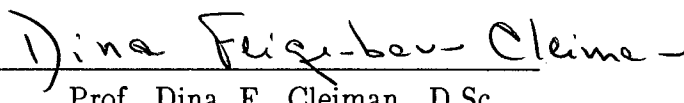


OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS  
INCLUINDO REDE DE TRANSMISSÃO

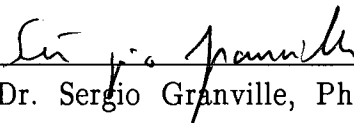
Boris Garbati Gorenstin

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

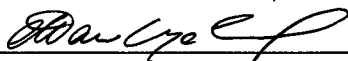
Aprovada por:



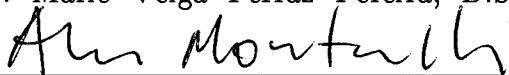
Prof. Dina F. Cleiman, D.Sc.



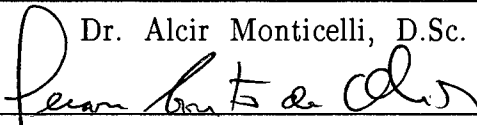
Dr. Sergio Granville, Ph.D.



Dr. Mario Veiga Ferraz Pereira, D.Sc.



Dr. Alcir Monticelli, D.Sc.



Dr. Gerson Couto de Oliveira, D.Sc.

Rio de Janeiro, RJ – BRASIL

Outubro de 1991

À Eliane  
Fernanda  
André Felipe

Gorenstin, Boris Garbati

Otimização Estocástica de Sistemas Hidrotérmicos  
Incluindo a Rede de Transmissão [Rio de Janeiro] 1991  
VIII,119 p. 29.7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,  
Engenharia de Sistemas e Computação, 1991)  
Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE  
1. Otimização da Operação de Sistemas Hidrotérmicos  
I. COPPE/UFRJ      II. Título (série)

## AGRADECIMENTOS

Ao Centro de Pesquisas de Energia Elétrica (CEPEL) pelo apoio e suporte material necessário à realização deste trabalho.

Aos professores Dina F. Cleiman e Sérgio Granville pelo apoio ao meu programa de doutorado.

Ao amigo Mario Veiga Ferraz Pereira pelo incentivo, orientação e participação no desenvolvimento da metodologia.

Aos colegas e amigos Nora Marcela Campodónico, Joari Paulo da Costa e Herminio José da Cunha P. Pinto pela colaboração neste trabalho.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos Requisitos necessários para a obtenção do grau de doutor em Ciências (D.Sc.)

## OTIMIZAÇÃO ESTOCÁSTICA DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS INCLUINDO REDE DE TRANSMISSÃO

Boris Garbati Gorenstin

Outubro de 1991

Orientador: Sergio Granville – Dina F. Cleiman

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

O objetivo da operação ótima de um sistema hidrotérmico consiste na determinação de uma estratégia de geração em cada usina do sistema que minimize os custos de operação no período de planejamento. O custo de operação é composto por gastos com combustíveis nas unidades térmicas, compras de energia em subsistemas vizinhos e penalidades por não atendimento à demanda. Este problema é essencialmente estocástico, devido à impossibilidade de se prever com exatidão as vazões afluentes aos aproveitamentos, e de grande porte, devido à existência de múltiplos reservatórios interconectados, restrições da rede de transmissão e a necessidade de uma otimização multiperíodo para obtenção da operação ótima. Este trabalho descreve um algoritmo de otimização estocástica para sistemas hidrotérmicos incluindo restrições da rede de transmissão, baseado em técnicas de decomposição e simulação e em algoritmos especializados de programação linear que tomam partido das características do problema. É também descrita uma metodologia para repartição dos custos e benefícios associados à operação interligada de sistemas hidrotérmicos, baseada na teoria de custos marginais. Exemplos e casos testes com o sistema interligado Sul–Sudeste e com o sistema da INECEL (Equador) são apresentados e discutidos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as  
partial fulfillment of the requirements for the  
degree of Doctor of Science (D.Sc.)

STOCHASTIC OPTIMIZATION OF HYDROTHERMAL SYSTEMS  
INCLUDING NETWORK CONSTRAINTS

Boris Garbati Gorenstin

October de 1991

Thesis Supervisor: Sergio Granville — Dina F. Cleiman

Department: Computation and System Engineering

The objective of the optimal operation of a hydrothermal system is to determine an operation strategy which, for each stage of the planning period, given the system state, produces generation targets for each plant. This strategy should minimize the expected value of the operation cost along the period, composed of fuel costs plus penalties for failure in load supply. This problem is essentially stochastic, because it is impossible to have perfect forecasts of the future inflows, and large scale, due to the existence of multiple interconnected reservoirs, the need for multiperiod optimization, network constraints and static security constraints. This work describes an algorithm for the optimal stochastic operations scheduling of multireservoir hydrothermal system with power network constraints based on decomposition, simulation techniques and specialized linear programming algorithms. It is also presented a methodology for calculating marginal costs in a hydrothermal system. Examples and case studies with a Brazilian Southern–Shouteastern system and INECEL system (Equador) are presented and discussed.

## ÍNDICE

## I INTRODUÇÃO

- I.1 Introdução
- I.2 Formulação matemática
- I.3 Revisão bibliográfica
- I.4 Objetivos da tese

## II PROBLEMA DE OPERAÇÃO DE UM SISTEMA HIDROTÉRMICO

- II.1 Introdução
- II.2 Modelo de usinas hidroelétricas
- II.3 Modelo de usinas térmicas
- II.4 Modelo da rede de transmissão
- II.5 Restrições de segurança
- II.6 Esquema de solução conceitual

## III PROBLEMA DE DECISÕES SEQUENCIAIS

- III.1 Introdução
- III.2 Caso determinístico
  - III.2.1 Técnicas de solução
  - III.2.2 Esquema de decomposição
  - III.2.3 Algoritmo de solução
  - III.2.4 Extensão para problemas multiestágio
- III.3 Caso estocástico
  - III.3.1 Esquema de decomposição
  - III.3.2 Algoritmo I
  - III.3.3 Algoritmo II: Programação dinâmica dual
    - III.3.3.1 Teste de convergência
    - III.3.3.2 Extensão para modelos autoregressivos

## IV INCLUSÃO DA REDE DE TRANSMISSÃO

- IV.1 Introdução
- IV.2 Formulação matemática
- IV.3 Subproblema energético
- IV.4 Subproblema elétrico

## V CÁLCULO DOS CUSTOS MARGINAIS EM SISTEMAS HIDROTÉRMICOS

- V.1 Introdução
- V.2 Teoria de custos marginais
- V.3 Alocação de custos e benefícios
- V.4 Custos marginais em sistemas elétricos
  - V.4.1 Sistemas térmicos (barra única)
  - V.4.2 Sistemas hidrotérmicos
    - V.4.2.1 Caso determinístico
    - V.4.2.2 Caso probabilístico
  - V.4.3 Sistemas de geração e transmissão
  - V.4.4 Inclusão de restrições de segurança
    - V.4.4.1 Cálculo dos custos marginais
- V.5 Utilização dos custos marginais na expansão do sistema

## VI RESULTADOS COMPUTACIONAIS

- VI.1 Introdução
- VI.2 Caso estudo I
  - VI.2.1 Dados gerais
  - VI.2.2 Dimensão do problema
  - VI.2.3 Resultados
  - VI.2.4 Sensibilidade da solução com o tamanho da amostra
  - VI.2.5 Dimensionamento ótimo
- VI.3 Caso estudo II
  - VI.3.1 Dados gerais
  - VI.3.2 Dimensão do problema
  - VI.3.3 Resultados

## VII CONCLUSÕES

ANEXO I Algoritmo simplex para fluxo de custo mínimo em redes com restrições adicionais

## REFERÊNCIAS



## CAPÍTULO I

## INTRODUÇÃO

## I.1 Introdução

O parque gerador brasileiro é predominantemente hidroelétrico, cerca de 90% da capacidade instalada em 1990, sendo caracterizado por grandes reservatórios existentes nas principais bacias hidrográficas situadas nas regiões Nordeste, Sudeste e Sul do país. O parque térmico, concentrado nas regiões Sul (usinas a carvão) e Sudeste (usinas convencionais e nucleares), é utilizado para complementar a produção de energia em períodos de hidraulicidade desfavorável. Em dezembro de 1990 a capacidade instalada por região era [1]:

Região	Total (MW)	Hidro (MW)	Térmica (MW)
Norte	4 759	3 979	780
Nordeste	7 897	7 217	680
Sudeste	35 963	34 607	1 956
Sul	6 738	5 586	1 152
Central	646	545	101
<b>Total</b>	<b>55 203</b>	<b>50 534</b>	<b>4 669</b>

Tabela I.1 Capacidade instalada

Os sistemas regionais de geração, inicialmente concebidos para atendimento aos mercados locais, vêm sofrendo um processo de interligação para tomar partido da complementaridade dos regimes hidrológicos entre regiões (Sudeste–Sul e Norte–Sudeste) e permitir a transmissão de energia de aproveitamentos distantes dos centros de carga (Norte–Nordeste).

O planejamento da operação de um sistema com as características mostradas acima é bastante complexo, já que a análise do desempenho do sistema deve considerar efeitos de longo prazo (valor esperado do custo de operação do sistema, possibilidade de déficits futuros etc) e efeitos de médio e curto prazo (contratos anuais para suprimento de energia entre empresas, programação das

manutenções nas unidades do sistema etc). De um modo geral, o objetivo da operação de um sistema hidrotérmico consiste na determinação de uma estratégia de geração em cada usina que minimize os custos de operação no período de planejamento. O custo de operação é composto de gastos com combustíveis nas unidades térmicas, eventuais compras de energia em subsistemas vizinhos e penalidades por não atendimento à demanda.

Algumas das características deste problema serão mostradas a seguir. A programação da operação de sistemas hidrotérmicos é um problema essencialmente probabilístico, devido à impossibilidade de se prever com exatidão as afluências aos aproveitamentos do sistema. Outras fontes de incertezas são: a demanda a ser atendida, a disponibilidade dos equipamentos, preços dos combustíveis fósseis, atrasos na entrada em operação de equipamentos etc. Na referência [2] são listadas cerca de 60 fontes de incerteza internas ao setor (vazões afluentes às usinas, disponibilidade de equipamentos etc) e externas (preços dos combustíveis fósseis, crescimento da demanda, restrições ambientais, variação da temperatura etc) ao setor elétrico, que podem ter um impacto relevante nas condições de suprimento de energia ao mercado.

A limitação na disponibilidade de energia hidroelétrica armazenada sob forma de água nos reservatórios cria uma relação entre as decisões tomadas em um estágio qualquer e suas conseqüências futuras [3]. Torna-se necessário o emprego de um período longo de estudo, caracterizando o problema de operação multireservatório como um problema de grande porte. Como os benefícios da geração de uma usina hidráulica não podem ser medidos diretamente como função da geração na usina, mas em termos da economia de combustíveis utilizados, tem-se que as variáveis envolvidas são não separáveis.

O planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos deve considerar também as restrições de origem hidráulica (limitação mínima e máxima de defluência em aproveitamentos, restrições para controle de cheias etc), restrições da rede de transmissão (limites de fluxo nos circuitos, tensão em barramentos, restrições associadas à estabilidade dinâmica do sistema etc) e restrições operacionais (contrato de suprimento entre empresas, programação de manutenção etc).

O despacho obtido considerando-se desde a a otimização plurianual das reservas de água armazenada nos reservatórios até o despacho horário das usinas pode ser ainda inseguro, ou seja, pode não ser possível continuar atendendo à

demanda após um distúrbio no sistema (perda de um gerador ou circuito). A representação das restrições de segurança tem por objetivo garantir que o sistema continue operando atendendo completamente a demanda após a ocorrência de um distúrbio. A análise de segurança do sistema leva a implementação de ações de controle preventivas possibilitando um nível maior de segurança.

Uma outra questão interessante refere-se a repartição dos custos e benefícios associados a operação de sistemas hidrotérmicos. No Brasil, por exemplo o planejamento da operação é realizado de maneira coordenada através de um organismo multilateral (GCOI), o que resulta em substancial benefício econômico tanto em termos de custo de operação (por exemplo, utilizando energia mais barata disponível em outras empresas, ou evitando déficit em uma região através da transferência de energia) quanto em termos do aumento da confiabilidade (através da utilização de capacidade excedente de outras áreas). Uma questão que naturalmente se coloca em toda a atividade coordenada é a repartição, ou rateio, dos benefícios e custos decorrentes destas atividades. Entre as alternativas metodológicas de rateio existente destacam-se os critérios baseados na remuneração a custo marginal [4,5], que apresentam uma série de atrativos em termos de coerência econômica e incentivo à otimização de investimentos e operação.

Esta tese propõe-se a dar uma contribuição para a análise do problema de programação da operação do sistema hidrotérmico. O algoritmo proposto, baseado em técnicas de programação linear estocástica, permite representar as usinas de forma individualizada, a estocasticidade das vazões afluentes aos reservatórios, as restrições da rede elétrica e de segurança do sistema. É apresentada e discutida uma metodologia para repartição dos custos e benefícios associados à operação interligada do sistema hidrotérmico.

No Capítulo I é formulado o problema de programação da operação para sistemas hidrotérmicos e feita uma revisão bibliográfica dos algoritmos de solução existentes.

No Capítulo II são analisados os modelos dos componentes do sistema hidrotérmico e a formulação do modelo para programação da operação de sistemas hidrotérmicos.

No Capítulo III é apresentada uma possível estratégia de solução para o modelo definido no capítulo anterior, sendo mostrada a decomposição do problema

multiestágio em uma sucessão de subproblemas de um único estágio. São incorporadas as restrições provenientes da rede elétrica ao problema de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos.

No Capítulo IV o algoritmo proposto é detalhado, são definidos o subproblemas energético e elétrico e são analisadas as estratégias de solução para cada subproblema.

No Capítulo V, a partir do algoritmo proposto para o planejamento da operação, é descrita uma metodologia para repartição dos custos e benefícios associados à operação coordenada de sistemas hidrotérmicos. A metodologia proposta baseia-se na teoria dos custos marginais e leva em consideração as características particulares do problema.

No Capítulo VI, são apresentados e discutidos casos testes com o sistema interligado Sul-Sudeste e o sistema INECEL (Equador). Finalmente no Capítulo VII, são apresentadas as conclusões deste trabalho.

## 1.2 Formulação matemática

Supondo que os volumes afluentes às usinas sejam conhecidos no início de cada estágio, o problema de planejamento da operação pode ser formulado como um problema de programação dinâmica estocástica [6].

$$\alpha_t(x_t) = E_{a_t | x_t} \left\{ \min_{u_t} c_t(u_t) + \beta \alpha_{t+1}(x_{t+1}) \right\} \quad (\text{I.1.1})$$

s.a

$$x_{t+1} = F_t(x_t, a_t, u_t) \quad (\text{I.1.2})$$

$$R_{t+1}(x_{t+1}) \geq 0 \quad (\text{I.1.3})$$

$$S_t(u_t) \geq 0 \quad (\text{I.1.4})$$

$$t = T, T-1, \dots, 1$$

onde:

$t$  Indexa estágios

$x_t$	Vetor de estado no início do estágio $t$
$\alpha_t(x_t)$	Valor esperado do custo de operação do estado $x_t$ até o final do período de planejamento considerando a política de operação ótima.
$a_t   x_t$	Distribuição de probabilidade do vetor de afluências $a_t$ condicionado pelo estado $x_t$ .
$E\{.\}$	Operador valor esperado
$u_t$	Vetor de decisão associado ao estágio $t$
$c_t$	Vetor de custos associados à decisão $u_t$
$\beta$	Fator de atualização
$F_t$	Função de transição
$R_{t+1}$	Limites no vetor de estado
$S_t$	Limites no vetor de decisão.

A programação dinâmica é um procedimento em que um problema complexo é transformado em uma sequência de problemas de solução mais simples. Cada ponto em que uma decisão pode ser realizada é chamado de **estágio**. Em cada estágio, as características do sistema (por exemplo volume armazenado no início do estágio) são definidas pelo **vetor de estado**. A relação entre os vetores de estado em estágios subsequentes é dada pela **função de transição** (I.1.2). A função que conecta os valores ótimos dos subproblemas é conhecida como **função de recorrência** (I.1.1). A relação de recorrência expressa o fato que  $\alpha_{t+1}(x_{t+1})$ , a solução do problema para os estágios  $t+1, \dots, T$ , independe do estado inicial e da decisão no estágio  $t$ . Esta propriedade é chamada de **princípio da otimalidade** e é base para a solução de problemas de decisões seqüenciais [62].

As variáveis de estado, no caso de otimização da operação de sistemas hidrotérmicos, incluem usualmente o nível dos reservatórios e a tendência hidrológica, fornecida por exemplo através das afluências laterais às usinas nos estágios anteriores. A utilização da tendência hidrológica como variável de estado pode ser entendida considerando-se que as vazões afluentes aos aproveitamentos que ocorreram no passado fornecem um indicador sobre as vazões futuras. Usualmente se representa como tendência hidrológica a vazão do mes anterior. As variáveis de decisão utilizadas são os volumes turbinados ( $q_t$ ) e os volumes vertidos ( $s_t$ ). No capítulo II esta formulação será apresentada detalhadamente para o problema de programação da operação de sistemas hidrotérmicos.

### I.3 Revisão bibliográfica

A utilização de técnicas de programação dinâmica para a solução do

problema de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos tem uma limitação severa associada à dimensão do problema, ou seja, sua aplicabilidade está restrita a problemas de dimensões bastante reduzidas. Algumas das estratégias utilizadas para a solução de problemas com maiores dimensões serão descritas a seguir.

A técnica de equivalentes determinísticos [7,8,9] consiste em eliminar a representação explícita da natureza estocástica das vazões afluentes às usinas. Estes métodos são baseados no princípio do equivalente determinístico, que estabelece que a estratégia ótima para a solução de problemas estocásticos pode ser obtida de forma aproximada através da substituição das variáveis estocásticas por seus valores esperados, possibilitando a utilização de algoritmos de otimização determinística para a solução do problema. Normalmente estes modelos são utilizados de forma adaptativa, ou seja, a partir de novas medições da variável aleatória é possível refazer as previsões, o que permite um refinamento da solução anteriormente obtida. Na referência [8], esta metodologia é aplicada ao sistema interligado Sul-Sudeste utilizando-se técnicas de otimização não linear em redes capacitadas.

Uma característica dos métodos de equivalentes determinísticos é sua tendência otimista, ou seja, o custo de operação do sistema é sempre menor ou igual ao custo de operação caso fosse mantida a estrutura estocástica do problema. A tendência otimista pode ser explicada pela inequação de Jensen [63] que estabelece que o valor esperado de uma função convexa de variável aleatória ( $E(g(x))$ ) é maior ou igual que o valor da função no ponto valor esperado da variável aleatória ( $g(E(x))$ ). Uma tentativa para reduzir a tendência otimista é a representação de cenários alternativos para as variáveis aleatórias [10].

A programação dinâmica, quando aplicada a problemas com variáveis reais, requer a discretização do espaço de estados. Alguns trabalhos sugerem reduzir o esforço computacional através da redução da dimensão do problema utilizando-se uma representação agregada para o sistema hidrotérmico [11,12]. A técnica de agregação [11], conhecida como representação a reservatório equivalente, é baseada na estimação da energia produzida pelo completo deplecionamento dos reservatórios para um dado conjunto de volumes iniciais. Uma estratégia de operação simplificada é assumida, como descrito em [13]. A representação a reservatório equivalente é razoavelmente precisa se os reservatórios tiverem grande capacidade de regularização e as vazões afluentes aos reservatórios forem correlatadas.

Alguns autores sugerem, para a redução do esforço computacional, a utilização de técnicas de agregação analítica das variáveis de estado. Saad e Turgeon [14] propõem a utilização da técnica de componentes principais. Este algoritmo é baseado na otimização determinística para cada cenário de um conjunto de aflúências definido previamente. Os resultados das otimizações são analisados utilizando-se a técnica de componentes principais para a determinação de um conjunto reduzido de variáveis de estado que definam a operação do sistema para a programação dinâmica estocástica. Esta técnica reduz o número de variáveis de estado desde que exista um certo grau de interdependência entre as variáveis. Na literatura não há referências à aplicação desta metodologia a sistemas reais.

Provonost e Davis [15] sugerem a definição de um modelo estocástico de aflúências como função da energia armazenada. Esta técnica se baseia na observação de que a energia armazenada no sistema depende das aflúências passadas e contém, portanto, alguma informação sobre a "tendência hidrológica". O modelo estocástico de aflúências é então expresso como função da energia armazenada. Tavares [16] utiliza uma variável de estado composta por uma combinação linear entre a energia armazenada no início do período e a variável "tendência hidrológica" representada pela aflúência aos reservatórios no estágio anterior. Esta técnica visa a reduzir a dimensionalidade do problema estabelecendo uma relação funcional entre a variação da energia armazenada num mes e o valor esperado da energia afluyente futura.

Outros autores sugerem, para a redução do esforço computacional, a utilização de uma aproximação analítica para a função de custo futuro. Esta representação permite reduzir o número de variáveis de estado a examinar em cada estágio da recursão, já que é necessário apenas calcular a função para alguns pontos e estimar a partir destes pontos os parâmetros desta função. O valor da função para todos os demais pontos é obtido através da função aproximada. Gal [17] sugere a utilização de aproximações quadráticas ou cúbicas para a função de custo futuro. Foufula-Georgiou e Kitanidis [18] sugerem a utilização de uma aproximação baseada nos polinômios de Hermite. Recentemente Stedinger [19] demonstrou que se pode obter um desempenho semelhante ao obtido por [18] utilizando-se aproximações polinomiais do tipo "splines" para a função de custo futuro com menor esforço computacional. Uma aplicação da técnica de aproximação analítica da função de custo futuro para o sistema equivalente do Sudeste do Brasil é apresentada em Costa [20].

Nos algoritmos mostrados anteriormente a "tendência hidrológica" é representada por modelos auto-regressivos de ordem um, nos quais a distribuição de probabilidade das aflúências em um dado período é condicionada pela aflúência observada no período anterior. Entretanto, Kelman [21] mostrou que modelos auto-regressivos de ordem um em escala mensal são otimistas. Como consequência, o modelo tende a atribuir probabilidades excessivamente baixas a secas de longa duração que efetivamente ocorreram no passado. A representação de modelos de aflúência mais complexos requer variáveis de estado adicionais, aumentando o esforço computacional. Kelman e outros [22] propõem a utilização do algoritmo de programação dinâmica amostral que substitui a representação explícita do modelo de aflúências por uma representação implícita dada por uma grande amostra de seqüências de aflúências. Este método baseia-se na definição de um conjunto de cenários para a aflúência ao sistema que são usadas na simulação da operação dos reservatórios para todas as possíveis combinações entre nível de armazenamento e estado hidrológico. Stedinger [23] sugere a utilização da previsão da aflúência futura, em vez do vetor de aflúências passadas, como variável de estado. Em Maceira [24] esta alternativa, combinada com a programação dinâmica amostral, foi aplicada para o sistema interligado Sul-Sudeste Brasileiro.

Recentemente foi proposto um método que aproxima a função de custo futuro de forma analítica que não requer a discretização do espaço de estados. O algoritmo, conhecido como programação dinâmica dual estocástica (PDDE) combina técnicas de otimização de grande porte com a técnica de simulação de Monte Carlo [6]. O algoritmo de PDDE não requer a utilização de técnicas de agregação para as usinas e permite representar modelos auto-regressivos para as vazões afluentes de qualquer ordem sem um aumento excessivo do esforço computacional. Este algoritmo pode ser aplicado desde que as funções que governam o comportamento do sistema sejam convexas.

Os modelos descritos acima não representam a rede elétrica. O despacho da geração obtido através destes modelos pode, portanto, ser eletricamente inviável. A introdução das restrições da rede aumenta consideravelmente a complexidade do problema devido à introdução de um número considerável de restrições e variáveis.

Na literatura encontram-se referências à introdução das restrições da rede dentro do contexto da otimização determinística multireservatório. Os trabalhos [25,26,27] representam a rede elétrica através de um modelo de transportes (limites de capacidades dos ramos), não representando a segunda lei de Kirchhoff.



A referência [27] decompõe o problema nos subproblemas energético e elétrico. O subproblema energético é solucionado através de um algoritmo de fluxo de custo mínimo, enquanto no subproblema elétrico a solução é obtida através de utilização de programação linear e técnicas de programação heurística.

#### I.4 Objetivos da tese

Este trabalho apresenta um método de solução para o problema da otimização estocástica de sistemas hidrotérmicos incluindo restrições da rede de transmissão. O algoritmo utilizado baseia-se em programação dinâmica dual. O problema multiperíodo é decomposto em uma sucessão de problemas de um único período. Cada subproblema é por sua vez dividido em dois subproblemas.

No subproblema energético todas as barras do sistema são agrupadas em uma única barra, e a configuração hidráulica é representada de maneira detalhada. É utilizado para a solução do subproblema um algoritmo de fluxo de custo mínimo com restrições adicionais [29].

No subproblema elétrico é testada a viabilidade elétrica do despacho de geração obtido no subproblema energético e realizada uma análise de segurança do sistema. É utilizado um algoritmo de programação linear eficiente para a solução de problema com a estrutura apresentado pelo subproblema elétrico [30]. São apresentados e discutidos casos exemplos com o sistema interligado Sul-Sudeste e com o sistema do Equador.

Adicionalmente, é discutida uma metodologia para repartição dos custos e benefícios associados à operação interligada de um sistema hidrotérmico baseada na teoria de custos marginais. Esta metodologia pode ser utilizada para rateio dos benefícios associados a produção de energia elétrica, estabelecimento de tarifas de pedágio para acesso ao sistema de transmissão de uma empresa, e na definição de critérios para postergação de obras em caso de restrições financeiras.

## CAPÍTULO II PROBLEMA DE OPERAÇÃO DE UM SISTEMA HIDROTÉRMICO

### II.1 Introdução

A operação estocástica de um sistema multireservatório é um problema de grande porte, não separável e não linear. O objetivo do problema é minimizar o valor esperado do custo de operação constituído por gastos com combustíveis nas usinas térmicas e penalidades por não atendimento à demanda. O horizonte de otimização varia de um a cinco anos, dependendo da capacidade de armazenamento dos reservatórios do sistema. A discretização varia de uma semana a um mês, dependendo da variação da demanda elétrica, restrições hidráulicas etc.

Os sistemas hidrotérmicos de geração são compostos de usinas termoelétricas convencionais ou nucleares e usinas hidroelétricas, conectadas aos centros de carga através de um sistema de transmissão. No item II.2 são descritos os modelos adotados para as usinas hidroelétricas e sua representação por uma estrutura em redes.

No item II.3 é descrito o modelo utilizado para a representação das usinas térmicas.

No item II.4 é descrito o modelo linear utilizado para descrever a rede de transmissão. No item II.5 são modeladas as restrições de segurança para o sistema elétrico.

No item II.6 é formulado o modelo matemático para a operação estocástica de um sistema multireservatório e discutidas as dificuldades para a solução do problema.

## II.2 Modelo de usinas hidroelétricas

As usinas hidroelétricas convertem a energia potencial da água armazenada nos reservatórios em energia cinética, que é utilizada para acionar um conjunto turbina–gerador. As usinas hidroelétricas podem ser classificadas em usinas com reservatório e usinas a fio d’água (sem reservatório). Uma usina hidroelétrica pode ser representada por 3 variáveis (volume armazenado, volume turbinado e volume vertido) e 3 restrições (balanço hídrico, limites de armazenamento e turbinamento e produção energética).

