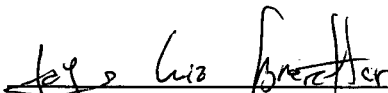


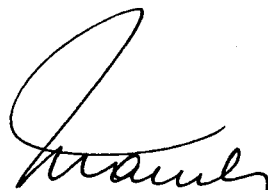
CICLOS INDUZIDOS PARES EM GRAFOS PLANARES


Oscar Porto

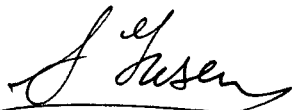
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE POS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.


Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Jayme L. Szwarcfiter, Ph.D.  
(Presidente)

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Nelson Maculan Filho, D.Sc.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Claudio L. Lucchesi, Ph.D.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Alfredo N. Iusem, Ph.D.

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Antonio A. Fernandes de Oliveira, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ -- BRASIL

AGOSTO DE 1991

PORTO, OSCAR

Ciclos Induzidos Pares em Grafos Planares [Rio de Janeiro]

1991

IX, 137 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,

Engenharia de Sistemas e Computação, 1991)

Tese - Universidade Federal de Rio de

Janeiro, COPPE

1. Grafos I. COPPE/UFRJ II. Título

(serie)



*Lo supieron los arduos alumnos de Pitágoras:  
Los astros y los hombres vuelven ciclicamente;  
Los átomos fatales repetirán la urgente  
Afrodita de oro, los tebanos, las ágoras.*

.

.

.

*No sé si volveremos en un ciclo segundo  
Como vuelven las cifras de una fracción periódica;  
Pero sé que una oscura rotación pitagórica  
Noche a noche me deja en un lugar del mundo.*

.

.

.

*Vuelve la noche cóncava que descifró Anaxágoras;  
Vuelve a mi carne humana la eternidad constante  
Y el recuerdo ¿el proyecto? de un poema incesante:  
"Lo supieron los arduos alumnos de Pitágoras..."*

Jorge Luis Borges: *La noche cíclica*, (1940).

## AGRADECIMENTOS

Na hora de escrever esta página de agradecimentos passam pela minha cabeça muitas pessoas que tiveram muito a ver com a minha vida nesses quatro anos e meio, desde a minha chegada ao Rio em março de 1987, até a conclusão da minha tese de doutorado em agosto de 1991.

Primeiramente agradeço aos membros da banca examinadora por ter lido o meu trabalho e pelas suas sugestões.

É muito o que devo agradecer ao Prof. Jayme Szwarcfiter. Ele tem feito muito mais do que é requerido e esperado de um orientador, desde me apresentar problemas de grande interesse, dando sempre importantes sugestões até me apoiar e encorajar nos momentos difíceis, deixando a clara sensação de ter aprendido muito com ele e de ter ganho um grande orientador e um grande amigo.

Agradeço muito ao Prof. Nelson Maculan Filho, primeiramente por ter me convidado a fazer o meu doutorado no Departamento de Sistemas e Computação da COPPE/UFRJ, assim como pela assistência que tem me oferecido cada vez que foi necessário, solucionando pessoalmente várias questões de grande importância ao longo desses anos. As suas sugestões tanto acadêmicas como profissionais e pessoais tem sido de grande importância para mim.

Obrigado ao pessoal do Departamento de Sistemas e Computação da COPPE/UFRJ, especialmente a Denise e Cláudia por todos os "galhos quebrados".

Agradeço muito ao pessoal do IMPA, por ter me acolhido como um membro mais do instituto, especialmente ao Prof. Isnard, a Dion (a sua ajuda foi de grande importância na hora de datilografar a tese no microcomputador), a Magi, a Dirce, a Suely, ao Prof. Elon Lages Lima, e muito especialmente ao Prof. Alfredo Iusem, que teve muito a ver com a minha vinda ao Brasil, tendo feito para mim os primeiros contatos profissionais no Rio de Janeiro.

Obrigado ao pessoal do Departamento de Combinatorics and Optimization da Universidade de Waterloo. A minha estada de um ano lá foi de grande importância para minha vida profissional.

Fico muito grato aos grandes amigos, sem o apoio dos quais esta tarefa teria sido impossível: Hernan Abeledo, Ricardo Dahab, Vera Vicente, Betina Zolkower, Michel Alase, Joelle Fontana, Max Chacon Pacheco, Monica Villanueva, Diego Rial, Claudia Linhares, Marcia Giambiagi, Andres Torn, Philippe Michelon, Daniela Brunner, Rosalind Rowe, Chango Pollono, Silvia Wolfes, Erik Schtirbu, Esteban Morgado, Marcelo Rescia.

Agradeço também a Carlos Ibañez, Calixto Sanchez Frezneda, Alicia Ortega, Isidoro Gitler, Dan Younger, Alain Hertz e Claudio Lucchesi.

Além de dedicar-lhe este trabalho, agradeço profundamente a minha mãe pelo enorme apoio e pela paciência que tem tido comigo ao longo de toda a minha vida.

Agradeço muito a Celia Anteneodo pelo grande apoio e colaboração na parte final da elaboração da tese.

Fico muito grato a CAPES e ao CNPq pela concessão das bolsas de estudo que fizeram possível a minha estada no Brasil e no Canadá.

E um obrigado geral ao povo brasileiro, pela sua calidez, a sua alegria e muito especialmente, pela sua música.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.).

CICLOS INDUZIDOS PARES EM GRAFOS PLANARES

Oscar Porto

Agosto de 1991

Orientador: Jayme Luiz Szwarcfiter

Programa: Sistemas e Computação

Neste trabalho é apresentado um algoritmo polinomial de complexidade  $O(n^3)$  para testar a existência de ciclos induzidos pares em grafos planares. Os ciclos induzidos pares se encontram fortemente relacionados à família dos grafos W-Perfeitos, de uma maneira análoga à que relaciona ciclos induzidos ímpares e grafos Perfeitos. A complexidade de se testar a existência de ciclos induzidos pares num grafo qualquer é um problema ainda em aberto.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.).

EVEN INDUCED CYCLES IN PLANAR GRAPHS

Oscar Porto

August, 1991

Thesis Supervisor: Jayme Luiz Szwarcfiter

Department: Sistemas e Computação

In this work an algorithm for testing the existence of even induced cycles in planar graphs is presented. The algorithm has complexity  $O(n^3)$ . Even induced cycles are closely related to W-Perfection in a way analogous to the one that relates odd induced cycles to Perfect Graphs. The complexity of testing the existence of even induced cycles in a general graph remains open.



## INDICE

CAPÍTULO I: INTRODUÇÃO.....	1
CAPÍTULO II: CICLOS INDUZIDOS PARES E ÍMPARES.....	6
CAPÍTULO III: GAFOS W-PERFEITOS.....	13
CAPÍTULO IV: PLANARIDADE, PERFEIÇÃO, CICLOS INDUZIDOS.....	23
CAPÍTULO V: UM ALGORITMO DE COMPLEXIDADE $O(n^3)$ PARA TESTAR A EXISTÊNCIA DE CICLOS INDUZIDOS PARES EM GRAFOS PLANARES.....	38
Cortes CCC, C2, C3.1 e C3.2.....	39
Configurações de vértices vizinhos à face $f$ e componentes $N_s^f$ penduradas nelas.....	53
CASO 1: Grafo $G$ não maximal planar.....	55
Corte das componentes $N_s^f$ .....	68
Os 16 grafos finais.....	87
CASO 2: Grafo $G$ maximal planar.....	109
O Algoritmo.....	112
Análise da complexidade.....	116
CAPÍTULO VI: CONCLUSÕES.....	118
Referências.....	125

# CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

## INTRODUÇÃO

O tema principal desta tese é a apresentação de um algoritmo de complexidade  $O(n^3)$  para testar a existência de ciclos induzidos pares em grafos planares (Capítulo V). B.Reed (1989) provou a existência de solução polinomial para o problema. A elaboração de um algoritmo de carácter combinatório para resolve-lo era um problema ainda em aberto.

A seguir são dadas algumas definições que serão necessárias no desenvolvimento do trabalho.

Um grafo  $G(V,E)$  é um conjunto finito não-vazio  $V$  e um conjunto  $E$  de pares não-ordenados de elementos distintos de  $V$ . Os elementos de  $V$  são os *vértices* e os de  $E$  são as *arestas* de  $G$ . Cada aresta  $e \in E$  será denotada pelo par de vértices  $e = vw$  que a forma. Nesse caso, os vértices  $v, w$  são os *extremos* da aresta  $e$ , sendo denominados *adjacentes*. A aresta  $e$  é dita *incidente* a ambos  $v, w$ . Duas arestas que possuem um extremo comum são chamadas de *adjacentes*. Diremos que um vértice  $x$  vê um vértice  $w$  (ou que os vértices  $x$  e  $w$  são *vizinhos*), se existir a aresta  $xw$ . A *vizinhança* de um vértice  $x$  será o conjuntos dos vértices vizinhos de  $x$ . Define-se *grau* de um vértice  $x$ , denotado por  $d(x)$ , como sendo o número de vértices adjacentes a  $x$ . Denotaremos por  $\delta(G)$  e  $\Delta(G)$ , os graus dos vértices de menor e maior grau do grafo  $G$ , respectivamente. Utilizaremos a notação  $n = |V|$  e  $m = |E|$ . Um grafo  $G$  é chamado *trivial* quando  $|V|=1$ .

Denomina-se *complemento* de um grafo  $G(V,E)$  ao grafo  $\bar{G}$ , o qual possui o mesmo conjunto de vértices do que  $G$  e tal que para todo par de vértices distintos  $v, w \in V$ , tem-se que  $vw$  é uma aresta de  $\bar{G}$  se e soamente se não o for de  $G$ .

Um *subgrafo*  $G_2(V_2, E_2)$  de um grafo  $G_1(V_1, E_1)$  é um grafo tal que  $V_2 \subseteq V_1$  e  $E_2 \subseteq E_1$ . Se além disso,  $G_2$  possui toda aresta  $vw$  de  $G_1$  tal que ambos  $v$  e  $w$  estejam em  $V_2$ , então  $G_2$  é o *subgrafo induzido* pelo subconjunto de vértices  $V_2$ . Diz-se então que  $V_2$  *induz*  $G_2$ . Ou seja, o subgrafo induzido  $G_2$  de  $G_1$  satisfaz: para  $v, w \in V_2$ , se  $vw \in E_1$  então  $vw \in E_2$ .

Uma seqüência de vértices  $v_1, \dots, v_k$  tal que  $v_j v_{j+1} \in E$ ,  $1 \leq j \leq |k-1|$ , é denominada *caminho* de  $v_1$  a  $v_k$ . Um caminho de  $k$  vértices é formado por  $k-1$  arestas  $v_1 v_2, v_2 v_3, \dots, v_{k-1} v_k$ . O valor  $k-1$  é o *comprimento* do caminho. Se todos os vértices do caminho  $v_1, \dots, v_k$  forem distintos, a seqüência recebe o nome de *caminho simples*. Um caminho  $P$  de um grafo  $G$  será dito *induzido*, se as únicas arestas existentes entre os vértices de  $P$  no grafo  $G$  são as que fazem parte do caminho  $P$ .

Um *ciclo* é um caminho  $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$  sendo  $v_1 = v_{k+1}$  e  $k \geq 3$ . Se o caminho  $v_1, \dots, v_k$  for simples, o ciclo  $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$  também é denominado simples. Um caminho, ou ciclo, de comprimento  $k$  será denominado caminho, ou ciclo,  $k$ .

Um ciclo  $C$  de um grafo  $G$  será dito *induzido*, se as únicas arestas existentes entre os vértices de  $C$  no grafo  $G$  são as que fazem parte do ciclo  $C$ . Um ciclo induzido será *par* ou *ímpar* (CIP e CII, respectivamente) conforme a paridade do número de vértices que o compõem.

Para maior simplicidade de apresentação, os termos "caminho" e "ciclo" serão utilizados com o significado de caminho simples e ciclo simples. Um grafo que não possui ciclos simples é *acíclico*. Um *triângulo* é um ciclo de tamanho três. Um *ciclo com uma corda curta* é um ciclo com precisamente uma corda que forma um triângulo com duas arestas do ciclo.

Um grafo  $G(V,E)$  é denominado *conexo* quando existe caminho entre todo par de vértices de  $G$ . Caso contrário  $G$  é *desconexo*. Um *corte de vértices* de  $G$  é um subconjunto minimal de vértices  $V' \subseteq V$  cuja remoção de  $G$  o desconecta ou o transforma no grafo trivial. Denomina-se *conectividade de vértices*  $c_v$  de  $G$  à cardinalidade do menor corte de vértices de  $G$ . Sendo  $k$  um inteiro positivo, diz-se que um grafo  $G$  é *k-conexo em vértices* (ou *k-conexo*), quando a sua conectividade é  $\geq k$ .

Dois grafos  $G_1(V_1,E_1)$  e  $G_2(V_2,E_2)$  com  $|V_1|=|V_2|=n$  são ditos *isomorfos entre si* se existe uma função unívoca  $f:V_1 \rightarrow V_2$ , tal que  $vw \in E_1$  se e somente se  $f(v)f(w) \in E_2$ .

Um grafo é *completo* quando existe uma aresta entre cada par de seus vértices. O grafo completo de  $n$  vértices será denotado por  $K_n$ . Denomina-se *clique* de um grafo  $G$  a um subgrafo de  $G$  que seja completo. Chama-se *conjunto independente de vértices* (ou *conjunto estável*) a um subgrafo induzido de  $G$  que seja totalmente desconexo. O *tamanho* de uma clique ou conjunto estável é igual à cardinalidade de seu conjunto de vértices.

O *número clique* de um grafo  $G$  é a cardinalidade da maior clique de  $G$ , e será denotado por  $\omega(G)$ . Denotaremos o tamanho do maior conjunto estável de  $G$  por  $\alpha(G)$ .

Seja  $G(V,E)$  um grafo e  $C=\{c_i\}$  um conjunto de cores. Uma *coloração* de  $G$  é uma atribuição de alguma cor de  $C$  para cada vértice de  $V$ , de tal modo que a dois vértices adjacentes sejam atribuídas cores diferentes. Assim sendo, uma coloração de  $G$  é uma função  $f : V \rightarrow C$  tal que para cada par de vértices  $v,w \in V$  tem-se  $vw \in E \Rightarrow f(v) \neq f(w)$ . Uma *k-coloração* de  $G$  é uma coloração que utiliza um total de  $k$  cores. Isto é, uma *k-coloração* de  $G$  é uma coloração  $f$  tal que a cardinalidade do conjunto imagem é igual a  $k$ . Diz-se então que  $G$  é *k-colorível*.

Denomina-se *número cromático*  $\chi(G)$  de um grafo  $G$  ao menor número de cores  $k$  para o qual existe uma  $k$ -coloração de  $G$ . Uma coloração que utiliza o número mínimo de cores é chamada *mínima*.

Seja  $G$  um grafo e  $R$  uma representação geométrica de  $G$  em um plano. A representação  $R$  é chamada *plana* quando não houver cruzamento de linhas em  $R$ , a não ser nos vértices, naturalmente. Um grafo é dito *planar* quando admitir alguma representação plana.

O Capítulo I é uma introdução do trabalho e apresenta as definições de alguns conceitos que serão necessários nos capítulos seguintes.

O Capítulo II apresenta as famílias dos grafos Perfeitos e  $W$ -Perfeitos e a sua relação com os ciclos induzidos ímpares e pares. Além disso, uma descrição das motivações que levam ao estudo do problema de achar ciclos induzidos de uma paridade determinada num dado grafo  $G$ .

O Capítulo III é uma descrição das propriedades dos grafos  $W$ -Perfeitos, quase todas ligadas à existência ou não de ciclos induzidos pares nos grafos.

O Capítulo IV trata várias questões relacionadas a grafos perfeitos e ciclos induzidos, especificamente em grafos planares.

O Capítulo V apresenta o algoritmo para testar a existência de ciclos induzidos pares em grafos planares.

O Capítulo VI contém as conclusões do trabalho e a formulação de vários problemas, alguns já resolvidos e outros ainda em aberto, relacionados aos tópicos tratados nesta tese.

## CAPÍTULO II

### CICLOS INDUZIDOS PARES E ÍMPARES

Motivações para o seu estudo

## CICLOS INDUZIDOS PARES E ÍMPARES

Motivações para o seu estudo

### a) Ciclos induzidos ímpares e grafos perfeitos:

Os problemas relativos a se determinar a existência de ciclos induzidos pares ou ímpares em grafos remontam há aproximadamente três décadas.

No ano de 1961, C.Berge definiu a classe dos *Grafos Perfeitos*. Um grafo  $G$  é *perfeito* se para todo subgrafo induzido  $H$  de  $G$  temos  $\chi(H)=\omega(H)$ . Conjuntamente com a definição, C.Berge enunciou as duas seguintes conjecturas:

*Conjectura Fraca dos Grafos Perfeitos (CFrGP)*: um grafo  $G$  é perfeito se e somente se o seu complemento  $\bar{G}$  também o é.

*Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos (CFGP)*: um grafo  $G$  é perfeito se e somente se nem  $G$  nem  $\bar{G}$  contém como subgrafo induzido um ciclo ímpar de comprimento  $\geq 5$ .

A *CFrGP* foi provada por L.Lovasz (1972). A *CFGP* permanece ainda em aberto.

À luz do resultado de Lovasz a *CFGP* pode ser enunciada da seguinte maneira:

**CFGP**:  $G$  e  $\bar{G}$  são perfeitos se e somente se nem  $G$  nem  $\bar{G}$  contém como subgrafo induzido um ciclo ímpar de comprimento  $\geq 5$ .



Dois livros (Berge C. e Chvátal V.,1984 e Golombic M.,1980) e centenas de artigos foram escritos sobre grafos perfeitos, muitos deles tentando se aproximar a uma prova da CFGP por caminhos diversos. Um outro grande fator de motivação foi um forte resultado estrutural obtido por L.Lovasz (1972) na sua prova da CFrGP. Por exemplo, M.Grotschel, L.Lovasz e A.Schrijver (1984) utilizaram aquele resultado e o método do elipsoide da programação linear para provar o seguinte:

Para um grafo perfeito  $G$ ,  $\omega(G)$  e  $\chi(G)$  podem ser determinados em tempo polinomial.

Até o momento não foi encontrado nenhum algoritmo de carácter combinatório para a solução do problema acima.

Muitos dos trabalhos publicados nesta área, tratam da relação entre grafos perfeitos e ciclos induzidos ímpares.

A.Tucker (1973) provou que um grafo planar é perfeito se e somente se ele não tiver como subgrafo induzido nenhum ciclo ímpar. É importante notar que isto é consistente com a CFGP já que,  $C_5 = \bar{C}_5$  e, para  $k \geq 3$ ,  $\bar{C}_{2k+1}$  é não planar.

H.Meyniel (1976) e S.Markossian e I.Kerpetjan (1976) provaram independentemente que se um grafo  $G$  não contém ciclo induzido ímpar ou ciclo ímpar com precisamente uma corda então  $G$  é perfeito. Esses grafos são chamados *grafos Meyniel*.

A.Tucker (1983) provou também que se  $G_1$  e  $G_2$  são grafos perfeitos,  $S_1$  em  $G_1$  e  $S_2$  em  $G_2$  são conjuntos estáveis tal que  $|S_1|=|S_2|$ , e  $G'$  é o grafo obtido a partir de  $G_1$  e  $G_2$  identificando  $S_1$  e  $S_2$ , então  $G'$  é perfeito se e somente se não contiver como subgrafo nenhum CII de comprimento  $\geq 5$ .

Os resultados e conjecturas acima mencionados dão uma clara idéia da inter-relação entre ciclos induzidos ímpares  $\geq 5$  e grafos perfeitos, e motiva a formulação da seguinte pergunta:

**Dado um grafo  $G$ , qual é a complexidade de se determinar se  $G$  contém algum subgrafo que induza um ciclo ímpar de comprimento  $\geq 5$  ?**

A resposta a esta pergunta permanece ainda desconhecida, mas existem alguns resultados parciais. É importante observar que se a resposta a esta pergunta fosse um algoritmo polinomial e se a CFGP fosse provada, então poderíamos reconhecer grafos perfeitos em tempo polinomial. Por enquanto só é sabido que o problema de reconhecimento de grafos perfeitos pertence à classe Co-NP (Cameron K., 1982).

W.L.Hsu (1987) desenvolveu um algoritmo polinomial para o problema de reconhecimento de grafos planares perfeitos. Dado que um grafo planar é perfeito se e somente se ele não tem como subgrafo induzido um ciclo ímpar  $\geq 5$ , temos que: dado um grafo planar pode-se determinar em tempo polinomial se ele contém como subgrafo algum CII.

M.Burlet e J.Fonlupt (1984) mostraram que é possível determinar em tempo polinomial se um dado grafo  $G$  contém como subgrafo induzido um ciclo ímpar  $\geq 5$  ou um ciclo ímpar com exatamente uma corda. Isto é, um algoritmo polinomial para o reconhecimento de grafos Meyniel.

Em contraste com os dois resultados acima, D.Shmoys (1986) provou que é NP-Completo o problema de determinar se um grafo contém um ciclo induzido ímpar de comprimento arbitrário dado.

Recentemente D.Binstock (1989) provou que os seguintes 3 problemas são NP-Completo: dado um grafo  $G$  e dois vértices  $s$  e  $t$  de  $G$  determinar se existe um

- \* ciclo induzido que contenha  $s$  e  $t$ .
- \* ciclo induzido ímpar que contenha  $s$  e  $t$ .
- \* ciclo induzido par que contenha  $s$  e  $t$ .

Um grafo  $G$  será dito *bom*, se  $\chi(G) = \omega(G)$ . Pode-se ver que o problema de se determinar se um dado grafo  $G$  é bom é também NP-Completo (3-Coloração é polinomialmente transformável em Determinar se  $G$  é bom).

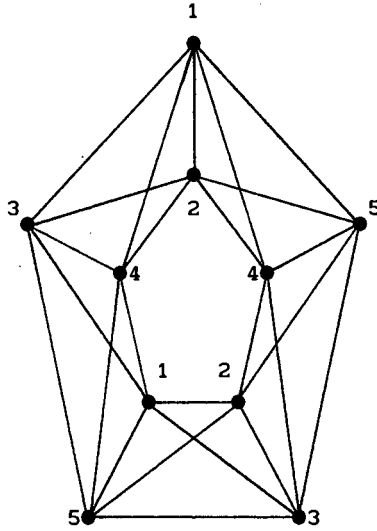
Um grafo é dito *Berge*, se nem ele nem o complemento tiverem como subgrafo induzido um ciclo ímpar  $\geq 5$ . A complexidade de se determinar se um dado grafo  $G$  é Berge é ainda desconhecida.

#### **b) Ciclos induzidos pares e grafos $W$ - Perfeitos:**

S.Markossian, G.Gasparian e B.Reed (1989) introduziram a classe dos grafos *W-Perfeitos*. Dado um grafo  $G$ , seja  $W(G) = \max\{\delta(H) + 1 \mid H \subseteq G\}$ . Um grafo  $G$  será dito *W-Perfeito* se para todo subgrafo  $F$  de  $G$ ,  $\chi(F) = W(F)$ .

Os grafos  $W$ -Perfeitos apresentam interesse algorítmico pois podem ser coloridos otimamente em tempo polinomial (detalhes no capítulo seguinte).

Se  $H$  for um ciclo induzido par,  $\chi(H)=2$  e  $W(H)=3$ . Portanto, nenhum grafo  $W$ -Perfeito pode conter como subgrafo induzido um ciclo par. É importante notar que a recíproca não é verdadeira. O grafo  $G$  representado na Figura (II.1) não tem nenhum CPI como subgrafo e  $\chi(G)=5$  e  $W(G)=6$ .



F I G U R A II.1

É importante notar que o complemento de um grafo  $W$ -Perfeito não é necessariamente  $W$ -Perfeito; por exemplo considerem-se  $C_4$  e  $\overline{C_4}$ . Contudo, os seguintes resultados relacionados são verdadeiros (Markossian et al., 1989):

$G$  e  $\overline{G}$  são  $W$ -Perfeitos se e somente se nem  $G$  nem  $\overline{G}$  contem como subgrafo um CPI.

Se  $G$  não contém CPI ou ciclo par com exatamente uma corda então  $G$  é W-Perfeito.

Se um grafo não contém CPI nem ciclo par com uma corda curta (CPCC) então é W-Perfeito.

Se  $G$  não contém CPI então  $\chi(G) \geq W(G)/2$ .

Os resultados acima mencionados dão uma clara idéia da inter-relação entre ciclos induzidos pares e grafos W-Perfeitos, e conduzem, naturalmente, à formulação da seguinte pergunta:

**Dado um grafo  $G$ , qual é a complexidade de se determinar se  $G$  contém um CPI ?**

A resposta a esta pergunta permanece ainda desconhecida, mas existem alguns resultados parciais.

A partir de uma caracterização estrutural dos grafos W-Perfeitos, Markossian et al.(1989) desenvolveram um algoritmo linear para determinar se  $G$  ou  $\bar{G}$  contém um CPI.

Também provaram que existe um algoritmo polinomial para determinar se  $G$  contém um CPI ou um CPCC.

O assunto principal desta tese é o desenvolvimento de um algoritmo polinomial de complexidade  $O(n^3)$  para testar a existência de ciclos induzidos pares em grafos planares. Além disso, determina o ciclo caso exista. O problema para um grafo  $G$  qualquer, como já foi dito, permanece ainda em aberto.

## CAPÍTULO III

### GRAFOS W-PERFEITOS

## GRAFOS W-PERFEITOS

A definição e algumas propriedades dos grafos W-Perfeitos já foram introduzidas no capítulo anterior. No presente capítulo serão apresentados alguns teoremas relativos às propriedades estruturais desta família de grafos.

*Lema III.1:* Seja um grafo  $G$  qualquer; então  $\chi(G) \leq W(G)$ .

*Prova:* A prova do Lema é algorítmica. Sejam  $v_1 < v_2 < \dots < v_n$  uma ordenação dos vértices de  $G$  obtida pelo seguinte algoritmo:

### Algoritmo 1

(1) Fazer  $i=n$ ,  $F_n=V$

(2) Seja  $v_i$  o vértice de grau mínimo de  $F_i$ ;

Enquanto  $i \neq 0$  fazer  $F_{i-1} = F_i - v_i$ .

(3) Colorir  $G$  colorindo  $v_i$  com o menor inteiro ainda não usado por nenhum dos seus vizinhos em  $F_i$ . ■

*Teorema III.1:* Seja um grafo  $G$  sem nenhum CPI; então  $\chi(G) \geq W(G)/2+1$ .

*Prova:* O grafo  $G$  não conterá nenhum CPI se todo subgrafo 2-colorível de  $G$  for acíclico. Seja  $G$  um grafo sem CPI e considere uma coloração de  $G$  com  $\chi(G)$  cores. Seja  $\chi(G) \geq 2$ . Para  $1 \leq i \leq \chi(G)$  seja  $S_i$  o conjunto de vértices de cor  $i$ . É claro que  $E(G) = \bigcup \{E(S_i \cup S_j) / i \neq j\}$ . Então,  $|E(G)| \leq \sum |E(S_i \cup S_j)|$ ,  $i \neq j$ .

Conforme mencionado,  $S_i \cup S_j$  é acíclico. Então,  $|E(G)| \leq \sum_{i \neq j} (|S_i| + |S_j| - 1)$ . Segue que  $|E(G)| \leq (\chi(G)-1)|V(G)| - \binom{\chi(G)}{2}$ . Então,  $|E(G)| < (\chi(G)-1)|V(G)|$ . Isto implica que existe algum vértice de  $G$  com grau menor que  $2(\chi(G)-1)$ . Portanto,  $W(G) \leq 2(\chi(G)-1)$ . ■

Será provado agora que  $G$  e  $\bar{G}$  são  $W$ -Perfeitos se e somente se nem  $G$  nem  $\bar{G}$  contem um CPI. Já foi visto que  $G$  e  $\bar{G}$  são ambos  $W$ -Perfeitos só se nenhum dos dois contem um CPI. Para provar a recíproca será necessário o seguinte teorema.

*Teorema III.2:* Nem  $G$  nem  $\bar{G}$  contém um CPI se e somente se:

- (i)  $G$  é composto por uma clique  $C$  e um conjunto estável  $S$ , ou
- (ii)  $G$  é composto por uma clique  $C$ , um conjunto estável  $S$  e um CII  $H$  de tamanho 5, tal que, cada vértice de  $H$  é adjacente a todos os vértices de  $C$  e a nenhum vértice de  $S$ .

*Prova:* É fácil ver que se  $G$  satisfaz (i) ou (ii) então nem  $G$  nem  $\bar{G}$  contém um CPI. Resta provar a recíproca. Seja  $G$  um grafo tal que nem  $G$  nem  $\bar{G}$  contém um CPI. Será mostrado primeiro que se  $G$  contém um  $C_5$  então satisfaz (ii). Se  $G$  contem um  $C_5$  seja  $H$  este subgrafo. Note-se que todo vértice  $x$  de  $G-H$  ou não é adjacente a nenhum vértice de  $H$  ou é adjacente a todo vértice de  $H$ , pois, caso contrário,  $H+x$  ou  $\overline{H+x}$  contem um  $C_4$ . Seja  $C$  o conjunto de vértices que são adjacentes a todo  $H$ . Seja  $S$  o conjunto de vértices não adjacentes a nenhum vértice de  $H$ .



Se algum par de vértices  $x, y \in C$  é não adjacente então  $x+y+H$  contém um  $C_4$ . Se algum par  $x, y \in S$  é adjacente então  $x+y+H$  contém um  $\bar{C}_4$ . Então vemos que  $C$  é uma clique e  $S$  é um conjunto estável, como era requerido.

Seja agora o caso no qual  $G$  não contém  $C_5$ . Seja  $C$  a clique máxima de  $G$  escolhida com a propriedade adicional de maximizar  $\sum_{x \in C} d(x)$ . Será provado que  $G-C$  é um conjunto estável.

Se não fosse, existiria alguma aresta  $xy$  em  $G-C$ . Se existem  $w, z \in C$  tal que  $xw, yz \in E(G)$ ,  $xz, yw \notin E(G)$  então  $\{x, w, z, y\}$  é um  $C_4$  em  $G$ , contradição. Então, pode-se assumir que  $x$  é adjacente a todo vértice de  $C$  que é adjacente a  $y$ . Agora, se existem  $w, z \in C$  tal que  $xw, xz \notin E(G)$  então  $\{w, x, z, y\}$  é um  $\bar{C}_4$  em  $G$ , contradição. Então  $x$  não vê, no máximo, um vértice de  $C$ . Como  $C$  é máximo,  $x$  não vê exatamente um vértice de  $C$ ; seja esse vértice  $z$ . Agora  $C-z+x$  é também uma clique;  $x$  vê  $y$  mas  $z$  não. Então pela nossa escolha de  $C$ , existe um vértice  $w$  que vê  $z$  mas não  $x$ .

Como  $C$  é máximo, existe algum vértice  $z'$  de  $C$  que não vê  $w$ . Agora,  $w$  vê  $y$  pois caso contrário  $\{w, z, x, y\}$  é um  $C_4$ . Então  $y$  não vê  $z'$  pois caso contrário  $\{w, z, z', y\}$  é um  $C_4$ . Mas então,  $\{w, z, z', x, y\}$  é um  $C_5$  em  $G$ , contradição. ■

*Corolário T III.2:* Se nem  $G$  nem  $\bar{G}$  contêm um CPI então  $G$  é W-Perfeito.

