

Sobre Grafos Clique-Completo

Célia Picinin de Mello

Tese submetida ao corpo docente da Coordenação dos Programas de Pós-Graduação em Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências em Engenharia de Sistemas e Computação.

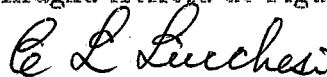
Aprovada por:



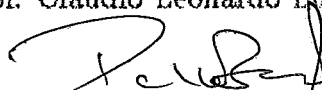
Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.
(Presidente)



Profa. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D.Sc.



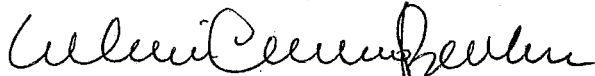
Prof. Cláudio Leonardo Lucchesi, Ph.D.



Prof. Paulo Oswaldo Boaventura Netto, D.Ing.



Prof. Ruy Campello, D.Sc.



Prof. Valmir Carneiro Barbosa, Ph.D.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil

Agosto de 1992

MELLO, Célia Picinin de

Sobre Grafos Clique-Completo

Rio de Janeiro, 1992.

vi, 101p., 29,7 cm

(COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1992)

Tese-Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Cliques. 2. Grafos de Comparabilidade. 3. Algoritmos.

I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

Aos meus pais
Álvaro e Alice

EBENÉZER

Agradecimentos

Agradeço:

Ao Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, pela compreensão, dedicação e orientação segura.

Aos que participaram do grupo de estudos formado em 1988 na COPPE/UFRJ, sob a orientação do Prof. Jayme, pelo incentivo através da presença e participação nos seminários.

Às amigas Carmen, Celina, Mónica e Sula, pela amizade, companheirismo, incentivo além do trabalho conjunto realizado durante todo o período.

Aos colegas do DCC da Unicamp, e em particular ao Marcos Euzébio por ter me possibilitado a redação desta tese e a Anamaria Gomide pelo auxílio durante o período da defesa.

Aos meus pais, pelo grande amor a mim dedicado.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.).

Sobre Grafos Clique-Completo

Célia Picinin de Mello

Agosto de 1992

Orientador: Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter.

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação.

Um grafo é clique-completo se suas cliques maximais se intersectam duas a duas.

Um grafo de comparabilidade é um grafo que admite uma orientação transitiva.

Encontramos condições para que vértices de um grafo clique-completo e de comparabilidade devam satisfazer para se tornarem fontes ou sumidouros de uma orientação transitiva.

Caracterizamos a classe dos grafos indiferença clique-completo e mostramos que é uma subclasse da classe dos grafos de comparabilidade.

Um vértice é universal se é adjacente a todos os outros vértices do grafo.

Provamos que todo grafo clique-completo sem vértices universais admite alguns grafos especiais, entre eles a pirâmide, como subgrafos induzidos.

Mostramos que os grafos clique-completo sem vértices universais que são também triangularizados, ou planares, ou aqueles com restrições no número ou no tamanho de suas cliques maximais, admitem exatamente a pirâmide como subgrafo induzido. Conjeturamos que essa afirmação é válida para todo grafo clique-completo sem vértices universais.

Abstract of thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment for the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.).

On Clique-Complete Graphs

Célia Picinin de Mello

August of 1992

Thesis Supervisor: Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter.

Department: Computation and Systems Engineering.

A graph is clique-complete if no two of its maximal cliques are disjoint.

A comparability graph is a graph that admits a transitive orientation.

We find conditions that vertices of a clique-complete and comparability graphs should satisfy to be sources or sinks of a transitive orientation.

We give a characterization of clique-complete indifference graphs and we prove that they are comparability graphs.

A vertex is universal if it is adjacent to all other vertices in the graph.

We prove that every clique-complete graph without universal vertices contains an induced subgraph isomorphic to some special graphs, among them the pyramid.

For triangulated or planar clique-complete graphs without universal vertices, we prove that these graphs contain an induced subgraph isomorphic to the pyramid. The same is shown to be true for clique-complete graphs without universal vertices with small maximal cliques or with few maximal cliques. We conjecture that every clique-complete graph either contains a universal vertex or an induced subgraph isomorphic to the pyramid.

Conteúdo

1	Introdução	1
1.1	Definições e notações básicas	3
2	Preliminares	6
2.1	Grafos clique	6
2.1.1	A caracterização de grafos clique	6
2.1.2	Diâmetro de grafos clique	11
2.1.3	Grafos clique-completos	12
2.2	Grafos de intervalo	15
2.2.1	Grafos de intervalo e grafos indiferença	15
2.3	Grafos de comparabilidade	22
2.3.1	Grafos de comparabilidade	22
3	Localização de Fontes e Sumidouros em Grafos de Comparabilidade	29
3.1	Preliminares	29
3.2	Uma partição de X_l	31
3.3	Uma relação entre fontes e sumidouros	33
4	Grafos Indiferença Clique-completos	39
4.1	Preliminares	40
4.2	Grafos indiferença clique-completos	41
4.3	As atribuições fonte-sumidouro de um grafo indiferença clique-completo	53
4.4	Uma caracterização de grafos indiferença clique-completos	57
5	Grafos Clique-Completos sem Vértices Universais	63
5.1	As pirâmides estendidas de um grafo clique-completo	63
5.2	A conjectura e os casos particulares	70
5.2.1	O caso $w(G) \leq 3$	71
5.2.2	Classes especiais de grafos	72
5.2.3	Os casos $\omega(G) \leq 4$ e $l \leq 6$	74
6	Conclusões	91
	REFERÊNCIAS	92

Lista de Figuras

1.1	Grafos clique-completos.	1
2.1	O grafo P_1 e o $K(P_1)$ correspondente.	7
2.2	Um grafo G com $K(G) = H$	8
2.3	$H = K(G)$ e H não é grafo Helly.	9
2.4	O grafo $K_{3,4}$	11
2.5	Dois grafos G e H tais que $K(G) = H$ e $K(H) = G$	12
2.6	Uma representação de classes de grafos.	14
2.7	O grafo G e sua representação por intervalos.	15
2.8	O grafo $K_{1,3}$	16
2.9	Uma representação de um grafo indiferença através de suas arestas maximais.	17
2.10	Um grafo indiferença.	18
2.11	Os vértices 1 e 5 são vértices extremos.	19
2.12	Substituição	23
2.13	Um triângulo orientado.	24
2.14	Uma representação da relação R sobre as arestas orientadas de G	26
2.15	Um grafo que não é grafo de comparabilidade.	27
3.1	A nomeação dos vértices indica a partição clique do grafo.	30
3.2	$\Sigma = \{14, 23\}$, $\mathcal{T} = \{12, 34\}$	32
3.3	A partição $P = \{2, 3, 14\}$ não é uma atribuição fonte para G	33
3.4	O par $(\{123\}, \{1, 2, 3\})$ não é uma atribuição fonte-sumidouro para o grafo G com $K(G) = K_3$	37
3.5	Uma orientação transitiva.	37
4.1	Os grafos G e G^+	40
4.2	Uma ordem indiferença de um grafo indiferença clique-completo.	43
4.3	Um exemplo de grafo união.	45
4.4	Um grafo clique-completo.	45
4.5	A clique M contém v , u , w	46
4.6	Os grafos G_3 , H e R , respectivamente.	46
4.7	Os passos do algoritmo para $l = 3$	49
4.8	Um grafo indiferença e não comparabilidade.	53

4.9	As orientações transitivas de um grafo indiferença clique- completo e não reduzido.	53
4.10	Um grafo de intervalo com $(\Sigma, \mathcal{T}) = (\{\{1234\}\}, \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\})$	55
4.11	Uma orientação transitiva tendo como fonte e sumidouro vértices univ- ersais.	57
4.12	Exemplo para a demonstração do Lema.	58
4.13	A orientação das arestas entre M_1 e $G \setminus M_1$	59
4.14	A concatenação das ordens de M_1 e $G \setminus M_1$	59
4.15	Uma ordem linear sobre V	60
4.16	$u < v < w$, $(u, w) \in A$ e $u, v \in G_1$, $w \in G \setminus M_1$	60
4.17	$u < v < w$, $(u, w) \in A$ e $u \in G_1$, $v, w \in G \setminus M_1$	61
4.18	$u \in M_1$, $v, w \in G \setminus M_1$, $v < w$ e $(u, v) \in A$	62
4.19	$u \in M_1$, $v, w \in G \setminus M_1$, $w < v$ e $(u, v) \in A$	62
4.20	Uma orientação transitiva para um grafo indiferença clique-completo e reduzido.	62
5.1	Pirâmides estendidas.	64
5.2	Uma pirâmide estendida $[e a f c b d]$	65
5.3	Um grafo que contém P_0	65
5.4	A pirâmide estendida $[a_1, a_2, a_3, x_1, x_2, x_3]$ é uma pirâmide.	67
5.5	$(a, e) \in A(M_r)$	68
5.6	Um grafo que não é grafo clique.	70
5.7	O grafo G não é grafo clique e H é grafo clique.	70
5.8	As cliques C_1 e C_2 são disjuntas.	71
5.9	(a) Uma subdivisão de K_5 ; (b) Uma subdivisão de $K_{3,3}$	73
5.10	Um $K_{3,3}$ em um grafo clique-completo.	73
5.11	(x, y) não é uma aresta de G	74
5.12	Os 26 conjuntos \mathcal{I}	75
5.13	Os possíveis conjuntos \mathcal{I}	76
5.14	$M_y \cap (\bigcup_{M \in \mathcal{C}_i} M) = \{a, b, c\} (= \{b, c\})$	78
5.15	$M_y \cap (\bigcup_{M \in \mathcal{C}_i} M) = \{b, c, e\}$	80
5.16	$[d x b f c y]$ é uma pirâmide.	82
5.17	$[y b x_3 d x f]$ é uma pirâmide.	83
5.18	$[y c x_2 f x d]$ é uma pirâmide.	84
5.19	$[y x_4 x_3 b x f]$ é uma pirâmide.	85
5.20	$[e x x_2 a x_5 y]$ é uma pirâmide.	86
5.21	Uma pirâmide.	89

Capítulo 1

Introdução

Um *grafo clique-completo* é aquele cujas cliques maximais se intersectam duas a duas.

Imediatamente, dois elementos da classe dos grafos clique-completos com características distintas se destacam: aqueles grafos que contêm pelo um vértice comum a todas as suas cliques maximais e os que não o tem. A Figura 1.1 mostra exemplos desses dois tipos de grafos clique-completos. O segundo grafo será denominado *pirâmide*.



Figura 1.1: Grafos clique-completos.

Se a um grafo for acrescentado um vértice adjacente a todos os seus vértices, obtém-se um grafo clique-completo. Por outro lado, todo grafo pode ser decomposto em grafos clique-completos.

Ainda a classe dos grafos clique-completos com pelo menos duas cliques maximais é uma subclasse própria da classe dos grafos de diâmetro dois. Daqui, ressalta a importância da classe sob o aspecto de sua aplicação prática.

É conhecido que grafos de diâmetro pequeno são de interesse como exemplos de redes de telecomunicações. Uma das restrições naturais exigidas na construção de uma rede de comunicação é obter a comunicação entre quaisquer dois centros sem passar por muitos centros intermediários, ou seja, construir redes com diâmetros pequenos.

Na literatura não encontramos estudos relativos exclusivamente à classe dos grafos clique-completos. Podemos citar Bandelt e Prisner [2] e Bornstein [5] que estu-

daram a classe dos grafos clique que convergem para o grafo trivial. Uma subclasse da classe dos grafos clique-completos possui esta característica. Ainda, os estudos referentes à classe dos grafos de diâmetro dois também se aplicam à classe dos grafos clique-completos com pelo menos duas cliques maximais.

Uma contribuição, deste trabalho, é o estudo da classe dos grafos clique-completos propriamente dita, suas peculiaridades, suas aplicações.

Um grafo de comparabilidade é um grafo que admite uma orientação transitiva. Encontramos em [10], [11], [12], [13], [25], [31], algoritmos polinomiais que constroem uma orientação transitiva, se o grafo for de comparabilidade.

Neste trabalho estudamos as orientações transitivas através de uma abordagem distinta da tradicional. Estamos interessados em reconhecer quais dentre os vértices de um grafo de comparabilidade podem se tornar fontes ou sumidouros de uma orientação transitiva. Com esse intuito, estudamos as fontes e sumidouros de uma orientação transitiva em subclasses da classe dos grafos clique-completos. De uma forma mais específica, obtivemos uma condição necessária para determinar quais vértices de um grafo pertencente à classe interseção dos grafos clique-completos e dos de comparabilidade podem se tornar fontes ou sumidouros de uma orientação transitiva. Mostramos que os grafos clique-completos que são grafos indiferença são grafos de comparabilidade e determinamos as fontes e sumidouros de uma orientação transitiva desses grafos.

Posteriormente, mostramos que grafos clique-completos sem um vértice universal contém alguns grafos especiais como subgrafo induzido. Mostramos que apenas um desses grafos, a pirâmide, é um subgrafo induzido para um grafo clique-completo de algumas classes de grafos, bem como para grafos clique-completos com restrições no número ou no tamanho de suas cliques maximais. Conjeturamos que um grafo clique-completo sem vértices universais contém necessariamente a pirâmide como subgrafo induzido.

Descreveremos, agora, como este trabalho está distribuído.

No Capítulo 2, apresentamos, dentre os resultados encontrados na literatura, alguns que serão úteis no decorrer do trabalho. Aqui, também, consideramos o problema de reconhecimento de grafos clique, que pelo que sabemos, até o momento não está resolvido e observamos que pertence a classe \mathcal{NP} .

No Capítulo 3, mostramos uma condição necessária para determinar quais vértices de um grafo de comparabilidade que é também grafo clique-completo podem se tornar fonte ou sumidouro de uma orientação transitiva do grafo.

No Capítulo 4, demonstramos que um grafo indiferença clique-completo é de comparabilidade, localizamos suas fontes e sumidouros e mostramos uma forma de se obter uma orientação transitiva do grafo caso se conheça a localização de suas fontes e sumidouros.

No Capítulo 5, mostramos que todo grafo clique-completo sem vértices universais contém alguns grafos especiais e apresentamos uma conjectura a respeito desses grafos.

Finalmente, no Capítulo 6, apresentamos as conclusões deste trabalho.

1.1 Definições e notações básicas

Um *grafo* G é um conjunto finito não vazio $V = V(G)$ e um conjunto $A = A(G)$ de pares não ordenados de elementos distintos de V . Os elementos de V são os *vértices* e os de A são as *arestas* de G , respectivamente. Uma aresta é denotada pelo par (v, w) de vértices que a forma. Dessa forma, os vértices v e w são os *extremos* (ou *extremidades*) da aresta. Os extremos de uma aresta são *incidentes* à aresta e vice-versa. Os extremos de uma aresta são *adjacentes*.

Um grafo é *trivial* quando possui um único vértice.

Muitos termos em Teoria dos Grafos advêm da visualização de um grafo através de uma representação geométrica. Nesta, cada vértice é representado por um ponto distinto e cada aresta por uma linha unindo os pontos correspondentes a suas extremidades. Em geral, confundiremos o grafo com sua representação geométrica. Serão denominados indistintamente *grafos*.

O *complemento* de um grafo G é o grafo \overline{G} , que possui o mesmo conjunto de vértices do grafo G e para todo par de vértices distintos v, w de G , (v, w) é uma aresta de \overline{G} se e somente se $(v, w) \notin A$.

Para um elemento v de V , $Adj(v)$ denota o conjunto dos vértices de V adjacentes a v .

O *grau*, $g(v)$, de um vértice v de um grafo G é o número de arestas que incidem em v . O símbolo δ denota o maior grau de um vértice de G .

Dois grafos G e H são *isomorfos* se existir uma função biunívoca $\Gamma : V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $(v, w) \in A(G)$ se e somente se $(\Gamma(v), \Gamma(w)) \in A(H)$.

Uma seqüência de vértices v_0, v_1, \dots, v_k tal que $(v_i, v_{i+1}) \in A$, $0 \leq i < k$, é denominada *caminho* de v_0 a v_k . Os vértices v_0 e v_k são *vértices extremos* do caminho; os vértices v_1, v_2, \dots, v_{k-1} são *vértices internos* do caminho. Se todos os vértices do caminho forem distintos, o caminho é *simples*. O valor k é o *comprimento* do caminho. A *distância* $d(v, w)$ entre dois vértices v e w de um grafo é o comprimento de um menor caminho entre v e w . O *diâmetro* de G é o valor $diam(G) = \max\{d(v, w) \mid v, w \in V\}$.

Um *ciclo* é uma seqüência v_0, v_1, \dots, v_k tal que v_0, v_1, \dots, v_{k-1} é um caminho, com $v_k = v_0$ e $k \geq 3$. Se o caminho v_0, \dots, v_{k-1} for simples, o ciclo v_0, v_1, \dots, v_{k-1} é, também, denominado *simples*.

Uma *corda* de um caminho é uma aresta entre dois vértices v_i e v_j tal que $i \neq j+1$ e $i \neq j-1$. Analogamente, uma corda de um ciclo é uma aresta entre dois vértices v_i e v_j no ciclo tal que $i \neq j+1$ e $i \neq j-1$ (onde a adição é módulo $k+1$).

Um caminho entre v e w sem cordas é dito *induzido*. Analogamente um ciclo é induzido se não possuir cordas. Os símbolos P_k e C_k denotam o caminho induzido por k vértices e o ciclo induzido por k vértices, respectivamente.

Um grafo G é *conexo* se existir caminho entre cada par de vértices de G . Caso contrário, G é *desconexo*.

Um *subgrafo* H de um grafo G é um grafo tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $A(H) \subseteq A(G)$. Se, além disso, $A(H)$ for o conjunto de arestas de G que têm ambos os extremos

em $V(H)$, diremos que H é *subgrafo gerado* (ou *subgrafo induzido*) por $V(H)$, e será denotado por $H = G[V(H)]$.

O grafo $G \setminus v$, obtido do grafo G pela remoção do vértice v , é o subgrafo gerado pelo conjunto $V \setminus \{v\}$. Analogamente, o grafo $G \setminus H$, obtido do grafo G pela remoção do subgrafo H , é o subgrafo gerado pelo conjunto $V(G) \setminus V(H)$.

Um conjunto S é *maximal* em relação a uma determinada propriedade P se S satisfaz P , e todo conjunto S' que contém propriamente S não satisfaz P . Analogamente, define-se conjunto *minimal* em relação a uma determinada propriedade. Um *componente conexo* de um grafo G é um subgrafo maximal conexo de G .

Um grafo *completo* é aquele cujos vértices são dois a dois adjacentes. O grafo completo com n vértices é denotado K_n .

Um conjunto de vértices $W \subseteq V$ que induz um subgrafo completo em G é dito *clique*, e uma *clique maximal* é uma clique tal que nenhuma outra a inclui propriamente. O *tamanho* de uma clique é a cardinalidade do conjunto de vértices que a induz. Por abuso de linguagem, usaremos o termo clique tanto para o conjunto de vértices W , como para o subgrafo completo induzido por W .

O tamanho de uma clique M é denotado por $\omega(M)$. O tamanho de uma maior clique de G , por $\omega(G)$.

Um conjunto *independente* é um subconjunto de vértices dois a dois não adjacentes.

Um grafo G é *bipartido* se $V = V_1 \cup V_2$, com $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ e cada aresta em G tem um extremo em V_1 , o outro em V_2 . Os conjuntos V_1 e V_2 serão uma *bipartição* de V .

Um vértice v de G é *universal em um subgrafo H* de G se v é adjacente a todos os vértices de H . Se v for adjacente a todos os vértices de G , diremos, simplesmente, que v é *universal*.

Dois vértices v e w são *gêmeos* se $Adj(v) \cup \{v\} = Adj(w) \cup \{w\}$. Observe que dois vértices gêmeos são adjacentes.

Uma classe \mathcal{C} de grafos é *hereditária* se para todo grafo $G \in \mathcal{C}$, todo subgrafo induzido de G pertence, também, à classe \mathcal{C} .

Um *conjunto parcialmente ordenado* ou uma *ordem parcial* (S, \leq) consiste de um conjunto não vazio S e uma relação binária \leq em S que é reflexiva, antisimétrica e transitiva. Se, além disso, quaisquer dois elementos x e y de S são tais que ou $x \leq y$ ou $y \leq x$, então (S, \leq) é uma *ordem linear*.

A *ordem inversa* de uma ordem linear \prec_1 sobre V é a ordem linear \prec_2 sobre V tal que para todo elemento v, w de V tal que $v \prec_1 w$, tem-se $w \prec_2 v$.

Um *grafo orientado* é um grafo com uma orientação no seu conjunto de arestas, isto é, cada aresta é um par ordenado de vértices distintos. Denotamos uma orientação da aresta (u, v) por $u \rightarrow v$.

O *grau de entrada*, $g_e(v)$, de um vértice v de um grafo orientado é o número de arestas que possuem v como extremidade final. Analogamente, o *grau de saída*, $g_s(v)$, de um vértice v é o número de arestas que possuem v como extremidade inicial. Uma *fonte* é um vértice com grau de entrada nulo, enquanto que um *sumidouro* é um com grau de saída nulo.

O *problema de reconhecimento* associado a uma classe C de grafos é definido como o seguinte problema de decisão:

Problema: Classe C

Dados: Grafo G

Decisão: G pertence à classe C ?

O símbolo \mathcal{P} denota a classe dos problemas cuja solução pode ser encontrada por um algoritmo em tempo polinomial no tamanho da entrada.

O símbolo \mathcal{NP} denota a classe dos problemas de decisão que possuem um certificado sucinto à resposta SIM do problema, reconhecido por um algoritmo polinomial no tamanho da entrada.

Um problema em \mathcal{NP} é *completo* se qualquer problema em \mathcal{NP} puder ser polinomialmente transformado a ele. Estes problemas pertencem à classe dos problemas \mathcal{NP} -Completos.

Um *grafo triangularizado* é aquele em que todo ciclo de comprimento maior do que três possui uma corda.

Um grafo é *grafo de comparabilidade* se admitir uma orientação tal que para cada par de arestas (u, v) e (v, w) de G , orientadas de u para v ($u \rightarrow v$) e de v para w ($v \rightarrow w$), existir a aresta (u, w) orientada de u para w ($u \rightarrow w$).

Um *grafo de permutação* é um grafo de comparabilidade cujo grafo complemento também o é.

O *grafo interseção* de uma família \mathcal{F} de conjuntos é o grafo obtido tomando um vértice correspondente a cada conjunto da família, e incluindo uma aresta entre dois destes vértices se e somente se os conjuntos correspondentes se intersectam.

Capítulo 2

Preliminares

Neste capítulo consideramos três classes principais de grafos: grafos clique, grafos de intervalo e grafos de comparabilidade, que serão utilizadas. Dentre a extensa literatura sobre essas classes, nos restringimos aos conceitos e propriedades que usaremos posteriormente procurando, dessa forma, tornar mais fácil a leitura.

A seção 2.1 trata dos grafos clique. Nesta seção, além de alguns resultados encontrados na literatura, consideramos o problema de reconhecimento desta classe. Mostramos que este problema pertence à \mathcal{NP} , embora ainda não se saiba se este problema é completo ou pertence à \mathcal{P} . A seção 2.2 trata dos grafos de intervalo e indiferença e a seção 2.3, dos grafos de comparabilidade.

2.1 Grafos clique

A primeira questão que surge, em relação a qualquer classe de grafos, é o problema da caracterização da classe. Este é o problema que analisaremos na seção 2.1.1.

A seguir, veremos algumas propriedades que relacionam o diâmetro de um grafo clique com o grafo que o originou.

Finalmente, nos ateremos a uma subclasse da classe dos grafos clique, a classe dos grafos clique-completos, objeto principal de nosso estudo.

2.1.1 A caracterização de grafos clique

O *grafo clique*, $K(G)$, de um grafo G é o grafo interseção das cliques maximais de G . Um grafo G é *grafo clique-completo* se $K(G)$ for um grafo completo.

A Figura 2.1 mostra o grafo P_1 e $K(P_1)$. Observe que P_1 não é um grafo clique-completo.

O grafo clique de um grafo G é único. É facilmente determinado se as cliques maximais de G forem conhecidas, embora seja possível obter um grafo clique com um número de vértices exponencial, no número de vértices do grafo original.

A operação de acrescentar um vértice adjacente a todos os vértices de uma clique maximal arbitrária de um grafo, constrói grafos com grafo clique isomorfos.

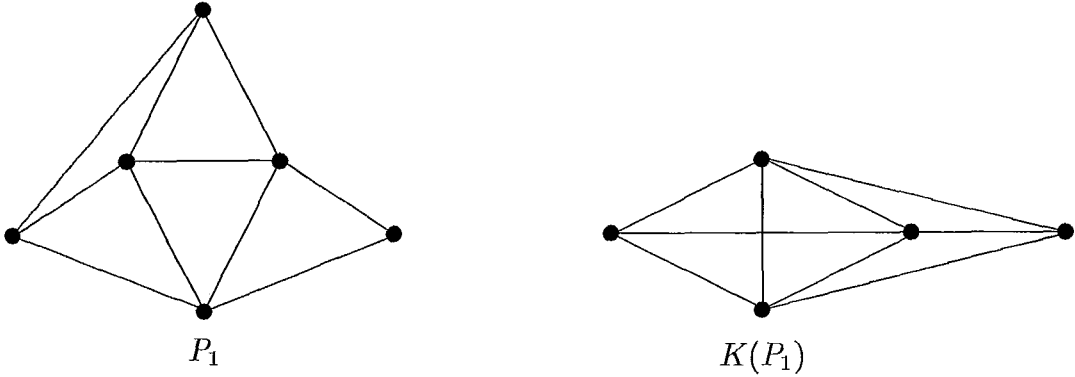


Figura 2.1: O grafo P_1 e o $K(P_1)$ correspondente.

A pirâmide, denotada por P_0 , (Figura 1.1) e todo grafo com quatro cliques maximais que possui um vértice universal são, também, exemplos de grafos que possuem grafo clique isomorfos. Uma clique com quatro vértices é o grafo clique de cada um desses grafos citados.

Embora um grafo possa ser o grafo clique de vários grafos, um grafo não é necessariamente grafo clique de algum grafo. Veremos, posteriormente, que a pirâmide não é grafo clique de nenhum grafo.

Uma caracterização para os grafos clique foi dada por Roberts e Spencer [29] motivada na condição de suficiência apresentada anteriormente por Hamelink [14]. Ambos fizeram uso da propriedade Helly.

Diremos que uma família de conjuntos satisfaz a *propriedade Helly* quando qualquer subcoleção C_i desses conjuntos que se intersectam dois a dois possui interseção não vazia, isto é, $\bigcap C_i \neq \phi$.

Os *grafos Helly* são aqueles cujas cliques maximais satisfazem a propriedade Helly, ou seja, existe um vértice do grafo comum a todas as cliques maximais que se interceptam duas a duas.

A pirâmide não é um grafo Helly, pois contém três cliques maximais que não satisfazem a propriedade Helly. (Veja Figura 1.1.)

Hamelink [14] provou que todo grafo Helly é grafo clique.

Na demonstração de seu teorema, Hamelink construiu dado um grafo Helly H , um grafo G cujo grafo $K(G)$ é isomorfo a H .

Considere $K(H)$ e sejam M_1, \dots, M_l os vértices de $K(H)$, que representam as cliques maximais M_1, \dots, M_l de H .

Defina G tal que

$$V(G) = V(H) \cup V(K(H))$$

$$A(G) = A(K(H)) \cup \{(h, M_i), \text{ se } h \in V(M_i), 1 \leq i \leq l\}$$

A Figura 2.2 mostra um exemplo desta construção.

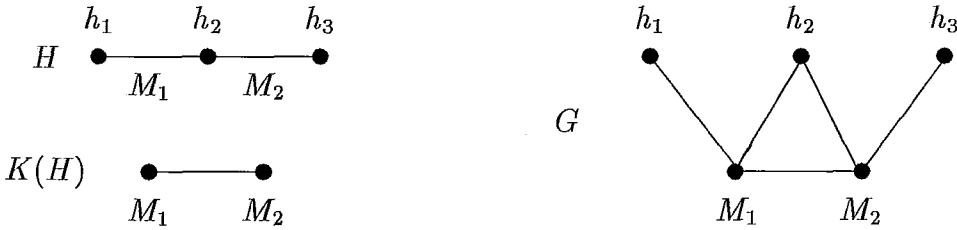


Figura 2.2: Um grafo G com $K(G) = H$.

Dessa forma, cada vértice h de H pertence a uma única clique maximal em G : $C_h = \{h\} \cup \{M_i, h \in M_i \text{ e } M_i \text{ é clique maximal em } H\}$, pois os vértices de H em G são não adjacentes.

Ainda, C_h é clique maximal em G , pois, caso contrário, existiria um vértice $x \in G$, $x \neq h$ adjacente a todo vértice de C_h . Observe que $x \notin V(H)$, pois, por construção de G , os vértices de H são não adjacentes em G . Logo, $x \in V(K(H))$, isto é $x = M_i$, não pertencente a C_h mas incidente a h . Logo, M_i corresponde a uma clique maximal de H que contém h e, por construção, de G , M_i pertence à C_h . Contradição.

As únicas cliques maximais de G são as C_h , $h \in V(H)$. De fato, seja C uma clique maximal de G distinta de C_h , para qualquer h . Se $h \in C$, então $C \supset C_h$, o que contradiz a maximalidade de C_h .

Suponha $C \subseteq \{M_1, \dots, M_{|V(K(H))|}\}$. Então, as cliques maximais M_i de H que correspondem aos vértices de C , se intersectam duas a duas (C é subgrafo de $K(H)$ e C é clique), portanto, sendo H grafo Helly, existe $h \in V(H)$ tal que $h \in \bigcap_{M_i \in V(C)} M_i$, logo h é adjacente a todo vértice em C , o que contradiz a maximalidade de C .

Está, então, demonstrado o teorema devido a Hamelink.

Mas a condição de ser grafo Helly para que um grafo seja grafo clique nem sempre é necessária.

Na Figura 2.3 os grafos H e G são tais que $H = K(G)$, mas o conjunto das cliques maximais de H não satisfaz a propriedade Helly. Para ver isto, considere as cliques maximais de H : $M_1 = \{a, b, c, d\}$, $M_2 = \{e, b, f, g\}$ e $M_3 = \{i, d, g, h\}$.

O Teorema 2.1 caracteriza os grafos clique.

Teorema 2.1 (Roberts e Spencer (71)) *Um grafo G é um grafo clique se e somente se existe uma família F de cliques (não necessariamente maximais) em G que satisfaz as seguintes condições:*

- (i) F cobre as arestas de G , ou seja, se $(v, w) \in A$, então $\{v, w\}$ está contido em algum elemento de F ;
- (ii) F satisfaz a propriedade Helly.

A pirâmide é um exemplo de um grafo que não é grafo clique. De fato, observe, primeiro, que conjuntos que contém cliques formadas pelas arestas de um triângulo

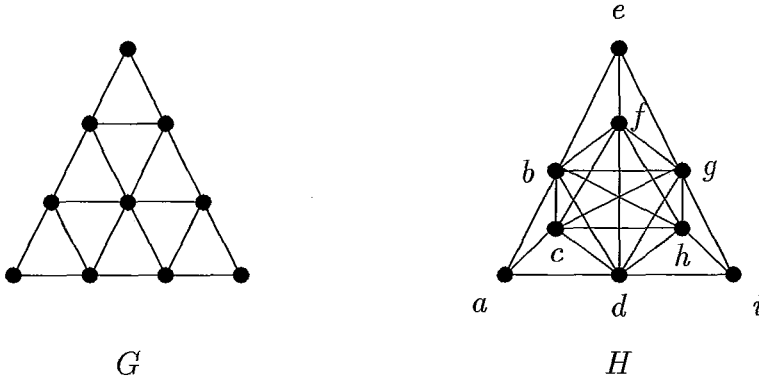


Figura 2.3: $H = K(G)$ e H não é grafo Helly.

não satisfazem a propriedade Helly. Portanto, é necessário que para toda família F de cliques que cobre as arestas da pirâmide, os triângulos de P_0 pertençam a F . Mas P_0 contém três cliques maximais que se cruzam duas a duas e P_0 não contém um vértice comum (Figura 1.1).

Roberts e Spencer, em [29], mencionam uma maneira de verificar se uma dada família de conjuntos de vértices de um grafo satisfaz a propriedade Helly. Faremos uma prova no Teorema 2.2.

Seja $\mathcal{F} = \{S_1, \dots, S_p\}$ uma família de conjuntos.

Considere todas as triplas de elementos u, v, w de $S = \bigcup_{S_i \in \mathcal{F}} S_i$ e $F(u, v, w)$, a subfamília de todos os conjuntos que contêm pelo menos dois dentre os elementos u, v, w .