(i) balanço hídrico:

$$v_{t+1} = v_t + a_t + M(q_t + s_t) \quad \text{para } t = 1, \dots, T \quad (\text{II.1})$$

onde:

$t$  Indexa estágios

$T$  Horizonte de planejamento

$v_t$  Vetor de volumes armazenados no início do estágio  $t$  ( $\text{m}^3$ )

$a_t$  Vetor de volumes afluentes incrementais no estágio  $t$  ( $\text{m}^3$ )

$q_t$  Vetor de volumes turbinados no estágio  $t$  ( $\text{m}^3$ )

$s_t$  Vetor de volumes vertidos no estágio  $t$  ( $\text{m}^3$ )

$M$  Matriz de incidência de usinas hidroelétricas definida por:

$M_{ij} = 1$  se a usina  $j$  estiver imediatamente a montante da usina  $i$

$M_{ii} = -1$

$M_{ij} = 0$ , para os demais elementos da linha  $i$

Os vetores  $v_t = [v_{1,t}, v_{2,t}, \dots, v_{n,t}]$ ,  $a_t = [a_{1,t}, a_{2,t}, \dots, a_{n,t}]$ ,  $q_t = [q_{1,t}, q_{2,t}, \dots, q_{n,t}]$  e  $s_t = [s_{1,t}, s_{2,t}, \dots, s_{n,t}]$ , tem dimensão igual a  $n$ , onde  $n$  é o número de usinas do sistema; A matriz  $M$  tem dimensão  $(n \times n)$ . Note que para uma usina a fio d’água  $v_{t+1} = v_t = 0$ .

(ii) **limites de armazenamento e turbinamento:**

$$q_t \leq \bar{q}$$

e para  $t=1, \dots, T$  (II.2)

$$v_t \leq \bar{v}$$

(II.3)

onde:

$\bar{q}, \bar{v}$  Vetores de dimensão ( $n$ ) com as capacidades de turbinamento e armazenamento respectivamente.

(iii) **produção de energia:**

A geração hidroelétrica de uma usina  $i$  está relacionada com o volume turbinado  $q_{i,t}$  no estágio  $t$  por:

$$gh_{it} = \rho_i q_{it} \quad t=1, \dots, T$$

(II.4)

onde  $\rho_i$  é o coeficiente de produtibilidade da usina  $i$ , dado por:

$$\rho_i = 9.81 \times 10^{-3} h_{lit} \mu_{tit} \mu_{git}$$

(II.5)

onde:

$gh_{it}$	Geração hidráulica na usina $i$ durante o estágio $t$ (Mw—mes)
$q_{it}$	Volume turbinado na usina $i$ durante o estágio $t$ ( $m^3$ )
$h_{lit}$	Altura líquida da usina $i$ durante o estágio $t$ (m)
$\mu_{tit}$	Rendimento da turbina da usina $i$ durante o estágio $t$
$\mu_{git}$	Rendimento do gerador da usina $i$ durante o estágio $t$ .

Neste trabalho a produtibilidade de uma usina será considerada constante, calculada na altura líquida média e utilizando-se os valores médios dos rendimentos da turbina e gerador da usina. Esta aproximação é válida no caso brasileiro devido à existência de reservatórios com grande capacidade de regularização e pequena variação da altura de queda para a maioria dos possíveis cenários hidrológicos.

Considerando a produtividade constante, a limitação de geração hidráulica em uma usina  $i$  é dada por:

$$gh_{it} = \rho_i q_{it} \leq \overline{gh}_i \quad t=1, \dots, T \quad (\text{II.6})$$

Algoritmos recentes [64] desenvolvidos para a solução do problema da otimização de sistemas hidrotérmicos aproveitam o fato que as equações de balanço hídrico e as restrições de limite de turbinamento e armazenamento tem uma estrutura de fluxo em redes que permite a utilização de algoritmos de fluxo de custo mínimo em redes capacitadas. Esta equivalência é ilustrada na figura II.1 para um sistema com duas usinas (um reservatório e uma usina a fio d'água) em série e três intervalos de tempo.

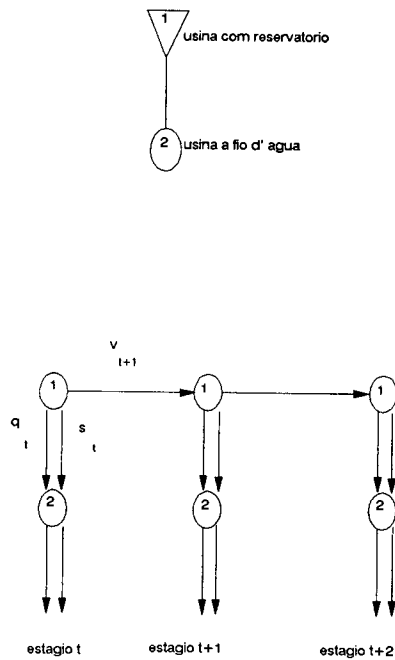


Figura II.1 – Estrutura em redes

Os nós da figura II.1 representam as equações de balanço hídrico em cada usina, os ramos representam as variáveis armazenamento, turbinamento e vertimento. O fluxo de cada ramo está limitado pela capacidade do ramo. Note que uma usina a fio d'água não possui um ramo associado à variável armazenamento.

### II.3 Modelo de usinas térmicas

As usinas termoelétricas podem ser classificadas em dois grupos:

- (i) Convencionais
- (ii) Nucleares

As usinas convencionais utilizam como combustível materiais fósseis como carvão, óleo combustível, gás natural etc. As usinas nucleares utilizam como combustível materiais físeis como urânio, plutônio etc. As usinas térmicas, de um modo geral, produzem vapor, através da queima de combustíveis, que é utilizado para acionar o conjunto turbina-gerador. A representação das usinas térmicas nos estudos de planejamento da operação é feita por uma única variável (geração da usina) com seu custo incremental associado e de uma restrição limitando a capacidade de geração da usina.

(i) limite de geração:

$$gt_t \leq \overline{gt} \quad \text{para } t=1, \dots, T \quad (\text{II.7})$$

onde:

$gt_t$  Vetor de geração térmica no estágio  $t$

$\overline{gt}$  Vetor de capacidades de geração

Os vetores  $gt_t = [gt_{1,t}, gt_{2,t}, gt_{3,t}, \dots, gt_{nb,t}]$  e  $\overline{gt}_t = [\overline{gt}_1, \overline{gt}_2, \overline{gt}_3, \dots, \overline{gt}_{nb}]$  têm dimensão igual a  $nb$ , onde  $nb$  é o número de barras do sistema. Para uma barra ( $i$ ) onde não há geração térmica  $gt_{ti} = \overline{gt}_{ti} = 0$  para  $t=1, \dots, T$ .

### II.4 Modelo de rede de transmissão

A rede de transmissão, composta por linhas e transformadores, é utilizada para transportar a energia gerada nas usinas até os consumidores. Neste trabalho o

sistema elétrico será representado através de um modelo linear, que relaciona os fluxos de potência ativa com as injeções de potência de acordo com [31]:

$$Af + g = d \quad (\text{II.8.1})$$

$$f - \Gamma A^t \theta = 0 \quad (\text{II.8.2})$$

onde:

$nb$  Número de barras

$nl$  Número de circuitos

$A$  Matriz de incidência barra-circuito (dimensão:  $nb \times nl$ )  
 ( $A_{ij}=1$ , se a barra  $i$  for a barra origem do circuito  $j$ ;  
 $A_{ij}=-1$ , se a barra  $i$  for a barra destino do circuito  $j$ ;  
 $A_{ij}=0$ , caso contrário)

$f$  Vetor de fluxo nos circuitos (dimensão:  $nl$ )

$g$  Vetor de gerações hidroelétricas e térmicas (dimensão:  $nb$ )

$d$  Vetor de demanda (dimensão:  $nb$ )

$\theta$  Vetor de ângulos de tensão nas barras (dimensão:  $nb$ )

$\Gamma$  Matriz primitiva. Os elementos da diagonal desta matriz são os inversos das reatâncias dos circuitos. Os demais elementos são nulos (dimensão:  $nl \times nl$ )

$t$  Indica transposição

O conjunto de equações (II.8) corresponde às leis de Kirchhoff. A equação (II.8.1) está associada à conservação de fluxo na rede, e a equação (II.8.2) representa a segunda lei de Kirchhoff, que estabelece que o fluxo em um circuito é igual ao produto entre a susceptância do circuito e a diferença angular entre as barras terminais do circuito.

Utilizando-se (II.8.2), o fluxo em um circuito  $k-m$  pode ser calculado como:

$$f_{km} = (\theta_k - \theta_m) \times \gamma_{km}$$

onde  $\gamma_{km}$  é o inverso da reatância do circuito  $k-m$ .

Note que no modelo linear as perdas de transmissão são desprezadas, já que

$$f_{km} = -f_{mk}.$$

A equação (II.8) pode ser expressa de uma forma mais compacta substituindo-se (II.8.2) em (II.8.1):

$$B\theta + g = d \quad (\text{II.9})$$

onde  $B = A \Gamma A^t$  é a matriz de susceptância definida como:

$$B_{ij} = \gamma_{ij} \quad \text{para } i \neq j$$

$$B_{ii} = -\sum_{j \in \Omega_i} \gamma_{ij}$$

onde:

$\Omega_i$  conjunto de barras diretamente conectadas a barra  $i$ .

A matriz  $B$  que aparece em (II.9) é singular, pois a soma dos componentes de  $d - g$  é nula. Ou seja, a injeção líquida de potência em uma barra qualquer pode ser obtida a partir da soma das demais. Para que a matrix  $B$  seja inversível elimina-se uma das equações de (II.9) e adota-se esta barra como referência angular (usualmente é adotado o valor zero). A partir das considerações acima, dados  $g$  e  $d$ , o conjunto de equações lineares (II.9) pode ser solucionado utilizando-se técnicas de esparsidade para obtenção do vetor  $\theta$  [31]. Conhecido  $\theta$ , os fluxos nos circuitos podem ser obtidos utilizando-se (II.8.2). O fluxo em um circuito está limitado por sua capacidade.

$$|f| \leq \mathcal{F} \quad (\text{II.10})$$

Caso o fluxo de algum circuito exceda a capacidade do circuito, o sistema estará sobrecarregado. A eliminação de sobrecargas requer o redespacho da geração e, se necessário, medidas mais severas como corte de carga em uma ou mais barras.

## II.5 Restrições de segurança

A segurança de um sistema elétrico pode ser definida como a capacidade do sistema em suportar uma perturbação (perda de um componente) e continuar atendendo à demanda. As restrições de segurança são usualmente representadas



através de uma lista de contingências de equipamentos. Dada uma lista de contingências, um ponto de operação **seguro** deve satisfazer ao seguinte conjunto de restrições [32]:

$$\begin{aligned}
 A^0 f^0 + g &= d \\
 g &\leq \bar{g} \\
 f^0 &\leq \bar{f} \\
 f^0 - \Gamma^0 (A^0)^t \theta^0 &= 0 \\
 A^1 f^1 + g &= d \\
 f^1 - \Gamma^1 (A^1)^t \theta^1 &= 0 \\
 f^1 &\leq \bar{f} \\
 \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 A^{nc} f^{nc} + g &= d \\
 f^{nc} - \Gamma^{nc} (A^{nc})^t \theta^{nc} &= 0 \\
 f^{nc} &\leq \bar{f}
 \end{aligned} \tag{II.11}$$

onde:

- $nc$  Número de contingências de equipamentos representadas
- $0$  Grandeza associada ao caso base
- $i$  Grandeza associada à contingência  $i$ .

## II.5 Esquema de solução conceitual

O problema (I.1) pode ser reescrito como:

$$\alpha_t(x_t) = E_{a_t | x_t} \left\{ \min_{u_t} c_t(u_t) + \beta \alpha_{t+1}(x_{t+1}) \right\} \tag{II.12.1}$$

s.a

$$x_{t+1} = F_t(x_t, a_t, u_t) \tag{II.12.2}$$

$$R_{t+1}(x_{t+1}) \geq 0 \quad (\text{II.12.3})$$

$$S_t(u_t) \geq 0 \quad (\text{II.12.4})$$

$$t = T, T-1, \dots, 1$$

Utilizando-se um modelo linear para o sistema elétrico e relaxando-se por simplicidade de notação as restrições de segurança, obtém-se o custo imediato de operação através da solução de:

$$\begin{aligned} c_t(u_t) &= \min c_t g_t + w_t r_t \\ \text{s.a} \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

$$A f_t + g_t + r_t = d_t - \rho q_t$$

$$f_t - \Gamma A^t \theta = 0$$

$$f_t \leq \bar{f}$$

$$g_t \leq \bar{g}^t$$

onde:

$r_t$  Vetor de cortes de carga no estágio  $t$

$w_t$  Vetor de penalidades associados ao corte de carga no estágio  $t$

A função de transição (II.12.2), no caso da otimização estocástica se sistemas hidrotérmicos corresponde à equação do balanço hídrico (II.1). As restrições (II.12.3, II.12.4) correspondem respectivamente às restrições de limite de armazenamento nos reservatórios (II.2) e de limite de turbinamento (II.3). O custo imediato (II.13) é dado pelos gastos com combustíveis nas unidades térmicas utilizados para complementar o suprimento de energia, respeitando-se as equações de conservação de energia (II.8.1), segunda lei de Kirchhoff (II.8.2) e o limite de fluxo nos circuitos (II.10).

O problema como definido em (II.12), é um problema de decisões seqüenciais em que a otimalidade de uma decisão depende do conjunto de acontecimentos futuros. Por exemplo, se em um estágio qualquer se decidir deplecionar os reservatórios e no futuro ocorrerem baixos volumes afluentes,

provavelmente será necessário ligar as usinas térmicas, consumindo combustível e portanto com alto custo de operação; se, por outro lado, a decisão for manter os reservatórios cheios através do uso intensivo da geração térmica, e se ocorrerem no futuro volumes afluentes grandes, provavelmente será necessário verter água, causando desperdício de energia e custos de operação mais altos.

Supondo o espaço de estados em cada estágio discretizado em  $m$  valores e conhecido o estado inicial  $x_{i,1}$ . O algoritmo geral de programação dinâmica pode ser expresso através de:

(a) **início**

$$\alpha_T(x_{i,T}) = 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, m$$

(b) **recursão "backward"**

para  $t = T-1, \dots, 2$  calcular:

para  $i = 1, \dots, m$

$$\alpha_t(x_{j,t}) = \min c_t u_t + \beta \alpha_{t+1}(x_{i,t+1}).$$

onde  $i$  é o índice do intervalo de discretização mais próximo do estado obtido no estágio  $t+1$  a partir do estado  $x_{j,t}$  do estágio  $t$ .

(c) **estágio 1**

calcular para o estado inicial  $x_{i,1}$ :

$$\alpha_1(x_{i,1}) = \min c_1 u_1 + \beta \alpha_2(x_{i,1})$$

A recursão feita no sentido inverso do tempo se inicia em um estágio  $T$  qualquer suficientemente distante no futuro. O estágio b consiste no cálculo recursivo da função  $\alpha_t$  respeitadas as restrições do problema. A solução de (II.12) requer a discretização do espaço de estados, que ocasiona um aumento exponencial do esforço computacional em relação à dimensão do vetor de estados, tornando-se necessário o desenvolvimento de métodos alternativos para a obtenção de sua solução.

## CAPÍTULO III PROBLEMA DE DECISÕES SEQUÊNCIAIS

### III.1 Introdução

No Capítulo II, o problema de operação de um sistema multireservatório foi modelado como um problema estocástico, de grande porte, multiperíodo e não linear. Pode-se simplificar este problema, tornando-o linear, caso as produtibilidades das usinas forem consideradas constantes, neste caso, sua solução pode ser obtida através de algoritmos convencionais de programação linear. Entretanto a utilização de técnicas que tomam partido da estrutura do problema permite uma melhoria no desempenho do algoritmo simplex. As referências [33,34,35,36] utilizam a decomposição de Benders [37] para a solução do problema linear, determinístico, multiestágio. Esta técnica decompõe o problema original em um conjunto de subproblemas de um único estágio. Cada subproblema envia para o subproblema subsequente a sua solução, e recebe deste uma restrição relacionando a variação marginal do valor da sua função objetivo em relação à variação da solução enviada pelo problema precedente.

Estes algoritmos tem o inconveniente da explosão combinatória, como será visto posteriormente. A programação dinâmica dual estocástica, para evitar a explosão combinatória, estima o valor esperado do valor da função objetivo com uma precisão aceitável utilizando uma amostra aleatória do espaço de estados. Esta algoritmo permite obter a solução ótima com uma precisão compatível com o tamanho da amostra escolhido, ou seja, a incerteza da solução para uma amostra de cenários pequena é maior do que para uma amostra maior de cenários.

No item III.2 é apresentado o problema de decisões sequenciais determinístico e as técnicas de solução deste problema. No item III.3 é discutido o problema multiestágio estocástico e apresentado o algoritmo de programação dinamica estocástica dual.

### III.2 Caso determinístico

O problema de decisões seqüenciais será ilustrado primeiramente para o caso determinístico.

$$\text{Min } \sum_{t=1}^T c_t x_t$$

s.a

$$A_1 x_1 = B_1$$

$$H_{t-1} x_{t-1} + A_t x_t = B_t \quad t = 2, \dots, T \quad (\text{III.1})$$

$$x_t \geq 0 \quad t = 1, \dots, T$$

onde:

$T$  Horizonte de planejamento

$x_t$  Vetor de dimensão  $n_t$

$A_t$  Matriz de dimensão  $m_t \times n_t$

$H_t$  Matriz de dimensão  $m_t \times n_t$

Todos os outros vetores e matriz tem dimensões compatíveis com  $x_t$  e  $A_t$ . A matriz de coeficientes de (III.1) tem uma estrutura particular na qual os blocos de elementos não nulos se encontram imediatamente abaixo dos elementos da diagonal. Esta estrutura é conhecida como dual angular ("staircase"). A Figura III.1 ilustra a estrutura da matriz de coeficientes para o problema definido em (III.1).

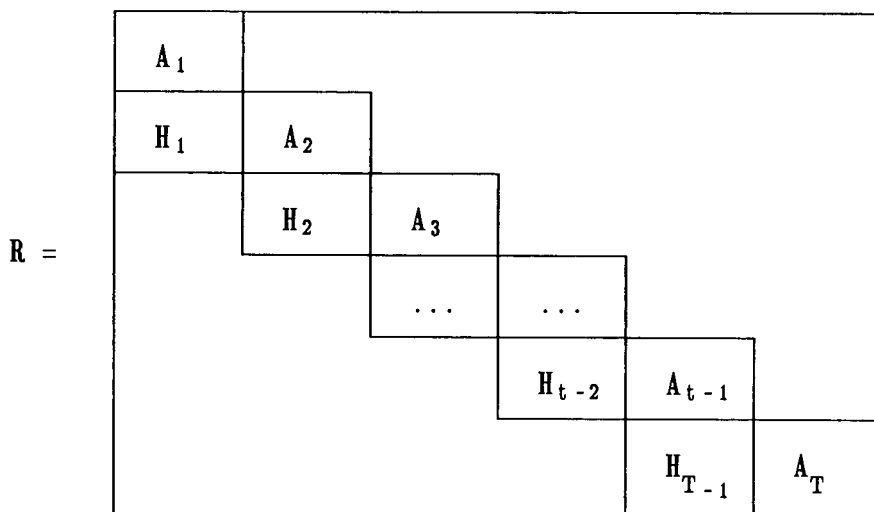


Figura III.1 – Estrutura dual angular

### III.2.1 Técnicas de solução

O método simplex pode ser utilizado diretamente para resolver o problema (III.1), Entretanto, testes em [38] demonstraram que sua solução requer um esforço computacional maior que problemas de tamanho e densidade semelhantes que não possuem a mesma estrutura. Para aumentar a eficiência computacional do algoritmo simplex são propostas na literatura os seguintes esquemas de solução:

#### (i) Redução de base

No algoritmo simplex de programação linear, a maior parte do esforço computacional está relacionado com a obtenção das soluções dos sistemas de equações lineares utilizados para a determinação das variáveis primais e duais a cada iteração. O esquema de base reduzida emprega uma representação especial da base, inversa da base, ou de uma substituta da base ou de sua inversa para a obtenção das soluções destes sistemas. A utilização deste esquema foi sugerida por Dantzig em 1955 [39]. Heesterman e Sandee [40] e Propoi e Krivonoshko [41] empregaram esta técnica para a solução de problemas de decisões seqüenciais. Porém, existem poucas informações sobre o desempenho do método em problemas de grande porte.

(ii) **Decomposição**

Este esquema é baseado em métodos que decompõe o problema em uma sucessão de subproblemas associados a cada estágio. Na literatura encontram-se diversas referências [35,36,43] sobre a aplicação deste método em problemas de decisões seqüenciais. No item seguinte este método será descrito para um problema determinístico de dois estágios.

III.2.2 **Esquema de decomposição**

Os conceitos serão ilustrados através da solução do problema de decisão em dois estágios:

$$z = \min c_1x_1 + c_2x_2$$

s.a

$$A_1x_1 \geq B_1 \tag{III.2.a}$$

$$H_1x_1 + A_2x_2 \geq B_2 \tag{III.2.b}$$

$$x \geq 0$$

O problema (III.2) pode ser interpretado como um processo de decisão em dois estágios. No primeiro estágio obtem-se uma solução viável ( $\hat{x}_1$ ), que satisfaz (III.2.a). Dado o vetor  $\hat{x}_1$ , o problema de segundo estágio pode ser representado por:

$$\alpha(\hat{x}_1) = \min c_2x_2$$

s.a

var  
dual

$$\begin{aligned} A_2 x_2 &\geq B_2 - H_1 \hat{x}_1 && \pi && \text{(III.3)} \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

O dual do problema (III.3) é:

$$\begin{aligned} \alpha(\hat{x}_1) &= \max \pi (B_2 - H_1 \hat{x}_1) \\ \text{s.a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi A_2 &\leq c_2 && x_2 && \text{(III.4)} \\ \pi &\geq 0 \end{aligned}$$

Onde  $\pi$  é o vetor de variáveis duais.

No caso do problema da programação da operação de sistemas hidrotérmicos, os vetores  $x_1$  e  $x_2$  representam as gerações hidráulicas e térmicas, volumes armazenados e vertidos no primeiro e segundo estágio respectivamente. As restrições de operação do primeiro e segundo estágio estão representadas através de (III.2.a e III.2.b). Os custos associados aos estágios referem-se aos gastos com combustíveis.

No problema (III.4) o vetor de decisão  $\hat{x}_1$ , tomado no primeiro estágio, aparece apenas na função objetivo, e não afeta o conjunto de soluções viáveis do problema. Pela teoria de programação linear sabe-se que a solução ótima dos problemas (III.3) e (III.4) coincidem, quando existirem. Supondo que o problema dual tenha solução ótima finita, é possível provar que a função objetivo atinge a solução ótima em pelo menos um vértice. Isto significa que a solução ótima associada a cada decisão de primeiro estágio pode ser caracterizada a priori, sem a necessidade de se resolver (III.4) para cada decisão  $x_1$ . Seja portanto  $\Pi = \{ \pi^i, i=1, \dots, r \}$  o conjunto de vértices tal que  $\{ \pi \in \mathbb{R}_n^+ \mid \pi A_2 \leq c_2 \}$ . O problema (III.4) pode ser reescrito como:

$$\alpha(\hat{x}_1) = \max \pi^i (B_2 - H_1 \hat{x}_1) \quad \text{para } i = 1, \dots, r \quad \text{(III.5)}$$

Este problema pode ainda ser expresso em forma equivalente por:



$$\begin{aligned}
 \alpha(\hat{x}_1) &= \min \alpha \\
 \text{s.a} & \\
 \alpha &\geq \pi^i (B_2 - H_1 \hat{x}_1) \quad \text{para } i = 1, \dots, r
 \end{aligned}
 \tag{III.6}$$

onde  $\alpha$  é uma variável escalar.

A equivalência entre as duas formulações pode ser facilmente verificada observando que se  $\alpha$  é maior ou igual do que  $\pi^i (B_2 - H_1 \hat{x}_1)$ , é maior ou igual a  $\max \{ \pi^i (B_2 - H_1 \hat{x}_1) \}$ . Como o objetivo é minimizar  $\alpha$ , seu valor ótimo é  $\max \{ \pi^i (B_2 - H_1 \hat{x}_1) \}$ . O problema (III.6) pode ser interpretado geometricamente como uma função linear por partes, constituída por hiperplanos suportes da função de custo futuro como mostrado na figura III.2. Este fato permite a caracterização da função de custo futuro sem a necessidade de sua discretização como nos algoritmos baseados em programação dinâmica.

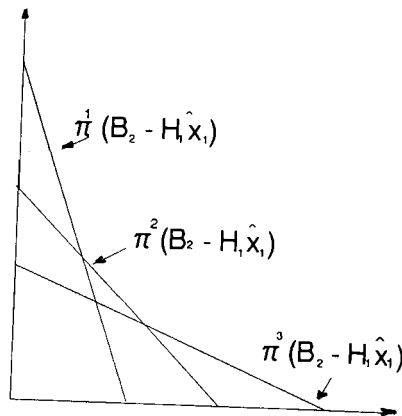


Figura III.2 – Função de custo futuro

Pode-se reescrever o problema (III.2) como:

$$z = \min \left\{ c_1 x_1 + \max_{i=1, \dots, r} \pi_i (B_2 - H_1 x_1) \right\}$$

s.a.

(III.7)

$$A_1 x_1 \geq B_1$$

Ou utilizando—se (III.6):

$$z = \min c_1 x_1 + \alpha$$

s.a.

(III.8)

$$\begin{aligned} A_1 x_1 &\geq B_1 \\ \alpha &\geq \pi^1 (B_1 - H_1 x_1) \\ \alpha &\geq \pi^2 (B_2 - H_1 x_1) \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \alpha &\geq \pi^r (B_2 - H_1 x_1) \end{aligned}$$

O número de restrições  $\alpha \geq \pi_i (B_1 - H_1 x_1)$  deste problema é igual ao número de vértices do conjunto de soluções viáveis de (III.3). Entretanto, é possível demonstrar que o número de restrições ativas (atendidas na igualdade) na solução ótima não excede a  $n_t + 1$ , onde  $n_t$  é o número de variáveis  $x_1$ . Portanto é interessante a utilização de técnicas de relaxação. Experiências demonstram que o número de cortes atendidos no limite na solução ótima é bem menor na maioria dos problemas do que este limite teórico, mesmo em problemas de dimensões elevadas [45].

### III.2.3 Algoritmo de solução

Como mostrado no item anterior, apenas um número pequeno de restrições  $\alpha \geq \pi^i (B_2 - H_2 x_1)$  para  $i = 1, \dots, r$  está atendido na igualdade na solução ótima. A estratégia de solução baseia—se na construção iterativa da função que relaciona a solução ótima do segundo estágio com a decisão do primeiro estágio.

Inicialmente, é escolhido um valor para a decisão de primeiro estágio ( $\hat{x}_1$ ). Dado  $\hat{x}_1$ , é resolvido (III.4), obtendo—se um vetor de decisão associado ao segundo estágio ( $\hat{x}_2$ ). A solução ( $\hat{x}_1, \hat{x}_2$ ) obtida atende às restrições de primeiro e segundo

estágio. Portanto, é um limitante superior para o valor ótimo do problema (III.2), já que sua solução ótima deve ter um custo menor ou igual do que qualquer solução viável. Pode-se construir uma aproximação para o problema (III.8) através de:

$$\begin{aligned} z &= \min c_1 x_1 + \alpha \\ \text{s.a} \end{aligned} \tag{III.9}$$

$$\begin{aligned} A_1 x_1 &\geq B_1 \\ \alpha &\geq 0 \end{aligned}$$

Como o problema (III.9) é construído relaxando-se todas as restrições associadas ao segundo estágio,  $z$  é um limitante inferior para  $z$ , no sentido de que o valor da solução ótima de (III.9) deve ser inferior ao valor da solução de (III.8). Portanto, a solução ótima do problema (III.8) pertence ao intervalo definido por  $[z, \bar{z}]$ . Esta diferença pode ser utilizada para verificar a precisão da solução de (III.9). Considerando que o termo  $c_1 x_1$  aparece nas expressões dos limitantes inferior e superior da solução de (III.9), verifica-se que  $\bar{z} - z$  mede a diferença entre o valor do custo do segundo estágio e o valor previsto utilizando-se (III.8).