*Prova:* seja  $G$  um grafo tal que nem  $G$  nem  $\bar{G}$  contêm um CPI. Então se  $G'$  é um subgrafo induzido de  $G$ ,  $G'$  satisfaz (i) ou (ii). Se  $G'$  satisfaz (i) então todo vértice de grau mínimo em  $G'$  é *simplicial* (o vértice  $x$  é simplicial se a sua vizinhança é uma clique), então  $\chi(G) \geq \delta_{G'} + 1$ . Se  $G'$  satisfaz (ii) então  $\chi(G') = |C| + 3$  e todo vértice de  $H$  tem grau  $|C| + 2$ , então  $\chi(G) \geq \delta + 1$ . Portanto,  $\chi(G) \geq W(G)$ . ■

*Corolário CT III.2:*  $G$  e  $\bar{G}$  são ambos  $W$ -Perfeitos se e somente se nem  $G$  nem  $\bar{G}$  contem um  $CPI$ .

É interessante notar a analogia entre este último corolário e a Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos (CFGP).

A seguir serão analisadas as propriedades dos grafos que não contém  $CPI$  nem ciclo par com precisamente uma corda. Veremos que esta classe de grafos apresenta uma caracterização muito simples. Estudaremos também a classe dos grafos que não contém  $CPI$  nem  $CPCC$ . Veremos que estes grafos são  $W$ -Perfeitos. O lema seguinte será necessário para ambas as provas.

*Lema III.2:* Seja  $G$  um grafo sem  $CPI$  nem  $CPCC$ . Então todo bloco de  $G$  é ou uma clique ou é livre de triângulos.

*Prova:* Seja  $G$  um grafo sem  $CPI$  nem  $CPCC$ . Sejam  $B$  um bloco de  $G$  e  $C$  uma clique maximal de  $G$ . Se  $C \neq B$  então para cada  $x$  de  $B-C$  podemos achar dois caminhos disjuntos (em vértices) de  $x$  a  $C$ .

Escolhendo  $x$  e os caminhos  $P_1$  e  $P_2$  de maneira tal que o comprimento total dos caminhos é minimizado, podemos garantir que  $V(P_1) \cup V(P_2)$  induz um ciclo sem cordas  $H$ . Se  $H$  é um triângulo então  $H$  consiste de uma aresta de  $C$  e  $x$ . Como  $C$  é maximal, podemos escolher um vértice  $z$  de  $C$  que  $x$  não veja e então  $z+H$  é um  $CPCC$ . Esta contradição implica que  $C=B$ , como era requerido. ■

*Teorma III.3:* Um grafo  $G$  não contém ciclo par com menos de duas cordas se e somente se todo bloco de  $G$  é uma clique ou um ciclo ímpar induzido  $\geq 5$ .

*Prova:* É claro que se todo bloco de  $G$  é uma clique ou um CII então todo ciclo par em  $G$  tem pelo menos duas cordas. Basta provar que se  $G$  é um grafo sem ciclo par com menos de duas cordas então todo bloco de  $G$  é uma clique ou um CII  $\geq 5$ . Pelo Lema 2 só precisamos provar que cada bloco livre de triângulos de  $G$  é um CII.

Seja  $B$  um bloco de  $G$  livre de triângulos. Como  $B$  contém um ciclo,  $B$  deve conter um CII  $H$ . Assuma  $B \neq H$ .

Note que nenhum  $x \in B-H$  vê mais de um vértice de  $H$  pois, caso contrário  $x+H$  conteria um ciclo par com menos de duas cordas.

Agora sejam  $y \in B-H$  e  $P_1$  e  $P_2$  caminhos de  $y$  a  $H$  tais que  $|P_1| + |P_2|$  é minimizado. Seja  $u$  o extremo de  $P_1$  em  $H$  e seja  $v$  o extremo de  $P_2$  em  $H$ . Seja  $P_3$  o caminho de  $H$  entre  $u$  e  $v$  com a mesma paridade de  $P_1+P_2$ . Então  $P_1+P_2+P_3$  é um ciclo par e  $P_1+P_2+P_3$  não possui cordas, a menos que  $uv$  seja uma aresta de  $G$ . Nesse caso,  $P_1+P_2+P_3$  pode ter uma corda, uma contradição. Portanto,  $B=H$  como era requerido. ■

Para provarmos que os grafos sem nenhum CPI e sem nenhum CPCC são  $W$ -Perfeitos necessitamos do seguinte resultado:

*Teorema III.4:* Seja  $G$  um grafo sem triângulos nem CPI. Seja  $x$  um vértice de  $G$ . Então  $x$  vê todo  $G$  ou existe algum  $y$  não adjacente a  $x$  tal que  $y$  tem grau no máximo 2.

*Prova:* Assuma que o teorema é falso. Seja  $G$  um contra-exemplo minimal. Claramente  $G$  precisa ter algum vértice de grau pelo menos três. Seja  $z$  esse vértice. Seja  $S=\{u / zu \in E(G)\}$ . A seguinte afirmação implica o teorema:

*Afirmação:* Seja  $U$  uma componente de  $(G-z)-S$ . Seja  $N(U) = \{v \in S / v \text{ vê algum vértice de } U\}$ . Então  $|N(U)| \leq 2$ .

*Prova:* Seja  $U$  uma componente de  $(G-z)-S$ . Suponhamos que existe  $\{r, s, t\} \subseteq S$  tal que  $r, s$  e  $t$  vêem um vértice de  $U$ . Então, podemos escolher  $u \in U$  e os caminhos  $P_1, P_2$  e  $P_3$  de  $u$  a  $r, s$  e  $t$  respectivamente, de maneira a minimizar  $|P_1| + |P_2| + |P_3|$ . Como  $G$  não contém triângulos vemos que  $V(P_1) + V(P_2) + V(P_3)$  induz  $P_1 + P_2 + P_3$ . Agora, um dentre  $z + P_1 + P_2, z + P_2 + P_3, z + P_1 + P_3$  deve ser um CPI, contradição. ■

Note-se que  $S$  é um conjunto estável pois, caso contrário  $G$  conteria um triângulo. Se  $(G-S)-z \neq \emptyset$  pode-se ver facilmente que  $G$  não é um contra-exemplo, contradição.

**Caso 1:** Existem componentes  $U_1$  e  $U_2$  de  $(G-S)-z$  tais que  $N(U_1) \cap N(U_2) = \emptyset$ .

Sejam  $G_1 = U_1 + N(U_1) + z$  e  $G_2 = U_2 + N(U_2) + z$ . Pela hipótese indutiva, existem  $y_1 \in G_1$  e  $y_2 \in G_2$  tais que  $y_1$  tem grau no máximo 2 em  $G_1$  e  $z$  não é adjacente nem a  $y_1$  nem  $y_2$ . Segue que  $y_1 \in U_1$  e  $y_2 \in U_2$ . Então  $y_1$  e  $y_2$  ambos têm grau no máximo 2 em  $G$  e para qualquer  $x \in G$ ,  $x$  é não adjacente a pelo menos um dentre  $y_1$  e  $y_2$ . Isto é uma contradição.

**Caso 2:** Existem  $s_1, s_2$  e  $s_3 \in S$  diferentes e componentes  $U_1, U_2$  e  $U_3$  de  $(G-S)-z$  tais que  $U_1$  não vê  $(S-s_1)-s_2$ ,  $U_2$  não vê  $(S-s_1)-s_3$  e  $U_3$  não vê  $(S-s_2)-s_3$ .

Sejam  $G_1 = U_1 + s_1 + s_2 + z$ ,  $G_2 = U_2 + s_1 + s_3 + z$ ,  $G_3 = U_3 + s_2 + s_3 + z$ . Como anteriormente, seja  $y_1$  um vértice de  $G_1$  não adjacente a  $z$  e com grau no máximo 2 em  $G$ . Então  $y_1 \in U_1$  e  $y_1$  tem grau no máximo 4 em  $G$ . Além do mais, cada vértice de  $G$  é não adjacente a pelo menos um dentre  $\{y_1, y_2, y_3\}$ . Isto é uma contradição.

**Caso 3:** Existe algum  $s_1$  em  $G$  tal que  $s_1$  é não adjacente a um vértice em toda componente de  $(G-S)-z$ .

Como  $S$  é um conjunto estável,  $s_1$  vê somente  $z$  em  $G$ . Agora, para cada vértice  $x$  de  $(G-S)-s_1$ ,  $s_1$  é um vértice de grau um em  $G$  que  $x$  não vê. Então só é preciso considerar  $z$  e  $s_1$ . Seja  $G'=G-s_1$ . Dado que  $(G-S)-z \neq \emptyset$ ,  $z$  não vê todo  $G'$ . Então, existe algum  $y$  de grau no máximo 2 em  $G'$  não adjacente a  $z$ . Portanto,  $y$  é um vértice de grau no máximo 2 que não é adjacente nem a  $s_1$  nem a  $z$ . Isto é uma contradição.

**Caso 4:** Podemos enumerar  $S$  como  $\{s_1, \dots, s_k\}$  tal que

- (i) para cada  $i \neq 1$  existe uma componente  $U_i$  de  $(G-S)-z$  tal que  $U_i$  não vê  $(S-s_1)-s_2$ , e
- (ii)  $s_1$  é adjacente a um vértice em toda componente de  $(G-z)-S$ .

Para cada  $i$  seja  $G_i = z + s_1 + s_i + U_i$ . Seja  $y_i$  um vértice de grau 2 em  $G_i$  que não é adjacente a  $z$ . Então  $y_i \in U_i$ . É claro que  $y_i$  também tem grau 2 em  $G$ . Além do mais, cada vértice de  $G-s_1$  é não adjacente a pelo menos um dos  $y_i$ . Só resta trabalhar com  $s_1$ . É claro que  $s_1$  tem grau pelo menos 3 em  $G$ . Então podemos considerar  $z' = s_1$  e  $S' = \{v/s_1 v \in E(G)\}$ . Segue que existe algum vértice  $y$  de  $G$  de grau no máximo 2 e não adjacente a  $s_1$ . Então, todo vértice de  $G$  é não adjacente a algum  $y$  de grau no máximo 2. Isto é uma contradição.

Portanto, dado que  $(G-s)-z \neq \emptyset$ , algum destes quatro casos é verdadeiro, obtendo-se assim uma contradição. ■

O Lema III.2 e o Teorema III.4 serão utilizados para provar o seguinte:

*Teorema 5:* Todo grafo sem CPI e sem CPCC é W-Perfeito.

*Prova:* Seja  $G$  um grafo sem CPI e sem CPCC. É claro que é suficiente provar que  $\chi(G) \geq \delta_G + 1$  para todo subgrafo induzido  $G'$  de  $G$ . Seja  $G'$  um subgrafo induzido qualquer de  $G$ .

Definimos a árvore de blocos de  $G'$  da seguinte maneira. Os seus vértices são os blocos de  $G'$  e dois blocos são adjacentes se sua interseção for não vazia. Agora, seja  $B$  uma folha da árvore de blocos de  $G'$ . Seja  $x$  o único vértice de  $B$  em algum outro bloco de  $G'$ .

Pelo Lema III.2,  $B$  é uma clique ou livre de triângulos. Se  $B$  é uma clique seja  $y$  um vértice qualquer de  $B-x$ . Claramente  $\delta_G + 1 \leq d(y) + 1 \leq |B| \leq \chi(G')$ . Se  $B$  não é uma clique então  $B$  é um grafo dois-conexo sem triângulos e sem CPI. Então,  $B$  contém um CII  $H$ . Então  $x$  não é adjacente a todo  $B$ . Pelo Teorema III.4,  $B$  contém um vértice  $y$  não adjacente a  $x$  tal que  $y$  tem grau 2. Agora,  $\delta_G + 1 \leq d(y) + 1 \leq 3 \leq \chi(H) \leq \chi(G')$ . Segue que  $\chi(G') \geq \delta_G + 1$  para cada subgrafo induzido  $G'$  como era requerido. ■

Depois de termos visto alguns conceitos sobre grafos Perfeitos e grafos W-Perfeitos, surge naturalmente a seguinte pergunta:

Quais são os grafos que são Perfeitos e W-Perfeitos?

Claramente estes grafos não podem ter como subgrafos induzidos nenhum tipo de ciclo (par ou ímpar) de tamanho  $>3$ . Os grafos com essa propriedade (não conter ciclos induzidos  $>3$ ) são conhecidos como *grafos cordais* ou *triangularizados*.

G.A.Dirac (1961) mostrou que em todo grafo triangularizado existe um vértice de grau mínimo cuja vizinhança é uma clique. Segue então o seguinte teorema:

*Teorema III.6:* Os grafos triangularizados são Perfeitos e W-Perfeitos.

*Prova:* Seja  $G$  um grafo triangularizado.

*Afirmção 1:*  $\omega(G) \geq W(G)$ .

*Prova:* Seja  $H'$  o subgrafo de  $G$  onde se realiza o  $\max\{\delta(H)/H \subseteq G\}$ , e seja  $v$  o vértice de grau mínimo em  $H'$ . Ou seja,  $W(G) = d_{H'}(v) + 1$ . Pelo resultado de Dirac, existe no grafo  $H'$  um vértice de grau mínimo cuja vizinhança é uma clique. Ou seja, existe em  $H'$  um vértice  $r$  tal que  $V(r)$  é uma clique  $Cl(r)$ . Temos então que:

$$W(G) = d_{H'}(v) + 1 = d_{H'}(r) + 1 = |Cl(r)| \leq \omega(G)$$

*Afirmção 2:*  $\omega(G) \leq W(G)$ .

*Prova:* Seja o subgrafo  $H''$  que induz a clique máxima de  $G$ . Seja  $s$  um vértice qualquer de  $H''$ . Temos que:

$$\omega(G) = d_{H''}(s) \leq W(G)$$

Das afirmações 1 e 2 segue que se  $G$  é triangularizado, então  $\omega(G) = W(G)$ .

É claro que, para qualquer grafo  $G$ ,  $\chi(G) \geq \omega(G)$ , e vimos que  $X(G) \leq W(G)$ . Então  $W(G) \geq \chi(G) \geq \omega(G)$ . Como todo subgrafo induzido de um grafo triangularizado é triangularizado, temos que, se  $G$  é triangularizado,  $W(F) = \omega(F) = \chi(F)$ ,  $\forall F \subseteq G$ . Ou seja,  $G$  é Perfeito e W-Perfeito. Aliás, vemos que  $G$  é triangularizado se e somente se  $\forall F \subseteq G$ ,  $\chi(F) = \omega(F) = W(F)$ . ■

## CAPÍTULO IV

PLANARIDADE, PERFEIÇÃO, CICLOS INDUZIDOS



## PLANARIDADE, PERFEIÇÃO, CICLOS INDUZIDOS

Seja  $G$  um grafo planar e  $R$  uma representação plana de  $G$ , num plano  $P$ . Então as linhas de  $R$  dividem  $P$  em regiões, as quais são denominadas *faces* de  $R$ . Observe-se que existe sempre exatamente uma região não limitada; esta é chamada *face externa*. I.Fáry (1948) provou que todo grafo planar admite uma representação plana em que todas as linhas são retas.

Todas as representações planas de um grafo possuem sempre o mesmo número de faces. Logo este número constitui também um invariante do grafo, sendo denotado por  $f$ . Os números de vértices, arestas e faces de um grafo planar não são independentes. O teorema seguinte os relaciona.

*Teorema IV.1:* Seja  $G$  um grafo planar conexo. Então  $n+f=m+2$ .

*Prova:* Uma representação conveniente plana de  $G$  corresponde a um poliedro com  $n$  vértices,  $m$  arestas e  $f$  faces. A expressão acima nada mais é do que a *fórmula de Euler* para poliedros e será provada por indução no número de faces  $f$ .

Uma aresta  $e$  de  $G$  será denominada *aresta de corte* de  $G$  se a remoção de  $e$  aumentar o número de componentes conexas de  $G$ .

Se  $f=1$ , então toda aresta de  $G$  é uma aresta de corte. Como  $G$  é conexo,  $G$  é uma árvore. Portanto,  $m=n-1$  e o teorema é válido. Suponha agora que o teorema é correto para todos os grafos planares conexos com menos do que  $r$  faces. Seja  $G$  um grafo planar conexo com  $r \geq 2$  faces. Seja  $e$  uma aresta de  $G$  que não é uma aresta de corte. Então  $G-e$  é um grafo planar conexo e tem  $r-1$  faces, já que as duas faces de  $G$  separadas por  $e$  formam agora uma face só no grafo  $G-e$ .

Pela hipótese indutiva

$$n(G-e) - m(G-e) + f(G-e) = 2$$

Usando as relações

$$n(G-e) = n(G)$$

$$m(G-e) = m(G) - 1$$

$$f(G-e) = f(G) - 1$$

Obtemos

$$n(G) - m(G) + f(G) = 2$$

O teorema é válido pelo princípio de indução. ■

Os vértices e arestas que formam uma face de um grafo planar constituem o *contorno* de  $f$ , representado por  $b(f)$ .

Se  $G$  é conexo,  $b(f)$  pode ser visto como um caminho fechado no qual cada aresta de corte de  $G$  em  $b(f)$  é percorrida duas vezes; quando  $b(f)$  não possui arestas de corte é um ciclo de  $G$ .

Uma face  $f$  será dita *incidente* aos vértices e arestas do seu contorno. Se  $e$  é uma aresta de corte de um grafo planar, então só uma face é incidente a  $e$ ; caso contrário, existem duas faces incidentes a  $e$ . Diremos também que uma aresta *separa* as faces a ela incidentes. O grau  $d(f)$  de uma face  $f$  é o número de arestas às quais ela é incidente (ou seja, o número de arestas em  $b(f)$ ), sendo as arestas de corte contadas duas vezes.

Dado um grafo planar  $G$ , pode-se definir um outro grafo  $G^*$  da seguinte maneira: para cada face  $f$  de  $G$  existe um vértice  $f^*$  em  $G^*$ , e para cada aresta  $e$  de  $G$  existe uma aresta  $e^*$  em  $G^*$ ; dois vértices  $f^*$  e  $g^*$  são ligados por uma aresta  $e^*$  em  $G^*$  se e somente se as suas correspondentes faces  $f$  e  $g$  estão separadas pela aresta  $e$  em  $G$ . O grafo  $G^*$  é chamado de *dual* de  $G$  e é fácil ver que o dual  $G^*$  de um grafo planar  $G$  também é planar.

As seguintes relações são consequência direta da definição de  $G^*$ :

$$n(G^*) = f(G)$$

$$m(G^*) = m(G)$$

$$d(f^*) = d(f) \text{ para toda } f \in F(G)$$

Vejam agora outras relações entre os parâmetros de um grafo planar.

*Teorema IV.2:* Se  $G$  é um grafo planar, então  $\sum_{f \in F} d(f) = 2m$ .

*Prova:* Seja  $G^*$  o dual de  $G$ . Então

$$\sum_{f \in F} d(f) = \sum_{f^* \in V(G^*)} d(f^*) = 2m(G^*) = 2m(G) \quad \blacksquare$$

*Teorema IV.3:* Se  $G$  é um grafo planar com  $n \geq 3$ , então  $m \leq 3n - 6$ .

*Prova:* É suficiente mostrar que o teorema é válido para grafos conexos. Seja então  $G$  um grafo planar conexo com  $n \geq 3$ . Então  $d(f) \geq 3$  para toda  $f \in F$  e

$$\sum_{f \in F} d(f) \geq 3f$$

Pelo Teorema IV.2

$$2m \geq 3f$$

Então pelo Teorema IV.1

$$n - m + 2m/3 \geq 2$$

ou

$$m \leq 3n - 6$$

■

*Corolário T IV.3:* Se  $G$  é um grafo planar simples, então  $\delta \leq 5$ .

*Prova:* é trivial para  $n=1$  e  $n=2$ . Para  $n \geq 3$  temos que:

$$\delta m \leq \sum_{v \in V} d(v) = 2m \leq 6n - 12$$

Segue que  $\delta \leq 5$ .

■

Uma questão básica é naturalmente a da caracterização dos grafos planares, questão esta que foi brilhantemente resolvida no ano de 1930 por C.Kuratowski, dando lugar ao seguinte teorema conhecido como Teorema de Kuratowski (1930), e cuja prova pode-se encontrar facilmente na literatura.

Denomina-se *subdivisão de uma aresta  $vw$*  de um grafo  $G$  a uma operação que transforma  $vw$  num caminho  $v, z_1, \dots, z_k, w$ , sendo  $k \geq 0$ , onde os  $z_i$  são vértices de grau 2 acrescentados a  $G$ .

*Teorema IV.4 (Teorema de Kuratowski (1930)):* um grafo é planar se e somente se não contém como subgrafo uma subdivisão de  $K_5$  ou  $K_{3,3}$ .

A partir do Teorema IV.4 construíram-se os primeiros algoritmos para reconhecer grafos planares. Atualmente são conhecidos algoritmos de complexidade  $O(n)$  para esta finalidade (ver o algoritmo de J.E.Hopcroft e R.E.Tarjan, 1974).

O resultado mais polémico relativo a grafos planares é o conhecido como *Teorema das quatro cores*, que diz que é possível colorir os vértices de qualquer grafo planar de maneira tal que nenhum par de vértices adjacentes recebam a mesma cor utilizando-se, para tal fim, um máximo de 4 cores. Uma prova para este teorema foi fornecida por K.Appel e W.Haken (1977a) e (1977b). Importantes pesquisadores da área, dentre os quais se encontra o Professor W.T.Tutte (possivelmente o maior conhecedor do problema no mundo) não aceitam a validade da prova e continuam trabalhando no problema.

No que diz respeito a planaridade e perfeição, foram obtidos dois importantes resultados. O principal deles é a prova da validade da Conjectura Forte dos Grafos Perfeitos para grafos planares, devida a A.Tucker (1973), e da qual damos um resumo a seguir.

*Teorema IV.5:* Um grafo planar é perfeito se e somente se não contiver como subgrafo induzido um ciclo impar de comprimento  $\geq 5$ .

Para a prova do Teorema IV.5 serão necessários alguns lemas, definições e teoremas; as demonstrações de alguns deles serão dadas neste capítulo.

Um grafo é dito *minimalmente imperfeito (m.i.)* se ele não for perfeito mas todo subgrafo induzido próprio dele o é.

Um grafo é dito *Berge* se ele não tiver como subgrafo induzido nenhum ciclo ímpar  $\geq 5$  e nenhum complemento de um ciclo ímpar  $\geq 5$ .

A partir destas duas definições, podemos enunciar a CFGP de duas outras maneiras alternativas:

a) CFGP: os únicos grafos minimalmente imperfeitos são os ciclos ímpares de tamanho  $\geq 5$  e os seus complementos.

b) CFGP: um grafo  $G$  é perfeito se e somente se é Berge.

Os pesquisadores da área de grafos perfeitos têm desenvolvido uma lista substancial de propriedades dos grafos minimalmente imperfeitos. Infelizmente essa lista não conduziu, pelo menos até agora, a uma prova da CFGP. Mas permitiu provar a conjectura para determinados conjuntos restritos de grafos; por exemplo, os grafos planares.

Provaremos que todo grafo planar Berge é perfeito considerando as propriedades dos grafos Berge minimalmente imperfeitos. Toda propriedade dos grafos *m.i.* é também uma propriedade dos grafos Berge minimalmente imperfeitos (*B.m.i.*). Mas existem algumas propriedades dos grafos *B.m.i.* que não são válidas para os grafos *m.i.*. Por exemplo, a propriedade de ter número clique  $\geq 3$ . (Claramente, se a CFGP for verdadeira, os grafos *B.m.i.* simplesmente não existiriam).

*Teorema IV.6 (A.Tucker, 1977):* Nenhum grafo *B.m.i.* tem um conjunto de corte que induz um conjunto estável.

*Observação:* Em todo ciclo induzido ímpar, qualquer conjunto estável é um conjunto de corte.

*Teorema IV.7 (A.Tucker, 1977):* Se  $G$  é um grafo *B.m.i.* e alguma aresta de  $G$ ,  $xy$  não for extensível a um triângulo, o grafo  $G-xy$  é também minimalmente imperfeito e Berge.

*Observação:* Nenhuma aresta de um  $CII \geq 5$  é extensível a um triângulo, mas, se alguma aresta for dele removida, obtém-se um grafo perfeito.

Como já foi mencionado e é simples verificar, o número clique de qualquer grafo *B.m.i.* é  $\geq 3$ . Vejamos agora que esse número tem que ser exatamente 3.

*Lema IV.1:* Todo grafo *B.m.i.* tem número clique =3.

*Prova:* No Corolário do Teorema 3 vimos que se  $G$  é um grafo planar simples, então  $\delta(G) \leq 5$ . E.Olaru (1969) provou que, num grafo *m.i.* com número clique  $\omega$ , todo vértice tem grau pelo menos  $2\omega-2$ . Juntando estes dois resultados obtemos uma prova do Lema IV.1. ■

Vamos considerar agora algumas propriedades dos grafos com número clique =3.

*Lema IV.2:* Seja  $G$  um grafo *m.i.* tal que  $\omega(G)=3$ . Para todo vértice  $x$  de  $G$ , o subgrafo induzido por  $N(x)$  (vizinhança de  $x$ ), tem exatamente 3 arestas.

*Prova:* M. Padberg (1974) provou que se  $G$  é um grafo *m.i.*, todo vértice de  $G$  está em precisamente  $\omega$  cliques de tamanho  $\omega$  e em  $\alpha$  conjuntos estáveis de tamanho  $\alpha$ . No nosso caso então, todo vértice de  $G$  está em precisamente 3 triângulos. ■

*Lema IV.3:* Seja  $G$  um grafo *m.i.* com número clique  $=3$ . Seja  $x$  um vértice qualquer de  $G$ . Em qualquer 3-coloração de  $G-x$ ,  $N(x)$  contém uma aresta do tipo  $\{1,2\}$ , uma  $\{1,3\}$  e uma  $\{2,3\}$ .

*Prova:* Assuma que  $N(x)$  não contém uma aresta  $\{1,2\}$ . Seja  $F = \{\text{vértices em } G-x \text{ com cor } 1 \text{ ou } 2\}$ . Claramente,  $F$  não contém triângulos e é, portanto, bipartite. Então podemos 2-colorir  $F$ . Colorindo o resto de  $G$  com uma terceira cor, obtemos uma 3-coloração de  $G$ . Esta contradição implica que  $N(x)$  contém uma aresta  $\{1,2\}$ . O Lema 3 fica provado por simetria. ■

Os Lemas IV.2 e IV.3 são válidos para todos os grafos *m.i.* com número clique  $=3$ . Vamos restringir a nossa atenção agora para os grafos planares. Neste contexto, é bom ter presente o resultado devido a Fáry acima mencionado: todo grafo planar pode ser imerso no plano de maneira tal que todas as suas arestas sejam linhas retas. (Este resultado não é estritamente necessário para a demonstração mas facilita a sua compreensão).



*Lema IV.4:* Seja  $G$  um grafo planar minimalmente imperfeito imerso no plano de maneira tal que as suas arestas sejam linhas retas. Seja  $x$  um vértice de  $G$ . Enumerem-se os vizinhos de  $x$  como  $v_1, v_2, \dots, v_{d(x)}$ , segundo uma ordem que estão dispostos na imersão, em torno de  $x$ . Então, as únicas arestas possíveis entre vizinhos de  $x$  são  $v_i v_{i+1}$  para  $i=1, \dots, d(x)-1$  e  $v_1 v_{d(x)}$ .

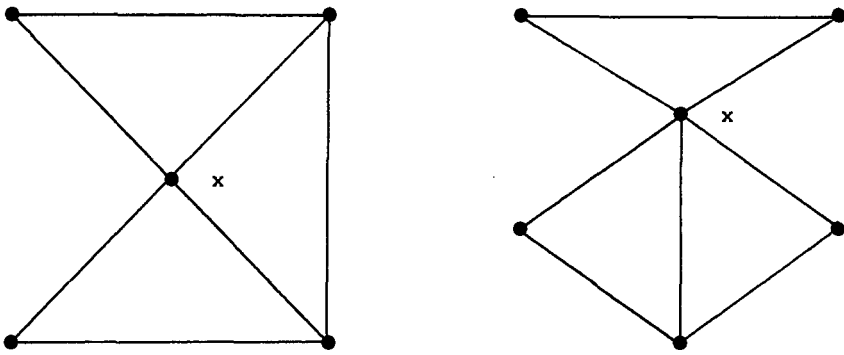
*Prova:* Assuma que  $v_i v_j$  é uma aresta onde  $j \neq i+1$ ,  $j \neq i-1$  (soma módulo  $d(x)$ ). Dado que as arestas não podem se cruzar,  $\{x, v_i, v_j\}$  é um conjunto de corte de  $G$ . Mas  $\{x, v_i, v_j\}$  é uma clique.

Vejamos agora que nenhum grafo *m.i.* pode ter um conjunto de corte clique. Para tal assuma que esta última afirmação seja falsa. Seja então  $G$  um grafo *m.i.* com um conjunto de corte clique  $C$ . Seja  $A$  uma componente de  $G-C$  e seja  $B=G-C-A$ . Tanto  $C+A$  quanto  $C+B$  tem colorações boas ( $\chi=\omega$ ). Em ambas as colorações, cada cor aparece no máximo uma vez na clique  $C$ . Então, podemos re-enumerar as cores numa dessas colorações de maneira tal que as duas colorações coincidam na clique  $C$ . Tomando a união das duas colorações, obtemos uma coloração boa de  $G$ , contradizendo assim fato de  $G$  ser *m.i.* ■

Estamos agora em condições de dar uma prova do Teorema IV.5.

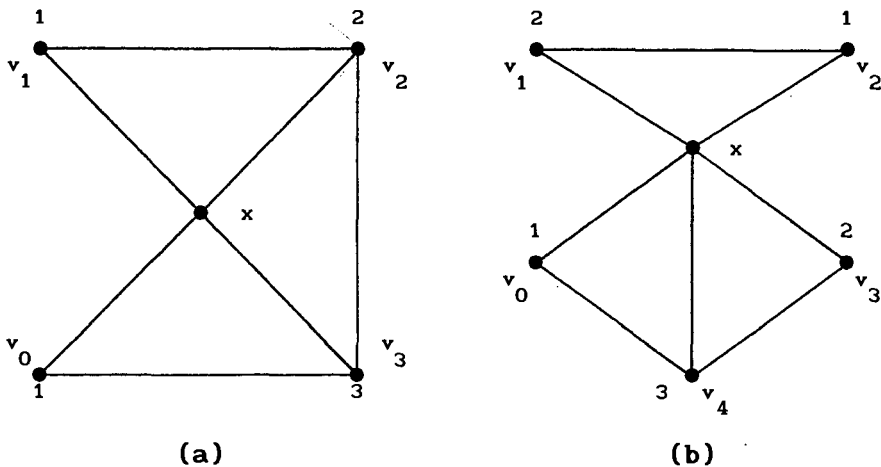
*Prova do Teorema IV.5:* Provaremos então que todo grafo planar Berge é perfeito.

Assuma que o teorema é falso. Ou seja, existe um grafo planar *B.m.i.* Pelo Teorema 7, podemos remover arestas deste grafo até obtermos um grafo planar *B.m.i.*  $G$  tal que toda aresta de  $G$  é extensível a um triângulo. Agora, pelo Lema IV.1, sabemos que  $\omega(G)=3$ . Pelo Corolário T IV.3, algum vértice  $x$  de  $G$  tem grau no máximo 5. Segue que, pelos lemas IV.2 e IV.4,  $x+V(x)$  induz um dos grafos representados na Figura (IV.1).



F I G U R A IV.1

Considere uma 3-coloração de  $G-x$ . Combinando os lemas IV.3 e IV.4 vemos que  $x+V(x)$  induz um dos três subgrafos coloridos representados na Figura (IV.2), onde os vértices estão enumerados como no Lema IV.4.