Teorema 2.2 *Seja $\mathcal{F} = \{S_1, \dots, S_p\}$ uma família de conjuntos.*

A família \mathcal{F} satisfaz a propriedade Helly se e somente se para todo u, v, w de $S = \bigcup_{i=1}^p S_i$

$$\bigcap \{S_i, S_i \in F(u, v, w)\} \neq \phi.$$

Dem.: (\implies) Observe que os elementos pertencentes a $F(u, v, w)$ se intersectam dois a dois, logo, por hipótese,

$$\bigcap \{S_i, S_i \in F(u, v, w)\} \neq \phi.$$

(\impliedby) Seja $\bigcap \{S_i, S_i \in F(u, v, w)\} \neq \phi$ para todo $u, v, w \in S$ e $S_i \in \mathcal{F}$.

Suponha que \mathcal{F} não satisfaça à propriedade Helly. Então existe uma subfamília \mathcal{F}_1 de \mathcal{F} cujos conjuntos se intersectam dois a dois, mas não possuem um elemento em comum.

Considere $\mathcal{F}_2 = \{S_1, \dots, S_m\}$ uma subfamília de \mathcal{F}_1 minimal em relação a não satisfazer a propriedade Helly, isto é,

- (i) \mathcal{F}_2 não satisfaz a propriedade Helly;
- (ii) qualquer subfamília com $m - 1$ elementos, a satisfaz.

Observe que $m \geq 3$. Sendo \mathcal{F}_2 minimal em relação a não satisfazer a propriedade Helly, então $\bigcap_{S \in \mathcal{F}_2 \setminus S_i} S \neq \emptyset$ para todo conjunto S_i de \mathcal{F}_2 . Logo, para cada i , $i = 1, \dots, m$, existe $x_i \in (\bigcap_{j \neq i} S_j) \setminus S_i$.

Sendo $m \geq 3$, existem pelo menos três x_i, x_j, x_k , distintos dois a dois. Logo, sendo \mathcal{F}_2 mínima em relação a não satisfazer a propriedade Helly, cada elemento de \mathcal{F}_2 contém pelo menos dois dentre x_i, x_j, x_k .

Portanto, $\mathcal{F}_2 = \{S_1, \dots, S_m\} \subset F(x_i, x_j, x_k)$, o que contradiz a hipótese. \triangle

Apesar do Teorema 2.2 originar um algoritmo polinomial para testar se uma determinada família satisfaz a propriedade Helly, ainda não sabemos se a caracterização de Roberts e Spencer conduzirá a um algoritmo eficiente para o reconhecimento da classe dos grafos clique.

O problema recai no fato de que para encontrar uma família formada por cliques de G que satisfaça (i) e (ii) do Teorema 2.1, poderá ser necessário examinar todas as famílias formadas por cliques de G , e o conjunto dessas famílias contém a das cliques maximais de G . É do conhecimento geral que esta família pode conter um número exponencial de elementos.

Moon e Moser [22], definiram o valor, $f(n)$, para o número de cliques maximais em um grafo qualquer.

Teorema 2.3

$$\text{Se } n \geq 2 \text{ então, } f(n) \leq \begin{cases} 3^{n/3}, & \text{se } n \equiv 0 \pmod{3}; \\ 4 \cdot 3^{(n/3)-1}, & \text{se } n \equiv 1 \pmod{3}; \\ 2 \cdot 3^{(n/3)}, & \text{se } n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

O limite é atingido nos grafos k -partidos completos, H , de tal forma que:

- para $n = 3k$, $H = K_{n_1, \dots, n_k}$ $n_i = 3$, $1 \leq i \leq k$
- para $n = 3k + 1$, $H = K_{n_1, \dots, n_k}$ $n_i = 3$, $1 \leq i \leq k - 1$, $n_k = 4$
- para $n = 3k + 2$, $H = K_{n_1, \dots, n_{k+1}}$ $n_i = 3$, $1 \leq i \leq k$, $n_{k+1} = 2$

Por exemplo, o grafo $H = K_{3,4}$ possui 12 cliques maximais (cada aresta é uma clique). (Veja Figura 2.4.)

Terminamos esta seção enfatizando que está em aberto o problema de reconhecimento da classe dos grafos clique, isto é, não conhecemos um algoritmo que verifique em tempo polinomial se um grafo arbitrário pertence à classe. Também, não sabemos se o problema pertence à classe dos problemas \mathcal{NP} -Completo.

Observamos que o problema de reconhecimento de grafos clique pertence à \mathcal{NP} . Esta nossa observação está demonstrada a seguir.

Um certificado sucinto para a resposta SIM ao problema de reconhecimento de grafos clique verificável em tempo polinomial, poderá ser exibir uma certa família de cliques. O teorema a seguir estabelece este resultado. Primeiro, definimos clique essencial de uma família de cliques.

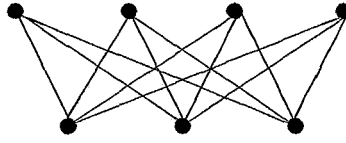


Figura 2.4: O grafo $K_{3,4}$.

Numa família $\mathcal{F} = \{C_1, C_2, \dots, C_k\}$ de cliques de um grafo G , uma clique, C_i , é *essencial* se C_i contiver uma aresta de G que não pertence a nenhuma outra clique C_j de G , com $j \neq i$ e $C_j \in \mathcal{F}$.

Teorema 2.4 *O problema reconhecimento de grafos clique pertence à classe \mathcal{NP} .*

Dem.: O grafo G e uma família \mathcal{F} formada por cliques essenciais de G é um certificado sucinto de que G é um grafo clique.

Observe que, $|\mathcal{F}| \leq |A|$.

Logo, verificar se para cada aresta (u, v) de G , existe uma clique em \mathcal{F} que contém $\{u, v\}$, pode ser feito em tempo polinomial no tamanho de A .

Além disso, o algoritmo originado do Teorema 2.2 verifica se \mathcal{F} satisfaz a propriedade Helly. Este algoritmo é executado em tempo polinomial no tamanho de \mathcal{F} (logo, no tamanho de A).

Então, de fato, G e \mathcal{F} formam um certificado (verificável em tempo polinomial no tamanho de G) de que G é um grafo clique.

Portanto, o problema do reconhecimento de grafos clique pertence a \mathcal{NP} . \triangle

2.1.2 Diâmetro de grafos clique

A relação entre os diâmetros de G e $K(G)$ têm sido estudada por vários pesquisadores.

Os ciclos de comprimento maior do que três são exemplos de grafos cujo diâmetro se mantém em G e $K(G)$; os grafos da Figura 2.3 são tais que $diam(G) = 3$ e $diam(K(G)) = 2$ e os da Figura 2.5 possuem $diam(G) = 2$ e $diam(H) = 3$. Nesta última temos, também, um exemplo de que os diâmetros de G e $K(G)$ podem se alternar. Pois, nessa figura, $K(G) = H$ e $K(H) = G$.

Hedman [16] demonstrou que os diâmetros de G e $K(G)$ diferem de no máximo um.

Teorema 2.5 (Hedman (86)) *Seja G um grafo conexo. Então*

$$diam(G) - 1 \leq diam(K(G)) \leq diam(G) + 1.$$

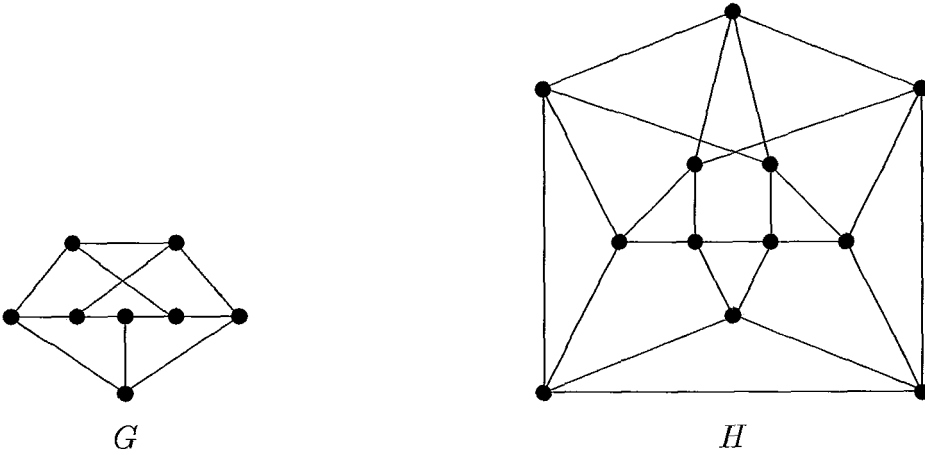


Figura 2.5: Dois grafos G e H tais que $K(G) = H$ e $K(H) = G$.

Os exemplos citados anteriormente são de grafos que atingem os valores extremos da desigualdade de Hedman, ou seja, esta desigualdade é a melhor possível.

Para os grafos clique iterados $K^n(G) := K(K^{n-1}(G))$, tem-se o seguinte corolário do Teorema 2.5.

Corolário 2.1 *Seja um grafo conexo G . Então,*

$$\text{diam}(G) - n \leq \text{diam}(K^n(G)) \leq \text{diam}(G) + n.$$

Os grafos clique iterados têm sido estudados por Chen e Lih [6], Chong-Keang e Yee-Hock [7] Hedman [15], Hedetniemi e Slater [17], Newmann-Lara [23], Bandelt e Prisner [2], Bornstein [5]. Estes dois últimos citados estudam a classe dos grafos clique que convergem ao grafo trivial.

Nosso objeto de estudo é uma subclasse dessa classe: a classe dos grafos que convergem ao grafo trivial com duas aplicações do operador clique, isto é, $K^2(G) = K_1$.

2.1.3 Grafos clique-completos

A classe dos grafos clique-completos é a classe dos grafos tais que as suas cliques maximais se intersectam duas a duas, mais precisamente, é a classe dos grafos G tais que $K(G) = K_l$, $l \geq 1$.

Os grafos da Figura 1.1 são exemplos de grafos clique-completos. É interessante notar que nem todos os grafos clique-completos são grafos clique. A pirâmide não é um grafo clique, enquanto o primeiro grafo da Figura 1.1, o é.

À primeira vista, pode parecer que esta classe é muito restrita, mas argumentamos contra essa impressão observando, como já citamos no Capítulo 1, que se a qualquer grafo for acrescentado apenas um vértice universal, obtém-se um grafo

clique-completo. Mais ainda, qualquer grafo pode ser escrito como uma certa união de grafos clique-completos.

O subgrafo H de G que corresponde a uma clique maximal de $K(G)$ é um subgrafo clique-completo maximal, isto é, o grafo G não contém um subgrafo clique-completo que contenha H propriamente e possua um número maior do que H de cliques maximais de G .

Teorema 2.6 *Todo grafo pode ser coberto em grafos clique-completos.*

Dem.: Seja \mathcal{C} o conjunto de cliques maximais de G .

Por definição de grafo clique, $V(K(G)) = \mathcal{C}$. Ainda, a cada clique maximal de $K(G)$ corresponde um único subconjunto \mathcal{C}_i de \mathcal{C} . As cliques maximais de \mathcal{C}_i se intersectam duas a duas. Logo, a cada clique maximal de $K(G)$ corresponde um único grafo clique-completo maximal em G .

Como todo grafo é coberto por suas cliques maximais, tem-se que a cobertura de $K(G)$ em cliques maximais induz a cobertura de G em grafos clique-completos maximais. \triangle

Dessa forma, todo grafo pode ser decomposto em grafos clique-completos maximais.

Uma conseqüência direta do Teorema 2.5 mostra que a classe dos grafos clique-completos com pelo menos duas cliques maximais é uma subclasse da dos grafos de diâmetro dois.

Teorema 2.7 *Seja $G \not\cong K_n$, $n \geq 1$ um grafo clique-completo.*

Então $diam(G) = 2$.

Dem.: Pelo Teorema 2.5, $0 \leq diam(G) \leq 2$. Mas, $diam(G) = 0$ se e somente se $G \cong K_1$, e $diam(G) = 1$ se e somente se $G \cong K_n$, $n > 1$ e, em ambos os casos, $K(G) = K_1$.

Portanto, $diam(G) = 2$. \triangle

Observe que a inversa do Teorema 2.7 não é verdadeira. Pois, um C_4 possui diâmetro dois e seu grafo clique é o próprio C_4 .

Na Figura 2.6 estão representados exemplos de grafos pertencentes unicamente às classes onde estão localizados nesse diagrama. Por exemplo, a pirâmide possui diâmetro dois e é um grafo clique-completo, mas não é um grafo clique.

Observe que os grafos clique-completos satisfazem a igualdade $diam(G) - 1 = diam(K(G))$ do Teorema 2.5 e que um caminho induzido com três arestas é um exemplo de que a recíproca não é verdadeira.

Balakrishnan e Paulraja [1] caracterizaram as classes de grafos que atingem os limites impostos pelo Teorema 2.5 para o $diam(K(G))$.

Para tal, denominaram *caminho diametral* em G , a um caminho mínimo cujo comprimento é igual ao diâmetro de G . Duas cliques maximais, B e C , de G são

Grafos de diâmetro dois

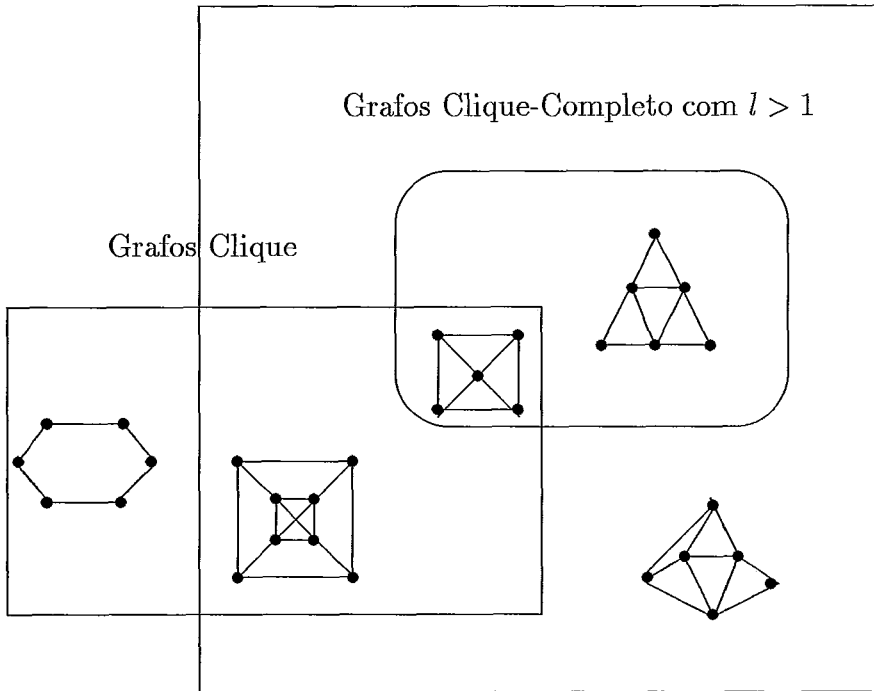


Figura 2.6: Uma representação de classes de grafos.

*diametra*s se contiverem os vértices extremos opostos de um caminho diametral, respectivamente.

Enunciaremos os teoremas de Balakrishnan e Paulraja a seguir.

Teorema 2.8 *Seja G um grafo conexo. Então $\text{diam}(G) - 1 = \text{diam}(K(G))$ se e somente se para todo par de cliques diametra*s B e C de G , cada clique do par contém exatamente uma aresta de um caminho diametral entre B e C .

Teorema 2.9 *Para um grafo conexo G , $\text{diam}(K(G)) = \text{diam}(G) + 1$ se e somente se existe um par de cliques diametra*s B e C em G tal que $d(u, v) = \text{diam}(G)$, para todo par de vértices $u \in B$ e $v \in C$.

Teorema 2.10 *Seja G um grafo conexo. Então $\text{diam}(G) = \text{diam}(K(G))$ se e somente se*

- (i) *Existem cliques diametra*s B e C tal que existe um caminho diametral entre B e C que contém exatamente uma aresta de B ou C e todos os demais caminhos diametras (se existirem) entre B e C contém no máximo uma aresta de B ou de C .

(ii) Não existe nenhum par de cliques diametrais D e F tal que para todo par de vértices $u \in D$ e $v \in F$ tem-se $d(u, v) = \text{diam}(G)$.

Em particular, quando o diâmetro é dois, todo par de cliques maximais é formado por cliques diametrais. Portanto, o Teorema 2.8 se aplica para esta classe. Pois, se duas cliques diametrais contém, cada uma, uma aresta de um caminho de comprimento dois, necessariamente, possuem um vértice em comum.

Nos capítulos posteriores estudaremos algumas propriedades da classe dos grafos clique-completos e de algumas de suas subclasses.

2.2 Grafos de intervalo

Dentre a extensa literatura sobre as classes dos grafos de intervalo e indiferença, descrevemos aqui apenas o que necessitaremos posteriormente.

Destacamos algumas das relações existente entre as classes dos grafos de intervalo e uma importante subclasse: a classe dos grafos indiferença.

2.2.1 Grafos de intervalo e grafos indiferença

Um grafo G é *grafo de intervalo* se é o grafo interseção de um conjunto de intervalos da reta real. A Figura 2.7 mostra uma representação de um grafo G por intervalos. Se existir um conjunto de intervalos unitários cujo grafo de interseção é G , então G é *indiferença*. A classe dos grafos indiferença é, por definição, uma subclasse da dos grafos de intervalo.

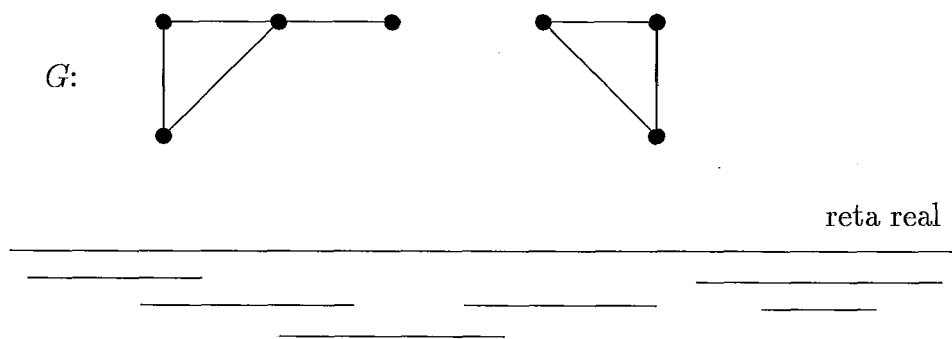


Figura 2.7: O grafo G e sua representação por intervalos.

Um resultado de Roberts [27], relaciona os grafos de intervalo e os indiferença através de subgrafos proibidos. Deste resultado obtém-se que a classe dos grafos indiferença é uma subclasse própria da dos de intervalo.

Teorema 2.11 (Roberts (71)) *Os grafos indiferença são exatamente os grafos de intervalo que não contêm $K_{1,3}$ como subgrafo induzido (veja Figura 2.8).*

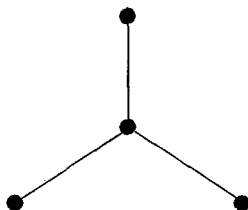


Figura 2.8: O grafo $K_{1,3}$.

Uma relação interessante entre as classes é a caracterização que cada uma possui em termos de cliques maximais. Ambas admitem uma ordem linear, uma sobre as cliques maximais com restrições sobre os vértices do grafo, a outra sobre os vértices do grafo, com restrições sobre as cliques maximais. Esta dualidade entre as ordens lineares está evidenciada nos Teoremas 2.12 e 2.13.

Teorema 2.12 (Gilmore e Hoffman (64)) *Um grafo é grafo de intervalo se e somente se admite uma ordem linear sobre suas cliques maximais, na qual as que contêm o mesmo vértice são consecutivas.*

Teorema 2.13 (Roberts (71)) *Um grafo é grafo indiferença se e somente se admite uma ordem linear sobre seus vértices, na qual os vértices contidos em uma mesma clique maximal são consecutivos.*

Esta caracterização foi redescoberta por Maehara [20].

O Teorema 2.13 enunciado como acima, além de evidenciar a dualidade existente entre essas duas ordens lineares, é de leitura mais simples do que o encontrado em [28], bem como é mais simples a prova alternativa que faremos a seguir.

Demonstração do Teorema 2.13: (\implies) Sejam G um grafo indiferença e $(I_v)_{v \in V}$ uma representação de G por intervalos unitários. Denotamos por $esq(I_v)$ o ponto extremo que está à esquerda no intervalo I_v .

Defina a seguinte ordem linear \prec sobre V :

$$u < v \iff esq(I_u) < esq(I_v).$$

Suponha que $(u, v) \in A$ mas u e v não são consecutivos em \prec . Então existe um vértice w tal que $u < w < v$. Logo, $esq(I_u) < esq(I_w) < esq(I_v)$.

Ainda mais, sendo $(u, v) \in A$, tem-se $I_u \cap I_v \neq \emptyset$. Então, $I_u \cap I_w \neq \emptyset$ e $I_w \cap I_v \neq \emptyset$, pois $esq(I_u) < esq(I_w) < esq(I_v)$. Logo, $(u, w) \in A$ e $(v, w) \in A$.

Portanto, os vértices w tais que $u < w < v$ induzem uma clique em G .

(\Leftarrow) Seja $<$ uma ordem linear sobre V tal que vértices de uma mesma clique maximal são consecutivos.

Sejam x_i e y_i o primeiro e o último vértice, respectivamente, da clique maximal M_i na ordem $<$, e considere a ordem linear \prec sobre as cliques maximais de G induzida pela ordem $<$ sobre V da seguinte forma:

$$M_i \prec M_j \iff x_i < x_j.$$

Considere, agora, M_i, M_j duas cliques maximais de G contendo o mesmo vértice x . Se existir uma clique maximal M_k tal que $M_i \prec M_k \prec M_j$, então sendo que $x_i < x_k < x_j, x_j \leq x \leq y_i$ e $y_i < y_k$, tem-se $x \in M_k$.

Portanto, esta ordem linear sobre as cliques maximais de G satisfaz a propriedade: cliques contendo o mesmo vértice v são consecutivas. Então G é um grafo de intervalo.

Além disso, note que o grafo $K_{1,3}$ não admite uma ordem linear tal que vértices pertencendo à mesma clique são consecutivos.

Portanto, G é um grafo indiferença. \triangle

Um dos motivos que nos levou a enfatizar este resultado é a facilidade de visualização de um grafo indiferença através da ordem indiferença. Observe que podemos considerar, na representação do grafo, somente as arestas que incidem no primeiro e último vértices de cada clique maximal (aresta maximal) de G . Isto é, todo grafo indiferença com n vértices admite uma representação que utiliza no máximo $n - 1$ arestas maximais. Veja Figura 2.9.

Sendo que um caminho é um grafo indiferença com exatamente $n - 1$ arestas (maximais), este número é o melhor possível.



Figura 2.9: Uma representação de um grafo indiferença através de suas arestas maximais.

Uma ordem linear sobre os vértices de um grafo que satisfaz a condição do Teorema 2.13 será chamada de *ordem indiferença*.

Seja G um grafo e considere uma ordem indiferença $<$ sobre V . Observe que a ordem inversa da ordem $<$ é linear e indiferença.

Roberts mostrou que estas são as duas únicas ordens lineares sobre os vértices de um grafo indiferença que não possuem vértices gêmeos. Para tal, são necessários alguns lemas e definições.

Seja R uma relação de equivalência sobre os vértices de um grafo G definida por xRy se e somente se x e y são vértices gêmeos de G .

O grafo $G^* = G^*(V^*, A^*)$ denota o grafo que possui como conjunto de vértices, as classes de equivalência módulo R , $[x]$, determinada pelo elemento x , e $([x], [y]) \in A^*$ se e somente se $(x, y) \in A$.

Chamaremos G^* de *grafo quociente* de G . A todo subgrafo H de G tal que $H \cong G^*$, diremos que H é *subgrafo reduzido*.

Por definição, um grafo reduzido não possui vértices gêmeos.

Observe que subgrafos de grafos reduzidos não são necessariamente grafos reduzidos. Se na Figura 2.10, considerarmos o subgrafo H gerado por $\{1, 2, 3, 4\}$ obteremos um subgrafo não reduzido do grafo indiferença reduzido representado.

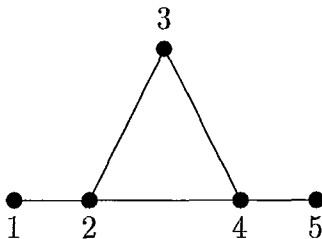


Figura 2.10: Um grafo indiferença.

Por construção, tem-se que G^* é um subgrafo induzido de G .

Sendo que subgrafos induzidos de grafos indiferença são grafos indiferença, o grafo reduzido de um grafo indiferença é também indiferença.

Informalmente, podemos considerar que a ordem indiferença dispõe os vértices de um grafo sobre uma reta associando a cada vértice um número da reta real. Um conjunto finito de números reais com pelo menos dois elementos tem exatamente um elemento mínimo e um elemento máximo. Esta é a idéia subjacente na prova feita por Roberts da unicidade da ordem indiferença para grafos indiferença reduzidos.

Um vértice v de um grafo G é *extremo* se G for completo, ou caso contrário, para todo par x, y de vértices adjacentes a v , tal que x, v , e y, v não são gêmeos, $(x, y) \in A$ e existe pelo menos um vértice z em G adjacente a x e a y , mas não a v .

No grafo da Figura 2.11 os vértices 2, 3 e 4 não são vértices extremos, enquanto 1 e 5 o são. Observe que o vértice 5 é extremo por vacuidade.

O lema a seguir identifica quais vértices de um grafo indiferença poderão se constituir no primeiro ou no último elemento de uma ordem indiferença.

Lema 2.1 *Seja G um grafo indiferença reduzido.*

Um vértice v é extremo se e somente se é o primeiro ou o último vértice de uma ordem indiferença em G .

Dem.: Sejam G um grafo indiferença reduzido, $<$ uma ordem indiferença sobre V . (\implies) Seja v um vértice extremo de G . Suponha que v não é o primeiro nem o último vértice da ordem indiferença $<$ em G .

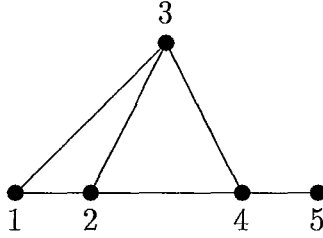


Figura 2.11: Os vértices 1 e 5 são vértices extremos.

Como G é conexo, considere x e y vértices adjacentes a v tal que $x < v < y$. Logo, $(x, y) \in A$, pois v é extremo. Ainda da definição de vértice extremo e sendo G reduzido, existe $z \in V(G)$ adjacente a x e a y mas não a v , o que contradiz a condição da ordem indiferença.

Portanto, v é o primeiro ou o último vértice da ordem indiferença $<$.

(\Leftarrow) Suponha que v é o primeiro elemento da ordem indiferença $<$.

Se não existirem dois vértices x e y adjacentes a v então por vacuidade v é vértice extremo.

Suponha que existam x e y dois vértices adjacentes a v . Logo, $v < x < y$ ou $v < y < x$. Suponha, sem perda de generalidade, $v < x < y$. Então $(x, y) \in A$ e v, x, y pertencem à mesma clique maximal de G , pois $<$ é uma ordem indiferença.

Sendo que v e x não são vértices gêmeos, pois G é grafo reduzido, então existe x_1 tal que $(x, x_1) \in A$ e $(v, x_1) \notin A$. Tem-se, então, que $y < x_1$, pois caso contrário, $(v, x_1) \in A$. Sendo que $<$ é ordem indiferença e, por hipótese, $x < y$, então $(y, x_1) \in A$.

Portanto, v é vértice extremo. \triangle

Observe que o primeiro ou o último vértice de uma ordem indiferença é um vértice extremo de G , mesmo que o grafo indiferença não seja reduzido.

De fato, seja v o primeiro elemento de $<$. Suponha que G não é uma clique (caso contrário, v seria vértice extremo por definição) e seja $v < x < y$, onde x e y pertencem à uma mesma clique maximal M de G .

Sendo que G não é uma clique então existe z adjacente a x ou a y ou a ambos, mas não a v , pois se (v, z) fosse uma aresta de G , M não seria uma clique maximal de G . Portanto, v é vértice extremo. \triangle

No lema a seguir, veremos que duas ordens indiferença sobre o conjunto de vértices de um grafo indiferença reduzido com o mesmo primeiro (último) elemento são iguais.

Lema 2.2 *Seja G um grafo indiferença reduzido. Se $<_1$ e $<_2$ são duas ordens indiferença sobre V que possuem o mesmo primeiro (último) elemento, então $<_1 = <_2$.*

Dem.: Seja n o número de vértices de G . Considere as seqüências de vértices de G , $v_1 <_1 v_2 <_1 \dots <_1 v_n$ e $w_1 <_2 w_2 <_2 \dots <_2 w_n$, ordenadas de acordo com as ordens indiferença $<_1$ e $<_2$.

Argumentamos a igualdade das duas ordens por indução no número n de vértices de G .

Por hipótese, $v_1 = w_1$.

Suponha que, por hipótese de indução, $v_i = w_i$ para todo $i < k$.

Mostremos que $v_k = w_k$, para $k = i + 1$.

Observe que, por hipótese de indução, $v_k <_1 w_k$ e $w_k <_2 v_k$.

Seja H o subgrafo gerado por $\{v_i \mid i \geq k - 1\}$. Observe que H é um grafo indiferença (não necessariamente reduzido). Então, v_{k-1} é o primeiro vértice nas restrições de $<_1$ e $<_2$ a H . Logo, pelo Lema 2.1, v_{k-1} é um vértice extremo de H .

Ainda, $(v_{k-1}, v_k) \in A$ e $(v_{k-1}, w_k) \in A$, pois H é conexo, e w_k é um vértice de H , por hipótese de indução.

Sendo v_{k-1} um vértice extremo em H e v_k e w_k vértices adjacentes a v_{k-1} , então $(v_k, w_k) \in A$.

Mostremos, agora, que v_k e w_k são vértices gêmeos, o que implica em uma contradição.

Seja v_j tal que $(v_k, v_j) \in A$. (Queremos mostrar que $(w_k, v_j) \in A$.)

Suponha $j < k$. Então, $v_j <_2 w_k <_2 v_k$. Sendo $<_2$ uma ordem indiferença, obtém-se que $(w_k, v_j) \in A$.

Suponha que $j \geq k$. Então, ou $v_j <_1 w_k$ ou $w_k <_1 v_j$. Em ambos os casos, segue-se que $(w_k, v_j) \in A$, pois $(v_j, v_k) \in A$, $v_k <_1 w_k$ e $<_1$ é uma ordem indiferença.

Logo, $v_k = w_k$. \triangle

O Teorema 2.14 prova a unicidade da ordem indiferença, no seguinte sentido: um grafo indiferença reduzido G admite exatamente duas ordens indiferença, uma inversa da outra.

Teorema 2.14 (Roberts (71)) *Seja G um grafo indiferença reduzido. A ordem indiferença é única.*

Dem.: Sejam $v \neq w$, vértices de um grafo indiferença reduzido G .

Suponha que existam duas ordens indiferença distintas sobre V tal que $v <_1 w$ e $v <_2 w$.

Sejam x e y os primeiros elementos de $<_1$ e $<_2$, respectivamente. Pelo Lema 2.2, para que $<_1 = <_2$, basta verificar que $x = y$.

Pelo Lema 2.1,

o vértice x é o primeiro elemento de $<_1$ se e somente se

x é vértice extremo de G se e somente se

x é ou o primeiro ou o último elemento de $<_2$.

Suponha que x é o último elemento da ordem indiferença $<_2$.

A ordem $<_3$, inversa de $<_2$, é uma ordem indiferença sobre V e x é o primeiro elemento de $<_3$. Logo, $<_3 = <_1$, pelo Lema 2.2. Em particular, $v <_3 w$. Então, $w <_2 v$. Mas, por hipótese, $v <_2 w$. Logo, $v = w$, contradizendo a hipótese.

Portanto, as duas ordens indiferença $<_1$ e $<_2$ sobre V são iguais.

Sendo G um grafo indiferença existe pelo menos uma ordem indiferença sobre V , pelo Teorema 2.13. Esta ordem, portanto, é única (a menos de inversa). Δ

Observe que se G não for um grafo indiferença reduzido, a ordem indiferença não é única.

Dada uma ordem $<$ sobre V , uma outra ordem indiferença pode ser obtida permutando-se, em $<$, a posição entre dois vértices gêmeos de G . Dessa forma, os i -ésimos elementos de ordens distintas ou são iguais ou são vértices gêmeos de G .

Observe que todas as ordens indiferença sobre V podem ser obtidas da forma citada acima, a partir de uma ordem indiferença qualquer.

Mas, qualquer ordem indiferença induz uma ordem linear sobre as cliques maximais de G que é única (a menos de inversa).

Corolário 2.2 *Seja $<$ uma ordem indiferença sobre os vértices de um grafo indiferença (não necessariamente reduzido).*

Defina $M_i \prec M_j \iff x_i < x_j$, onde x_i é o primeiro vértice da clique maximal M_i em $<$.

A ordem linear \prec sobre as cliques maximais de G é única (a menos de inversa).

Dem.: Observe primeiro que existe uma correspondência um a um entre o conjunto dos primeiros elementos das cliques maximais de G em $<$ e o conjunto das cliques maximais de G .

