Inf. Proc. Letters* **12** (1981) 31–32.

Apêndice

Apresentamos neste apêndice a demonstração de que os seguintes problemas são *NP*-completos [Bi 89]:

Problema : *u*-CICLO ÍMPAR
Dados : Grafo G , vértice $u \in V_G$
Pergunta : G contém um ciclo induzido ímpar ≥ 5 contendo u ?

Problema : $\{u, v\}$ -CICLO
Dados : Grafo G , vértice $u, v \in V_G$
Pergunta : G contém um ciclo induzido contendo $\{u, v\}$?

Para isso, apresentaremos uma transformação polinomial usando o seguinte problema *NP*-completo:

Problema : 3-SAT
Dados : Expressão booleana na forma normal conjuntiva,
onde cada cláusula tem exatamente 3 literais.
Pergunta : A expressão booleana é satisfatível?

Esta redução constrói, dado um exemplar genérico de 3-SAT digamos $e = c_1 \wedge \dots \wedge c_m$, um grafo U tal que as seguintes afirmações são equivalentes:

- $e = c_1 \wedge \dots \wedge c_m$ é satisfatível
- U contém um u -ciclo ímpar
- U contém um $\{u, v\}$ -ciclo

Suponha que é dado um exemplar genérico de 3-SAT, isto é, uma expressão booleana e na forma normal conjuntiva, em n variáveis x_1, x_2, \dots, x_n e m cláusulas c_1, c_2, \dots, c_m .

Logo, cada cláusula é disjunção de três literais, isto é, $c_j = z_1 \vee z_2 \vee z_3$ onde $z_k = x_i$ ou $z_k = \bar{x}_i$.

O grafo U é construído por etapas, através da inclusão de um subgrafo induzido correspondendo a cada uma das n variáveis x_i , e da inclusão de um subgrafo induzido correspondendo a cada uma das m cláusulas c_j .

Para cada variável x_i , para $1 \leq i \leq n$, definimos um subgrafo induzido $X_i \leq U$ com conjunto de vértices $\{b_{ij} : 1 \leq j \leq 4\} \cup \{t_{ij} : 1 \leq j \leq 4\} \cup \{f_{ij} : 1 \leq j \leq 4\}$ e conjunto de arestas particionado em arestas fortes e fracas. As arestas fortes serão: $(t_{i1}, b_{i1}), (t_{i1}, b_{i3}), (f_{i1}, b_{i1}), (f_{i1}, b_{i3}), (b_{i2}, t_{i2}), (t_{i2}, t_{i3}), (t_{i3}, t_{i4}), (t_{i4}, b_{i4}), (b_{i4}, f_{i4}), (b_{i2}, f_{i2}), (f_{i2}, f_{i3}), (f_{i3}, f_{i4})$ e (f_{i4}, b_{i4}) e as arestas fracas são: $(t_{i1}, b_{i4}), (t_{i4}, b_{i1})$. Este grafo X_i está representado na figura A.1.

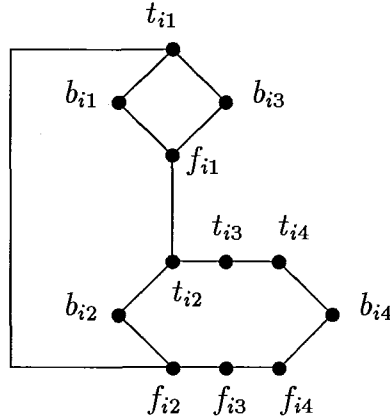


Figura A.1: Grafo X_i correspondendo à variável x_i .

Para cada cláusula $c_j = (z_1 \vee z_2 \vee z_3)$, para $1 \leq j \leq m$, definimos um subgrafo induzido $C_j \leq U$ com conjunto de vértices $\{d_{jk} : 1 \leq k \leq 4\} \cup \{r_j\} \cup \{f_j(z_k) : 1 \leq k \leq 3\}$. As arestas de C_j são: $(d_{j1}, r_j), (r_j, d_{j3}), (d_{j2}, f_j(z_1)), (d_{j2}, f_j(z_2)), (d_{j3}, f_j(z_3)), (d_{j4}, f_j(z_1)), (d_{j4}, f_j(z_2)),$ e $(d_{j4}, f_j(z_3))$; e são todas fortes. Este grafo C_j está representado na figura A.2.

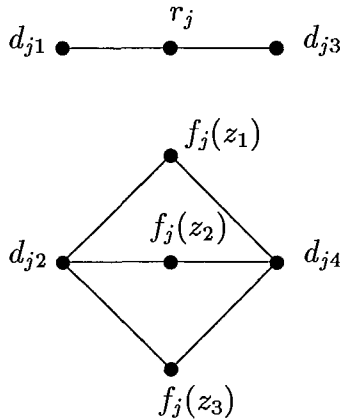


Figura A.2: Grafo C_j correspondendo à cláusula c_j .