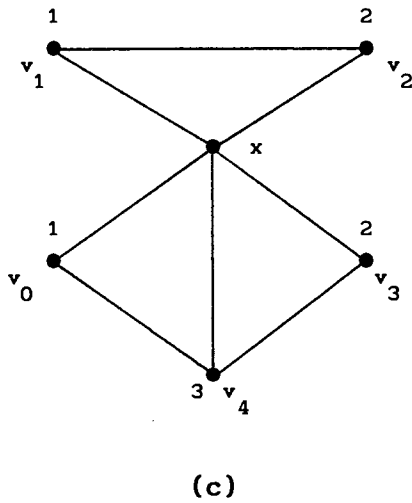


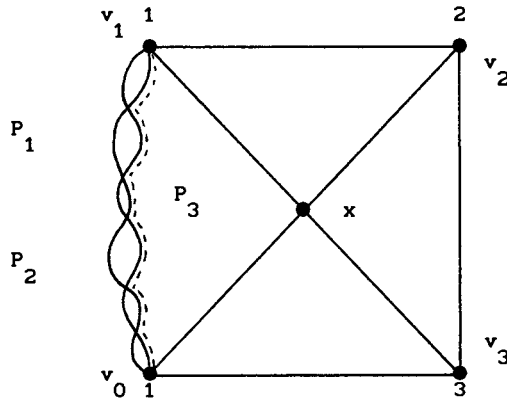
FIGURA IV.2

Será mostrado agora que nenhuma destas três colorações é possível. Para isso será necessária a seguinte definição:

*Definição:* Sejam  $i$  e  $j$  cores diferentes na nossa coloração de  $G$ . Definimos  $G_{ij}$  como o subgrafo induzido por aqueles vértices coloridos com a cor  $i$  e os coloridos com a cor  $j$ .

**Caso 1):**  $x+V(x)$  induz o grafo representado na Figura (IV.2.a).

É claro que  $v_1$  e  $v_0$  devem estar conectados no grafo  $G_{12}$ . Caso contrário poderíamos intercambiar as cores da componente de  $G_{12}$  que contem  $v_0$  obtendo-se uma coloração de  $G-x$ , o que contradiz o Lema IV.3. Seja  $P_1$  o caminho mais curto desde  $v_1$  a  $v_0$  no grafo  $G_{12}$ . Claramente  $P_1$  é par. Agora,  $P_1$  não pode incluir  $v_2$  pois, caso contrário,  $P_1-v_1+x$  seria um CPI. Aliás,  $v_2$  não pode ver nenhum vértice de  $P_1-v_1$  pela mesma razão. Usando argumentos análogos, podemos ver que existe um caminho  $\{1,3\}$  (caminho composto soamente por vértices com as cores 1 e 3),  $P_2$ , desde  $v_1$  a  $v_0$  tal que  $v_3$  não vê nenhum vértice de  $P_2-v_0$ . Então, temos a situação representada na Figura (IV.3).



F I G U R A IV.3

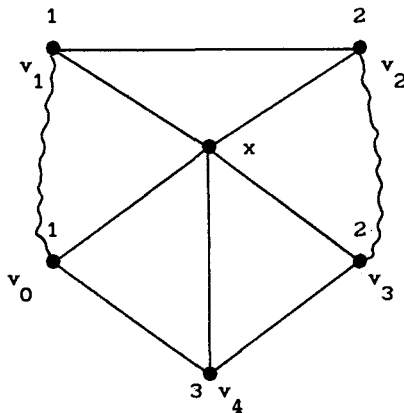
Obtemos então um novo caminho  $P_3$  a partir de  $P_1$  e  $P_2$  começando ao longo do caminho interior e toda vez que chegamos a uma interseção continuamos ao longo do caminho interior.

Note que, dado que  $P_3$  é o caminho interior,  $v_2$  e  $v_3$  só podem ver os vértices de  $P_3$  onde  $P_1$  e  $P_2$  se interceptam. Mas, dado que  $v_2$  não vê  $P_1$  e  $v_3$  não vê  $P_2$ , concluímos que não existe aresta de  $\{v_2, v_3\}$  a  $P_3$ . Agora obtemos um caminho sem cordas  $P$  a partir de  $P_3$  substituindo partes do caminho por cordas quando é necessário. Se  $P$  é ímpar, então  $P+x$  é um CII. Caso contrário,  $P+v_3+v_2$  é um CII. Em ambos os casos contradizemos a hipótese de ser  $G$  um grafo Berge. Então este caso não pode acontecer.

**Caso 2:**  $x+V(x)$  induz o grafo representado na Figura (IV.2.b) ou na Figura (IV.2.c).

Neste caso, como no caso 1, podemos encontrar um caminho  $\{1,2\}$  (caminho composto soamente por vértices com as cores 1 e 2),  $P_1$ , entre os dois vértices de  $V(x)$  com a cor 1.

Como anteriormente, este caminho não usa nenhum vértice de  $V(x)$  como vértice interior. De maneira similar, podemos encontrar um caminho  $\{1,2\}$ ,  $P_3$ , entre os dois vértices de  $V(x)$  com a cor 2 que não usa nenhum vértice de  $V(x)$  como vértice interior. Se estes dois caminhos se interceptam, teríamos um caminho  $\{1,2\}$  entre dois vértices não adjacentes de  $V(x)$  de cores diferentes com todos os seus pontos interiores fora de  $V(x)$ . Este caminho formaria um CII com  $x$ . Então, os dois caminhos não se interceptam. Em particular, isso implica que a vizinhança de  $x$  não pode ser do tipo da representada na Figura (IV.2.b), e devemos ter então a situação representada na Figura (IV.4).



F I G U R A IV.4

Note que não pode existir nenhuma aresta entre  $P_1$  e  $P_3$  pela mesma razão. Agora, como no caso 1, podemos encontrar um caminho  $\{1,3\}$ ,  $P_2$ , desde  $v_0$  a  $v_1$  tal que  $v_4$  não vê  $P_2 - v_0$  e construir um caminho  $P$  a partir de  $P_1$  e  $P_2$ . Similarmente, podemos encontrar um caminho  $\{2,3\}$  (caminho composto soamente por vértices com as cores 2 e 3),  $P_4$ , desde  $v_2$  a  $v_3$  tal que  $v_4$  não vê  $P_4 - v_3$  e construir um caminho  $P'$  a partir de  $P_3$  e  $P_4$ .

Agora claramente,  $P$  e  $P'$  não se interceptam e não existe nenhuma aresta entre estes dois caminhos. Também, dado que  $v_4$  não vê nem  $P_2 - v_0$  nem  $P_4 - v_3$ ,  $v_4$  não vê  $P + P' - v_3 - v_0$ . Agora, se  $P$  é ímpar então  $P + x$  é um CII.

Similarmente, se  $P'$  é ímpar então  $P'+x$  é um CII. De qualquer maneira, se  $P'$  e  $P$  são ambos pares, então  $P+v_4+P'$  formam um CII. Esta contradição final completa a prova do teorema ■

No capítulo seguinte será desenvolvido um algoritmo polinomial para testar a existência de ciclos induzidos pares em grafos planares. Claramente, trabalharemos com grafos planares conexos e não perfeitos. Pois, o caso de grafos desconexos se reduz a aplicar o algoritmo a cada uma das componentes conexas do grafo, e o caso do grafo planar ser perfeito se reduz a testar se ele é triangularizado ou não. Se não for triangularizado implicará que tem algum subgrafo que induz um ciclo par.

## CAPÍTULO V

UM ALGORITMO DE COMPLEXIDADE  $O(n^3)$   
PARA TESTAR A EXISTÊNCIA  
DE CICLOS INDUZIDOS PARES  
EM GRAFOS PLANARES

## UM ALGORITMO DE COMPLEXIDADE $O(n^3)$ PARA TESTAR A EXISTENCIA DE CICLOS INDUZIDOS PARES EM GRAFOS PLANARES

A ideia central do algoritmo será a de efetuar no grafo planar dado  $G$ , uma seqüência de operações de corte, acrescentando aos grafos obtidos depois de cada corte um conjunto de vértices artificiais, visando a preservar, nos grafos novos, a paridade dos ciclos induzidos existentes no grafo original. Essas operações de corte serão efetuadas também nos grafos obtidos após cada corte até obter um conjunto de grafos "não separáveis". Caso não tenha sido achado algum ciclo induzido par no decorrer das sucessivas operações de corte, será provado que o grafo original  $G$  não possui como subgrafo induzido algum ciclo par se e soamente se, cada um dos grafos não separáveis obtidos, for isomorfo a algum dos grafos de um conjunto de 16 grafos especiais.

### CORTES CCC, C2, C3.1 E C3.2

Seja um grafo planar  $G$  no qual desejamos testar se existe ou não um ciclo par como subgrafo induzido.

Caso  $G$  possua algum conjunto de corte clique (CCC)  $C$ , separamos o grafo original nos grafos  $G_i$  induzidos pelos grafos resultantes da operação  $(G - C)$ , união  $C$ . Ou seja, os nossos novos grafos de trabalho são  $(G_i \cup C)$ ,  $i=1\dots s$ , sendo  $s$  o número de grafos resultantes da operação  $(G - C)$ .

A motivação para realizar esta operação é a de trabalhar com grafos com estrutura mais simples, estando justificada pelo fato de todo ciclo induzido de tamanho maior ou igual a três possuir no máximo uma aresta pertencente a um subgrafo completo.

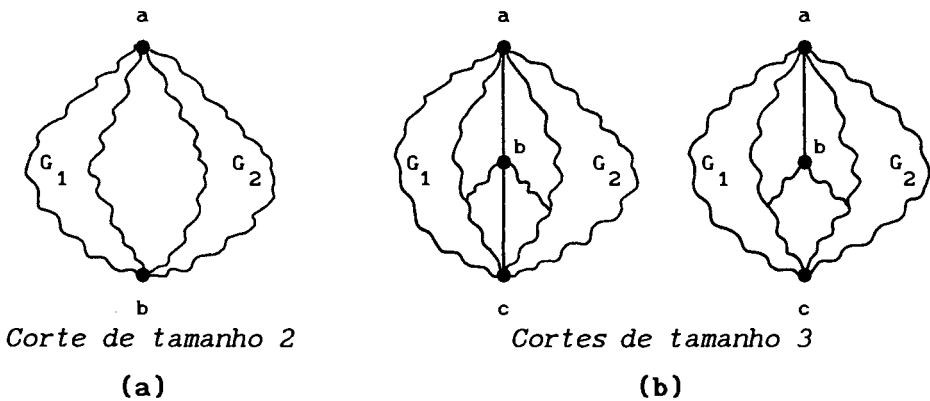


Ou seja, qualquer ciclo induzido (em particular qualquer ciclo induzido par) presente no grafo original  $G$ , estará presente em algum dos grafos  $(G_1 \cup C)$ .

Esta operação feita no grafo  $G$  com os conjuntos de corte clique é realizada também em todos os grafos obtidos como produto dela, e assim por diante, até ficarmos com um conjunto de grafos sem conjuntos de corte clique.

Seja agora um grafo  $G$  sem conjuntos de corte clique.

Com o objetivo de simplificar ainda mais a estrutura dos nossos grafos de trabalho, serão efetuados no grafo  $G$ , assim como em todos os grafos resultantes, operações de corte especiais com conjuntos de corte de tamanho dois (dois vértices sem aresta, pois o grafo  $G$  já não possui conjuntos de corte completos) e de tamanho três (com uma aresta ou com duas), Figura (V.1), acrescentando aos grafos assim obtidos, vértices artificiais que preservarão, nos novos grafos, a paridade dos ciclos induzidos existentes no grafo original  $G$ .



F I G U R A V.1

**CORTES DE TAMANHO 2 E 3 - VÉRTICES ARTIFICIAIS**

**Corte de tamanho dois ( C2 ); vértices artificiais:**

Seja um grafo  $G$  sem CCC. Seja um conjunto de corte  $C2$  de tamanho 2 (vértices  $a$  e  $b$ ).

É claro que se  $(G - C2)$  tiver mais de duas componentes, o grafo  $G$  terá como subgrafo induzido um ciclo par (CPI), pois a existência de mais de duas componentes em  $(G - C2)$ , implica a existência de mais de dois caminhos induzidos entre os vértices  $a$  e  $b$  sem cordas entre eles. Entre mais de dois caminhos induzidos sempre existem dois com a mesma paridade, que, pelo fato de não possuir cordas entre eles, constituirão um CPI.

Sejam então  $G'_1$  e  $G'_2$  os grafos obtidos a partir de  $G$  mediante a operação  $(G - C2)$  e,  $G_1$  e  $G_2$ , os grafos obtidos a partir de  $G'_1$  e  $G'_2$ , acrescentando a cada um deles, o conjunto de corte  $C2$  (vértices  $a$  e  $b$ ) e um conjunto de vértices artificiais para preservar a paridade dos ciclos induzidos existentes no grafo original  $G$ . Os vértices artificiais serão acrescentados com o seguinte critério: sejam  $P1$  e  $P2$  caminhos induzidos entre os vértices  $a$  e  $b$ , nos grafos  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente, por exemplo, os respectivos caminhos mais curtos. É claro que, se as paridades de  $P1$  e  $P2$  forem iguais, temos um CPI formado por  $(P1 \cup P2)$ . Sejam então  $P1$  e  $P2$  com paridades diferentes, por exemplo,  $P1$  par e  $P2$  ímpar. Os grafos  $G_1$  e  $G_2$  serão os seguintes:

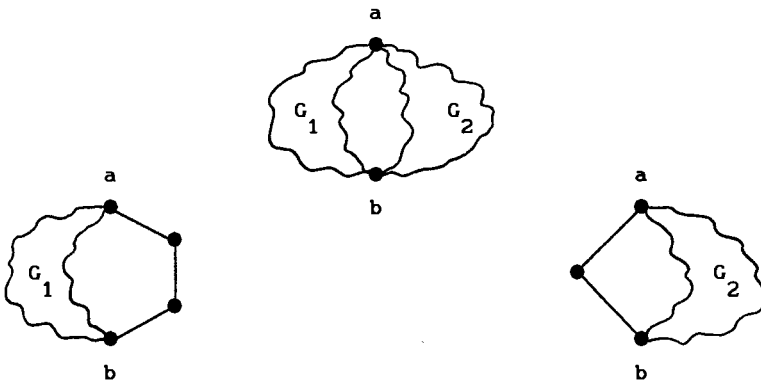


FIGURA V.2

Se existia no grafo original  $G$  um ciclo par através do corte  $C_2$ , ou seja, um caminho induzido ímpar (par) em  $G_1$  e outro caminho induzido ímpar (par) em  $G_2$ , este ciclo estará presente em  $G_1$  ( $G_2$ ). Os ciclos induzidos pares presentes em  $G$  que utilizam vértices só de  $G'_1 + \{a, b\}$  ou só de  $G'_2 + \{a, b\}$ , continuam presentes nos grafos  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente.

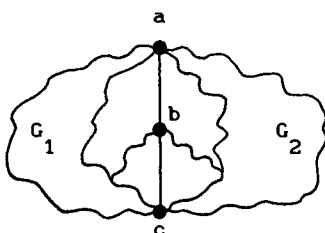
A mesma operação é repetida com os grafos obtidos depois do corte com o conjunto  $C_2$ , e assim por diante até obter um conjunto de grafos sem cortes de tamanho dois. É importante aclarar que ficam proibidos os cortes onde algum dos grafos resultantes  $G'_1 + C_2$  ou  $G'_2 + C_2$ , for isomorfo a algum dos grafos da Figura (V.3), caso contrário continuaríamos cortando indefinidamente depois de acrescentar a algum corte os correspondentes vértices artificiais.



FIGURA V.3

## CORTES DE TAMANHO 3 - VÉRTICES ARTIFICIAIS

Corte de tamanho 3 tipo 1 ( C3.1 ) ( duas arestas ):



F I G U R A V.4

Seja agora um grafo  $G$  sem CCC e sem C2. Seja um conjunto de corte C3.1 formado pelos vértices  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e as arestas  $ab$ ,  $bc$  no grafo  $G$ , Figura (V.4).

Analogamente ao caso dos cortes C2, se  $(G - C3.1)$  tiver mais de duas componentes, o grafo  $G$  terá como subgrafo induzido um CPI. Vamos supor então que temos só duas componentes  $G'_1$  e  $G'_2$ , resultantes da operação  $(G - C3.1)$ .

Sejam  $G_1$  e  $G_2$ , os grafos obtidos a partir de  $G'_1$  e  $G'_2$ , acrescentando a cada um deles, o conjunto de corte C3.1 e vértices artificiais com o seguinte critério: sejam P1 e P2 caminhos induzidos entre os vértices  $a$  e  $c$ , que não passam pelo vértice  $b$ , nos grafos  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente. Seja, por exemplo, P1 par e P2 impar. Os grafos  $G_1$  e  $G_2$  serão os seguintes:

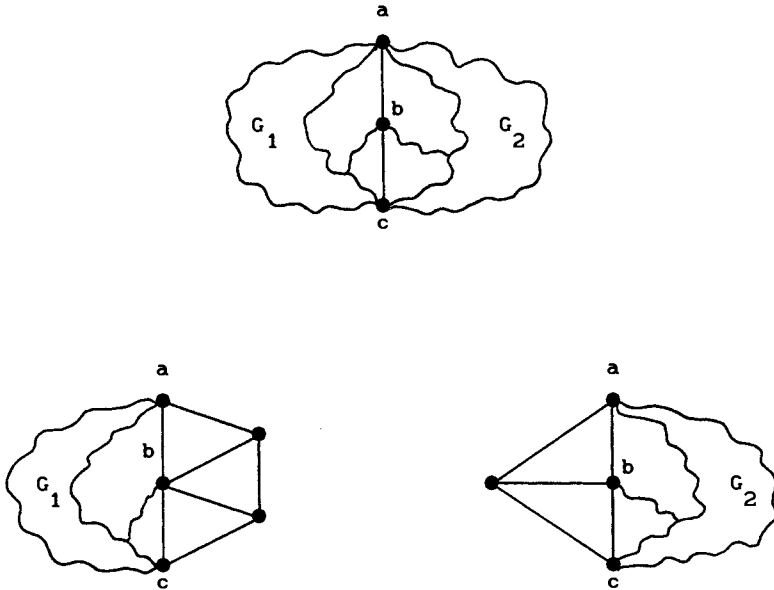


FIGURA V.5

Assim sendo, se existia um CPI em  $G$  através do corte C3.1, ou seja, um caminho induzido impar (par) em  $G_1$  e outro caminho induzido impar (par) em  $G_2$ , este ciclo estará presente em  $G_1$  ( $G_2$ ). Todos os outros ciclos induzidos pares presentes em  $G$  (os que utilizam só vértices de  $G'_1 \cup C3.1$  ou  $G'_2 \cup C3.1$ ), estarão presentes nos grafos  $G_1$  e  $G_2$ , respectivamente.

A mesma operação é repetida com os grafos obtidos depois do corte no grafo  $G$  com o conjunto C3.1, e assim por diante até obter um conjunto de grafos sem conjuntos de corte tipo C3.1 (e sem cortes tipo C2 pois o grafo original  $G$  já não os possuía). Ficam proibidos agora os cortes com conjuntos tipo C3.1 onde algum dos grafos resultantes  $G'_1 + C3.1$  ou  $G'_2 + C3.1$  for isomorfo a algum dos grafos da Figura (V.6).



FIGURA V.6

Corte de tamanho 3 tipo 2 (C3.2) ( uma aresta ):

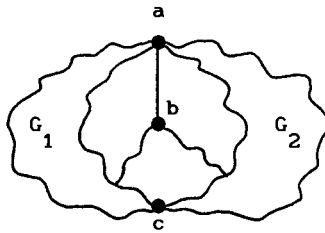


FIGURA V.7

Seja agora um grafo  $G$  sem CCC nem cortes tipo C2 nem C3.1, e seja um corte tipo C3.2 no grafo  $G$ .

Analogamente aos casos anteriores (cortes tipo C2 e C3.1), se o grafo resultante da operação ( $G - C3.2$ ) tiver mais de duas componentes, o grafo  $G$  tem um CPI. Vamos supor então que temos só duas componentes  $G'_1$  e  $G'_2$  como resultado daquela operação.

Na Figura (V.8) se encontram representados todos os tipos de ciclos induzidos que podem existir no grafo  $G$  passando por vértices de  $G'_1$  e de  $G'_2$ .

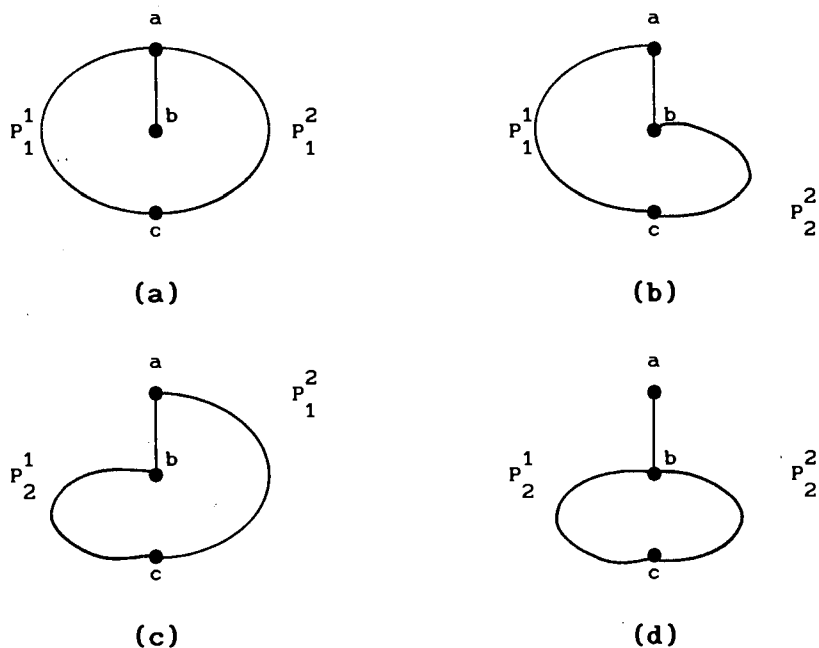


FIGURA V.8

Sejam  $G_1=(G'_1 \cup C3.2)$  e  $G_2=(G'_2 \cup C3.2)$ . Os ciclos do tipo representado nas Figuras (V.8.a) e (V.8.b), serão possíveis só no caso de existir, numa das componentes, por exemplo  $G_1$ , um caminho entre os vértices b e c, que não passe pelo vértice a, e tal que não exista nenhuma aresta entre esse caminho e o vértice a e, na outra componente,  $G_2$ , um caminho entre os vértices a e c, que não passe pelo vértice b, e tal que não exista nenhuma aresta entre esse caminho e o vértice b, Figura (V.9).

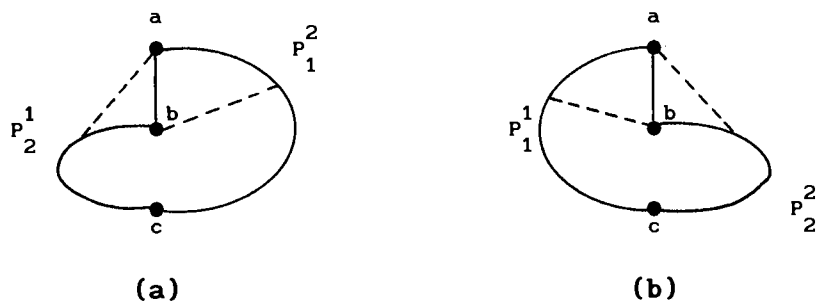


FIGURA V.9

A configuração dos vértices artificiais a serem acrescentados após o corte tipo C3.2 dependerá da existência ou não, em cada uma das componentes resultantes do corte, dos caminhos descritos acima. Começaremos por fazer uma análise das situações possíveis e as não possíveis em termos da existência de um CPI, conforme a existência e a paridade daqueles caminhos.

Notação: para  $G_i$ , ( $i=1,2$ ) sejam:

$P_1^1(\tilde{b})$ : caminho mais curto entre os vértices  $a$  e  $c$  que não passa pelo vértice  $b$  nem vê o vértice  $b$ , na componente  $G_1$ .

$P_1^1(b)$ : caminho mais curto entre os vértices  $a$  e  $c$  que não passa pelo vértice  $b$  mas vê o vértice  $b$ , na componente  $G_1$ .

$P_2^1(\tilde{a})$ : caminho mais curto entre os vértices  $b$  e  $c$  que não passa pelo vértice  $a$  nem vê o vértice  $a$ , na componente  $G_1$ .

$P_2^1(a)$ : caminho mais curto entre os vértices  $b$  e  $c$  que não passa pelo vértice  $a$  mas vê o vértice  $a$ , na componente  $G_1$ .

Primeiramente procuramos em cada uma das componentes resultantes do corte tipo C3.2,  $P_1^1(\tilde{b})$  e  $P_2^1(\tilde{a})$ . Caso algum desses caminhos não exista, procuramos o correspondente  $P_1^1(b)$  ou  $P_2^1(a)$ .



*Lema V.1:* Sejam  $G_1$  e  $G_2$  as duas componentes resultantes do corte com o conjunto C3.2 união o conjunto de corte. Então, se  $P_1^1(b)$  e  $P_2^1(a)$ ,  $i=1,2$ , tem paridade diferente, existe pelo menos um dentre os caminhos  $P_1^1(\tilde{b})$  e  $P_2^1(\tilde{a})$ ,  $i=1,2$ .

*Prova:* Dado que procuramos a existência simultânea de  $P_1^1(b)$  e  $P_2^1(a)$ , é claro que esses dois caminhos precisam ter, por ser o grafo planar, pelo menos um vértice comum, Figura (V.10).

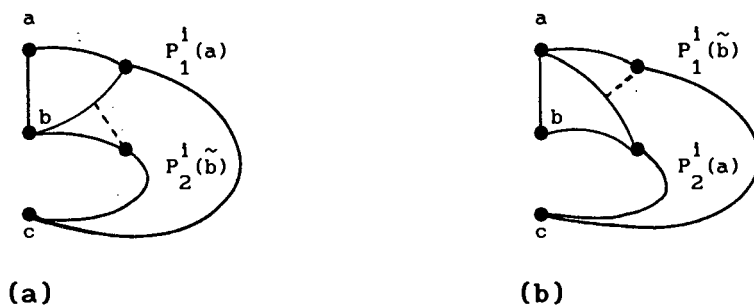


FIGURA V.10

Sejam então  $P_1^1(b)$  e  $P_2^1(a)$  com interseção não vazia. Vamos ver agora que a única configuração possível para a não existência simultânea de  $P_1^1(\tilde{b})$  e  $P_2^1(\tilde{a})$  é a seguinte, Figura (V.11).

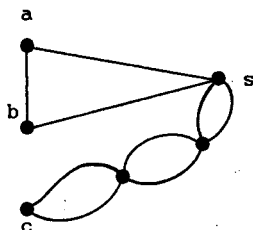


FIGURA V.11

1) É claro que para existirem simultaneamente uma corda entre  $P_1^i$  e o vértice  $b$  e outra corda entre  $P_2^i$  e o vértice  $a$ , sem existirem  $P_1^i(\tilde{b})$  nem  $P_2^i(\tilde{a})$ , essas duas cordas deverão ter um extremo comum, que será um vértice interseção dos caminhos  $P_1^i$  e  $P_2^i$ .

2) Dado que tanto  $P_1^i$  quanto  $P_2^i$  são os respectivos caminhos mais curtos, esta interseção deverá acontecer num vértice a distância um dos vértices  $a$  e  $b$ , dando então a configuração da Figura (V.11). Os trechos de  $P_1^i(b)$  e  $P_2^i(a)$  entre os vértices  $s$  e  $c$  podem ou não ter vértices comuns.

A configuração da Figura (V.11) implica a existência de dois caminhos da mesma paridade entre os vértices  $a$  e  $c$  e os vértices  $b$  e  $c$  na componente  $G_1$ . Dado que é preciso que as paridades sejam diferentes, sendo que são diferentes na outra componente, e que a existência simultânea de  $P_1^i(b)$  e  $P_2^i(a)$  com paridades diferentes implica a existência também desses dois caminhos com a mesma paridade, temos um CPI. ■

Todas as configurações possíveis que não implicam a existência de um CPI, ficam detalhadas, juntamente com os vértices artificiais correspondentes a cada uma delas, na Figura (V.12), onde foi substituída a componente à direita do corte ( $G_2$ ) pela configuração de vértices artificiais apropriada para cada situação.

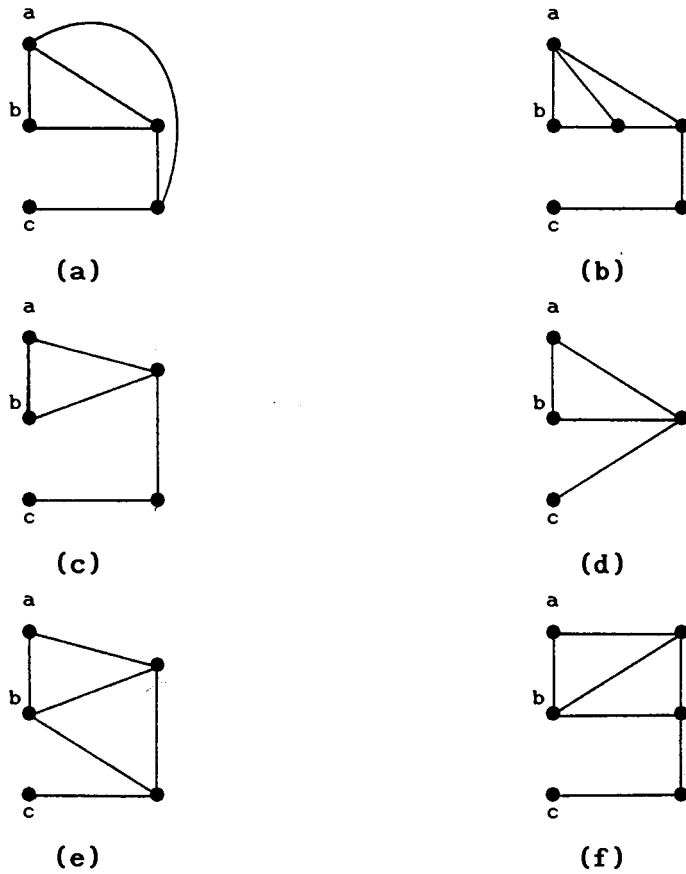


FIGURA V.12

Fig.(V.12.a): existe em  $G_2$   $P_1^2(\tilde{b})$  par; paridade de  $P_2^2$  impar ( $P_2^2(a)$  ou  $(\tilde{a})$  ).

Fig.(V.12.b): existe em  $G_2$   $P_1^2(\tilde{b})$  impar; paridade de  $P_2^2$  par ( $P_2^2(a)$  ou  $(\tilde{a})$  ).

Fig.(V.12.c): não existe em  $G_2$   $P_1^2(\tilde{b})$ ; paridade de  $P_1^2(b)$  impar; paridade de  $P_2^2$  impar ( $P_2^2(a)$  ou  $(\tilde{a})$  ).

Fig.(V.12.d): não existe em  $G_2$   $P_1^2(\tilde{b})$ ; paridade de  $P_1^2(b)$  par; paridade de  $P_2^2$  par ( $P_2^2(a)$  ou  $(\tilde{a})$  ).

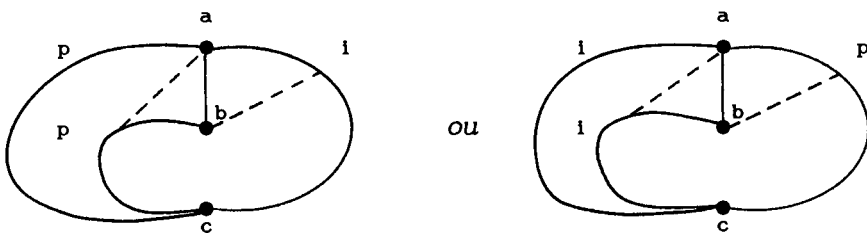
Fig.(V.12.e): não existe em  $G_2$   $P_1^2(\tilde{b})$ ; paridade de  $P_1^2(b)$  ímpar; paridade de  $P_2^2(\tilde{a})$  par.