A diferença entre o valor previsto e o custo do segundo estágio indica que pelo menos uma das restrições de (III.8) está violada na solução de (III.9). O algoritmo evolui incorporando uma destas restrições. A seguir será descrito como a partir da solução do problema (III.4) pode-se obter uma das restrições de (III.8) violadas na solução de (III.9). Dada uma decisão de primeiro estágio  $\hat{x}_1$ , o custo de operação do segundo estágio é sempre maior que o valor previsto por (III.9) ( $\alpha$ ).

$$c_2 x_2 > \alpha \tag{III.10}$$

Utilizando-se o fato que a solução ótima dos problemas primal (III.4) e dual (III.5) coincidem, tem-se que:

$$c_2 x_2 = \pi^i (B_2 - H_1 \hat{x}_1) \tag{III.11}$$

Substituindo-se (III.11) em (III.10) e cancelando os termos iguais tem-se:

$$\pi^i (B_2 - H_1 \hat{x}_1) > \alpha \tag{III.12}$$

O que mostra que a restrição:

$$\alpha \geq \pi^i (B_2 - H_1 x_1) \quad (\text{III.13})$$

está violada na solução corrente  $(\hat{x}_1, \underline{z})$ . Note que a própria solução do problema de segundo estágio fornece a restrição violada no problema relaxado.

Incorporando-se a restrição violada ao problema (III.9), este passa a ser expresso por:

$$\begin{aligned} \underline{z} &= \min c_1 x_1 + \alpha \\ \text{s.a} \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

$$\begin{aligned} A_1 x_1 &\geq B_1 \\ \alpha &\geq \pi^i (B_2 - H_1 x_1) \quad i = 1, \dots, r \end{aligned}$$

A incorporação de restrições violadas na solução do problema relaxado se processa até que a diferença entre  $\bar{z}$  e  $\underline{z}$  seja inferior a uma determinada tolerância. A convergência finita do algoritmo pode ser demonstrada verificando-se que o número de restrições de (III.8) é finito, já que cada uma está associada a um vértice do conjunto de restrições, e que o algoritmo gera restrições diferentes das já incorporadas ao problema relaxado, considerando que as restrições a serem adicionadas devem estar violadas na solução corrente.

A expressão (III.13) pode ser expressa de uma forma mais conveniente utilizando-se a igualdade primal-dual entre os problemas (III.3) e (III.4):

$$a(\hat{x}_1) = \pi^i (B_2 - H_1 \hat{x}_1) \quad (\text{III.15})$$

Subtraindo-se (III.15) de ambos os lados da restrição (III.13) obtém-se:

$$a - a(\hat{x}_1) \geq \pi^i (B_2 - H_1 x_1) - \pi^i (B_2 - H_1 \hat{x}_1) \quad (\text{III.16})$$

$$a \geq a(\hat{x}_1) - \pi^i H_1 (x_1 - \hat{x}_1) \quad (\text{III.17})$$

É interessante observar que (III.17) pode ser interpretada como a expansão de Taylor de primeira ordem da função de custo do segundo estágio expressa em função das variáveis do primeiro estágio. O problema (III.14) pode ser reescrito utilizando-se (III.17) como:

$$\begin{aligned} z &= \min c_1 x_1 + \alpha \\ \text{s.a} \end{aligned} \tag{III.18}$$

$$\begin{aligned} A_1 x_1 &\geq B_1 \\ \alpha &\geq a(\hat{x}_1) - \pi^i H_1(x_1 - \hat{x}_1) \quad i = 1, \dots, r \end{aligned}$$

Finalmente é possível demonstrar que o método converge mesmo que o subproblema do segundo estágio seja resolvido de maneira aproximada [35].

O algoritmo de decisões seqüenciais para o caso determinístico com dois estagios pode ser resumido nos seguintes passos:

(a) **Inicialização**

$$\begin{aligned} \underline{z} &= 0 \\ \bar{z} &= \infty \end{aligned}$$

(b) **Obtenção da estimativa do custo futuro**

Resolver (III.14) ou (III.18). Seja  $\hat{x}_1$  a decisão de primeiro estágio e  $\underline{z}$  a estimativa para o custo do segundo estágio dada a partir da decisão  $\hat{x}_1$ .

(c) **Cálculo do custo futuro associado à decisão  $\hat{x}_1$**

Utilizando-se  $\hat{x}_1$ , resolver (III.3). Seja  $\hat{x}_2$  a decisão de segundo estágio e  $a(\hat{x}_1)$  o valor ótimo da função objetivo.

(d) **Melhor solução obtida**

$$\bar{z} = \min (\bar{z}, c_1 x_1 + a(\hat{x}_1))$$

(e) **Teste de convergência**

Se  $\bar{z} - \underline{z} < \text{tolerância}$ , **FIM**.

Caso contrário, incorporar a restrição violada expressa sob a forma de (III.13) ou (III.17) ao problema de primeiro estágio:

$$a \geq \pi^i (B_2 - H_1 x_1) \quad (\text{III.19})$$

onde  $\pi^i$  é o vetor de variáveis duais associado a solução de (III.3)

(f) **voltar para o passo b****III.2.4 Extensão para problemas multiestágio**

A extensão do algoritmo descrito acima para problemas determinísticos multiestágio é imediata. Na extensão do algoritmo para problemas multiestágio soluções primais ( $x_t$ ) são passadas aos problemas associados a estágios subsequentes alterando o termo independente do problema associado ao estágio  $t+1$ ; soluções duais ( $\pi_t$ ) são calculadas no problema associado ao estágio  $t+1$  e enviadas ao estágio  $t$  sob a forma de restrições que relacionam a variação marginal do custo de operação do estágio  $t+1$  até o final do horizonte de planejamento com a variação marginal da solução primal fornecida pelo estágio  $t$ . A figura III.3 ilustra o conceito mostrado.

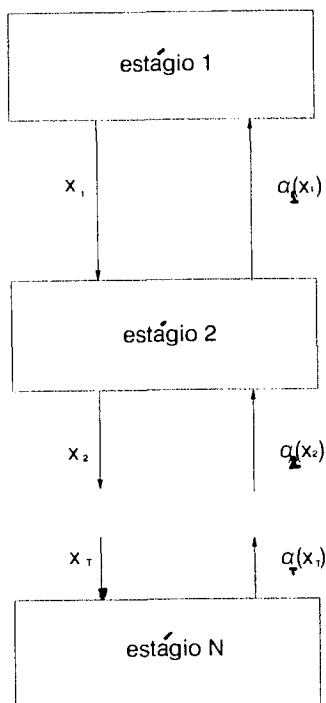


Figura III.3 — Esquema geral de decomposição do problema multiestágio

Existem diversas estratégias que podem ser aplicadas ao algoritmo geral para a solução do problema: a mais simples consiste em percorrer todos os estágios do primeiro até o estágio final, passando a solução primal de um estágio para o estágio subsequente. Uma vez atingido o estágio  $T$ , a direção é alterada e cortes são gerados para os estágios anteriores. Quando o estágio 1 for atingido, o ciclo é repetido até ser obtida a convergência do algoritmo. Uma outra possível estratégia consiste em passar as soluções primais e duais entre os subproblemas até um estágio pré-estabelecido nas primeiras iterações. Nas próximas iterações mais alguns estágios são considerados. Este processo é repetido até se alcançar o subproblema associado ao final do período de planejamento. Outras estratégias para a solução do problema multiestágio determinístico podem ser encontradas na referência [43].

Utilizando a estratégia descrita acima, o algoritmo para a solução do problema multiestágio pode ser representado pelos seguintes passos:

(a) **Inicialização**

$T$  – Horizonte de Planejamento

$$\bar{z} = \infty$$

$$\underline{z} = 0$$

$$\tilde{\alpha}_t(x_t) = 0 \text{ para } t = 0, \dots, T$$

$$\hat{x}_0 = 0$$

onde  $\tilde{\alpha}_t(x_t)$  é a aproximação corrente para a função de custo futuro dada uma decisão  $x_t$  no estágio  $t$ .

(b) **Simulação "forward"**

para  $t = 1, \dots, T$

Resolver o seguinte problema de otimização:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{t-1}(\hat{x}_{t-1}) = & \min c_t x_t + \tilde{\alpha}_t(x_t) \\ \text{s.a.} & \end{aligned} \tag{III.20}$$

$$A_t x_t \geq B_t - H_{t-1} \hat{x}_{t-1}$$

Seja  $\hat{x}_t$ , a solução de (III.20).

(c) **Melhor solução obtida**

$$\bar{z} = \min \left( \bar{z}, \sum_{t=1}^T c_t \hat{x}_t \right)$$

(d) **Simulação "backward"**

para  $t = T, \dots, 1$



Calcular as soluções duais associadas ao problema de otimização:

$$\tilde{\alpha}_{t-1}(\hat{x}_{t-1}) = \begin{array}{ll} \min c_t x_t + \tilde{\alpha}_t(x_t) & \text{variável} \\ \text{s.a} & \text{dual} \end{array} \quad (\text{III.21})$$

$$A_t x_t \geq B_t - H_{t-1} \hat{x}_{t-1} \quad \pi_t$$

A solução dual ( $\pi_t$ ) é utilizada para a construção de mais um hiperplano suporte da função  $\tilde{\alpha}_{t-1}(x_{t-1})$ .

(e) **Cálculo da estimativa do custo de operação**

$$\underline{z} = c_1 x_1 + \tilde{\alpha}_1(x_1)$$

(f) **Teste de convergência**

Se  $\bar{z} - \underline{z} < \text{tolerância}$ , **FIM**.

Caso contrário, incorporar a restrição violada expressa por (III.13) ou (III.18) ao problema associado ao estágio anterior e retornar para o passo b.

Como observação final sobre o problema multiestágio determinístico cabe observar que todos os subproblemas associados aos estágios são idênticos, à exceção do vetor de recursos e dos cortes gerados. Este fato pode ser utilizado para a construção de algoritmos mais eficientes que exploram esta característica.

### III.3 Caso estocástico

O problema de otimização de recursos estocásticos com horizonte finito pode ser formulado matematicamente através de:

$$\min c_1 x_1 + \underset{B_2}{E} \min (c_2 x_2 + \underset{B_3}{E} \min (c_3 x_3 + \underset{B_4}{E} \min (c_4 x_4 + \dots \min c_T x_T)))$$

s.a

$$\begin{aligned} A_1 x_1 & \geq B_1 \\ H_1 x_1 + A_2 x_2 & \geq B_2 \\ H_2 x_2 + A_3 x_3 & \geq B_3 \\ & \vdots \\ H_{T-1} x_{T-1} + A_T x_T & \geq B_T \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

onde as matrizes de restrições  $A_t$ ,  $H_t$  e o vetor  $c_t$  são variáveis determinísticas e o vetor  $B_t$  é um vetor aleatório com densidade de probabilidade conhecida. Considerando as variável aleatória  $B_t$  discreta com um número finito de realizações com probabilidades conhecidas, pode-se reescrever este problema utilizando-se o problema determinístico equivalente mostrado a seguir:

$$\text{Min } c_1 x_1 + \sum_{i=1}^{K_2} p_{i,2} c_2 x_{i,2} + \sum_{i=1}^{K_3} p_{i,3} c_3 x_{i,3} + \dots + \sum_{i=1}^{K_T} p_{i,T} c_T x_{i,T}$$

s.a

$$\begin{aligned} A_1 x_1 & \geq B_1 \\ H_1 x_1 + A_2 x_{1,2} & \geq B_{i,2} & i = 1, \dots, K_2 \\ H_2 x_{a(i,3)} + A_3 x_{i,3} & \geq B_{i,3} & i = 1, \dots, K_3 \\ & \vdots \\ H_{T-1} x_{a(i,T)} + A_T x_{i,T} & \geq B_{i,T} & i = 1, \dots, K_T \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

onde:

- $k_t$  Número de nós do estágio  $t$
- $p_{i,t}$  Probabilidade associada a realização  $B_{i,t}$
- $a_{(i,t)}$  Nó predecessor do nó  $i$  no estágio  $t$
- $B_{i,t}$   $i$ -ésima realização do vetor aleatório  $B_t$

O problema (III.23) pode ser visualizado através da árvore de cenários mostrada abaixo.

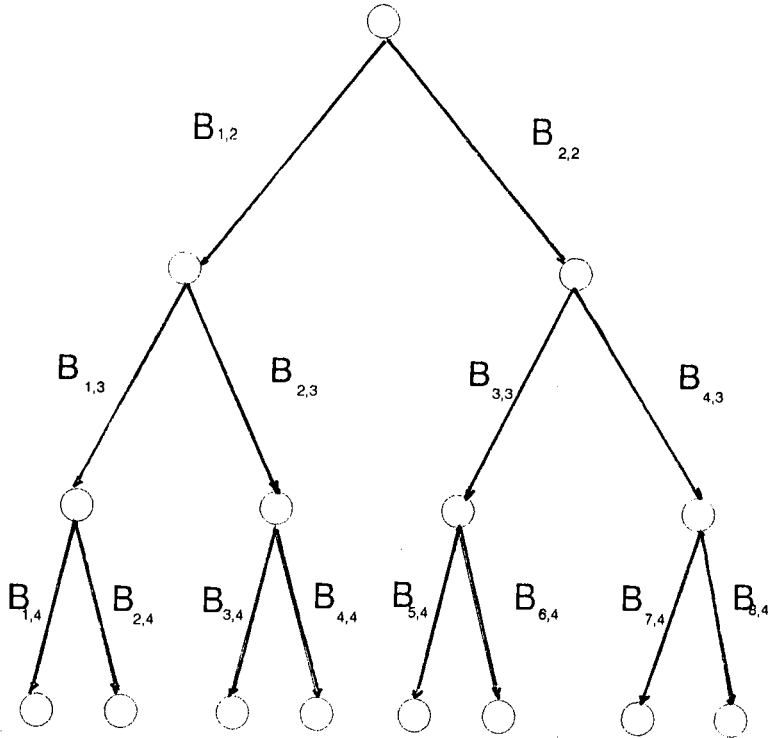


Figura III.4 – Árvore de cenários

Os ramos da árvore estão associados às possíveis realizações do vetor aleatório  $B_t$ ; os nós da árvore estão associados às decisões em um dado estágio para os cenários com as mesmas realizações até o estágio  $t$ . Para o problema de operação estocástica de um sistema multireservatório, o vetor  $B_{i,t}$  corresponde ao vetor de afluências, enquanto as decisões  $x_{i,t}$  correspondem ao volume armazenado nos reservatórios do sistema ao final do período  $t$ .

### III.3.1 Esquema de decomposição

Como foi visto no item anterior, o algoritmo básico decompõe o problema multiestágio em uma seqüência de subproblemas de um único estágio, representando as restrições operacionais de cada estágio e utilizando uma

aproximação linear por partes da função de valor esperado do custo de operação. A extensão do algoritmo para problemas estocásticos será ilustrada através de um problema de otimização de dois estágios.

$$\begin{array}{ll}
 \min c_1 x_1 + p_1 c_2 x_{2,1} + p_2 c_2 x_{2,2} + \dots + p_m c_2 x_{2,m} & \text{variáveis} \\
 & \text{duais} \\
 \text{s.a} & \text{(III.24)} \\
 \\
 A_1 x_1 \geq B_1 & \pi_1 \\
 H_1 x_1 + A_2 x_{2,1} \geq B_{2,1} & \pi_{2,1} \\
 H_1 x_1 \quad + A_2 x_{2,2} \geq B_{2,2} & \pi_{2,2} \\
 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\
 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\
 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\
 H_1 x_1 \quad \quad \quad + A_2 x_{2,m} \geq B_{2,m} & \pi_{2,m}
 \end{array}$$

O problema (III.22) pode ser interpretado da seguinte forma: no primeiro estágio é tomada a decisão  $\hat{x}_1$ . Dada esta decisão é possível desacoplar o problema de segundo estágio em  $m$  subproblemas:

$$\begin{array}{ll}
 a_{1,j}(\hat{x}_1) = & \min c_2 x_{2,j} \\
 \text{s.a} & \\
 A_2 x_{2,j} \geq B_{2,j} - H_1 \hat{x}_1 & j = 1, \dots, m \quad \text{(III.25)}
 \end{array}$$

O objetivo é minimizar a soma dos custos de primeiro estágio ( $c_1 x_1$ ) e o valor esperado dos custos associados ao segundo estágio. O valor esperado do custo futuro de operação dada a decisão  $\hat{x}_1$ , associada ao primeiro estágio, pode ser representado por:

$$E(a_1(\hat{x}_1)) = \sum_{j=1}^m p_j a_{1,j}(\hat{x}_1) \quad \text{(III.26)}$$

Como (III.13) e (III.17), as restrições violadas na solução corrente do problema relaxado podem ser expressas por:

$$\alpha \geq E(\pi^i B_2) - E(\pi^i) H_1 x_1 \quad \text{(III.27)}$$

ou

$$a \geq E(a(\hat{x}_i)) - E(\pi^i) H_1(x_i - \hat{x}_i) \quad (\text{III.28})$$

onde:

$i$  é o  $i$ -ésimo hiperplano suporte gerado

$$E(\pi^i) = \sum_{j=1}^m p_j \pi_{2,j}^i$$

### III.3.2 Algoritmo I

A extensão para o algoritmo estocástico multiestágio é imediata. A seguir será mostrado o algoritmo básico para este caso.

(a) **Inicialização:**

$T$  – horizonte de planejamento

$$\underline{z} = 0$$

$$\bar{z} = \infty$$

$$\tilde{\alpha}_{i,t}(x_{i,t}) = 0 \quad \text{para } t = 1, \dots, T; i = 1, \dots, K_t$$

(b) **Simulação "forward"**

para  $t = 1, \dots, T$

para  $i = 1, \dots, K_t$

Resolver o problema de otimização:

$$\begin{aligned} \min \quad & c_t x_{i,t} + \tilde{\alpha}_{i,t}(x_{i,t}) \\ \text{s.a} \quad & A_t x_{i,t} \geq B_{i,t} - H_{t-1} \hat{x}_{a(i,t)} \end{aligned} \quad (\text{III.29})$$

(c) **Calcular o valor esperado de  $\bar{z}$ :**

$$\bar{z} = \min(\underline{z}, \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{K_t} p_{i,t} c_t x_{i,t})$$

(d) **Simulação "backward"**para  $t = T, \dots, 1$ para  $i = 1, \dots, K_t$ 

Calcular as soluções duais associadas ao seguinte problema de otimização:

$$\begin{array}{ll} \min c_t x_{i,t} + \tilde{\alpha}_{i,t}(x_{i,t}) & \text{variável} \\ \text{s.a} & \text{dual} \end{array} \quad (\text{III.30})$$

$$A_t x_{i,t} \geq B_t - H_{t-1} \hat{x}_{a(i,t)} \quad \pi_{i,t}$$

(e) **Cálculo do valor esperado dos multiplicadores simplex**

$$E(\pi_{i,t}) = \sum_{i=1}^{k_t} p_{i,t} \pi_{i,t}$$

O valor  $E(\pi_{i,t})$  será utilizado para a construção de mais um hiperplano suporte para a função de valor esperado do custo futuro.

(f) **Cálculo da estimativa inferior do valor esperado do custo de operação**

$$\underline{z} = c_1 \hat{x}_1 + \tilde{\alpha}_1(\hat{x}_1)$$

(g) **Teste de convergência:**

Se  $\bar{z} - \underline{z} < \text{tolerância FIM}$ .

Caso contrário incorporar mais um hiperplano suporte à função de valor esperado do custo futuro e retornar para o passo b.

O algoritmo para a solução de problemas multiperíodo estocásticos utiliza a estratégia de resolver os subproblemas associados aos estágios em seqüência

iniciando no estágio 1 até atingir o estágio  $T$ . Uma vez o estágio  $T$  sendo atingido, o algoritmo evolui gerando cortes do estágio  $T$  até atingir o estágio 1.

Pode-se utilizar outras estratégias para tentar melhorar a convergência do algoritmo. Por exemplo, verificando-se que o esforço computacional é crescente com o número do estágio (ver Figura III.3), é possível alterar o algoritmo básico (especificamente os passos b e d) da seguinte maneira:

Após resolver-se todos os problemas associados ao estágio  $t$ .

- i) Volta-se a resolver os problemas associados ao estágio  $t-1$ , indo para o estágio  $t+1$  apenas quando não for possível gerar novas restrições.
- ii) Resolve-se os problemas associados ao estágio  $t+1$ , e posteriormente os problemas associados ao estágio  $t$  com os novos cortes gerados, retornando ao estágio  $t+1$  com as novas soluções primais, repetindo-se o processo até não ser possível obter novas soluções primais.

O algoritmo mostrado acima para a solução de problemas multiperíodo estocástico torna-se computacionalmente inviável mesmo para problemas de dimensões não muito elevadas; por exemplo, supondo um horizonte de planejamento de 20 períodos e uma abertura da árvore igual a 5 (3 cenários por período), tem-se  $9.54 \times 10^{13}$  subproblemas a resolver por iteração. No próximo item será mostrado um algoritmo chamado de programação dinâmica dual estocástica [6] que tem por objetivo eliminar a relação combinatória entre o número de cenários e estágios.

### III.3.3 Algoritmo II: Programação Dinâmica Dual Estocástica

O algoritmo de programação dinâmica dual estocástica (PDDE) [6], para evitar a explosão combinatória entre cenários e estágios, propõe que o valor esperado do custo de operação seja estimado utilizando-se uma simulação Monte-Carlo para uma amostra de cenários. O método de Monte Carlo [65] é uma forma de estimar estatísticas de interesse em um sistema qualquer a partir da análise do desempenho do sistema para estados de uma amostra aleatória do espaço de estados. No algoritmo de programação dinâmica dual estocástica, o método de Monte Carlo permite estimar o valor esperado do custo de operação a partir de uma amostra aleatória de afluências as usinas do sistema.

O método de Monte—Carlo, dada uma amostra de  $ns$  cenários, estima o valor esperado do custo de operação através de:

$$\bar{z} = \frac{1}{ns} \sum_{i=1}^{ns} z_i \quad (\text{III.31})$$

onde  $z_i$  é o custo total de operação para o cenário  $i$ , dado por:

$$z_i = \sum_{t=1}^T c_t \hat{x}_{i,t} \quad (\text{III.32})$$

A estimativa  $\bar{z}$  é uma variável aleatória com distribuição normal de média igual ao valor esperado do custo de operação e variância igual a:

$$\sigma_{\bar{z}}^2 = \frac{1}{ns^2} \sum_{i=1}^{ns} (\bar{z} - z_i)^2 \quad (\text{III.33})$$

Na apresentação do algoritmo de programação dinâmica dual estocástico será assumido que:

- i) Os vetores  $B_t$  são variáveis aleatórias independentes.
- ii) Cada vetor  $B_t$  será discretizado em  $nd_t$  cenários com uma probabilidade dada por  $p_{t,j}$   $j = 1, \dots, nd_t$ .

Representando—se as afluências como variáveis aleatórias independentes, a função de valor esperado do custo futuro não depende do cenário  $j = 1, \dots, nd_t$ . Em outras palavras pode—se construir uma única aproximação da função de custo futuro em cada estágio. Portanto cada recursão "backward" gera um segmento linear adicional que é válido para todos os cenários do estágio anterior e não só para o cenário predecessor. O resultado acima pode ser estendido para qualquer modelo estocástico de vazões do tipo autoregressivo.

O algoritmo de programação dinâmica dual é semelhante ao algoritmo de programação estocástica multiperíodo mostrado no item anterior, alterando—se apenas a obtenção do valor esperado do custo de operação, que no PDDE é



estimado através de uma amostra de cenários, e modelado com uma variável aleatória com distribuição normal e média e variância dadas respectivamente por (III.31) e (III.32).

O algoritmo de PDDE é implementado através de:

(a) **Inicialização**

$$\bar{z} = \omega$$

$$\underline{z} = 0$$

para  $i = 1, \dots, ns$

para  $t = 1, \dots, T$

$$\tilde{\alpha}_t(x_{i,t}) = 0$$

(b) **Simulação "forward"**

para  $t = 1, \dots, T$

para  $i = 1, \dots, ns$

sortear um vetor  $B_{ti}$

resolver o problema de otimização:

$$\min c_t x_{t,i} + \tilde{\alpha}_t(x_{t,i})$$

s.a

$$A_t x_{t,i} \geq B_{ti} - H_t \hat{x}_{t-1,i}$$

(III.34)

(c) **Cálculo da estimativa de  $\bar{z}$  e a incerteza associada.**

$$\bar{z} = \sum_{t=1}^T \sum_{i=1}^{ns} c_t \hat{x}_{i,t} \quad (III.35)$$

$$\sigma_{\bar{z}}^2 = \frac{1}{ns^2} \sum_{t=1}^{ns} (\bar{z} - z_i)^2 \quad (III.36)$$

(d) **Simulação "backward"**

para  $t = T, \dots, 1$

para  $i = 1, \dots, ns$

para  $j = 1, \dots, nd$

Resolver o problema de otimização:

$$\begin{array}{ll}
 \min c_t x_{t,i} + \tilde{\alpha}_t(x_{t,i}) & \text{variável} \\
 \text{s.a} & \text{dual} \\
 A_t x_{t,i} \geq B_{tj} - H_{t-1} \hat{x}_{t-1,i} & \pi_{t-1,i,j}
 \end{array} \quad (\text{III.37})$$

(e) **Cálculo do valor esperado de  $\pi_{t-1,i}$ .**

$$E(\pi_{t-1,i}) = \sum_{j=1}^{nd} p_t \pi_{t-1,i,j} \quad (\text{III.38})$$

O valor de  $E(\pi_{t-1,i})$  será utilizado para a construção do hiperplano suporte para a função objetivo.

(f) **Cálculo da estimativa do custo de operação.**

$$z = c_1 x_1 + \tilde{\alpha}_1(x_1)$$

(g) **Teste de convergência.**

O teste de convergência será detalhado a seguir. Caso o problema não tenha convergido é incorporado mais um hiperplano suporte a aproximação da função valor esperado do custo futuro e retorna-se ao passo d. Caso contrario, **FIM**.

### III.3.2.1 Teste de convergência

No algoritmo de PDDE, o valor esperado do custo de operação e a incerteza deste índice são estimados através de uma simulação Monte-Carlo. Utilizando essas informações é possível obter um intervalo de confiança para o valor de  $\bar{z}$  (população), por exemplo para um intervalo de confiança de 95%. O valor de

população está compreendido no intervalo  $[\bar{z} - 1.96\sigma_{\bar{z}}, \bar{z} + 1.96\sigma_{\bar{z}}]$ .