Pois se $x_i \neq x_j$ então $M_i \neq M_j$, pois caso contrário, ou M_i ou M_j não seria maximal. Além disso, para cada clique maximal M_i existe um único vértice x_i que é o primeiro elemento de M_i na ordem $<$.

Sejam $<_1, <_2, \dots, <_p$ as diversas ordens indiferença sobre V .

Lembre-se que os i -ésimos elementos de ordens distintas ou são iguais ou são vértices gêmeos.

Então se a posição i indica o primeiro elemento de uma clique maximal M em $<_i$ então a posição i indicará o primeiro elemento de M em qualquer $<_j$, $j \neq i$.

Logo, qualquer ordem indiferença sobre V define a mesma ordem linear sobre as cliques maximais de G .

Portanto, a ordem linear \prec sobre as cliques maximais de G é única (a menos de inversa). Δ

Observe que \prec é uma ordem que satisfaz a condição do Teorema 2.12.

Ainda sobre ordens lineares das classes de intervalo e indiferença, é interessante relacionar a ordem indiferença ao resultado obtido por Olariu [24].

Teorema 2.15 (Olariu (91)) *Um grafo G é um grafo de intervalo se e somente se admite uma ordem linear $<$ sobre V tal que $(u, v) \in A$, se $(u, w) \in A$ e $u < v < w$.*

A ordem indiferença é uma ordem que satisfaz as condições do Teorema 2.15.

Considere um caminho com três vértices, u , v , w e arestas (u, v) e (v, w) . Este grafo indiferença admite a ordem linear $v < w < u$ que satisfaz as condições do Teorema 2.15 mas não é uma ordem indiferença.

Uma outra caracterização dos grafos de intervalo, dada por Gilmore e Hoffman [12], relaciona as classes dos grafos de intervalo, dos triangularizados e a dos de comparabilidade.

Teorema 2.16 (Gilmore e Hoffman (64)) *Um grafo G é um grafo de intervalo se e somente se G é triangularizado e seu complementar é de comparabilidade.*

2.3 Grafos de comparabilidade

Nesta seção, faremos um pequeno resumo sobre a classe dos grafos de comparabilidade, com ênfase na caracterização de Ghouila-Houri, que nos parece de extrema importância, pois dela derivam vários algoritmos polinomiais para o reconhecimento da classe, além de outras caracterizações, bem como algoritmos polinomiais que constroem uma orientação transitiva para o grafo.

2.3.1 Grafos de comparabilidade

É sempre possível atribuir às arestas de G uma orientação, \vec{G} , originando um grafo orientado. Se, para cada par de arestas (u, v) e (v, w) de G , orientadas de u para v ($u \rightarrow v$) e de v para w ($v \rightarrow w$), existir a aresta (u, w) orientada de u para w ($u \rightarrow w$), temos que \vec{G} é uma *orientação transitiva* e G é um *grafo de comparabilidade*.

Uma condição mais fraca foi encontrada por Ghouila-Houri [11]. Para apresentá-la necessitamos da seguinte definição.

Uma orientação \vec{G} de um grafo G é chamada *semi-transitiva* se para quaisquer três vértices u , v , w de G , tal que existem as arestas (u, v) e (v, w) com as orientações $u \rightarrow v$ e $v \rightarrow w$ então $(u, w) \in A$ e ou $u \rightarrow w$ ou $w \rightarrow u$.

Teorema 2.17 (Ghouila-Houri (62)) *Um grafo G é grafo de comparabilidade se e somente se admite uma orientação semi-transitiva.*

Desta caracterização derivam algoritmos polinomiais para o reconhecimento da classe e outras caracterizações. Faremos a demonstração do teorema. Para tal necessitamos da definição e dos lemas a seguir.

Um subconjunto H de vértices de um grafo G é um *conjunto homogêneo* se

- $Adj(v) \cap H = H$ ou $Adj(v) \cap H = \phi$, para todo $v \in V \setminus H$

- $|H| \geq 2$ e $|G \setminus H| \geq 1$.

Observe que a segunda condição é necessária para que o conceito não seja trivial.

O grafo $K_{1,3}$ (Figura 2.8) contém conjuntos homogêneos enquanto C_5 não os contém.

A operação de *substituição* constrói a partir de dois grafos disjuntos G e H e um vértice v de G , um novo grafo G' da seguinte maneira:

Considere a união disjunta dos grafos $G \setminus v$ e H e, para cada par de vértices $\{w, z\}$ com $w \in G \setminus v$ e $z \in H$, adicione a aresta $(w, z) \in A(G')$ se e somente se $(v, w) \in A$.

A Figura 2.12 apresenta um grafo obtido por substituição de um vértice por um caminho induzido com três vértices num ciclo induzido com quatro vértices.

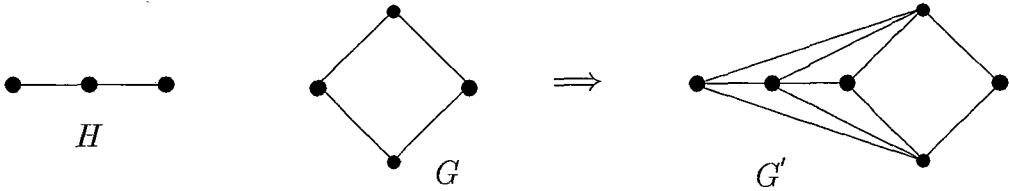


Figura 2.12: Substituição

O lema a seguir mostra que um grafo de comparabilidade pode ser obtido por substituição a partir de dois outros grafos de comparabilidade.

Lema 2.3 *Se G' é um grafo obtido por substituição de dois grafos de comparabilidade G e H , então G' é grafo de comparabilidade.*

Dem.: Sejam G e H dois grafos de comparabilidade e considere G' obtido pela substituição de algum vértice x de G por H .

Sendo G e H grafos de comparabilidade, admitem orientações transitivas \vec{G} e \vec{H} , respectivamente.

Construa uma orientação \vec{G}' para G' , orientando a aresta (u, v) de u para v ($u \rightarrow v$) se:

- $u \in G, v \in H$ e $u \rightarrow x$ em \vec{G} ;
- $v \in G, u \in H$ e $x \rightarrow v$ em \vec{G} ;
- $u, v \in G$ e $u \rightarrow v$ em \vec{G} ;
- $u, v \in H$ e $u \rightarrow v$ em \vec{G} .

Verificar que a orientação \vec{G}' assim obtida é transitiva é fácil. \triangle

Lema 2.4 *Se três vértices formam um triângulo orientado em uma orientação semi-transitiva de um grafo, então o grafo não admite vértices adjacentes a exatamente um vértice do triângulo.*

Dem.: Considere um triângulo com vértices u, v, w em um grafo G , com as arestas orientadas de u para v , v para w e w para u na orientação semi-transitiva \vec{G} de G .

Considere um vértice x adjacente a u , mas não a v nem a w .

Pela semi-transitividade de \vec{G} , a aresta não pode estar orientada nem de x para u (pois, caso contrário, existiria a aresta (x, v)), nem de u para x (pois, caso contrário, existiria a aresta (x, w)). (Veja Figura 2.13.)

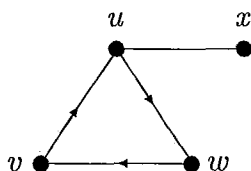


Figura 2.13: Um triângulo orientado.

Mas (x, u) é uma aresta de G , logo, uma dessas possibilidades ocorre. Portanto, nenhum vértice de G é adjacente a exatamente um vértice do triângulo. \triangle

A técnica para a demonstração do Teorema 2.17 é dividi-lo em duas partes: uma, se G contiver um conjunto homogêneo e outra, se G não o contiver. No primeiro caso, uma orientação transitiva será construída. No segundo, mostraremos que a orientação semi-transitiva é, na verdade, transitiva.

Demonstração do Teorema 2.17:

(\implies) Claramente, toda orientação transitiva é semi-transitiva.

(\impliedby) Suponha que um grafo G admite uma orientação semi-transitiva.

Consideramos dois casos:

Caso 1: G contém um conjunto homogêneo H .

Provaremos, este caso, por indução no número de vértices de G .

Se G possuir um único vértice, G é grafo de comparabilidade.

Seja G um grafo que admite uma orientação semi-transitiva \vec{G} e suponhamos, por hipótese de indução, que todo subgrafo induzido próprio de G é de comparabilidade.

Seja $x \in H$ e considere os subgrafos próprios de G : $(G \setminus H) \cup x$ e H . Ambos são subgrafos induzidos próprios de G . Logo admitem orientação semi-transitiva. Ainda, G pode ser obtido desses dois subgrafos pela substituição de x por H em

$(G \setminus H) \cup x$. Por, hipótese de indução, são grafos de comparabilidade. Logo, pelo Lema 2.3, G é grafo de comparabilidade.

Caso 2: G não contém conjunto homogêneo.

Se não existir triângulos orientados em \vec{G} , então \vec{G} é uma orientação transitiva e G é grafo de comparabilidade.

Suponha que existe um triângulo orientado T com vértices u, v, w em \vec{G} .

Pelo Lema 2.4, G não contém vértices adjacentes a exatamente um dos vértices de T . Se G não contiver vértices adjacentes a exatamente dois dos vértices de T , T será um conjunto homogêneo de G . Contradição. Então, existe um vértice x de G que é adjacente a exatamente dois vértices de T . Sem perda de generalidade, suponha que x é adjacente a u e v e não é adjacente a w .

Pela semi-transitividade de \vec{G} , temos que $v \rightarrow x$ e $x \rightarrow u$ (pois, $(x, w) \notin A$ e $v \rightarrow w, w \rightarrow u$, respectivamente).

Sejam $X = \{y \mid y \text{ é adjacente a ambos } u \text{ e } v\}$ e $Y = \{y \mid v \rightarrow y \text{ e } y \rightarrow u\}$.

Mostraremos que Y é um conjunto homogêneo em G .

Observe que $|Y| \geq 2$, pois x e w pertencem a Y . Além disso, $Y \neq V$, pois u e v não pertencem a Y e são vértices de G .

Todo vértice de $X \setminus Y$ é adjacente a todo vértice de Y , novamente pela semi-transitividade de \vec{G} .

Se demonstrarmos que todo vértice de $G \setminus X$ ou é adjacente a todo vértice de Y ou não é adjacente a todo vértice de Y , teremos que Y é um conjunto homogêneo de G .

Suponha que $a \in G \setminus X$ é adjacente a y_1 de Y e não o é a y_2 de Y . Mas, pelo Lema 2.4, a não é adjacente a exatamente um vértice do triângulo com vértices u, v, y_1 . Portanto, a é adjacente a exatamente um dentre u, v . Dessa forma, a é adjacente a exatamente um vértice do triângulo orientado de vértices u, v, y_2 , o que contradiz o Lema 2.4.

Logo, Y é um conjunto homogêneo de G , o que contradiz a hipótese deste caso.

Portanto, \vec{G} não possui triângulos orientados e, então, G é grafo de comparabilidade. \triangle

Dessa forma, pelo Teorema 2.17, para decidir se G é um grafo de comparabilidade, basta verificar se G admite uma orientação semi-transitiva. Daremos, então, uma condição necessária e suficiente para um grafo admitir uma orientação semi-transitiva, que conduzirá a um algoritmo polinomial para o reconhecimento da classe.

Denotamos, nesta seção, uma aresta incidente a x e y orientada de x para y por \vec{xy} .

Definimos uma relação R sobre as arestas orientadas de G como:

$$\vec{ab} R \vec{ab}$$

$$\vec{ab} R \vec{cd} \text{ se e somente se}$$

- $a = c$, $b \neq d$ e as arestas de G , (b, c) e (c, d) formam um caminho induzido com três vértices em G , ou
- $a \neq c$, $b = d$ e as arestas de G , (a, b) e (b, c) formam um caminho induzido com três vértices em G .

A relação R está representada na Figura 2.14.



Figura 2.14: Uma representação da relação R sobre as arestas orientadas de G .

Seja $E(\vec{ab})$ a classe de equivalência das arestas orientadas sob o fecho transitivo R^* de R que contém a aresta \vec{ab} . Seja $\bar{E}(\vec{ab})$ o conjunto cujos elementos são as arestas de $E(\vec{ab})$ mas sem a orientação.

Observação 2.1 *A aresta \vec{xy} pertence a $E(\vec{ab})$ se e somente se $\vec{yx} \in E(\vec{ba})$. Então $\bar{E}(\vec{ab}) = \bar{E}(\vec{ba})$.*

Lema 2.5 *O grafo G tem uma orientação semi-transitiva se e somente se para cada aresta (a, b) de G , $\vec{ba} \notin E(\vec{ab})$.*

Para verificar a condição do Lema 2.5, primeiro construímos um grafo $F(G)$. Para cada aresta (a, b) de G , $F(G)$ tem dois vértices $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$. Dois vértices de $F(G)$, $\{a, b\}$ e $\{c, d\}$ são adjacentes se e somente se $\vec{ab} R \vec{cd}$.

Então, os componentes conexos de $F(G)$ correspondem às classes de equivalência definidas por R . Logo, $b \rightarrow a$ pertence a $E(a \rightarrow b)$ se e somente se $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ pertencem ao mesmo componente conexo de $F(G)$.

Portanto, para verificar se \vec{G} é uma orientação semi-transitiva, é necessário construir $F(G)$, determinar seus componentes conexos e verificar, para cada vértice $\{a, b\}$ de $F(G)$, se $\{a, b\}$ e $\{b, a\}$ pertencem ao mesmo componente. Isto pode ser feito em tempo $O(\delta |A|)$, onde δ é o maior grau de um vértice em G .

A caracterização dos grafos de comparabilidade dada por Ghouila-Houri, origina outra caracterização, também, deles e de Gilmore e Hoffmam.

Um *caminho fechado* de um grafo G é uma seqüência de vértices v_1, v_2, \dots, v_k de G , não necessariamente distintos, tal que $(v_i, v_{i+1}) \in A$, para $1 \leq i \leq k-1$ e a aresta (v_k, v_1) é também uma aresta de G , e não existe nenhum par de vértices a e b onde $a = v_i = v_j$ e $b = v_{i+1} = v_{i+j}$, e $a = v_i = v_k$ e $b = v_{i+1} = v_1$, para $i \neq j$ e $i, j \leq k$. Um caminho fechado é *ímpar* se k for um número ímpar. Uma *corda triangular* de um caminho fechado v_1, v_2, \dots, v_k de G é qualquer aresta do tipo (v_i, v_{i+2}) para $1 \leq i \leq k-2$, (v_{k-1}, v_1) ou (v_k, v_2) .

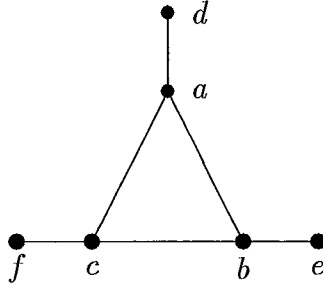


Figura 2.15: Um grafo que não é grafo de comparabilidade.

Note que caminhos fechados podem possuir vértices repetidos. Na Figura 2.15, $d, a, b, e, b, c, f, c, a$ é um caminho fechado com nove vértices.

Uma forma informal de reconhecer se uma seqüência de vértices não constitui um caminho fechado é verificar se essa seqüência contém pelo menos dois vértices consecutivos que aparecem repetidos na seqüência. Por exemplo, no grafo da Figura 2.15, a seqüência de vértices $d, a, c, b, a, c, b, e, b, a, d$ não é um caminho fechado.

Observe que se algum caminho fechado ímpar sem uma corda triangular ocorrer em um grafo de comparabilidade, então todo par de arestas (v_i, v_j) e (v_j, v_k) é transitivamente orientado, pois (v_i, v_j) e (v_j, v_k) pertencem à mesma classe de equivalência definida pelo fecho transitivo R^* , descrito anteriormente. Mas, somente um caminho fechado par poderá ter sucessivos pares de arestas com orientações opostas. Este argumento prova a necessidade da condição do teorema de Ghouila-Houri e Gilmore e Hoffman.

Mostramos a necessidade da condição do Teorema 2.18, com o intuito de enfatizar a relação deste com o anterior de Ghouila-Houri (Teorema 2.17). A suficiência precisa de diversos lemas para a prova e poderá ser encontrada em [12].

Teorema 2.18 (Ghouila-Houri (62), Gilmore e Hoffman (64)) *Um grafo é grafo de comparabilidade se e somente se cada caminho fechado ímpar possui uma corda triangular.*

Outra caracterização dos grafos de comparabilidade foi devida a Gallai [10], que definiu a seguinte relação entre arestas adjacentes de um grafo:

$(a, b) \sim (a, c)$ se e somente se b e c pertencem ao mesmo componente conexo do subgrafo induzido pelos adjacentes de a em G , no complemento de G .

Uma *coroa* de G é um ciclo $v_1, v_2, \dots, v_k, v_1$ onde todos os v_i são distintos e $(v_i, v_{i+1}) \sim (v_{i+1}, v_{i+2})$ para todo i (módulo k), onde k é o comprimento da coroa.

Na Figura 2.15 temos um exemplo de um grafo onde os vértices a, b, c formam uma coroa. Os ciclos são, também, exemplos de coroas.

Teorema 2.19 (Gallai (67)) *Um grafo é um grafo de comparabilidade se e somente se não contém coroas de comprimento ímpar.*

Através dessa caracterização, Gallai determinou os grafos minimais que não são transitivamente orientáveis. São os grafos que contém uma coroa ímpar e são minimais em relação a esta propriedade. Ou, dizendo de outra forma, são os grafos que não admitem uma orientação transitiva, mas todo subgrafo próprio admite. Em seu artigo [10], Gallai apresenta essa família.

Outros algoritmos que constroem uma orientação transitiva em um grafo G , caso existam, são encontrados em [12], [13], [25]. Neles, uma aresta é orientada arbitrariamente, e a orientação das demais arestas do grafo é feita através do conceito de orientação "forçada". É interessante observar que este conceito é originado da relação R definida para o algoritmo de Ghouila-Houri. A complexidade destes algoritmos é $O(\delta | A |)$.

Um algoritmo de complexidade $O(n^2)$, que orienta transitivamente um grafo, quando a orientação transitiva existe para esse grafo pode ser encontrado em [31].

O número de orientações transitivas de um grafo de comparabilidade rotulado pode ser exponencial. Em um grafo completo K_n , existem $n!$ orientações transitivas. Observe que para esta contagem considera-se um grafo rotulado.

Uma classe especial de grafos de comparabilidade rotulados é aquela cujos elementos possuem exatamente duas orientações transitivas, uma orientação inversa da outra.

Möhring [21] mostra que o número de grafos de comparabilidade que possuem uma única orientação transitiva é muito grande.

Shevrin e Filippov [30], Trotter, Moore e Summer [37], caracterizaram essa classe de grafos de comparabilidade que possuem uma única orientação transitiva.

Teorema 2.20 (Shevrin e Filippov (70), Trotter, Moore e Summer (76))
Um grafo rotulado G possui uma única orientação transitiva (a menos de inversa) se e somente se todo conjunto homogêneo de G é um conjunto independente.

Usaremos, posteriormente, este teorema.

Uma boa referência para o estudo de orientações transitivas é a tese de V. Tardif [36].

Capítulo 3

Localização de Fontes e Sumidouros em Grafos de Comparabilidade

Consideramos o estudo de orientações transitivas de um grafo através de uma abordagem diferente das tradicionais.

É sempre possível atribuir às arestas de G uma orientação, \vec{G} , originando um grafo orientado.

Usando essencialmente a caracterização da classe dos grafos de comparabilidade feita por Gilmore e Hoffman [12] e Ghouila-Houri [11], encontramos em [10], [11], [12], [13], [25], algoritmos polinomiais que constroem uma orientação transitiva, se o grafo for de comparabilidade. Um algoritmo de complexidade $O(n^2)$ onde n é o número de vértices do grafo, foi apresentado por Spinrad [31] em 1985.

Nossa abordagem difere da tradicional, pois estamos preocupados em particionar, de uma certa forma, os vértices de um grafo de comparabilidade e encontrar condições a que esses vértices devam satisfazer para que se tornem fontes e sumidouros de uma orientação transitiva arbitrária. A orientação transitiva, quando obtida, é um subproduto tendo em vista nosso objetivo.

Em outras palavras, nossa proposta é localizar as fontes e sumidouros de uma orientação transitiva arbitrária. *Localizar* significa conhecer quais elementos de uma partição do conjunto de vértices, poderão conter as fontes e sumidouros de uma orientação transitiva. Mostraremos que podem existir vértices, em um grafo, que não serão nem fontes nem sumidouros em nenhuma orientação transitiva.

3.1 Preliminares

Sejam $G(V, A)$ um grafo arbitrário, M_1, \dots, M_l , as cliques maximais de G , $V(M_i)$, $A(M_i)$, os conjuntos de vértices e arestas de M_i , para $i = 1, \dots, l$ e $X_l = \{1, 2, \dots, l\}$.

Hamelink [14] definiu uma família de subconjuntos de V , induzida pelas cliques maximais de G , cujos elementos são os conjuntos, V_S , definidos, em destaque a

seguir, para todo subconjunto, não vazio, S , de X_l .

$$V_S = \{v \in V \mid v \in \bigcap_{k \in S} V(M_k) \setminus \bigcup_{k \in X_l \setminus S} V(M_k)\}$$

Notamos que, por definição, V_S denota o conjunto dos vértices de G que pertencem somente à interseção das cliques cujos índices estão no conjunto S .

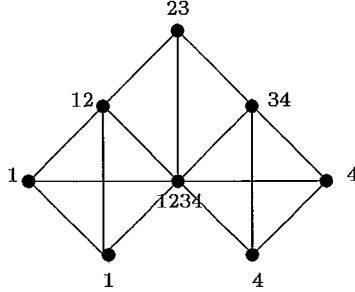


Figura 3.1: A nomeação dos vértices indica a partição clique do grafo.

Para simplificar a notação, escreveremos, simplesmente, $S=123$ e V_{123} para $S = \{1, 2, 3\}$ e $V_{\{1,2,3\}}$, respectivamente.

O exemplo da Figura 3.1, mostra um grafo G com 4 cliques maximais e subconjuntos $S \subseteq X_4$ indicados na própria figura, isto é, se S nomeia um vértice do grafo, queremos dizer que $V_S \neq \emptyset$ e contém o vértice S . Temos, então, os conjuntos $V_1, V_{12}, V_{23}, V_{34}, V_4, V_{1234}$, não vazios e os demais $V_S, S \subset X_4$, vazios.

Hamelink demonstrou que os conjuntos $V_S, S \subseteq X_l$, não vazios, formam uma partição de V e a denominou *partição clique*. Por este motivo, às vezes, nos referimos a V_S como a *região V_S* do grafo.

Observe que a região V_S induz uma clique em G , para qualquer $S \subseteq X_l$.

Com respeito às arestas entre dois vértices distintos, v e w , de V , tal que $v \in V_S$ e $w \in V_T$, onde $S, T \subseteq X_l$, observa-se, por definição, que $(v, w) \in A$ se e somente se $S \cap T \neq \emptyset$. Ou seja, uma aresta entre os conjuntos V_S e V_T , indica que existe pelo menos uma clique maximal em G que contém V_S e V_T . Na Figura 3.1, $V_{12} \cup V_{1234}$ está contida em M_1 e em M_2 .

A partição clique de V é o elemento essencial nesta abordagem para a localização das fontes e sumidouros de uma orientação transitiva de um grafo de comparabilidade.

Na seção 3.2, mostramos que as fontes (os sumidouros) de uma orientação transitiva pertencem a conjuntos da partição clique cujos índices formam uma partição do conjunto X_l .

Na seção 3.3, descrevemos uma condição necessária para a localização das fontes e sumidouros de um grafo de comparabilidade que é grafo clique-completo. Estudamos, também, os casos $l = 2$ e 3 .

Vamos cometer o abuso de confundir o conjunto de vértices de uma clique maximal $V(M)$, com a própria clique maximal. Diremos, então, $v \in M$ ao invés de $v \in V(M)$.

3.2 Uma partição de X_l

A partir desta seção, salvo menção contrária, $G = G(V, A)$ denotará um grafo de comparabilidade; \vec{G} , uma orientação transitiva de G ; s_i , t_i , respectivamente, a fonte e o sumidouro da orientação transitiva induzida por \vec{G} na clique maximal, M_i , para $i = 1, \dots, l$, ou seja, da restrição de \vec{G} a M_i . Nesta seção, as demonstrações feitas considerando-se as fontes de uma orientação transitiva, são análogas, quando consideramos os sumidouros.

O primeiro resultado apresentado considera o caráter global e local das fontes e sumidouros de uma orientação transitiva em relação às cliques maximais de um grafo de comparabilidade.

Teorema 3.1 *Seja $v \in V$, $i \in X_l$ tal que $v \in V(M_i)$. O vértice v é fonte (sumidouro) de \vec{G} se e somente se $v = s_i$.*

Dem.: (\implies) É claro que, se v é fonte de \vec{G} , então v é fonte da restrição de \vec{G} à cada clique maximal, M_i , tal que $v \in V(M_i)$. Logo, $v = s_i$.

(\impliedby) Seja s_i a fonte da restrição de \vec{G} à clique maximal, M_i , $i \in X_l$.

Suponhamos que s_i não é fonte de \vec{G} . Então, existe $v \in V \setminus V(M_i)$ tal que $(s_i, v) \in A$. Além disso, (s_i, v) está orientada de v para s_i , (s_i não é fonte de \vec{G}).

Como s_i é fonte em M_i , para todo $x \in V(M_i)$, a aresta (s_i, x) está orientada de s_i para x .

Logo, pela transitividade de \vec{G} , existe $(v, x) \in A$, para todo $x \in V(M_i)$, contradizendo a maximalidade de M_i . \triangle

Observe que o Teorema 3.1 é válido, se G não for conexo.

Pelo Teorema 3.1, para localizar as fontes e os sumidouros de \vec{G} , basta localizar as fontes e os sumidouros da restrição de \vec{G} a cada clique maximal de G .

Mostraremos que as fontes e os sumidouros de \vec{G} estão em conjuntos da partição clique de V , cujos índices formam uma partição de X_l .

Dada uma orientação transitiva, \vec{G} , denomina-se *atribuição fonte*, Σ , (*atribuição sumidouro*, T) para G , a uma família de subconjuntos, S , de X_l , onde S é o índice dos conjuntos V_S que contêm pelo menos uma fonte (sumidouro) de \vec{G} .

Na Figura 3.2, $\{14, 23\}$ é uma atribuição fonte para G e $\{12, 34\}$ é uma atribuição sumidouro.

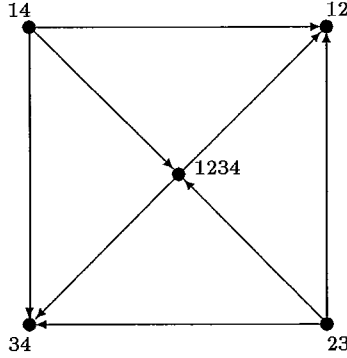


Figura 3.2: $\Sigma = \{14, 23\}$, $\mathcal{T} = \{12, 34\}$.

Lema 3.1 *Uma atribuição fonte, Σ , é uma cobertura para X_l , isto é, $\bigcup_{S \in \Sigma} S = X_l$.*

Dem.: Cada s_i , $i = 1, \dots, l$, pertence a algum V_S , pois $\{V_S, \emptyset \neq S \subseteq X_l\}$ é a partição clique de V .

Logo, por definição de V_S , $i \in S$.

Portanto, $\Sigma = \{S \subseteq X_l \mid V_S \text{ contém pelo menos uma fonte de } \vec{G}\}$, é uma cobertura para X_l . \triangle

Lema 3.2 *Se $S_1, S_2 \in \Sigma$, $S_1 \neq S_2$, então $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.*

Dem.: Se $S_1 \in \Sigma$, por definição de Σ e de V_S , existe $i \in S_1$ com $s_i \in V_{S_1}$. Analogamente, existe $j \in S_2$ com $s_j \in V_{S_2}$. Relembre que as regiões V_{S_1} e V_{S_2} são disjuntas.

Observe que $i \neq j$, pois caso contrário, ter-se-ia uma clique maximal com duas fontes distintas. \triangle

Teorema 3.2 *Uma atribuição fonte (atribuição sumidouro) para G é uma partição de X_l .*

Dem.: A prova segue dos Lemas 3.1 e 3.2. \triangle

Uma característica das fontes (sumidouros) de uma orientação transitiva é que fontes (sumidouros) de cliques distintas, que pertencem a um mesmo conjunto V_S , são coincidentes. Provamos este fato a seguir.

Lema 3.3 *Seja Σ uma atribuição fonte (\mathcal{T} , uma atribuição sumidouro) para G . Se $i, j \in S$, $S \in \Sigma$ ($S \in \mathcal{T}$), então $s_i = s_j \in V_S$ ($t_i = t_j \in V_S$).*

Dem.: Se i, j pertencem a um mesmo elemento $S \in \Sigma$, então i, j pertencem a um único S em Σ , pois Σ é uma partição de X_I . Logo, por definição de atribuição fonte, s_i e s_j pertencem a V_S .

Suponha que $s_i \neq s_j$. Tem-se, então, que dois vértices distintos, fontes de cliques maximais distintas, M_i e M_j , pertencem a $M_i \cap M_j$, pois $i, j \in S$, $s_i, s_j \in V_S$ e $V_S = \{v \mid v \in \bigcap_{k \in S} V(M_k) \setminus \bigcup_{k \in X_I \setminus S} V(M_k)\}$.

Logo, $(s_i, s_j) \in A$. Portanto, ou s_i ou s_j não é fonte de \vec{G} , contradizendo o Teorema 3.1. \triangle

Observe, na Figura 3.2, que o vértice nomeado 14, e pertencente a V_{14} é a fonte das cliques maximais M_1 e M_4 .

Mas uma partição de X_I não é, necessariamente, uma atribuição fonte (atribuição sumidouro) para G . Isto é, dada uma partição P de X_I não é sempre possível construir uma orientação transitiva \vec{G} tal que as fontes (os sumidouros) de \vec{G} pertençam a V_S , com $S \in P$. A Figura 3.3 exhibe um grafo de comparabilidade G uma partição $P = \{2, 3, 14\}$ com V_2, V_3, V_{14} , não vazios, e P não é uma atribuição fonte para G . (É claro que se $S \in P$, com $V_S = \phi$, P não seria uma atribuição fonte para G .) Temos, então, que podem existir vértices, em um grafo, que não serão fontes nem sumidouros de nenhuma orientação transitiva.

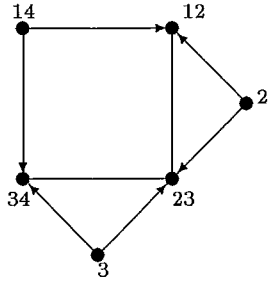


Figura 3.3: A partição $P = \{2, 3, 14\}$ não é uma atribuição fonte para G .

Portanto, a condição que obtivemos para a localização das fontes e sumidouros de uma orientação transitiva de um grafo de comparabilidade não é uma condição suficiente.

3.3 Uma relação entre fontes e sumidouros

Em primeiro lugar, observe que, *pertencer aos conjuntos V_S cujos índices formam uma partição de X_I* , continua condição apenas necessária para a localização de fontes

e sumidouros de uma orientação transitiva em um grafo de comparabilidade que é um grafo clique-completo. O grafo da Figura 3.3, acrescido de um vértice adjacente a todos os vértices do grafo, e a partição P da mesma figura é um exemplo.

Estamos interessados, agora, nas relações existentes entre as atribuições fonte e sumidouro. Vamos estudá-las na classe dos grafos de comparabilidade que são grafos clique-completos.

Dada uma orientação transitiva, \vec{G} , uma *atribuição fonte-sumidouro* para G é um par (Σ, \mathcal{T}) , onde o primeiro elemento do par é uma atribuição fonte e o segundo, uma atribuição sumidouro para G .

Observe que, nem sempre um par (Σ, \mathcal{T}) , onde Σ é uma atribuição fonte e \mathcal{T} é uma atribuição sumidouro, é uma atribuição fonte-sumidouro para G . A Figura 3.4 acrescida de um vértice universal, mostra um grafo que admite como atribuição fonte, $\{12, 34\}$, $\{14, 23\}$ ou $\{1234\}$ e atribuição sumidouro, $\{1234\}$, $\{14, 23\}$ ou $\{12, 34\}$, mas o par $(\{12, 34\}, \{12, 34\})$ não é uma atribuição fonte-sumidouro para o grafo, enquanto os pares $(\{12, 34\}, \{1234\})$, $(\{14, 23\}, \{1234\})$, o são.

Mostramos, no Lema 3.4, que existe aresta entre as fontes e os sumidouros de quaisquer duas cliques maximais de um grafo de comparabilidade que é clique-completo. Este lema nos conduzirá a uma condição necessária para que um par (Σ, \mathcal{T}) seja uma atribuição fonte-sumidouro para um grafo clique-completo.