Fig.(V.12.f): não existe em  $G_2$   $P_1^2(\tilde{b})$ ; paridade de  $P_1^2(b)$  par; paridade de  $P_2^2(\tilde{a})$  ímpar.

Os ciclos do tipo Fig.(V.8.c) ficam, depois do corte, no grafo  $G'_1 + C3.2 + \text{vért.art.}$ , ficando os ciclos tipo Fig.(V.8.b), no grafo  $G'_2 + C3.2 + \text{vért.art.}$ .

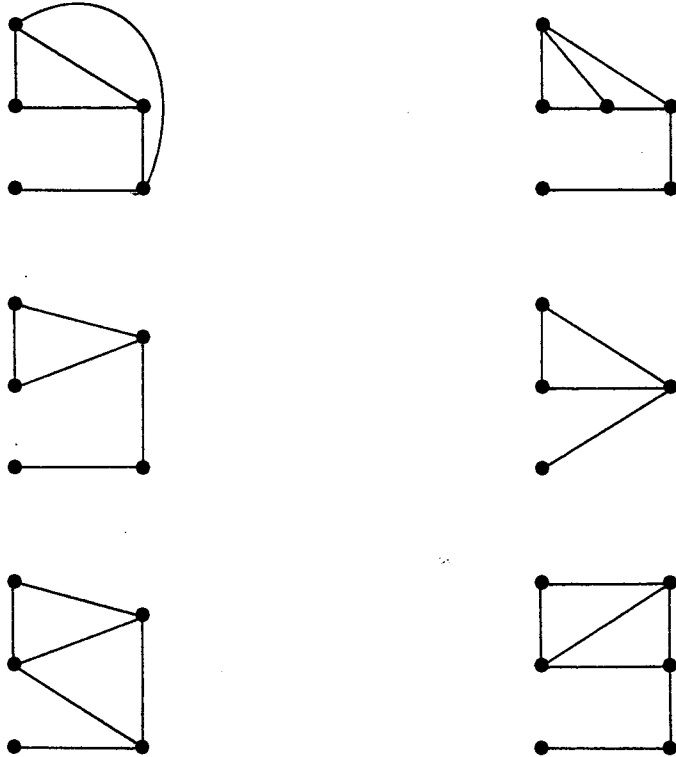
*Nota:* Nos casos representados nas Figuras (V.12.e) e (V.12.f), caso exista um ciclo do tipo do representado na Figura (V.8.b) no grafo original  $G$ , este aparecerá tanto no grafo  $G'_1 + C3.2 + \text{vért.art.}$  quanto no grafo  $G'_2 + C3.2 + \text{vért.art.}$ .

É fácil ver que qualquer outra configuração de paridades entre os caminhos  $P_1^i$  e  $P_2^i$ ,  $i = 1, 2$ , diferente das representadas na Figura (V.12), implicará a existência de um CPI. Por exemplo, se tivermos  $P_2^1(\tilde{a})$ ,  $P_1^1(a$  ou  $\tilde{a})$  e  $P_1^2(\tilde{b})$  com a mesma paridade, Figura (V.13), isso implicará a existência de um CPI, pois a paridade de  $\{P_2^1(\tilde{a}) + ab\}$  será diferente da paridade de  $P_1^2$ , formando-se então um CPI com  $P_1^2(\tilde{b})$ , qualquer seja a paridade deste.



F I G U R A V.13

Ficam proibidos agora os cortes tipo C3.2 onde algum dos grafos resultantes do corte,  $G'_1 + C3.2$  ou  $G'_2 + C3.2$ , for isomorfo a algum dos grafos representados na Figura (V.14).



F I G U R A V.14

CONFIGURAÇÕES DE VERTICES VIZINHOS A FACE F E  
COMPONENTES  $N_s^f$  PENDURADAS NELAS

*Teorema V.1:* O grafo original  $G$  tem um CPI se e somente se algum dos grafos obtidos depois de todos os cortes tipo CCC, C2, C3.1 e C3.2 tiver um.

*Prova:* Em cada um dos cortes, a configuração dos vértices artificiais acrescentados a cada um dos grafos obtidos com o corte, faz com que, se existia um CPI no grafo original  $G$ , através do corte, exista um outro em algum dos grafos resultantes,  $G_1$  ou  $G_2$ . A partir deste, podemos reconstruir o CPI do grafo original, substituindo os vértices artificiais que fazem parte do ciclo nos grafos novos, por um caminho induzido da paridade correspondente no grafo original. Por outro lado, a existência de um CPI em  $G_1$  ou  $G_2$  implica a existência de um CPI em  $G$ .

Sejam  $G_1, \dots, G_r$ , os grafos obtidos a partir do grafo original  $G$  depois de termos efetuado todas as operações de corte. Ou seja, os grafos  $G_1, \dots, G_r$  são livres de cortes de todos os tipos (CCC, C2, C3.1 e C3.2). Além disso, supomos que não tenha sido detectado até agora, ou seja, ao efetuarmos os cortes e procurarmos os caminhos mais curtos correspondentes em cada uma das componentes obtidas, a existência de algum CPI.

A análise que será detalhada a seguir, deverá ser feita em cada um dos grafos  $G_i$ , ( $i = 1, \dots, r$ ).

Seja  $G$  então um grafo pertencente ao conjunto  $\{G_1, \dots, G_r\}$ .

*Definição:* um grafo planar é dito *maximal planar* se todas as suas faces são triangulares, Figura (V.15).

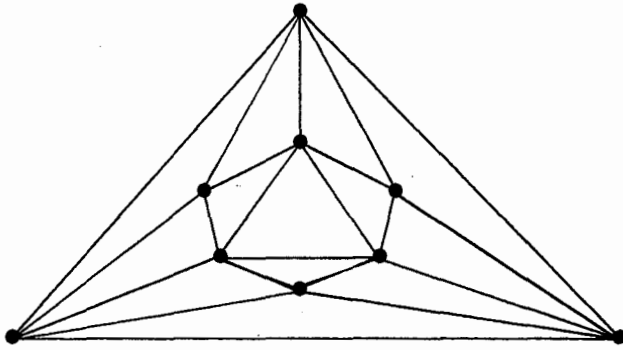


FIGURA V.15

O reconhecimento desses grafos é muito simples pois, para todo grafo planar, verifica-se a seguinte desigualdade:  $m \leq 3n - 6$ , ( $m$ : número de arestas e  $n$ : número de vértices do grafo), sendo que, a igualdade verifica-se se e somente se o grafo for maximal planar; ou seja, um grafo planar é maximal planar se e somente se  $m = 3n - 6$ .

O estudo final para verificar se um grafo  $G \in \{G_1, \dots, G_r\}$  tem ou não um CPI será dividido em dois casos segundo  $G$  seja ou não maximal planar.

**Caso 1 :**  $G$  não maximal planar.

**Caso 2 :**  $G$  maximal planar.

## CASO 1: GRAFO G NÃO MAXIMAL PLANAR

Seja  $G \in \{G_1, \dots, G_r\}$  não maximal planar.

Por ser  $G$  não maximal planar, existe alguma face na representação de  $G$  que não é um triângulo, ou seja, é um ciclo  $>3$  e, por não ter  $G$  nenhum CCC, esse ciclo é um ciclo induzido  $>3$ , pois, se existisse uma aresta entre dois vértices não consecutivos do ciclo, seria uma aresta de corte. Se o ciclo for par o problema está resolvido. Vamos supor então que o tal ciclo induzido é ímpar e vamos chamar essa face de  $f$ . Ou seja,  $f$  é uma face cujo entorno é um ciclo induzido ímpar (CII)  $>3$ .

Seja  $V_f$  o conjunto dos vértices de  $G$  vizinhos à face  $f$ .

*Teorema V.2:* O conjunto  $V_f$  pode conter só 4 tipos de vértices, clasificados segundo quantos vértices da face  $f$  eles vêm, que chamaremos de:  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $z'$  sendo:

$x$  : vértices que vêm exactamente um vértice de  $f$ .

$y$  : vértices que vêm exactamente dois vértices consecutivos de  $f$ .

$z$  : vértices que vêm exactamente três vértices consecutivos de  $f$ .

$z'$  : vértices que vêm exactamente quatro vértices consecutivos de  $f$ .

*Prova:* É suficiente provar que nenhum vértice  $\in V_f$  pode ver nem dois vértices não consecutivos nem mais do que quatro vértices consecutivos de  $f$ . A razão pela qual essas duas configurações não podem acontecer é que ambas são eliminadas com cortes tipo C3.1, e por hipótese o nosso grafo  $G$  não tem corte nenhum. ( tipo CCC, C2, C3.1 nem C3.2). Seja por exemplo um vértice de  $V_f$  que vê, entre outros, dois vértices não consecutivos de  $f$ , Figura (V.16).



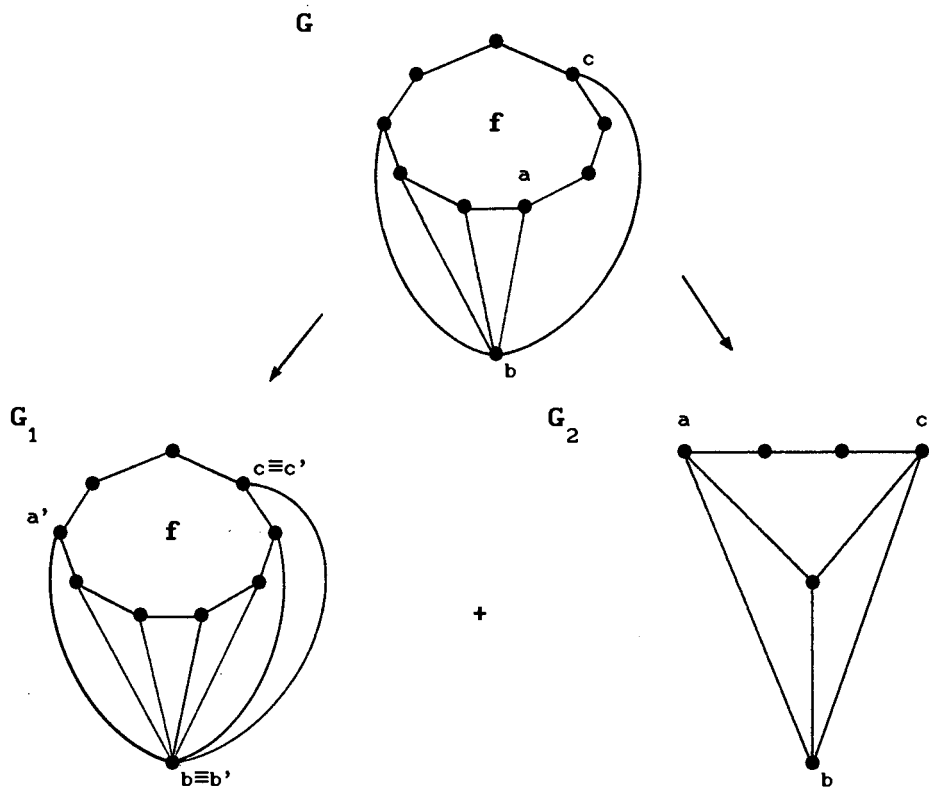


FIGURA V.16

Agora, no grafo  $G'$ , o vértice  $b'$  vê mais do que quatro vértices não consecutivos de  $f'$ . O conjunto  $a', b', c'$ , é agora um corte do tipo C3.1, Figura (V.17).

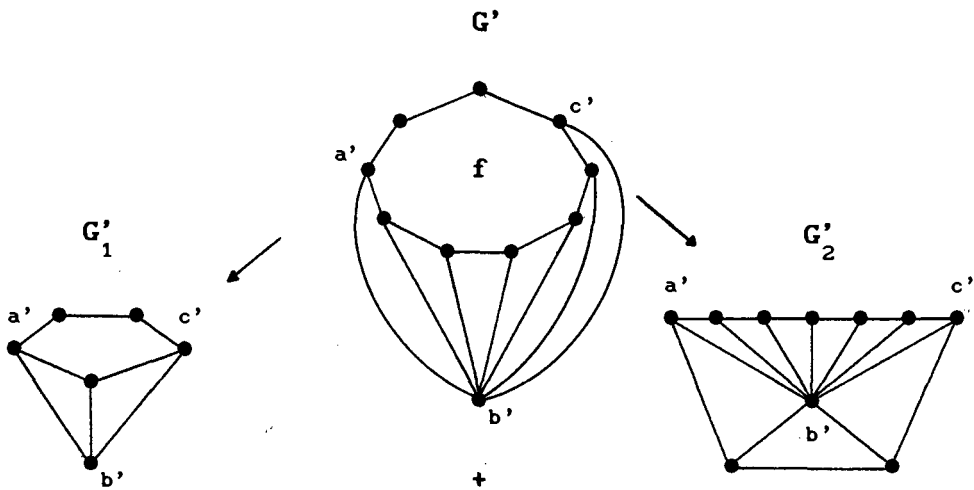


FIGURA V.17

Os vértices tipo  $x$  e tipo  $y$  não implicam necessariamente nenhuma classe de corte. Os vértices tipo  $z$  e  $z'$ , implicam a existência de cortes tipo C3.1. Contudo, não é possível se efetuar os cortes pois um dos grafos resultantes (o  $G_2$  segundo o nosso exemplo anterior), será isomorfo a uma das configurações proibidas para esse corte, Figura (V.6).

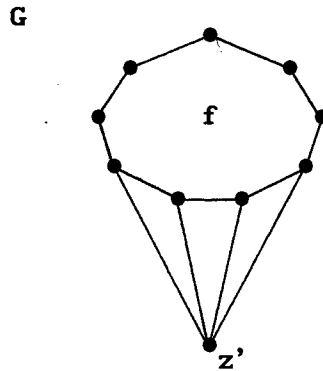
*Nota:* Se o tamanho da face  $f$  for  $\leq 7$  (ou seja 5 ou 7) pode existir em  $V_f$  um vértice  $t$  que veja todos os vértices de  $f$ ; só que, caso exista, o conjunto  $V_f$  estaria composto só por esse vértice (por planaridade) e o grafo seria só  $f + t$ . Um grafo desse tipo não tem nenhum CPI como subgrafo e, portanto, não precisa ser objeto de análise posterior.

*Definição:* Chamaremos de *componente  $i$  relativa à face  $f$*  ( $N_1^f$ ), a todo subgrafo conexo resultante da operação  $(G - (f \cup V_f))$ .

Ou seja, os  $N_i^f$  são conjuntos de vértices de  $G \setminus f$ ,  $\notin V_f$  e que, depois da operação  $(G - (f \cup V_f))$  constituem uma componente conexa do grafo resultante da operação. Diremos que essas componentes  $N_i^f$  estão *penduradas* nos vértices do conjunto  $V_f$ .

Dado  $G$  sem cortes e uma face  $f$  de  $G$  cujo entorno induz um ciclo impar  $> 3$ , a idéia do algoritmo é examinar que arestas e que componentes estão penduradas nos vértices do conjunto  $V_f$  e, com base nessa análise determinar, para cada  $G_i$ , a existência ou não de um CPI.

A primeira coisa a ser analisada é a existência de vértices tipo  $z'$  pois, a presença de algum vértice desse tipo, implica a existência de um CPI, Figura (V.18).



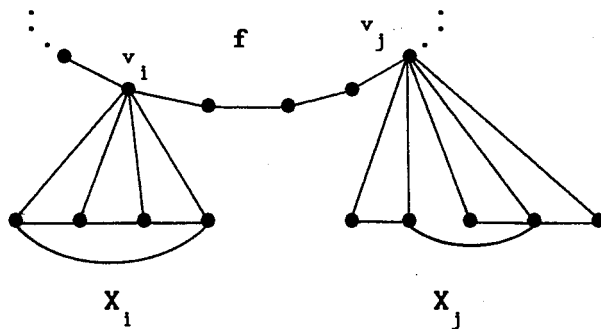
F I G U R A V.18

Então, o primeiro passo será verificar se existe ou não, no conjunto  $V_f$ , algum vértice tipo  $z'$ . Vamos supor então que não existe no conjunto  $V_f$  nenhum vértice tipo  $z'$  e, portanto, podemos ter em  $V_f$ , só 3 tipos de vértices:  $x$ ,  $y$  e  $z$ .

Seja agora uma numeração, no sentido horário, dos vértices do entorno da face  $f$ ,  $v_1, \dots, v_{2k+1}$ . Vamos chamar de  $x_i$  a todo vértice  $\in V_f$  do tipo  $x$  que vê o vértice  $v_i$  de  $f$ ;  $X_i$  ao conjunto dos vértices  $x_i$ ;  $y_i$  ao vértice  $\in V_f$  que vê os vértices  $v_i$  e  $v_{i+1}$  de  $f$ ;  $z_i$  ao vértice  $\in V_f$  que vê os vértices  $v_i, v_{i+1}$  e  $v_{i+2}$  de  $f$ .

*Lema V.2:* Cada conjunto de vértices  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, 2k+1$ , induz um conjunto de caminhos disjuntos.

*Prova:* Seja  $G_{x_i}$  o subgrafo induzido pelo conjunto  $X_i$ . É fácil ver que a existência de um ciclo em  $G_{x_i}$  implica a existência de um CCC triangular em  $G$ , Figura (V.19).



F I G U R A V.19

*Lema V.3:* Existem, no máximo, um  $y_i$  e um  $z_i$  ( $i=1, \dots, 2k+1$ ).

*Prova:* A existência de mais de um  $y_i$  implica a existência de um CCC triangular, Figura (V.20). Não é possível a existência de mais de um  $z_i$  simplesmente por planaridade. ■



Seja uma componente  $N_S^f$  pendurada de um conjunto de vértices  $X_1$  e de um vértice  $z_j$  ( $i \neq j+2, i \neq j$ ). Seja na componente  $N_S^f$  um caminho induzido  $P$  entre um vértice qualquer da componente ligado a algum vértice  $x_1$ , por exemplo o vértice  $a$ , Figura (V.21), e algum vértice da componente ligado ao vértice  $z_j$ , por exemplo o vértice  $b$ , Figura (V.21). É fácil ver que, qualquer seja a paridade de  $P$ , pelo fato da face  $f$  possuir dois caminhos induzidos de paridades diferentes, um entre  $v_j$  e  $v_1$  e o outro entre  $v_{j+2}$  e  $v_1$ , teremos um CPI formado por:  $P, x_1^a, z_j$  e, conforme  $P$  for par ou ímpar,  $v_1 \dots v_{j+2}$  ou  $v_1 \dots v_j$ , pelo entorno da face  $f$ . Mais especificamente, se  $P$  for par, o CPI será:

$$v_1, v_{i+1}, \dots, v_j, z_j, b, P, a, x_1^a, v_1.$$

Se  $P$  for ímpar o CPI será:

$$v_1, v_{i-1}, \dots, v_{j+2}, z_j, b, P, a, x_1^a, v_1.$$

Vamos chamar este tipo de CPI de **CPI tipo 1**.

A mesma coisa aconteceria se, em lugar de uma componente pendurada nos vértices  $X_1$  e no vértice  $z_j$  ( $i \neq j+2, i \neq j$ ), tivéssemos uma aresta entre algum  $x_1$  e um  $z_j$  (com  $|i-j| = \text{par}$ ), Figura (V.22). Vamos chamar este tipo de CPI de **CPI tipo 2**.

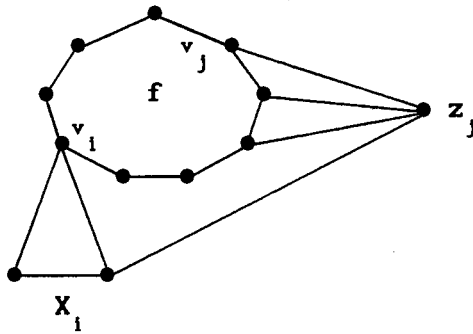


FIGURA V.22

Vamos cuidar por enquanto deste tipo de ciclos, ou seja, ciclos pares induzidos formados por um caminho induzido  $P$  de uma componente  $N_S^f$  (ou uma aresta entre vértices de  $V_f$ ), os vértices  $x$ ,  $y$ , ou  $z$  nos quais essa componente ( ou aresta ) estiver pendurada, e parte da face  $f$  (CPI tipo 1 e CPI tipo 2).

Analisaremos a seguir, quais configurações de vértices  $\in V_f$  e componentes  $N_S^f$  (ou arestas penduradas deles), implicam necessariamente a existência de um CPI tipo 1 ou tipo 2 e quais não.

Seja então uma componente  $N_S^f$  qualquer. Ela pode estar pendurada em : a) um só tipo de vértice  $\in V_f$  ( $x_i$ ,  $y_i$  ou  $z_i$ ); b) dois tipos de vértices  $\in V_f$ ; c) três tipos de vértices  $\in V_f$  ou, d) mais de três tipos de vértices  $\in V_f$ .

Caso a):

*Lema V.4* : Não existe nenhuma componente pendurada de um só tipo de vértice  $\in V_f$ .

*Prova:* A existência de uma componente  $N_S^f$  pendurada só em um  $y_1$  ou só de um  $z_1$  implicaria a existência de um vértice de articulação ( $y_1$  ou  $z_1$ ), contradizendo a hipótese do grafo não ter nenhum CCC.

No caso da componente estar pendurada só de um conjunto de vértices  $X_i$ , teríamos ou um corte tipo C3.1, ou um CCC de tamanho 2 ou um vértice de articulação, conforme esse conjunto de vértices  $X_i$  esteja ligado a outros vértices pertencentes ao conjunto  $V_f$  ou a outras componentes por ambos os lados, por um lado só, ou não tenha outros vizinhos fora do vértice  $v_1$  e de vértices da componente  $N_S^f$ , respectivamente, Figuras (V.23.a), (V.23.b) e (V.23.c). ■

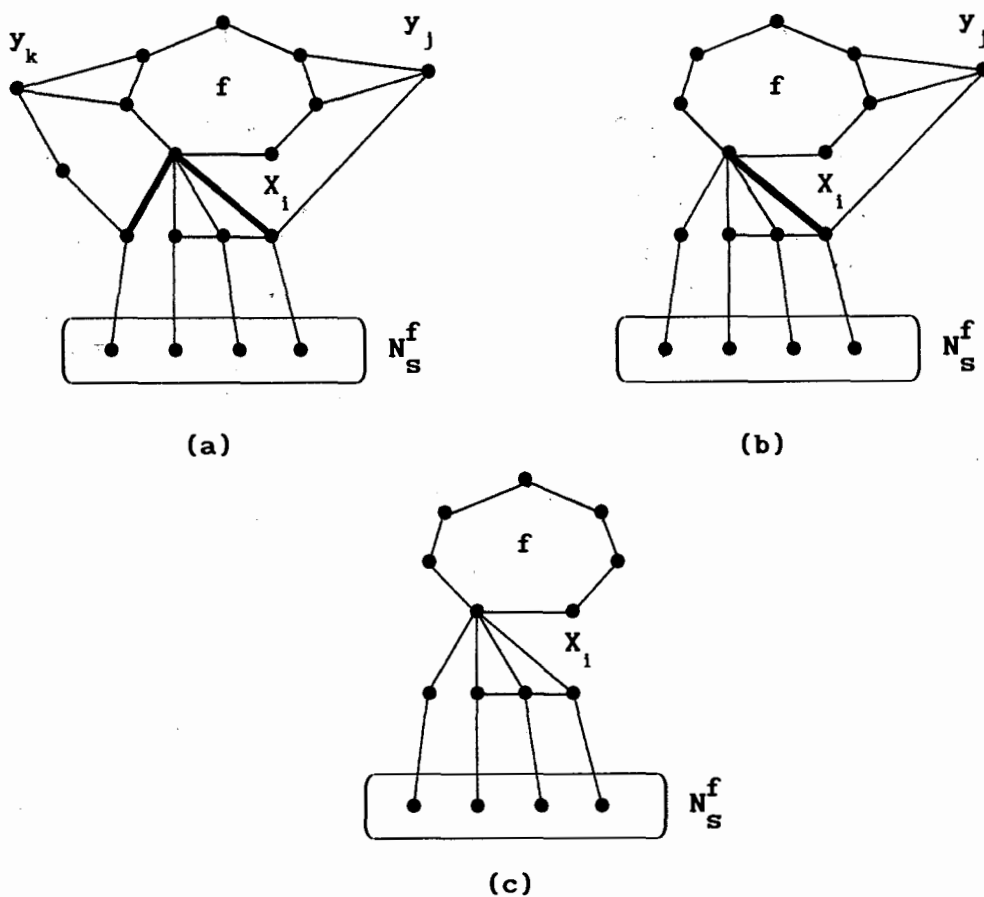


FIGURA V.23



Caso b):

*Lema V.5:* Seja uma componente  $N_S^f$  pendurada em exactamente dois tipos de vértices  $\in V_f$ . Os únicos casos que não implicam necessariamente a existência de um CPI tipo 1 são os seguintes:

b1) Componente  $N_S^f$  pendurada de  $X_i$  e  $X_{i+1}$ ,  $(V_i)$ .

b2) Componente  $N_S^f$  pendurada de  $y_i$  e  $X_j$ ,  $(V_{i,j})$ .

b3) Componente  $N_S^f$  pendurada de  $y_i$  e  $z_j$ ,  $(V_{i,j})$ .

b4) Componente  $N_S^f$  pendurada de  $X_i$  e  $z_i$  ou de  $X_{i+2}$  e  $z_i$ ,  $(V_i)$ , ou seja  $X$  e  $Z$  vizinhos a algum vértice comum da face  $f$ .

*Prova:* Qualquer outra combinação de dois tipos de vértices pertencentes a  $V_f$  nos quais uma componente  $N_S^f$  se encontre pendurada ( $X_i$  e  $X_j$  ( $i \neq j+1$ );  $y_i$  e  $y_j$  ( $V_{i,j}$ );  $z_i$  e  $z_j$  ( $V_{i,j}$ );  $X_i$  e  $z_j$  ( $i \neq j$ ,  $i \neq j+2$ ), implicará a existência de um CPI tipo 1 Figura (V.21). Ou seja, com a exceção dos casos b1) e b4), sempre que uma componente  $N_S^f$  estiver pendurada de dois tipos de vértices pertencentes a  $V_f$  ( $v_f^1$  e  $v_f^2$ ) tais que, a soma do número de vértices  $v_i \in f$  que vem  $v_f^1$  e  $v_f^2$  é par, teremos um CPI tipo 1. Nos casos b2) e b3), e só nesses casos, essa soma é ímpar. ■

**Cordas entre vértices pertencentes a  $V_f$ :**

*Lema V.6:* As únicas cordas entre dois vértices  $\in V_f$  ( $v_f^1$  e  $v_f^2$ ) que não implicam a existência de um **CPI tipo 2** são:

- 1) Cordas entre  $y_j$  e  $X_i$  ( $|i-j|=\text{par}$  ou zero).
- 2) Cordas entre  $z_j$  e  $y_i$  ( $|i-j|=\text{par}$  ou zero).
- 3) Cordas entre  $z_j$  e  $X_i$  vizinhos a algum vértice comum de  $f$ .

*Prova:* Qualquer outro caso ( $X_i$  e  $X_j$  ( $\forall i,j$ );  $y_i$  e  $y_j$  ( $\forall i,j$ );  $z_i$  e  $z_j$  ( $\forall i,j$ );  $X_i$  e  $z_j$  (não ligados a nenhum vértice comum de  $f$ )), fará com que, sendo a soma do número de vértices  $v_i \in f$  que vem  $v_f^1$  e  $v_f^2$  par, tenhamos um **CPI tipo 2**. ■

**Caso c):**

*Lema V.7:* Seja uma componente  $N_S^f$  pendurada exactamente em três tipos de vértices  $\in V_f$ . Os únicos casos que não implicam necessariamente a existência de um **CPI tipo 1** são:

- C1) Componente  $N_S^f$  pendurada de  $X_i, y_i, X_{i+1}$ , ( $\forall i$ ).
- C2) Componente  $N_S^f$  pendurada de  $y_j, X_i, X_{i+1}$ , ( $\forall i,j$ ).
- C3) Componente  $N_S^f$  pendurada de  $X_i, z_i, y_j$ , ( $\forall i,j$ ).
- C4) Componente  $N_S^f$  pendurada de  $y, X, z$ , ( $\forall i,j$ ).

*Prova:* A seguir temos a lista de todos os casos restantes possíveis de três elementos  $\in V_f$  nos quais uma componente  $N_S^f$  poderia estar pendurada:

X, X, X	X, Y, Y
X, Y, X ( $\neq C_1$ )	X, Z, Z
X, Z, X	Y, X, X ( $\neq C_2$ )
Y, Y, Y	Y, Z, Z
Y, X, Y	Z, X, X
Y, Z, Y	Z, Y, Y
Z, Z, Z	X, Y, Z
Z, X, Z	X, Z, Y ( $\neq C_3$ )
Z, Y, Z	Y, X, Z ( $\neq C_4$ )

É fácil ver que, em qualquer um desses casos, sempre existem dois dos três tipos de vértices tais que, a soma do número de vértices  $v_i \in f$  que esses dois vértices vêm é *par*, obtendo-se assim um **CPI tipo 1**. ■

**Caso d):**

*Lema V.8:* A existência de uma componente  $N_S^f$  pendurada em mais de três tipos de vértices  $\in V_f$ , implica a existência de um **CPI** em  $G$ .

*Prova:* Sejam as 4 configurações possíveis de 3 elementos do conjunto  $V_f$  das quais pode estar pendurada uma componente  $N_S^f$  sem implicar necessariamente a existência de um **CPI tipo 1** ( $C_1, C_2, C_3$  e  $C_4$ ). É fácil ver que, se a qualquer uma destas configurações acrescentarmos um outro vértice  $\in V_f$  ( $X, y$  ou  $z$ ) e, na nova configuração assim obtida, pendurarmos uma componente  $N_S^f$ , existirão sempre dois vértices (dentro os quatro da nova configuração) tais que, a soma do número de vértices  $v_i \in f$  que esses dois vértices vêm é *par*, obtendo assim um **CPI tipo 1** ■

**Resumindo:** As únicas configurações de vértices pertencentes ao conjunto  $V_f$  das quais pode estar pendurada uma componente  $N_S^f$  qualquer sem implicar necessariamente a existência de um **CPI tipo 1** são as seguintes:

$$X_1 \text{ e } X_{1+1}, (Vi)$$

$$X_1, y_1 \text{ e } X_{1+1}, (Vi)$$

$$y_1 \text{ e } X_j, (Vi, j)$$

$$y_j, X_1 \text{ e } X_{1+1}, (Vi, j)$$

$$y_1 \text{ e } z_j, (Vi, j)$$

$$X_1, z_1 \text{ e } y_j, (Vi, j)$$

$$X_1 \text{ e } z_1$$

$$y_j, X_{1+2} \text{ e } z_1, (Vi, j)$$

ou

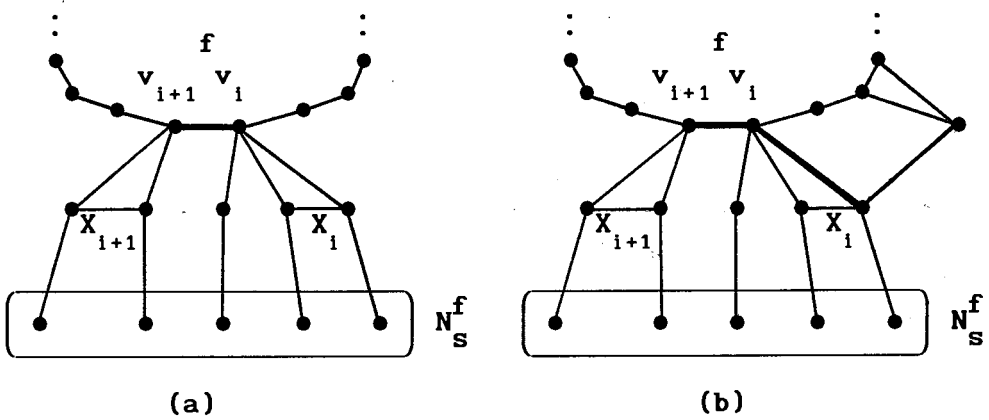
$$X_{1+2} \text{ e } z_1, (Vi)$$

CORTE DAS COMPONENTES  $N_S^f$ 

Provaremos agora que, se uma componente  $N_S^f$  pendurada de alguma das configurações acima não foi cortada com algum dos cortes CCC, C2, C3.1 ou C3.2, implicará a existência de um CPI.