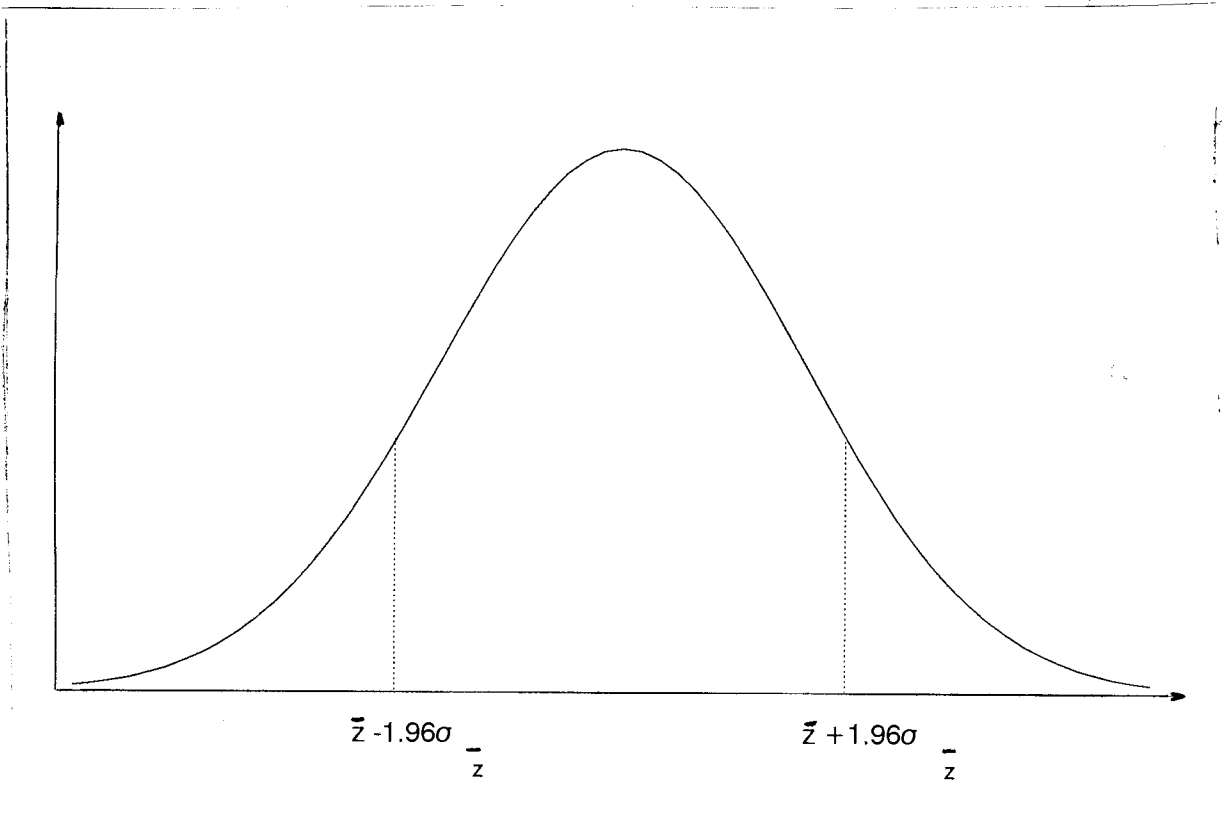


Figura III.5 – Distribuição de  $\bar{z}$ .

O critério de convergência mostrado não depende do grau de precisão da função aproximada de valor esperado do custo futuro ( $a_t$ ). Pode-se incorporar esta informação ao processo de convergência através de um critério constituído por dois passos

(i) O valor da função aproximada do custo esperado de operação ( $z$ ) deve estar dentro do intervalo de confiança de  $\bar{z}$ .

(ii) A diferença entre as estimativas de  $z$  e  $\bar{z}$  entre duas iterações consecutivas for menor que uma determinada tolerância.

### III.3.2.1 Extensão para Modelos Autoregressivos

É possível representar processos estocásticos nos quais a distribuição de probabilidade de  $B_t$  é condicionada pelas realizações dos estágios anteriores  $t-1, \dots, t-p$ . Supondo, por exemplo, um modelo autoregressivo de ordem  $p$ .

$$B_t = \sum_{i=1}^p R_i B_{t-i} + \epsilon_t \quad (\text{III.39})$$

onde:

- $p$  Ordem do modelo autoregressivo
- $R_i$  Matriz de coeficientes de regressão de ordem  $i$
- $\epsilon_t$  Vetor de ruídos com distribuição normal de média nula e desvio padrão 1.

Para a representação de processos autoregressivos, as seguintes modificações devem ser introduzidas no algoritmo descrito no item anterior.

- i) Discretização do vetor de ruídos em  $ns$  cenários para a simulação forward e cálculo de  $B_t$  utilizando a equação (III.39).
- ii) Alteração da função aproximada de custo futuro que passa a depender dos valores de afluências anteriores e da discretização do vetor de ruídos.

## CAPÍTULO IV INCLUSÃO DA REDE DE TRANSMISSÃO

### IV.1 Introdução

Será mostrado neste capítulo a incorporação das restrições da rede elétrica ao problema de operação estocástica de um sistema multireservatório. O algoritmo de solução baseia-se na técnica de programação dinâmica dual mostrada no capítulo anterior. Como foi visto anteriormente, neste algoritmo o problema multiestágio é decomposto em uma sucessão de subproblemas de um único estágio. Incorporando-se as restrições da rede elétrica, cada subproblema passa a ser constituído por restrições provenientes do problema energético (balanço hídrico, limites de armazenamento nos reservatórios, limites de turbinamento nas usinas de hidroelétricas, atendimento a demanda de energia etc), por restrições do sistema elétrico (conservação de energia, segunda lei de Kirchhoff, limites de fluxos em circuitos etc) e por restrições relacionadas ao nível de segurança do sistema.

Cada subproblema de um único estágio é um problema de grande porte mesmo para sistemas elétricos de pequenas dimensões. O algoritmo proposto para a solução de cada subproblema é decomposto em duas fases.

Na primeira fase (**subproblema energético**) são representadas as usinas hidroelétricas de maneira detalhada, as usinas térmicas são agrupadas por classes de mesmo custo de combustível e é representada uma única barra onde é consumida a demanda de energia do sistema. Em outras palavras, nesta fase não são representadas as restrições provenientes da rede elétrica.

Na segunda fase (**subproblema elétrico**), o despacho de geração obtido na fase anterior é modificado para eliminar eventuais violações nas restrições de transmissão. O ponto de operação obtido na segunda fase pode ainda ser alterado para se obter um ponto de operação seguro, no qual o desempenho do sistema elétrico é analisado de maneira que ocorrendo um distúrbio qualquer seja ainda possível continuar atendendo completamente a demanda.

## IV.2 Formulação matemática

O algoritmo PDDE decompõe o problema multiestágio em uma sucessão de subproblemas de um único estágio. Supondo conhecida a afluência no início do estágio  $t$  e utilizando um modelo linear para representar a rede de transmissão, cada subproblema pode ser formulado através de:

$$\begin{aligned} \tilde{a}_t(\hat{x}_{t-1}) = \min & \sum_{i \in nb} (c_i g_{i,t} + w_i r_{i,t}) + a_{t+1} \\ \text{s.a} & \end{aligned} \tag{IV.1}$$

(a) equações de balanço hídrico:

$$v_{t+1} + q_t + s_t - M(q_t + s_t) = v_t + a_t$$

(b) limites de armazenamento:

$$0 \leq v_{t+1} \leq \bar{v}$$

(c) limites de turbinamento:

$$0 \leq q_t \leq \bar{q}$$

(d) conservação de fluxo:

$$A f_t + g_t + \rho q_t + r_t = d_t$$

(e) representação da admitância:

$$f_t = \Gamma A^t \theta_t$$

(f) limites de fluxo:

$$|f_t| \leq \bar{f}_{ij}$$

(g) **limites de corte de carga:**

$$r_t \leq d_t$$

(h) **função aproximada de custo futuro:**

$$a_{t+1} \geq E(\pi_t^i B_{t+1}) - E(\pi_t^i) H_t x_t \quad i = 1, \dots, r$$

onde:

$nb$	Conjunto de barras
$r$	Número de hiperplanos suportes da função de custo futuro
$w_i$	Penalidade por não atendimento a demanda da barra $i$

Na equação de balanço hídrico (restrição a), o volume armazenado ao final do estágio  $t-1$  ( $v_t$ ) foi colocado a direita da igualdade para enfatizar que este é um recurso que o estágio anterior fornece ao estágio corrente.

Na função aproximada de custo futuro (restrição h), o termo  $x_t$  corresponde ao volume armazenado ao final do estágio  $t$  ( $v_{t+1}$ ), enquanto o termo  $E_t$  refere-se ao coeficiente desta variável na restrição de balanço hídrico, que é igual a 1. A restrição h pode ainda, ser expressa de uma forma alternativa, conforme mostrado no capítulo III, por:

$$a_{t+1} \geq E(a_{t+1}(v_{t+1}^i)) - E(\pi_{h,t+1}^i) (v_{t+1} - v_{t+1}^i) \quad i = 1, \dots, r \quad (\text{IV.2})$$

Onde:  $E(\pi_{h,t+1}^i)$  é o vetor contendo os valores esperados das variáveis duais associadas às equações de balanço hídrico no estágio  $t+1$ .

Adicionalmente às restrições (a-h), pode-se ainda incorporar as restrições de segurança representadas por:

$$A^k f^k + g = d$$

$$f^k - \Gamma^k (A^k)^t \theta^k = 0 \quad (\text{IV.3})$$

$$|f_t^k| \leq \bar{f} \quad \text{para } k \in K$$

Onde  $K$  é o conjunto de contingências representadas.

O subproblema (IV.1) é um problema de programação linear de grande porte podendo ser solucionado por algoritmos convencionais de programação linear. Entretanto, algoritmos que tomam partido da estrutura particular do problema permitem uma redução do esforço computacional. A metodologia proposta consiste em decompor o subproblema de operação em duas fases.

- Na primeira fase (subproblema energético), são representadas as usinas hidroelétricas de maneira detalhada, as usinas térmicas são agrupadas em classes de mesmo custo de operação e a demanda concentrada em uma única barra. Em outras palavras, inicialmente verifica-se a viabilidade energética do subproblema associado a um estágio, relaxando-se as restrições de transmissão. O problema resultante, à exceção de algumas poucas restrições, possui uma estrutura de fluxo de custo mínimo em redes capacitadas. O algoritmo de solução é baseado em um algoritmo de fluxo de custo mínimo com restrições adicionais.

- Na segunda fase (subproblema elétrico), o despacho de geração obtido na fase anterior é modificado para eliminar eventuais violações nas restrições de transmissão. O ponto de operação obtido na segunda fase pode ser alterado para se obter um ponto de operação seguro, no qual o desempenho do sistema elétrico é analisado de maneira que ocorrendo um distúrbio qualquer seja ainda possível continuar atendendo completamente à demanda. No subproblema elétrico, a rede de transmissão é representada por um modelo linear como mostrado no capítulo II, e é solucionado através de um algoritmo de fluxo de potência ótimo linearizado. A técnica de solução baseia-se em programação linear e toma partido das características particulares deste tipo de problema.



### IV.3 Subproblema energético

O subproblema energético pode ser formulado como:

$$a_t(v_t) = \min \sum_{i \in nb} (c_i g_{i,t}) + w_t r_t$$

s.a

$$v_{t+1} + a_t + q_t + s_t - M(q_t + s_t) = v_t + a_t \quad (\text{IV.4.1})$$

$$0 \leq v_{t+1} \leq \bar{v} \quad (\text{IV.4.2})$$

$$0 \leq q_t \leq \bar{q} \quad (\text{IV.4.3})$$

$$\sum_{i \in n} \rho_i q_{i,t} + \sum_{j \in nb} g_{j,t} + r_t = d_t \quad (\text{IV.4.4})$$

A restrição (IV.4.4) corresponde ao atendimento a demanda agrupando-se todas as barras do sistema. As restrições do subproblema energético, à exceção da restrição (IV.4.4), podem ser representadas por um modelo de fluxo de custo mínimo em redes capacitadas, como mostrado no capítulo II. Para tomar partido da estrutura de grafos das restrições (IV.2.1 a IV.2.3) é possível utilizar um esquema de partição de base [29] que tenta preservar esta estrutura nas bases associadas as iterações do algoritmo de programação linear.

$$\bar{B} = \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \hline \mathbf{D} & \mathbf{F} \\ \hline \end{array}$$

Figura IV.1 – Matriz base

As restrições associadas a fluxo em redes são agrupadas na parte superior da base, enquanto que as restrições não associadas a fluxo em redes são posicionadas na parte inferior da base. As variáveis relacionadas somente com as restrições "não-fluxo em redes" (geração térmica e corte de carga) são posicionadas à direita

das demais variáveis. As dimensões das submatrizes  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ,  $F$  são respectivamente  $(m1 \times m1)$ ,  $(m1 \times m2)$ ,  $(m2 \times m1)$  e  $(m2 \times m1)$ , onde  $m1$  é o número de restrições tipo fluxo em redes e  $m2$  é o número de restrições sem a estrutura de fluxo em redes. Caso a submatriz  $B$  seja inversível é possível relacionar a inversa da matriz  $\bar{B}$  com a inversa da matriz  $B$  através de:

$$\bar{B}^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline B^{-1} + B^{-1}CQ^{-1}DB & -B^{-1}CQ^{-1} \\ \hline -Q^{-1}DB & Q^{-1} \\ \hline \end{array}$$

Figura IV.2 – Matriz inversa de  $\bar{B}$

$$\text{onde } Q = F - DB^{-1}C \tag{IV.5}$$

Como pode ser visto no anexo I, é possível demonstrar que sempre que a matriz  $B$  for inversível, a matriz  $Q$  também o será. Para obter a inversa de  $\bar{B}$  é necessário inverter as matrizes  $B$  e  $Q$ . A matriz  $B^{-1}$  pode ser obtida sem a utilização de operações matemáticas de ponto flutuante, usando-se apenas algoritmos para determinação de caminhos em uma árvore. A matriz  $Q^{-1}$  é uma matriz densa, porém de menor dimensão  $(m2 \times m2)$ , permitindo uma redução do esforço computacional. Em outras palavras, a eficiência computacional deste método depende da relação entre o número de restrições de fluxo em redes e as restantes. Por exemplo, no subproblema energético a cada estágio existem  $N$  nós e  $3 \times N$  ramos no problema de fluxo em redes (correspondentes as equações de balanço de água e variáveis de armazenamento, turbinamento e vertimento) e uma única restrição adicional associada ao atendimento à demanda neste estágio..

O ponto chave do algoritmo consiste em manter a base  $B$  inversível. O procedimento adotado consiste em:

Supondo que a base  $B$  inicial seja inversível e que uma variável básica ( $i$ ) associada a  $B$  seja removida da base. Alguma outra variável deve substituir a variável  $i$  para manter a estrutura da matriz  $B$ . Seja  $j$  uma coluna da matriz  $C$  linearmente independente das colunas restantes de  $B$ . As colunas  $i$  e  $j$  podem ser trocadas mantendo a matriz  $B$  inversível. No anexo demonstra-se que caso não exista nenhuma coluna em  $C$  linearmente independente das colunas restantes de  $B$ , a variável que entra na base manterá a inversibilidade de  $B$ . Uma descrição

detalhada do algoritmo de fluxo de custo mínimo com restrições adicionais pode ser encontrada no anexo ou nas referências [29,44].

#### IV.4 Subproblema Elétrico

Na segunda fase (subproblema elétrico), a rede de transmissão é representada através de um modelo linear como mostrado no capítulo II. O despacho obtido na fase 1 é analisado para eliminar possíveis violações nas restrições da rede. Este problema pode ser resolvido de maneira eficiente através de um algoritmo dual simplex utilizando uma formulação compacta e técnicas de relaxação e partição de base. O subproblema elétrico pode ser formulado através de:

$$a_t(\Delta v_t) = \min \sum_{i \in nb} c_i \Delta g_{it} + w_i \Delta r_{it} + \alpha_{t+1}$$

s.a

$$M(\Delta q_t + \Delta s_t) - \Delta q_t - \Delta s_t = 0 \quad (IV.6.1)$$

$$-r_t^0 \leq \Delta r_t \leq d_t - r_t^0 \quad (IV.6.2)$$

$$-q_t^0 \leq \Delta q_t \leq \bar{q} - q_t^0 \quad (IV.6.3)$$

$$-v_t^0 \leq \Delta v_t \leq \bar{v} - v_t^0 \quad (IV.6.4)$$

$$B \Delta \theta_t + \rho \Delta q_t + \Delta g_{it} + \Delta r_t = 0 \quad (IV.6.5)$$

$$| \Gamma A B^{-1} (\rho \Delta q_t + \Delta g_{it}) | \leq \bar{f} - f_t^0 \quad (IV.6.6)$$

$$\alpha_{t+1} - \sum_{j \in nr} \bar{\pi}_{h,t+1,j}^i M(\Delta q_t + \Delta s_t) \geq \lambda^i \quad i = 1, \dots, r \quad (IV.6.7)$$

$\Delta v_t$  Vetor de variações dos volumes armazenados durante o estágio t em relação a mesma grandeza na fase 1.

$\Delta q_t$  Vetor de variações dos volumes turbinados durante o estágio t em relação a mesma grandeza na fase 1.

$\Delta s_t$  Vetor de variações dos volumes vertidos durante o estágio t em relação a mesma grandeza na fase 1.

- $\Delta g_t$  Vetor de variações das gerações térmicas durante o estágio  $t$  em relação a mesma grandeza da fase 1.
- $\Delta \theta_t$  Vetor de variações dos ângulos das tensões nodais no estágio  $t$  em relação a mesma grandeza na fase 1.
- $0$  Valor da grandeza na fase 1
- $nr$  Conjunto de reservatórios do sistema
- $\lambda^i$  Termo independente do  $i$ -ésimo hiperplano suporte definido por:
- $$\sum_{j \in nr} \bar{\pi}_{h,t+1,j}^i (v_t + a_t - q_t - s_t)$$

Embora o problema (IV.7) possua um grande número de restrições, observa-se que na solução ótima apenas um número reduzido de restrições estarão atendidas na igualdade. Neste caso é vantajoso utilizar a técnica de partição de base conhecida como base reduzida [30] que não representa explicitamente as colunas da matriz de coeficientes associadas às variáveis de folga. A dimensão da base reduzida é igual ao número de restrições atendidas na igualdade, reduzindo o esforço computacional associado às operações matriciais em cada iteração do algoritmo. A figura IV.3 mostra a estrutura de uma matriz base ordenada convenientemente.

$$\mathbf{B} = \begin{array}{|c|c|} \hline R & S \\ \hline O & I \\ \hline \end{array}$$

Figura IV.3 – Matriz base

A base reduzida é obtida posicionando-se as linhas correspondentes às restrições do problema atendidas no limite na parte superior da base, as restrições não atendidas na igualdade são posicionadas na parte inferior da base. As colunas da base associadas às variáveis de folga básicas são posicionadas à direita das demais variáveis básicas. A inversa da matriz base é:

$$B^{-1} = \begin{array}{|c|c|} \hline R^{-1} & 0 \\ \hline SR^{-1} & I \\ \hline \end{array}$$

Figura IV.4 – Inversa da matriz base

Na figura IV.4 verifica-se que para inverter a matriz  $\bar{B}$  é necessário inverter a matriz  $R$  (base reduzida) de menor dimensão. A eficiência do algoritmo está relacionada com a relação entre o número de restrições atendidas no limite e o número de restrições relaxadas. No caso do subproblema elétrico, o número de restrições atendidas no limite é sempre muito inferior ao número total de restrições.

No problema (IV.6) estão presentes dois conjuntos de restrições de igualdade (limites de armazenamento em usinas fio d'água e balanço de energia nas barras). Estas restrições sempre devem ser atendidas na igualdade e, portanto, estão presentes na base reduzida. A existência de restrições de igualdade no modelo aumenta a dimensão da base reduzida e conseqüentemente aumenta o esforço computacional. Neste trabalho adotou-se uma representação implícita das restrições de igualdade que será mostrada a seguir.

As restrições de atendimento à demanda (IV.6.5) podem ser tratadas implicitamente através da equação.

$$\sum_{i \in nb} (\rho \Delta q_{i,t} + \Delta g_{i,t} + \Delta r_{i,t}) = 0 \quad (IV.7)$$

A equação (IV.7) tem a seguinte interpretação: dado os vetores de geração hidroelétrica, térmica e corte de carga obtidos na fase 1, que atendem à demanda do estágio  $t$ , para que a demanda continue sendo atendida no subproblema elétrico, a soma das variações incrementais destas grandezas deve ser nula. É possível mostrar que a condição necessária e suficiente para que um vetor de injeções satisfaça (IV.6.3) é que o somatório das gerações hidroelétricas, térmicas e cortes de carga seja igual à demanda no estágio. Os ângulos das tensões nodais ( $\theta$ ) são obtidos posteriormente utilizando (II.9).

As restrições de limite de armazenamento em usinas a fio d'água podem ser tratadas implicitamente representando-se o vertimento da usina como função das

vazões turbinadas e vertidas dos reservatórios a montante e da vazão turbinada da usina a fio d'água, ou seja:

$$s_{i,t} = \sum_{j \in F_i} a_{j,t} + \sum_{j \in R_i} (q_{j,t} + s_{j,t}) - q_{i,t} \quad (\text{IV.8})$$

onde:

$F_i$  Conjunto de usinas a fio d'água existentes entre a usina  $i$  e o primeiro reservatório a montante, incluindo a usina  $i$ .

$R_i$  Conjunto de reservatórios imediatamente a montante da usina  $i$ .

Utilizando-se (IV.8) pode-se reescrever a expressão (IV.6.1) como:

a) para as usinas com reservatório:

$$v_{i,t} + \sum_{j \in F_i} a_{i,t} - \bar{v}_i \leq q_{i,t} + s_{i,t} - \sum_{j \in R_i} (q_{j,t} + s_{j,t}) \leq v_{i,t} + \sum_{j \in F_i} a_{i,t} \quad (\text{IV.9})$$

b) para as usinas a fio d'água:

$$q_{i,t} - \sum_{j \in R_i} (q_{j,t} + s_{j,t}) \leq \sum_{j \in F_i} a_{j,t} \quad (\text{IV.10})$$

Portanto, o problema (IV.6) pode-se reescrito como:

$$\tilde{a}_t(\hat{v}_t) = \min_{i \in nb} \sum (c_i \Delta g_{i,t} + w_i \Delta r_{i,t}) + \alpha_{t+1}$$

s.a

a) para as usinas com reservatório:

$$\text{lim1} \leq \Delta q_{i,t} + \Delta s_{i,t} - \sum_{j \in R_i} (\Delta q_{j,t} + \Delta s_{j,t}) \leq \text{lim2} \quad (\text{IV.11.1})$$

b) para as usinas a fio d'água:

$$\Delta q_{i,t} - \sum_{j \in R_i} (\Delta q_{j,t} + \Delta s_{j,t}) \leq \text{lim3} \quad (\text{IV.11.2})$$

$$-r_t^0 \leq \Delta r_t \leq d_t - r_t^0 \quad (\text{IV.11.3})$$

$$-q_t^0 \leq \Delta q_t \leq \bar{q} - q_t^0 \quad (\text{IV.11.4})$$

$$\sum_{i \in n_b} (\rho \Delta q_{i,t} + \Delta g_{i,t} + \Delta r_{i,t}) = 0 \quad (\text{IV.11.5})$$

$$| \Gamma A B^{-1} (\rho \Delta q_t + \Delta g_t) | \leq \bar{f} - f_t^0 \quad (\text{IV.11.6})$$

$$\alpha_{t+1} - E(\pi h_{t+1}^i) M (\Delta q_t + \Delta s_t) \geq \lambda^i \quad i = 1, \dots, r \quad (\text{IV.11.7})$$

onde:

$$\text{lim1} = v_{i,t} + \sum_{j \in F_i} a_{i,t} - \bar{v}_i - q_{i,t} - s_{i,t} + \sum_{j \in R_i} (q_{j,t} + s_{j,t})$$

$$\text{lim2} = v_{i,t} + \sum_{j \in F_i} a_{i,t} - q_{i,t} - s_{i,t} + \sum_{j \in R_i} (q_{j,t} + s_{j,t})$$

$$\text{lim3} = \sum_{j \in F_i} a_{j,t} - q_{i,t} + \sum_{j \in R_i} (q_{j,t} + s_{j,t})$$

## CAPÍTULO V

# CÁLCULO DOS CUSTOS MARGINAIS EM SISTEMAS HIDROTÉRMICOS

### V.1 Introdução

O planejamento da expansão e operação no Brasil vem sendo realizado de forma coordenada, através de organismos colegiados (GCPS e GCOI). Esta coordenação trouxe grandes benefícios em termos de redução de investimentos e de custos operativos. A questão da repartição dos benefícios decorrentes desta atividades se coloca naturalmente. Este capítulo apresenta uma metodologia de rateio de custos e benefícios associados à operação de sistemas hidrotérmicos baseada na teoria de custos marginais. Este rateio fornece aos agentes produtores os indicadores para a expansão e operação ótima do sistema garantindo a utilização eficiente dos recursos existentes.

O custo marginal de curto prazo de produção de energia elétrica vem sendo utilizado em vários estudos de planejamento e operação, tais como a determinação de tarifas sazonais, comparação de alternativas de investimentos de expansão, postergação de investimentos devido a restrições financeiras, determinação de contratos de suprimentos entre empresas etc. Mais recentemente, o custo marginal de curto prazo tem sido utilizado na determinação de estruturas tarifárias e de cálculo de tarifas de pedágio por utilização de equipamentos.

O cálculo dos custos marginais para sistemas hidrotérmicos é bastante complexo devido à necessidade de representação da estocasticidade das aflúncias e ao acoplamento temporal dado pela energia armazenada nos reservatórios. Além disto, é necessário representar as restrições provenientes da rede de transmissão e eventuais falhas nos equipamentos.

No item IV.2 é feita uma descrição sumária da teoria de custos marginais. No item VI.3 é analisada uma forma de rateio dos benefícios de uma coalizão, baseada em custos marginais, que garante a estabilidade da coalizão. No item IV.4 é apresentada e discutida a aplicação da teoria de custos marginais a sistemas elétricos.



## V.2 Teoria dos Custos Marginais

A teoria de tarifação a custos marginais inicia-se com os trabalhos de Dupuit [45] e Hotelling [46], onde são estabelecidos a teoria da utilidade e o princípio de Pareto que são seus fundamentos teóricos. Sua aplicação ao setor elétrico tem origem em 1949 com os trabalhos de Boiteux [47] e Steiner [48] na França. Trabalhos recentes propõem o cálculo dos custos marginais considerando o impacto da tarifação na demanda [61], incertezas inerentes ao processo [5,49,50,51], tais como afluências, disponibilidades dos equipamentos etc. No Brasil já há alguns anos são calculados os custos marginais de produção de energia elétrica para comparação de projetos alternativos, cálculo de tarifas horo-sazonais, e postergação de investimentos [52].

A teoria de custos marginais assume que uma empresa tem por objetivo a maximização dos seus lucros. Numa situação de concorrência perfeita, o preço de um produto é uma variável definida pelo mercado através da iteração entre produtores e consumidores. A maximização do lucro total de uma empresa é dada por:

$$\max pq - c(q) \quad (\text{V.1})$$

onde:

- $p$  Preço de mercado, estabelecido com base na igualdade entre a oferta total e a demanda do produto pelo mercado
- $q$  Quantidade produzida
- $c(q)$  Função de produção, dada pela relação entre as quantidades de insumos necessários para a produção de uma dada quantidade  $q$

As condições necessárias para a maximização do lucro são:

$$\frac{\partial c(q)}{\partial q} = p \quad \frac{\partial^2 c(q)}{\partial^2 q} \geq 0 \quad (\text{V.2})$$

A expressão (V.2) mostra que, em concorrência perfeita, o custo marginal para o nível de produção que maximiza os lucros é igual ao preço de mercado deste produto. A figura V.1 ilustra o conceito.