Lema 3.4 *Seja G um grafo com $K(G) = K_l$. Sejam s_i, t_i , a fonte e o sumidouro de $M_i, i = 1, \dots, l$. Então $(s_i, t_j) \in A$, para todo $1 \leq i, j \leq l$.*

Dem.: Sejam s_i, t_j , fonte e sumidouro de arbitrários $M_i, M_j, 1 \leq i, j \leq l$.

Sendo $K(G) = K_l$, então existe $v \in M_i \cap M_j$.

Se s_i ou t_j pertencer à $M_i \cap M_j$, então $(s_i, t_j) \in A$.

Suponha que nem s_i nem t_j pertencem a $M_i \cap M_j$. Mas, (s_i, v) e (v, t_j) são arestas de G e, pela transitividade de \vec{G} , $(s_i, t_j) \in A$. Δ

O Teorema 3.3 segue diretamente do Lema 3.4 e da observação (veja página 30) de que os conjuntos, V_S e V_T , que contêm os extremos de uma aresta de G , possuem interseção não vazia.

Teorema 3.3 *Seja G com $K(G) = K_l$. Uma atribuição fonte-sumidouro (Σ, \mathcal{T}) para G satisfaz $S_i \cap T_j \neq \phi$, para todo $1 \leq i, j \leq l$ e $S_i \in \Sigma, T_j \in \mathcal{T}$.*

Dem.: Δ

Qualquer atribuição fonte-sumidouro para C_4 , satisfaz a condição do Teorema 3.3 e C_4 não é um grafo clique-completo. A condição desse teorema é, realmente, apenas necessária.

Algumas conseqüências do Teorema 3.3 para $l = 2$ e 3 serão mostradas a seguir.

Duas orientações, \vec{G}_1 e \vec{G}_2 , de G são *simétricas*, se toda aresta, (u, v) , de G , cuja orientação é de u para v (v para u) em \vec{G}_1 , tiver orientação de v para u (u para v)

em \vec{G}_2 . Além disso, dois pares (Σ, \mathcal{T}) e (\mathcal{T}, Σ) que são atribuição fonte-sumidouro para G serão denominados *simétricos*.

Corolário 3.1 *Seja G tal que $K(G) = K_2$.*

O par (Σ, \mathcal{T}) é uma atribuição fonte-sumidouro para G se e somente se

- (i) $\Sigma = \{12\}$ e $\mathcal{T} = \{1, 2\}$, ou*
- (ii) $\Sigma = \{1, 2\}$ e $\mathcal{T} = \{12\}$, ou*
- (iii) $\Sigma = \{12\}$ e $\mathcal{T} = \{12\}$.*

Dem.: Observe, primeiramente, que se $K(G) = K_2$, os conjuntos V_1, V_2, V_{12} são não vazios.

(\implies) Os itens (i), (ii) e (iii) seguem diretamente dos Teoremas 3.2 e 3.3.

(\impliedby) Sejam M_1 e M_2 as cliques maximais de G . Construamos \vec{G} para (Σ, \mathcal{T}) satisfazendo (i) ou (iii). (A orientação que satisfaz o item (ii) é a simétrica da construída para o item (i).)

Se considerarmos (i), temos que $s_1 \in G[V_{12}] = M_1 \cap M_2, t_1 \in G[V_1], t_2 \in G[V_2]$, se (iii), s_1, s_2, t_1, t_2 pertencem à $M_1 \cap M_2$ e, pelo Lema 3.3, $s_1 = s_2$ e $t_1 = t_2$.

Considere as cliques geradas por V_1, V_2, V_{12} e as oriente transitivamente de acordo com o item considerado (i) ou (iii). Oriente, também, as arestas com, pelo menos, um dos extremos igual a s_1, s_2, t_1, t_2 .

Oriente, finalmente, todas as arestas entre os conjuntos V_1, V_2 e V_{12} com, pelo menos, um dos extremos distinto de s_1, s_2, t_1, t_2 , com extremidade inicial em V_{12} ou todas, com extremidade final em V_{12} .

É fácil ver que \vec{G} é uma orientação transitiva para G nos casos (i) e (iii). \triangle

Pelo Teorema 3.3 tem-se que se $l = 3$, todos os pares formados por partições de X_3 , onde um dos elementos é 123, são os candidatos à atribuição fonte-sumidouro de G .

Hamelink [14] provou que um grafo H , com 3 cliques maximais, possui $K(H) = K_3$ se e somente se $V_{123} \neq \phi$.

O Corolário 3.2 segue, diretamente, das observações anteriores.

Corolário 3.2 *Seja G um grafo tal que $K(G) = K_3$. Então para toda orientação transitiva, \vec{G} , de G existe um vértice v em V_{123} , tal que v ou é fonte ou é sumidouro \vec{G} .*

Uma caracterização para uma atribuição fonte-sumidouro de um grafo de comparabilidade, com $K(G) = K_3$, será dada no Corolário 3.3.

Observação 3.1 *Se $K(G) = K_3$ então pelo menos um dos conjuntos V_{12}, V_{13}, V_{23} , é vazio.*

De fato, se V_{12}, V_{13}, V_{23} fossem não vazios, o grafo gerado pelos vértices pertencentes à união de V_{12}, V_{13}, V_{23} formariam uma clique, M , que não está contida

em nenhuma das cliques maximais de G . Logo, M seria uma clique maximal de G , distinta de M_i , $i = 1, 2, 3$, e além disso, M intersectaria M_i , $i = 1, 2, 3$, o que resultaria em $K(G) = K_4$. Δ

Portanto, sem perda de generalidade, podemos assumir $V_{23} = \phi$. Observe que, se $K(G) = K_3$, então os conjuntos V_1, V_2, V_3 e V_{123} são não vazios. Portanto, os possíveis conjuntos vazios para G , com $K(G) = K_3$, são V_{12} e V_{13} .

O corolário a seguir caracteriza as atribuições fonte-sumidouro para G com $K(G) = K_3$, considerando os casos onde as regiões V_{12} e V_{13} são vazias ou não.

Corolário 3.3 *Seja G tal que $K(G) = K_3$.*

O par (Σ, \mathcal{T}) é uma atribuição fonte-sumidouro para G se e somente se

$$(\Sigma, \mathcal{T}) = \begin{cases} (i) \text{ ou } (iv), & \text{se } V_{12} = \phi \text{ e } V_{13} = \phi \\ (i), \text{ ou } (iii), \text{ ou } (iv), & \text{se } V_{12} = \phi \\ (i), \text{ ou } (ii), \text{ ou } (iv), & \text{se } V_{13} = \phi \\ (ii), \text{ ou } (iii), \text{ ou } (iv), & \text{se não ocorrer algum dos casos anteriores.} \end{cases}$$

onde

- (i) $\Sigma = \{123\}$, $\mathcal{T} = \{1, 2, 3\}$;
- (ii) $\Sigma = \{123\}$, $\mathcal{T} = \{3, 12\}$;
- (iii) $\Sigma = \{123\}$, $\mathcal{T} = \{2, 13\}$;
- (iv) $\Sigma = \{123\}$, $\mathcal{T} = \{123\}$;
- (v) *simétricos em cada item.*

Dem.: (\implies) Do Teorema 3.3 e Observação 3.1 tem-se que os possíveis pares atribuição fonte-sumidouro para G são os listados nos itens (i) a (iv).

Se V_{12} e V_{13} são vazios tem-se, naturalmente, válidos (i) e (iv). Se V_{12} (V_{13}) é vazio, são válidos (i), (iii) e (iv) ((i), (ii) e (iv)). Agora, se ambos são não vazios tem-se que (i) não ocorre, pois G possui, pelo menos, um caminho induzido com vértices em V_2 , V_{12} , V_{13} , e V_3 e arestas entre V_2 e V_{12} e, V_3 e V_{13} orientadas de V_2 para V_{12} e de V_3 para V_{13} . Portanto, não existe uma orientação transitiva para G com atribuição fonte-sumidouro satisfazendo (i). (Veja Figura 3.4.)

(\impliedby) Construamos \vec{G} , para (Σ, \mathcal{T}) satisfazendo (ii) ou (iii) ou (iv), isto é, quando $V_{12} \neq \phi$ e $V_{13} \neq \phi$.

Considere as cliques geradas por $V_1, V_2, V_3, V_{12}, V_{13}, V_{123}$ e as oriente transitivamente obedecendo ao item (ii), (iii) ou (iv) considerado.

Considere as arestas cujos extremos estão entre os conjuntos $V_1, V_2, V_3, V_{12}, V_{13}$. Oriente-as com extremo inicial nos vértices de V_{12} e extremo final nos de V_{13} , se o item (iii) estiver sendo considerado, e para o item (ii), considere a orientação simétrica construída no item (iii).

Oriente todas as arestas com um dos extremos em vértices de V_{123} com extremidade inicial nos vértices de V_{123} , se se estiver considerando (ii) ou (iii). No caso

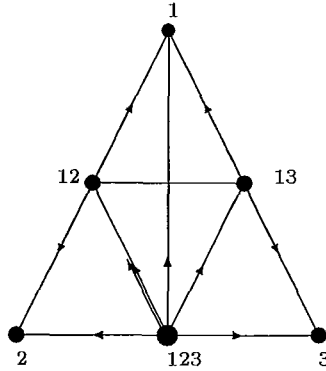


Figura 3.4: O par $(\{123\}, \{1, 2, 3\})$ não é uma atribuição fonte-sumidouro para o grafo G com $K(G) = K_3$.

(iv), escolha um vértice de V_{123} para sumidouro e oriente as demais arestas como nos itens (ii) ou (iii).

Observe que se considerarmos nas construções acima V_{12} , ou V_{13} , ou V_{12} e V_{13} , vazios, teremos construído orientações transitivas onde (Σ, \mathcal{T}) satisfaz (i) ou (iii) ou (iv); (i) ou (ii) ou (iv) e, (i) ou (iv), respectivamente. \triangle

A Figura 3.5 é um exemplo de uma orientação transitiva dada pelo Corolário 3.3 para $\Sigma = \{123\}$ e $\mathcal{T} = \{13, 2\}$, se $V_{13} \neq \phi$ e $\Sigma = \{123\}$ e $\mathcal{T} = \{1, 2, 3\}$, caso contrário.

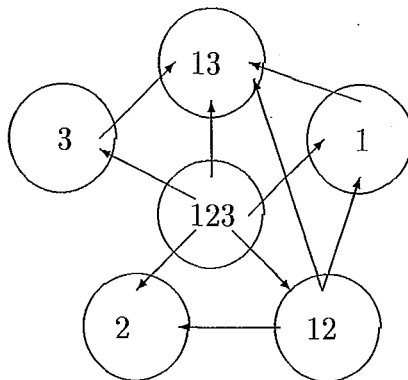


Figura 3.5: Uma orientação transitiva.

A análise dos casos particulares $l = 2$ e 3 nos fornece os seguintes resultados.

Corolário 3.4 *Todo grafo clique-completo com 2 ou 3 cliques maximais é de comparabilidade.*

Por outro lado, a Figura 1.1 mostra um grafo clique-completo (a pirâmide) com 4 cliques maximais que não é um grafo de comparabilidade, o que mostra que o Corolário 3.4 é o melhor possível.

Capítulo 4

Grafos Indiferença Clique-completos

A relação encontrada, no capítulo anterior, de que existe uma aresta entre fontes e sumidouros de quaisquer duas cliques maximais, se o grafo for grafo clique-completo, nos conduziu ao estudo da classe dos grafos clique-completos.

Em particular, estamos interessados na classe dos grafos indiferença clique-completos e mostraremos que os elementos desta classe são grafos de comparabilidade. Como um subproduto, apresentaremos uma atribuição fonte-sumidouro para essa classe e mostraremos como construir uma orientação transitiva, quando uma atribuição fonte-sumidouro for conhecida.

Para atingir esse objetivo, na seção 4.1, mostraremos a equivalência existente entre as definições: grafo quociente, grafo reduzido, encontradas na literatura (capítulo 2) e a que usaremos com base na partição clique de um grafo.

Na seção 4.2, mostraremos uma ordem linear sobre as regiões de um grafo indiferença que é clique-completo, que podemos informalmente dizer que é um refinamento da ordem linear sobre as cliques maximais do grafo, no sentido de que os elementos desta ordem estão contidos nos da outra. Dessa forma, a ordem indiferença sobre V é um refinamento das duas anteriores.

A seguir, mostraremos que todo grafo indiferença que é clique-completo é de comparabilidade. Para tal, exibiremos um algoritmo que constrói todas as orientações transitivas de um grafo indiferença clique completo sem vértices gêmeos. Observamos que nem a classe dos grafos clique-completos, nem a dos grafos indiferença estão contidas na dos grafos de comparabilidade.

Posteriormente, na seção 4.3, apresentaremos uma atribuição fonte-sumidouro para um grafo indiferença clique-completo, e finalmente, na seção 4.4 daremos uma caracterização de um grafo indiferença clique-completo, que conduz à construção de uma orientação transitiva, se uma atribuição fonte-sumidouro for conhecida.

4.1 Preliminares

Dado um grafo indiferença G , sabemos pelo Teorema 2.13 que G possui uma ordem indiferença sobre V . Ainda pela prova do referido teorema, vemos que a ordem indiferença induz uma ordem linear \prec sobre as cliques maximais de G que satisfaz a condição do Teorema 2.12 de Gilmore e Hoffman. Sabemos, pelo Corolário 2.2 que esta ordem é única (a menos da inversa).

Observe que a unicidade está restrita aos grafos indiferença, pois para o grafo $K_{1,3}$ (Figura 2.8), que é um grafo de intervalo reduzido, mas não é indiferença, qualquer permutação de suas três cliques maximais, é uma ordem linear das cliques maximais de G e satisfaz a condição do Teorema 2.12.

Sejam $G = G(V, A)$ um grafo e $\mathcal{P} = \{V_S, S \subseteq X_l, S \neq \phi\}$ a partição clique de V . O grafo G^+ é o grafo onde $V(G^+) = \{V_S, S \subseteq X_l, S \neq \phi\}$, e (V_{S_1}, V_{S_2}) é uma aresta de G^+ se e somente se $S_1 \cap S_2 \neq \phi$.

A Figura 4.1 mostra um grafo G e o seu grafo G^+ .

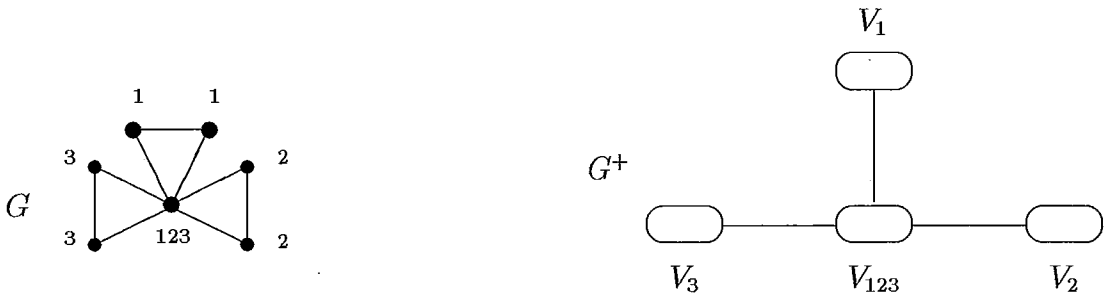


Figura 4.1: Os grafos G e G^+ .

O lema a seguir, relaciona os grafos quociente G^* e G^+ .

Lema 4.1 *Dois vértices de um grafo são gêmeos se e somente se pertencem ao mesmo elemento da partição clique do grafo.*

Dem.: Sejam G um grafo e x e y dois vértices distintos de G .

(\Leftarrow) Suponha que x e y pertencem à mesma região V_S da partição clique de G .

Então, $(x, y) \in A$ e $Adj(x) \cup \{x\} = Adj(y) \cup \{y\}$, logo x e y são vértices gêmeos.

(\Rightarrow) Suponha x e y vértices gêmeos de G tal que $x \in V_S$ e $y \in V_{S_1}$, com $S \neq S_1$.

Como $(x, y) \in A$ então $S \cap S_1 \neq \phi$. Logo, ou $S \subset S_1$, ou $S_1 \subset S$ ou existe $i \neq j$ tal que $i \in S \setminus S_1$ e $j \in S_1 \setminus S$.

Em qualquer dos casos, existe um elemento k pertencente a exatamente um dentre S e S_1 . Sem perda de generalidade, suponha $k \in S \setminus S_1$.

Mas, $x \in V_S$, logo, $Adj(x) = \{v \in V \mid v \in \bigcup_{i \in S} M_i\}$.

Portanto, x é adjacente aos vértices da clique maximal M_k de G e y não o é, o que contradiz o fato de x e y serem vértices gêmeos. \triangle

Corolário 4.1 *Seja G um grafo. Então $G^+ \cong G^*$.*

Dem.: De fato, existem as bijeções $\Gamma : V(G^+) \rightarrow V(G^*)$, definida por $\Gamma(V_S) = [x]$, onde $x \in V_S$, e $\Theta : A(G^+) \rightarrow A(G^*)$, definida por $\Theta(V_{S_1}, V_{S_2}) = ([x], [y])$ que preservam adjacências.

$((V_{S_1}, V_{S_2}) \in A(G^+) \iff$

$S_1 \cap S_2 \neq \emptyset \iff$

existe $i \in S_1 \cap S_2 \iff$

existem $x \in V_{S_1}$ e $y \in V_{S_2}$ tal que $(x, y) \in M_i$,

M_i alguma clique maximal de G , \iff

$([x], [y]) \in A(G^*).$ \triangle

Corolário 4.2 *Seja G um grafo. Então H é um subgrafo reduzido de G se e somente se os elementos da partição clique de H são unitários.*

Dem.: O subgrafo H é reduzido \iff

$H \cong G^* \iff$

H não possui vértices gêmeos \iff

os elementos da partição clique de H são unitários. \triangle

Observe que a partição clique de G e a de todo subgrafo reduzido de G é formada por regiões V_S que possuem o mesmo índice S , ou seja, possuem a mesma partição clique. Além disso, todos os subgrafos reduzidos de G são isomorfos. Portanto, se G possui l cliques maximais o subgrafo reduzido de G será denotado por G_l . O grafo G_3 do grafo G da Figura 4.1 é isomorfo à $K_{1,3}$.

Apenas para enfatizar, lembramos que pelo Corolário 4.2 todos os elementos da partição clique de G_l são unitários.

No contexto deste trabalho, a partição clique de um grafo assume um papel essencial. Este fato nos levou a demonstrar as equivalências entre as definições encontradas na literatura (grafo quociente, grafo reduzido) e as que iremos usar (G^+ , G_l). Principalmente, a notação G_l (que usaremos com a denominação grafo reduzido) é muito conveniente, pois indica o número de cliques maximais do grafo e veremos posteriormente auxilia a relembrar os elementos da partição clique quando o grafo é indiferença clique-completo.

É imediato que se G é um grafo clique-completo, todo subgrafo reduzido de G também o é.

Relembrando que todo subgrafo de grafo indiferença é grafo indiferença, podemos nos limitar a aqueles que são reduzidos.

4.2 Grafos indiferença clique-completos

Nosso interesse é a classe dos grafos clique-completos que são indiferença.

O primeiro lema desta seção mostra que os grafos pertencentes a essa classe possuem um vértice universal. Este é um resultado encontrado na literatura, já que a classe dos grafos indiferença é uma subclasse da classe dos grafos Helly [15]. Na verdade o que encontramos em [15] é mais abrangente: Todo grafo de intervalo é grafo Helly.

Lema 4.2 *Todo grafo de intervalo que é clique-completo possui um vértice universal.*

Dem.: \triangle

A classe dos grafos de intervalo pode ser caracterizada pela interseção das classes dos grafos triangularizados e a dos grafos cujo complementar é um grafo de comparabilidade (Teorema 2.16). É interessante observar que um grafo triangularizado que é também grafo clique-completo não possui, necessariamente, um vértice universal. A pirâmide (Figura 1.1) é um grafo triangularizado e clique-completo que não contém um vértice universal.

Informalmente, uma ordem linear sobre V dispõe os vértices sobre uma reta de tal forma que é possível associar a cada vértice de G um número natural.

Considere G um grafo indiferença, $<$ a ordem indiferença para G e \prec a ordem das cliques maximais de G induzida pela ordem indiferença.

O Teorema 4.1 identifica as regiões de um grafo indiferença clique-completo, isto é, sua partição clique. Como um subproduto, origina uma ordem linear sobre a partição clique.

Até o final deste capítulo, denotamos $V_{12\dots l}$ por $V_{\{1,2,\dots,l\}}$ e $S = 12\dots l$ por $S = \{1,2,\dots,l\}$, mas manteremos $V_{12\dots l}$ e $S = 12\dots l$ nas figuras.

Teorema 4.1 *Um grafo G é grafo indiferença clique-completo com l cliques maximais se e somente se os únicos subconjuntos S de X_l com $V_S \neq \phi$ são:*

$\{1\}, \{1,2\}, \dots, \{1,2,\dots,l-1\}, \{1,2,\dots,l\}, \{2,\dots,l\}, \{3,\dots,l\}, \dots, \{l-1,l\}, \{l\}.$

Dem.: (\implies) Seja G um grafo indiferença clique-completo com l cliques maximais. Então G admite uma ordem indiferença $<$ e, pelo Lema 4.2, $V_{\{12\dots l\}} \neq \phi$.

Sejam v_i e w_i , o primeiro e último vértices de M_i na ordem indiferença. Observe que $v_1 < v_2 < \dots < v_l \leq w_1 < w_2 < \dots < w_l$.

Faça corresponder a cada M_i um intervalo I_i de v_i a w_i . Logo, cada intervalo $\bigcap_{j=1}^k I_j$, $1 \leq k \leq l$ e $\bigcap_{j=i}^l I_j$, $1 < i \leq l$ corresponde a vértices de G pertencentes a $\bigcap_{j=1}^k M_j \setminus \bigcup_{j \in X_l \setminus \{1,\dots,k\}} M_j$, $1 \leq k \leq l$ e $\bigcap_{j=i}^l M_j \setminus \bigcup_{j \in X_l \setminus \{i,\dots,k\}} M_j$, $1 < i \leq l$, ou seja, $V_{\{1,\dots,k\}}$, $V_{\{i,\dots,l\}}$, $1 \leq k, i \leq l$.

Os conjuntos $V_{\{1,\dots,k\}}$, $V_{\{i,\dots,l\}}$, $1 \leq k, i \leq l$, são não vazios, pois cada região distinta de $V_{\{12\dots l\}}$ contém ou v_i ou w_i , para $i = 1, \dots, l$, e, além disso, formam uma partição de V induzida pela ordem indiferença sobre V .

Logo, $\{1\}, \{1,2\}, \dots, \{1,2,\dots,l-1,l\}, \{2,\dots,l\}, \{3,\dots,l\}, \dots, \{l\}$ são os únicos subconjuntos S de X_l correspondentes às regiões V_S não vazias.

A unicidade decorre da unicidade da ordem indiferença para grafos indiferença reduzidos, pois os vértices em cada região são gêmeos.

(\Leftarrow) Observe, primeiro, que G contém l cliques maximais e é clique-completo.

Suponha que G contenha um subgrafo induzido isomorfo a $K_{1,3}$. Então existem três cliques maximais M_i, M_j, M_k , que contêm as cliques que formam $K_{1,3}$.

Logo, existem $S_1, S_2, S_3 \subseteq X_l$ tal que $i \in S_1$ e $j, k \notin S_1, j \in S_2$ e $i, k \notin S_2$ e, $k \in S_3$ e $i, j \notin S_3$ com $V_{S_i} \neq \emptyset, i = 1, 2, 3$.

Observe que para quaisquer três subconjuntos S da hipótese, existe pelo menos um que está contido em pelo menos um dos outros dois.

Logo, pela unicidade dos subconjuntos S da hipótese, G não contém subgrafos isomorfos a $K_{1,3}$.

Falta mostrar que G é grafo de intervalo. Para tal, será exibida uma ordem linear das cliques maximais de G satisfazendo as condições do teorema de Gilmore e Hoffman.

Seja $<$ a ordem dada por:

$$M_i < M_j \iff i' = \min\{|S'|, i \in S'\} < j' = \min\{|S'|, j \in S'\},$$

onde $S' \in \{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}, \dots, \{1, 2, \dots, l\}\}$.

A ordem $<$ é linear (mínimo de um conjunto). (Observe que a posição na ordem $<$ de M_i é i' .)

Sejam $M_i < M_j < M_k$ tal que $x \in M_i, x \notin M_j$ e $x \in M_k$.

Sendo $M_i < M_j < M_k$ então existem $|S'_i| < |S'_j| < |S'_k|$ tal que cada conjunto é o menor que contém respectivamente i, j, k .

Mas, pela minimalidade desses conjuntos e pela definição de S' , tem-se que $\{i\} \in S'_i, \{i, j\} \in S'_j$ e $\{i, j, k\} \in S'_k$. Logo, se $x \in M_i \cap M_k$ então $x \in M_j$. Contradição. \triangle

A Figura 4.2 representa uma ordem indiferença sobre o conjunto de vértices de um grafo indiferença clique-completo.



Figura 4.2: Uma ordem indiferença de um grafo indiferença clique-completo.

Corolário 4.3 *Seja G um grafo indiferença clique-completo.*

Então $V_{\{1\}} < \dots < V_{\{1,2,\dots,l\}} < V_{\{2,\dots,l\}} < \dots < V_{\{l\}}$ é uma ordem linear sobre a partição clique de G , tal que regiões que contêm vértices de uma mesma clique maximal são consecutivas na ordem.

Dem.: \triangle

A ordem linear sobre a partição clique de G é única, a menos de inversa. A unicidade desta ordem decorre da unicidade da ordem indiferença, pois, pelo Lema 4.1, os elementos de cada região são vértices gêmeos.

Observe que se G for um grafo indiferença clique-completo e reduzido, a ordem $<$ sobre a partição clique de G coincide com a ordem indiferença $<$, pois cada região contém exatamente um vértice de G . Então em algumas ocasiões, quando o grafo for clique-completo e reduzido, diremos o vértice V_S do grafo ao invés da região V_S que contém apenas um vértice.

Corolário 4.4 *Seja G um grafo indiferença clique-completo.*

Se G contém l cliques maximais então a cardinalidade da partição clique de G é $2l - 1$.

Dem.: \triangle

O objetivo desta seção é demonstrar que todo grafo indiferença clique-completo é de comparabilidade.

Com este intuito será exibido um algoritmo que constrói uma orientação transitiva de um grafo indiferença clique-completo e reduzido. Para este grafo, todas as orientações transitivas serão exibidas e, posteriormente, generalizadas para grafos que possuem vértices gêmeos.

A partir daqui, salvo menção contrária, a notação G_l será usada para o grafo reduzido de um grafo indiferença clique-completo com l cliques maximais. Pelo Lema 4.2, G_l possui um vértice universal e, pelo Teorema 4.1, G_l é facilmente construído, se o número l de cliques maximais for conhecido, pois os vértices de G_l são as regiões $V_{\{1\}}, V_{\{1,2\}}, \dots, V_{\{l\}}$, descritas nesse teorema. Também, pelo mesmo teorema, conclui-se que para cada l existe um único G_l , a menos de isomorfismo. Pelo Lema 2.1, $V_{\{1\}}$ e $V_{\{l\}}$ são os vértices extremos de G_l .

Dados dois grafos H_1 e H_2 compartilhando, possivelmente, subconjuntos de vértices e de arestas, o *grafo união* $H_1 \cup H_2$ é o grafo cujo conjunto de vértices é o conjunto união dos conjuntos de vértices de H_1 e de H_2 e o conjunto de arestas é o conjunto união dos conjuntos de arestas de H_1 e H_2 .

Mostramos na Figura 4.3 dois grafos H_1 e H_2 e um possível grafo $H_1 \cup H_2$.

Dado um grafo G , um subgrafo união de algumas dentre as cliques maximais de G não é necessariamente induzido. O grafo da Figura 4.4 sem a aresta (3,4) é o grafo união das cliques maximais geradas pelos conjuntos de vértices $\{1, 2, 3\}$ e $\{1, 4, 5\}$. Este grafo não é um subgrafo induzido do grafo gerado por $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, enquanto o subgrafo união das cliques maximais geradas por $\{1, 2, 3\}$ e $\{1, 3, 4\}$ o é.

Considere a ordem das cliques maximais, \prec , de um grafo G_l , induzida pela ordem indiferença $<$.

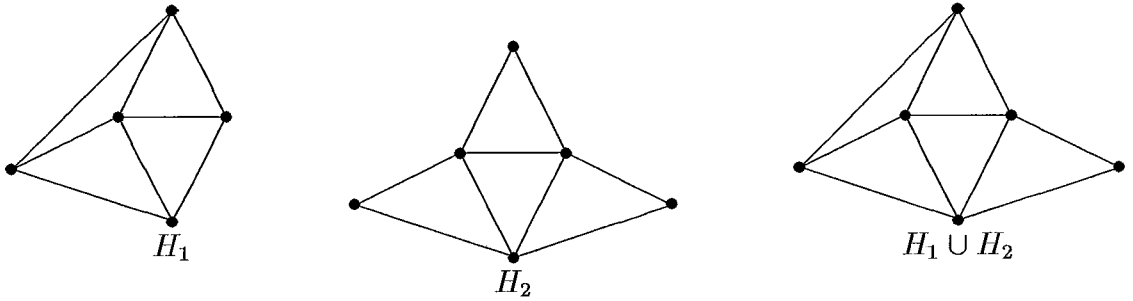


Figura 4.3: Um exemplo de grafo união.

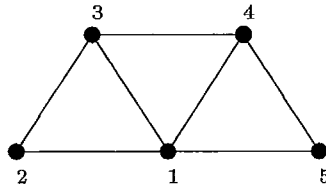


Figura 4.4: Um grafo clique-completo.

Mostraremos que os subgrafos de G_l que são união de cliques maximais de G_l consecutivas na ordem \prec , são subgrafos induzidos de G_l , enquanto os subgrafos de G_l que são união de cliques maximais não consecutivas na ordem \prec não o são.

Observe, primeiro, que o grafo união de quaisquer cliques maximais de G_l contém o vértice universal de G_l . De fato, o vértice universal de G_l pertence a todas as cliques maximais de G_l .

Lema 4.3 *Sejam G_l um grafo indiferença clique-completo e reduzido, \prec a ordem das cliques maximais de G_l e H um subgrafo união de cliques maximais de G .*

Então H é um subgrafo induzido de G se e somente se H é união de cliques maximais consecutivas na ordem \prec .

Dem.: (\Leftarrow) Suponha que H não é um subgrafo induzido de G_l .

Então existem vértices v e w de H tal que (v, w) é uma aresta de G_l e (v, w) não é aresta de H .

Logo H contém cliques maximais M_k e $M_{k'}$ tal que $v \in M_k$ e $w \in M_{k'}$, $k \neq k'$. Suponha, sem perda de generalidade, $k < k'$.

Os vértices v e w pertencem à regiões de H com índices disjuntos, pois, caso contrário, $(v, w) \in A(H)$.

Então, pelo Teorema 4.1, o vértice universal u está entre v e w na ordem indiferença $<$ que induz \prec .

Portanto, v, u, w é uma clique de G , contida em alguma clique maximal M .

Logo, $M_k \prec M \prec M_{k'}$. Veja Figura 4.5.

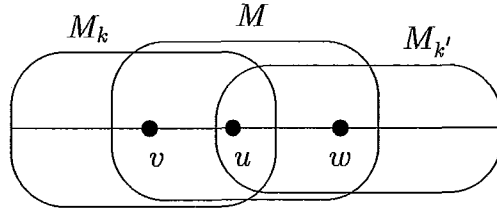


Figura 4.5: A clique M contém v , u , w .

Portanto, H não é a união de cliques maximais consecutivas de \prec .

(\implies) Seja H o grafo união de pelo menos duas cliques maximais M_i e M_j , não consecutivas na ordem \prec . Sem perda de generalidade, seja $i < j$. Logo, $j \neq i + 1$.

Seja G_l um grafo clique-completo, as interseções $M_i \cap M_{i+1}$ e $M_{i+1} \cap M_j$ são não vazias.

Sejam v o vértice mais à esquerda na ordem linear indiferença $<$ pertencente a $M_i \cap M_{i+1}$ e w o vértice mais à direita na ordem $<$ pertencente a $M_{i+1} \cap M_j$.

Então, $(v, w) \in A(M_{i+1})$, logo, $(v, w) \in A$. Note que (v, w) é uma aresta maximal de M_{i+1} .

Mas, $(v, w) \notin A(H)$, pois caso contrário, (v, w) pertenceria ou à M_i ou à M_j , contradizendo a maximalidade de M_{i+1} . \triangle

Note que no Lema 4.3 o grafo G considerado não precisa ser um grafo reduzido.

Corolário 4.5 Considere o grafo G_l . O subgrafo G_k é um subgrafo induzido de G_l , para todo $k \leq l$.

Dem.: Seja H o subgrafo de G_l que é união das cliques maximais M_1, M_2, \dots, M_k de G_l . Note que H não é necessariamente um subgrafo reduzido de G_l e, pelo Lema 4.3, H é um subgrafo induzido de G_l .