1) Componente  $N_S^f$  pendurada só em vértices  $X_i$  e  $X_{i+1}$ .

Primeiramente é importante notar que, se uma componente  $N_S^f$  pendurada só em conjuntos de vértices  $X_i$  e  $X_{i+1}$  não foi cortada com cortes tipo CCC (tamanho 2) ou tipo C3.1, Figuras (V.24.a) e (V.24.b), significa que existem vértices  $x_i$  e vértices  $x_{i+1}$  que vêm, além da componente  $N_S^f$  e os correspondentes vértices  $v_i$  e  $v_{i+1}$  da face  $f$ , outros vértices do grafo, Figura (V.24.c).



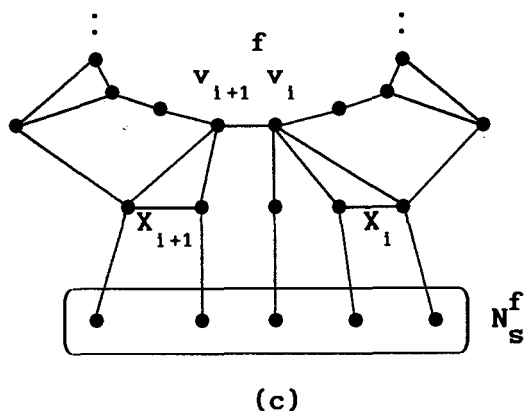


FIGURA V.24

*Lema V.9:* A existência de uma componente  $N_S^f$  pendurada só de conjuntos de vértices  $X_i$  e  $X_{i+1}$  num grafo  $G$  sem cortes tipo CCC nem C3.1 implica a existência de um CPI.

*Prova:* Sejam  $v_f^{x_i}$  e  $v_f^{x_{i+1}}$  os primeiros vértices pertencentes a  $V_f$  ( $\neq X_i$  e  $\neq X_{i+1}$ ), que são atingidos a partir dos vértices  $x_i^a$  (último vértice à direita pertencente a  $X_i$  que vê  $N_S^f$ ) e  $x_{i+1}^a$  (último vértice à esquerda pertencente a  $X_{i+1}$  que vê  $N_S^f$ ), respectivamente, ao longo de caminhos  $L_1$  e  $L_2$ .

$L_1 = x_i^a, X_i$  que não vêem  $N_S^f$  ou  $\emptyset$ , vértices  $\notin f, \notin X_i$  e  $\notin N_S^f$  ou  $\emptyset, v_f^{x_i}$ .  
 Figura (V.25).

$L_2 = x_{i+1}^a, X_{i+1}$  que não vêem  $N_S^f$  ou  $\emptyset$ , vértices  $\notin f, \notin X_{i+1}$  e  $\notin N_S^f$  ou  $\emptyset, v_f^{x_{i+1}}$ . Figura (V.25).

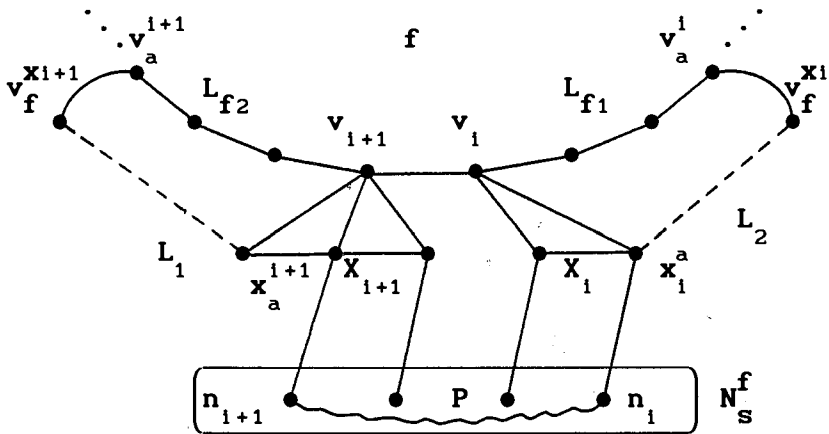


FIGURA V.25

Seja  $v_a^i$  o vértice pertencente à face  $f$  ao qual é incidente a última aresta (na direção de  $L_1$ ) que liga o vértice  $v_f^{x_i^1}$  à face  $f$ , e seja  $v_a^{i+1}$  o vértice pertencente à face  $f$  ao qual é incidente a última aresta (na direção de  $L_2$ ) que liga o vértice  $v_f^{x_{i+1}^1}$  à face  $f$ . No caso de  $v_f^{x_i^1}$  (ou  $v_f^{x_{i+1}^1}$ ) ser um vértice  $x_k$ ,  $v_a^i$  ( $v_a^{i+1}$ ) é o vértice pertencente à face  $f$  que vê  $v_f^{x_i^1}$  ( $v_f^{x_{i+1}^1}$ ) =  $x_k$ , Figura (V.25).

Sejam  $L_{f1}$  e  $L_{f2}$  os respectivos caminhos entre  $v_i$  e  $v_a^i$  e,  $v_{i+1}$  e  $v_a^{i+1}$  pelo contorno da face  $f$ . Ou seja,  $L_{f1} = v_i, v_{i-1}, \dots, v_a^i$  e  $L_{f2} = v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_a^{i+1}$ , Figura (V.25).

Caso 1: não existe a aresta  $v_f^{x_i} v_f^{x_{i+1}}$ .

A paridade de  $L_1$  deve ser igual à paridade de  $L_{f_1}$  assim como a paridade de  $L_2$  deve ser igual à paridade de  $L_{f_2}$ ; caso contrário, teríamos dois caminhos de paridades diferentes entre  $x_a^i$  e  $v_a^i$  (ou  $x_a^{i+1}$  e  $v_a^{i+1}$ ), podendo completar assim um CPI com qualquer caminho induzido  $P$  na componente  $N_S^f$  entre dois vértices da componente vizinhos a  $X_i$  e  $X_{i+1}$ , respectivamente, e o restante da face  $f$ , Figura (V.25).

Sejam  $n_i$  e  $n_{i+1}$  dois vértices pertencentes à componente  $N_S^f$  que vêm  $X_i$  e  $X_{i+1}$  respectivamente. Qualquer caminho induzido  $P$  na componente  $N_S^f$  entre  $n_i$  e  $n_{i+1}$  deverá ter comprimento par, caso contrário teremos um CPI formado por:  $v_i, x_i, n_i, P, n_{i+1}, x_{i+1}, v_{i+1}, v_i$ .

Sendo que *paridade*  $L_1 = \text{paridade } L_{f_1}$  e *paridade*  $L_2 = \text{paridade } L_{f_2}$ , temos que, as paridades dos caminhos entre  $v_a^i$  e  $v_a^{i+1}$  pela face  $f$  e por fora da face  $f$  são diferentes; ou seja, os caminhos

$$R_f = v_a^{i+1}, L_{f_2}, v_{i+1}, v_i, L_{f_1}, v_a^i \quad e$$

$$R_{\tilde{f}} = v_a^{i+1}, v_f^{x_{i+1}}, L_2, x_{i+1}, n_{i+1}, P, n_i, x_i, L_1, v_f^{x_i}, v_a^i$$

terão paridades diferentes, obtendo-se assim um CPI formado pelo caminho  $R_{\tilde{f}}$  + caminho pelo contorno da face  $f$  entre  $v_a^i$  e  $v_a^{i+1}$ , Figura (V.25).



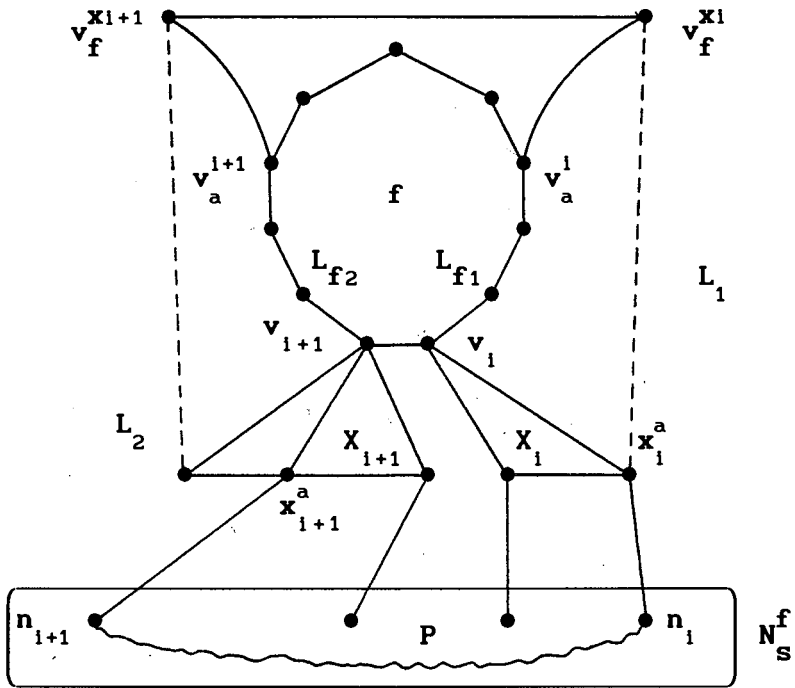


FIGURA V.26

Caso 2:  $\exists$  a aresta  $v_f^{x_i} v_f^{x_{i+1}}$ .

Se as paridades de  $L_1, L_{f1}$  e  $L_2, L_{f2}$  são ambas respectivamente iguais (ou ambas respectivamente diferentes), teremos um CPI formado por, Figura (V.26):

$$v_f^{x_{i+1}}, v_a^{i+1} \equiv v_j, v_{j+1}, \dots, v_i, x_a^i, n_i, P, n_{i+1}, x_a^{i+1}, L_2, v_f^{x_{i+1}}.$$

pois  $L_2, v_a^{i+1} \equiv v_j, \dots, v_i$  + aresta  $v_f^{x_{i+1}} v_a^{i+1}$  + aresta  $v_i x_a^i$  será par, Figura (V.26).

Se só uma das igualdades de paridades entre  $L_1, L_{f1}$  e  $L_2, L_{f2}$  verifica-se, teremos um CPI formado por:

$$v_f^{x_{i+1}}, v_f^{x_i}, L_1, x_a^i, n_i, P, n_{i+1}, x_a^{i+1}, L_2, v_f^{x_{i+1}}.$$

pois  $L_1 + \text{aresta } v_f^{x_i} v_f^{x_{i+1}} + L_2$  será par, Figura (V.26). ■

2) Componente  $N_S^f$  pendurada só em vértices  $X_i$  e  $z_i$  (ou  $z_i$  e  $X_{i+1}$ ), ou seja, vértices  $x$  e  $z$  adjacentes a um vértice comum da face  $f$ .

*Lema V.10:* Não podem existir componentes  $N_S^f$  penduradas só em vértices  $X$  e  $z$  adjacentes a um vértice comum da face  $f$  já que todas elas são cortadas com cortes tipo C3.1 .

*Prova:* Ver Figura (V.27). ■

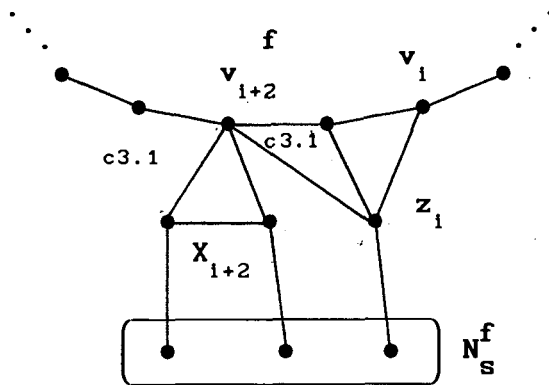
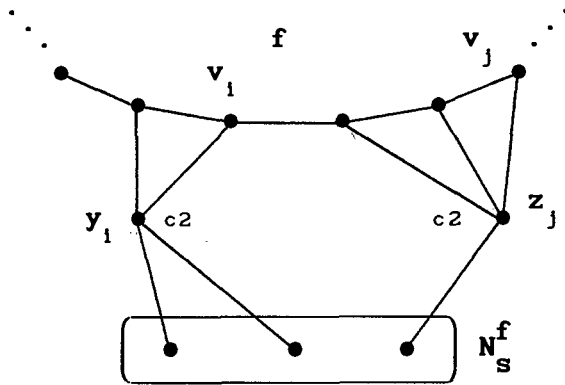


FIGURA V.27

3) Componentes  $N_S^f$  penduradas só em vértices  $y_1$  e  $z_j$ .

*Lema V.11:* Não podem existir componentes  $N_S^f$  penduradas só em vértices  $y_1$  e  $z_j$  já que todas elas são cortadas com cortes tipo C2.

*Prova:* Ver Figura (V.28). ■



F I G U R A V.28

4) Componentes  $N_S^f$  penduradas só em vértices  $X_1, y_1$  e  $X_{1+1}$ .

*Lema V.12:* A existência de uma componente  $N_S^f$  pendurada só em vértices  $X_1, y_1$  e  $X_{1+1}$  num grafo  $G$  sem cortes implica a existência de um CPI.

*Prova:* Se uma componente pendurada da configuração acima não foi cortada com um corte tipo CCC (tamanho 2) = aresta  $v_i v_{i+1}$ , teremos um CPI, pois removendo o vértice  $y_1$  o problema fica reduzido ao 1): componente pendurada só de vértices  $X_1$  e  $X_{1+1}$ . ■

5) Componente  $N_S^f$  pendurada só de vértices  $X_i$  e  $y_j$ .

*Lema V.13:* Toda componente  $N_S^f$  pendurada só em vértices  $X_i$  e  $y_j$  que não pode ser cortada com um corte tipo C3.2 =  $ab, c$ , tal que a aresta  $ab = v_i x_i$  e o vértice  $c = y_j$ , implicará a existência de um CPI.

*Prova:* É importante notar que podemos supor que existem pelo menos dois vértices  $x_i$  não adjacentes que vêem vértices pertencentes à componente  $N_S^f$  pois, caso contrário, a componente  $N_S^f$  seria cortada com um corte tipo C2, caso um único vértice  $x_i$  veja  $N_S^f$ , ou com um corte tipo C3.2 ( $ab, c$ ) com  $ab = x_i x_i$  e  $c = y_j$ , caso só dois vértices  $x_i$  consecutivos vejam  $N_S^f$ .

Vamos supor então que uma componente  $N_S^f$  pendurada só em vértices  $X_i$  e  $y_j$ , não pode ser cortada com um corte tipo C3.2 do tipo descrito acima ( $ab = v_i x_i$  e  $c = y_j$ ). Isso implica que os vértices  $x_i$  vêem outros vértices, além do vértice  $v_i$  e dos vértices da componente  $N_S^f$ , por ambos os lados, Figura (V.29).

Sejam  $v_f^{x_i, a}$  e  $v_f^{x_i, b}$  os primeiros vértices pertencentes a  $V_f$  ( $\neq x_i$ ) que são atingidos a partir de  $x_i^a$  (último vértice  $x_i$  à esquerda que vê um vértice pertencente a  $N_S^f$ ) e de  $x_i^b$  (último vértice  $x_i$  à direita que vê um vértice pertencente a  $N_S^f$ ) ao longo de caminhos  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente, Figura (V.29).

$L_1 = x_i^a, x_i$  que não vêem  $N_S^f$ , vértices  $\notin f$  nem  $\notin X_i$  nem  $\notin N_S^f, v_f^{x_i, a}$ .

$L_2 = x_i^b, x_i$  que não vêem  $N_S^f$ , vértices  $\notin f$  nem  $\notin X_i$  nem  $\notin N_S^f, v_f^{x_i, b}$ .

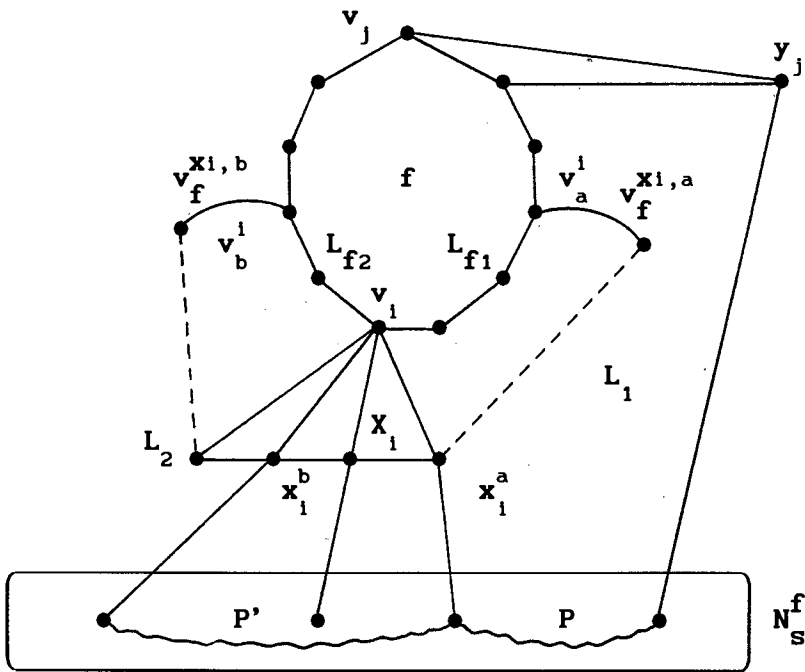


FIGURA V.29

Seja  $v_a$  o vértice  $\in f$  ao qual é incidente a última aresta (na direção de  $L_1$ ) que liga  $v_f^{x1,a}$  à face  $f$ , e seja  $v_b$  o vértice  $\in f$  ao qual é incidente a última aresta (na direção de  $L_2$ ) que liga  $v_f^{x1,b}$  à face  $f$ . No caso de  $v_f^{x1,a}$  ser um vértice  $x_k$ ,  $v_a$  é o vértice  $\in f$  que vê  $v_f^{x1,a}$ ; o mesmo acontece quando  $v_f^{x1,b} = x_l$ .

Sejam  $L_{f1}$  o caminho entre  $x_i^a$  e  $v_a$  pelo contorno da face  $f$  e  $L_{f2}$  o caminho entre  $x_i^b$  e  $v_b$  pelo contorno da face  $f$ .

$$L_{f1} = x_i^a, v_i, v_{i+1}, \dots, v_a.$$

$$L_{f2} = x_i^b, v_i, v_{i-1}, \dots, v_b.$$

Caso 1: não existe aresta entre  $y_j$  e  $v_f^{x1,a}$  nem entre  $y_j$  e  $v_f^{x1,b}$ .

A paridade de  $L_1$  tem que ser igual à paridade de  $L_{f_1}$ ; caso contrário, teríamos dois caminhos de paridades diferentes entre  $v_a$  e  $x_1^a$ :  $L_{f_1}$  e  $\{L_1 + \text{aresta } v_f^{x_1^a, a} v_a\}$  que, conforme a paridade de qualquer caminho  $P$  em  $N_S^f$  entre um vértice  $\in N_S^f$  vizinho a  $x_1^a$  e um outro vértice  $\in N_S^f$  vizinho a  $y_j$ , completariam um CPI com  $P, y_j$ , e vértices da face  $f$  ( $v_a, v_{a+1}, \dots, v_j$ ). O mesmo acontece com  $L_2$  e  $L_{f_2}$ .

Por outro lado, todo caminho  $P'$  na componente  $N_S^f$  entre vértices  $\in N_S^f$  vizinhos a  $x_1^a$  e vértices  $\in N_S^f$  vizinhos a  $x_1^b$ , terá que ser *ímpar*; caso contrário, teríamos um CPI formado por  $(v_1, x_1^a, P', x_1^b, v_1)$ .

A paridade de  $L_1$  é igual à paridade de  $(L_{f_1} - 1)$  e a paridade de  $L_2$  é igual à paridade de  $(L_{f_2} - 1)$ .

Sejam  $S_1$  e  $S_2$  dois caminhos entre  $v_a$  e  $v_b$  pelo contorno da face  $f$  e por fora da face  $f$ , respectivamente.

$$S_1 = v_a, v_{a-1}, \dots, v_1, v_{1-1}, \dots, v_b.$$

$$S_2 = v_a, v_f^{x_1^a, a}, L_1, x_1^a, P', x_1^b, L_2, v_f^{x_1^b, b}, v_b.$$

Pelas duas afirmações anteriores temos que, as paridades dos caminhos  $S_1$  e  $S_2$  são diferentes, obtendo-se assim o CPI =  $v_a, S_2, v_j, v_{j-1}, \dots, v_a$ .

*Nota:* É importante notar que, mesmo que os únicos vértices  $x_1$  vizinhos a  $N_S^f$  sejam dois vértices  $x_1$  adjacentes  $(x_1^a, x_1^b)$ , teremos um CPI análogo ao anterior substituindo o caminho  $S_2$  pela aresta  $x_1^a x_1^b$ .

Caso 2: a)  $\exists$  aresta entre  $y_j$  e  $v_f^{x_1, b}$ .

Sejam  $R_1 = L_2 +$  aresta  $v_f^{x_1, b} y_j$  e

$$R_2 = x_1^b, v_1, v_{i-1}, \dots, v_{j+1}, y_j$$

As paridades dos caminhos  $R_1$  e  $R_2$  devem ser iguais pois, caso contrario, teríamos dois caminhos induzidos de paridades diferentes entre  $x_1^b$  e  $y_j$  que completariam um CPI com qualquer caminho induzido na componente  $N_S^f$  entre algum vértice  $\in N_S^f$  que veja  $x_1^b$  e algum vértice  $\in N_S^f$  que veja  $y_j$ .

Dado que *paridade de  $R_1 =$  paridade de  $R_2$* , temos um CPI formado por:

$$v_j, y_j, R_1, x_1^b, v_1, v_{i+1}, \dots, v_j.$$

b)  $\exists$  aresta entre  $y_j$  e  $v_f^{x_1, a}$ .

Sejam os caminhos  $R'_1 = L_1 +$  aresta  $v_f^{x_1, a} y_j$  e

$$R'_2 = x_1^a, v_1, v_{i+1}, \dots, v_j, y_j.$$

As paridades de  $R'_1$  e  $R'_2$  devem ser iguais pois, caso contrário, teríamos dois caminhos de paridades diferentes entre  $x_1^a$  e  $y_j$ , que completariam um CPI com qualquer caminho induzido na componente  $N_S^f$  entre algum vértice  $\in N_S^f$  que veja  $x_1^a$  e algum vértice  $\in N_S^f$  que veja  $y_j$ . Dado que *paridade de  $R'_1 =$  paridade de  $R'_2$*  temos um CPI formado por:

$$v_{j+1}, y_j, R'_1, x_1^a, v_1, v_{i-1}, \dots, v_{j+1}.$$

Conclusão: não podem existir  $v_f^{x_1, a}$  e  $v_f^{x_1, b}$  simultaneamente sem implicar a existência de um CPI, conseqüentemente, teremos sempre um corte do tipo desejado ou um CPI, Figuras (V.30.a) e (V.30.b). ■

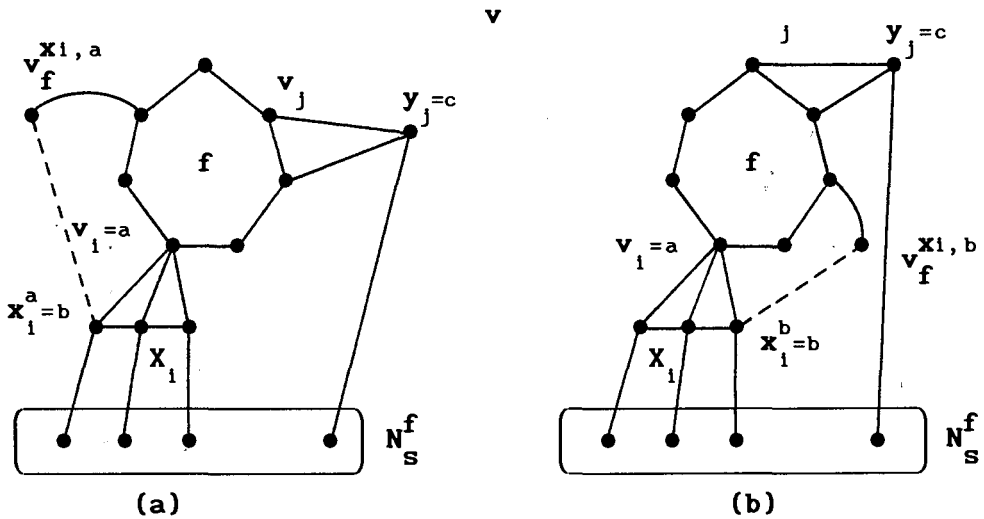


FIGURA V.30

6) Componente  $N_S^f$  pendurada só em vértices  $y_j$ ,  $X_i$  e  $X_{i+1}$ .

Lema V.14: Se uma componente  $N_S^f$  pendurada só de vértices  $y_j$ ,  $X_i$  e  $X_{i+1}$  não for cortada com um corte tipo C3.2 (ab c) com  $ab = v_1 v_{i+1}$  e  $c = y_j$ , implicará a existência de um CPI.

Prova: Temos que provar então que nem os vértices  $X_i$  nem os  $X_{i+1}$  podem ver outros vértices além dos vértices  $v_i$  e  $v_{i+1}$ , respectivamente, e vértices da componente  $N_S^f$ .

Sejam  $v_f^{x_1}$  e  $v_f^{x_{i+1}}$  os primeiros vértices pertencentes a  $V_f$  ( $\neq X_i$  e  $\neq X_{i+1}$ ) que são atingidos a partir dos vértices  $x_1^a$  (último vértice  $x_i$  à direita que vê  $N_S^f$ ) e  $x_{i+1}^a$  (último vértice  $x_{i+1}$  à esquerda que vê  $N_S^f$ ), respectivamente, ao longo de caminhos  $L$  e  $L'$ .



$L_1 = x_1^a, X_1$  que não vêem  $N_S^f$  ou  $\emptyset$ , vértices  $\notin f, \notin X_1$  e  $\notin N_S^f$  ou  $\emptyset, v_f^{x_1}$ .

$L_2 = x_{i+1}^a, X_{i+1}$  que não vêem  $N_S^f$  ou  $\emptyset$ , vértices  $\notin f, \notin X_{i+1}$  e  $\notin N_S^f$  ou  $\emptyset, v_f^{x_{i+1}}$ .

Seja  $v_a^i$  o vértice pertencente à face  $f$  ao qual é incidente a última aresta (na direção de  $L_1$ ) que liga o vértice  $v_f^{x_1}$  à face  $f$ , e seja  $v_a^{i+1}$  o vértice pertencente à face  $f$  ao qual é incidente a última aresta (na direção de  $L_2$ ) que liga o vértice  $v_f^{x_{i+1}}$  à face  $f$ . No caso de  $v_f^{x_1}$  (ou  $v_f^{x_{i+1}}$ ) ser um vértice  $x_k$ ,  $v_a^i$  ( $v_a^{i+1}$ ) é o vértice pertencente à face  $f$  que vê  $v_f^{x_1}$  ( $v_f^{x_{i+1}}$ ) =  $x_k$ .

Sejam  $L_{f_1}$  e  $L_{f_2}$  os respectivos caminhos entre  $v_i$  e  $v_a^i$  e,  $v_{i+1}$  e  $v_a^{i+1}$  pelo contorno da face  $f$ . Ou seja,  $L_{f_1} = v_i, v_{i-1}, \dots, v_a^i$  e  $L_{f_2} = v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_a^{i+1}$ .

A paridade de  $\{L_1 + \text{aresta } v_f^{x_1} v_a^i\}$  deve ser igual à paridade de  $L_{f_1}$  pois, caso contrário, teríamos dois caminhos induzidos de paridades diferentes entre  $x_1^a$  e  $v_a^i$  podendo-se, com algum deles, completar um CPI com qualquer caminho induzido  $P$  na componente  $N_S^f$  entre dois vértices da componente tal que, um deles vê  $y_j$  e o outro vê  $x_1^a$ , mais o vértice  $y_j$ , mais caminho entre  $v_{j+1}$  e  $v_a^i$  pelo contorno da face  $f$ . A mesma análise pode ser feita para  $\{L_2 + \text{aresta } v_f^{x_{i+1}} v_a^{i+1}\}$  e  $L_{f_2}$ , Figura (V.31).

Em ambos os casos, teremos um CPI pois, sendo que a componente  $N_S^f$  está pendurada em vértices  $x_i$  e  $x_{i+1}$ , a existência de  $v_f^{x_1}$  (ou de  $v_f^{x_{i+1}}$ ) faz com que tenhamos dois caminhos de paridades diferentes entre  $x_1^a$  e  $v_{i+1}$  (ou  $x_{i+1}^a$  e  $v_i$ ), um através da aresta  $v_i v_{i+1}$  e o outro através de  $L_1$  (ou  $L_2$ ) e o entorno da face  $f$ .

Em ambos os casos, é possível completar, com algum deles, um CPI, conjuntamente com qualquer caminho induzido  $P'$  na componente  $N_S^f$  entre dois vértices da componente, um deles vizinho a algum  $x_{i+1}$  e o outro vizinho a  $x_1^a$  (ou um deles vizinho a algum  $x_i$  e o outro vizinho a  $x_{i+1}^a$ ). A mesma coisa acontece se existe a aresta entre  $y_j$  e algum  $x_i$ , Figura (V.31).

Ou seja, não podem existir nem  $v_f^{x_{i+1}}$ , nem  $v_f^{x_i}$  nem a aresta  $y_j x_i$  sem implicar necessariamente a existência de um CPI. Conseqüentemente teremos sempre um corte do tipo desejado ou um CPI. ■

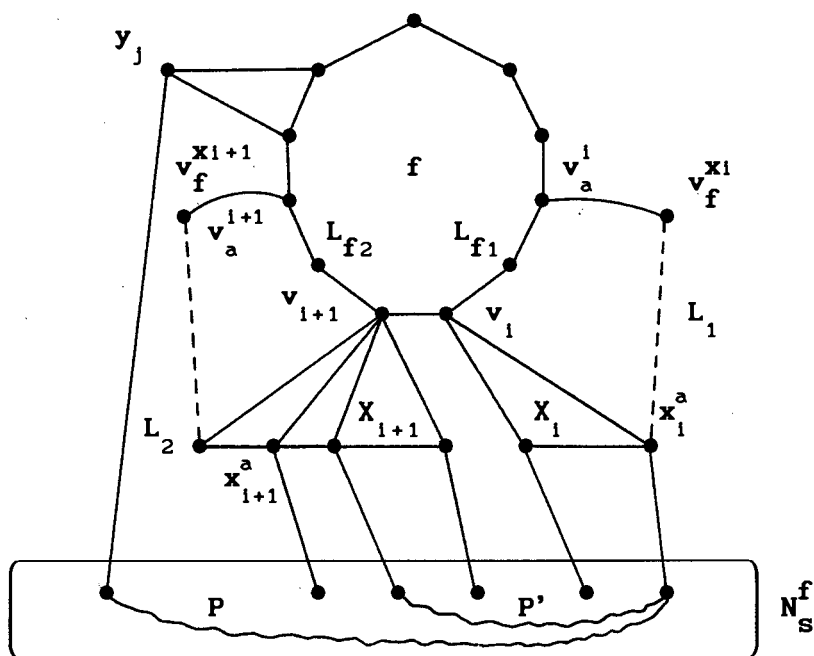


FIGURA V.31

7) Componente  $N_S^f$  pendurada só em vértices  $X_i$ ,  $z_i$  e  $y_j$ .