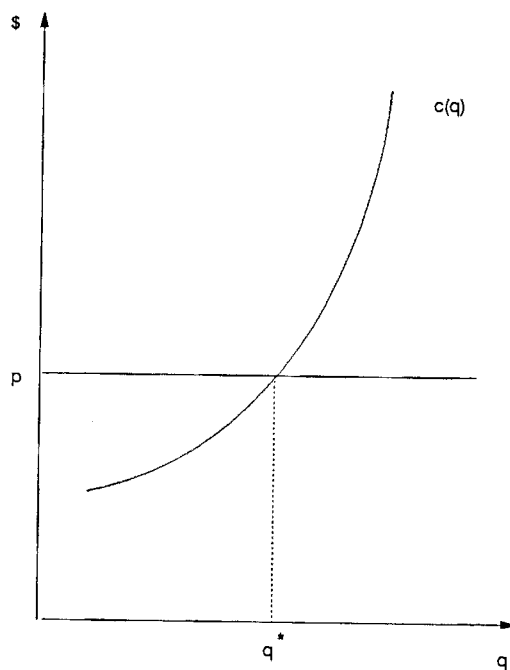


Figura V.1 – Custo marginal

Partindo-se das premissas da teoria de custos marginais, é possível demonstrar que a alocação ótima dos recursos existentes na sociedade se dá quando a economia opera em concorrência perfeita [53]. Por alocação ótima entende-se a melhor utilização dos insumos e produtos, de maneira a maximizar os "benefícios" associados à produção e ao consumo dos bens e serviços gerados pela sociedade.

### V.3 Alocação de custos e benefícios

Neste item os conceitos mostrados anteriormente serão utilizados para a repartição dos custos e benefícios associados a uma coalizão de produtores de modo

que esta permaneça estável, ou seja de maneira que não haja incentivo para o abandono da coalizão. Será visto que a teoria de custos marginais fornece uma alocação de benefícios que garante a estabilidade da coalizão [54].

O problema consiste na maximização da renda proveniente da produção de  $p$  produtos que para sua fabricação utilizam  $m_r$  recursos nas quantidades  $b_1, b_2, \dots, b_{m_r}$ . Cada unidade de um produto  $j$  consome  $a_{ij}$  unidades do recursos  $i$  trazendo um retorno de  $c_j$  unidades monetárias. Matematicamente o problema pode ser formulado através de:

$$\begin{array}{ll}
 V = \max c_1x_1 + c_2x_2 \dots c_px_p & \text{variáveis} \\
 & \text{duais} \\
 \text{s.a} & \text{(V.3)} \\
 a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p \leq b_1 & \pi_1 \\
 a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p \leq b_2 & \pi_2 \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot \\
 a_{m_r,1}x_1 + a_{m_r,2}x_2 + \dots + a_{m_r,p}x_p \leq b_{m_r} & \pi_{m_r} \\
 x \geq 0 &
 \end{array}$$

Suponhamos agora que os recursos ( $b_1, b_2, \dots, b_{m_r}$ ) sejam fornecidos por uma coalizão de  $K$  empresas. Será demonstrado em seguida que a maximização dos benefícios é obtida quando todos os  $K$  membros pertencerem à coalizão.

Seja  $s$  uma sub-coalizão com um total de  $b_j(s)$  unidades do recurso  $j$  definido por:

$$b_j(s) = \sum_{i \in s} b_j^i \quad \text{(V.4)}$$

onde  $b_j^i$  é a quantidade do recurso  $b_j$  fornecido pelo integrante  $i$  da coalizão  $s$ .

O problema de maximização da renda proveniente da produção da sub-coalizão  $s$  pode ser expresso por:

$$V(s) = \max c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_p x_p$$

s.a

(V.5)

$$a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p \leq b_1(s)$$

$$a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p \leq b_2(s)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_{mr,1}x_1 + a_{mr,2}x_2 + \dots + a_{mr,p}x_p \leq b_{mr}(s)$$

$$x \geq 0$$

Seja  $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_p^*)$ , o vetor solução de (V.5) para a subcoalizão (s) de membros de  $K$ . A quantidade total de recursos existentes nesta subcoalizão é menor ou igual à existente na coalizão completa, como mostra a restrição (V.6):

$$b_j(s) \leq b_j(K) \quad j = 1, \dots, mr \quad (V.6)$$

logo:

$$\sum_{j=1}^p a_{kj} x_j^* \leq b_j(K) \quad j = 1, \dots, mr \quad (V.7)$$

A restrição (V.7) mostra que a solução ótima  $x^*$  para a subcoalizão  $s$  é também uma solução viável para a coalizão  $K$ . Como  $V(K)$  é o valor máximo para todas as soluções viáveis de (V.5) quando  $s = K$ , tem-se que:

$$V(s) \leq V(K) \quad (V.8)$$

A expressão (V.8) indica que o benefício proveniente da coalizão completa ( $K$  membros) é maior ou igual do que o benefício de qualquer subcoalizão de membros de  $K$ . O resultado acima será estendido demonstrando-se que o benefício da coalizão completa é maior que a soma dos benefícios de quaisquer subcoalizões.

Seja o problema dual de (V.5):

$$\begin{aligned}
 V(s) = \quad & \min b_1(s) \pi_1 + b_2(s) \pi_2 + \dots + b_p(s) \pi_p \\
 & \text{s.a} \\
 & a_{1,1}\pi_1 + a_{2,1}\pi_2 + \dots + a_{mr,1}\pi_{mr} \leq c_1 \\
 & a_{1,2}\pi_1 + a_{2,2}\pi_2 + \dots + a_{mr,2}\pi_{mr} \leq c_2 \\
 & \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\
 & \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\
 & \cdot \quad \quad \cdot \quad \quad \cdot \\
 & a_{1,p}\pi_1 + a_{2,p}\pi_2 + \dots + a_{mr,p}\pi_p \leq c_p \\
 & \pi \geq 0
 \end{aligned} \tag{V.9}$$

Sabe-se da teoria de programação linear que as soluções ótimas do primal (V.5) e do dual (V.9) coincidem quando existirem.

Seja  $\pi^* = (\pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_{mr}^*)$ , o vetor solução de (V.9) quando  $s = K$ , isto é para a coalizão completa. Tem-se portanto:

$$V(K) = b_1(K) \pi_1^* + b_2(K) \pi_2^* + \dots + b_p(K) \pi_p^* \tag{V.10}$$

Para uma subcoalizão  $s$ , pode-se afirmar que:

$$V(s) \leq b_1(s) \pi_1^* + b_2(s) \pi_2^* + \dots + b_p(s) \pi_p^* \tag{V.11}$$

A expressão (V.11) pode ser interpretada da seguinte forma:  $V(s)$  é o mínimo sobre todos os vetores  $\pi$  viáveis do problema (V.9) para uma coalizão  $s$  qualquer, e  $\pi^*$  é a solução deste problema quando  $s = K$ . A restrição (V.11) também é válida para a coalizão complementar  $\bar{s}$ , formada pelos membros restantes da coalizão  $K$ .

$$V(\bar{s}) \leq b_1(\bar{s}) \pi_1^* + b_2(\bar{s}) \pi_2^* + \dots + b_p(\bar{s}) \pi_p^* \tag{V.12}$$

Somando-se (V.11) e (V.12), lembrando que  $b_j(s) + b_j(\bar{s}) = b_j(K)$  tem-se que:

$$V(s) + V(\bar{s}) \leq b_1(K) \pi_1^* + b_2(K) \pi_2^* + \dots + b_p(K) \pi_p^* \quad (\text{V.13})$$

O lado direito de (V.13) corresponde ao benefício da coalizão completa. Conclui-se portanto que o benefício desta coalizão excede a soma dos benefícios de quaisquer subcoalizões. Em outras palavras, a maximização dos benefícios para o sistema se dá quando todos os membros participam da coalizão. A seguir será visto uma política de repartição dos benefícios, baseada em custos marginais, que estimula a formação e a manutenção de coalizões, através da maximização da renda de cada participante da coalizão.

Considere a repartição dos benefícios, onde o participante  $i$  receba:

$$u_i = b^i \pi^* = b_1^i \pi_1^* + b_2^i \pi_2^* + \dots + b_{mr}^i \pi_{mr}^* \quad (\text{V.14})$$

onde  $\pi^* = (\pi_1^*, \pi_2^*, \dots, \pi_{mr}^*)$  é o vetor solução de (V.9).

A soma dos benefícios dos participantes da coalizão  $s$  é dada por:

$$\sum_{i \in s} u_i = \sum_{i \in s} \sum_{j=1}^{mr} b_j^i \pi_j^* = \sum_{j=1}^{mr} \sum_{i \in s} b_j^i \pi_j^* = b_1(s) \pi_1^* + \dots + b_{mr}(s) \pi_{mr}^* \quad (\text{V.15})$$

Substituindo-se (V.12) em (V.15) obtém-se:

$$V(s) \leq \sum_{i \in s} u_i \quad (\text{V.16})$$

A expressão (V.16) mostra que os benefícios recebidos pelos participantes dentro da coalizão completa ( $K$  membros) não é inferior ao recebido se atuassem isoladamente ou em qualquer subcoalizão.

É possível demonstrar também que, a alocação definida em (V.14) é completa, ou seja, reparte completamente os benefícios da coalizão, já que:

$$V(K) = \sum_{i \in K} u_i \quad (\text{V.17})$$

## V.4 Custos marginais em sistemas elétricos

A seguir será apresentada a aplicação dos custos marginais a sistemas elétricos de potência. Primeiramente será visto o rateio para sistemas termoelétricos de barra única e posteriormente os conceitos serão estendidos para sistemas hidrotérmicos considerando a rede de transmissão.

### V.4.1 Sistemas termoelétricos – barra única

A teoria de custos marginais aplicada a sistemas elétricos será ilustrada inicialmente para um sistema de geração composto somente de unidades térmicas. Neste caso, o objetivo é minimizar os custos de geração. O despacho ótimo deste sistema é representado como:

$$\begin{aligned}
 z = \min \sum_{j=1}^{nb} c_j g_{tj} & \quad \text{custo} \\
 \text{s.a} & \quad \text{marginal} \\
 & \quad \quad \quad (V.18) \\
 \sum_{j=1}^{nb} g_{tj} = d & \quad \pi_d \\
 g_{tj} \leq \bar{g}_{tj} \quad \text{para } j = 1, \dots, nb & \quad \pi_{gj}
 \end{aligned}$$

Onde:

- $\pi_d$  custo marginal associado à variação do mercado
- $\pi_g$  custo marginal associado à variação da capacidade de geração

Neste problema, o recurso utilizado para a produção de energia elétrica é a capacidade de geração térmica.

O problema (V.18) pode ser resolvido por inspeção: carregue os geradores por custo crescente de operação até atender ao mercado. Por simplicidade de notação, assuma que os geradores  $j = 1, \dots, nb$ , já estão em ordem crescente de

custo e que  $j^*$  é a última unidade a ser carregada. O custo marginal associado à variação do mercado  $\pi_d$ , é dado por:

$$\pi_d = c_{j^*} \quad (\text{V.19})$$

A equação (V.19) indica que uma variação marginal no mercado será atendida por uma variação marginal no gerador  $j^*$ , cujo custo unitário é  $c_{j^*}$ . De acordo com a abordagem marginal,  $\pi_d$  é a tarifa a ser cobrada aos consumidores. O valor total a ser pago pelos consumidores da energia é portanto:

$$P_d = \pi_d d \quad (\text{V.20})$$

Os benefícios marginais associados a variações na capacidade de geração  $\pi_g$ , são dados por:

$$\begin{aligned} \pi_{gj} &= c_j - c_{j^*} && \text{para } j = 1, \dots, j^* \\ \pi_{gj} &= 0 && \text{para } j = j^*+1, \dots, nb \end{aligned} \quad (\text{V.21})$$

A equação (V.21) é interpretada da seguinte forma: se houver um aumento na capacidade de um gerador carregado no despacho econômico (cujo custo de geração é menor que o da unidade  $j^*$ ), esta capacidade adicional será utilizada para substituir parte da geração da unidade  $j^*$ ; o ganho líquido é portanto a diferença entre os custos unitários de geração de ambas unidades. Por outro lado, um incremento de capacidade de uma unidade não carregada (custo unitário de operação superior a  $j^*$ ) não afeta o despacho e, portanto, o custo de operação.

De acordo com as regras de alocação mostradas no item anterior, o lucro total de cada unidade geradora é dado por

$$P_{gj} = \pi_{gj} \overline{g}l_j \quad \text{para } j = 1, \dots, nb \quad (\text{V.22})$$

Observe que a expressão (V.22) tem um sinal negativo (lucro), enquanto a expressão (V.20) tem um sinal positivo (tarifa). Substituindo (V.22) em (V.21) obtém-se:



$$\begin{aligned}
 P_{gj} &= (c_j - c_{j^*}) \bar{g}t_j && \text{para } j = 1, \dots, j^* && (V.23) \\
 P_{gj} &= 0 \times \bar{g}t_j && \text{para } j = j^*+1, \dots, nb
 \end{aligned}$$

As expressões (V.23) podem ser escritas de forma mais intuitiva:

$$P_{gj} = (c_j - c_{j^*}) g t_j \quad \text{para } j = 1, \dots, nb \quad (V.24)$$

De acordo com (V.24), cada unidade  $i$  "compra" sua própria produção a um custo unitário  $c_j$  e a "vende" aos consumidores ao "preço de mercado"  $\pi_d$ , que no caso é igual à  $c_{j^*}$ .

Aplicando-se a igualdade primal-dual ao problema (V.18) tem-se:

$$\sum_{j=1}^{nb} c_j g t_j = \pi_d d + \sum_{j=1}^{nb} \pi g_j \bar{g}t_j \quad (V.25)$$

Na expressão (V.25), verifica-se que a tarifa total ( $\pi_d d$ ) excede o custo de operação pelo termo associado ao lucro das térmicas ( $\sum_{j=1}^{nb} \pi g_j \bar{g}t_j$ ). No item V.5 será mostrado que este lucro remunera exatamente os investimentos na construção dos equipamentos, se a função de custo atualizado de investimento for linear.

#### V.4.2 Sistemas Hidrotérmicos

Neste item serão calculados os custos marginais associados à operação de um sistema hidrotérmico. Primeiramente será analisado o caso determinístico, no qual supõe-se conhecidas as afluências aos reservatórios ao longo do período de planejamento. Posteriormente os conceitos serão estendidos para o caso estocástico.

### V.4.2.1 Caso determinístico

O problema de operação ótima de um sistema hidrotérmico, supondo conhecidas as afluências ao longo do período de planejamento, pode ser formulado como:

$$\begin{aligned}
 \min \quad & \sum_{t=1}^T \beta_t \sum_{j=1}^{nb} c_j g_{tj} && \text{variáveis} \\
 & && \text{duais} \\
 \text{s.a} \quad & && \text{(V.26)} \\
 \\
 v_{t+1} - v_t + q_t + s_t - M(q_t + s_t) = a_t & && \pi_{h,t} \\
 \\
 v_{t+1} \leq \bar{v} & && \pi_{v,t} \\
 \\
 gh_t = \rho q_t \leq \bar{gh} & && \pi_{gh,t} \\
 \\
 gt_t \leq \bar{gt} & && \pi_{gt,t} \\
 \\
 \sum_{i=1}^n gh_{i,t} + \sum_{j=1}^{nb} gt_{j,t} = d_t & && \pi_{d,t} \\
 \\
 & && \text{para } t = 1, \dots, T
 \end{aligned}$$

Neste problema, os recursos utilizados para a produção de energia elétrica são:

- Afluências aos reservatórios
- Capacidade de armazenamento
- Capacidade de geração hidroelétrica
- Capacidade de geração térmica

Como visto anteriormente, os custos marginais correspondem aos multiplicadores simplex associados às restrições do problema. A alocação marginal para as unidades térmicas é semelhante à alocação do despacho puramente térmico.

$$P_{gt,j,t} = \pi_{gt,j,t} \bar{g}t_j \quad (\text{V.27})$$

onde:

$P_{gt,j,t}$  Alocação da usina térmica  $j$  no estágio  $t$

$\pi_{gt,j,t}$  Variável dual associada à restrição de capacidade de geração térmica na usina  $j$  no estágio  $t$

ou, alternativamente, como na expressão (V.24) através de:

$$P_{gt,j,t} = \beta_t c_j g_{t,j,t} - \pi_{d,j,t} g_{t,j,t} \quad (\text{V.28})$$

onde:

$\pi_{d,j,t}$  Variável dual associada ao atendimento à demanda na barra  $j$  no estágio  $t$

a alocação marginal das usinas hidroelétricas tem dois componentes:

$$P_{v,j,t} = \pi_{v,j,t} \bar{v}_j \quad (\text{V.29})$$

$$P_{gh,j,t} = \pi_{gh,j,t} \bar{g}h_j \quad (\text{V.30})$$

onde:

$P_{v,j,t}$  Alocação associada a capacidade de regularização do reservatório  $j$  no estágio  $t$

$P_{gh,j,t}$  Alocação associada a capacidade de geração da usina  $j$  no estágio  $t$

$\pi_{v,j,t}$  Variável dual associada a capacidade de armazenamento da usina  $j$  no estágio  $t$

$\pi_{gh,j,t}$  Variável dual associada a capacidade de geração na usina  $j$  no estágio  $t$

A alocação marginal associada à água é:

$$P_{a,j,t} = \pi_{h,j,t} a_{j,t} \quad (\text{V.31})$$

onde:

$P_{a,j,t}$	Alocação associada a afluência na usina $j$ no estágio $t$
$\pi_{h,j,t}$	Variável dual associada a equação de balanço hídrico na usina $j$ no estágio $t$

É importante ressaltar que esta alocação não fornece aos participantes da coalizão sinais econômicos, já que a existência de água em um determinado aproveitamento não depende de decisão de investimento. Entretanto, é necessário considerá-la para não distorcer a tarifa. Esta parcela pode servir como indicador da atratividade de determinados aproveitamentos, ou seja aproveitamentos com "valor da água" ( $\pi_{ht}$ ) alto são em princípio bons lugares para se instalarem usinas, no sentido de que uma unidade de afluência em um aproveitamento neste local produz um benefício que pode ser estimado por  $\pi_{ht}$  [56].

#### V.4.2.2 Caso probabilístico

A metodologia pode ser estendida para o caso probabilístico, onde as afluências futuras ao sistema não são conhecidas. Neste caso, o problema de operação resultante pode ser resolvido através do algoritmo de PDDE mostrado no capítulo III:

$$\begin{aligned}
 a_t(v_t) &= \mathbb{E} \left\{ \min_{A_t} \sum_{j=1}^{nb} c_t g_{t,j} + \beta_t a_{t+1} \right\} && \text{variáveis} \\
 &&& \text{duais} \\
 \text{s.a} &&& (\text{V.32}) \\
 v_{t+1} + q_t + s_t - M(q_t + s_t) &= v_t + a_t && \pi_{h,t} \\
 v_{t+1} &\leq \bar{v} && \pi_{v,t} \\
 gh_t = \rho q_t &\leq \bar{gh} && \pi_{gh,t} \\
 gt_t &\leq \bar{gt} && \pi_{gt,t}
 \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^n gh_{it} + \sum_{j=1}^{nb} gt_{jt} = d_t \quad \pi_{d,t}$$

$$\alpha_{t+1} \geq W^i - \delta^i (v_{t+1} - v_{t+1}^i) \quad \text{para } i = 1, \dots, r \quad \pi_{\alpha t}^i$$

para  $t = 1, \dots, T$

onde:

$r$  Número de hiperplanos suportes da função aproximada de valor esperado do custo futuro.

$$W^i = E(\alpha_{t+1}^i (v_{t+1}^i))$$

$$\delta^i = E(\pi_{ht+1}^i)$$

As alocações marginais para mercado, geração térmica, limites de defluência e vazões afluentes são semelhantes às do caso determinístico. Entretanto, a alocação associada aos limites de armazenamento pode expressa de uma maneira alternativa através de:

$$P_{v,i,t} = \pi_{h,i,t} (v_{i,t} - v_{i,t+1}) \quad (\text{V.33})$$

Esta expressão tem uma interpretação econômica interessante: a cada estágio  $t$ , o reservatório  $i$  "vende" (depleciona) ou "compra" (armazena) um volume de água igual à diferença entre o volumes inicial e o final ( $v_{t,i} - v_{t+1,i}$ ). O preço de "mercado" destes volumes é o mesmo da afluência lateral ao reservatório,  $\pi_{h,i,t}$ .

A seguir será demonstrado a equivalência entre as expressões (V.29) e (V.33), e verificado que caso a remuneração dos reservatórios seja dada por (V.33), a renda total das tarifas ( $\pi_{d,t} d_t$ ), em um cenário qualquer será igual a soma da remuneração total dos agentes produtores com o custo de operação para este cenário.

A igualdade primal dual do problema (V.32) fornece:

$$c_j g_t + \beta_t \alpha_{t+1} = \pi_{h,t} (v_t + a_t) + \pi_{v,t} \bar{v} + \pi_{gh,t} \bar{gh} + \pi_{gt,t} \bar{gt} + \pi_{d,t} d_t + \sum_{i=1}^r \pi_{\alpha t}^i (W^i + \delta^i v_{t+1}) \quad (\text{V.34})$$

O custo reduzido ( $cr$ ) associado a variável  $a_{t+1}$  é igual a:

$$cr(a_{t+1}) = \beta_t - \sum_{r=1}^R \pi_{\alpha t}^r \quad (\text{V.35})$$

Sendo  $a_{t+1}$ , uma variável livre, seu custo reduzido é nulo. Portanto:

$$\beta_t = \sum_{r=1}^R \pi_{\alpha t}^r \quad (\text{V.36})$$

Substituindo-se (V.36) em (V.34):

$$c_t g_t + \sum_{r=1}^R \pi_{\alpha t}^r a_{t+1} = \pi_{h,t} (v_t + a_t) + \pi_{v,t} \bar{v} + \pi_{gh,t} \bar{gh} + \pi_{g,t} \bar{gt} + \pi_{d,t} d_t + \sum_{i=1}^r \pi_{\alpha t}^i (W^i + \delta^i v_{t+1}) \quad (\text{V.37})$$

O custo reduzido da variável  $v_{t+1}$  pode ser expresso por:

$$cr(v_{t+1}) = -\pi_{v,t} - \sum_{i=1}^r \pi_{\alpha t}^i \delta^i - \pi_{h,t} \quad (\text{V.38})$$

multiplicando-se ambos os lados de (V.38) por  $v_{t+1}$  obtém-se:

$$cr(v_{t+1}) v_{t+1} = (-\pi_{v,t} - \sum_{i=1}^r \pi_{\alpha t}^i \delta^i - \pi_{h,t}) v_{t+1} = 0 \quad (\text{V.39})$$

A expressão (V.39) pode ser verificada considerando-se que quando  $v_{t+1} = 0$ , a expressão (V.39) será igual a zero. Quando  $v_{t+1} \neq 0$ , a expressão (V.39) se anulará, já que  $v_{t+1}$  neste caso é uma variável básica e portanto  $cr(v_{t+1}) = 0$ .

E lembrando que  $\pi_{v,t} \bar{v} = \pi_{v,t} v_{t+1}$  tem-se:

$$\pi_{v,t} \bar{v} = \pi_{v,t} v_{t+1} = \left( -\sum_{i=1}^r \pi_{\alpha t}^i \delta^i - \pi_{h,t} \right) v_{t+1} \quad (\text{V.40})$$

Substituindo-se (V.40) em (V.37):

$$\begin{aligned} c_t g t_t + \sum_{i=1}^r \pi_{\alpha t}^i a_{t+1} &= \pi_{h,t} (v_t + a_t) - \left( \sum_{i=1}^r \pi_{\alpha t}^i \delta^i + \pi_{h,t} \right) v_{t+1} + \pi_{gh,t} \bar{gh} \\ &+ \pi_{gt,t} \bar{gt} + \pi_{d,t} d_t + \sum_{i=1}^r \pi_{\alpha t}^i (W^i + \delta^i v_{t+1}^i) \end{aligned} \quad (\text{V.41})$$

Considerando-se a identidade:

$$\sum_{i=1}^r \pi_{\alpha t}^i (W^i - \delta^i (v_{t+1} - v_{t+1}^i)) = \sum_{i=1}^r \pi_{\alpha t}^i a_{t+1} \quad (\text{V.42})$$

A expressão (V.42) pode ser verificada imediatamente para as restrições  $\alpha_{t+1} \geq W^i - \delta^i (v_{t+1} - v_{t+1}^i)$  atendidas na igualdade ( $\alpha_{t+1} = W^i - \delta^i (v_{t+1} - v_{t+1}^i)$ ). Para as demais os valores dos multiplicadores simplex ( $\pi_{\alpha t}^i$ ) são nulos fazendo com que se anulem os dois lados da expressão.

Substituindo (V.42) em (V.41) e cancelando-se os termos comuns obtém-se:

$$c_t g t_t = \pi_{h,t} a_t + \pi_{h,t} (v_t - v_{t+1}) + \pi_{gh,t} \bar{gh} + \pi_{gt,t} \bar{gt} + \pi_{d,t} d_t \quad (\text{V.43})$$

Donde se conclui que a utilização da expressão (V.43) permite que a renda total das tarifas em cada cenário seja igual a soma entre a remuneração dos agentes produtores e o custo de operação.

A expressão (V.43) pode ser estendida para todos os cenários e estágios representados no problema (V.32) fornecendo uma estimativa para o valor esperado do custo total de operação.

$$a_1(v_1) = E\{ \pi_{h,t} a_t + \pi_{h,t} (v_t - v_{t+1}) + \pi_{gh,t} \bar{gh} +$$

$$\pi_{gt,t} \bar{gt} + \pi_{d,t} d_t \} \quad (\text{V.44})$$

O mesmo valor pode ser obtido utilizando-se a variável dual associada ao limite de armazenamento:

$$\begin{aligned} a_1(v_1) &= E\{ \pi_{h,t} a_t + \pi_{v,t} \bar{v}_{t+1} + \pi_{gh,t} \bar{gh} + \pi_{gt,t} \bar{gt} \\ &\quad + \pi_{d,t} d_t \} \end{aligned} \quad (\text{V.45})$$

Portanto, o valor esperado da remuneração dos reservatórios nas expressões (V.45) e (V.46) são iguais, já que todos os demais valores das duas expressões são iguais.

#### V.4.3 Sistemas de geração e transmissão

Neste item será discutida a incorporação da rede de transmissão, representada por um modelo de fluxo de potência linearizado, definido pelas expressões (II.8.1) e (II.8.2). O despacho econômico para um sistema puramente térmico pode ser representado por:

$$z = \min \sum_{k=1}^{nb} c_k g t_k \quad \begin{array}{l} \text{variáveis} \\ \text{duais} \end{array}$$

s.a

$$gt + A f = d \quad \pi_d \quad (\text{V.46.1})$$

$$f - \Gamma A^t \theta = 0 \quad \pi_x \quad (\text{V.46.2})$$

$$gt \leq \bar{gt} \quad \pi_g \quad (\text{V.46.3})$$

$$f \leq \bar{f} \quad \pi_f \quad (\text{V.46.4})$$

Assim como no caso barra única, a receita em cada barra é dada por:

$$P_{dk} = \pi_{dk} d_k \quad \text{para } k = 1, \dots, nb \quad (\text{V.47})$$



Entretanto, em contraste com o caso barra única, em que o custo marginal  $\pi_d$  era necessariamente positivo, é possível haver um custo marginal negativo  $\pi_{dk}$  numa barra  $k$ ; isto indica que um aumento da carga na barra  $k$  leva a uma redução dos custos de operação; conseqüentemente, o consumidor na barra  $k$  recebe uma "conta negativa", isto é, ele é pago para consumir energia na barra. Este comportamento, conhecido como incoerência, é devido à segunda lei de Kirchhoff [56].