Considere, agora, o subgrafo reduzido R de H . Então $R \cong G_k$.

Como G_k é subgrafo reduzido de H , então G_k é um subgrafo induzido de H , logo de G_l . \triangle

A Figura 4.6 mostra os grafos H e R de G_3 .

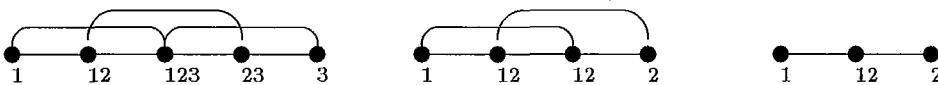


Figura 4.6: Os grafos G_3 , H e R , respectivamente.

Observação 4.1 Considere G_l . O subgrafo G_k é subgrafo induzido de $G_{k'}$, para todo $1 \leq k \leq k' \leq l$.

Lembre-se que G_k é o subgrafo induzido de G_l união das cliques maximais de índices $1, 2, \dots, k$ e $G_{k'}$, união das cliques maximais de índices $1, 2, \dots, k, k+1, \dots, k'$.

Portanto, G_k é subgrafo induzido de $G_{k'}$. Δ

Observação 4.2 *Cada vértice de G_l ou é o primeiro ou o último vértice de alguma clique maximal na ordem indiferença. Logo, $l = \lceil n/2 \rceil$ e cada clique maximal tem tamanho $\lceil n/2 \rceil$ e n é ímpar (Corolário 4.4).*

Os $\lceil n/2 \rceil$ primeiros (últimos) elementos de \prec são primeiros (últimos) elementos das $\lceil n/2 \rceil$ cliques maximais de G_l .

O $\lceil n/2 \rceil$ -ésimo elemento de \prec é o primeiro elemento da última clique maximal na ordem \prec e o último elemento da primeira clique maximal de \prec .

Observação 4.3 *Considere a ordem \prec . Uma aresta (V_{S_1}, V_{S_2}) de G_l é maximal se e somente se $S_1 \cap S_2 = \{k\}$, $1 \leq k \leq l$.*

É sempre possível construir um grafo acrescentando-se um a um os seus vértices, se as relações de adjacência entre os vértices novos e os do subgrafo induzido já construído forem conhecidas.

Sendo que G_k é subgrafo induzido de G_{k+1} , $1 \leq k \leq l-1$, o grafo G_l pode ser construído a partir de G_1 .

Basta observar que G_k pode ser construído de G_{k-1} acrescentando-se exatamente dois vértices: o vértice universal $V_{\{1,2,\dots,k\}}$ e o vértice extremo $V_{\{k\}}$. No grafo trivial G_1 o vértice $V_{\{1\}}$ é universal e extremo.

O lema a seguir determina quais vértices de G_{k-1} são adjacentes ao vértice extremo de G_k .

Lema 4.4 *Considere o grafo indiferença clique-completo e reduzido G_{k-1} , $k > 1$ e $V(G_k) = V(G_{k-1}) \cup V_{\{1,2,\dots,k\}} \cup V_{\{k\}}$.*

O grafo G_k é um grafo indiferença clique-completo e reduzido se e somente se os vértices $V_{\{1,2,\dots,k\}}$, $V_{\{2,\dots,k-1\}}$, $V_{\{3,\dots,k-1\}}$, \dots , $V_{\{k-1\}}$, $V_{\{k\}}$ pertencem à mesma clique maximal de G_k .

Dem.: Sendo G_{k-1} um grafo indiferença clique-completo e reduzido então G_{k-1} admite a ordem indiferença sobre $V(G_{k-1})$: $V_{\{1\}} < V_{\{1,2\}} < \dots < V_{\{1,2,\dots,k-1\}} < V_{\{2,\dots,k-1\}} < \dots < V_{\{k-1\}}$.

Seja G_k tal que $V(G_k) = V(G_{k-1}) \cup V_{\{1,2,\dots,k\}} \cup V_{\{k\}}$.

(\implies) Suponha G_k um grafo indiferença clique-completo e reduzido.

Então pelo Corolário 4.3, a ordem \prec sobre a partição clique P de G_k é: $V_{\{1\}} < V_{\{1,2\}} < \dots < V_{\{1,2,\dots,k-1\}} < V_{\{1,2,\dots,k\}} < V_{\{2,\dots,k\}} < \dots < V_{\{k-1,k\}} < V_{\{k\}}$.

Sendo G_k reduzido, então $P = V(G_k)$.

Pela definição de $V(G_k)$, conclui-se que $V_{\{1\}}$, $V_{\{1,2\}}$, \dots , $V_{\{1,2,\dots,k-1\}}$, $V_{\{2,\dots,k\}}$, \dots , $V_{\{k-1,k\}}$ são vértices de G_{k-1} .

Mas, $(V_{\{1,2,\dots,k\}}, V_{\{k\}})$ é uma aresta maximal de G_k (Observação 4.3). Então, os vértices $V_{\{1,2,\dots,k\}}, V_{\{2,\dots,k\}}, \dots, V_{\{k-1,k\}}, V_{\{k\}}$ pertencem à mesma clique maximal M_k de G_k .

Portanto, $V_{\{2,\dots,k-1,k\}} = V_{\{2,\dots,k-1\}}, \dots, V_{\{k-1,k\}} = V_{\{k-1\}}$.

(\Leftarrow) Suponha que os vértices $V_{\{1,2,\dots,k\}}, V_{\{2,\dots,k-1\}}, \dots, V_{\{k-1\}}, V_{\{k\}}$ pertençam à mesma clique maximal de G_k .

Então $V_{\{1\}} < V_{\{1,2\}} < \dots < V_{\{1,2,\dots,k-1\}} < V_{\{1,2,\dots,k\}} < V_{\{2,\dots,k-1\}} < \dots < V_{\{k-1\}} < V_{\{k\}}$ é uma ordem indiferença sobre $V(G_k)$, pois vértices de uma mesma clique maximal são consecutivos na ordem.

Logo, G_k é um grafo indiferença. Ainda, por definição, G_k é um grafo clique-completo ($V_{\{1,2,\dots,k\}}$ é um vértice universal em G_k). Além disso, G_k é reduzido, pois G_{k-1} é reduzido e os vértices $V_{\{1,2,\dots,k\}}$ e $V_{\{k\}}$ não são gêmeos (Lema 4.1). \triangle

Corolário 4.6 *Seja $<$ a ordem indiferença sobre $V(G_{k-1})$. Então a ordem indiferença sobre $V(G_k)$ é obtida inserindo-se os vértices $V_{\{1,2,\dots,k\}}$ e $V_{\{k\}}$ nas posições k e $2k - 1$ da ordem $<$ sobre $V(G_{k-1})$.*

Dem. \triangle

Pelo Corolário 4.6 cada vértice $u \leq V_{\{1,2,\dots,l\}}$ é vértice universal de algum G_i , $i \leq l$, e cada vértice $v \geq V_{\{1,2,\dots,l\}}$ é vértice extremo de algum G_i , $1 \leq i \leq l$. Além disso, o Lema 4.4 torna as adjacências do vértice extremo $V_{\{l\}}$ bem definidas.

O algoritmo a seguir constrói o grafo reduzido G_l e uma de suas orientações transitivas, tendo como dado de entrada o número l de cliques maximais. Em cada passo, o grafo G_k é construído e suas arestas orientadas transitivamente. O símbolo P_k denota a seqüência dos vértices de G_k na ordem indiferença (que coincide com a ordem linear sobre a partição clique de G_k).

Algoritmo 4.1 • *No passo inicial, $i = 1$, construir o grafo G_1 , composto do vértice V_1 na posição 1 de P_1 .*

• *No passo geral, $i > 1$,*

1. *construir o grafo G_i , a partir de G_{i-1} , inserindo-se um novo vértice $V_{\{1,2,\dots,i\}}$, universal em G_i , na posição i da seqüência P_{i-1} e um outro, V_i na posição $2i - 1$.*
2. *orientar as arestas incidentes a $V_{\{1,2,\dots,i\}}$ de tal forma que o torne uma fonte para G_i e as incidentes a V_i , ainda não orientadas, de tal forma que o torne uma fonte para a clique gerada pelos vértices das posições $i + 1, i + 2, \dots, 2i - 1$ da seqüência P_i .*

A Figura 4.7 mostra um exemplo dos passos do Algoritmo 4.1 para $l = 3$.

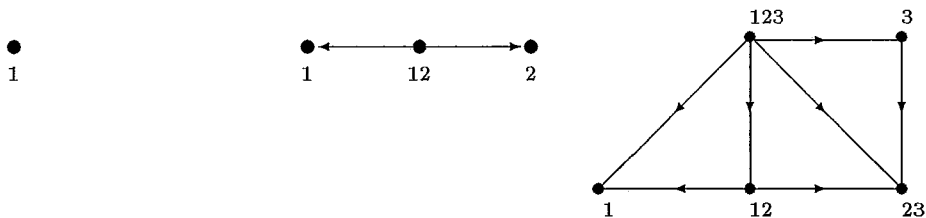


Figura 4.7: Os passos do algoritmo para $l = 3$.

Observação 4.4 *Se no passo geral (2.), substituirmos o termo fonte por sumidouro, obteremos a orientação transitiva simétrica da obtida pelo Algoritmo 4.1.*

Observação 4.5 *Uma outra orientação transitiva, distinta da obtida pelo Algoritmo 4.1 (e da sua simétrica), pode ser gerada através da seguinte estratégia:*

Na última iteração (l -ésima) do passo geral do Algoritmo 4.1, orientar as arestas incidentes ao vértice universal tornando-o um sumidouro de G_l .

Para estabelecer a correção do Algoritmo 4.1 basta mostrar que a orientação gerada é transitiva.

Lema 4.5 *Seja G um grafo indiferença clique-completo e reduzido. A orientação gerada pelo Algoritmo 4.1 para G é transitiva.*

Corolário 4.7 *Um grafo indiferença clique-completo e reduzido é grafo de comparabilidade.*

Demonstração do Lema 4.5:

A prova é por indução no número l de cliques maximais de G .

Se $l = 1$, G_1 é o grafo trivial, logo de comparabilidade.

Suponha que para $i < l$ a orientação (OT) gerada pelo Algoritmo 4.1 é transitiva para o grafo G_i .

Considere o passo $i + 1$.

Por hipótese de indução, G_i é um grafo indiferença clique-completo e reduzido. Então pelo Lema 4.4, o grafo G_{i+1} construído a partir de G_i , inserindo-se à seqüência P_i de vértices de G_i , um vértice universal na posição $i + 1$ e um vértice extremo na posição $2(i + 1) - 1$ de P_i , é um grafo indiferença clique-completo e reduzido.

Para mostrar que a orientação gerada pelo algoritmo para G_{i+1} é uma orientação transitiva, basta verificar que a orientação transitiva dada pelo algoritmo para as arestas incidentes em $V_{\{1,2,\dots,i,i+1\}}$ e $V_{\{i+1\}}$ estendem a orientação transitiva (OT) de G_i a uma orientação transitiva para G_{i+1} .

Observe, primeiro, que em cada iteração, o Algoritmo 4.1 orienta as arestas que incidem no vértice universal de tal forma que o torna uma fonte.

Logo, se $V_{\{1,2,\dots,i,i+1\}} \rightarrow u \rightarrow v$ então $V_{\{1,2,\dots,i,i+1\}} \rightarrow v$, para quaisquer $u, v \in G_{i+1} \setminus V_{\{1,2,\dots,i,i+1\}}$.

Considere, agora, o vértice $V_{\{i+1\}}$.

Os vértices adjacentes a V_{i+1} são, por construção, os vértices u tais que $V_{\{1,2,\dots,i+1\}} \leq u < V_{\{i+1\}}$.

A orientação dada pelo Algoritmo 4.1 para as arestas $(V_{\{i+1\}}, u)$, $u \neq V_{\{1,2,\dots,i+1\}}$ é de $V_{\{i+1\}}$ para u .

Considere o conjunto dos vértices v adjacentes a algum u . Então $V_{\{1\}} < v \leq V_{\{1,2,\dots,i+1\}}$. Mas, cada vértice $v < V_{\{1,2,\dots,i+1\}}$ é vértice universal de algum G_p , $p < i + 1$. Então, por hipótese de indução, o Algoritmo 4.1 orienta as arestas que incidem em v de tal forma que o torna uma fonte para G_p .

Logo, se $(u, v) \in A$ então $v \rightarrow u$, para $v \leq V_{\{1,2,\dots,i+1\}}$.

Portanto, se existirem as arestas $(V_{\{i+1\}}, u)$ e (u, v) , a orientação dada pelo Algoritmo 4.1 é $V_{\{i+1\}} \rightarrow u \leftarrow v$, garantindo a transitividade da orientação para G_{i+1} . \triangle

A estratégia da Observação 4.5, também, origina uma orientação transitiva para G_l . Pois, da demonstração do Lema 4.5 conclui-se que $G_{l-1} \cup V_{\{l\}}$ admite uma orientação transitiva (observe que o Algoritmo 4.1 e a Observação 4.5 orientam as arestas incidentes a $V_{\{l\}}$ da mesma forma). Além disso, $V_{\{1,2,\dots,l\}}$ é um vértice universal que é sumidouro de G_l .

Agora, sabendo-se que orientações simétricas de orientações transitivas são transitivas, mostramos que G_l admite quatro orientações transitivas: a gerada pelo algoritmo, a da Observação 4.5 e suas simétricas.

Observe que estas orientações foram construídas considerando o grafo G_l rotulado, com rotulação dada pela ordem indiferença.

Provaremos que o grafo G_l rotulado não admite nenhuma outra orientação transitiva, além dessas.

Lema 4.6 *As orientações transitivas de um grafo indiferença clique-completo reduzido e rotulado são: a orientação gerada pelo Algoritmo 4.1, a da Observação 4.5 e suas simétricas.*

Para a demonstração deste lema usaremos uma caracterização de grafos de comparabilidade rotulados que possuem exatamente duas orientações transitivas, uma inversa da outra. Usaremos, também, o Lema 4.7. Reescrevemos, aqui, o teorema devido a Shevrin e Filippov [30].

Teorema 4.2 (Shevrin e Filippov (70)) *Um grafo de comparabilidade rotulado admite exatamente duas orientações transitivas se e somente se todo conjunto homogêneo do grafo é um conjunto independente.*

O grafo G_l não admite exatamente duas orientações transitivas. O subgrafo de G_l gerado pelos vértices $\{V_{\{1\}}, V_{\{1,2\}}, \dots, V_{\{1,2,\dots,l-1\}}, V_{\{2,\dots,l\}}, \dots, V_{\{l\}}\}$ é um conjunto homogêneo para G_l .

Lema 4.7 *O grafo $G_l \setminus V_{\{1,2,\dots,l\}}$ não contém conjuntos homogêneos.*

Dem.: Seja H um conjunto homogêneo de $G_l \setminus V_{\{1,2,\dots,l\}}$. Então $|H| \geq 2$.

Suponha que H contenha pelo menos um par de vértices V_{S_1} e V_{S_2} não adjacentes. Então $S_1 \cap S_2 = \emptyset$.

Pela estrutura de $G_l \setminus V_{\{1,2,\dots,l\}}$ ou $1 \in S_1$ e $l \in S_2$ ou o contrário. Suponha, sem perda de generalidade, $1 \in S_1$ e $l \in S_2$.

Se $|S_1| > 1$, então existe $x = V_{\{1\}}$ tal que $(x, V_{S_1}) \in A$ e $(x, V_{S_2}) \notin A$.

Se $|S_1| = 1$, então

a. Se $|S_2| > 1$, então existe $y = V_{\{l\}}$ tal que $(y, V_{S_1}) \notin A$ e $(y, V_{S_2}) \in A$.

b. Se $|S_2| = 1$ então para qualquer que seja $z \in M_1 \cup M_l$, z distinto de $V_{\{1\}}$ e $V_{\{l\}}$, tem-se $(V_{S_1}, z) \in A$ e $(V_{S_2}, z) \notin A$ ou $(V_{S_1}, z) \notin A$ e $(V_{S_2}, z) \in A$.

Então, H não é um conjunto homogêneo de $G_l \setminus V_{\{1,2,\dots,l\}}$. Contradição.

Portanto, H é uma clique. Consideremos dois casos:

a. Se $V(H) \subset \{h, h < V_{\{1,2,\dots,l\}}\}$ ou $V(H) \subset \{h, h > V_{\{1,2,\dots,l\}}\}$.

Considere $V(H) \subset \{h, h < V_{\{1,2,\dots,l\}}\}$. Pela estrutura de $G \setminus V_{\{1,2,\dots,l\}}$ e pela sua conexidade existe $x > V_{\{1,2,\dots,l\}}$ tal que $(x, h_1) \in A$ e $(x, h_2) \notin A$ para algum $h_1, h_2 \in H$. Lembre-se que $|V(H)| \geq 2$.

b. Se $V(H)$ é formado por vértices menores do que $V_{\{1,2,\dots,l\}}$ e maiores do que $V_{\{1,2,\dots,l\}}$.

Se nem $V_{\{1\}}$, nem $V_{\{l\}}$ pertencem à $V(H)$, então existem $h_1, h_2 \in H$ tal que ou $(h_1, V_{\{1\}}) \in A$ e $(h_2, V_{\{l\}}) \notin A$.

Se pelo menos um dentre $V_{\{1\}}$ e $V_{\{l\}}$ pertencer a H (digamos, $V_{\{1\}}$) então existe $h \in H$ tal que $(h, V_{\{l\}}) \in A$ e $(V_{\{1\}}, V_{\{l\}}) \notin A$.

Logo, H não é um conjunto homogêneo. Contradição.

Portanto, $G_l \setminus V_{\{1,2,\dots,l\}}$ não contém conjuntos homogêneos. \triangle

Demonstração do Lema 4.6:

Pelo Lema 4.5, G_l é grafo de comparabilidade. Então, $G_l \setminus V_{\{1,2,\dots,l\}}$ é de comparabilidade. Lembre-se que também é indiferença.

Ainda, $G_l \setminus V_{\{1,2,\dots,l\}}$ não contém conjuntos homogêneos (Lema 4.7), logo, pelo teorema de Shevrin e Filippov [30], $G_l \setminus V_{\{1,2,\dots,l\}}$ possui somente uma orientação transitiva e sua simétrica.

Agora, considere as restrições $(OT)'$ e $(OT)''_s$, da orientação (OT) construída pelo Algoritmo 4.1 e da sua simétrica $(OT)_s$, a $G_l \setminus V_{\{1,2,\dots,l\}}$. Essas restrições são orientações transitivas para $G_l \setminus V_{\{1,2,\dots,l\}}$. Portanto, são as únicas.

Dessa forma, as orientações do algoritmo e da Observação 4.5 de qualquer v pertencente a $G_l \setminus V_{\{1,2,\dots,l\}}$ para $V_{\{1,2,\dots,l\}}$ e de $V_{\{1,2,\dots,l\}}$ para todo vértice de $G_l \setminus$

$V_{\{1,2,\dots,l\}}$ originam todas as orientações transitivas (considerando as simétricas) de G_l . \triangle

A seguir, veremos que as orientações transitivas para o grafo indiferença clique-completo reduzido podem ser estendidas a grafos não reduzidos.

Teorema 4.3 *Todo grafo indiferença clique-completo é grafo de comparabilidade.*

Dem.: Seja G um grafo indiferença clique-completo com l cliques maximais.

Pelo Teorema 4.1, a partição clique de G é:

$V_{\{1\}}, V_{\{1,2\}}, \dots, V_{\{1,2,\dots,l\}}, V_{\{2,\dots,l\}}, \dots, V_{\{l-1,l\}}, V_{\{l\}}$.

Considere o grafo reduzido G_l , e lembre-se que G e G_l possuem a mesma partição clique.

Pelo Algoritmo 4.1, G_l admite uma orientação transitiva, (OT) .

Construa uma orientação transitiva para G da seguinte forma:

1. Oriente transitivamente as cliques de cada região de G ;
2. Oriente todas as arestas entre duas regiões distintas V_{S_1} e V_{S_2} com a orientação da aresta (V_{S_1}, V_{S_2}) de G_l em (OT) .

O procedimento acima orienta transitivamente o grafo G .

De fato, sejam $u, v, w \in V(G)$ tal que $(u, v) \in A$ e $(v, w) \in A$. Considere três casos:

- a Se $u, v, w \in V_{S_i}$ então, por 1., u, v, w são orientados de forma acíclica.
- b Se $u \in V_{S_i}, v \in V_{S_j}$ e $w \in V_{S_k}$, por 2., a orientação entre esses vértices obedece a condição de transitividade.
- c Se $u \in V_{S_i}, v, w \in V_{S_j}$.

Como $(u, v) \in A$, então $(u, w) \in A$. Pois, v e w são vértices gêmeos. Logo, se $u \xrightarrow{2.} v$, então $u \xrightarrow{2.} w$. Então, para qualquer que seja a orientação entre os vértices v e w , a transitividade está assegurada.

Portanto, G é grafo de comparabilidade. \triangle

Corolário 4.8 *Todo grafo indiferença clique-completo é grafo de permutação.*

Dem.: Seja G um grafo indiferença clique-completo. Pelo Teorema 4.3, G é grafo de comparabilidade.

Desde que a classe dos grafos indiferença é uma subclasse da dos grafos de intervalo, pelo Teorema 2.16, o complementar de G é grafo de comparabilidade.

Portanto, G é grafo de permutação. \triangle

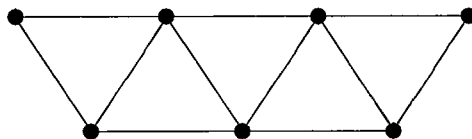


Figura 4.8: Um grafo indiferença e não comparabilidade.

A pirâmide é um grafo clique-completo que não é grafo de comparabilidade, enquanto o grafo da Figura 4.8 é um grafo indiferença que não é de comparabilidade. Então, num certo sentido tanto o teorema acima como o seu corolário é o melhor possível.

O Algoritmo 4.1 é, claramente, linear no tamanho do grafo.

Observe que as orientações: simétrica da gerada pelo Algoritmo 4.1 e a da Observação 4.5 originam grafos orientados isomorfos. Este resultado advém da simetria dos grafos G_i .

Dessa forma, podemos afirmar que um grafo indiferença clique-completo reduzido admite uma única orientação transitiva (a menos de inversa). Mais ainda, um grafo indiferença clique-completo não reduzido mas com exatamente um vértice universal admite uma única orientação transitiva.

Tal afirmação não é válida se o grafo indiferença possuir mais do que um vértice universal. A Figura 4.9 mostra três orientações distintas para um grafo indiferença clique-completo com dois vértices universais.

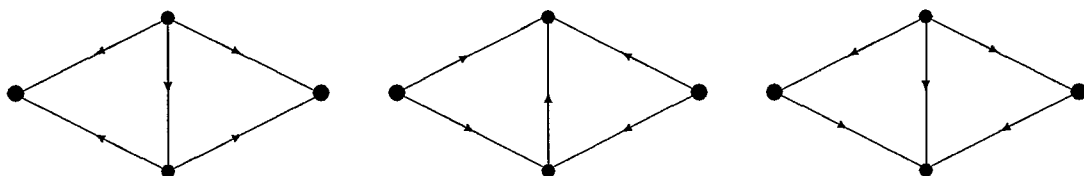


Figura 4.9: As orientações transitivas de um grafo indiferença clique-completo e não reduzido.

4.3 As atribuições fonte-sumidouro de um grafo indiferença clique-completo

Primeiro observamos que num grafo indiferença clique-completo existe sempre um vértice universal que ou é fonte ou é sumidouro de toda orientação transitiva do grafo.

Lema 4.8 *Seja G um grafo indiferença clique-completo. Então para toda orientação transitiva de G existe um vértice v em $V_{\{1,2,\dots,l\}}$ que ou é fonte ou é sumidouro.*

Dem.: Suponha que para uma orientação \vec{G} de G não exista um vértice v em $V_{\{1,2,\dots,l\}}$ que seja ou fonte ou sumidouro de \vec{G} .

Então, sendo G clique-completo, dos Teoremas 4.1, 3.2 e 4.3, uma atribuição fonte-sumidouro para G , (Σ, \mathcal{T}) poderá ser:

$$\Sigma = \{1 \dots j, j + 1 \dots l\} \text{ e } \mathcal{T} = \{1 \dots k, k + 1 \dots l\}, 1 \leq j, k < l.$$

Mas, pelo Teorema 3.3, $S \cap T \neq \emptyset$, para todo $S \in \Sigma$ e $T \in \mathcal{T}$, logo, $j \geq k + 1$ e $k \geq j + 1$. Contradição. Δ

Note que nem sempre orientações transitivas de grafos de comparabilidade que são clique-completos com pelo menos um vértice universal, contém um destes vértices como fonte ou sumidouro. O grafo da Figura 3.2 é um grafo clique-completo com um vértice universal V_{1234} e exibe uma atribuição fonte-sumidouro onde V_{1234} não é fonte nem sumidouro. Observe que esse grafo não é indiferença (mais ainda, não é também triangularizado).

Desde que conhecemos todas as orientações transitivas de um grafo indiferença clique-completo e reduzido, podemos determinar suas atribuições fonte-sumidouro.

Teorema 4.4 *As atribuições fonte-sumidouro de um grafo indiferença clique-completo e reduzido com $l > 2$ cliques maximais são:*

$$\Sigma = \{\{1, 2, \dots, l\}\} \text{ e}$$

$$\mathcal{T} = \{\{1\}, \{2, 3, \dots, l\}\}, \text{ ou } \mathcal{T} = \{\{1, 2, \dots, l-1\}, \{l\}\} \text{ e}$$

simétricas.

Dem.: O Algoritmo 4.1 gera, para cada l , uma orientação transitiva de G_l (Lema 4.5). Então, em cada passo do algoritmo a atribuição fonte-sumidouro correspondente é construída.

A prova é por indução em l .

Se $l = 2$, a partição clique de G_2 é:

$P_2 = \{\{1\}, \{1, 2\}, \{2\}\}$. O Algoritmo 4.1 torna $V_{\{1,2\}}$ uma fonte. Então, $\Sigma = \{\{1, 2\}\}$ e pelo Corolário 3.1, $\mathcal{T} = \{\{1\}, \{2\}\}$.

Suponha que para $2 \leq i < l$ a atribuição fonte-sumidouro seja:

$$(\Sigma, \mathcal{T}) = (\{\{1, 2, \dots, i\}\}, \{\{1\}, \{2, \dots, i\}\}).$$

Considere o $i + 1$ -ésimo passo do Algoritmo 4.1.

Por construção, G_{i+1} é um grafo indiferença clique-completo. Logo, pelo Teorema 4.1, a partição clique de G_{i+1} é:

$$V_{\{1\}}, \dots, V_{\{1,2,\dots,i+1\}}, \dots, V_{\{i,i+1\}}, V_{\{i+1\}}.$$

O grafo G_{i+1} é construído inserindo-se dois vértices $V_{\{i+1\}}$ e $V_{\{1,2,\dots,i+1\}}$ à seqüência P_i de vértices de G_i .

Logo, por construção, $V_{\{1,\dots,i+1\}}$ é um vértice universal e o Algoritmo 4.1 o torna uma fonte. Portanto, $\Sigma = \{\{1, 2, \dots, i + 1\}\}$.

Agora, novamente por construção, $(V_{\{1\}}, V_{\{1,2,\dots,i+1\}}) \in A(G_{i+1})$ e $(V_{\{1\}}, V_{\{i+1\}}) \notin A(G_{i+1})$. Mas, por hipótese de indução, $\{1\}$ é um sumidouro da orientação transitiva gerada pelo algoritmo para G_i . Ainda, o Algoritmo 4.1 orienta a aresta $(V_{\{1,2,\dots,i+1\}}, V_{\{1\}})$ de $V_{\{1,2,\dots,i+1\}}$ para $V_{\{1\}}$, conclui-se que $V_{\{1\}}$ é um sumidouro para a orientação gerada pelo algoritmo para G_{i+1} . Logo, pelo Teorema 3.2, obtém-se $\mathcal{T} = \{\{1\}, \{2, \dots, i + 1\}\}$.

Analogamente, considerando a orientação da Observação 4.5, obtém-se $\mathcal{T} = \{\{1, 2, \dots, l\}\}$ e $\Sigma = \{\{1, 2, \dots, l - 1\}, \{l\}\}$.

Basta lembrar que, no passo $i + 1$, a estratégia usada na Observação 4.5 torna $V_{\{1,2,\dots,l\}}$ um sumidouro de G_{i+1} . Ainda que, por hipótese de indução, $V_{\{1,2,\dots,i\}}$ é fonte de G_i .

Considerando as orientações simétricas das anteriores, obtém-se as atribuições fonte-sumidouro simétricas. \triangle

Estas atribuições fonte-sumidouro não caracterizam um grafo indiferença clique-completo mesmo sendo reduzido, isto é, temos uma condição apenas necessária.

De fato, o grafo da Figura 4.10 mostra um grafo clique-completo e reduzido e uma orientação transitiva com $\Sigma = \{1234\}$ e $\mathcal{T} = \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$ e o grafo não é indiferença, pois os vértices $V_{\{1234\}}, V_{\{1\}}, V_{\{3\}}, V_{\{4\}}$ formam um $K_{1,3}$.

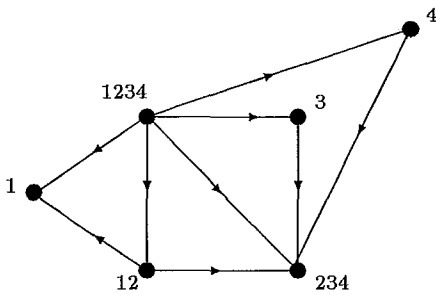


Figura 4.10: Um grafo de intervalo com $(\Sigma, \mathcal{T}) = (\{\{1234\}\}, \{\{1\}, \{2, 3, 4\}\})$.

O teorema seguinte mostra uma maneira de se encontrar as atribuições fonte-sumidouro de um grafo indiferença clique-completo e reduzido sem que se conheçam necessariamente as regiões que determinam os vértices do grafo.

Teorema 4.5 *Seja G um grafo indiferença clique-completo e reduzido com pelo menos três vértices.*

Então G possui exatamente uma fonte e dois sumidouros sendo que:

- (i) a fonte s é o vértice universal de G .
- (ii) um dos sumidouros t é um vértice extremo de G .
- (iii) o outro sumidouro é o vértice universal do grafo $G \setminus \{s, t\}$.

(O enunciado deste teorema pode ser reescrito substituindo-se fonte por sumidouro e sumidouro por fonte).

Dem.: Pelo Teorema 4.4, os itens (i) e (ii) valem.

Suponha, sem perda de generalidade, que $\Sigma = \{1, 2, \dots, l\}$ e $\mathcal{T} = \{\{1\}, \{2, \dots, l\}\}$. Então $s = V_{\{1, 2, \dots, l\}}$, $t = V_{\{1\}}$ e (s, t) é uma aresta maximal de G .

Logo, $G \setminus \{s, t\}$ possui $l - 1$ cliques maximais. Então o vértice $V_{\{2, \dots, l\}}$ pertence a todas as cliques maximais de $G \setminus \{s, t\}$. Portanto, $V_{\{2, \dots, l\}}$ é universal em $G \setminus \{s, t\}$. \triangle

No Corolário 4.9 mostramos as atribuições fonte-sumidouro de um grafo indiferença clique-completo não reduzido.

Corolário 4.9 *As atribuições fonte-sumidouro de um grafo indiferença clique-completo são:*

- $\Sigma = \{\{1, 2, \dots, l\}\}$, e
- a $\mathcal{T} = \{\{1\}, \{2, \dots, l\}\}$,
- b $\mathcal{T} = \{\{1, 2, \dots, l - 1\}, \{l\}\}$,
- c $\mathcal{T} = \{\{1, 2, \dots, l\}\}$,
- d atribuições fonte-sumidouro simétricas.

Dem.: Seja G um grafo indiferença clique-completo.

Pelo Lema 4.8, para toda orientação transitiva do grafo G existe $s \in V_{\{1, 2, \dots, l\}}$ tal que s é ou fonte ou sumidouro. Logo, ou $\Sigma = \{\{1, 2, \dots, l\}\}$ ou $\mathcal{T} = \{\{1, 2, \dots, l\}\}$.

Sem perda de generalidade, seja $\Sigma = \{\{1, 2, \dots, l\}\}$.

Pelo Teorema 4.4, ocorre a. ou b. e simétricas destas, para o grafo indiferença clique-completo reduzido.

Sendo que fontes e sumidouros locais são globais, pelo Teorema 3.1, então, ocorre a ou b para G .

Dessa forma, quando o grafo G não é reduzido, a única atribuição fonte-sumidouro, distinta das do Teorema 4.4, é quando $|V_{\{1, 2, \dots, l\}}| > 1$ e, neste caso, ocorre $\Sigma = \{1, 2, \dots, l\}$, $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, l\}$. $s \neq t$, $s, t \in V_{\{1, 2, \dots, l\}}$.