*Lema V.15:* Se uma componente  $N_S^f$  pendurada da configuração acima não for cortada com um corte tipo C3.2 ( $ab\ c$ ), com  $ab = z_i v_i$  e  $c = y_j$ , implicará a existência de um CPI.

*Prova:* Se uma componente  $N_S^f$  pendurada na configuração acima não for cortada com um corte do tipo acima descrito, significa que algum vértice  $x_1$  vê outros vértices além de  $v_1$  e vértices de  $N_S^f$ .

Seja  $v_f^{x_1}$  o primeiro vértice pertencente a  $v_f$  ( $\neq x_1$ ) que é atingido a partir do vértice  $x_1^a$  (último vértice  $x_1$  à direita que vê  $N_S^f$ ), ao longo do caminho  $L_1$ .

$L_1 = x_1^a, X_1$  que não vêem  $N_S^f$  ou  $\emptyset$ , vértices  $\notin f, \notin X_1$  e  $\notin N_S^f$  ou  $\emptyset, v_f^{x_1}$ ).

Seja  $v_a^i$  o vértice pertencente à face  $f$  ao qual é incidente a última aresta (na direção de  $L_1$ ) que liga o vértice  $v_f^{x_1}$  à face  $f$ . No caso de  $v_f^{x_1}$  ser um vértice  $x_k$ ,  $v_a^i$  é o vértice pertencente à face  $f$  que vê  $v_f^{x_1} = x_k$ .

Seja  $L_{f_1}$  o caminho entre  $v_1$  e  $v_a^i$  pelo contorno da face  $f$ . Ou seja,  $L_{f_1} = v_1, v_{1-1}, \dots, v_a^i$ .

A paridade de  $\{L_1 + \text{aresta } v_f^{x_1} v_a^i\}$  deve ser igual à paridade de  $L_{f_1}$  pois, caso contrário, teríamos dois caminhos induzidos de paridades diferentes entre  $x_1^a$  e  $v_a^i$ , podendo-se, com algum deles, completar um CPI com qualquer caminho induzido  $P$  na componente  $N_S^f$ , entre dois vértices da componente tal que, um deles vê  $y_j$  e o outro vê  $x_1^a$ , mais vértice  $y_j$ , mais caminho entre  $v_{j+1}$  e  $v_a^i$  pelo entorno da face  $f$ , Figura (V.32).

Nesse caso, teremos um CPI pois, sendo que a componente  $N_S^f$  está pendurada em vértices  $x_1$  e  $z_1$ , a existência de  $v_f^{x_1}$  faz com que tenhamos dois caminhos de paridades diferentes entre  $x_1^a$  e  $z_1$ , um através da aresta  $v_1 z_1$ , e o outro através de  $L_1$  e o contorno da face  $f$ , completando com algum deles um CPI conjuntamente com qualquer caminho induzido  $P'$  na componente  $N_S^f$ , entre dois vértices da componente, um deles vizinho a  $z_1$  e o outro vizinho a  $x_1^a$ .

A mesma coisa acontece se existe a aresta entre  $y_j$  e algum  $x_i$ ,  
 Figura (V.32).

Ou seja, não podem existir nem  $v_f^{x_i}$  nem a aresta  $y_j x_i$  sem implicar necessariamente a existência de um CPI. Conseqüentemente teremos sempre um corte do tipo desejado ou um CPI. ■

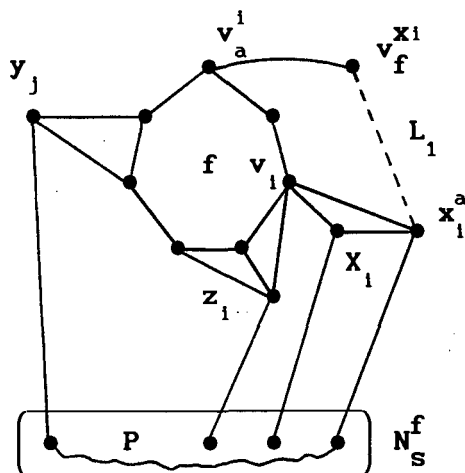


FIGURA V.32

8) Componente  $N_S^f$  pendurada só em vértices  $z_i$ ,  $X_{i+2}$  e  $y_j$ .

*Lema V.16:* se uma componente  $N_S^f$  pendurada na configuração acima não for cortada com um corte tipo C3.2 ( $ab$   $c$ ), com  $ab = z_i v_{i+2}$  e  $c = y_j$ , implicará a existência de um CPI.

*Prova:* Se uma componente  $N_S^f$  pendurada na configuração acima não for cortada com um corte do tipo acima descrito, significa que algum vértice  $x_{i+2}$  vê outros vértices além de  $v_{i+2}$  e vértices de  $N_S^f$ .

Seja  $v_f^{x^{1+2}}$  o primeiro vértice pertencente a  $V_f$  ( $\neq x_{1+2}^a$ ) que é atingido a partir do vértice  $x_{1+2}^a$  (último vértice  $x_{1+2}^a$  à esquerda que vê  $N_S^f$ ), ao longo do caminho  $L_1$ .

$L_1 = x_{1+2}^a, X_{1+2}$  que não vêem  $N_S^f$  ou  $\emptyset$ , vértices  $\notin f, \notin X_1$  e  $\notin N_S^f$  ou  $\emptyset, v_f^{x^{1+2}}$ .

Seja  $v_a^{1+2}$  o vértice pertencente à face  $f$  ao qual é incidente a última aresta (na direção de  $L_1$ ) que liga o vértice  $v_f^{x^{1+2}}$  à face  $f$ . No caso de  $v_f^{x^{1+2}}$  ser um vértice  $x_k$ ,  $v_a^{1+2}$  é o vértice pertencente à face  $f$  que vê  $v_f^{x^{1+2}} = x_k$ .

Seja  $L_{f_1}$  o caminho entre  $v_{1+2}$  e  $v_a^{1+2}$  pelo contorno da face  $f$ . Ou seja,  $L_{f_1} = v_{1+2}, v_{1+3}, \dots, v_a^{1+2}$ .

A paridade de  $(L_1 + \text{aresta } v_f^{x^{1+2}} v_a^{1+2})$  deve ser igual à paridade de  $L_{f_1}$  pois, caso contrário, teríamos dois caminhos induzidos de paridades diferentes entre  $x_{1+2}^a$  e  $v_a^{1+2}$ , podendo-se, com algum deles, completar um CPI com qualquer caminho induzido  $P$  na componente  $N_S^f$ , entre dois vértices da componente tal que, um deles vê  $y_j$  e o outro vê  $x_{1+2}^a$ , mais vértice  $y_j$ , mais caminho entre  $v_{j+1}$  e  $v_a^{1+2}$  pelo contorno da face  $f$ , Figura (V.33).

Nesse caso, teremos um CPI, pois, sendo que a componente  $N_S^f$  está pendurada em vértices  $x_{1+2}^a$  e  $z_1$ , a existência de  $v_f^{x^{1+2}}$  faz com que tenhamos dois caminhos de paridades diferentes entre  $x_{1+2}^a$  e  $z_1$ , um através da aresta  $v_{1+2} z_1$ , e o outro através de  $L_1$  e o contorno da face  $f$ , completando com algum deles um CPI conjuntamente com qualquer caminho induzido  $P'$  na componente  $N_S^f$ , entre dois vértices da componente, um deles vizinho a  $z_1$  e o outro vizinho a  $x_{1+2}^a$ . A mesma coisa acontece se existe a aresta entre  $y_j$  e  $z_1$ , Figura (V.33).

Ou seja, não podem existir nem  $v_f^{x^{1+2}}$  nem a aresta  $y_j z_1$  sem implicar necessariamente a existência de um CPI. Conseqüentemente teremos sempre um corte do tipo desejado ou um CPI. ■

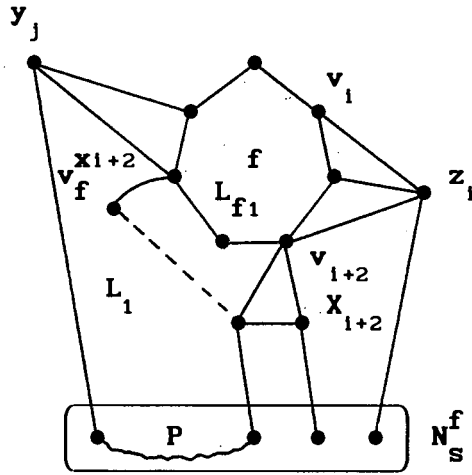


FIGURA V.33

*Definição:* Dado um grafo  $G$  não maximal planar sem cortes tipo CCC, C2, C3.1 nem C3.2, e uma face  $f$  não triangular de  $G$ , diremos que uma componente  $N_S^f$  relativa à face  $f$  é *elementar*, se ela tiver um ou dois vértices e não for possível separá-la da face  $f$  mediante alguma operação de corte das mencionadas acima por fazer parte de grafos proibidos para esses cortes. Denotaremos uma componente elementar relativa à face  $f$  como  $e_f$ .

*Teorema V.3:* Seja um grafo  $G$  não maximal planar sem cortes (tipo CCC, C2, C3.1 nem C3.2), e seja  $f$  uma face qualquer de  $G$  tal que o entorno de  $f$  induz um ciclo ímpar de comprimento  $\geq 5$ . Então, a existência de alguma componente  $N_S^f$  não elementar implica a existência de um CPI no grafo  $G$ .

*Prova:* Pelos *Lemas V.4, V.5, V.7 e V.8* temos que o número de configurações diferentes de vértices pertencentes ao conjunto  $V_f$  nas quais pode estar pendurada uma componente  $N_S^f$  sem implicar necessariamente a existência de um CPI, é igual a 8.

Pelos lemas *V.9*, *V.10*, *V.11*, *V.12*, *V.13*, *V.14* , *V.15* e *V.16* vemos que, a menos que uma componente pendurada de alguma das 8 configurações permitidas seja elementar, a impossibilidade de cortar essa componente (com o corte correspondente a cada caso), implica necesssariamente a existência de um CPI.

É importante observar que, em todos os casos acima mencionados, o grafo induzido depois do corte pela componente (resultante do corte) que não contém  $N_S^f$ , nunca é isomorfo a nenhum subgrafo proibido, pois, todos eles, contem como subgrafo induzido um ciclo impar de comprimento  $\geq 5$  (a face  $f$ ) e, nenhum dos subgrafos proibidos correspondentes aos cortes tipo *C2*, *C3.1* e *C3.2* contém como subgrafo induzido um ciclo impar  $\geq 5$ .

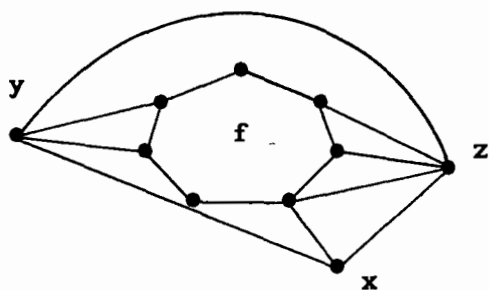
Ou seja, se uma componente  $N_S^f$  não *elementar* não for cortada, ou ela está pendurada em uma configuração de vértices pertencentes ao conjunto  $V_f$  não permitida (o que implica a existência de um CPI) ou, estando pendurada de uma configuração permitida, pelo fato de não ter sido cortada, implicará também a existência de um CPI pelo lemas *V.9*, *V.10*, *V.11*, *V.12*, *V.13*, *V.14* , *V.15* e *V.16*. ■

No que segue, dado um grafo  $G$  não maximal planar sem cortes tipo *CCC*, *C2*, *C3.1* nem *C3.2*, e dada uma face  $f$  de  $G$  cujo contorno induz um ciclo impar de comprimento  $\geq 5$ , e tal que  $G$  não contenha alguma componente *não elementar* relativa à face  $f$ , será feita a análise necessária para testar se existe ou não algum CPI no grafo  $G$ .

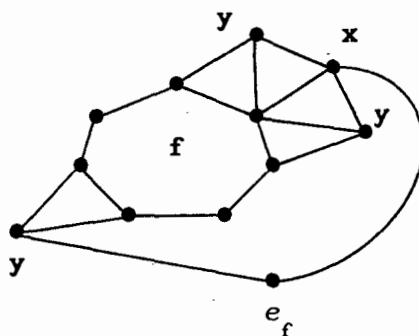
O teorema seguinte fornecerá um conjunto de 16 grafos de grande importância estrutural na análise final do algoritmo.

## OS 16 GRAFOS FINAIS

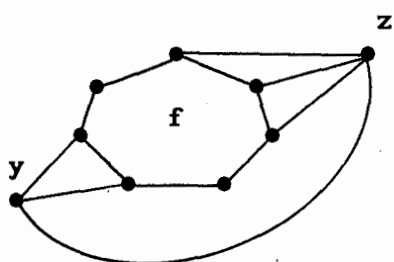
*Teorema V.4:* Seja um grafo  $G$  não maximal planar e tal que não existem em  $G$  cortes do tipo CCC, C2, C3.1 nem C3.2. Então ou  $G$  é um ciclo induzido de tamanho 5 ( $C_5$ ), ou um ciclo induzido de tamanho 7 ( $C_7$ ), ou uma roda de tamanho 5 ( $W_5$ ), ou uma roda de tamanho 7 ( $W_7$ ), ou uma clique ( $K_2, K_3$  ou  $K_4$ ), ou é isomorfo a algum dos 9 grafos representados na Figura (V.36) ou, caso contrário, existe um CPI no grafo  $G$ .



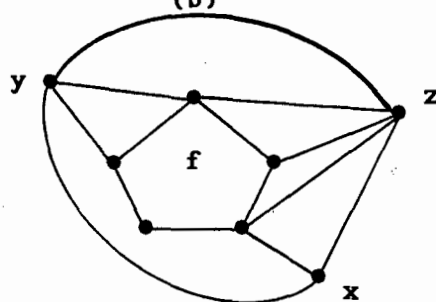
(a)



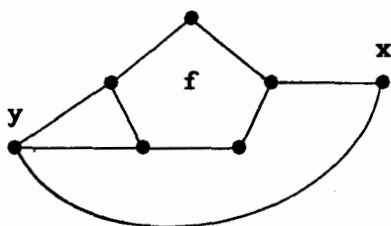
(b)



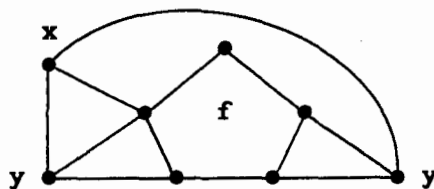
(c)



(d)



(e)



(f)



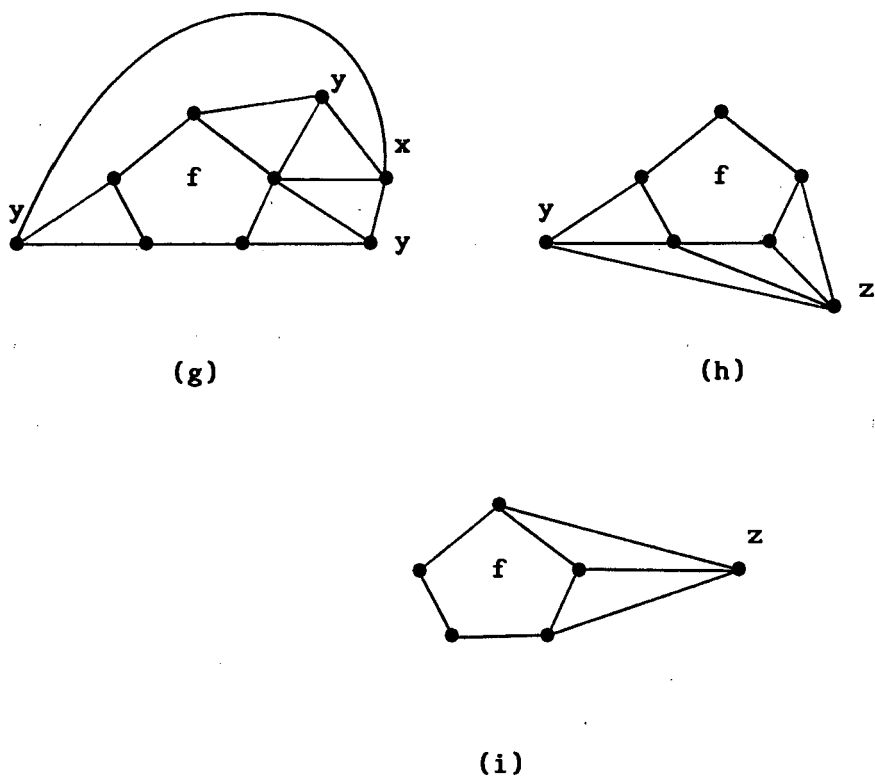


FIGURA V.36

Para a prova do teorema serão necessários previamente alguns lemas.

*Lema V.17:* Seja  $G$  um grafo não maximal planar e sem cortes do tipo CCC, C2, C3.1 nem C3.2, e seja  $f$  uma face de  $G$  que induz um ciclo impar  $\geq 5$ . Então, a vizinhanza de todo vértice tipo  $y \in V_f$  é isomorfa a algum dos 4 grafos representados na Figura (V.37) ou, caso contrário, existe um CPI em  $G$ .

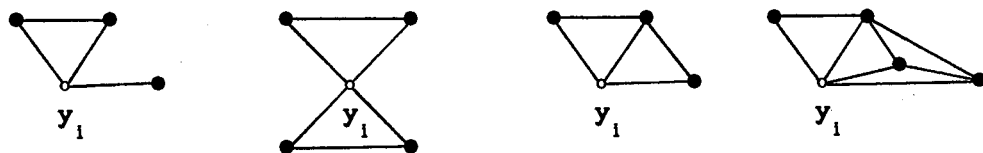
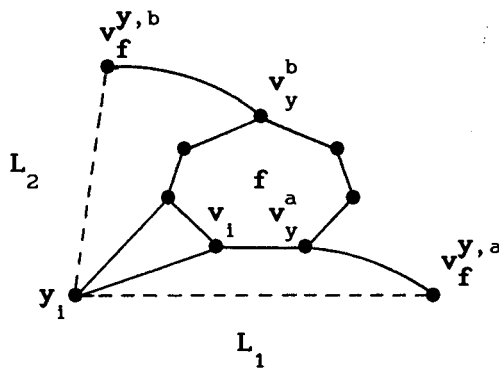


FIGURA V.37

*Prova:* Em primeiro lugar é importante notar que nenhum vértice tipo  $y$  pode ver mais do que um só vértice de qualquer componente elementar, pela própria estrutura dos cortes e dos subgrafos proibidos associados aos cortes. Ou seja, é suficiente provar que todo vértice  $y_j$  pode ver só ou um vértice pertencente a uma componente elementar, ou um vértice  $x_i$ , ou um vértice  $z_i$ , ou um vértice  $x_i$  e um vértice  $z_i$  (ou  $z_i$  e  $x_{i+2}$ ) ligados por uma aresta.

Vamos supor então que um vértice  $y$  tem uma vizinhança diferente das acima mencionadas e sejam  $v_f^{y,a}$  e  $v_f^{y,b}$  dois vértices pertencentes a  $V_f$  atingidos a partir do vértice  $y$ , ou através de uma aresta, ou através de vértices de uma componente elementar. Seja  $v_y^a$  o vértice pertencente à face  $f$  ao qual é incidente a última aresta (na direção  $y-v_f^{y,a}$ ) que liga o vértice  $v_f^{y,a}$  à face  $f$ . Analogamente é definido o vértice  $v_y^b$ .

**Caso 1:** não existe aresta entre  $v_f^{y,a}$  e  $v_f^{y,b}$ , Figura (V.38).



F I G U R A V.38

Seja  $L_1$  o caminho por fora do contorno da face  $f$  entre  $v_{i+1}$  e  $v_y^a$ , ou seja:

$$L_1 = v_{i+1}, y_1, \dots, v_f^{y,a}, v_y^a.$$

Seja  $L_2$  o caminho por fora do contorno da face  $f$  entre  $v_i$  e  $v_y^b$ , ou seja:

$$L_2 = v_i, y_1, \dots, v_f^{y,b}, v_y^b.$$

Sejam  $L_{f_1}$  e  $L_{f_2}$  os respectivos caminhos entre  $v_{i+1}$  e  $v_y^a$  e,  $v_i$  e  $v_y^b$  pelo contorno da face  $f$ , ou seja:

$$L_{f_1} = v_{i+1}, v_1, v_{i-1}, \dots, v_y^a.$$

$$L_{f_2} = v_i, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_y^b.$$

A paridade de  $L_1$  deve ser igual à paridade de  $L_{f_1}$  (assim como a paridade de  $L_2$  deve ser igual à paridade de  $L_{f_2}$ ) pois, caso contrário,  $L_{f_1}$  (ou  $L_{f_2}$ ) completaria um CPI com o resto da face  $f$ . Ou seja, a paridade de  $\{L_1 + \text{aresta } v_{i+1}y_1\}$  deve ser igual à paridade de  $\{L_{f_1} + \text{aresta } v_{i+1}v_1\}$ , assim como a paridade de  $\{L_2 + \text{aresta } v_iy_1\}$  deve ser igual à paridade de  $\{L_{f_2} + \text{aresta } v_iv_{i+1}\}$ .

Isso implica que o caminho entre  $v_y^a$  e  $v_y^b$  por fora da face  $f$  ( $v_y^b = v_k, v_{k-1}, \dots, v_{i+1}, v_1, \dots, v_{i+1}, v_y^a = v_1$ ) terá paridade diferente à do caminho entre esse mesmo par de vértices pelo contorno da face  $f$  ( $v_y^b = v_k, v_{k-1}, \dots, v_{i+1}, v_1, \dots, v_{i+1}, v_y^a = v_1$ ), completando assim um CPI com o resto da face  $f$  entre  $v_y^a$  e  $v_y^b$ .

Caso 2:  $\exists$  a aresta entre  $v_f^{y,a}$  e  $v_f^{y,b}$ .

É claro que, nem  $v_f^{y,a}$  nem  $v_f^{y,b}$  podem ser vértices tipo  $y$ , ou seja, devem ser vértices tipo  $x$  ou  $z$  e, pelo fato de estarem ligados por uma aresta, devem ser vizinhos a algum vértice comum da face  $f$ , ou seja,  $v_f^{y,a}=x_i$  e  $v_f^{y,b}=x_i$  ou,  $v_f^{y,a}=z_i$  e  $v_f^{y,b}=x_{i+2}$  ou,  $v_f^{y,a}=z_i$  e  $v_f^{y,b}=x_i$ . É suficiente provar que devem existir as arestas entre  $y_i$  e  $v_f^{y,a}$  e  $y_i$  e  $v_f^{y,b}$ .

a) Sejam  $v_f^{y,a}=z_j$  e  $v_f^{y,b}=x_{j+2}$ , Figura (V.39).

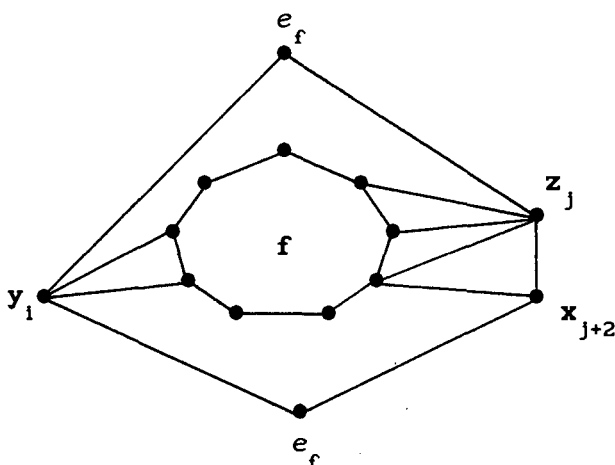


FIGURA V.39

Vamos supor que alguma das duas aresta acima não exista (por exemplo a aresta que liga  $y_i$  a  $v_f^{y,b}$ ); ou seja, existem um ou dois vértices pertencentes a uma componente elementar entre  $y_i$  e  $z_j$ . Para não termos um CPI formado por  $\{Y_i, \text{componente elementar}, z_j, x_{j+2}, \text{componente elementar}, y_i\}$ , a paridade do trecho  $y_i - z_j$  deve ser igual à paridade do trecho  $x_{j+2} - y_i$ .

Sejam  $R_1$  e  $R_2$  os seguintes caminhos, pelo contorno e por fora do contorno da face  $f$ , entre  $y_1$  e  $z_j$ :

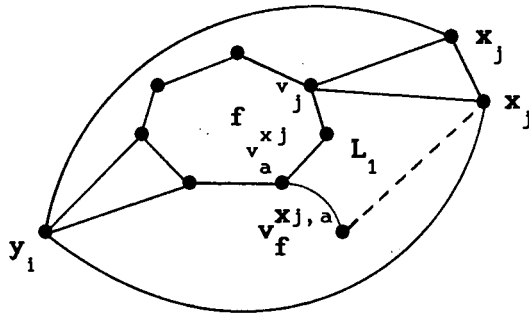
$$R_1 = y_1, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_j, z_j.$$

$$R_2 = y_1, \text{componente elementar}, z_j.$$

As paridades de  $R_1$  e  $R_2$  devem ser diferentes, caso contrário, teríamos um CPI formado por  $R_1 \cup R_2$ ; isso implica que temos um CPI formado por  $\{R_1, \text{aresta } z_j x_{j+2}, \text{componente elementar ou aresta } y_1\}$ .

A prova é análoga no caso de não existir a aresta que liga  $y_1$  a  $v_f^{y,a} = x_{j+2}$ .

b)  $v_f^{y,a} = x_j$  e  $v_f^{y,b} = x_j$ , Figura (V.40).



F I G U R A V.40

Será provado agora que essa configuração não pode existir sem implicar a existência de um CPI. Se os vértices  $y_1$  e  $v_j$  não formarem um corte tipo C2, significa que algum dos vértices  $x_j$  ligados ao vértice  $y_1$  vê algum outro vértice além do vértice  $y_1$  e do vértice  $v_j$ .

Seja  $v_f^{x_j, a}$  o primeiro vértice  $\neq x_j$  e  $\neq y_1$  que é atingido a partir de um dos vértices  $x_j$  ligados a  $y_1$  através de um caminho  $L_1$ , que pode estar composto por: outros vértices  $x_j$ , uma componente elementar ou ser simplesmente uma aresta.

A paridade de  $\{L_1 + \text{aresta } v_f^{x_j, a} v_a^{x_j}\}$  deve ser igual à paridade de  $\{\text{aresta } x_j v_j + \text{caminho pelo contorno da face } f: v_j, v_{j+1}, \dots, v_a^{x_j}\}$ , caso contrário, teríamos um CPI formado por:

$$\{y_1, x_j, L_1, v_f^{x_j, a}, v_a^{x_j} = v_k, v_{k+1}, \dots, v_1, y_1\}.$$

Pela afirmação anterior e usando argumentos análogos ao utilizados na parte a) do lema, temos um CPI formado por:

$$\{y_1, x_j, x_j, L_1, v_f^{x_j, a}, v_a^{x_j} = v_k, v_{k+1}, \dots, v_1, y_1\}.$$

A mesma coisa acontece se em lugar de termos as duas arestas entre  $y_1$  e os dois vértices  $x_j$  temos uma delas (ou as duas) substituída por uma componente elementar. ■

*Lema V.18:* No grafo  $G-f$  não pode existir nenhum ciclo induzido de tamanho  $>3$  sem implicar a existência de um CPI no grafo  $G$ .

*Prova:* Pelo lema anterior temos que no grafo  $G-f$  não existe um ciclo induzido  $>3$  que passe por um vértice tipo  $y$ . Resta provar então que não pode existir em  $G-f$  um ciclo impar induzido (CII)  $>3$  passando só por componentes elementares e vértices tipo  $x$  e tipo  $y$  sem implicar a existência de um CPI em  $G$ .

Já foi provado que as seguintes configurações implicam a existência de um CPI:

- \* arestas entre  $x_i$  e  $x_j$ , com  $i \neq j$ .
- \* componentes penduradas de  $x_i$  e  $x_j$ , com  $i \neq j$   
 $i \neq j+1$
- \* arestas ligando  $z_i$  e  $x_j$ , com  $i \neq j$ ,  $i \neq j-2$
- \* componentes penduradas de  $x_i$  e  $z_j$ , com  $i \neq j$   
 $i \neq j-2$
- \* arestas entre  $z_i$  e  $z_j$ .
- \* componente pendurada de  $z_i$  e  $z_j$ .

Então, se existir um CII  $>3$  no grafo  $G-f$ , terá que ser uma seqüência de vértices tipo  $z$  e tipo  $x$  vizinhos a algum vértice comum da face  $f$ , e componentes elementares de um vértice só penduradas de vértices tipo  $x$  consecutivos, Figura (V.41), já que, componentes elementares penduradas em vértices  $z_i$  e  $x_i$  (ou  $z_i$  e  $x_{i+2}$ ) ou  $x_i$  e  $x_i$  seriam cortadas por cortes tipo C3.1.

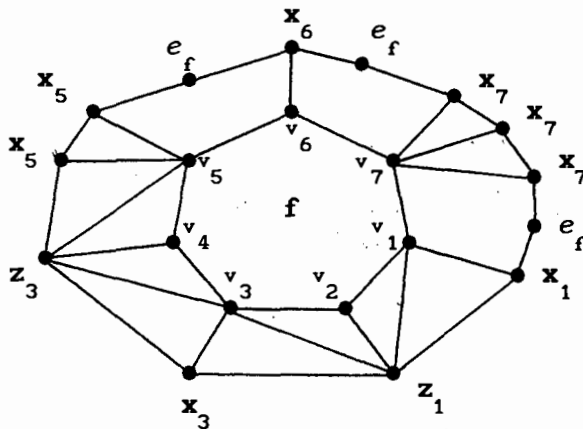


FIGURA V.41

É importante notar que,  $\forall i$  tal que existem vértices  $x_i$ , o número desses vértices deve ser ímpar (número par de arestas entre eles ou nenhuma aresta), caso contrário, teríamos um CPI formado pelos vértices tipo  $x$  ou  $z$  anteriores e posteriores a  $x_i$ , vértices pertencentes a componentes elementares penduradas deles (caso existam) e o restante da face  $f$ . No exemplo da Figura (V.41), o CPI é:  $v_3, z_3, x_5, x_5, e_f, x_6, v_6, v_7, v_1, v_2, v_3$ .

Por outro lado, se todos eles forem ímpares, o ciclo induzido do grafo  $G-f$  seria par, pois, o número de arestas incidentes a cada vértice  $z$  é 2, as incidentes a vértices pertencentes a componentes elementares penduradas de vértices  $x_j$  e  $x_{j+1}$  é também 2 para cada um desses vértices e, se o número de vértices  $x_i$  for ímpar  $\forall i$  tal que existe algum vértice  $x_i$ , o número de arestas incidentes só a vértices  $x_i$  seria zero ou par para cada  $i$ , resultando assim um número total par de arestas e, portanto, um CPI no grafo  $G-f$ . Ou seja, ou o ciclo induzido  $>3$  do grafo  $G-f$  é par, ou teremos um índice  $i$  tal que o número de vértices  $x_i$  é par (ou um número ímpar de índices  $i$  tal o número de vértices  $x_i$  para cada um desses  $i$  é par) e, como consequência disso, teremos um CPI do tipo do descrito no exemplo acima Figura (V.41). ■

*Prova do Teorema V.4:* Primeiramente, é fácil ver que se um grafo  $G$  nas condições do teorema for uma clique, ela tem que ser de tamanho 2, 3 ou 4 ( $K_2, K_3$  ou  $K_4$ ), já que os grafos  $K_i$ ,  $i \geq 5$ , não admitem representação planar. Se o grafo  $G$  for simplesmente um ciclo induzido ímpar, este não pode ser  $>7$ , pois, caso contrário, teríamos um corte tipo C2.