A alocação marginal de benefícios para as unidades térmicas também é semelhante à do caso barra única. A alocação marginal para um circuito  $k-l$  é dada por:

$$P_{c,kl} = \pi_{s,kl} \gamma_{kl} + \pi_{f,kl} \bar{f}_{kl} \quad (\text{V.48})$$

onde:

$P_{c,kl}$  Alocação associada ao circuito  $k-l$

$\pi_{s,kl}$  Derivada da função objetivo em relação à variação da susceptância do circuito  $k-l$

Observe na expressão (V.48) que tanto a susceptância como os limites de transmissão são "recursos" contribuídos pelo circuito. Esta expressão pode ser reescrita de forma mais intuitiva. Seja a remuneração de um circuito  $k-l$  expressa por:

$$P_{c,kl} = (\pi_{d,k} - \pi_{d,l}) f_{kl} \quad (\text{V.49})$$

A expressão (V.49) tem a seguinte interpretação: o circuito  $k-l$  "compra"  $f_{kl}$  MW da barra  $k$ , pagando o "preço de mercado"  $\pi_{d,k}$ , e "vende" estes mesmos  $f_{kl}$  MW para a barra  $l$ , recebendo o respectivo "preço de mercado"  $\pi_{d,l}$ . O lucro é a diferença entre os preços de compra e venda. É interessante observar que, em contraste com a geração, que nunca "perde" dinheiro (isto é,  $P_{g,k}$  é sempre não-negativo), um dado circuito  $k-l$  pode ter "prejuízo", isto é, transportar energia de uma barra "cara" para uma barra "barata". Assim como o caso das barras de carga "incoerentes" mencionadas acima, isto é devido à segunda lei de Kirchhoff.

A equivalência entre (V.48) e (V.49) será mostrada a seguir.

Da teoria de programação linear, sabe-se que:

$$\pi_{skl} = \pi_{xkl} \Delta \theta_{kl} \quad (\text{V.50})$$

onde  $\Delta \theta_{kl}$  é igual a  $\theta_k - \theta_l$ .

Lembrando que a variável  $f_{kl}$  é uma variável livre, seu custo reduzido é nulo. Portanto  $\pi_{xkl}$  pode ser expresso através de:

$$\pi_{x,kl} = \pi_{d,k} - \pi_{d,l} - \pi_{f,kl} \quad (\text{V.51})$$

Substituindo-se (V.51) em (V.50):

$$\pi_{s,kl} = (\pi_{d,k} - \pi_{d,l} - \pi_{f,kl}) \Delta \theta_{kl} \quad (\text{V.52})$$

Substituindo (V.52) em (V.49), obtém-se:

$$P_{c,kl} = (\pi_{d,k} - \pi_{d,l} - \pi_{f,kl}) f_{kl} + \pi_{f,kl} \bar{f}_{kl} \quad (\text{V.53})$$

Finalmente, lembrando que:

$$\pi_{f,kl} f_{kl} = \pi_{f,kl} \bar{f}_{kl} \quad (\text{V.54})$$

A expressão (V.54) pode ser verificada imediatamente quando  $f_{kl} = \bar{f}_{kl}$  e quando  $f_{kl} \neq \bar{f}_{kl}$  a variável  $\pi_{f,kl}$  é nula, tornando os dois lados da expressão nulos.

De onde se conclui que:

$$P_{c,kl} = (\pi_{d,k} - \pi_{d,l}) f_{kl}$$

É interessante observar que a remuneração dos circuitos dada por (V.49) apenas redistribui o total alocado para os circuitos que é igual a  $\pi_f f$ . Este fato pode ser verificado utilizando-se a igualdade primal-dual do problema (V.46).

$$c \cdot g \cdot t = \pi_d d + \pi_g \bar{g} \cdot t + \pi_f \bar{f} \quad (\text{V.55})$$

Substituindo  $d$  em (V.55) por (V.46.1) obtém-se:

$$c \, gt = \pi_d (gt + A \, f) + \pi_g \overline{gt} + \pi_f \overline{f} \quad (\text{V.56})$$

Lembrando que  $\pi_g \overline{gt}$  é numericamente igual a  $\pi_g \, gt$ , e agrupando-se os termos associados a  $gt$ :

$$(c - \pi_d - \pi_g) \, gt = \pi_f \overline{f} + \pi_d (A \, f) \quad (\text{V.57})$$

O termo entre parênteses no lado esquerdo da expressão (V.57) corresponde ao custo reduzido da variável  $gt$ . Pela teoria de programação linear se  $gt \geq 0$  este termo se anula; caso contrario se  $gt = 0$ , este termo será positivo ou nulo. Portanto o lado esquerdo da expressão (V.57) é sempre nulo.

$$\pi_f \overline{f} = - \pi_d (A \, f) \quad (\text{V.58})$$

O que demonstra que a soma das remunerações dos circuitos é igual a  $\pi_f \overline{f}$ .

Por simplicidade de notação, não serão apresentadas as equações correspondentes à operação ótima estocástica de um sistema hidrotérmico com restrições de transmissão; entretanto, todas as conclusões referentes à alocação marginal de circuitos de transmissão discutidas acima também são válidas para o caso hidrotérmico.

#### V.4.4 Inclusão de Restrições de Segurança

Neste item será discutida a incorporação das restrições de segurança, como definido em (II.14). O despacho econômico com restrições de segurança para um sistema puramente térmico pode ser representado por:

$$\begin{array}{ll} \min c \, gt & \text{variáveis} \\ & \text{duais} \\ \text{s.a} & \\ A^0 f^0 + gt = d & \pi_d^0 \end{array} \quad (\text{V.59})$$

$$\begin{array}{ll}
gt \leq \overline{gt} & \pi_g \\
f^0 \leq \overline{f} & \pi_f \\
f^0 - \Gamma^0 (A^0)^t \theta^0 = 0 & \pi_x \\
A^1 f^1 + gt = d & \pi_d \\
f^1 - \Gamma^1 (A^1)^t \theta^1 = 0 & \pi_x \\
f^1 \leq \overline{f} & \pi_f \\
\vdots & \vdots \\
A^{nc} f^{nc} + gt = d & \pi_d^{nc} \\
f^{nc} - \Gamma^{nc} (A^{nc})^t \theta^{nc} = 0 & \pi_x^{nc} \\
f^{nc} \leq \overline{f} & \pi_f^{nc}
\end{array}$$

A receita em cada barra é dada por:

$$P_{dk} = (\pi_{dk}^0 + \pi_{dk}^1 + \dots + \pi_{dk}^{nc}) d_k \quad \text{para } k = 1, \dots, nb \quad (\text{V.60})$$

A alocação marginal dos benefícios para as unidades térmicas é semelhante aos casos anteriores:

$$P_{gk} = \pi_{gk} \overline{gt}_k \quad \text{para } k = 1, \dots, nb \quad (\text{V.61})$$

A alocação marginal dos benefícios para um circuito  $k-l$  é dada por:

$$P_{ckl} = (\pi_{dk}^0 - \pi_{dl}^0) f_{kl} + (\pi_{dk}^1 - \pi_{dl}^1) f_{kl}^1 + \dots + (\pi_{dk}^{nc} - \pi_{dl}^{nc}) f_{kl}^{nc} \quad (\text{V.62})$$

A seguir será demonstrado, do mesmo modo que em sistemas com geração e transmissão, a alocação (V.62) apenas redistribui a remuneração total alocada aos circuitos (que no caso de sistemas de geração e transmissão com restrições de segurança é igual a  $\sum_{k=1}^{nc} \pi_f^k$ ).

Seja a igualdade primal-dual aplicada ao problema (V.59):

$$c \cdot gt = \sum_{k=0}^{nc} \pi_d^k d + \pi_g \overline{gt} + \sum_{k=0}^{nc} \pi_f^k \overline{f} \quad (\text{V.63})$$

Substituindo  $d$  por  $A^i f^i + g$  obtém-se:

$$c \, gt = \sum_{k=0}^{nc} \pi_d^k (A^i f^i + gt) + \pi_g \bar{gt} + \sum_{k=0}^{nc} \pi_f^k \bar{f} \quad (\text{V.64})$$

Lembrando que  $\pi_g \bar{gt}$  é numericamente igual a  $\pi_g \, gt$ , e agrupando-se os termos associados a  $gt$ :

$$(c - \sum_{k=0}^{nc} \pi_d^k - \pi_g) \, gt = \sum_{k=0}^{nc} (\pi_d^k A^i f^i + \pi_f^k \bar{f}) \quad (\text{V.65})$$

O termo entre parênteses no lado esquerdo da expressão (V.65) corresponde ao custo reduzido da variável  $gt$ . Pela teoria de programação linear, caso  $gt \geq 0$ , este termo se anulará; caso contrário, se  $gt = 0$ , este termo será positivo ou nulo. Portanto o lado esquerdo de (V.65) é sempre nulo.

$$\sum_{k=0}^{nc} \pi_d^k A^i f^i = - \sum_{k=0}^{nc} \pi_f^k \bar{f} \quad (\text{V.66})$$

O lado direito da equação (V.66) corresponde à expressão (V.62) para remuneração dos circuitos.

#### V.4.4.1 Cálculo dos Custos Marginais de Demanda

Como foi visto no item anterior, para o cálculo das remunerações dos circuitos e da tarifa a ser paga pelos consumidores é necessário calcular  $\pi_d^i$  para  $i=1, \dots, n$ . No algoritmo de solução para o problema de otimização estocástica incluindo a rede de transmissão mostrado no capítulo anterior não se representam explicitamente as equações de atendimento a demanda, e portanto não se tem os valores de  $\pi_d$  de maneira imediata. Neste item será visto uma forma de obter-se as variáveis duais  $\pi_d$  sem representar explicitamente as suas restrições associadas. Utilizando-se a formulação compacta pode-se reescrever o problema (V.59) como:

$$\begin{array}{ll} \min c \, gt & \text{variáveis} \\ & \text{duais} \\ \text{s.a} & \end{array} \quad (\text{V.67})$$

$$B_r^0 \theta^0 + gt = d \quad \mathcal{N}_d^0$$

$$\sum_{i=1}^{nb} gt_i = \sum_{i=1}^{nb} d_i \quad \mathcal{N}_s$$

$$gt \leq \overline{gt} \quad \mathcal{N}_g$$

$$|\Gamma^0 (A^0)^t \theta^0| \leq \overline{f} \quad \mathcal{N}_f^0$$

$$B_r^1 \theta^1 + gt = d \quad \mathcal{N}_d^1$$

$$|\Gamma^1 (A^1)^t \theta^1| \leq \overline{f} \quad \mathcal{N}_f^1$$

...

...

...

$$B_r^{nc} \theta^{nc} + gt = d \quad \mathcal{N}_d^{nc}$$

$$|\Gamma^{nc} (A^{nc})^t \theta^{nc}| \leq \overline{f} \quad \mathcal{N}_f^{nc}$$

onde:

$B_r$  Matriz de susceptância onde os elementos da linha e coluna correspondentes à barra de referência são anulados, à exceção do elemento da diagonal onde é assumido o valor unitário.

$A_r$  Matriz de incidência nó-ramo onde os elementos da linha correspondente à barra de referência são anulados.

A seguir será demonstrado que utilizando-se (V.67) é possível calcular  $\mathcal{N}_d^i$ , para  $i = 1, \dots, nc$ , sem representar explicitamente as restrições de atendimento à demanda em cada condição operativa do sistema.

O custo reduzido associado ao vetor  $\theta$  pode ser expresso por:

$$\mathcal{N}_d^i B_r^i + A^i \Gamma \mathcal{N}_f = 0 \quad (\text{V.68})$$

como  $B_r^i$  é inversível tem-se:

$$\lambda_d^i = -(B_r^i)^{-1} A^i \Gamma \lambda_f \quad (\text{V.69})$$

A seguir serão calculadas as remunerações marginais utilizando-se a formulação (V.67).

A igualdade primal-dual do problema (V.67) é expressa por:

$$c \, gt = \sum_{k=0}^{nc} (\lambda_d^k d^k + \lambda_f^k \bar{f}) + \lambda_g \bar{gt} + \lambda_s \sum_{i=1}^{nb} d_i \quad (\text{V.70})$$

Substituindo  $d$  por  $B_r^k \theta^k + gt$  e  $\sum_{i=1}^{nb} d_i$  por  $e \, gt$ , onde  $e$  é o vetor  $[1, \dots, 1]$ , tem-se:

$$c \, gt = \sum_{k=0}^{nc} (\lambda_d^k (B_r^k \theta^k + gt) + \lambda_f^k \bar{f}) + \lambda_g \bar{gt} + \lambda_s e \, gt \quad (\text{V.71})$$

Reagrupando os termos associados a  $gt$ :

$$(c - \sum_{k=0}^{nc} \lambda_d^k - \lambda_g - \lambda_s e) \, gt = \sum_{k=0}^{nc} (\lambda_d^k B_r^k \theta^k + \lambda_f^k \bar{f}) \quad (\text{V.72})$$

O termo entre parênteses no lado esquerdo da expressão (V.72) corresponde ao custo reduzido da variável  $gt$ . Pela teoria de programação linear, se  $gt \geq 0$  este termo se anula; caso contrário, se  $gt = 0$ , este termo será positivo ou nulo. Portanto o lado esquerdo da expressão (V.57) é sempre nulo. Por outro lado  $B_r^k \theta^k$  é igual a  $A_r^k \bar{f}$ .

Assim,

$$\sum_{k=0}^{nc} \lambda_d^k A_r^k \bar{f} = - \sum_{k=0}^{nc} \lambda_f^k \bar{f} \quad (\text{V.73})$$

Como nos casos anteriores, a alocação dada pelo lado direito de (V.73) apenas redistribui de uma outra forma a alocação dos circuitos dada por  $\sum_{k=0}^{nc} \lambda_f^k \bar{f}$ .

A alocação marginal dos benefícios de um circuito  $k-l$  pode ser expressa como:

$$P_{ckl} = (N_{dk}^0 - N_{dl}^0) f_{kl} + (N_{dk}^1 - N_{dl}^1) f_{kl}^1 + \dots + (N_{dk}^{nc} - N_{dl}^{nc}) f_{kl}^{nc} \quad (V.74)$$

A seguir será mostrado o cálculo da tarifa de cada barra, fazendo-se uma comparação entre os modelos (V.59) e (V.67). Aumentando-se  $\Delta d_i$  unidades a demanda na barra  $i$ , o acréscimo do custo de operação é estimado por (V.59) é:

$$\Delta c = \sum_{k=0}^{nc} \pi_{d_i}^k \Delta d_i \quad (V.75)$$

Este mesmo custo é estimado por (V.59) em:

$$\Delta c = \left( \sum_{k=0}^{nc} N_{d_i}^k + N_s \right) \Delta d_i \quad (V.76)$$

A expressão (V.76) mostra que o acréscimo de demanda na barra  $i$  afeta a demanda da barra  $i$  e a restrição de soma das demandas.

Comparando as expressões (V.75) e (V.76) obtém-se:

$$\sum_{k=0}^{nc} \pi_{d_i}^k = \sum_{k=0}^{nc} N_{d_i}^k + N_s \quad (V.77)$$

Utilizando-se (V.77) pode-se reescrever a receita de cada barra como:

$$P_{di} = \left( N_s + \sum_{k=0}^{nc} N_{d_i}^k \right) d_k \quad (V.78)$$

Note que no caso de um incremento de  $\Delta d$  unidades de demanda na barra de referência ( $j$ ), o acréscimo do custo de operação é estimado por (V.59) e (V.67) respectivamente por:



$$\Delta c = \sum_{k=0}^{nc} \pi_{d_j}^k \Delta d_j \quad (V.79)$$

e

$$\Delta c = \aleph_s \Delta d_j \quad (V.80)$$

Comparando-se as duas expressões acima obtém-se:

$$\aleph_s = \sum_{k=0}^{nc} \pi_{d_j}^k \quad (V.81)$$

Portanto a receita associada à barra de referência é:

$$P_{d_j} = \aleph_s d_j \quad (V.82)$$

As expressões (V.78) e (V.82) permitem mostrar também a equivalência entre a remuneração do circuito obtida por (V.62) e (V.74), já que a remuneração de um circuito  $k-1$  utilizando-se (V.62) pode ser expressa por:

$$P_{ckl} = (\pi_{dk}^0 - \pi_{dl}^0) f_{kl} + (\pi_{dk}^1 - \pi_{dl}^1) f_{kl}^1 + \dots + (\pi_{dk}^{nc} - \pi_{dl}^{nc}) f_{kl}^{nc} \quad (V.83)$$

Ou utilizando-se (V.78) e (V.83) pode ser expressa como:

$$P_{ckl} = (\aleph_{dk}^0 - \aleph_{dl}^0) f_{kl} + (\aleph_{dk}^1 - \aleph_{dl}^1) f_{kl}^1 + \dots + (\aleph_{dk}^{nc} - \aleph_{dl}^{nc}) f_{kl}^{nc} \quad (V.84)$$

## V.5 Utilização dos custos marginais na expansão do sistema

A seguir será mostrado como a metodologia de custos marginais pode ser utilizada para determinar a expansão ótima do sistema elétrico.

O plano de expansão ótimo é a solução de um problema que consiste na minimização da soma do custo atualizado de investimento mais o valor esperado do custo de operação sujeito a restrições de investimento e operação.

$$\begin{aligned}
 z &= \min (ci(u), co(u, x)) \\
 \text{s.a} & \\
 &(u, x) \in \mathcal{X}
 \end{aligned}
 \tag{V.85}$$

onde:

$ci(u)$	Função de custo atualizado de investimento
$co(u, x)$	Função atualizado de custo de operação
$u$	Variáveis de investimento
$x$	Variáveis de operação
$\mathcal{X}$	Conjunto de restrições de investimento e operação

Sejam  $x^*$  e  $u^*$ , os vetores solução de (V.85). Caso não hajam restrições de investimentos ativas (atendidas de igualdade) de  $\mathcal{X}$  na solução ótima, a seguinte condição de otimalidade é verificada:

$$\left. \frac{\partial ci(u)}{\partial u_i} \right|_{u_i=u_i^*} = - \left. \frac{\partial co(u, x)}{\partial u_i} \right|_{u_i=u_i^*}
 \tag{V.86}$$

A expressão (V.86) pode ser interpretada do seguinte modo: no ótimo de (V.85), o custo incremental de investimento do equipamento  $i$  é igual à economia incremental (diminuição do custo de operação) pelo aumento de capacidade do equipamento  $i$ .

Caso a função de investimento seja linear ( $ci_i(u_i) = ci_i \times u_i$ ) tem-se:

$$ci_i = - \left. \frac{\partial co(u, x)}{\partial u_i} \right|_{u_i=u_i^*}
 \tag{V.87}$$

Multiplicando-se ambos os lados de (V.87) por  $u_i$  obtém-se:

$$ci_i u_i = - \left. \frac{\partial co(u, x)}{\partial u_i} \right|_{u_i=u_i^*} u_i
 \tag{V.88}$$

A expressão (V.88) indica que caso a função de custo de investimento for linear, o custo de investimento será igual a remuneração a custos marginais da capacidade do equipamento. A figura V.2 ilustra o conceito.

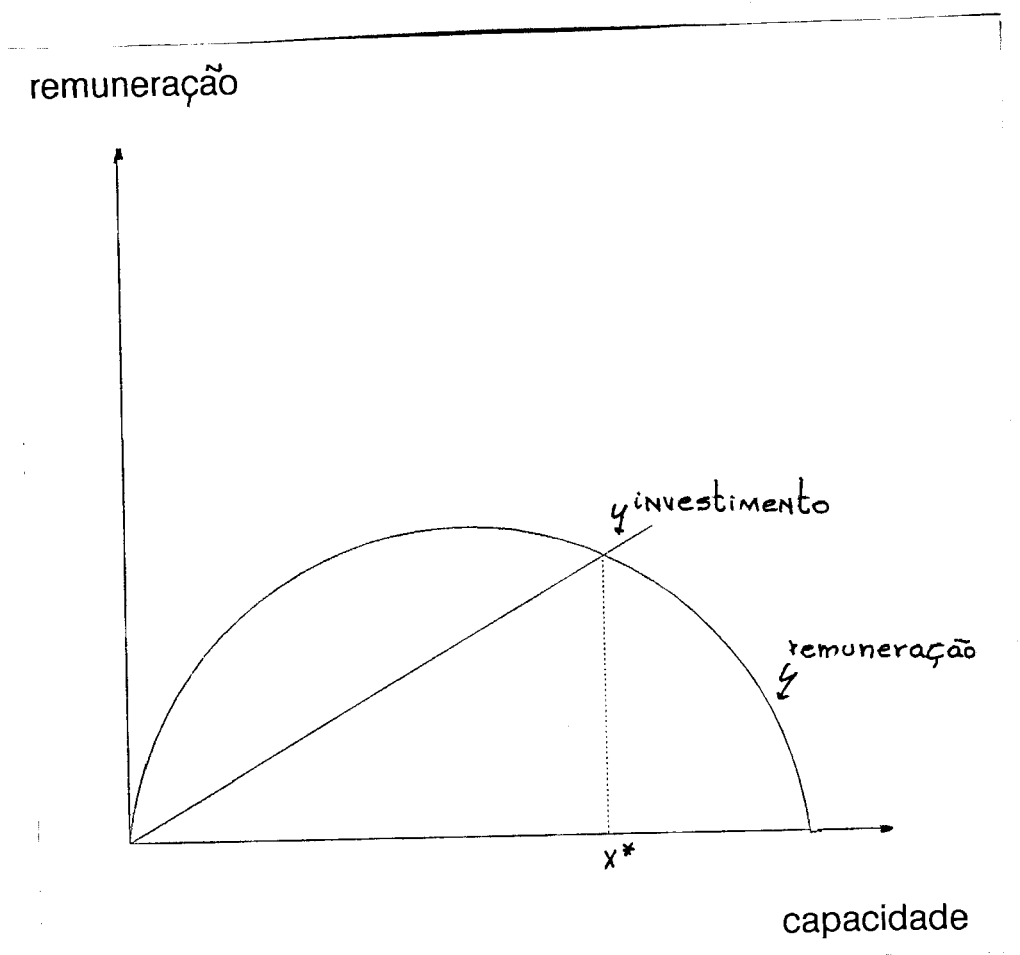


Figura V.2 – Remuneração total

## CAPÍTULO VI RESULTADOS COMPUTACIONAIS

### VI.1 Introdução

O modelo de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos incluindo as restrições da rede de transmissão foi implementado em um computador VAX 8810 e em microcomputadores do tipo IBM PC. Foram realizados diversos testes com dois sistemas reais.

O primeiro caso estudo é constituído por um modelo equivalente do sistema Sul-Sudeste composto por 436 barras. Neste sistema serão realizados os seguintes exercícios: cálculo do valor esperado do custo de operação e das remunerações dos componentes do sistema hidrotérmico representando-se as restrições de transmissão. Cálculo do dimensionamento ótimo de um componente através da análise de seu faturamento. Análise de sensibilidade entre o valor esperado do custo de operação, remuneração dos equipamentos e tarifa total com o tamanho da amostra de cenários utilizada.

O outro caso estudo é constituído pelo sistema da INECEL (Equador) composto por 107 barras. Neste sistema será estudado o impacto das restrições de segurança no valor esperado do custo de operação, tarifa total e na remuneração associada a cada componente do sistema.

## VI.2 Caso Estudo I

### VI.2.1 Dados gerais

O modelo do sistema interligado Sul–Sudeste utilizado no caso estudo I é composto por 44 usinas hidráulicas (capacidade instalada de 55 203 Mw), 11 usinas térmicas, 463 barras e 834 circuitos. O modelo de transmissão equivalente foi obtido utilizando-se o módulo de equivalentes de redes do programa ANAREDE [57]. Neste modelo foram mantidos todos os circuitos existentes com tensão acima de 138 KV, e alguns circuitos com tensão inferior para representação da integração das usinas à rede de transmissão e de caminhos de fluxo conectando circuitos de níveis de tensão mais elevados. A configuração hidráulica corresponde a um caso de planejamento da operação energética de julho de 1988 obtido no Departamento de Operação da Eletrobrás [58].

O período de simulação considerado é de 9 meses, discretizados em intervalos mensais. A demanda é considerada igual a 24 180 MW médios por mes. Os níveis iniciais dos reservatórios são 50 % dos respectivos volumes úteis. A estocasticidade das afluições é representada por um árvore de cenários com uma abertura de dois cenários por período como mostrado na figura III.4. Os cenários de afluições, supostos igualmente prováveis, foram gerados utilizando-se um modelo de geração de séries sintéticas independentes [59]. O custo incremental das térmicas é igual a uma unidade monetária (u.m.), enquanto que o custo do déficit é igual a 10 u.m. . A taxa de desconto utilizada é de 10 %.

### VI.2.2 Dimensão do problema

Cada subproblema de um único estágio do algoritmo de PDDE, para este problema, contém 1341 restrições (44 equações de balanço hídrico, 463 equações de conservação de fluxo e 834 restrições de limites de fluxo). Implicitamente são representadas 459 restrições (22 restrições de capacidade de armazenamento, 44 restrições de capacidade de turbinamento, 11 restrições de limite de geração térmica e 382 restrições de limite de corte de carga). O número de variáveis de cada subproblema é de 967 (110 variáveis para armazenamento, turbinamento e vertimento, 463 variáveis para os ângulos das tensões nodais, 11 variáveis para a geração nas usinas térmicas e 382 variáveis para representar o corte de carga nas

barras do sistema). O número total de cenários representados é de  $2^{9-1} = 256$ , portanto o número total de restrições e variáveis do problema é de 343 296 e 247 552 respectivamente.

### VI.2.3 Resultados

Utilizando-se uma amostra de 20 cenários de afluência, estima-se o valor esperado do custo de operação em 2756 unidades. A incerteza deste índice é de 45 unidades (coeficiente de variação: 0.016). A convergência do algoritmo é ilustrada na figura VI.1. A convergência foi obtida em 14 iterações, para um intervalo de confiança de 95 %. O tempo total de CPU foi de 125 minutos em um computador VAX 8810.

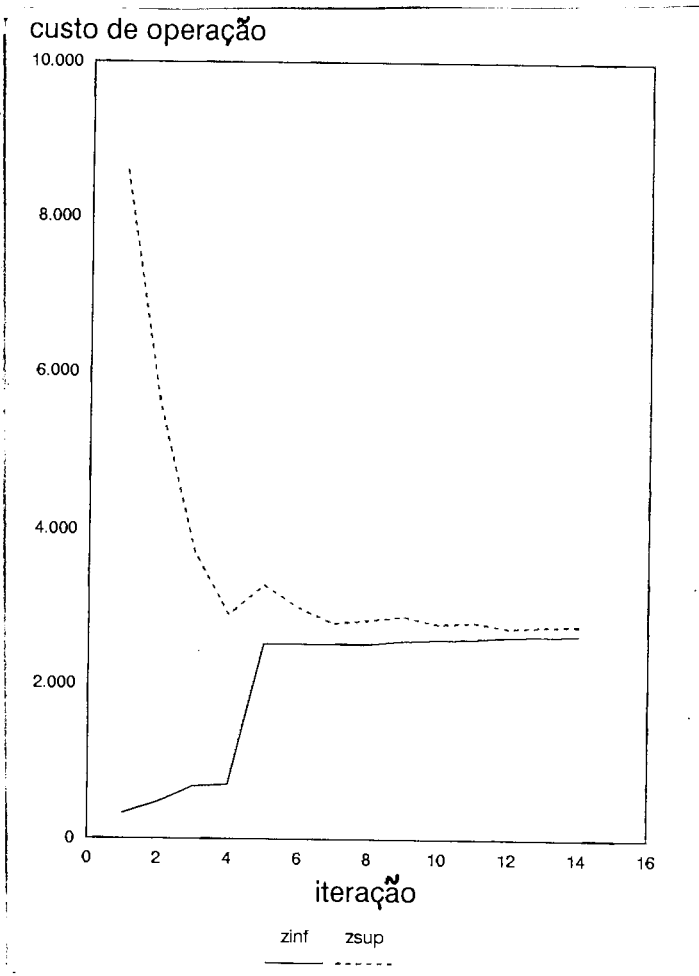


Figura VI.1 – Convergência do PDDE

A seguir serão analisadas as remunerações associadas a cada componente para o problema mostrado acima. De acordo com a expressão (V.33), os reservatórios "vendem" (deplecionam) ou "compram" (armazenam) água recebendo (pagando) o seu "valor de mercado". Dentre os reservatórios que deplecionaram no primeiro estágio, os que receberam as maiores remunerações estão relacionados na tabela VI.1.