De fato, se $|V_{\{1, 2, \dots, l\}}| > 1$ é possível construir orientações transitivas com $\Sigma = \{1, 2, \dots, l\}$, $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, l\}$. Sejam $s, t \in V_{\{1, 2, \dots, l\}}$, $s \neq t$. Para a obtenção

de uma orientação transitiva com atribuição fonte-sumidouro do tipo descrito anteriormente, basta orientar todo vértice $v \neq s, t$ de $V_{\{1,2,\dots,l\}}$, como uma "fonte" ou um "sumidouro" em relação aos vértices de $G \setminus V_{\{1,2,\dots,l\}}$ e, orientá-los entre si, não criando circuitos orientados (Figura 4.11).

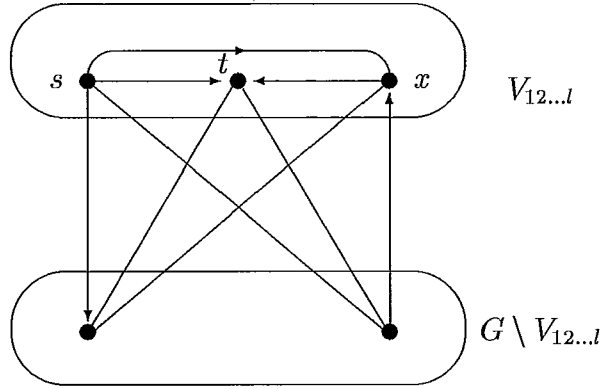


Figura 4.11: Uma orientação transitiva tendo como fonte e sumidouro vértices universais.

Para ver que esta orientação é transitiva, observe que $G \setminus V_{\{1,2,\dots,l\}}$ é um grafo de comparabilidade, os vértices da região $V_{\{1,2,\dots,l\}}$ formam uma clique e são universais.

Portanto, segue o corolário. \triangle

4.4 Uma caracterização de grafos indiferença clique-completos

A seguinte caracterização dos grafos indiferença clique-completos nos dará uma forma de construir uma orientação transitiva para esses grafos dada uma atribuição fonte-sumidouro.

No lema a seguir, veremos uma característica desses grafos.

Lema 4.9 *Sejam G um grafo indiferença clique-completo e M_1, \dots, M_l a ordem linear \prec das cliques maximais de G . Então $G \setminus M_1$ ($G \setminus M_l$) é uma clique em G .*

Dem.: Sendo G um grafo indiferença clique-completo, pelo Teorema 4.1, as únicas regiões, não vazias, são:

$$V_{\{1\}}, V_{\{1,2\}}, \dots, V_{\{1,2,\dots,l\}}, V_{\{2,\dots,l\}}, \dots, V_{\{l\}}.$$

Suponha que $G \setminus M_1$ não seja uma clique em G . (Observe que $V_{\{2,\dots,l\}}$ e $V_{\{l\}}$ pertencem a $G \setminus M_1$.) Então existe $x \in G \setminus M_1$ tal que $(x, V_{\{l\}}) \notin A$. Como $x \notin M_1$,

existe $y \in M_1$ tal que $(x, y) \notin A$. Logo, $y \neq V_{\{1,2,\dots,l\}}$ ($V_{\{1,2,\dots,l\}}$ é universal). Veja Figura 4.12.

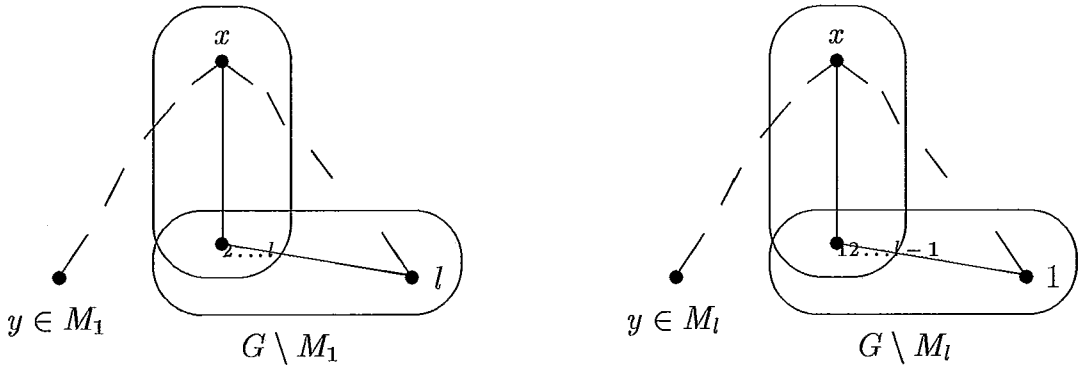


Figura 4.12: Exemplo para a demonstração do Lema.

Se $y = V_{\{1,2\}}, V_{\{1,2,3\}}, \dots, V_{\{1,2,\dots,l-1\}}$, então o grafo gerado pelo conjunto $\{x, y, V_{\{2,\dots,l\}}, V_{\{l\}}\}$ é um subgrafo isomorfo a $K_{1,3}$ em G . Contradição.

Se $y = V_{\{1\}}$ então o grafo gerado pelo conjunto $\{x, y, V_{\{l\}}, V_{\{1,2,\dots,l\}}\}$ é um subgrafo isomorfo a $K_{1,3}$ em G . Contradição.

Portanto, $G \setminus M_1$ é uma clique em G .

A prova é análoga para $G \setminus M_l$. \triangle

Observe que se ao retirar uma clique maximal de um grafo qualquer e o grafo resultante for uma clique, nem sempre o grafo é indiferença clique-completo. No exemplo da Figura 3.4, o grafo é clique-completo e a retirada de qualquer clique maximal do grafo origina um grafo que é uma clique e, como mencionado anteriormente, este grafo não é grafo indiferença.

Lema 4.10 *Seja G um grafo com $V_{\{1\}}$ ou $V_{\{l\}}$ não vazios. Se G possui uma orientação transitiva onde pelo menos um dos sumidouros ou uma das fontes pertence à $V_{\{1\}}$ ($V_{\{l\}}$) e se $G \setminus M_1$ ($G \setminus M_l$) é uma clique em G , então para todo $(v, w) \in A$ com $v \in M_1$ (M_l) e $w \in G \setminus M_1$ ($G \setminus M_l$) tem-se $v \rightarrow w$.*

Dem.: Considere uma orientação transitiva para G com um sumidouro $t \in V_{\{1\}}$, a clique M_1 e $G \setminus M_1$. Veja Figura 4.13.

Seja $(v, w) \in A$ com $v \in M_1$ e $w \in G \setminus M_1$.

Observe, primeiro, que $v \neq t$, pois $t \in V_{\{1\}}$. Como $v \in M_1$ então $v \rightarrow t$. Logo, $v \rightarrow w$, pois caso contrário, $(w, t) \in A$. Contradição.

Se o sumidouro t pertencer à $V_{\{l\}}$, uma prova análoga conclui que uma aresta incidente a vértices v de M_l e w de $G \setminus M_l$ está orientada de v para w . \triangle

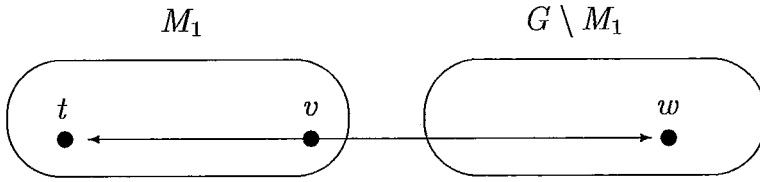


Figura 4.13: A orientação das arestas entre M_1 e $G \setminus M_1$.

Teorema 4.6 *Um grafo G é indiferença clique-completo e reduzido se e somente se \vec{G} é uma orientação transitiva com $\Sigma = \{\{1, 2, \dots, l\}\}$, $\mathcal{T} = \{\{1\}, \{2, \dots, l\}\}$ ($\Sigma = \{\{1, 2, \dots, l\}\}$, $\mathcal{T} = \{\{1, 2, \dots, l-1\}, \{l\}\}$ ou simétricas) e $G \setminus M_1$ é uma clique em G .*

Dem.: (\implies) Os Algoritmo 4.1 e Lema 4.9 demonstram a suficiência do teorema. (\impliedby) Sendo $\Sigma = \{\{1, 2, \dots, l\}\}$ uma atribuição fonte para G então $V_{\{1, 2, \dots, l\}} \neq \emptyset$, logo, existe pelo menos um vértice universal em G , portanto G é clique-completo.

A seguir será construída uma ordenação linear, $<$, para V tal que quaisquer que sejam u, v, w vértices de G com $u < v < w$ e $(u, w) \in A$ tem-se $(u, v) \in A$ e $(v, w) \in A$. (Logo, G é grafo indiferença, pelo Teorema 2.13.)

Primeiro, ordene os vértices de M_1 tal que

$$v_1 < v_2 \iff g_e(v_1) > g_e(v_2) \quad (g_s(v_1) > g_s(v_2)) \iff v_2 \longrightarrow v_1.$$

Ordene os vértices de $G \setminus M_1$ de forma análoga.

Concatene as ordenações de M_1 e $G \setminus M_1$ e nomeie os vértices de G de $v_1, v_2, \dots, v_{|V|}$, de acordo com a posição após a concatenação, isto é, v_i é o i -ésimo vértice de G na seqüência formada após a concatenação. Figura 4.14.

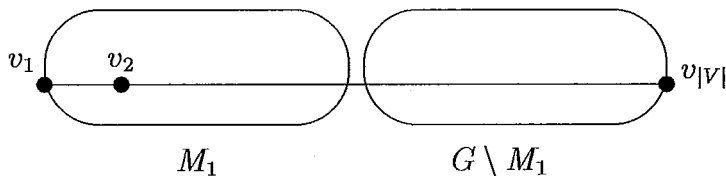


Figura 4.14: A concatenação das ordens de M_1 e $G \setminus M_1$.

Considere a ordem linear sobre V :

$$v_i < v_j \text{ se e somente se } i < j.$$

Tem-se, então, que: (Figura 4.15)

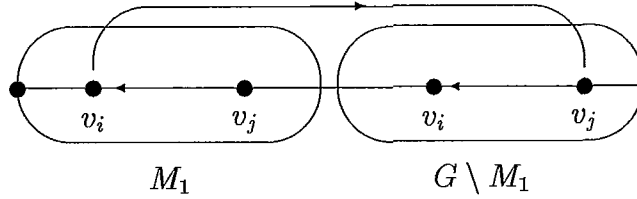


Figura 4.15: Uma ordem linear sobre V .

- se $v_i, v_j \in M_1$ e $v_i < v_j$ então $v_j \rightarrow v_i$;
- se $v_i, v_j \in G \setminus M_1$ e $v_i < v_j$ então $v_j \rightarrow v_i$;
- se $v_i \in M_1$ e $v_j \in G \setminus M_1$ e $(v_i, v_j) \in A$ então $v_i \rightarrow v_j$. (Lema 4.10.)

Sejam $u, v, w \in V$ tal que $u < v < w$ e $(u, w) \in A$.

Se $u, w \in M_1$ então $(u, v) \in A$ e $(v, w) \in A$ (M_1 é clique). Analogamente, se $u, w \in G \setminus M_1$.

Suponha $u \in M_1$ e $w \in G \setminus M_1$. Se $v \in M_1$ então $(u, v) \in A$ (M_1 é clique). Sendo $u < v$ tem-se $v \rightarrow u$ e como $u \in M_1$ e $w \in G \setminus M_1$ tem-se $u \rightarrow w$, logo, pela transitividade de \vec{G} , $(v, w) \in A$ e $v \rightarrow w$. (Figura 4.16.)

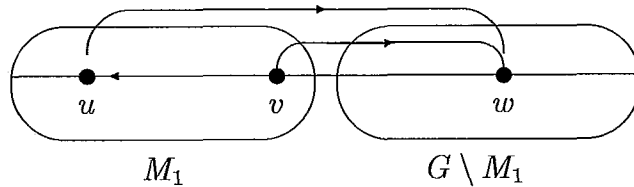


Figura 4.16: $u < v < w$, $(u, w) \in A$ e $u, v \in G_1$, $w \in G \setminus M_1$.

Se $v \in G \setminus M_1$ então $(v, w) \in A$ ($G \setminus M_1$ é clique) e, novamente, pela transitividade de \vec{G} , $(u, v) \in A$. De fato, $w \rightarrow v$, pois $v < w$ e $u \rightarrow w$, pois $u \in M_1$ e $w \in G \setminus M_1$. (Figura 4.17.)

Portanto, pelo Teorema 2.13, G é grafo indiferença. \triangle

Como uma consequência direta dos lemas e teorema anteriores temos uma forma de construir uma orientação transitiva para um grafo indiferença clique-completo e reduzido, dada uma atribuição fonte-sumidouro. Basta considerar a ordenação linear das cliques maximais do grafo e observar que o grafo pode ser decomposto em duas cliques maximais M_1 e $G \setminus M_1$ (Lema 4.9) que originam um corte orientado

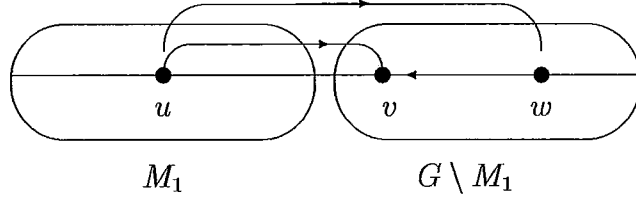


Figura 4.17: $u < v < w$, $(u, w) \in A$ e $u \in G_1$, $v, w \in G \setminus M_1$.

para uma (qualquer) orientação transitiva com atribuição fonte-sumidouro conhecida (Lema 4.10).

Sendo conhecida uma atribuição fonte-sumidouro, a orientação do corte entre M_1 e $G \setminus M_1$, o que resta orientar são exatamente as cliques M_1 e $G \setminus M_1$.

Considere a atribuição fonte-sumidouro $(\Sigma, \mathcal{T}) = (\{12 \dots l\}, \{1, 2 \dots l\})$ para um grafo indiferença clique-completo e reduzido G .

Então, $M_1 = G[\{1, 12, \dots, 12 \dots l\}]$ e $G \setminus M_1 = G[\{2 \dots l, \dots, l\}]$.

Considere a ordem indiferença $<$ para G e construa uma orientação para G da seguinte forma:

- Oriente $v, w \in M_1$ (M_l) ou pertencente a $G \setminus M_1$ ($G \setminus M_l$) como:

$$w \longrightarrow v \iff v = v_i, w = v_j \text{ e } i < j \text{ em } <, \quad (4.1)$$

- Oriente as arestas entre M_1 e $G \setminus M_1$ de acordo com o Lema 4.10.

A orientação descrita anteriormente é transitiva. Uma afirmação análoga é verdadeira para M_l e $G \setminus M_l$, com $(\Sigma, \mathcal{T}) = (\{1, 2, \dots, l\}, \{\{1, 2, \dots, l-1\}, \{l\}\})$.

A demonstração da transitividade da orientação será feita para $(\Sigma, \mathcal{T}) = (\{1, 2, \dots, l\}, \{\{1\}, \{2, \dots, l\}\})$.

Sejam u, v, w vértices de G . Observe que 4.1 orienta transitivamente as arestas das cliques M_1 e $G \setminus M_1$.

Considere, portanto, $u \in M_1$ e $v, w \in G \setminus M_1$. Logo, $u < v$ e $u < w$.

Se $v < w$ e $(u, v) \in A$ então $u \xrightarrow{\text{Lema 4.10}} v \xrightarrow{4.1} w$. (Figura 4.18.)

Se $w < v$ e $(u, v) \in A$ então $(u, w) \in A$, pois os vértices maiores do que u e menores do que v na ordem \mathcal{O} pertencem a uma mesma clique maximal de G . Então, $u \xrightarrow{\text{Lema 4.10}} v \xrightarrow{4.1} w$ e, pelo Lema 4.10, $u \longrightarrow w$. (Figura 4.19.) \triangle

A Figura 4.20 demonstra a orientação transitiva construída como acima para $\Sigma = \{1234\}$ e $\mathcal{T} = \{1, 234\}$.

Observe que a orientação descrita acima continua transitiva se G não for um grafo reduzido, pois se alguma região V_S possuir mais de um vértice, orienta-se de

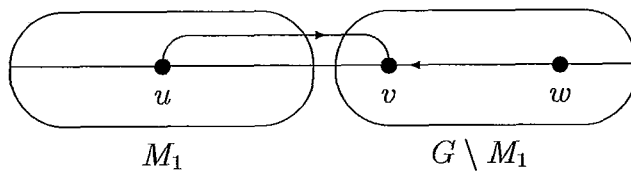


Figura 4.18: $u \in M_1$, $v, w \in G \setminus M_1$, $v < w$ e $(u, v) \in A$.

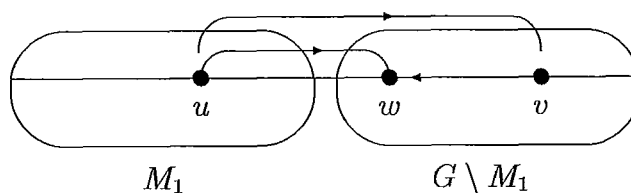


Figura 4.19: $u \in M_1$, $v, w \in G \setminus M_1$, $w < v$ e $(u, v) \in A$.

forma acíclica as arestas entre os vértices de V_S e mantém-se a orientação do vértice representante de V_S em relação aos de $V_{S'}$, $S \neq S'$, para os demais vértices. Este procedimento preserva a transitividade da orientação.

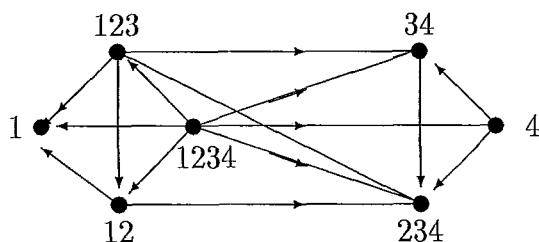


Figura 4.20: Uma orientação transitiva para um grafo indiferença clique-completo e reduzido.

Capítulo 5

Grafos Clique-Completos sem Vértices Universais

Descrevemos alguns subgrafos que todo grafo clique-completo sem vértices universais contém como subgrafo induzido. Como um subproduto obtivemos uma condição necessária para um grafo ser ao mesmo tempo grafo clique-completo e grafo clique. Nossa conjectura reduz o número desses subgrafos. Mostramos a validade de nossa conjectura para a classe dos grafos triangularizados, dos grafos planares bem como quando restringimos o tamanho das cliques maximais ou o número de cliques maximais do grafo.

A seção 5.1 exhibe subgrafos que um grafo clique-completo sem vértices universais contém.

A seção 5.2 enuncia a conjectura e trata dos casos particulares em que nossa conjectura é válida.

5.1 As pirâmides estendidas de um grafo clique-completo

No Lema 5.1 demonstramos que os vértices pertencentes à regiões V_S com $|S| > 1$, são adjacentes aos vértices pertencentes à interseção de quaisquer $l - 1$ cliques maximais. Este lema será extremamente útil na prova do próximo teorema.

Lema 5.1 *Seja G tal que $V_{S_i} \neq \phi$, $i = 1, \dots, l$, onde $S_i = \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, l\}$, $l \geq 2$.*

Então para todo vértice v de G tal que $v \notin V_S$, $|S| = 1$, $S \subseteq X_l$, v é adjacente a todo vértice em $\bigcup_{i=1}^l V_{S_i}$.

Dem.: Seja $v \in V$, $v \in V_S$, $|S| > 1$.

Sejam $a_i \in V_{S_i}$, $i = 1, \dots, l$.

Sendo que as regiões V_S , $S \subseteq X_l$, formam uma partição de V , então $v \in V_S$, algum S , $S \subseteq X_l$. Por hipótese, $|S| > 1$.

Suponha que exista $i \in \{1, \dots, l\}$ tal que $(v, a_i) \notin A$. Então $S \cap S_i = \emptyset$ se e somente se $S = \{i\}$. Contradição. \triangle

Um grafo G contém uma *pirâmide estendida* se G contiver pelo menos um sub-grafo induzido isomorfo a algum dos grafos da Figura 5.1.

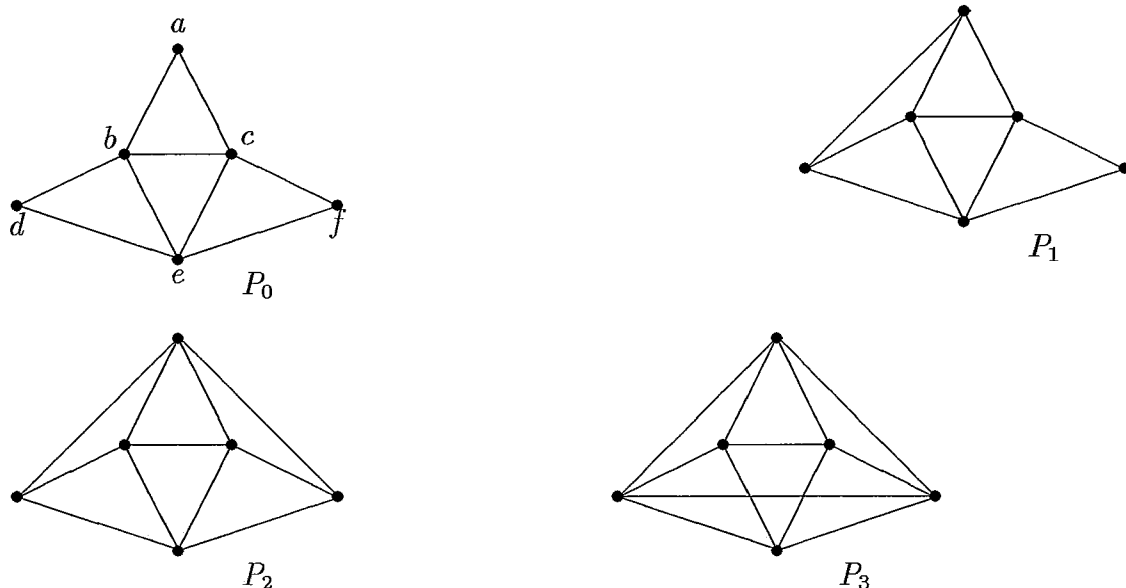


Figura 5.1: Pirâmides estendidas.

Denotaremos o primeiro grafo da Figura 5.1 por P_0 (a pirâmide) e os demais por P_1 , P_2 , P_3 , nessa ordem.

A nomeação dos vértices, que usaremos, para as quatro pirâmides estendidas está indicada na pirâmide da Figura 5.1. Então, a aresta (a, f) não existe em P_0 e P_1 , e existe em P_2 e P_3 .

Observe que, por definição, uma pirâmide estendida não possui as arestas (a, e) , (b, f) , (c, d) .

Diremos a pirâmide estendida $[a b c d e f]$ e a ordem dos vértices subentende a relação de adjacência de uma das pirâmides estendidas da Figura 5.1. Logo, em $[e a f c b d]$ a aresta (b, f) existe (veja Figura 5.2). Observe que esta notação não indica se a pirâmide estendida que está sendo denotada é a P_0 ou a P_1 ou a P_2 ou a P_3 .

Quando não especificamos a ordem dos vértices de uma pirâmide estendida estamos considerando a da Figura 5.1.

Seja G um grafo contendo $[a b c d e f]$. Denotaremos por \mathcal{C}_i , $i = 1, 2, \dots, 8$, o conjunto das cliques maximais de G , que contém $\{a, b, c\}$, $\{b, d, e\}$, $\{c, e, f\}$, $\{b, c, e\}$, $\{a, b, d\}$, $\{a, c, f\}$, $\{d, e, f\}$, e $\{a, d, f\}$, respectivamente. Novamente por definição, $\omega(M) \geq 3$ para cada $M \in \mathcal{C}_i$ e qualquer i .

Observe que quando dizemos que G contém uma pirâmide estendida, não estamos restringindo nem a cardinalidade de \mathcal{C}_i , $i = 1, \dots, 8$, nem o tamanho das cliques

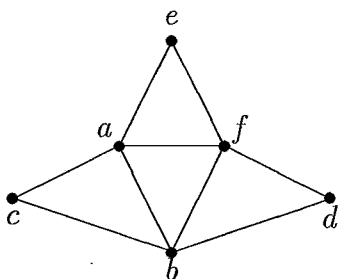


Figura 5.2: Uma pirâmide estendida $[e a f c b d]$.

maximais pertencentes a cada \mathcal{C}_i , exceto a restrição advinda da definição ($\omega(M) \geq 3$). O grafo da Figura 5.3 contém um P_0 .

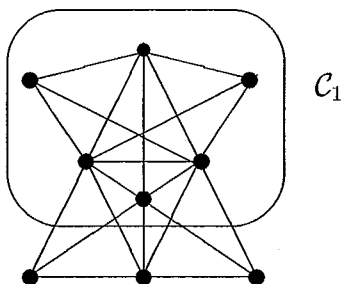


Figura 5.3: Um grafo que contém P_0 .

A partir daqui, salvo menção contrária, o símbolo G denotará um grafo clique-completo.

Provaremos que todo grafo clique-completo que não possui um vértice universal contém uma pirâmide estendida.

Teorema 5.1 *Seja G um grafo clique-completo. Então pelo menos uma dentre (i) e (ii) ocorre:*

- (i) G contém um vértice universal.
- (ii) G contém uma pirâmide estendida.

Observe que se G é uma clique, então todo vértice de G é universal.

Note, também, que se existir uma clique maximal de tamanho dois em um grafo clique-completo, ocorre (i).

É fácil ver que se $l = 2$, ocorre (i).

Hamelink [14] provou que um grafo H , com três cliques maximais, é clique-completo se e somente se H possui um vértice universal.

Na prova do Teorema 5.1 utilizamos o Lema 5.2 e a Observação 5.1, provados a seguir.

Lema 5.2 *Seja G um grafo, não necessariamente clique-completo, com $l \geq 2$ cliques maximais. Suponha que todo conjunto de $l - 1$ cliques maximais têm interseção não vazia. Então pelo menos uma dentre as condições abaixo ocorre.*

(i) G contém um vértice universal.

(ii) G contém uma pirâmide.

Dem.: Os casos $l = 2$ e 3 foram analisados anteriormente.

Seja $l \geq 4$ e suponha que G não possua vértices universais.

Considere os elementos $V_{12\dots i-1 \ i+1\dots l}$, $1 \leq i \leq l$, da partição clique de G que correspondem às l regiões, interseção de $l - 1$ cliques maximais de G .

Por hipótese, $V_{12\dots i-1 \ i+1\dots l} \neq \phi$ para $1 \leq i \leq l$. Sejam $a_i \in V_{12\dots i-1 \ i+1\dots l}$, $1 \leq i \leq l$ e considere a clique $C = \{a_i, 1 \leq i \leq l\}$.

Como G não é uma clique, G contém pelo menos um vértice x , não pertencente à clique C .

Caso A: Suponha que todos os vértices x de G , distintos de a_i , $1 \leq i \leq l$, pertençam às regiões V_S , com $|S| \geq 2$.

Então, pelo Lema 5.1, cada vértice x é adjacente a todo vértice de C .

Logo, C está contida em todas as cliques maximais de G , ou seja, $C \subseteq \bigcap_{i=1}^l M_i = V_{12\dots l}$. Como por hipótese $V_{12\dots l} = \phi$, obtemos uma contradição.

Caso B: Suponha que existam vértices x_j de G que pertençam à V_S com $S = \{j\}$, $1 \leq j \leq l$.

Sabemos que $(x, y) \in A$ se e somente se $x \in V_S$, $y \in V_{S'}$ e $S \cap S' \neq \phi$.

Então, x_j é adjacente a todo vértice em $C_j = \{a_i \in C, i \neq j\}$. ($\{j\} \cap \{1, 2, \dots, i-1, i+1, \dots, l\} = \{j\}$.)

Seja \mathcal{C} o conjunto dos C_j . Observe que $\mathcal{C} \neq \phi$, por hipótese.

A interseção $\bigcap_{C_j \in \mathcal{C}} C_j$ está contida em todas as cliques maximais de G . (Lembre-se que se $x \in V$, $x \in V_S$ com $|S| \geq 2$, então x é adjacente a todo elemento da clique C , em particular, é adjacente à $\bigcap_{C_j \in \mathcal{C}} C_j$.)

Logo, $\phi \neq \bigcap_{C_j \in \mathcal{C}} C_j \subseteq V_{12\dots l}$, o que contradiz a hipótese inicial.

Se a interseção for vazia, então $V_j \neq \phi$, $1 \leq j \leq l$. Logo, existem $x_j \in V_j$, $1 \leq j \leq l$ e o subgrafo induzido por $\{a_1, a_2, a_3, x_1, x_2, x_3\}$ forma uma pirâmide estendida induzida em G . Esta pirâmide estendida existe pois $l \geq 4$. (Veja Figura 5.4.)

Observe que a pirâmide estendida $[a_1, a_2, a_3, x_1, x_2, x_3]$ é a pirâmide P_0 , pois não existe aresta entre os vértices pertencentes a V_j e V_k , $1 \leq j \neq k \leq l$. Δ

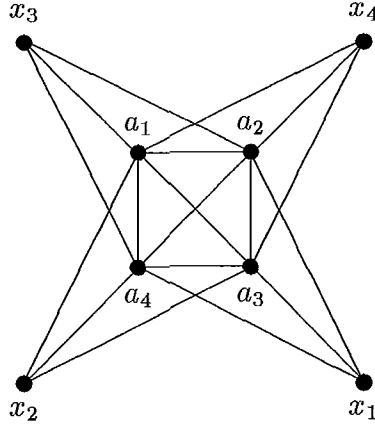


Figura 5.4: A pirâmide estendida $[a_1, a_2, a_3, x_1, x_2, x_3]$ é uma pirâmide.

Observação 5.1 *Se um grafo G com l cliques maximais contiver um conjunto com $l - 1$ cliques maximais cuja interseção é vazia, então G não contém um vértice universal.*

Dem.: Seja G um grafo contendo um conjunto com $l - 1$ cliques maximais cuja interseção é vazia.

Suponha que x é um vértice universal de G .

Logo, x pertence à interseção de todas as cliques maximais de G .

Portanto, x pertence à interseção de quaisquer conjuntos com $l - 1$ cliques maximais, contradizendo a hipótese. \triangle

Demonstração do Teorema 5.1:

Relembre, primeiro, que todo grafo clique-completo com $l \leq 3$ cliques maximais contém um vértice universal.

Seja G um grafo clique-completo sem vértices universais e com $l \geq 4$ cliques maximais.

Logo, $\bigcap_{i=1}^l M_i = \phi$.

Considere um subgrafo minimal H de G , união de $s \leq l$ cliques maximais de G , M_1, M_2, \dots, M_s tais que

- $\bigcap_{i=1}^s M_i = \phi$, e
- qualquer subconjunto de $s - 1$ cliques maximais têm interseção não vazia.

Observe que H existe, pois G não contém vértices universais e, por Hamelink, todo conjunto com três cliques maximais contém um vértice universal.

Logo, $4 \leq s \leq l$.

Da minimalidade de H e do Lema 5.2, H contém uma pirâmide estendida (observe que, por construção, H não contém um vértice universal em H).

Se o grafo união de $M_1, M_2, \dots, M_s, M_r$ for isomorfo a H , para qualquer que seja a clique maximal M_r de G , com $r > s$, então G contém uma pirâmide estendida.

Suponha que exista uma clique maximal M_r de G , $r > s$ tal que o grafo união das s cliques maximais de H e M_r não seja isomorfo a H .

Sejam M_1, M_2, M_3, M_4 as cliques maximais de G que contém os conjuntos $\{a, b, c\}$, $\{b, d, e\}$, $\{c, e, f\}$ e $\{b, c, e\}$ formados pelos vértices da pirâmide estendida de H , respectivamente.

Suponha que $(a, e) \in A(M_r)$, ou seja, $[a, b, c, d, e, f]$ não é uma pirâmide estendida de G . (Veja Figura 5.5.)

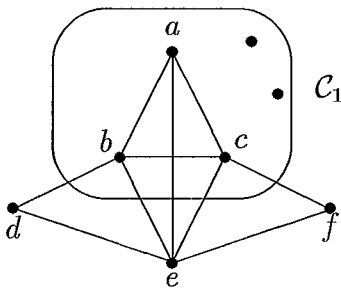


Figura 5.5: $(a, e) \in A(M_r)$.

Considere a clique maximal M_1 . Se todo vértice v de M_1 , for adjacente a e , então $e \in V(M_1)$. Contradição à maximalidade de M_1 .

Logo, existe $v_1 \in M_1$ (v_1 pode ser igual a a) tal que $(v_1, e) \notin A$.

Com raciocínio análogo, conclui-se que existem v_2, v_3 pertencentes a M_2 e M_3 , respectivamente, tal que (v_2, c) e (v_3, b) não são arestas de G . (Observe que v_1, v_2, v_3 , podem ser, respectivamente, iguais a a, d, f .)

Portanto, o grafo união de $M_1, M_2, \dots, M_s, M_r$ contém uma pirâmide estendida: $[v_1, b, v_2, e, v_3, c]$.