Analogamente, se o grafo  $G$  for uma roda, esta não pode ter tamanho  $>7$ , pois, caso contrário, teríamos um corte tipo C3.1 formado por dois vértices da face  $f$  e o vértice central da roda.

Por último, antes de passar à análise dos outros casos, é importante aclarar que, o único grafo  $G$  nas condições do teorema que pode estar constituído só pela face  $f$  (que induz um ciclo ímpar  $\geq 5$ ) e um só vértice pertencente ao conjunto  $V_f$  (que tem que ser necessariamente um vértice tipo  $z$  ( $z_1$ ) pois vértices tipo  $y$  ou tipo  $x$  nessas condições seriam cortados com cortes tipo CCC de tamanhos um e dois, respectivamente), é o representado na Figura (V.36.i), pois, se o tamanho da face  $f$  for  $\geq 7$ , teríamos um corte tipo C2 formado pelos vértices  $v_1$  e  $v_{1+2}$  da face  $f$ . A seguir serão analisados os outros casos.

**Parte a)** Dado um grafo  $G$  nas condições do teorema e uma face  $f$  de  $G$  cujo contorno induz um ciclo ímpar  $\geq 5$ , então ou  $f$  tem tamanho 5 ou 7 ou, caso contrário, existe um CPI no grafo  $G$ .

*Prova da parte a) do Teorema V.4:* Será provado então que, se o tamanho do ciclo induzido pelo contorno da face  $f$  for  $\geq 9$ , existirá um corte ou um CPI em  $G$ .

É importante notar que o grafo  $G-f$  é necessariamente conexo, pois, caso contrário, existiria sempre um corte tipo C2 em  $G$ . Seja então a face  $f$  de tamanho 9.

A1) Vamos supor primeiro que  $\exists$  algum vértice tipo  $z$  ( $z_1$ ). Primeiramente veremos que não pode existir um vértice tipo  $y$  tal que induz um triângulo conjuntamente com a sua vizinhança, o vértice  $z_1$  e um vértice  $x$  que tem um vizinho comum com o vértice  $z_1$  na face  $f$  ( $z_1, y_j, x_{i+2}$ ), Figura (V.42).

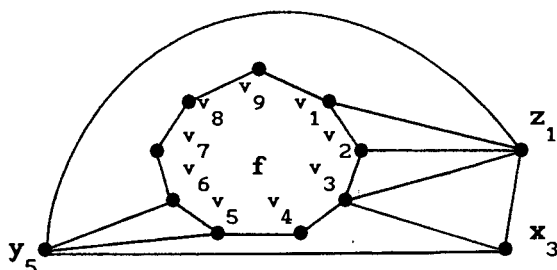


FIGURA V.42

Dado que a face  $f$  tem 9 arestas e só 3 delas são adjacentes aos vértices  $z$ ,  $x$  e  $y$ , dentre as 6 restantes teremos sempre um corte tipo C2, a menos que o vértice  $x$  e/ou o vértice  $z$  estejam ligados através de arestas ou componentes elementares a outros vértices pertencentes a  $V_f$ , vizinhos a vértices da face  $f$  entre  $v_{i+2}$  e  $v_j$  e,  $v_j$  e  $v_{j+1}$ , respectivamente. A existência de um vértice  $v_k \in V_f$  ligado a  $x_{i+2}$ , implicará a existência de um CPI formado, ou por:

$$1) x_{i+2}, v_{i+2}, v_{i+3}, \dots, v_j, y_j, x_{i+2} \quad \text{ou por}$$

$$2) v_1, z_1, x_{i+2}, v_k, v_1, v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_1. \quad v_1 \in f, \exists \text{ aresta } v_k v_1$$

Por outro lado, a existência de um vértice  $v_r \in V_f$  ligado a  $z_1$ , implicará a existência de um corte tipo C3.2 (ab,c), com  $ab = v_{i+2} z_1$  e  $c = v_q$ , sendo  $v_q$  vizinho de  $v_r$ . Ou seja, a existência de um triângulo  $zxy$  implicará sempre a existência de um corte ou de um CPI.

Seja agora um vértice  $z$  ( $z_i$ ) que não forma com nenhum par de vértices  $x$  e  $y$  um triângulo, e seja  $v_k$  o último vértice pertencente a  $V_f$  atingido a partir de  $z_i$  ao longo de um caminho constituído por outros vértices pertencentes a  $V_f$ , vértices pertencentes a componentes elementares, ou simplesmente através de uma aresta, no sentido horário.

Seja  $v_s$  o vértice pertencente à face  $f$  ao qual é incidente a última aresta (sempre no sentido horário) incidente ao vértice  $v_k$ . É claro que,  $v_s = v_{i-1}$  ou  $v_s = v_{i-2}$ , caso contrário, teríamos um corte tipo C2 entre  $v_s$  e  $v_i$  ou um corte tipo C3.2 (ab,c) com  $ab = v_{i+2} z_i$  e  $c = v_s$ .

Sejam  $v_{r_1}, v_{r_2}, \dots, v_{r_m}$  os outros vértices pertencentes a  $V_f$  ( $\neq v_k$ ) no caminho entre  $z_i$  e o vértice  $V_f$ . Pelo Lema V.17 nenhum  $v_{r_i}$ ,  $i=1, \dots, m$ , pode ser um vértice tipo  $y$ , ou seja, todos eles são vértices tipo  $x$  ou tipo  $z$  e, para evitar a existência de um CPI,  $v_{r_i}$  deverá ser um vértice  $x_{i+2}$  ligado a  $z_i$  por uma aresta e, nesse caso, teremos um corte tipo C3.2 (ab,c) com  $ab = x_{i+2} v_{r_i}$  e  $c = v_i$ . Ou seja, os vértices  $v_{r_i}$ ,  $i=1, \dots, m$ , não podem existir e, conseqüentemente, o vértice  $v_k$  tem que ser do tipo  $y$  ( $y_i, y_{i-1}$  ou  $y_{i-2}$ ). Por outro lado, o vértice  $z$  não pode estar ligado a outros vértices pertencentes a  $V_f$  por dentro do caminho (ou aresta) que liga  $z_i$  a  $v_k$ , por motivos análogos aos que impedem a existência dos vértices  $v_{r_i}$ ,  $i=1, \dots, m$ . Conseqüentemente, o grafo estaria constituído pela face  $f$ , um vértice  $y_j$ , um vértice  $z_i$  e, ou uma aresta ligando-os, ou uma componente elementar pendurada neles, tendo sempre como resultado a existência de um corte tipo C2, formado por dois vértices pertencentes à face  $f$ , sempre que o tamanho de  $f$  seja  $\geq 9$ .

**A2)** Vamos supor agora que não existe nenhum vértice tipo  $z$ . Pelo Lema V.17 não é possível, no grafo  $G-f$ , entrar e sair de um vértice tipo  $y$  e, pelo Lema V.18 não existem ciclos induzidos de tamanho  $>3$  em  $G-f$ . Sendo o grafo  $G-f$  constituído só por vértices tipo  $x$ , vértices tipo  $y$  de grau 1 (em  $G-f$ ), e componentes elementares, concluimos que existem sempre cortes tipo C3.1  $(ab,c)$  com  $ab=v_a v_b$  e  $c=v_c$ , ( $v_a \in V_f; v_b$  e  $v_c \in f$ ), ou cortes tipo C2, constituídos por dois vértices pertencentes à face  $f$ .

**Parte b)** Os únicos grafos não maximais planares sem cortes, sem nenhum CPI e com alguma face de tamanho 7 são, além dos grafos  $C_7$  e  $W_7$ , os três grafos representados na Figuras (V.36.a), (V.36.b) e (V.36.c).

*Prova da parte b) do Teorema V.4:* Seja o grafo  $G$  não maximal planar, sem cortes e com alguma face  $f$  de tamanho 7. Primeiramente é fácil ver que o único grafo  $G$  com essas características e tal que o grafo  $G-f$  é um triângulo, é o representado na Figura (V.36.a). Pelos Lemas V.17 e V.18, e pelos mesmos argumentos utilizados na prova da parte a do Teorema V.4, temos que o único ciclo induzido (triângulo) que pode existir no grafo  $G-f$ , é o formado por um vértice  $y_j$  e vértices  $z$  e  $x$  adjacentes a um mesmo vértice da face  $f$  e que, qualquer outro vértice acrescentado a este grafo, Figura (V.36.a), origina ou um corte ou um CPI.

Seja agora uma face  $f$  de tamanho 7 e tal que não existe nenhum vértice tipo  $z$  relativo a essa face. O grafo representado na Figura (V.36.b), é um exemplo de um grafo com essas características, sem cortes e sem nenhum CPI. Provaremos agora que é o único.

Seja então um vértice  $y_j$  e um vértice  $x_1$  ligados, ou por uma aresta, ou por uma componente elementar de um vértice (não pode existir uma componente elementar de dois vértices entre  $y_j$  e  $x_1$  pois teríamos um corte tipo C3.2 (ab,c) com  $ab=v_j v_{j+1}$  e  $c=x_1$ ).

Os únicos vértices que podem existir no grafo, além dos vértices da face  $f$ ,  $y_j$ ,  $x_1$  e, eventualmente, o vértice da componente elementar, são: um ou dois vértices tipo  $y$  adjacente/s a  $v_1$  e a  $x_1$ , já que, pelo Lema V.17, o vértice  $y_j$  não pode ver outro vértice e qualquer outro tipo de vértice produziria ou um CPI (vértice  $y_{i-1}$  ou  $y_{i+1}$  ligado ao vértice  $x_1$  em questão através de um outro vértice  $x_1$ ), ou um corte tipo C3.1 ou C3.2, sendo, em ambos os casos, a aresta  $v_1 x_1$  parte do corte, conjuntamente com algum outro vértice da face  $f$ . Como consequência disto temos que não pode existir uma aresta ligando  $y_j$  a  $x_1$ , pois,  $|j-i|$  deveria ser 0 ou 2, dando lugar a um corte tipo C2 ou C3.2 (dois vértices da face  $f$  ou a aresta  $v_1 x_1$  e um vértice da face  $f$ ). Estando então  $y_j$  e  $x_1$  ligados por uma componente elementar de um vértice e, dado que para não ter um CPI  $|j-i|$  pode ser ou 3 ou 1, vemos que só pode ser igual a 3, pois, caso contrário, teríamos um corte tipo C2 formado por dois vértices da face  $f$ .

Fica provado então que o único grafo  $G$  não maximal planar com alguma face  $f$  de tamanho 7 e sem vértices tipo  $z$  relativos a essa face, é o representado na Figura (V.36.b), já que, se tivermos um só vértice tipo  $y$  adjacente ao vértice  $x_1$ , teríamos um corte tipo C3.2 (ab,c), com  $ab=y_j v_{j+1}$  e  $c=v_1$ .

Seja agora um grafo  $G$  não maximal planar com alguma face  $f$  de tamanho 7 e algum vértice tipo  $z$  relativo a essa face. Será provado agora que os únicos grafos existentes com essas características são os representados nas Figuras (V.36.a) e (V.36.c).

Resta provar então que, fora o grafo da Figura (V.36.a), já provado como o único existente tal que os vértices  $y_j z_k x_{k+2}$  induzem um triângulo, o único grafo existente com as características desejadas é o representado na Figura (V.36.c).

Sem perda de generalidade, seja  $z_1 = z_1$ . Sendo que o grafo  $G-f$  não tem como subgrafo induzido (nem induz) nenhum ciclo  $\geq 3$ , certamente ou o vértice  $v_1$  ou o vértice  $v_3$  farão parte da face exterior da nossa representação de  $G$ . Sem perda de generalidade, suponha-se que o vértice  $v_1$  faz parte da face exterior. Então, para evitar a existência de um corte tipo C3.2 (ab,c), com  $ab=v_3 z_1$  e  $c$ =vértice  $v_1$  de  $f$ , deverá existir algum vértice  $v_k \in V_f$ , adjacente a  $v_6, v_7$  ou  $v_8$ , e esse vértice  $v_k$  deverá ser um vértice tipo  $y$ , pois, por argumentos análogos aos já utilizados anteriormente, não é possível termos um caminho exterior à face  $f$  desde o vértice  $z_1$  ao vértice  $v_6, v_7$  ou  $v_8$ , só através de vértices tipo  $x, z$  e vértices pertencentes a componentes elementares, sem implicar com isso a existência de algum corte ou de algum CPI.

Portanto, esse vértice  $v_k$  deverá ser  $y_5, y_6$  ou  $y_7$ . Seja então  $v_k = y_7$ . Nesse caso teremos sempre um corte ou um CPI, pois, tanto no caso de existir uma aresta quanto no caso de existir um caminho exterior à face  $f$  entre  $z_1$  e  $y_7$ , os vértices  $v_7$  e  $v_3$  constituirão um corte tipo C2, dado que, no primeiro caso (aresta  $y_7 z_1$ ), o vértice  $z_1$  não pode ver nenhum outro vértice pertencente a  $V_f$  adjacente a algum dos vértices  $v_4, v_5, v_6$  ou  $v_7$  pois teríamos sempre um corte tipo C3.2 (ab,c), com  $ab=v_3 z_1$  e  $c=v_7$  ou um CPI.

No segundo caso (caminho induzido exterior à face  $f$  entre  $y_7$  e  $z_1$ ), dado que pelo Lema V.17 não pode existir no caminho nenhum vértice tipo  $y$  ( $\neq y_7$ ), e dado que se o caminho passa só por dois vértices de uma componente elementar os vértices  $v_7$  e  $v_3$  constituiriam novamente um corte tipo C2, temos que, o primeiro vértice de qualquer caminho induzido entre  $y_7$  e  $z_1$ , depois do vértice  $z_1$ , deve necessariamente ser um vértice  $x_3$ , obtendo-se assim um corte tipo C3.2 (ab,c), com  $ab=v_3x_3$  e  $c=v_1$ . Raciocinando de maneira análoga, pode-se ver que o vértice  $v_k$  também não pode ser  $y_6$ ; a única diferença no raciocínio, é que não pode existir a aresta  $y_6z_1$  pois implicaria a existência de um CPI, e o papel desempenhado no caso de  $v_k=y_7$  pelo corte tipo C2 ( $v_7,v_3$ ), é desempenhado no caso  $v_k=v_6$  pelo corte tipo C3.2 (ab,c), com  $ab=y_6v_7$  e  $c=v_3$ .

Seja agora  $v_k=y_5$ . Primeiramente é importante notar que não existem cortes do tipo C3.2 (ab,c), com  $ab=v_3z_1$  ou  $v_2z_1$  e  $c=v_1, v_7$  ou  $v_6$ , pois, em todos esses casos, uma das componentes resultantes após o corte é isomorfa a algum subgrafo proibido para esse tipo de corte, Figura (V.14). Resta cuidar agora dos cortes tipo C3.2 (ab,c), com  $ab=v_3z_1$  e  $c=y_5$ . Ou seja, observar sob que condições esse corte não existe, ou existe mas de maneira que uma das componentes resultantes do corte seja isomorfa a algum dos grafos proibidos associados a esse tipo de corte, Figura (V.14). A única maneira do corte não existir, é ligando  $z_1$  e  $y_5$  por uma aresta ou por uma componente elementar de dois vértices, Figuras (V.43.a) e (V.43.b).

Por outro lado, por questões de paridade, os únicos subgrafos proibidos que podem existir associados a esse corte tipo C3.2 (ab,c), com  $ab=v_3z_1$  e  $c=y_5$ , sem implicar a existência de um CPI, são os isomorfos às Figuras (V.14.c), (V.14.d) e (V.14.f), dando como resultado os grafos representados nas Figuras (V.43.c), (V.43.d) e (V.43.f).

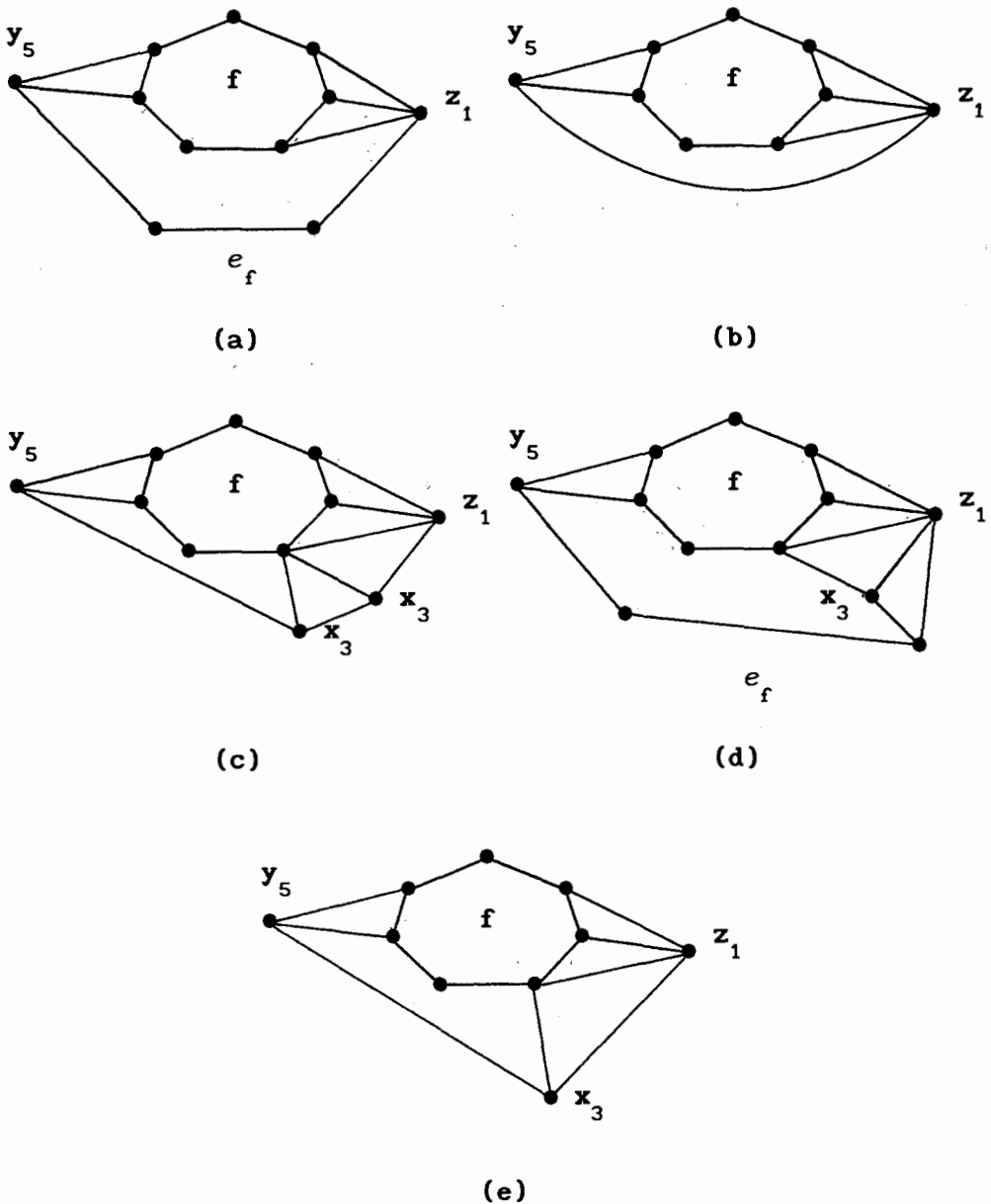


FIGURA V.43



O grafo da Figura (V.43.a) é isomorfo ao grafo da Figura (V.36.a) e tem um corte tipo C3.2 (ab,c), com  $ab=v_4v_5$  e  $c=z_1$ . O grafo da Figura (V.43.c) tem um corte tipo C3.2 (ab,c), com  $ab=v_3x_3$  e  $c=v_1$ . O grafo da Figura (V.43.d) é isomorfo ao grafo da Figura (V.36.b); O grafo da Figura (V.43.e) tem um corte tipo C3.2 (ab,c), com  $ab=v_3x_3$  e  $c=v_1$ . Restou então, como o único grafo possível, o grafo representado na Figura (V.43.b), completando, com os representados nas Figuras (V.36.a) e (V.36.b) conjuntamente com os grafos  $C_7$  e  $W_7$ , o conjunto dos grafos não maximais planares com alguma face  $f$  de tamanho 7, sem cortes e sem nenhum CPI.

**Parte c)** Os únicos grafos com alguma face  $f$  de tamanho 5 e sem nenhuma face de tamanho 7, sem cortes e sem nenhum CPI são, além dos grafos  $C_5$  e  $W_5$ , os representados nas Figuras (V.36.d), (V.36.e), (V.36.f), (V.36.g) e (V.36.h).

*Prova da Parte c) do Teorema V.4:* Os mesmos argumentos utilizados na prova da parte b) do Teorema V.4 (face  $f$  de tamanho 7), mais o fato de o grafo formado por uma face  $f$  de tamanho 5, mais um vértice tipo  $x$ , um vértice tipo  $y$  e um vértice tipo  $z$ ,  $z_1, x_3, y_3$ , induzindo um triângulo, ter um CCC triangular (vértices  $z_1, v_3$  e  $y_3$ ), prova que, o grafo representado na Figura (V.36.d), é o único grafo  $G$  não maximal planar, com alguma face  $f$  de tamanho 5, sem nenhuma face da tamanho  $>5$ , sem cortes, sem nenhum CPI e tal que, o grafo  $G-f$  induz um triângulo e não é possível acrescentar algum vértice ao grafo  $G$ , sem criar algum corte ou algum CPI.

Seja agora um grafo  $G$  nas condições do enunciado da **parte c)** do Teorema V.4, e tal que o grafo  $G-f$  não tenha nenhum ciclo de tamanho  $\geq 3$  como subgrafo induzido. Suponha-se inicialmente a hipótese adicional de não existir nenhum vértice tipo  $z$  relativo à face  $f$  de tamanho 5. Contrariamente ao que acontece na **parte b)** do Teorema V.4 (face  $f$  de tamanho 7), agora pode existir, sem implicar a presença de cortes nem de um CPI, um grafo  $G$  constituído só pela face  $f$ , um vértice  $x$  e um vértice  $y$  ligados por uma aresta, Figura (V.36.e) e, de maneira análoga a utilizada na **parte b)** do Teorema V.4, pode-se provar que os únicos vértices que podem ser acrescentados a esse grafo são um ou dois vértices tipo  $y$  adjacentes ao vértice  $x$  e ao vértice da face  $f$  ao qual o vértice  $x$  está ligado, Figuras (V.36.f) e (V.36.g)). Mudando a paridade da distância entre  $x$  e  $y$ , e levando-se em consideração que já não pode existir uma aresta ligando-os pois teríamos um CPI, é preciso pendurar neles uma componente elementar de tamanho um e, nesse caso, temos que o grafo constituído só pela face  $f$ , os vértices  $y_1$  e  $x_j$  e uma componente elementar pendurada neles, não pode existir, pois, apresenta um corte tipo C3.2 (ab,c), com  $ab=v_1v_{1+1}$  e  $c=v_j$ .

Sem perda de generalidade seja o vértice tipo  $x=x_1$  e o vértice tipo  $y=y_2$ . Se ao grafo descrito acima for acrescentado um vértice tipo  $y=y_1$  adjacente a  $x_1$ , teríamos um corte tipo C3.1= $y_2, v_2, v_1$ .

Se o vértice  $y$  adjacente a  $x_1$  acrescentado ao grafo for o  $y_5$ , ou se acrescentarmos os vértices  $y_1$  e  $y_5$ , Figuras (V.44.a) e (V.44.b), teríamos uma face de tamanho 7 e, portanto, estaríamos fora das hipóteses desta parte do teorema, mas, para fazer a prova mais completa, pode-se ver que estes grafos são isomorfos aos grafos representados nas Figuras (V.36.c) e (V.36.a), respectivamente.

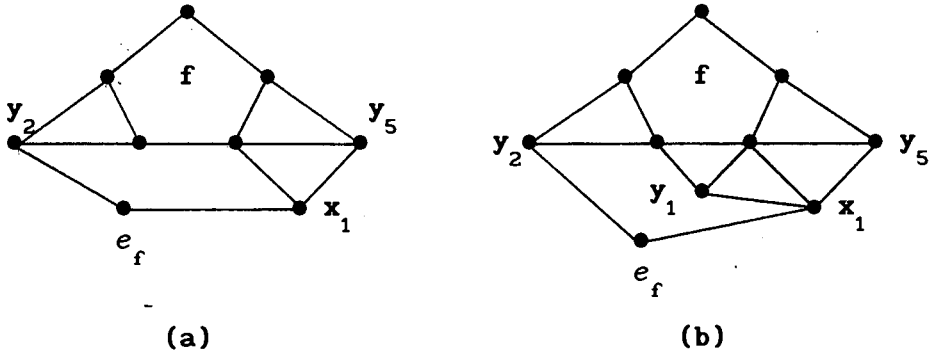
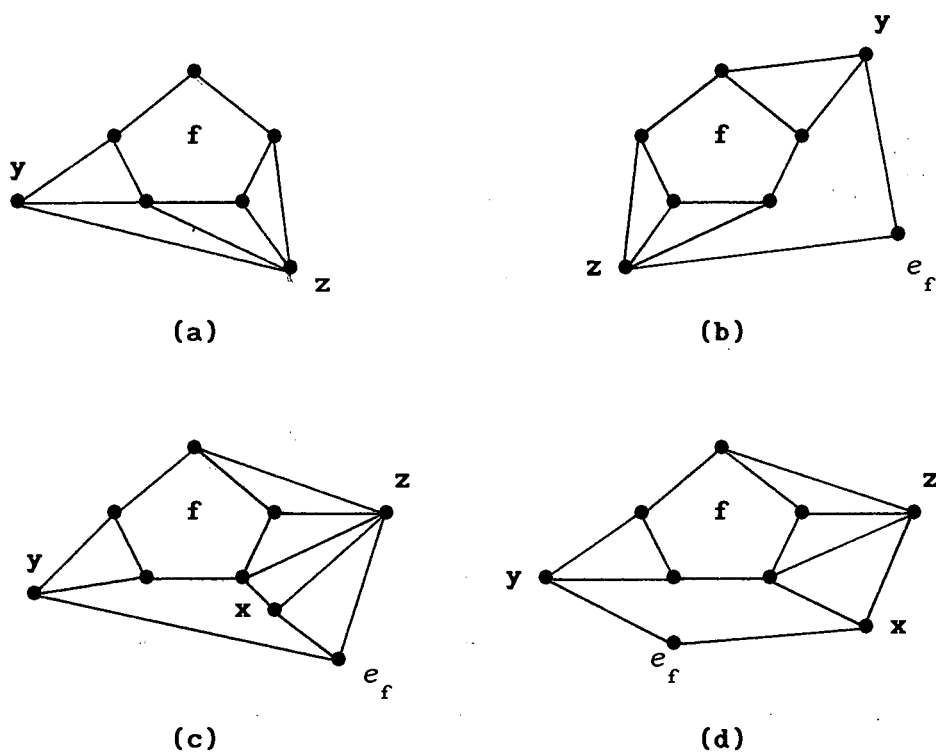


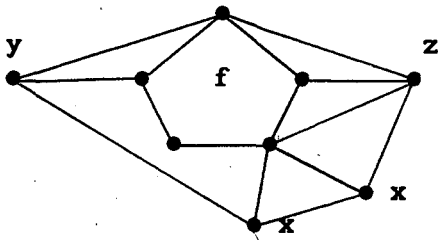
FIGURA V.44

Vamos supor agora que existe um vértice tipo  $z$  relativo à face  $f$ . Sem perda de generalidade seja  $z=z_1$ . Resta provar que, o único grafo não maximal planar com alguma face  $f$  de tamanho 5, sem nenhuma face de tamanho  $>5$ , sem cortes sem nenhum CPI e não isomorfo a nenhum dos grafos já mencionados ( $C_5, W_5$  e os grafos representados nas Figuras (V.36.a), (V.36.b), (V.36.c), (V.36.d), (V.36.e), (V.36.f) e (V.36.g), é o representado na Figura (V.36.h). Analogamente ao feito na prova da parte **b** do Teorema V.4, temos que cuidar agora dos cortes tipo C3.2 ( $ab,c$ ), com  $ab=v_{31}z$  e  $c=y_j$ . Ou seja, sob que condições esse tipo de corte não existe ou existe mas de maneira tal que alguma das componentes resultantes do mesmo seja isomorfa a algum dos grafos proibidos associados a esse tipo de corte, Figura (V.14).

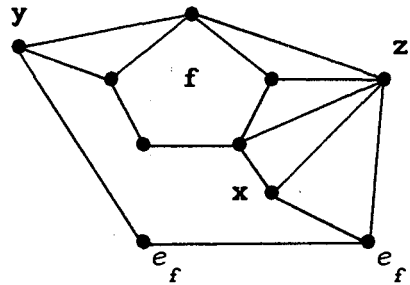
A única maneira do corte não existir é, conforme a paridade da distância entre  $z_1$  e  $y_j$ , ligando eles por uma aresta ou pendurando neles uma componente elementar de tamanho 1, Figuras (V.45.a) e (V.45.b), respectivamente.

Nas Figuras (V.45.c), (V.45.d), (V.45.e), (V.45.f), (V.45.g) e (V.45.h), se encontram representados os grafos resultantes de pendurar na aresta  $v_3z_1$  e no vértice  $y_j$ , os grafos isomorfos aos grafos proibidos associados ao corte acima descrito, Figura (V.14). O valor do índice  $j$  será, em cada caso, o necessário para evitar a existência de um CPI, conforme o subgrafo proibido associado aos cortes tipo C3.2 que for pendurado na aresta e o vértice acima citados.

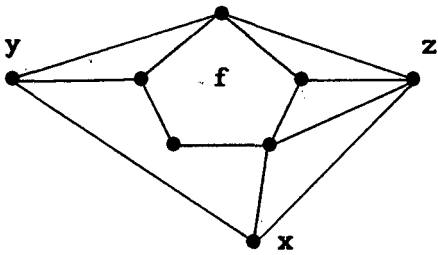




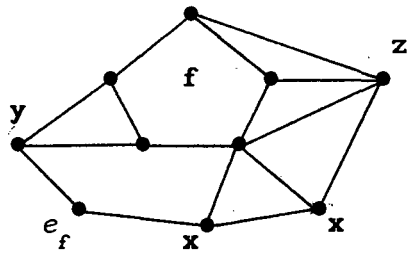
(e)



(f)



(g)



(h)

FIGURA V.45

O grafo da Figura (V.45a) é isomorfo ao grafo da Figura (V.36.h). O grafo da Figura (V.45.b) é isomorfo ao da Figura (V.36.f). Dos grafos restantes da Figura (V.45), os únicos a não apresentarem cortes tipo C3.2 (ab,c), com  $ab=v_3x_3$  e  $c=y_1$ , são os representados nas Figuras (V.45 c) e (V.45 f), sendo que o primeiro deles é isomorfo ao grafo da Figura (V.36.g), e o segundo, além de apresentar uma face de tamanho 7, é isomorfo ao grafo representado na Figura (V.36.a). ■

## CASO 2: GRAFO G MAXIMAL PLANAR

Um grafo planar  $G$  é dito maximal planar (ou  $G$  é uma triangulação planar) se  $G$  pode ser imerso no plano de maneira tal que o entorno de cada face é um ciclo induzido de tamanho três. Ou seja, um grafo  $G$  é maximal planar se não pode ser acrescentado ao mesmo uma aresta adicional sem perder com isso a propriedade da planaridade. Como consequência disso, pode-se dizer também, que um grafo  $G$  é maximal planar se  $m_G = 3n_G - 6$ .