Os subgrafos X_i e C_j têm conjuntos de vértices disjuntos dois a dois e são ligados no grafo U através do vértice u , de dois vértices auxiliares w e v e das arestas fortes: $(u, w), (u, b_{12}), (w, b_{11})$; para $1 \leq i < n$, $(b_{i3}, b_{i+1,1})$ e $(c_{i4}, c_{i+1,2})$; $(c_{n3}, d_{11}), (c_{n4}, d_{12})$; para $1 \leq j < m$, $(d_{j3}, d_{j+1,1})$ e $(d_{j4}, d_{j+1,2})$; e $(d_{m3}, v), (d_{m4}, v)$.

Portanto podemos representar a disposição dos subgrafos induzidos X_i e C_j , para $1 \leq i < n$, $1 \leq j < m$, no grafo U pelo diagrama apresentado na figura A.3.

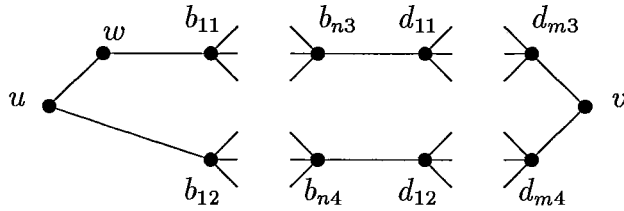


Figura A.3: Diagrama para o grafo U .

Finalmente, para completar a construção do grafo U , adicionamos as seguintes arestas fracas: para cada cláusula $c_j = z_1 \vee z_2 \vee z_3$, dado $1 \leq k < 3$, se $z_k = x_i$ então temos $(f_{i1}, f_j(z_k))$, e $(f_{i3}, f_j(z_k))$, e se $z_k = \bar{x}_i$ então temos $(t_{i1}, f_j(z_k))$, e $(t_{i3}, f_j(z_k))$.

Veremos que, no caso de U admitir um u -ciclo ímpar, então tal ciclo induzido ímpar não terá arestas fracas. As arestas fracas são usadas para associar a paridade de um ciclo induzido contendo u no grafo U com as condições lógicas da expressão booleana e .

O lema A.1 apresenta propriedades de um u -ciclo ímpar no grafo U .

Lema A.1 *Seja L um u -ciclo ímpar no grafo U . Então as seguintes propriedades são satisfeitas:*

- Para $1 \leq i < n$, ou L contém os caminhos fortes $b_{i1}t_{i1}b_{i3}$ e $b_{i2}t_{i2}t_{i3}t_{i4}b_{i4}$, ou L contém os caminhos fortes $b_{i1}f_{i1}b_{i3}$ e $b_{i2}f_{i2}f_{i3}f_{i4}b_{i4}$.
- Para $1 \leq j < m$, L contém exatamente um caminho forte $d_{j2}f_j(z)d_{j4}$, onde z é um literal ocorrendo em c_j .
- L não contém arestas fracas.
- L contém o vértice v .

Prova: Seja L um u -ciclo no grafo U . Então L contém as arestas (u, w) , (u, b_{12}) , (w, b_{11}) . Mostraremos, por indução em i que L , ou contém os caminhos fortes $b_{i1}t_{i1}b_{i3}$ e $b_{i2}t_{i2}t_{i3}t_{i4}b_{i4}$, ou contém os caminhos fortes $b_{i1}f_{i1}b_{i3}$ e $b_{i2}f_{i2}f_{i3}f_{i4}b_{i4}$, para $1 \leq i < n$.

No caso inicial $i = 1$, suponha que L contém (b_{11}, t_{11}) . Então L não pode conter (b_{12}, f_{12}) porque a aresta fraca (t_{11}, f_{12}) implica que $L = [u, w, b_{11}, t_{11}, f_{12}, b_{12}, u]$ é par.

Logo, se L contém (b_{11}, t_{11}) então contém b_{12}, t_{12}, t_{13} .

Agora, L contém $(t_{11}, f_j(\bar{x}_k))$ se e somente se também contém $(t_{13}, f_j(\bar{x}_k))$ e o ciclo induzido $L = [u, w, b_{11}, t_{11}, f_j(\bar{x}_k), t_{13}, t_{12}, b_{12}, u]$ é par.

Portanto, L contém os caminhos fortes $b_{11}t_{11}b_{13}$ e $b_{12}t_{12}t_{13}t_{14}b_{14}$.