A repetição indutiva deste raciocínio implica que G contém uma pirâmide estendida. \triangle

Hamelink [14] provou que se um grafo H contiver uma pirâmide estendida e se a única clique maximal contendo $\{b, c, e\}$ for este triângulo, então H não é um grafo clique.

É bom lembrar que um grafo clique-completo não é necessariamente um grafo clique. A pirâmide é um grafo clique-completo que não é um grafo clique.

Mostramos, como corolário do Teorema 5.1, características de grafos clique-completos que são grafos clique e daqueles que não são grafos clique.

Ambas as classes contém uma pirâmide estendida, quando o grafo não possui vértices universais, que pode diferir no tamanho de algumas de suas cliques maximais. Então possuir ou não pirâmides estendidas não separa os grafos cliques daqueles que não o são.

Corolário 5.1 *Seja G um grafo clique-completo. Se G é grafo clique então pelo menos uma dentre (a) e (b) ocorre.*

(a) G contém um vértice universal.

(b) Toda pirâmide estendida de G satisfaz:

$$\omega(M) \geq 4, \text{ para todo } M \in \mathcal{C}_4 \text{ e } M \in \mathcal{C}_i, \text{ algum } i \text{ em } \{1, 2, 3\}.$$

Além disso, se G não é grafo clique, então G contém uma pirâmide estendida.

Dem.: Sendo G um grafo clique-completo, então ocorre pelo menos uma dentre os itens (i) e (ii) do Teorema 5.1.

Seja G um grafo clique. Por Hamelink, se ocorrer (ii), tem-se $\omega(M) \neq 3$, para $M \in \mathcal{C}_4$, logo $\omega(M) \geq 4$ por definição de pirâmide estendida.

Considere uma pirâmide estendida em G e suponha $\omega(M_i) = 3$ para $M_i \in \mathcal{C}_i$, $i=1, 2$ e 3 . Observe, primeiro, que uma família que contém as cliques formadas pelas arestas de um triângulo não satisfaz Helly. Logo, qualquer família \mathcal{F} de cliques que cobre as arestas de G e satisfaz a propriedade Helly contém os triângulos de G . Logo, M_1, M_2, M_3 , pertencem à família \mathcal{F} . Mas, $\bigcap_{i=1}^3 M_i = \emptyset$. Portanto, G não é grafo clique. Contradição.

Suponha que G não é um grafo clique. Então as cliques maximais de G não satisfazem a propriedade Helly.

Além disso, por definição de grafo clique-completo, o conjunto das cliques maximais de G que se intersectam duas a duas é o conjunto das cliques maximais de G .

Logo, G não contém um vértice universal (pois as cliques maximais de G não satisfazem Helly). \triangle

Observe que um grafo clique-completo sem vértices universais que contém um subgrafo como o descrito em (b) não é necessariamente um grafo clique, ou seja obtivemos uma condição apenas necessária para que um grafo pertença à interseção das classes dos grafos clique-completos e grafos clique.

Um exemplo é o grafo G da Figura 5.6.

De fato, qualquer família de cliques de G que cubra as arestas de G e satisfaça à propriedade Helly, precisa conter as cliques maximais $\{a, b, c\}$ e $\{c, e, f\}$. Logo nem $\{b, e\}$, nem $\{b, e, v\}$ pertence a \mathcal{F} , pois caso contrário, $\{a, b, c\}$, $\{c, e, f\}$ e $\{b, e\}$ ou $\{b, e, v\}$ seria uma subfamília de \mathcal{F} de cliques que se cruzam duas a duas e não possui um vértice comum. Pelo mesmo motivo, $\{b, d, e, w\} \notin \mathcal{F}$. Portanto, para que \mathcal{F} cubra as arestas (b, v) e (e, v) é necessário que $\{b, e, c, v\} \in \mathcal{F}$.

Considerando, agora, a clique maximal $\{b, d, e, w\}$.

Já vimos que $\{b, d, e, w\} \notin \mathcal{F}$.

Se ou $\{b, d, e\}$ ou $\{b, e, w\}$ pertencer à \mathcal{F} , $\{a, b, c\}$, $\{c, e, f\}$, $\{b, d, e\}$ (ou $\{b, e, w\}$) é uma subfamília de \mathcal{F} cujos elementos se cruzam dois a dois e não possuem um vértice comum.

Se $\{d, e, w\} \in \mathcal{F}$, então para que \mathcal{F} cubra G é necessário que $\{b, d, w\} \in \mathcal{F}$. Neste caso, $\{d, e, w\}$, $\{b, d, w\}$, $\{b, c, e, v\}$, é uma subfamília cujos elementos se intersectam dois a dois e não possui vértice comum.

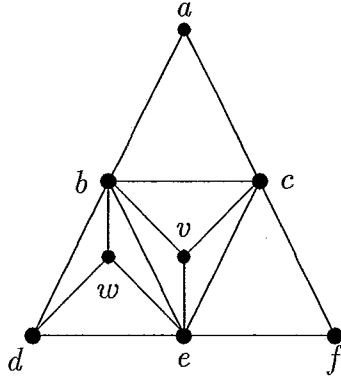


Figura 5.6: Um grafo que não é grafo clique.

Logo, o grafo da Figura 5.6 não é um grafo clique.

Na Figura 5.7, ambos os grafos G e H são clique-completos, contêm uma pirâmide estendida, e G não é grafo clique, enquanto H o é.

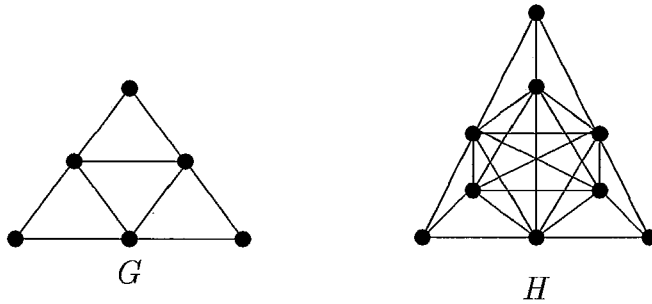


Figura 5.7: O grafo G não é grafo clique e H é grafo clique.

5.2 A conjectura e os casos particulares

Conjetura 5.1 *Seja G um grafo clique-completo. Então pelo menos uma dentre (i) e (ii) ocorre.*

(i) G contém um vértice universal.

(ii) G contém uma pirâmide.

Em casos particulares, tais como para $\omega(G) \leq 4$ ou $l \leq 5$ ou em algumas classes de grafos, a conjectura é verdadeira.

5.2.1 O caso $w(G) \leq 3$

Decidimos evidenciar o caso $\omega(G) \leq 3$, porque encontramos na literatura resultados que nos conduziram à demonstração. Roberts e Spencer [29] demonstraram que se $\omega(G) \leq 3$ então G não é um grafo clique se e somente se contiver um subgrafo (não necessariamente induzido) isomorfo à pirâmide, ou seja, se G contiver uma pirâmide estendida ($\omega(G) \leq 3$).

Ainda, nesse mesmo artigo, demonstraram que se $\omega(G) \leq 3$, G é um grafo clique se e somente se as cliques maximais de G satisfazem a propriedade Helly.

Esses dois resultados acrescidos do Lema 5.3, demonstram a conjectura para $\omega(G) \leq 3$. (Veja Teorema 5.2.)

Lema 5.3 *Seja G um grafo clique-completo. Suponha que G contém algum P_i , $i = 1, 2, 3$. Então existe um vértice v em G adjacente a todo vértice de P_i , $i = 1, 2, 3$.*

Dem.: Sejam M_1, \dots, M_l as cliques maximais de G . Suponha que G contém P_1 .

Sejam C_1 e C_2 as duas cliques de P_1 tal que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Veja Figura 5.8.

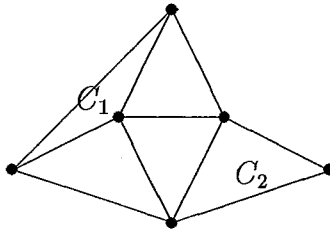


Figura 5.8: As cliques C_1 e C_2 são disjuntas.

Observe que C_1 e C_2 não são cliques maximais de G , pois caso contrário, $K(G) \not\cong K_l$.

Logo, $C_1 \subseteq M_1$ e $C_2 \subseteq M_2$. Mas, $M_1 \cap M_2 \neq \emptyset$. Logo existe $v \in M_1 \cap M_2$ e v é adjacente a todo vértice de M_1 e a todo vértice de M_2 . Em particular, aos vértices de C_1 e C_2 . Mas, $V(C_1) \cup V(C_2) = V(P_1)$. Portanto, v é adjacente a todo vértice em P_1 .

Análogo para P_2 e P_3 . \triangle

Corolário 5.2 *Seja G um grafo clique-completo. Se G contém algum P_i , $i = 1, 2, 3$, então $\omega(G) > 3$.*

Dem.: A demonstração é direta do Lema 5.3. \triangle

Teorema 5.2 *Seja G um grafo clique-completo e suponha $\omega(G) \leq 3$. Pelo menos uma dentre as condições abaixo ocorre:*

(i) G contém um vértice universal.

(ii) G contém uma pirâmide.

Dem.: Suponha que G não contém vértices universais.

Então as cliques maximais de G não satisfazem a propriedade Helly. Logo, sendo $\omega(G) \leq 3$, Roberts e Spencer demonstraram que G não é um grafo clique.

Ainda, por Roberts e Spencer, G possui uma pirâmide estendida.

Agora, pelo Corolário 5.2, G não contém P_i , $i = 1, 2, 3$, pois $\omega(G) \leq 3$. Portanto, G contém uma pirâmide como subgrafo induzido. \triangle

O Teorema 5.2 segue, também, do Teorema 5.1, do Lema 5.3 e do Corolário 5.2. Esta é uma prova alternativa e dentro do contexto deste trabalho.

5.2.2 Classes especiais de grafos

Para as classes de grafos tais como a dos grafos triangularizados e planares a conjectura também é válida.

Teorema 5.3 *Seja G um grafo clique-completo e triangularizado. Então pelo menos uma dentre (a) e (b) ocorre.*

(a) G contém um vértice universal.

(b) G contém uma pirâmide.

Dem.: De fato, pelo Teorema 5.1, pelo menos uma dentre (i) e (ii) ocorre.

(i) G contém um vértice universal.

(ii) G contém uma pirâmide estendida.

Se ocorrer (i), vale (a). Caso contrário, se ocorrer (ii), observe que P_1 , P_2 e P_3 não são grafos triangularizados, portanto, vale (b). \triangle

Relembramos, aqui, a bem conhecida caracterização de grafos planares dada por Kuratowski [18] através de subgrafos proibidos (não necessariamente induzidos).

Teorema 5.4 *Um grafo é planar se não contém nenhuma subdivisão de K_5 ou $K_{3,3}$. (Veja Figura 5.9.)*

Teorema 5.5 *Seja G um grafo clique-completo e planar. Então pelo menos uma dentre (a) e (b) ocorre.*

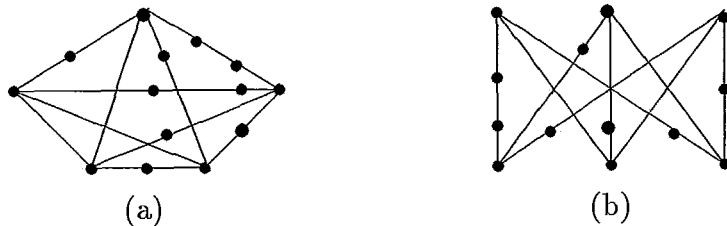


Figura 5.9: (a) Uma subdivisão de K_5 ; (b) Uma subdivisão de $K_{3,3}$.

(a) G contém um vértice universal.

(b) G contém uma pirâmide.

Dem.: Pelo Teorema 5.1 pelo menos uma dentre (i) e (ii) ocorre.

(i) G contém um vértice universal.

(ii) G contém uma pirâmide induzida.

Se ocorrer (i), vale (a).

Suponha que ocorra (ii).

Se G contiver algum P_i , $i=1,2$ ou 3 , então existe $x \in V$ tal que x é universal em P_i .

Logo, G contém um $K_{3,3}$ com vértices x, a, e, b, d, c . (Figura 5.10.)

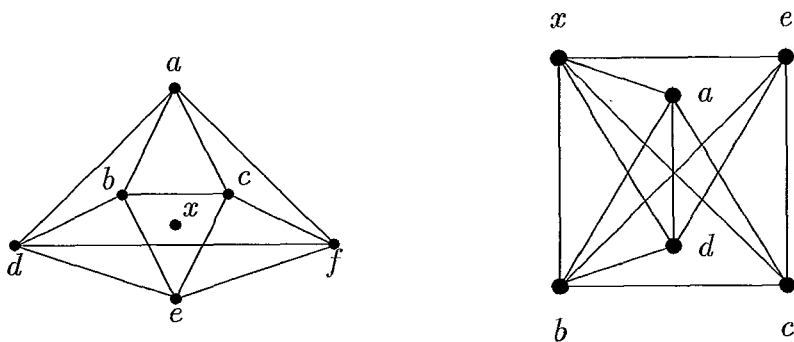


Figura 5.10: Um $K_{3,3}$ em um grafo clique-completo.

Portanto, ocorre (b). \triangle

Podemos observar que a conjectura vale para uma classe de grafos mais ampla que a dos grafos planares: a classe dos grafos que proíbe apenas subgrafos isomorfos a subdivisões de $K_{3,3}$.

É bom ressaltar, neste ponto, a importância dessas classes. São classes clássicas da Teoria dos Grafos, sendo que a dos grafos triangularizados têm papel de destaque na Teoria dos Grafos Perfeitos.

5.2.3 Os casos $\omega(G) \leq 4$ e $l \leq 6$

Na tentativa de demonstrar a conjectura e nas provas de alguns casos especiais, a estratégia usada foi de caráter local. Partimos do conhecimento das relações de adjacências entre os vértices de uma pirâmide estendida contida em um grafo clique-completo.

Adicionamos a estas relações de adjacências, outras envolvendo vértices distintos dos vértices da pirâmide estendida considerada.

Usando estas informações tentamos construir uma pirâmide.

Com esta abordagem nos deparamos com um número grande de casos a analisar.

Descrevemos, a seguir, os passos efetuados para a redução de 193 a 27 casos, no total.

Considere G um grafo clique-completo sem vértices universais contendo pelo menos uma dentre as pirâmides estendidas P_1 , P_2 ou P_3 .

Nas considerações, a seguir, G denotará um grafo clique-completo sem vértices universais contendo P_3 . Todas serão válidas se G contiver P_1 ou P_2 .

Usamos essencialmente dois fatos básicos: um refere-se à classe dos grafos clique-completos, outro, à relação de adjacência entre os vértices de P_3 (que é conhecida [a b c d e f]).

Pelo Lema 5.3, G contém um vértice x que é universal em P_3 e, por hipótese, não é universal em G . Logo, existe $y \in V$ tal que $(x, y) \notin A$. (Veja Figura 5.11.)

Em todas as figuras, o vértice x universal na pirâmide estendida será representado como um vértice isolado, mas estamos subentendendo as adjacências a todos os vértices da figura, exceto y .

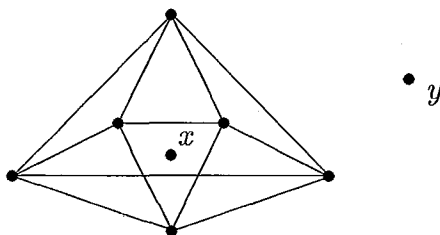


Figura 5.11: (x, y) não é uma aresta de G .

Considere M_y uma clique maximal de G que contém y . Lembre-se que M_y intersecta cada clique maximal de G , pois G é grafo clique-completo. Em particular intersecta as que pertencem a \mathcal{C}_i , $i = 1, \dots, 8$.

A interseção de M_y com cada clique maximal em C_i , poderá ter um ou mais vértices de P_3 . Ou seja, cada vértice de P_3 , poderá ou não pertencer à essa interseção. Logo, existem 2^6 conjuntos \mathcal{I} de vértices de P_3 , pertencentes à interseção das cliques maximais de C_i com M_y . Isto é, existem 2^6 conjuntos \mathcal{I} de vértices de P_3 que pertencem à M_y .

Usando, essencialmente, a relação de adjacência entre os vértices de P_3 , reduziremos o número desses conjuntos \mathcal{I} .

Observação 5.2 *Se o vértice a (b ou c) pertence a \mathcal{I} então o vértice e (f ou d) não pertence a \mathcal{I} .*

De fato, se a e e pertencerem, ambos, a interseção de M_y com as cliques maximais de C_i , $i = 1, \dots, 5$, então $(a, e) \in A$, o que contradiz o fato de G conter P_3 . \triangle

Esta observação simples reduz para 26 o número de casos em que vértices de P_3 são candidatos a interseção de M_y com elementos de C_i , $i = 1, \dots, 8$. Os 26 casos estão indicados, um a um, na lista da Figura 5.12 ($abc = \{a, b, c\}$).

1. abc	10. bce	19. c
2. abd	11. bc	20. def
3. ab	12. bde	21. de
4. acf	13. bde	22. df
5. ac	14. be	23. d
6. adf	15. b	24. ef
7. ad	16. cef	25. e
8. af	17. ce	26. f
9. a	18. cf	

Figura 5.12: Os 26 conjuntos \mathcal{I} .

No caso de G conter P_2 , d e f não pertencerão, ambos, à interseção de M_y com elementos de C_i , $i = 1, \dots, 8$, logo, o número de vértices de P_2 candidatos à interseção é 23 (retiram-se os casos 6., 20. e 22. da lista da Figura 5.12), e se G contiver P_1 , serão 21 casos (os ítems 4. e 8., também, serão retirados da lista).

A observação, a seguir, reduzirá o total de 70 casos a 26.

Um *automorfismo* de um grafo H , $\text{Aut}(H)$, é uma bijeção nos vértices de H que preserva adjacências.

Dado que a relação de adjacência entre os vértices de P_i , $i=1,2$ ou 3 , é o elemento essencial na construção de uma pirâmide em G , um automorfismo ρ de P_i , $i=1,2$ ou 3 , distinto da identidade, indica que v e $\rho(v)$, vértices distintos de algum P_i , serão indistinguíveis para a construção da pirâmide.

Observe que:

$$\text{Aut}(P_1) = \{1, (ad)(ce)\};$$

$$\text{Aut}(P_2) = \{1, (ae), (bc)(df), (ae)(bc)(df)\};$$

$$\text{Aut}(P_3) = S_6 \text{ (grupo simétrico de grau 6).}$$

Por exemplo, se a, b, c são os vértices de P_1 pertencentes a \mathcal{I} e se o conhecimento destas relações permitir a construção de uma pirâmide em G , então para o conjunto $\mathcal{I} \supset \{\rho(a), \rho(b), \rho(c)\} = \{d, b, e\}$ tem-se, também, uma pirâmide em G , cujos vértices são a imagem por ρ dos vértices da pirâmide construída anteriormente.

A tabela da Figura 5.13 indica na 1ª coluna, os possíveis conjuntos \mathcal{I} , se G contiver P_3 , na 2ª, se G contiver P_2 e na 3ª coluna, se G contiver P_1 . Um total de 26 conjuntos, a menos de automorfismos.

abc	abc	abc	cef
ab	abd	abd	ce
a	ab	ab	cf
	ad	ac	c
	a	ad	f
	bc	a	
	bd	bce	
	b	bc	
	d	b	

Figura 5.13: Os possíveis conjuntos \mathcal{I} .

Além desses, é necessário, considerar o caso em que a interseção de M_y com \mathcal{C}_i , $i = 1, \dots, 5$ ($i = 1, \dots, 6$; $i = 1, \dots, 8$), não contém nenhum vértice de algum P_i , $i=1,2$ ou 3 . São, portanto, 27 casos a serem estudados.

É bom enfatizar, neste ponto, que a tabela da Figura 5.13 exhibe, em cada caso, os únicos vértices de P_i , $i=1,2$ ou 3 que pertencem a interseção de M_y com as cliques de \mathcal{C}_i , $i = 1, \dots, 5$ ($i = 1, \dots, 6$ ou $i = 1, \dots, 8$).

Por exemplo, se G contiver P_3 e $M_y \cap (\bigcup_{M \in \mathcal{C}_i} M) \supset \{a, b, c\}$, estes serão os únicos vértices de P_3 pertencentes a essa interseção. Observe que sendo G clique-completo, então existe um vértice $x_7 \in M_7$, $x_7 \notin \{d, e, f, x\}$ tal que $x_7 \in M_y \cap (\bigcup_{M \in \mathcal{C}_i} V(M))$. Esta observação é importante no estudo do caso $\omega(G) = 4$ e $l = 6$.

O caso $\omega(G) = 4$

Teorema 5.6 *Seja G um grafo clique-completo com $\omega(G) \leq 4$. Pelo menos uma dentre as condições (i) e (ii) ocorre.*

(i) G contém um vértice universal.

(ii) G contém uma pirâmide.

Os lemas 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7, provam o Teorema 5.6.

Lema 5.4 *Sejam G um grafo clique-completo e C_i , $i = 1, \dots, 8$, o conjunto das cliques maximais de G como definido na página 64. Suponha $\omega(M) \leq 4$ para todo $M \in C_i$, $i = 1, \dots, 8$. Então*

(a) se G contém P_1 , $|C_i| = 1$ para $i = 3$ e 5 .

(b) se G contém P_2 , $|C_i| = 1$ para $i = 2, 3, 5$ e 6 .

(c) se G contém P_3 , $|C_i| = 1$ para $i = 1, \dots, 8$.

Dem.: (a) Sejam $M_5 \in C_5$ e $M_3 \in C_3$. Pelo Lema 5.3, existe $x \in M_5 \cap M_3$. Então, $M_3 = \{c, e, f, x\}$ e $M_5 = \{a, b, d, x\}$.

Se existir $M_3' \in C_3$, $M_3' \neq M_3$, então M_3 e M_3' diferem em um (único) vértice, por hipótese.

Como $\{c, e, f\} \subset M_3 \cap M_3'$, pois M_3 e M_3' pertencem C_3 , M_3' conterá $y \neq x$, isto é, $M_3' = \{c, e, f, y\}$ e $M_5 \cap M_3' = \emptyset$. Contradição a $K(G) = K_1$.

Analogamente, se existir $M_5' \in C_5$, $M_5' \neq M_5$.

Portanto, $|C_3| = |C_5| = 1$.

(b) Um argumento análogo considerando, além de C_3 e C_5 , também, C_2 e C_6 , conduz a $|C_2| = |C_6| = |C_3| = |C_5| = 1$.

(c) Análogo, considerando os pares C_1 , C_7 e C_4 , C_8 , além dos pares dos itens (a) e (b). \triangle

Lema 5.5 *Seja G um grafo clique-completo. Suponha que G contém P_3 e que $\omega(M_i) \leq 4$ para $M_i \in C_i$, $i = 1, \dots, 8$. Então G contém um vértice universal.*

Dem.: Pelo Lema 5.3, existe um vértice x em G adjacente a todo vértice de P_3 . O vértice $x \in \bigcup_{M_i \in C_i} V(M_i)$, pois pelo Lema 5.4, $|C_i| = 1$, $i = 1, \dots, 8$.

Suponha que x não é universal em G e seja M_y uma clique maximal de G que contém um vértice y tal que $(x, y) \notin A$. Então $M_y \cap M_i \subset \{a, b, c, d, e, f\}$ para qualquer i , $i = 1, \dots, 8$, (pois, para cada i , $|C_i| = 1$ e $\omega(M) \leq 4$, $M \in C_i$).

Logo, pela tabela da Figura 5.13 basta considerar os casos em que a interseção é a, b, c ou a, b ou a .

Em qualquer dos casos, $M_y \cap M_7 = \emptyset$. (Lembre-se $M_7 = \{d, e, f, x\}$ e $(x, y) \notin A$.) E isto é uma contradição, pois G é grafo clique-completo.

Portanto, x é universal em G . \triangle

Lema 5.6 *Seja G um grafo clique-completo. Suponha que G contém P_2 e que $\omega(M) \leq 4$, para $M \in \mathcal{C}_i$, $i = 1, \dots, 6$. Então pelo menos uma dentre as condições abaixo é verdadeira:*

(i) G contém um vértice universal.

(ii) G contém uma pirâmide.

Dem.: Suponha que G não contém um vértice universal.

Considere y e M_y como no Lema 5.5.

Sendo $\omega(M) \leq 4$, $M \in \mathcal{C}_i$, a interseção de M_y com as cliques maximais em \mathcal{C}_i , $i = 1, \dots, 6$, que contém x está contida em $\{a, b, c, d, e, f\}$.

(Observe que pelo Lema 5.4, $|\mathcal{C}_1| \geq 1$ e $|\mathcal{C}_4| \geq 1$. Logo, podem existir cliques maximais em \mathcal{C}_i , $i=1,4$, que não contém x .)

Da tabela 5.13 resultam os seguintes candidatos à interseção de M_y com M , $M \in \mathcal{C}_i$, $i = 1, \dots, 6$.

- a, b, c

Neste caso, M_y intercepta cada clique maximal de \mathcal{C}_i , $i = 1, \dots, 6$ e tem-se a pirâmide estendida: $[d \ x \ b \ f \ c \ y]$. Veja Figura 5.14. Mostraremos que $[d \ x \ b \ f \ c \ y]$ é, na realidade, uma pirâmide (P_0).

Observe, primeiro, que, por hipótese, $(d, f) \notin A$.

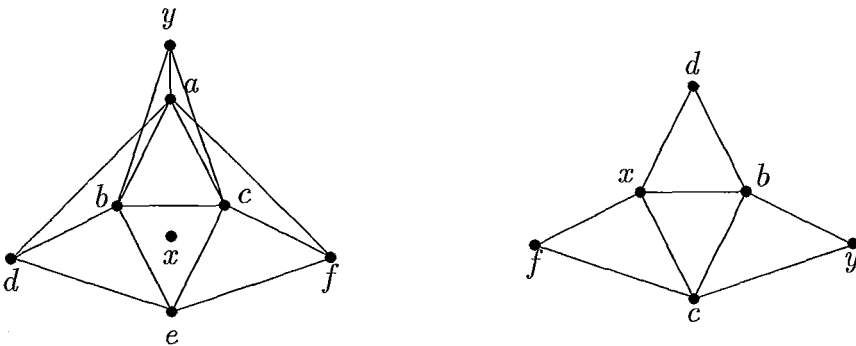


Figura 5.14: $M_y \cap (\cup_{M \in \mathcal{C}_i} M) = \{a, b, c\} (= \{b, c\})$.

Suponha que $(f, y) \in A$. Então G contém a clique maximal $M = \{a, c, f, y\}$ (a clique M é maximal pois $M \in \mathcal{C}_6$, logo $\omega(M) \leq 4$).

Observe que nenhum dos vértices de M_2 : x, b, e, d pertence à M , pois, caso contrário, ou (x, y) , ou (b, f) , ou (e, a) , ou (c, d) pertenceriam a A , respectivamente. Contradição.

Logo, $M \cap M_2 = \emptyset$, pois caso contrário, $\omega(M) > 4$. E esta interseção vazia contradiz a hipótese de que G é grafo clique-completo.

Portanto, $(f, y) \notin A$.

Suponha, agora, que $(d, y) \in A$. Então G contém a clique maximal $M = \{a, b, d, y\}$.

Observe que nenhum dos vértices de M_3 : c, e, f, x pertencem à M , pois caso contrário, ou (c, d) , ou (e, a) , ou (f, b) , ou (x, y) pertenceriam a A . Contradição.

Então, $M \cap M_3 = \phi$. Contradição.

Logo, $(d, y) \notin A$.

Portanto, $[d \ x \ b \ f \ c \ y]$ é uma pirâmide.

- b, c

Neste caso, novamente G contém a pirâmide $[d \ x \ b \ f \ c \ y]$. (Figura 5.14.)

De fato, se $(f, y) \in A$, então M uma clique maximal de G contém $\{y, c, f\}$. Dentre os vértices de M_2 , somente o vértice e pode pertencer à $M \cap M_2$ e, nesse caso, a interseção de $\{y, c, f, e\} = M$ e $M_5 = \{a, b, d, x\}$ é vazia. Contradição.

Se $(d, y) \in A$, então M contém $\{y, d, b\}$. Dentre os vértices de M_3 , o vértice e poderá pertencer à $M_3 \cap M$, mas, então, a interseção entre $M = \{y, d, b, e\}$ e $M_6 = \{a, c, f, x\}$ é vazia. Contradição.

Nos demais casos: a, b, d ; a, b ; a, d ; a ; b, d ; b e d , obtem-se

$M_y \cap M_3 = \phi$, pois $M_3 = \{c, e, f, x\}$, $\omega(M_3) \leq 4$ e para cada conjunto \mathcal{I} considerado, seus elementos são os únicos vértices de P_2 pertencentes à M_y . E esta conclusão resulta em uma contradição em cada caso. \triangle

Lema 5.7 *Seja G um grafo clique-completo. Suponha que G contém P_1 e que $\omega(M) \leq 4$, para $M \in \mathcal{C}_i$, $i = 1, \dots, 5$. Então ocorre pelo menos uma dentre (i) e (ii).*

(i) G contém um vértice universal.

(ii) G contém uma pirâmide.

Dem.: Suponha que G não contém um vértice universal.

Analogamente ao Lema 5.6, a interseção de M_y com as cliques maximais pertencentes a \mathcal{C}_i , $i = 1, \dots, 5$, que contém x está contida em $\{a, b, c, d, e, f\}$.

Ainda, na 3ª coluna da tabela 5.13 estão os candidatos a essa interseção.

Analisamos, a seguir, cada caso.

- a, b, c

Então G contém a pirâmide $[d \ x \ b \ f \ c \ y]$ da Figura 5.14.

De fato, se $(f, y) \in A$, então a clique $\{y, c, f\}$ está contida em alguma clique maximal M .

Observe que nenhum dos vértices x, a, b, d de M_5 pertencem a M , pois caso contrário, ou (x, y) , ou (a, f) , ou (b, f) ou (d, c) , respectivamente, pertenceria a A . Contradição.

Logo, $M \cap M_5 = \emptyset$. Contradição, pois, G é clique-completo.

Ainda, $(d, y) \notin A$. A análise é igual a do Lema 5.6, caso a, b, c .

- b, c

Aqui, G contém a pirâmide $[d \ x \ b \ f \ c \ y]$ (Figura 5.14) e a prova é igual ao caso correspondente do Lema 5.6.

- b, c, e

Neste caso, M_y intercepta cada clique maximal de \mathcal{C}_i , $i = 1, \dots, 6$ e G contém a pirâmide $[d \ x \ b \ f \ c \ y]$ ou $[a \ x \ b \ f \ e \ y]$. (Figura 5.15)

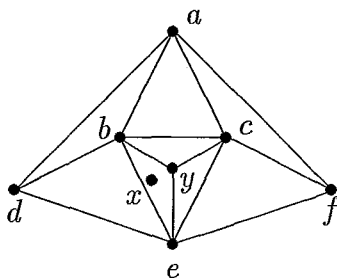


Figura 5.15: $M_y \cap (\cup_{M \in \mathcal{C}_i} M) = \{b, c, e\}$.

Suponha que $(y, f) \in A$. Então G contém uma clique maximal $M = \{c, e, f, y\}$ e $M \in \mathcal{C}_3$, pois contém $\{c, e, f\}$, mas, $|\mathcal{C}_3| = 1$ (Lema 5.4) e $M_3 = \{c, e, f, x\} \in \mathcal{C}_3$. Logo, $(y, f) \notin A$.

Agora, ou (y, d) ou $(y, a) \notin A$, pois, se ambas forem arestas de G , \mathcal{C}_5 contém a clique $M = \{a, b, d, y\}$, que é maximal, pois $\omega(M) \leq 4$, para $M \in \mathcal{C}_5$.

Mas, $M \cap M_3 = \emptyset$. Contradição.

Logo, se $(y, d) \in A$ então G contém a pirâmide $[a \ x \ b \ f \ e \ y]$. Se $(y, a) \in A$, contém $[d \ x \ b \ f \ c \ y]$.

Nos demais casos a interseção de M_y com os vértices de P_1 , não intersecta todas as cliques maximais de \mathcal{C}_i , $i = 1, \dots, 5$ que contêm x .

Mas a interseção de M_y com as cliques maximais pertencentes à \mathcal{C}_i que contêm x está contida em $\{a, b, c, d, e, f\}$ ($\omega(M) \leq 4$ para $M \in \mathcal{C}_i$).

Logo, se algum desses casos ocorrer, G não é grafo clique-completo. Contradição.

Em cada caso, mostraremos a clique maximal de \mathcal{C}_i cuja interseção com M_y é vazia.

- a, c : $M_y \cap M_2 = \phi$;
- c, e, f ; c, e ; c, f ; c, f : $M_y \cap M_5 = \phi$;
- a, b, d ; a, b ; a, d ; a, b : $M_y \cap M_3 = \phi$.

Pois, basta lembrar que $M_3 = \{c, e, f, x\}$, $M_2 = \{b, e, d, x\}$, $M_5 = \{a, b, d, x\}$ e $(x, y) \notin A$.