*Lema V.19:* Seja um grafo  $G$  maximal planar tal que todo triângulo do grafo é entorno de alguma face do mesmo, ou seja, tal que não existe um subconjunto de três vértices de  $G$  que induzam um triângulo que não é o contorno de alguma face. É importante aclarar que exigir esta propriedade não acrescenta nada às nossas condições de trabalho, pois, nada mais é do que pedir que o grafo  $G$  maximal planar, não possua um conjunto de corte clique (CCC), e um triângulo que não é o contorno de uma face, seria um CCC. Então todo ciclo induzido de tamanho  $\geq 4$  de  $G$  é um conjunto de corte e os únicos conjuntos de corte dessa classe de grafos, são esses ciclos.

*Prova:* Todo ciclo induzido  $\geq 4$  tem que ter vértices no interior e no exterior pois, caso contrário, o grafo não seria maximal planar. Ou seja, todo ciclo induzido  $\geq 4$  é um conjunto de corte que separa o grafo original  $G$  em duas componentes,  $G_1$  e  $G_2$ , interior e exterior do ciclo. Por outro lado, a existência de um corte minimal que não induza um ciclo  $\geq 4$ , implicaria a existência de alguma face diferente de um triângulo. ■

*Lema V.20:* A vizinhança de todo vértice de um grafo maximal planar sem conjuntos de corte triangulares é um ciclo induzido  $\geq 4$ .

*Prova:* É claro que, a vizinhança de qualquer vértice tem que ser um ciclo pois, caso contrário, o grafo  $G$  teria alguma face diferente de um triângulo e não seria maximal planar. Por outro lado, o ciclo não pode ter cordas, pois isso implicaria a existência de um triângulo que não é uma face e, portanto, seria um conjunto de corte triangular. ■

*Teorema V.5:* Todo grafo  $G$  maximal planar com mais de quatro vértices e sem conjuntos de corte triangulares tem como subgrafo induzido algum ciclo par.

*Prova:* Se existe no grafo  $G$  algum vértice  $v_1$  cujo grau é par, pelo Lema V.20,  $N(v_1)$  (vizinhança do vértice  $v_1$ ), será um CPI. Seja então um grafo  $G$  nas condições do teorema e tal que não existe em  $G$  nenhum vértice de grau par, Figura (V.46).

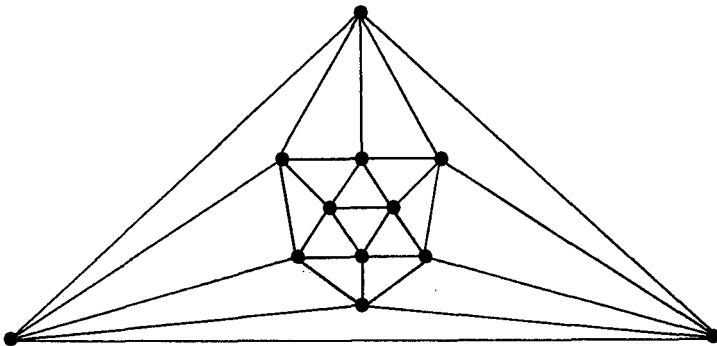


FIGURA V.46

Seja  $f$  uma face qualquer do grafo  $G$ ; é claro que o contorno de  $f$  é um triângulo. Provaremos agora que  $N(f)$  (vizinhança da face  $f$ ) é um CPI.

Pelo Lema V.19, a vizinhança da face  $f$  tem que ser um ciclo induzido, caso contrário, teríamos um conjunto de corte diferente de um ciclo induzido. Seja a face  $f$  constituída pelo vértices  $v_1, v_2$  e  $v_3$ , todos eles de grau ímpar.

Para evitar a existência de uma face de tamanho  $>3$  e levando em consideração a paridade do grau dos vértices  $v_i$ ,  $i=1,2,3$ , cada vértice  $v_i$  tem que ver um número ímpar de vértices consecutivos do ciclo  $N(f)$ , e cada vértice  $v_i$  tem que ter um vizinho comum, no ciclo  $N(f)$ , com os outros dois vértices da face  $f$ . Como consequência disto, o ciclo  $N(f)$  tem que ser necessariamente par, Figura (V.47). ■

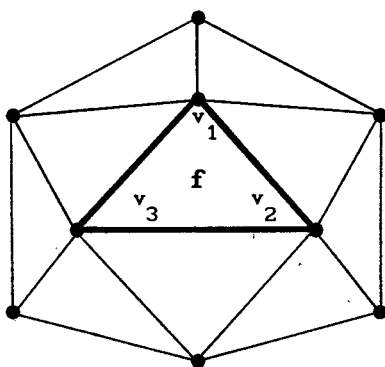


FIGURA V.47



## O ALGORITMO

**Dados:** Grafo  $G$  planar.

**1) Efetuar:** Cortes clique (CCC).

**2) Efetuar:** Cortes tipo C2 em todos os grafos obtidos apos 1), acrescentando em cada caso os vértices artificiais correspondentes. Repetir esta operação em todos os grafos obtidos apos cada corte até obter um conjunto de grafos sem cortes tipo C2 ou ter achado um CPI.

Caso não tenha sido achado nenhum CPI durante a execução de 2),

**3) Efetuar:** Cortes tipo C3.1 em todos os grafos obtidos apos 2), acrescentando em cada caso os vértices artificiais correspondentes. Repetir esta operação em todos os grafos obtidos apos cada corte até obter um conjunto de grafos sem cortes tipo C3.1 ou ter achado um CPI.

Caso não tenha sido achado nenhum CPI durante a execução de 3),

**4) Efetuar:** Cortes tipo C3.2 em todos os grafos obtidos apos 3), acrescentando em cada caso os vértices artificiais correspondentes. Repetir esta operação em todos os grafos obtidos apos cada corte até obter um conjunto de grafos sem cortes tipo C3.2 ou ter achado um CPI.

Caso não tenha sido achado nenhum CPI durante a execução de 4),

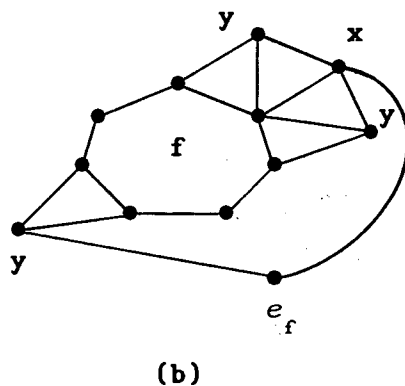
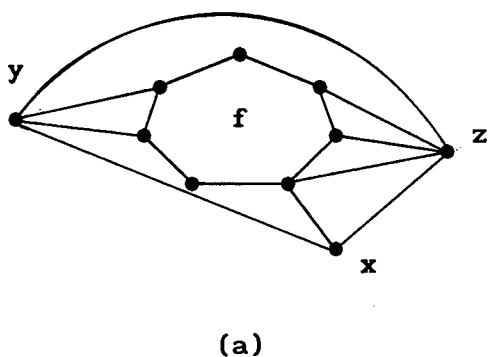
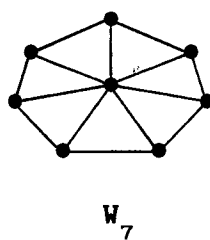
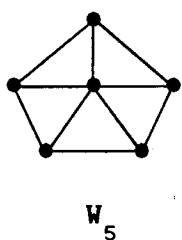
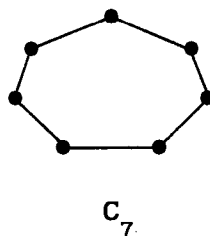
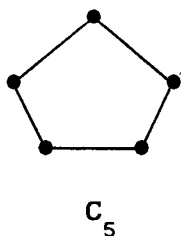
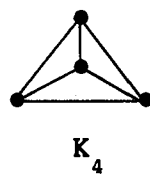
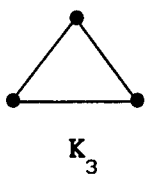
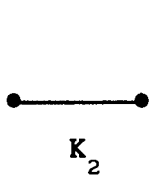
5) **Efetuar:** Verificar se cada um dos grafos obtidos apos 1), 2), 3) e 4) é isomorfo a algum dos grafos representados na Figura (V.48). Caso todos o sejam, o grafo original  $G$  não contém CPI. Se algum dos grafos obtidos depois dos cortes não for isomorfo a algum dos grafos representados na Figura (V.48), o grafo dado  $G$  contém um CPI.

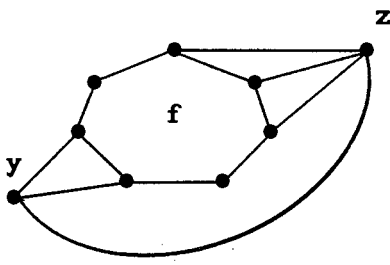
6) **Achar um CPI:** caso algum dos grafos optidos apos 1), 2), 3) e 4),  $H$ , não seja isomorfo a algum dos grafos representados na Figura (V.48), pode-se achar um CPI,  $C_G$ , no grafo original  $G$ , achando, primeiramente, um CPI,  $C_H$ , no grafo  $H$ . O ciclo  $C_G$  é obtido a partir do ciclo  $C_H$  mediante um procedimento de "backtracking", substituindo, cada estrutura de vértices artificiais que inclua vértices artificiais de  $C_H$ , caso exista algum, pela componente que a originou, e os vértices artificiais de  $C_H$  de cada estrutura, pelo caminho mais curto correspondente nessa componente. O procedimento é repetido até obter um CPI sem vértices artificiais, que será também um CPI do grafo original  $G$ . Para obter um CPI no grafo  $H$  procede-se da seguinte maneira:

a) **Grafo  $H$  maximal planar:** se o grafo  $H$  for maximal planar, o Teorema (V.5) fornece uma maneira de achar um CPI neste tipo de grafos.

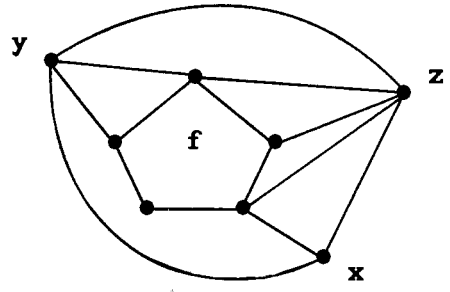
b) **Grafo  $H$  não maximal planar:** se o grafo  $H$  for não maximal planar, procura-se uma face  $f$  não triangular de  $H$ . A seguir verifica-se se existe algum vértice tipo  $z'$  relativo a essa face. Caso exista, teremos um CPI formado por  $z'$  e vértices da face  $f$ .

Caso não exista um vértice tipo  $z'$ , significa que o grafo  $H$  tem um CPI formado, ou por uma aresta que liga dois vértices pertencentes a  $V_f$  mais vértices da face  $f$ , ou por qualquer caminho induzido em alguma componente  $N_S^f$  (elementar ou não) entre vértices da componente vizinhos a vértices de  $V_f$ , mais vértices da face  $f$ . Os lemas (V.5) a (V.16) fornecem uma maneira de achar este tipo de ciclos.

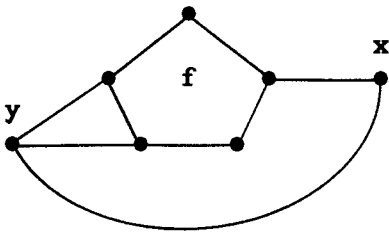




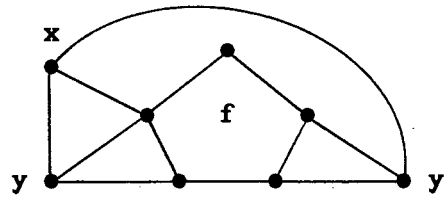
(c)



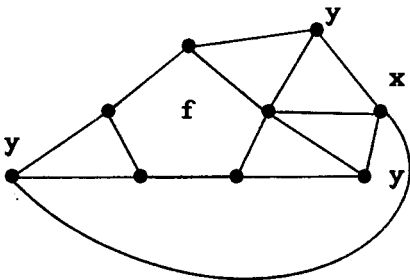
(d)



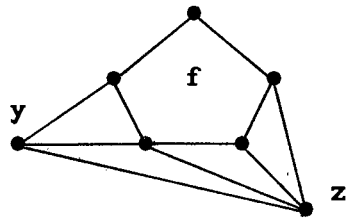
(e)



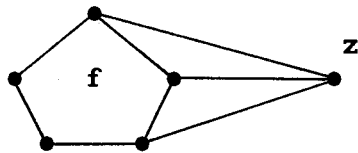
(f)



(g)



(h)



(i)

FIGURA V.48

## RESUMO DO ALGORITMO

**DADOS:** Grafo planar  $G$ .

**PERGUNTA:** Existe algum **CPI** em  $G$  ?

1) Efetuar em  $G$  cortes tipo **CCC**; repetir a operação nos grafos resultantes até obter um conjunto de grafos planares  $A_1$  sem **CCC**.

2) Efetuar em todos os grafos do conjunto  $A_1$  cortes tipo **C2**, acrescentando os vértices artificiais correspondentes; repetir a operação até obter ou um **CPI** ou um conjunto de grafos  $A_2$  sem cortes tipo **C2** nem **CCC**.

3) Efetuar em todos os grafos do conjunto  $A_2$  cortes tipo **C3.1**, acrescentando os vértices artificiais correspondentes; repetir a operação até obter ou um **CPI** ou um conjunto de grafos  $A_3$  sem cortes tipo **C3.1**, nem **C2**, nem **CCC**.

3) Efetuar em todos os grafos do conjunto  $A_3$  cortes tipo **C3.2**, acrescentando os vértices artificiais correspondentes; repetir a operação até obter ou um **CPI** ou um conjunto de grafos  $A_4$  sem cortes tipo **C3.2**, nem **C2**, nem **CCC**, nem **C3.1**.

4) Testar  $\forall$  grafo  $H \in A_4$  se  $H$  é isomorfo a algum dos 16 grafos representados na Figura V.48. Se todos o forem, a resposta à pergunta acima é **NÃO**; caso contrário a resposta é **SIM**.

Caso tenha sido achado um **CPI** contendo vértices artificiais, pode ser obtido o correspondente **CPI** do grafo original  $G$  mediante um procedimento de "backtracking".

## ANÁLISE DA COMPLEXIDADE

Seja  $n$  o número de vértices de um grafo planar  $G$ . Os cortes com conjuntos de corte clique (CCC) de tamanhos 1 e 2 podem ser efetuados em tempo  $O(n)$ , usando busca em profundidade. Os cortes com cliques de tamanho 3 podem ser efetuados em tempo  $O(n^2)$ , removendo cada aresta do grafo e testando, no grafo  $G'$  resultante em cada caso, se existe algum vértice  $v$  vizinho aos dois vértices extremos da aresta removida tal que  $G'-v$  é desconexo. É importante observar que num grafo  $G$  sem CCC de tamanho 3 não pode existir nenhum CCC de tamanho 4, pois, a sua existência, implicaria necessariamente a existência de um CCC de tamanho 3.

As componentes 3-conexas de  $G$  podem ser obtidas em tempo  $O(n)$  mediante o algoritmo de J.E.Hopcroft e R.E.Tarjan (1973). A operação de testar a paridade dos respectivos caminhos induzidos entre os vértices do corte em cada uma das componentes resultantes do mesmo, também pode ser feita em tempo  $O(n)$ . A verificação de se alguma das componentes resultantes do corte é isomorfa a alguma das configurações proibidas, pode ser feita em tempo constante.

Vejam agora a complexidade de testar a existência de um corte de tamanho 3 em  $G$ . Isto pode ser feito mediante a repetição do seguinte procedimento para cada aresta  $(u,v)$  de  $G$ : nos cortes tipo 3.1, testamos para cada vizinho  $u'$  de  $u$  (e não de  $v$ ) e cada vizinho  $v'$  de  $v$  (e não de  $u$ ) se o grafo  $G-[(u,v) \cup u' \text{ ou } v']$  é conexo; esta operação pode ser feita em tempo  $O(n)$  para cada aresta.

No caso dos cortes tipo 3.2, simplesmente testamos se o grafo  $G-(u,v)$  é biconexo, o que pode ser feito em tempo  $O(n)$  para cada aresta.

Ou seja, o proceso todo de acharmos os cortes de tamanho 3 (tipo 3.1 e 3.2) pode ser feito em tempo  $O(n^2)$ .

Se existir um corte de tamanho 3 que não produz uma configuração proibida (tempo constante), então testamos a paridade dos caminhos induzidos necessários (segundo o tipo de corte) entre os vértices do corte (tempo  $O(n)$ ) e, caso os pares de caminhos análogos nas duas componentes resultantes do corte não tenham a mesma paridade, separamos o grafo  $G$  conforme já foi dito, acrescentando os vértices artificiais correspondentes. Ou seja, cada 3-separação pode ser feita, no máximo, em tempo  $O(n^2)$ .

Vamos ver agora que o número de componentes básicas geradas pelo algoritmo é, no máximo,  $O(n)$ . Dado um grafo planar  $G$ , podemos gerar todas as suas componentes 2-inseparáveis em tempo linear. Então, o número total de vértices nestas componentes é também  $O(n)$ . Então, sem perda de generalidade, assumamos que  $G$  é 2-inseparável. Vamos supor que só vamos decompor componentes com mais de 10 vértices (o número de componentes resultantes da decomposição de grafos com até 9 vértices pode ser visto como uma constante). Cada 3-separação criará, no máximo, 9 vértices adicionais (no máximo 3 vértices artificiais em cada uma das componentes resultantes do corte e, os três vértices do corte repetidos) e uma componente a mais. Depois de  $k$  operações, teremos, no máximo,  $n+9k$  vértices e  $k+1$  componentes. A componente maior pode ter, no máximo,  $(n+9k)-10k = n-k$  vértices. Então,  $k$  não pode ser maior do que  $n$  e temos, então,  $O(n)$  componentes.

Como cada corte de tamanho 3 requeria um tempo  $O(n^2)$  e teremos, no máximo, uma quantidade linear dessas operações, a complexidade do algoritmo será  $O(n^3)$ .

## CAPÍTULO VI

### CONCLUSÕES



## CONCLUSÕES

Técnicas similares às utilizadas no algoritmo do Capítulo V poderiam ser usadas na tentativa de resolver vários outros problemas ainda em aberto para grafos planares. O mais próximo poderia ser o seguinte :

**P1):** determinar a complexidade de decidir se existe ou não um ciclo induzido por através de dois vértices dados num grafo planar.

C.McDiarmid et al. (1989) provaram que o seguinte problema pode ser resolvido em tempo polinomial:

**P2):** determinar se existe algum ciclo induzido  $\geq 4$  (qualquer paridade) que passe por um par de vértices determinado num grafo planar.

Este problema é um caso particular do seguinte:

**Problema de empacotamento de caminhos induzidos (ECI):**

**Entrada:** um grafo  $G$ , dois vértices  $s$  e  $t$  de  $G$ , três números inteiros:  $k, e, o$ .

**Pergunta:** é possível acharmos  $k$  caminhos disjuntos em vértices de  $s$  a  $t$  tais que pelo menos  $e$  deles sejam pares, pelo menos  $o$  deles sejam ímpares, e não existam arestas entre nenhum par de vértices internos de dois caminhos diferentes?

O problema P2 é então uma instância do problema ECI com  $k=2$ ,  $e=0=0$  num grafo planar.

Como já foi dito, D.Binstock (1989) mostrou que este problema é NP-Completo para um grafo geral. Determinar se  $s$  e  $t$  fazem parte de um CII é uma instância de ECI com  $k=2$ ,  $e=0=1$ . Do resultado de Binstock obtem-se também que este problema (assim como o de determinar se dois vértices  $s$  e  $t$  fazem parte de um CIP) é NP-Completo.

A.Schrijver (1989) mostrou que para todo inteiro fixo  $n$  e toda superfície  $\Sigma$ , existe um algoritmo polinomial para resolver instâncias do problema ECI tais que  $G$  está imerso em  $\Sigma$ ,  $k \leq n$  e  $e=0=0$ .

Um outro problema de grande importância ligado à teoria de Grafos Perfeitos (e ainda não resolvido para grafos planares) é o de se determinar se um dado grafo  $G$  tem ou não uma dupla par. Dois vértices  $x$  e  $y$  de um grafo  $G$  formam uma *dupla par* se não existe nenhum caminho induzido ímpar entre eles. Veremos agora que as duplas pares podem ser de grande utilidade na coloração de um grafo. Pode-se ver que o problema de verificarmos se dois vértices dados  $s$  e  $t$  de um grafo  $G$  formam uma dupla par, é uma instância do problema ECI com  $k=0=1$  e  $e=0$ .

*Definição:* Seja  $G(V,E)$  um grafo. Sejam  $x$  e  $y$  vértices não adjacentes de  $G$ . O grafo obtido mediante a *contração* de  $G$  em  $\{x,y\}$  tem conjunto de vértices  $V-x-y+x'$  e conjunto de arestas  $E(G-x-y)+\{vx'/v \in G-x-y \text{ e } v \text{ vê } x \text{ e } y \text{ em } G\}$ .

*Observação:* se  $\{x,y\}$  é uma dupla par de  $G$  e  $G'$  é obtido contraindo  $G$  em  $\{x,y\}$ , então  $\chi(G')=\chi(G)$  e  $\omega(G')=\omega(G)$ .

*Prova:* Claramente  $\chi(G') \geq \chi(G)$  e  $\omega(G') \geq \omega(G)$  pois isto é verdadeiro para qualquer par  $\{x, y\}$ . Agora,  $\omega(G') \leq \omega(G)$  porque não existe nenhum caminho induzido de comprimento 3 entre  $x$  e  $y$ . Dado que não existe nenhum caminho induzido ímpar entre  $x$  e  $y$ , existe uma  $\chi(G)$ -coloração de  $G$  na qual  $x$  e  $y$  tem a mesma cor. (se  $x$  e  $y$  tem cores diferentes, trocamos estas cores na componente do grafo induzida pelos vértices destas duas cores que contem  $x$ ). Segue que  $\chi(G') \leq \chi(G)$ . ■

Uma *seqüência de contrações* para um grafo  $G$  é uma seqüência  $G_0 = G, G_1, \dots, G_k$  tal que  $G_k$  é uma clique e, para  $1 \leq i \leq k$ ,  $G_i$  é obtido a partir de  $G_{i-1}$  via uma contração de uma dupla par  $\{x_i, y_i\}$ . Pela observação anterior, se  $G_0, \dots, G_k$  é uma seqüência de contrações para  $G$ , então  $\omega(G) = \chi(G) = |G_k|$ . Trabalhando regressivamente a partir de  $G_k$  podemos achar uma coloração ótima e a clique máxima em  $G_0$ . Para obtermos uma coloração ótima de  $G_{i-1}$  a partir de  $G_i$ , simplesmente atribuímos a  $x_i$  e a  $y_i$  a mesma cor de  $x'_i$ . Para obtermos uma clique máxima de  $G_{i-1}$  a partir de uma clique máxima em  $G_i$ , simplesmente substituímos  $x'_i$  por  $x_i$  ou  $y_i$  caso seja necessário. Então, se podemos encontrar uma seqüência de contrações para um grafo  $G$  em tempo polinomial. Então podemos colorir o grafo otimamente em tempo polinomial.

Já foi provado que isto pode ser feito para várias famílias de Grafos Perfeitos. Consideremos, por exemplo, a classe dos grafos fracamente triangularizados.

Um grafo  $G$  é *fracamente triangularizado* se nem  $G$  nem  $\bar{G}$  contém um ciclo induzido de tamanho  $\geq 5$ . R.Hayward (1985) mostrou que estes grafos são perfeitos. R.Hayward, C.T.Hoang e F.Maffray (1989), mostraram que todo grafo fracamente triangularizado é uma clique ou contém uma *dupla dois*, isto é, um par de vértices  $\{x, y\}$  tal que todo caminho sem cordas entre  $x$  e  $y$  tem comprimento 2. Também mostraram que contraindo uma dupla dois num grafo fracamente triangularizado obtém-se um outro grafo fracamente triangularizado. Finalmente, eles notaram que pode-se testar se um grafo tem uma dupla dois e achar essa dupla, caso exista, em tempo polinomial. Então, para todo grafo fracamente triangularizado, podemos achar uma seqüência de contrações e então uma coloração ótima e uma clique máxima, em tempo polinomial. Além do mais, o seu resultado fornece uma outra prova de que os grafos fracamente triangularizados são perfeitos.

Similarmente, A.Hertz (1989) provou que podemos achar uma seqüência de contrações para um grafo Meyniel em tempo polinomial, obtendo-se assim um algoritmo polinomial para resolver os problemas de coloração e clique máxima nestes grafos e também, uma nova prova destes grafos serem perfeitos.

H.Meyniel (1987), e J.Fonlupt & J.P.Uhry (1982) mostraram (independentemente), que nenhum grafo minimalmente imperfeito pode conter uma dupla par.

Um grafo é dito de *paridade quase estrita* se cada subgrafo dele é ou uma clique ou contém uma dupla par. Um grafo é dito de *paridade estrita* se para cada um dos seus subgrafos  $F$ , ou  $F$  é uma clique ou  $F$  ou  $\bar{F}$  contém uma dupla par.

Pelas afirmações acima e pelo Teorema de Lovasz (prova da CFrGP) vemos que todo grafo pertencente a alguma destas duas famílias é perfeito.

D.Binstock (1989) mostrou que o problema de determinar se um grafo arbitrário contém uma dupla par é NP-Completo. De qualquer maneira é conjecturado o seguinte:

*Conjectura a):* pode-se determinar se um par de vértices  $x$  e  $y$  formam uma dupla par num grafo perfeito em tempo polinomial.

*Conjectura b):* pode-se determinar se um grafo perfeito dado contém uma dupla par e achá-lo caso exista em tempo polinomial.

O problema de determinar se um dado grafo planar tem uma dupla par continua ainda em aberto. W.L.Hsu (1987) mostrou que se  $G$  é um grafo planar perfeito e  $x$  e  $y$  são dois vértices na mesma face de  $G$ , então podemos determinar se  $x$  e  $y$  formam uma dupla par em tempo polinomial. Simplesmente acrescentamos um vértice  $z$  e as arestas  $zx$ ,  $zy$  e verificamos se o grafo planar resultante é ou não perfeito.

D.De Werra (1988) conjecturou que se um grafo contém uma dupla par então ele contém uma dupla par  $\{x,y\}$  tal que  $x$  e  $y$  tem um vizinho comum.

Seria interessante mostrar que podemos encontrar uma dupla par em todo grafo de paridade quase estrita (que não seja uma clique) em tempo polinomial. Melhor ainda seria mostrar que podemos encontrar uma dupla par cuja contração nos dá um outro grafo de paridade quase estrita.

Uma outra classe interessante de grafos são os denominados grafos perfeitamente ordenáveis, definidos por V.Chvatal (1984). É sabido que estes grafos contem uma dupla par. Seria bom desenvolver um algoritmo polinomial para achar seqüências de contração para grafos nesta classe.

Por último, seria muito interessante obtermos uma boa caracterização dos grafos W-Perfeitos. Inclusive, a restrita classe dos grafos planares W-Perfeitos seria de interesse.

## REFERÊNCIAS

- APPEL, K e HAKEN, W. (1977a), "Every planar map is four colorable, part I: discharging", *Illinois J. of Math.*, V21, pp.429-490.
- APPEL, K e HAKEN, W. (1977b), "Every planar map is four colorable, part II: reducibility", *Illinois J. of Math.*, V21, pp.491-567.
- BERGE, C. e CHVATAL V. (1984), "*Topics on Perfect Graphs*", North Holland.
- BINSTOCK, D. (1989), "On the complexity of testing for odd induced cycles and odd induced paths", *submetido a Discrete Math.*
- BONDY, J.A. e MURTY, U.S.R. (1976), "*Graph theory with applications*", North Holland.
- BURLET, M. e FONLUPT, J. (1984), "Polynomial algorithm to recognize a Meyniel graph", *Berge et al. (1984)*, pp.225-252.
- CAMERON, K. (1982), "Polyhedral and Algorithmic ramifications of antichains", *Tese Doutorado Univ. of Waterloo.*
- CHVATAL, V. (1984), "Perfectly ordered graphs", *Berge et al. (1984)*, pp. 63-68.
- DE WERRA, D. (1988), Comunicação privada.
- DIRAC, G.A. (1961), "On rigid circuit graphs", *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, V25, pp.71-76.
- FARY, I. (1948), "On straight line representation of Planar Graphs", *Acta. Sci. Math. Szeged*, V11, pp.229-233.
- FONLUPT, J. e UHRY, J.P. (1982), "Transformations which preserve perfectness and H-perfectness of graphs", *Annals of Discrete Math.*, V16, pp.83-95.
- GOLUMBIC, M. (1980), "*Algorithmic graph theory and perfect graphs*", Academic Press.

- GRÖTSCHEL, M., LOVASZ, L. e SCHRIJVER, A. (1984), *Berge et al. (1984)*, pp. 325-356.
- HAYWARD, R. (1985), "Weakly triangulated graphs", *J.C.T. (B)*, V39, pp. 200-208.
- HAYWARD, R., HOANG, C.T. e MAFFRAY, F. (1989), "Optimizing weakly triangulated graphs", submetido.
- HERTZ, A. (1989), "Fast colouring of Meyniel graphs", submetido.
- HOPCROFT, J. e TARJAN, R. (1973), "Dividing a graph into tri-connected components", *SIAM J. Comp.*, V2, pp.135-158.
- HOPCROFT, J. e TARJAN, R. (1974), "Efficient planarity testing", *J. of ACM*, V21, pp. 549-568.
- HSU, W.L. (1987), "Recognizing planar perfect graphs", *J. of the ACM*, V34, pp. 255-288.
- KURATOWSKI, K. (1930), "Sur le probleme des courbes sur gauches em topologies", *Fund. Math.*, V15, pp. 271-283.
- LOVASZ, L. (1972), "Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture", *Discrete Math.*, V2, pp. 253-267.
- MARKOSSIAN, S. e KERPETJAN, I. (1976), "Perfect graphs", *Akad. Nauk. Armajan. SSR Dokl 63*, pp. 292-296.
- MARKOSSIAN, S., GASPARIAN, G. e REED, B. (1989), "W-Perfect graphs", a aparecer em *J.C.T. (B)*.
- Mc DIARMID, C., REED, B., SCHRIJVER, A. e SHEPHERD, B. (1989), "Induced holes in planar graphs", submetido.
- MEYNIEL, H. (1976), "On the perfect graph conjecture", *Discrete Math.*, V16, pp. 253-267.
- MEYNIEL, H. (1987), "A new property of critical imperfect graphs and some consequences", *Europ. J. Combinatorics*, V8, pp. 313-316.



- OLARU, E. (1969), "Über die Überdeckung von graphen mit cliquen", *Wiss Z. techn. Hochsch. Ilmenau.*, V15, pp. 115-121.
- PADBERG, M. (1974), "Perfect Zero-One Matrices", *Math. Programming*, V6, pp. 180-196.
- REED, B. (1989), Comunicação privada.
- TUCKER, A. (1973), "The strong perfect graph conjecture for planar graphs", *Can. Journal of Math.*, V25, pp. 103-114.
- TUCKER, A. (1977), "Critical perfect graphs and Perfect 3-chromatic graphs", *J.C.T. (B)*, V23, pp. 143-149.
- TUCKER, A. (1983), "Colouring graphs with stable sets", *J.C.T. (B)*, V34, pp. 258-267.
- SHMOYS, D. (1988), Comunicação privada.
- SZWARCFITER, J.L. (1984), "*Grafos e Algoritmos Computacionais*", Editora Campus.