Reservatório	Remuneração u.m.
P. Real	84 (740)
P. Fundo	69 (191)
Itumbiara	21 (2848)
G. B. Munhoz	15 (275)
S. Santiago	12 (468)

Tabela VI.1 – Remuneração dos reservatórios

Os valores entre parênteses correspondem aos volumes ( $\text{Hm}^3$ ) deplecionados pelos reservatórios no primeiro estágio. Note que, embora o reservatório de Itumbiara deplecione um volume de água maior que P. Real, sua remuneração é menor. Isto pode ser explicado considerando-se que o deplecionamento de P. Real evita a utilização da geração térmica (J. Lacerda) para o atendimento às cargas do Sul, especificamente o atendimento à área do norte de Santa Catarina (Joinville), que por problemas de transmissão, tem de ser atendida pelas usinas do rio Iguaçu ou pelas térmicas de J. Lacerda.

As maiores alocações para os reservatórios que armazenaram água no primeiro estágio são mostradas na tabela VI.2.

Reservatório	Alocação u.m.	
Emborcação	14	(376)
Furnas	9	(602)
São Simão	4.5	(1913)
G.P. Souza	1.4	(26)
Xavantes	1.3	(115)

Tabela VI.2 – Alocação dos reservatórios

Os valores entre parênteses correspondem aos volumes armazenados pelos reservatórios expressos em  $\text{Hm}^3$ . Observe que os reservatórios armazenam água quando seu "valor" é baixo e a deplecionam quando seu "valor" é alto. Por exemplo, o reservatório de P. Real (depleciona no primeiro estágio) tem um "valor da água" no primeiro estágio igual a  $0.11 \text{ u.m./m}^3/\text{s}$ ; enquanto que o "valor da água" na usina de Emborcação (armazena água no primeiro estágio) é de  $0.03 \text{ u.m./m}^3/\text{s}$ . A remuneração total associada aos reservatórios é de 197 u.m., correspondentes a 10 % do faturamento total no primeiro estágio. As maiores remunerações associadas à geração hidroelétrica (turbinas) são mostradas na tabela VI.3.

Geração Hidroelétrica	Remuneração u.m.
Jacui	59
P. Fundo	14
A. S. Lima	11
M. de Moraes	6
S. Simão	4

Tabela VI.3 – Remuneração das turbinas



A remuneração de uma turbina consiste no produto entre a geração hidroelétrica e o "valor de mercado" da capacidade de geração desta usina neste estágio (expressão V.30). A remuneração total das turbinas é de 103 u.m. (5 % da remuneração total no primeiro estágio). A remuneração da usina de Jacuí pode ser explicada devido ao fato de ser uma usina a fio d'água que está vertendo no primeiro estágio (afluência maior que sua capacidade de turbinamento). As maiores remunerações associadas ao recurso água são mostradas na tabela VI.4.

Água	Remuneração u.m.
Furnas	28 (0.038)
G. B. Munhoz	25 (0.14)
P. Real	21 (0.41)
Itumbiara	20 (0.019)
P. Fundo	18 (1.0)

Tabela VI.4 – Remuneração da água

Os numeros entre parênteses correspondem aos valores da água expressos em u.m./m<sup>3</sup>/s. A remuneração do recurso água consiste no produto entre o valor da água e a vazão afluente ao aproveitamento no primeiro estágio. Observe que o "valor da água" é função da localização do reservatório e da rede de transmissão que conecta este reservatório aos centros de carga. Por exemplo, o reservatório de Furnas tem um valor da água alto porque está situado no início da cascata, enquanto que o reservatório de P. Fundo tem um "valor da água" alto devido à problemas de transmissão na área de Sta Catarina. A remuneração total do recurso água é de 205 u.m. correspondentes a 10 % do faturamento total no primeiro estágio.

As maiores remunerações associadas aos circuitos são mostradas na tabela VI.5.

Circuito	Remuneração u.m.
Curitiba 230-Joinville 230	240
Curitiba 230-Joinville 230	220
Blumenau-Curitiba	200
P. Branco-Xanxere	110
Campos Novos-Gravataí	96

Tabela VI.5 – Remuneração dos circuitos

A remuneração associada aos circuitos que conectam Joinville a Curitiba está associada a uma deficiência de transmissão na área do norte de Santa Catarina. A ligação fraca entre Curitiba e Joinville impede que o atendimento da carga de Joinville seja feito utilizando-se apenas as usinas do rio Iguaçu, tornando-se necessário atender parte desta demanda através das térmicas de J. Lacerda. O faturamento total dos circuitos é de 1031 u.m. (53 % do faturamento total no primeiro estágio), o faturamento total das térmicas é de 28 u.m. (1 % do faturamento total no primeiro estágio) A figura VI.3 mostra a alocação relativa de cada componente do sistema hidrotérmico para o primeiro estágio. Note que neste caso, a maior parcela coube a rede de transmissão, o que sinaliza a existência de um estrangulamento na rede elétrica. Este fato pode ser verificado considerando que o valor esperado do custo de operação sem a representação da transmissão é nulo.

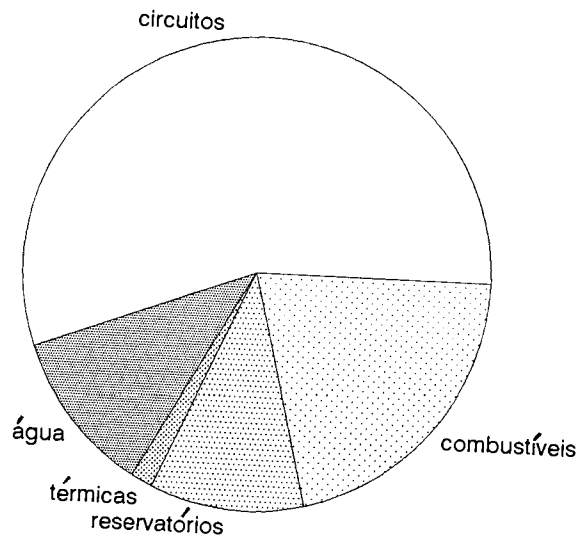


Figura VI.2 – Alocação relativa

O custo de operação no primeiro estágio é de 388 u.m. correspondentes a 20 % da tarifa total paga pelos consumidores no primeiro estágio (1953 u.m.). Os pontos da rede com maiores custos marginais de demanda são:

Barras	Custo marginal de demanda u.m./MW
Joinville-230	1.74
Joinville-138	1.65
C. Dourada-220	1.45
Anhanguera-220	1.44
Tijucas-138	1.28

Tabela VI.6 – Tarifa dos consumidores

A deficiência de transmissão na área de Joinville, acarreta um custo de demanda elevado nesta área. Esta informação é relevante para sinalizar que um acréscimo de demanda nesta área acarretará a necessidade de novos investimentos

para reforçar a transmissão permitindo o escoamento da geração para esta área através do estado do Paraná.

#### VI.2.4 Sensibilidade da solução em relação ao tamanho da amostra

A tabela VI.7 mostra comportamento da solução para diferentes tamanhos de amostra. Note que o intervalo de confiança diminui à medida que o tamanho da amostra aumenta, enquanto que o tempo de CPU aumenta com o tamanho da amostra.

Número de Series	Estimativa do custo de operação		desvio padrão da estim.	Tempo CPU (min) VAX 8810
	Inferior	Superior		
20	2 635	2 746	37	125
30	2 644	2 747	34	193
40	2 640	2 709	22	206
50	2 643	2 679	13	326

Tabela VI.7 – Sensibilidade em relação ao tamanho da amostra

Na tabela VI.8 é mostrada a sensibilidade das remunerações associadas ao primeiro estágio com o tamanho da amostra.

Número de Series	R E M U N E R A Ç Ã O				
	term	rese.	turb.	água	circui
20	28	197	103	205	1 030
30	25	197	103	187	1 015
40	27	207	103	197	1 028
50	29	210	103	215	1 048

Tabela VI.8 – Sensibilidade em relação ao tamanho da amostra

Na tabela VI.9 é mostrada a sensibilidade da tarifa total paga pelos consumidores e o custo de operação no primeiro estágio com o tamanho da amostra.

Número de Series	T a r i f a t o t a l u. m.	Custo de operação do primeiro estágio u. m.
20	1 953	388
30	1 740	379
40	1 941	377
50	1 993	386

Tabela VI.9 – Sensibilidade da tarifa e do custo de operação com o tamanho da amostra

Verifica-se através das tabelas VI.7 a VI.9 que a tarifa total e as remunerações dos componentes não tem uma sensibilidade muito alta em relação ao tamanho da amostra. Portanto para este caso, para calcular as remunerações dos componentes do sistema com uma precisão aceitável não é necessário um número grande de cenários. Por outro lado pode-se observar que o desvio padrão da estimativa do valor esperado do custo de operação tem uma alta sensibilidade em relação ao tamanho da amostra.

### VI.2.5 Dimensionamento ótimo

A tabela VI.10 mostra a aplicação da metodologia para determinação da capacidade ótima dos circuitos Curitiba 230 – Joinville 230 (capacidades: 132 MW), que tiveram as maiores remunerações. As capacidades dos circuitos foram aumentadas de 132 MW até 192 MW, em passos de 10 MW. As remunerações dos circuitos foram calculadas para cada capacidade através do PDDE. Pode-se ver que as remunerações começam a crescer a partir da capacidade de 132 MW e decaem a partir da capacidade de 182 MW. Este comportamento pode ser explicado devido à remuneração dos circuitos ser um produto entre o fluxo no circuito e a diferença entre os custos marginais de demanda das barras extremas do circuito; por um lado, quanto maior for a capacidade do circuito, maior será o fluxo neste circuito; por outro lado, o aumento da capacidade do circuito implica em uma redução da diferença entre os custos marginais de demanda das barras extremas do circuito.

Capacidade	Remuneração u.m.
132	240
142	270
152	285
162	302
172	320
182	340
192	280

Tabela VI.10 – Dimensionamento ótimo

Pela teoria de custo marginal, o ponto de capacidade ótimo, quando o custo de investimento for uma função linear, é aquele em a curva de custo de investimento intercepta a curva de remuneração, como mostrado na figura VI.3.

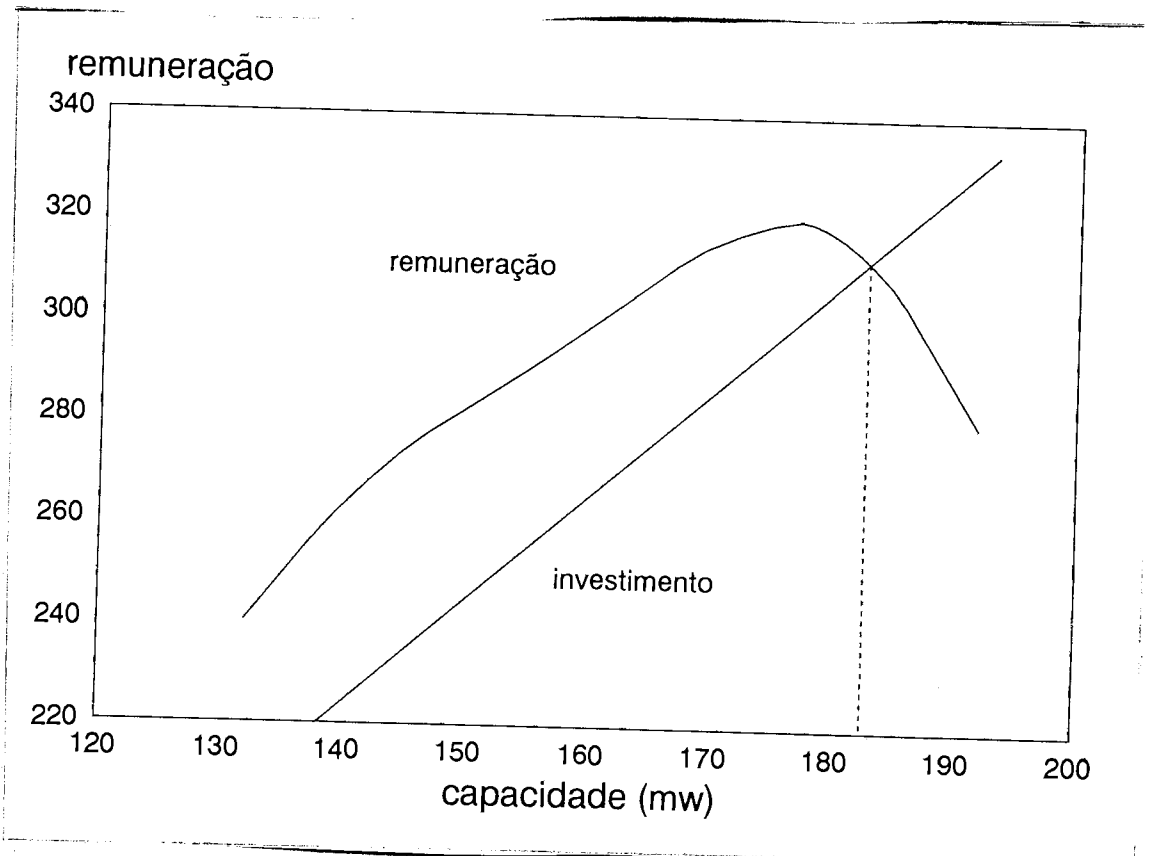


Figura VI.3 – Dimensionamento ótimo

## VI.3 Caso Estudo II

### VI.3.1 Dados gerais

O caso estudo II consiste na cálculo da política de operação ótima de um sistema hidrotérmico representando-se a rede de transmissão e as restrições de segurança. O estudo foi realizado utilizando-se o sistema da **INECEL** (Equador) composto por **107** barras, **126** circuitos, **3** usinas hidroelétricas (Molino, Pucara e Agoyan – sendo que as duas primeiras são usinas com reservatórios e a última é uma usina a fio d'água) e **15** usinas térmicas.

O período de simulação considerado é de 5 meses, discretizado em intervalos mensais. A demanda deste sistema é igual a **590 GWh** para todos os períodos. Os níveis iniciais dos reservatórios foram arbitrados em 50 % do seus respectivos volumes úteis. A estocasticidade das afluências é representada por uma árvore com uma abertura de 2 cenários por estágio. Os custos das térmicas foram obtidos da referência [60]. A taxa de desconto utilizada é de 10 %.

O sistema em estudo pode ser visualizado através da figura VI.4. A lista de contingências é composta por 16 circuitos e está descrita na tabela VI.11.



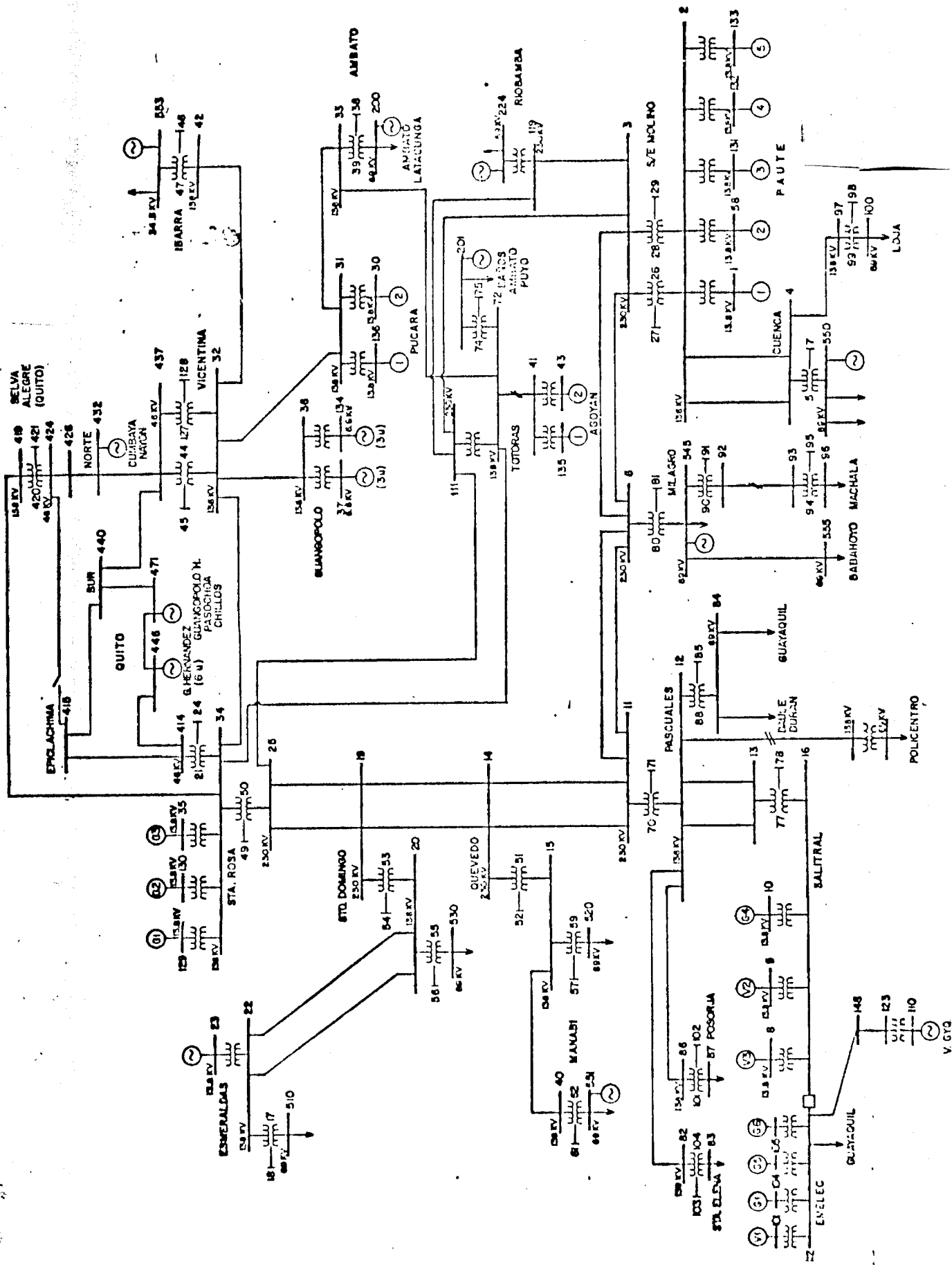


Figura VI.4 – Sistema INECEL (Ecuador)

Número do Circuito	D A  B A R R A	P A R A  B A R R A
01	Paute-138 (2)	Cuenca-138 (4)
02	Vapor 2 13.8 (14)	Salit-ine 69 (16)
03	F. S. Ros 230(50)	Sta Rosa 138 (34)
04	Quevedo 230 (14)	S. Domin 230 (19)
05	S. Domin 230 (19)	S. Rosa 230 (25)
06	S. Domin 138 (20)	Esmeral 138 (22)
07	S. Rosa 230 (25)	Totoras 230 (111)
08	Milagro 138 (92)	Machala 138 (93)
09	S. Domin 230 (19)	S. Rosa 230 (25)
10	S. Domin 138 (20)	Esmeral 138 (22)
11	S. Rosa 230 (25)	Totoras 138 (93)
12	Pucara 138 (31)	Vicentina 138 (32)
13	Agoyan 138 (41)	Totoras 138 (90)
14	Police 138 (61)	Ficpolic (62)
15	Milagro 138 (92)	Machala 138 (93)
16	S. Domingo69 (530)	S.Domingo 138 (20)

Tabela VI.11 – Lista de contingências

Obs: Os números entre parênteses na tabela VI.11 correspondem a identificação das barras na figura VI.4.

### VI.3.2 Dimensão do problema

Cada subproblema de um único estágio do algoritmo PDDE contém **3731** restrições (3 equações de balanço hídrico, 1712 equações de conservação de energia e 2016 restrições de limites de fluxo). Implicitamente são representadas **17** restrições (2 restrições de capacidade de armazenamento e 15 restrições de limites de geração térmica). O número de variáveis de cada subproblema é de **1735** (8 variáveis para armazenamento, turbinamento e vertimento, 1712 variáveis para os

ângulos das tensões nodais e 15 variáveis para a geração nas usinas térmicas). São representados 2<sup>5</sup> cenários, portanto o número total de restrições e variáveis é respectivamente 119392 e 55520.

### VI.3.3 Resultados

O valor esperado do custo de operação, sem a representação das restrições de segurança, é de **7624** u.m.(incerteza 1%), enquanto que o valor esperado do custo de operação representando-se as restrições de segurança é de **9870** u.m. (incerteza 2%). A convergência foi obtida em 4 iterações com um tempo total de 118 min em um microcomputador de 20 MHz do tipo IBM-PC. Na tabela VI.12 encontram-se as remunerações associadas ao primeiro estágio para as dois casos:

Remuneração Total	Sem restrições de segurança	Com restrições de segurança
Tarifas	16 712	17 221
Circuitos	135	1 454
Térmicas	2 487	2 596
Água	7 564	6 821
Reservatórios	2 573	2 011
Turbinas	112	21

Tabela VI.12 – Remunerações dos equipamentos

A tabela VI.12 mostra que considerando-se as restrições de segurança, a tarifa total paga pelos consumidores é maior. Este "surplus" visa a remunerar os investimentos necessários para aumentar a segurança do sistema. Note que apenas a remuneração dos circuitos é bastante afetada pelas restrições de segurança, este fato pode ser explicado considerando-se que a lista de contingências contém os circuitos de maior capacidade do sistema.

As maiores remunerações associadas aos circuitos são mostradas na tabela VI.13.

Circuitos	Remuneração Caso base u.m.	Remuneração adicional u.m.
25-111	0	890
31-32	0	240
123-110	130	0

Tabela VI.13 – Circuitos com as maiores remunerações

O circuito 25-111 (Sta Rosa 230-Totoras 230) tem a maior remuneração associada à segurança do sistema porque pertence a um elo fraco, composto pelos circuitos 31-32, 25-111 e 34-72, que conecta as usinas hidroelétricas de Pucara, Agoyan e Paute à área de Quito, onde se localiza um dos maiores centro de carga do Equador. A perda de qualquer um destes circuitos obriga que parte da carga de Quito seja atendida por geradores térmicos de custo de operação mais caros.

As barras da rede com maior custo marginal de demanda são aquelas situados na área de Quito como pode ser observado na tabela VI.14.

Barras	Remuneração Caso base u.m./mw	Remuneração adicional u.m./mw
Sta Rosa (25)	16	4.5
San-Rafa (446)	16	4
Guanang D (474)	16	4
Esmeraldas (510)	16	3.7

tabela VI.14 Custos marginais de demanda

## CONCLUSÕES

A programação dinâmica dual estocástica foi aplicada a problemas de operação de sistemas hidrotérmicos. Este algoritmo pode ser aplicado a problemas de dimensões elevadas já que não requer a discretização do espaço de estados como os algoritmos tradicionalmente empregados na solução deste problema. Esta característica permite a representação detalhada da configuração hidráulica, da rede de transmissão e de restrições de segurança. É utilizado um modelo linear para a representar a rede de transmissão.

A viabilidade da utilização da metodologia proposta foi demonstrada através da aplicação à problemas com sistemas reais. O método revelou-se eficiente em termos de convergência e flexível possibilitando a adoção de algoritmos especializados que tomam partido das características do problema.

A utilização de um modelo de planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos incluindo a rede de transmissão permite o desenvolvimento de uma metodologia integrada para se avaliar os custos e benefícios associados a geração e transmissão e a segurança do sistema. Esta metodologia é baseada na teoria de custos marginais, que foi estendida para problemas estocásticos. Esta metodologia pode ainda fornecer indicadores para a expansão ótima do sistema elétrico. É demonstrado que a capacidade ótima de um componente é aquela em que sua remuneração é igual ao seu custo de investimento.

Sugestões para trabalhos futuros:

- Representação de modelos estocásticos mais sofisticados para a variável estocástica afluência aos aproveitamentos (por exemplo modelos autoregressivos periódicos (par(p))).
- Incorporação de técnicas de redução de variância para aumentar a eficiência do algoritmo.
- Implementação do algoritmo em computadores com vários processadores operando concorrentemente para tomar partido da característica "assíncrona" do algoritmo.

Anexo I      **Algoritmo Simplex para fluxo de custo mínimo em redes com restrições adicionais.**

O problema de fluxo de custo mínimo com restrições adicionais pode ser formulado como:

$$\begin{array}{ll}
 \min & cx + dz \\
 \text{s.a} & Ax = b \\
 & Sx + Pz = f \\
 & 0 \leq x \leq u \\
 & 0 \leq z \leq v
 \end{array} \tag{A.1}$$

sendo  $A$  a matriz incidência nó-arco do grafo conexo  $\mathcal{G} = (\mathcal{N}, \mathcal{A})$ , onde  $\mathcal{N}$  é o conjunto de nós e  $\mathcal{A}$  é o conjunto de arcos do grafo. Será suposto que a rede contenha  $m_1$  nós e  $n_1$  arcos ( $m_1 \leq n_1$ ), e que as matrizes  $S$  e  $P$ , associadas as restrições "não grafo" tenham posto completo.

Considerando que a matrix  $A$  tem posto igual  $m_1 - 1$ , será adicionado um arco, chamado de arco raiz ( $e^\ell$ ), para se obter posto completo:

$$\begin{array}{ll}
 \min & cx + dz \\
 \text{s.a} & Ax + e^\ell a = b \\
 & Sx + Pz = f \\
 & 0 \leq x \leq u, \quad 0 \leq z \leq v \\
 & 0 \leq a \leq 0
 \end{array} \tag{A.2}$$

Seja a matriz de coeficientes  $\bar{A}$ :

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} A & e^\ell \\ S & P \end{bmatrix}$$

Uma base qualquer de  $\bar{A}$  pode ser particionada da seguinte maneira:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B & C \\ D & F \end{bmatrix}$$

onde  $B$  é uma base de  $[A \mid e^\ell]$ . A inversa de  $\bar{B}$  é:

$$\bar{B}^{-1} = \begin{bmatrix} B^{-1} + B^{-1}CQ^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}CQ^{-1} \\ -Q^{-1}DB^{-1} & Q^{-1} \end{bmatrix} \quad (\text{A.3})$$

onde  $Q = F - DB^{-1}C$ , é chamada de *matriz de trabalho*.

A seguir será demonstrado que a matriz de trabalho é não singular se  $B$  for não singular.

Seja a partição de  $\bar{B}$  mostrada abaixo:

$$\bar{B} = \left[ \begin{array}{cc} B & C \\ D & F \end{array} \right] \begin{array}{l} \} m_1 \\ \} m_2 \end{array}$$

- Seja a seguinte matriz associada à base  $\bar{B}$ :

$$L = \begin{bmatrix} I & -B^{-1}C \\ & I \end{bmatrix}$$

Por construção  $\det(L) \neq 0$ , e:

$$\bar{B}L = \begin{bmatrix} B & \\ D & F - DB^{-1}C \end{bmatrix}$$

sendo  $\det(\bar{B}L) = \det(\bar{B}) \times \det(L) \neq 0$ . Portanto a matriz  $F - DB^{-1}C$  tem posto completo.

Considerando a partição da matriz  $\bar{B}$  mostrada anteriormente, serão calculados as variáveis duais e atualização da coluna da base. Lembrando que a matriz  $B$  representa uma árvore do grafo  $\mathcal{G}$ , e que a multiplicação de um vetor por esta matriz não requer operações aritméticas de ponto flutuante [29].