Está, portanto, demonstrado o Lema 5.7. \triangle

Como observamos anteriormente, os lemas 5.4, 5.5, 5.6 e 5.7, demonstram o Teorema 5.6.

Está, portanto, demonstrado o Teorema 5.6. \triangle

O caso $l \leq 6$

Teorema 5.7 *Seja G com $l \leq 6$ e $\omega(G) \geq 5$. Então pelo menos uma dentre as condições abaixo ocorre.*

(i) G contém um vértice universal.

(ii) G contém uma pirâmide.

Dem.: Do Teorema 5.1 tem-se que pelo menos uma dentre as afirmações: G contém um vértice universal e G contém uma pirâmide estendida, ocorre.

Pela prova do mesmo teorema, tem-se que se $l \leq 3$, G contém um vértice universal.

Seja $4 \leq l \leq 5$ e suponha que G contenha uma pirâmide estendida.

Se $l = 4$, a pirâmide estendida é P_0 .

Se $l = 5$, temos dois casos a considerar:

1. A pirâmide estendida é P_0 . Neste caso, ocorre (ii).
2. A pirâmide estendida é P_1 .

Logo, $\mathcal{C}_i = \{M_i\}$, $i = 1, \dots, 5$, pois $l = 5$.

Pelo Lema 5.3, existe um vértice x universal em P_1 .

Sendo $|C_i| = 1$, $i = 1, \dots, 5$, $x \in V(M_i)$, para cada i , logo, x é universal em G , pois $l = 5$, ocorrendo (ii).

Se $l = 6$, a pirâmide estendida poderá ser: (a) pirâmide, (b) P_1 , (c) P_2 .

No caso (a), ocorre (ii).

No caso (c), ocorre (i), pois os vértices de P_2 pertencem a exatamente seis cliques maximais de G que se cruzam duas a duas e, pelo Lema 5.3 existe $x \in V$ tal que x é universal em P_2 , logo em G . (Se x não fosse universal em G , existiria $y \in V$ tal que $(x, y) \notin A$ e G conteria uma clique maximal, M_y contendo y , distinta das 6 cliques maximais que contêm x , logo $l \geq 6$. Contradição.)

Caso (b): São analisados quinze casos até o final do capítulo.

Desde que existe um vértice x em V , universal em P_1 , pelo menos uma clique maximal de cada C_i , $i = 1, \dots, 5$, contém x . Denotaremos por M_i , $i = 1, \dots, 5$ as cliques maximais de G , pertencentes à C_i , $i = 1, \dots, 5$, que contém x .

Se x não é universal em G , seja M_y uma clique maximal em G que contém um vértice y não adjacente a x .

A clique maximal M_y é distinta de cada M_i , pois $y \in M_y$ e $x \in M_i$, para cada i . Sendo $l = 6$, as cliques maximais de G são: M_i , $i = 1, \dots, 5$ e M_y .

Sendo G grafo clique-completo, M_y intersecta cada M_i , $i = 1, \dots, 5$.

O estudo do caso (b), recai na análise da maneira como a clique maximal M_y intersecta as cliques maximais em C_i , $i = 1, \dots, 5$. Portanto, na análise de cada possível interseção da coluna 3 da tabela 5.13.

1. a, b, c (Figura 5.16.)

A pirâmide estendida $[d \ x \ b \ f \ c \ y]$ da Figura 5.16, é uma pirâmide.

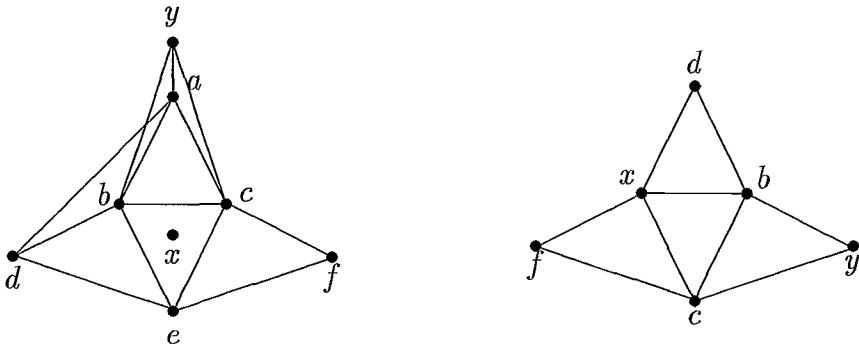


Figura 5.16: $[d \ x \ b \ f \ c \ y]$ é uma pirâmide.

De fato, suponha que exista pelo menos uma dentre as arestas (f, y) , (d, y) . Considere, primeiro, que $(f, y) \in A$. Então a clique $\{c, f, y\}$ está contida em alguma clique maximal M de G . Observe que M é distinta de cada M_i , $i = 1, \dots, 5$, pois $x \in M_i$ e $y \in M$; ainda, M é distinta de M_y , pois $b \in M_y$ e $f \in M$. Logo, $l \geq 6$. Contradição. Considere, agora, $(d, y) \in A$. Então a clique $\{a, b, d, y\}$ está contida em alguma clique maximal M de G .

Novamente, M é distinta de cada M_i , $i = 1, \dots, 5$ e distinta de M_y , pois o vértice d pertence à M e o vértice c pertence à M_y . Logo, $l \geq 6$. Contradição.

2. a, b, d

Observe que M_y intercepta M_3 em um vértice x_3 , distinto de c, e, f , por hipótese, e de x pois se $x \in M_y \cap M_3$, tem-se $(x, y) \in A$. Contradição.

Logo, x_3 é universal em P_1 . Mais ainda, x_3 é universal em G , pois caso contrário, existiria $z \in V$ tal que $(z, x_3) \notin A$.

Sendo $l = 6$ então $z \in V(M_i)$, $i=1,2,4$ ou 5 .

Suponha, sem perda de generalidade, $z \in V(M_1)$. Então G contém as cliques maximais $M_1 \supset \{a, b, c, x, z\}$ e $\{a, b, c, x, x_3\}$ é uma clique contida em alguma clique maximal M de G .

Observe que $M \neq M_1$, pois caso contrário, $(z, x_3) \in A$

Além disso, tanto M_1 quanto M são distintas de M_2, M_3, M_4, M_5 e M_y .

Logo, $l \geq 6$. Contradição.

Portanto, x_3 é universal em G .

3. a, b (Figura 5.17.)

Novamente, M_y intercepta M_3 em um vértice $x_3 \neq x$.

Se $(x_3, d) \in A$, então x_3 é universal em P_1 e, pelo caso 2, universal em G .

Se $(x_3, d) \notin A$, então $[y b x_3 d x f]$ é uma pirâmide em G . (Veja Figura 5.17.)

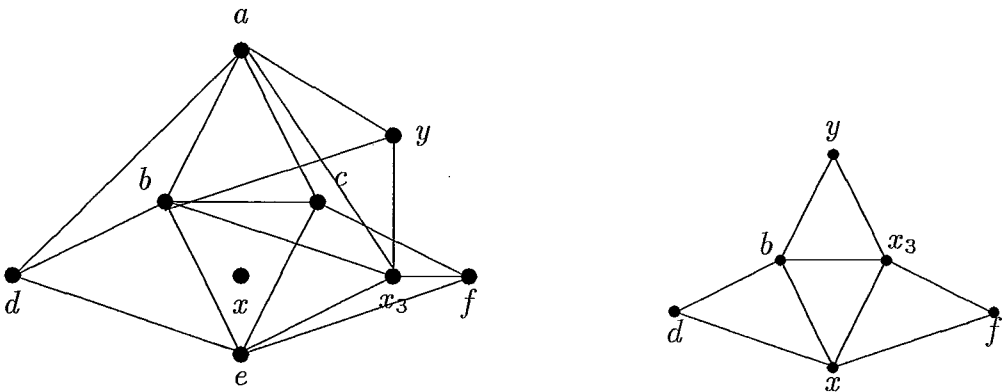


Figura 5.17: $[y b x_3 d x f]$ é uma pirâmide.

De fato, se $(f, y) \in A$, então a clique $\{f, y, x_3\}$ está contida em alguma clique maximal M de G . Mas, $M \neq M_i$, $i = 1, \dots, 5$, pois $x \in M_i$ e $y \in M$ e $M \neq M_y$, pois $f \in M$ e $b \in M_y$. Logo, $l \geq 6$. Contradição.

Se $(d, y) \in A$, então $\{a, b, d, y\} \subset M$; $M \neq M_i$, $i = 1, \dots, 5$, pois $x \in M_i$ e $y \in M$; $M \neq M_y$, pois $d \in M$ e $d \notin M_y$. Logo, $l \geq 6$. Contradição.

4. a, c (Figura 5.18.)

Observe que existe $x_2 \in M_y \cap M_2$, $x_2 \neq x$.

Se x_2 é universal em P_1 é também em G . Demonstração análoga ao caso 2.

Suponha que $(x_2, f) \notin A$, então o subgrafo $[y c x_2 f x d]$ é uma pirâmide em G . (Veja Figura 5.18.)

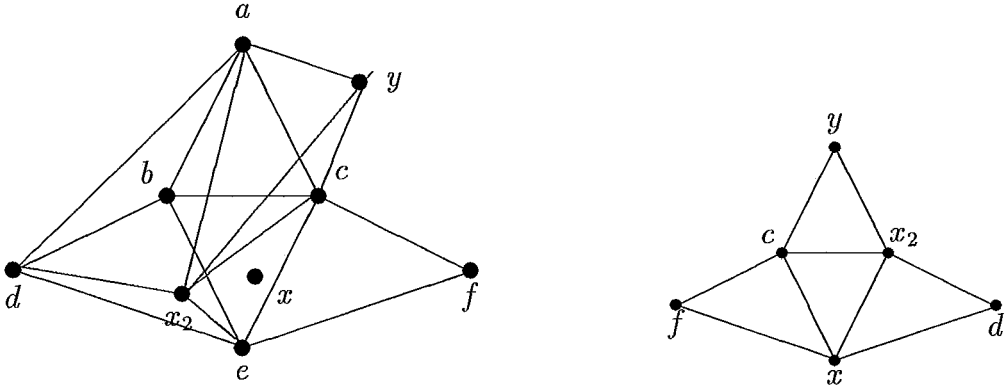


Figura 5.18: $[y c x_2 f x d]$ é uma pirâmide.

De fato, se $(f, y) \in A$, tem-se $\{f, c, y\} \subset M$, $M \neq M_i$, $i = 1, \dots, 5$ e $M \neq M_y$, pois $a \in M_y$ e $f \in M$.

Se $(d, y) \in A$, $\{a, d, y, x_2\} \subset M$, $M \neq M_i$, $i = 1, \dots, 5$, $M \neq M_y$, pois $c \in M_y$ e $d \in M$.

5. a, d (Figura 5.19.)

Observe que existem $x_3 \in M_y \cap M_3$ e $x_4 \in M_y \cap M_4$, distintos de x .

Se $x_3 = x_4$, então x_3 é universal em P_1 . Uma prova análoga ao caso 2. demonstra que x_3 é universal em G .

Se $x_3 \neq x_4$, $(x_3, x_4) \in A$, pois, ambos, são vértices de M_y .

Ainda $(x_3, b) \notin A$ e $(x_4, f) \notin A$, pois caso contrário, com uma demonstração análoga ao caso 2., teríamos x_3 ou x_4 universal em G , respectivamente. Então, o grafo G contém a pirâmide estendida $[y x_4 x_3 b x f]$. (Veja Figura 5.19.)

Suponha $(b, y) \in A$, então a clique $\{a, b, d, y, x_4\}$ está contida em alguma clique maximal M . Mas, $M \neq M_i$, $i = 1, \dots, 5$, pois $x \in M_i$ e $y \in M$ e $M \neq M_y$ pois $b \in M$ e $b \notin M_y$.

Suponha $(f, y) \in A$, então $\{f, y, x_3\} \subset M$ e $M \neq M_i$, $i = 1, \dots, 5$, $M \neq M_y$, pois $f \in M$ e $f \notin M_y$.

Logo, $[y x_4 x_3 b x f]$ é uma pirâmide e, portanto, pode ocorrer tanto (i) quanto (ii).

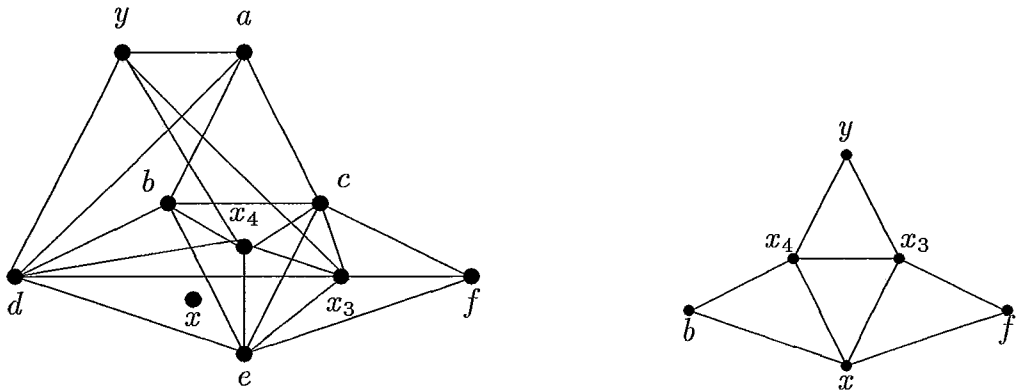


Figura 5.19: $[y x_4 x_3 b x f]$ é uma pirâmide.

6. a

Existem $x_2 \in M_y \cap M_2$, $x_3 \in M_y \cap M_3$ e $x_4 \in M_y \cap M_4$, distintos de x .

I. Se $x_2 = x_3 = x_4$, ou $x_2 = x_3$.

Então x_2 é universal em P_1 . Do caso 2., obtem-se que x_2 é universal em G .

II. Se $x_2 = x_4$ e $x_3 \neq x_4$.

Então G contém a pirâmide $[y x_4 x_3 b x f]$ (Figura 5.19). A demonstração é análoga ao caso 5.

III. Se $x_3 = x_4$ e $x_3 \neq x_2$.

Neste caso, ou ocorre a pirâmide $[y x_2 x_3 d x f]$. Demonstração análoga ao caso 4.

IV. Se x_1, x_3, x_4 são dois a dois distintos.

Tem-se, então, a pirâmide $[y x_4 x_3 b x f]$. Demonstração análoga ao caso 5.

7. b, c, e

Observe que $M_y \cap M_i \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, 5$.

Então $[d x b f c y]$ é uma pirâmide em G (Figura 5.14). Prova análoga ao caso 1.

8. b, c

Novamente, $M_y \cap M_i \neq \emptyset$, $i = 1, \dots, 5$ e $[d x b f c y]$ é uma pirâmide em G (Figura 5.14). Prova análoga ao caso 1.

9. *b*

Observe que existe $x_3 \in M_y \cap M_3$, distinto de x e, tem-se ou x_3 universal em G ou a pirâmide $[y b x_3 d x f]$. Análogo ao caso 3.

10. *c, e, f*

Neste caso, existe $x_5 \in M_y \cap M_5$, distinto de x . O vértice x_5 é universal em G . A prova é análoga ao caso 2.

11. *c, e*

Existe, aqui, $x_5 \in M_y \cap M_5$, distinto de x .

Se $(x_5, f) \in A$, então x_5 é universal em P_1 e em G . Prova análoga ao caso 2.

Se $(x_5, f) \notin A$, então $[y c x_5 f x d]$ (Veja caso 4).

12. *c, f*

Existe $x_2 \in M_y \cap M_2$ e $x_5 \in M_y \cap M_5$, distinto de x .

Se $x_2 = x_5$, então x_2 é universal em G .

Se $x_2 \neq x_5$ e se $(x_2, a) \in A$ ou $(x_5, e) \in A$, então ou x_2 ou x_5 , respectivamente, é universal em G .

Se $x_2 \neq x_5$, $(x_2, a) \notin A$ e $(x_5, e) \notin A$, tem-se que $[e x x_2 a x_5 y]$ é uma pirâmide (Veja Figura 5.20).

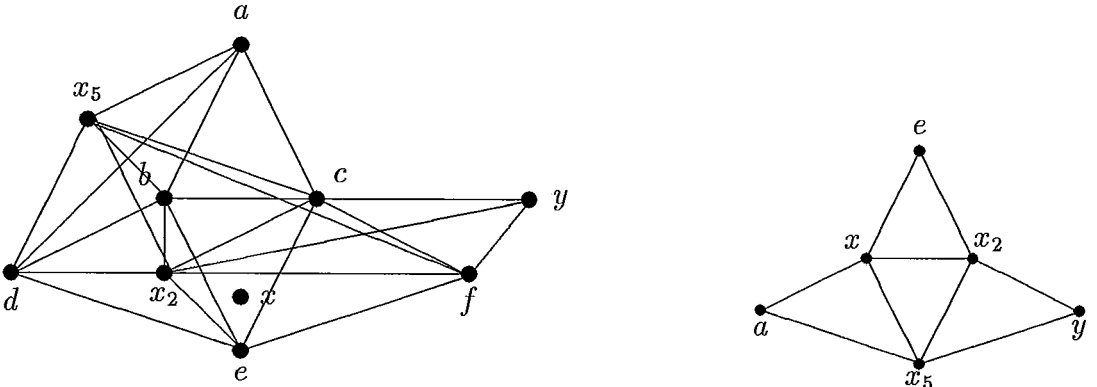


Figura 5.20: $[e x x_2 a x_5 y]$ é uma pirâmide.

De fato, se $(a, y) \in A$, $\{a, y, c\} \subset M$, $M \neq M_i$, $i = 1, \dots, 5$ ($x \in M_i$), $M \neq M_y$, $a \in M$, $f \in M_y$ e $l \geq 6$.

Se $(e, y) \in A$, $\{c, f, e, y, x_2\} \subset M$, $M \neq M_i$, $i = 1, \dots, 5$; $M \neq M_y$, pois, $x_5 \in M_y$ e $x_5 \notin M$, logo $l \geq 6$.

13. c

Existem $x_2 \in M_2 \cap M_y$ e $x_5 \in M_5 \cap M_y$, distintos de x .

Se $x_2 = x_5$.

- Se $(x_2, f) \in A$, x_2 é universal em G .
- Se $(x_2, f) \notin A$, $[y \ c \ x_2 \ f \ x \ d]$ é uma pirâmide em G . Prova análoga ao caso 4.

Se $x_2 \neq x_5$.

- Se $(x_2, f) \notin A$ ou $(x_5, f) \notin A$, então ou $[y \ c \ x_2 \ f \ x \ d]$ ou $[y \ c \ x_5 \ f \ x \ d]$ é uma pirâmide em G .
A prova é análoga ao caso 4.
- Se $(x_2, f) \in A$ e $(x_5, f) \in A$, então $[e \ x \ x_2 \ a \ x_5 \ y]$ é uma pirâmide.
A prova é análoga ao caso 12.

14. f

Neste caso, existem $x_i \in M_i \cap M_y$, $i=1,2,4,5$, distintos de x .

- a. Se pelo menos três dentre os quatro vértices x_i coincidirem, G contém um vértice universal, pois serão universal em P_1 (veja caso 2).
- b. Se $x_1 = x_2$ ou $x_4 = x_5$, esses vértices são, respectivamente, universais em G . (Veja caso 2.)
- c. Se $x_1 = x_4$ ou $x_2 = x_5$, então $[c \ x \ x_1 \ d \ x_2 \ y]$ é uma pirâmide.
- d. Se $x_1 = x_5$ ou $x_2 = x_4$, então $[e \ x \ x_2 \ a \ x_1 \ y]$ é uma pirâmide.
- e. Se x_1, x_2, x_4, x_5 são distintos dois a dois.

Neste item pode-se ter:

$$\begin{aligned}\{d, e\} &\not\subset Adj(x_1) \\ \{a, c\} &\not\subset Adj(x_2) \\ \{a, d\} &\not\subset Adj(x_4) \\ \{c, e\} &\not\subset Adj(x_5).\end{aligned}$$

Mostraremos que qualquer seqüência composta de quatro elementos (z_1, z_2, z_4, z_5) onde z_i é o único vértice de P_1 não adjacente a x_i , origina um P_0 da forma $[z_j \ x \ x_i \ z_i \ x_j \ y]$.

Em todos os casos a prova de que (y, z_i) e (y, z_j) não são arestas do grafo, é por contradição e obtém-se $l \geq 6$.

O grafo G contém a pirâmide: $[c \ x \ x_1 \ d \ x_5 \ y]$ se a seqüência for:

- (d, a, a, c)
- (d, a, d, c)
- (d, c, a, c)
- (d, c, d, c)

O grafo G contém $P_0: [e x x_4 a x_5 y]$ para:

- (d, a, a, e)
- (d, c, a, e)

O grafo G contém $P_0: [e x x_2 a x_5 y]$ para:

- (d, a, d, e)

O grafo G contém $P_0: [c x x_1 d x_2 y]$ para:

- (d, c, d, e)

O grafo G contém $P_0: [e x x_2 a x_1 y]$ para:

- (e, a, a, c)
- (e, a, a, e)
- (e, a, d, c)
- (e, a, d, e)

O grafo G contém $P_0: [e x x_3 a x_1 y]$ para:

- (e, c, a, c)
- (e, c, a, e)

O grafo G contém $P_0: [c x x_4 d x_2 y]$ para:

- (e, c, d, c)
- (e, c, d, e)

15. Se a interseção de M_y com as cliques maximais de P_1 não contiver vértices de P_1 .

Então existem $x_i \in M_i$, $M_i \in \mathcal{C}_i$, $i = 1, \dots, 5$, distinto de x .
Neste item, pode-se ter:

$$\begin{aligned} \{d, e, f\} &\not\subset Adj(x_1) \\ \{a, c, f\} &\not\subset Adj(x_2) \\ \{a, b, d\} &\not\subset Adj(x_3) \\ \{a, d, f\} &\not\subset Adj(x_4) \\ \{c, e, f\} &\not\subset Adj(x_5) \end{aligned}$$

Se algum vértice entre os $x_i, i = 1, \dots, 5$, for universal em P_1 , pelo caso 2, tem-se que é universal em G .

Se para todo vértice $x_i, (x_i, z) \notin A$, onde z é algum vértice de P_1 , tem-se que é possível construir uma pirâmide em G .

É impossível construir uma pirâmide induzida usando unicamente os vértices de P_1 . Então, de maneira análoga aos casos anteriores, o par x e y pertencerá à pirâmide P_0 . Logo pelo menos dois dentre os $x_i, i = 1, \dots, 5$, pertencerá, também, à P_0 .

Então se pudermos construir uma pirâmide em G , usando este método, existirá uma seqüência de vértices $(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$, onde z_i é o elemento de P_1 não adjacente a x_i , que possui na posição i e $j, i < j$, os elementos w e v , não adjacentes. Veja Figura 5.21.

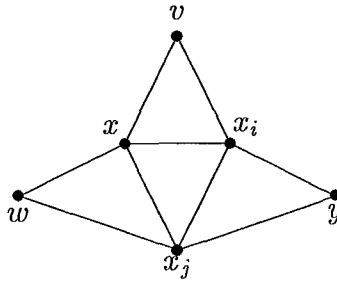


Figura 5.21: Uma pirâmide.

Observe que $(y, v) \notin A$, pois caso contrário, $\{v, x_i, y\} \subset M$ e $M \neq M_y$ ($v \in M$ e $v \notin M_y, v$ é vértice de P_1), $M \neq M_i, i = 1, \dots, 5$, pois $x \in M_i$, logo $l \geq 6$. Contradição.

Analogamente, $(y, w) \notin A$.

Tentaremos, então construir uma seqüência $Z = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)$, tal que o elemento z_i da posição i indica que z_i é o único vértice de P_1 não adjacente a x_i e, além disso, é adjacente a todos os elementos das posições j , com $j < i$.

Ou seja, se a seqüência construída da forma acima existir, então G não contém uma pirâmide como subgrafo induzido.

Dado que $\{d, e, f\} \not\subset Adj(x_1)$, temos 3 casos a considerar para o primeiro elemento da seqüência.

1º caso: $x_1 = d$

Nas seqüências abaixo, as posições $i = 1, 2, 3, 4$, contêm vértices não adjacentes a x_i e adjacentes a todos os $j < i$, quando $x_1 = d$.

(d, a, a, a, x_5)

(d, a, a, d, x_5)

(d, a, b, a, x_5)

(d, a, b, d, x_5)

(a, a, d, a, x_5)

(d, a, d, d, x_5)

Observe que toda seqüência contém a e d , logo é impossível construir Z , pois $\{c, e, f\}$ é o subconjunto dos vértices de P_1 não adjacentes a x_5 .

Portanto, para cada seqüência, existe a pirâmide $[d \ x \ x_5 \ c \ x_1 \ y]$.

2º caso: $x_1 = e$

Neste caso, as seqüências são:

(e, c, b, x_4, x_5)

(e, f, x_3, x_4, x_5)

Em ambos os casos, qualquer elemento do conjunto $\{a, d, f\}$, conjunto dos vértices não adjacentes a x_4 , é incidente a algum $z_i \ i < 4$.

Tem-se, então, $P_0 = [e \ x \ x_4 \ a \ x_1 \ y]$.

3º caso: $x_1 = f$

Neste caso, existem as seqüências:

(f, c, x_3, x_4, x_5)

(f, f, x_3, x_4, x_5) ,

e a pirâmide $[f \ x \ x_3 \ b \ x_1 \ y]$. \triangle

Capítulo 6

Conclusões

Este trabalho versou, principalmente, sobre dois problemas envolvendo a classe dos grafos clique-completos: o estudo das propriedades da classe e a localização de fontes e sumidouros de uma orientação transitiva em grafos pertencentes à classe interseção dos grafos de comparabilidade e clique-completos.

Mostramos que as fontes (os sumidouros) de uma orientação transitiva estão localizadas em elementos, V_S , da partição clique de V cujos índices formam uma partição do conjunto $\{1, 2, \dots, l\}$, onde l é o número de cliques maximais do grafo, e que se considerarmos grafos clique-completos teremos aresta entre fontes e sumidouros de quaisquer duas cliques maximais do grafo.

Ainda no estudo de subclasses da classe dos grafos clique-completos, caracterizamos a classe dos grafos indiferença clique-completos, mostramos que é uma subclasse da dos grafos de comparabilidade, encontramos quais de seus vértices podem se tornar fontes ou sumidouros de uma orientação transitiva e soubemos encontrar uma orientação transitiva, quando fontes e sumidouros são conhecidos.

Mostramos que a classe dos grafos clique-completos admitem alguns grafos, entre eles a pirâmide, como subgrafos induzidos, se não contiver um vértice comum a todas as suas cliques maximais. Vimos que para a classe dos grafos triangularizados, dos planares e para grafos com restrições no número de cliques maximais ou no tamanho de suas cliques maximais, um grafo clique-completo sem vértice universal admite necessariamente a pirâmide como subgrafo induzido. Conjeturamos que essa afirmação é válida para qualquer classe de grafos clique-completos sem vértices universais.

Surgem naturalmente alguns problemas para futuras pesquisas a partir deste trabalho.

Não há dúvidas que o primeiro problema a ser citado é a conjetura descrita no Capítulo 5, seção 5.2.

Conjeturamos que todo grafo de comparabilidade que é também grafo clique-completo contém um vértice universal.

Observe que se a conjetura do Capítulo 5 for provada, a anterior é imediata.

Podemos, também, perguntar se a classe dos grafos de intervalo que são clique-

completos é uma subclasse da classe dos grafos de comparabilidade.

Um tópico interessante é o estudo de uma classe de grafos através da decomposição de seus elementos em grafos clique-completos.

Nesta direção temos alguns resultados parciais em relação à classe interseção dos grafos indiferença e comparabilidade.

Bibliografia

- [1] Balakrishnan, R. and Paulraja, P., Self-clique graphs and diameters of iterated clique graphs, *Utilitas Mathematica* **29** (1986) 263-268.
- [2] Bandelt, H-J. and Prisner, E., Clique graphs and Helly graphs, *J. Combin. Theory Ser B* **51** (1991) 34-45.
- [3] Bermond, J. C. and Bollobás B., The diameter of graphs - a survey, *Congressus Numerantium* **32** (1981) 3-27.
- [4] Boaventura Netto, P. O., *Teoria e modelos de grafos*, E. Blücher, São Paulo, (1979).
- [5] Bornstein, C., *Sobre grafos clique convergentes*, Tese de Mestrado, IM - UFRJ, Rio de Janeiro, (1992).
- [6] Chen, B-L. and Lih, K-W., Diameters of iterated clique graphs of chordal graphs, *J. Graph Theory* **14** 3 (1990) 391-396.
- [7] Chong-Keang, L. and Yee-Hock, P., On graphs without multicliqual edges, *J. Graph Theory* **5** (1981) 443-451.
- [8] Duchet, P., Classical perfect graphs, *Annals of Discrete Mathematics* **21** (1984) 67-96.
- [9] Figueiredo, C. M. H., *Um estudo de problemas combinatórios em grafos perfeitos*, Tese de doutorado, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, (1990).
- [10] Gallai, T., Transitiv Orientierbare Graphen, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **18** (1967) 25-66.
- [11] Ghouila-Houri, A., Caractérisation des graphes non orientés dont on peut orienter les arêtes de manière à obtenir le graphe d'une relation d'ordre, *C.R. Acad. Sci. Paris* **254** (1962) 1370-1371.
- [12] Gilmore, P. C., Hoffman, A. J., A characterization of comparability graphs and interval graphs, *Canad. J. Math.* **16** (1964) 539-548.

- [13] Golumbic, M.C., *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Academic Press, New York, (1980).
- [14] Hamelink, R. C., A partial characterization of clique graphs, *Journal of Combinatorial Theory* **5** (1968) 192-197.
- [15] Hedman, B., Clique graphs of time graphs, *J. of Combin. Theory Ser. B* **37** (1984) 270-278.
- [16] Hedman, B., Diameters of iterated clique graphs, *Hadronic Journal* **9** (1986) 273-276.
- [17] Hedetniemi, S. T. and Slater, P. J., Line graphs of triangleless graphs and iterated clique graphs, in *Lecture Notes in Math.* **303**, Springer, Berlin, (1972) 139-147.
- [18] Kuratowski, C., Sur le problème des courbes gauches en topologie, *Fund. Math.* **15** (1930) 271-283.
- [19] Lucchesi, C. L., Simon, I., Simon, I., Simon, J. e Kowaltowski, T., *Aspectos teóricos da computação*, Inst. de Mat. Pura e Aplicada (Projeto Euclides), Rio de Janeiro, (1979).
- [20] Maehara, H., On time graphs, *Discrete Math.* **32** (1980) 281-289.
- [21] Möhring, R. H., Almost all comparability graphs are UPO, *Discrete Mathematics* **50** (1984) 63-70.
- [22] Moon, J. W. and Moser, L., On cliques in graphs, *Israel J. Math.* **3** (1965) 23-28.
- [23] Neumann-Lara, V., Clique divergence in graphs, in *Colloquia Mathematica Societatis Janos Bolyai*, Szeged Hungary, (1978) 563-569.
- [24] Olariu, S., An optimal greedy heuristic to color interval graphs, *Information Processing Letters* **37** (1991) 21-25.
- [25] Pnueli, A., Lempel, A., Even, S., Transitive orientation of graphs and identification of permutation graphs, *Can. J. Math.*, **23** 1 (1971) 160-175.
- [26] Reed, B., *A semi-strong perfect graph theorem*, Ph.D. Thesis, School of Computer Science, McGill University, Montreal, (1986).
- [27] Roberts, F. S., Indifference graphs, *Proof Techniques in Graph Theory: Proceedings of the Second Ann Arbor Graph Theory Conference* (F. Harary, Ed.) Academic Press, New York, (1969) 139-146.

- [28] Roberts, F. S., On the compatibility between a graph and a simple order, *J. Combin. Theory Ser. B* **11** (1971) 28-38.
- [29] Roberts, F. S. and Spencer, J. H., A characterization of clique graphs, *J. Combin. Theory* **10** (1971) 102-108.
- [30] Shevrin, L. N., and Filippov, N. D., Partially ordered sets and their comparability graphs, *Siberian Math. J.* **11** (1970) 497-509.
- [31] Spinrad, J., On comparability and permutation graphs, *SIAM J. Comput.* **14** 3 (1985) 658-670.
- [32] Szwarcfiter, J. L., *Grafos e algoritmos computacionais*, Editora Campus, (1984).
- [33] Szwarcfiter, J. L., Comunicação particular, (1991).
- [34] Szwarcfiter, J. L., 18^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, (1991).
- [35] Szwarcfiter, J. L., Mello, C. P., Figueiredo, C. M. H., Relatório Técnico, série C & T, ILTC, Rio de Janeiro, a ser publicado.
- [36] Tardif, V., *Colouring Oriented Perfect Graphs*, Master Thesis, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Waterloo, (1989).
- [37] Trotter Jr., W. T., Moore Jr., J. I. and Summer, D. F., The dimension of a comparability graph, *Proc. Amer. Math. Soc.* **60** (1976) 35-38.