Suponha agora que $i > 1$ e que L contém os vértices $b_{i-1,3}$ e $b_{i-1,4}$. Logo, L deve conter $b_{i,1}$ e $b_{i,2}$ também. A hipótese de indução implica que o caminho induzido em L entre $b_{i,1}$ e $b_{i,2}$ contendo u tem comprimento $2(i-1) + 4(i-1) + 3$ e é portanto ímpar. Suponha que L contém (b_{i1}, t_{i1}) . Então, assim como argumentamos para o caso $i = 1$, L não pode conter (b_{i2}, f_{i2}) porque a aresta fraca (t_{i1}, f_{i2}) implica que L é par.

Além disso, L contém $(t_{i1}, f_j(\bar{x}_k))$ se e somente se também contém $(t_{13}, f_j(\bar{x}_k))$. Portanto, L contém os caminhos fortes $b_{i1}t_{i1}b_{i3}$ e $b_{i2}t_{i2}t_{i3}t_{i4}b_{i4}$.

Por outro lado, a existência de arestas fracas em L , tanto com extremos em X_i , quanto com um extremo em X_i e outro em C_j , implica que L seja par.

Logo, para $1 \leq j \leq m$, L contém exatamente um caminho forte $d_{j2}f_j(z)d_{j4}$, onde z é um literal ocorrendo em c_j .

Obtemos também que, por construção de L , para $1 \leq j \leq m$, L contém o caminho forte $d_{j1}r_jd_{j3}$, o que implica que L contém o vértice v . \square

Estamos prontos para concluir a transformação de 3-SAT para u -CICLO ÍMPAR.

Lema A.2 *A expressão booleana $e = c_1 \wedge \dots \wedge c_m$ é satisfatível se e somente se o grafo U contém um u -ciclo ímpar.*

Prova: Suponha que existe uma atribuição às variáveis x_i de modo que $e = c_1 \wedge \dots \wedge c_m$ seja satisfatível.

Podemos construir um u -ciclo ímpar L com apenas arestas fortes da seguinte maneira: se x_i é verdadeira então L contém t_{i1}, t_{i2}, t_{i3} e t_{i4} e se x_i é falsa então L contém f_{i1}, f_{i2}, f_{i3} e f_{i4} .

Agora, se a cláusula $c_j = z_1 \vee z_2 \vee z_3$ é satisfeita porque z_1 é verdadeiro então L contém $f_j(z_1)$.

Finalmente L contém u, w, v e todas as arestas fortes ligando os subgrafos X_i ou C_j .

Reciprocamente suponha que U contém um u -ciclo ímpar. Considere a seguinte atribuição às variáveis x_i , $1 \leq i \leq n$: x_i é verdadeira se e somente se L contém o vértice t_{i1} .

Seja $c_j = z_1 \vee z_2 \vee z_3$ uma cláusula. Então L contém $f_j(z_1)$, digamos. Suponha que $z_1 = x_i$, para algum $1 \leq i \leq n$. Então L não pode conter f_{i1} porque a aresta $(f_{i1}, f_j(z_1))$ é fraca.

Logo, L contém t_{i1} e a definição da atribuição implica que colocamos x_i como verdadeiro e portanto C_j é satisfeita.

O caso $z_1 = \bar{x}_i$ é similar. \square

Observe que ao substituírmos u -ciclo ímpar por $\{u, v\}$ -ciclo a mesma estratégia mostra que o problema 3-SAT também é transformável para o problema $\{u, v\}$ -CICLO, o que prova que, na verdade, estes três problemas de decisão são equivalentes do ponto de vista de complexidade computacional.

Podemos ir além ao considerarmos o grafo

$$D := (V_U \cup \{s\}, E_U \setminus \{(u, w)\} \cup \{(s, w)\})$$

Observe que U contém um u -ciclo se e somente se D contém um caminho induzido ímpar com extremidades u e s .

Portanto o seguinte problema de decisão é *co-NP*-completo:

Problema : $\{u, s\}$ -DUPLA PAR
 Dados : Grafo G , vértices $u, s \in V_G$
 Pergunta : O par $\{u, s\}$ induz uma dupla par em G ?

Além disso, podemos estender a construção acima de modo a provar que o seguinte problema também é *co-NP*-completo:

Problema : DUPLA PAR
 Dados : Grafo G
 Pergunta : G contém uma dupla par?

De fato, considere o grafo D , definido acima, para o qual é difícil testar a existência de um caminho induzido ímpar entre um dado par de vértices. Podemos construir um grafo F , que contém D como subgrafo induzido, e que satisfaz às seguintes propriedades [Bi 89]:

- F contém um caminho induzido ímpar entre qualquer par de vértices x, y tais que $x \neq u, s$.
- F contém um caminho induzido ímpar entre u e s se e somente se D também contém.

Observe que esta construção mostra que, na verdade, o problema de decisão DUPLA PAR continua *co-NP*-completo mesmo restrito para a classe de grafos tais que todo par de vértices com a exceção de um são extremos de caminhos induzidos ímpares conhecidos.