### A1.1 Cálculo das variáveis duais

Particionando  $\pi$  e  $c^B$  de forma adequada, tem-se que:

$$\begin{aligned} \pi = (\pi^1, \pi^2) &= (c^1, c^2) \begin{bmatrix} B^{-1} + B^{-1}CQ^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}CQ^{-1} \\ -Q^{-1}DB^{-1} & Q^{-1} \end{bmatrix} & (\text{A.4}) \\ &= (c^1B^{-1} + c^1B^{-1}CQ^{-1}DB^{-1} - c^2Q^{-1}DB^{-1}, -c^1B^{-1}CQ^{-1} + c^2Q^{-1}) \end{aligned}$$

$$= ((c^1 + c^1 B^{-1} C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D) B^{-1}, (c^2 - c^1 B^{-1} C) Q^{-1})$$

O cálculo das variáveis duais  $\pi = (\pi^1, \pi^2)$ , pode ser decomposto nos seguintes passos:

1. Calcule  $\gamma^1 = c^1 B^{-1}$  usando o Algoritmo 1 descrito abaixo
2. Calcule  $\gamma^2 = c^1 + \gamma^1 C Q^{-1} D - c^2 Q^{-1} D$  via operações matriciais
3. Calcule  $\pi^1 = \gamma^2 B^{-1}$  usando o Algoritmo 1 descrito abaixo
4. Calcule  $\pi^2 = (c^2 - \gamma^1 C) Q^{-1}$  via operações matriciais

### Algoritmo 1. Determinação das variáveis duais.

#### Passo 1. Inicialização.

Seja  $T = (N, A)$  a árvore básica com nó raiz  $\ell$ .

Faça  $\pi_\ell \leftarrow 0,$   
 $N_L \leftarrow \{\ell\}$   
 $N_U \leftarrow N - \{\ell\}$

#### Passo 2. Ache um arco com nó *Destino* rotulado

Seja  $\{e_j \in A \mid F(j) \in N_U \text{ e } T(j) \in N_L\}$ .

onde  $F(j)$  é o nó origem de  $j$  e  $T(j)$  é o nó destino de  $j$ .

Se tal arco não existir, vá para 4.

#### Passo 3. Rotule o nó *Origem*

Faça  $\pi_{F(j)} \leftarrow c_j + \pi_{T(j)}$

$N_L \leftarrow N_L \cup F(j), N_U \leftarrow N_U - F(j)$

Vá para o passo 2

#### Passo 4. Ache um arco com nó *Origem* rotulado

Seja  $\{e_j \in A \mid T(j) \in N_U \text{ e } F(j) \in N_L\}$ .

Se tal arco não existir, FIM.



**Passo 5. Rotule o nó *Destino***

Faça  $\pi_{T(j)} \leftarrow -c_j + \pi_{F(j)}$

$\mathcal{M}_L \leftarrow \mathcal{M}_L \cup T(j)$ ,  $\mathcal{M}_U \leftarrow \mathcal{M}_U - T(j)$

Vá para o passo 2

**A1.2 Cálculo da coluna atualizada**

Para o cálculo da coluna atualizada  $y = \bar{B}^{-1}\bar{A}(k)$  utilizada no algoritmo Simplex, também é possível aproveitar a estrutura de  $B$ . Os cálculos dependem do tipo da variável a entrar na base (arco ou não arco).

**Caso 1. A variável a entrar na base é um arco.**

Neste caso:

$$\bar{A}(k) = \begin{bmatrix} A(k) \\ S(k) \end{bmatrix}$$

Particionando adequadamente o vetor  $y$  e  $\bar{A}(k)$ , tem-se que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} B^{-1} + B^{-1}CQ^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}CQ^{-1} \\ -Q^{-1}DB^{-1} & Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(k) \\ S(k) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} B^{-1}[A(k) + CQ^{-1}DB^{-1}A(k) - CQ^{-1}S(k)] \\ Q^{-1}[S(k) - DB^{-1}A(k)] \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

O vetor  $y$  será obtido através de:

1. Calcule  $\gamma^1 = B^{-1}A(k)$  usando o algoritmo 2
2. Calcule  $\gamma^2 = A(k) + CQ^{-1}D\gamma^1 - CQ^{-1}S(k)$
3. Calcule  $y^1 = B^{-1}\gamma^2$  usando o algoritmo 2
4. Calcule  $y^2 = Q^{-1}[S(k) - D\gamma^1]$

**Algoritmo 2 Solução do sistema  $y = B^{-1}d$ .**

Seja  $T = (N, A)$  árvore básica correspondente a  $B$ ,

**Passo 1.**

Escolha um nó folha  $n$  em  $T$ , seja  $j$  o arco incidente em  $n$ .

**Passo 2.**

Se  $F(j) = n$  então:  $y_j = d_j$  e  $\delta = 1$

caso contrário:  $y_j = -d_j$  e  $\delta = -1$

**Passo 3.**

Se  $n = \ell$ , o nó raiz, então **FIM**.

caso contrário  $N \leftarrow N - n$ ,  $A \leftarrow A - e_j$

**Passo 4.**

Se  $\delta = 1$ , então:  $d_{T(j)} \leftarrow d_{T(j)} + y_j$

caso contrário:  $d_{F(j)} \leftarrow d_{F(j)} + y_j$

vá para o passo 1.

O ganho em relação ao procedimento normal de solução de problemas de programação linear está relacionado com os passos 1 e 3, onde não se realizam operações de ponto flutuante.

**Caso 2. A variável a entrar na base não é um arco.**

Neste caso:

$$\bar{A}(k) = \begin{bmatrix} 0 \\ P(k) \end{bmatrix}$$

o sistema a ser resolvido é:

$$\begin{bmatrix} y^1 \\ y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B^{-1} + B^{-1}CQ^{-1}DB^{-1} & -B^{-1}CQ^{-1} \\ -Q^{-1}DB^{-1} & Q^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ P(k) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -B^{-1}CQ^{-1}P(k) \\ Q^{-1}P(k) \end{bmatrix}$$

O vetor  $y$  pode ser obtido da seguinte maneira:

1. Calcule  $y^2 = Q^{-1}P(k)$
2. Calcule  $\gamma = Cy^2$
3. Calcule  $y^1 = -B^{-1}\gamma$  aplicando o algoritmo 2.

### A.3 Atualização da inversa da matriz de trabalho

Como visto anteriormente a matriz  $\bar{B}$  pode ser decomposta como:

$$\bar{B} = \begin{bmatrix} B & C \\ D & F \end{bmatrix}$$

onde  $\det(B) \neq 0$ . A inversa de  $\bar{B}$  pode ser expressa em termos da inversa da matriz de trabalho ( $Q$ ). Mostra-se aqui como atualizar a inversa da matriz de trabalho após cada operação de pivoteamento do algoritmo Simplex.

Seja  $L$  a matriz transformação, associada à base  $B$ , como definida anteriormente:

$$L = \begin{bmatrix} I - B^{-1}C \\ I \end{bmatrix}$$

Define-se a matriz  $B$  como:

$$B = \bar{B}L = \begin{bmatrix} B & \\ D & F - DB^{-1}C \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Sejam  $\bar{B}_i$ ,  $L_i$  e  $Q_i$  a matriz básica, a matriz transformação, e a matriz de trabalho associadas à iteração  $i$ .

Sabe-se que cada operação de pivoteamento no algoritmo Simplex equivale a multiplicar a matriz básica por uma matriz elementar (matriz que difere da matriz identidade por uma única coluna).

Observe-se que neste caso além do pivoteamento deve ser mantido o particionamento da matriz  $\bar{B}$ : no caso em que a coluna a sair da base é uma coluna de  $\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$ , é preciso

substituí-la por outra de forma a manter a não singularidade de  $B$ . Assim, pode ser necessário substituí-la por uma coluna de  $\begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix}$  antes da operação de pivoteamento. Considere-se então a seguinte transformação:

$$\bar{B}_{i+1}^{-1} = E \bar{B}_i^{-1} \quad (\text{A.7})$$

onde  $E$  é uma matriz elementar ou uma matriz permutação. Observe-se que se  $E$  é uma matriz permutação, após o cálculo da matriz básica permutada, é preciso fazer  $\bar{B}_i = \bar{B}_{i+1}$  e aplicar o pivoteamento simplex.

Será visto a seguir como esta matriz  $E$  é utilizada na atualização da inversa da matriz de trabalho. De (A.6) tem-se que, na iteração  $i+1$ :

$$B_{i+1}^{-1} = L_{i+1}^{-1} \bar{B}_{i+1}^{-1}$$

E usando a expressão (A.7):

$$B_{i+1}^{-1} = L_{i+1}^{-1} E \bar{B}_i^{-1} \quad (\text{A.8})$$

sendo as inversas:

$$B_{i+1}^{-1} = \begin{bmatrix} B_{i+1}^{-1} & \\ -Q_{i+1}^{-1} D_{i+1} B_{i+1}^{-1} & Q_{i+1}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$L_{i+1}^{-1} = \begin{bmatrix} I & B_{i+1}^{-1} C_{i+1} \\ & I \end{bmatrix}$$

Particionando a matriz  $E$  de forma adequada tem-se, a partir de (A.8):

$$\begin{bmatrix} B_{i+1}^{-1} \\ -Q_{i+1}^{-1} D_{i+1} B_{i+1}^{-1} & Q_{i+1}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & B_{i+1}^{-1} C_{i+1} \\ & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 & E_2 \\ E_3 & E_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_i^{-1} + B_i^{-1} C_i Q_i^{-1} D_i B_i^{-1} & -B_i^{-1} C_i Q_i^{-1} \\ -Q_i^{-1} D_i B_i^{-1} & Q_i^{-1} \end{bmatrix}$$

De onde se deduz que:

$$Q_{i+1}^{-1} = [0 \ I] \begin{bmatrix} -E_1 B_i^{-1} C_i Q_i^{-1} + E_2 Q_i^{-1} \\ -E_3 B_i^{-1} C_i Q_i^{-1} + E_4 Q_i^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow Q_{i+1}^{-1} = (E_4 - E_3 B_i^{-1} C_i) Q_i^{-1} \quad (\text{A.9})$$

Desta forma a alteração da inversa da matriz de trabalho  $Q$  depende das submatrizes  $E_3$  e  $E_4$ . Assim deve-se considerar os seguintes casos:

Caso 1. A coluna  $a$  sair da base pertence a  $\begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix}$ .

Neste caso a matriz  $E$  tem a seguinte forma:

$$E = \begin{bmatrix} I & E_2 \\ & E_4 \end{bmatrix}$$

Portanto:

$$Q_{i+1}^{-1} = E_4 Q_i^{-1}$$

onde  $E_4$  é uma matriz elementar.

Caso 2. A coluna  $\ell$  a sair da base pertence a  $\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$ .

Portanto corresponde à um arco de  $T_B$ . Este arco deve ser substituído por outro para manter a estrutura de  $\bar{B}$ . Define-se a matriz  $\Phi$  como:

$$\Phi = B^{-1}C$$

e prova-se que a coluna  $\ell$  de  $\begin{bmatrix} B \\ D \end{bmatrix}$  que sai da base pode ser substituída pela coluna  $j$  de  $\begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix}$  mantendo a não singularidade de  $B$  se e somente se,  $\gamma_j^\ell \neq 0$  sendo  $\gamma_j^\ell$  o elemento  $(\ell, j)$  da matriz  $\Phi$ , i.e.  $\gamma_j^\ell = \beta^\ell C_j$ , onde  $\beta^\ell$  é a  $\ell$ -ésima linha de  $B^{-1}$ . De fato, como  $B$  é uma base de  $\mathbb{R}^m$ , então  $C_j$  pode ser expresso como uma combinação linear das colunas de  $B$ , i.e.,

$$C_j = By$$

$$\Rightarrow C_j = \sum_{k=1}^{m_1} y_k B_k$$

onde  $B_k$  é a  $k$ -ésima coluna de  $B$ . Observe que por construção da matriz  $\Gamma$ , a  $j$ -ésima coluna de  $\Phi$  é o próprio vetor  $y$ . Desta forma:

$$C_j = y_\ell B_\ell + \sum_{k \neq \ell} y_k B_k = \Phi_j^\ell B_\ell + \sum_{k \neq \ell} y_k B_k$$

Se  $\Phi_j^\ell \neq 0$  então:

$$B_\ell = (1/\Phi_j^\ell) C_j + \sum_{k \neq \ell} (y_k/\Phi_j^\ell) B_k \quad (\text{A.10})$$

portanto  $C_j$  é linearmente independente de  $B_k$ , para  $k = 1, \dots, m_1, k \neq \ell$ . Por absurdo, se  $C_j$  é uma combinação linear de  $B_k$ , para  $k = 1, \dots, m_1, k \neq \ell$ , então por (15)  $B_\ell$  é linearmente dependente de  $B_k$ , para  $k \neq \ell$ , o que é uma contradição pois  $\det(B) \neq 0$ .

Em resumo a matriz formada pela substituição da  $\ell$ -ésima coluna de  $B$  pela  $j$ -ésima coluna de  $C$  é não singular sse  $\Phi_j^\ell \neq 0$ . Consideram-se os seguintes subcasos:

•  $\exists j, j = 1, \dots, m_2 / \Phi_j^\ell \neq 0$ . Neste caso a matriz  $E$  é uma matriz permutação que tem a seguinte forma:

$$E = \begin{bmatrix} I & & & & \\ & \ell & & & \\ & & m_1+j & & \\ & & & 1 & \\ & & & & I \end{bmatrix} \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftarrow \ell \\ \leftarrow m_1+j \end{array}$$

portanto as submatrizes  $E_3$  e  $E_4$  têm a seguinte estrutura:

$$E_3 = \begin{bmatrix} \ell \\ \downarrow \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow j$$

uma matriz cujas entradas são todas nulas à exceção do elemento  $(j, \ell)$ , e:

$$E_4 = \begin{bmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & I \end{bmatrix} \leftarrow j$$

uma matriz que difere da identidade apenas no elemento  $(j,j)$ . Portanto:

$$\begin{aligned} E_4 - E_3 B^{-1} C &= \begin{bmatrix} I & & \\ & 0 & \\ & & I \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} & & \\ & & 1 \\ & & \end{bmatrix} B^{-1} C \\ &= \begin{bmatrix} I & & \\ x & x & x \\ & & I \end{bmatrix} \leftarrow j \end{aligned}$$

onde a linha  $[x \ x \ x]$  corresponde a  $\beta^\ell C$ , sendo  $\beta^\ell$  a  $\ell$ -ésima linha da matriz  $B^{-1}$ . Assim:

$$Q_{i+1}^{-1} = \begin{bmatrix} I & \\ \beta^\ell C & \\ & I \end{bmatrix} Q_i^{-1}$$

Uma vez que a coluna a sair da base  $\ell$  é permutada por uma coluna  $j$  de  $\begin{bmatrix} C \\ F \end{bmatrix}$ , faça  $Q_i^{-1} = Q_{i+1}^{-1}$  e faça a atualização da matriz de trabalho devido ao pivoteamento como no caso 1.

•  $\Phi_j^\ell = 0, \forall j, j = 1, \dots, m_2$ . Isto significa que não há nenhuma coluna de  $C$  que seja linearmente independente das colunas restantes de  $B$  quando a coluna  $\ell$  sai da base. Portanto a própria coluna a entrar na base deve ser linearmente independente das colunas  $B_k, k \neq \ell$ , pois sabe-se que toda base  $\bar{B}$  pode ser particionada de tal forma que a submatriz  $B$  satisfaça  $\det(B) \neq 0$ .

Assim, neste caso, a coluna a entrar na base corresponde ao mesmo arco da árvore varredora  $T_B$  da coluna a sair da base. Desta forma a submatriz  $B$  não muda, i.e.:

$$B_{i+1} = B_i$$

e a nova matriz básica resulta:

$$\bar{B}_{i+1} = \begin{bmatrix} B_i & C_i \\ D_{i+1} & F_i \end{bmatrix}$$

e portanto:

$$Q_{i+1} = F_i - D_{i+1}B_i^{-1}C_i$$

sendo que  $D_{i+1}$  difere de  $D_i$  somente na coluna  $\ell$ , e como por hipótese  $\gamma_j^\ell = 0$ ,  $\forall j$ , i.e.,  $\beta^\ell C = 0$  ( $\beta^\ell$  é a  $\ell$ -ésima fila da inversa de  $B$ ), então:

$$D_{i+1}B_i^{-1}C_i = D_iB_i^{-1}C_i$$

E, finalmente:

$$Q_{i+1} = F_i - D_iB_i^{-1}C_i = Q_i$$

i.e., a matriz de trabalho não é modificada.



## REFERÊNCIAS

- [1] ALQUÉRES, J.L. e PRAÇA, J.C.G., The Brazilian Power System and the Challenge of the Amazon Transmission, Paper submetido ao IEEE Summer Power Meeting, (1991).
- [2] FORD, A e GEINZER, J., The Impact of Performance Standards on the Uncertainty of the Pacific Northwest Electric System, Bonneville Power Administration, Portland, (1988).
- [3] PEREIRA, M.V.F. e PINTO, L.M.V.G., Operation Planning of Large Scale Hydroelectric System, Proc. 8th Power System Computation Conference, Helsinki, (1984).
- [4] GORENSTIN, B.G., CAMPODÓNICO, N.M., COSTA, J.P. e PEREIRA, M.V.F., A Framework for Marginal Cost Evaluation in Hydroelectric Systems With Transmission Network Constraints, Proc 9th Power System Computation Conference, (1990).
- [5] SCHWEPPE, F.C., CARAMANIS, M.C., TABORS, R.D. E BOHN, R.E., Spot Pricing of Electricity, Kluwer Academic Publishers, (1988).
- [6] PEREIRA, M.V.F., Optimal Stochastic Operation Scheduling of Large Hydroelectric Systems, International Journal of Electrical Power Energy Systems, 11(2), (1989).
- [7] IKURA, Y. e GROSS, G., Efficient Large Scale Hydro System Scheduling With Forced Spill Conditions, IEEE Trans. Power Appar. System 103 (12), (1984).
- [8] SOARES FILHO, S., Planejamento da Operação em Sistemas Hidrotérmicos, Revista SBA Vol. 1 Num. 2 122–131, (1987).
- [9] YEH, W.W., Reservoir Management and Operations Models: A State of the Art Review, Water Resources Res. 21 (1), (1985).

- [10] PEREIRA, M.V.F., PINTO, L.M.V.G., Stochastic Optimization of a Multireservoir Hydroelectric System – A Decomposition Approach, Water Resources Res Vol. 21, (1982).
- [11] TERRY, L.A., PEREIRA, M.V.F., ARARIPE NETO, T.A, SILVA, L.F.C.A. e SALLES, P.R.H., Coordinating the Energy Generation of the Brazilian National Hydrothermal Electric Generating System, Interfaces 16, (1986).
- [12] ARVANITIDIS, N.V. e ROSING, J., Optimal of Multireservoir Systems Using a Composite Representation, IEEE Trans. Power Apparatus and Systems, PAS-89, 327–335, (1970).
- [13] GRYGIER, J.C. e STEDINGER, J.R., Algorithms of Optimization Hydropower System Operation, 6th Canadian Hydrothermal Conference Ottawa, (1983).
- [14] SAAD, M. e TURGEON, A., Application of Principal Component Analysis to Long Term Reservoir Management, Water Resources Res. Vol. 24 (7), (1988).
- [15] PROVONOST, R. e DAVIS, R., Two Stochastic Dynamic Programming Procedures for Long Term Reservoir Management, Paper C12493–5, Presented at IEEE Summer Power Meeting, San Francisco, USA, (1972).
- [16] TAVARES, L.V., Theoretical Properties of the Optimal Release for a Multi-Purpose Reservoir With Correlated Inflows, Journal of Hydrology, 58 (3–4), 237–250, (1982).
- [17] GAL, S., Parameter Iteration Dynamic Programming, Management Science, (1989).
- [18] FOUFOULA–GEORGIU, E e KITANIDIS, P.K., Gradient Dynamic Programming for Stochastic Optimal Control of Multidimensional Water Resources Systems, Water Resources Research, 24 (8), (1988).

- [19] JOHNSON, S., STENDINGER, J.R. e SHOEMAKER, C.A., A Computational Improvements in Dynamic Programming, *Forefronts* V. 4 nº 7, (1988)
- [20] COSTA, C.C., Redução da Dimensionalidade em Programação Dinâmica Aplicada ao Planejamento da Operação de Sistemas Hidrotérmicos, Tese de Mestrado COPPE, (1982).
- [21] KELMAN, J., Modelos Estocástico no Gerenciamento de Recursos Hídricos, Coleção ABRH de Recursos Hídricos Volume I Editora Nobel, (1987).
- [22] KELMAN, J., STENDINGER, J.R., COOPER, J.R., HSU, L.A. e YUAN, S.O., Sampling Stochastic Dynamic Programming Applied to Reservoir Operation, *Water Resources Research*, 26 (3), (1990).
- [23] STENDINGER, J.R., SULE, B.F. e LOUCKS, D.P., Stochastic Dynamic Programming Models for Reservoir Operation Optimization, *Water Resources Research*, 20 (11), (1984).
- [24] MACEIRA, M.E.P. e KELMAN, J., Programação Dinâmica Amostral Aplicada a Operação de Reservatórios, X Seminário Nacional Produção e Transmissão de Energia Elétrica (SNPTEE), Grupo X, (1989).
- [25] MERLIN, A., LAUZANNE, B., AUGÉ, J. e ZIGLIOLI, M., Optimization of Short-Term Scheduling of EDF Hydraulic Valleys Wity Coupling Constraints, the Ovide Model, Proc 7th Power System Computer Conference, (PSCC), Lausanne, (1981).
- [26] LUO, G.X., HABIBOLLAHZADEB, H. e SEMLYEN, A., Short Hydro-Thermal Dispatch Detailed Model and Solutions, Paper 89 WM 169-4 IEEE PWRS Winter Meeting – New York, (1989).
- [27] HAWARY, M.E.E. e TSANG, D.H., The Hydrothermal Optimal Load Flow, a Practical Formulation and Solution Technique Using Newton's Approach, *IEEE Trans. on Power Systems* Vol. PWRS-1, (1986).

- [28] JOHANNESSEN, A., GJELSVIK, A. FASSO, O.B. e FLATABO, N., Optimal Short Hydro Scheduling Including Security Constraints, Paper 90 SM 477-0 IEEE PWRs Summer Meeting, (1990).
- [29] KENNINGTON, J.L. e HELGASON, R.V., Algorithm for Network Programming, Wiley, New York, (1981).
- [30] STOTT, B. e MARINHO, J.L., Linear Programming for Power Network Security Applications, IEEE Transaction PAS Vol. PAS-98 N° 3, (1979).
- [31] MONTICELLI, A., Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica, Editora Edgard Blucher Ltda, (1983).
- [32] DY LIACCO, T.E., Mathematical Challenges in Electric Power System Operation: An Overview, Electric Power Problems, the Mathematical Challenge, SIAM, (1981).
- [33] O'NEILL, R.P., Nested Decomposition of Multistage Convex Programs, SIAM Journal of Control and Optimization 14, (1976).
- [34] HO, J.K. e MANNE, A.S., Nested Decomposition for Dynamic Models, Mathematic Programming 20, (1981).
- [35] ABRAHANSON, P.G., A Nested Decomposition Approach for Solving Staircase Linear Programs, Technical Report SOL 83-4 Stanford University, (1983).
- [36] WITTRUCK, R.J., Advances in a Nested Decomposition Algorithm for Solving Staircase Linear Programs, Technical Report SOL 83-2, Stanford University, (1983).
- [37] BENDERS, J.F., Partitioning Procedures for Solving Mixed Variables Programming Problems, Numerische mathematic 4, (1962).
- [38] BEALE, E.M.L., Sparseness in Linear Programming, Large Sparse Sets of Linear Equations, editado por J.K. Reid, Ed. Academic Press, New York 1-15, (1971).

- [39] DANTZIG, G.B., Upper Bounds Secondary Constraints and Block Triangularity in Linear Programming, *Econometrica* 23, 174–183, (1955).
- [40] HEESTERMAN, A.R.G. e SANDEE, J., Special Simplex Algorithm for Linked Problem, *Management Science* 11 420–428, (1965).
- [41] PROPOI, A. e KRIVONZEHO, V., The Simplex Method for Dynamic Linear Programs, Report RR 78–74, International Institute for Applied Systems Analysis, Austria, (1978).
- [42] MERKOVSKY, R.R., Near Linear Convergent Procedures for Convex and Large Scale Optimization Based on Linear Programming – Theory and Applications, PHD Thesis, Dalhousie University, (1987).
- [43] GASSMANN, H.J., MSLIP: A Computer Code for the Multistage Stochastic Linear Programming Problem, *Mathematic Programming* 47, (1990).
- [44] CAMPODÓNICO, N.M., Um Modelo de Otimização para o planejamento da Expansão da Capacidade de Geração de um Sistema Hidrotérmico, Tese de Mestrado IMPA, (1990).
- [45] DUPUIT, P., De L'Utilité et de sa Mesure, *La Reforma Sociale*, Turim, Itália, (1932).
- [46] HOTELLING, H., The General Welfare in Relation to Problems of Railway and Utility Rates, *Econometrica* Vol. 6 242–269, (1938).
- [47] BOITEUX, M., La Tarification des Demandes en Pointe, *Revue Générale de L'Electricité* V. 58, (1949).
- [48] STEINER, P., Peak Loads and Efficient Pricing, *Quarterly Journal of Economics*, (1957).
- [49] TURVEY, R. e ANDERSON, D., Electricity Economics, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, (1977).
- [50] CREW, M.A. e KLEINDORFER, P.R., Public Utility Economics, ST Martin Press, New York, (1979).

- [51] MUNASINGHE, M. e WARFORD, J.J., Electricity Pricing, The Johns Hopkins University Press, Baltimore, (1982).
- [52] LIMA, W.M., MENDES, L.N.F. e GATASS, E.A., O Custo Marginal de Operação: Um Parâmetro para a Avaliação e Ajuste do Programa de Obras de geração, X Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, Curitiba, (1989).
- [53] MANSFIELD, E., Microeconomics – Theory and Applications, W.W. Norton Company Inc., (1985)
- [54] OWEN, G., On the Core of Linear Production Games, *Mathematical Programming* (9) 358–370, (1975)
- [55] PEREIRA, M.V.F., GORENSTIN, B.G., CAMPODÓNICO, N.M., COSTA, J.P. e KELMAN, J., Análise Comparativa de metodologias de Repartição de Custos e Benefícios num Sistemas de Geração Hidrotérmico, X Seminário de Produção e Transmissão de Energia Elétrica (SNPTEE) Grupo X Tema 3, (1989).
- [56] BORN, P.H., Curso de Microeconomia e custos Marginais, Volume II, 2º Edição, (1991).
- [57] OLIVEIRA, G.C., Geração de Séries Sintéticas Dependentes de Vazões, Relatórios Técnico Cepel 199–84, (1984).
- [58] THOMÉ, L.M.S. e GORENSTIN, B.G., Anarede Programa de Análise de Redes, Relatório Técnico Cepel 530–87 2º versão, (1987).
- [59] Costa, J.P., Gorenstin, B.G. e Pereira, M.V.F., Determinação da Coordenação da Operação a Médio Prazo – Manual do Usuário, Relatório técnico Cepel 043/88, (1988).
- [60] INECEL, Relatório de Operacion 1990, Equador, (1990).
- [61] Kaye, R.J., Wu, F.F. e Varaya, P.P., Pricing for Sistem Security, paper submetido para o IEEE Winter Meeting, New York, (1992).

- [62] Bellman, R. e Dreyfus, S.E., Applied Dynamic Programming, Princeton University Press, (1962).
- [63] Mood, M.A., Graybill, F.A. e Boes, C.D., Introduction to the Theory of Statistics, Mc Graw-Hill, (1974).
- [64] Habibollahzadeh, H., Application of Mathematical Programming to Short-Term Operation Planning of Hydrothermal System, PhD Thesis, Department of Electric Power System Engineering, Royal Institute of Technology, (1984)
- [65] Pereira, M.V.F., Pinto, L.M.V.G., Oliveira, G.C. e Cunha, S.H.F., Composite System Reliability Evaluation Methods, Relatório EPRI, Projeto 2473-10, (1987)