

Sobre Coloração das Arestas de um Grafo

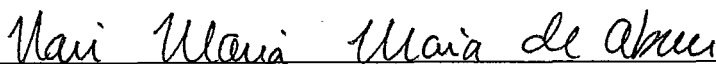
Carmen Ortiz Zaldívar

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

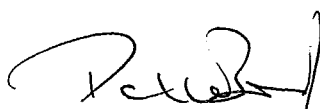
Aprovada por :



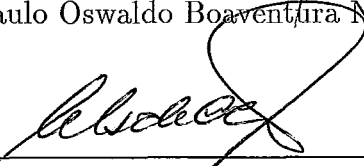
Prof. Nelson Maculan, D.Sc, D.Habil.
(Presidente)



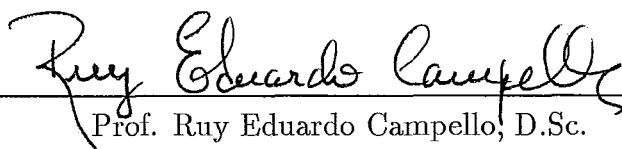
Prof^a Nair Maria Maia de Abreu, D.Sc.



Prof. Paulo Oswaldo Boaventura Netto, D.Ing.



Prof. Celso Carneiro Ribeiro, D.Ing, D.Habil.



Prof. Ruy Eduardo Campello, D.Sc.

ORTIZ, Carmen Victoria

Sobre Coloração das Arestas de um Grafo

Rio de Janeiro, 1994.

vi, 91p., 29,7 cm

(COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1994)

Tese-Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Coloração de Arestas. 2. Algoritmos. 3. Teoria de Grafos.

I. COPPE/UFRJ II. Título(série).

Ao Juan

e aos meus filhos

Juan Andres e Luis Felipe

AGRADECIMENTOS

Agradeço

Ao Prof. Nelson Maculan pela orientação, compreensão, e acolhida que me deu desde que cheguei ao Brasil.

Ao Prof. Jayme Szwarcfiter, pela orientação e interesse no meu trabalho.

As amigas Célia, Celina, Marcia, Monica e Sula, pela amizade, incentivo e trabalho conjunto.

A Universidade Federal de Rio de Janeiro e a todos os brasileiros, pela oportunidade de uma experiência de vida diferente.

Ao CNPq pelo suporte financeiro concedido durante o período de estudos.

Ao amigo Andres Weintraub, pelo carinho e apoio constante.

Ao Juan pelo amor a mim dedicado.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.).

Sobre Coloração das Arestas de um Grafo

Carmen Ortiz Zaldivar

Janeiro de 1994

Orientador: Prof. Nelson Maculan.

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação.

Uma coloração própria das arestas de um grafo é uma atribuição de cores às suas arestas tal que arestas adjacentes recebam cores distintas. O índice cromático é o menor número de cores necessárias para colorir as arestas de um grafo. O problema do índice cromático, isto é, decidir se um grafo admite uma coloração de arestas com um número dado de cores, é NP-completo.

Um grafo é de indiferença se é o grafo interseção de um conjunto de intervalos unitários. Um grafo é split se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em um conjunto independente e um conjunto que induz uma clique. Um grafo é clique-completo se suas cliques maximais se interseptom duas a duas.

Determinamos o índice cromático para três subclasses da classe dos grafos de indiferença: os grafos split-indiferença, os indiferença clique-completo reduzidos e os grafos união de duas cliques maximais.

Apresentamos um modelo linear binário para um grafo qualquer, com um número de colunas linear no tamanho do grafo e propomos uma estratégia heurística para resolvê-lo. Estudamos experimentalmente o comportamento da heurística em algumas classes de grafos e conjecturamos que ela permite resolver bem o problema em grafos pouco densos.

Abstract of thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment for the requirements for degree of Doctor of Science (D.Sc.).

On Edge Coloring of a Graph

Carmen Ortiz Zaldivar

January 1994

Thesis Supervisor: Prof. Nelson Maculan.

Department: Computation and Systems Engineering.

A proper edge colouring of a graph is an assignment of colours to its edges such that adjacent edges have different colours. The chromatic index is the minimum number of colours needed to properly colour the edges of a graph. The chromatic index problem, i.e., to decide whether a graph admits a proper edge colouring with a given number of colours, is NP-complete.

A graph is indifference if it is the intersection graph of a set of unitary intervals in the real line. A graph is split if its vertex set can be partitioned into a stable set and a set that induces a clique. A graph is clique-complete if no two of its maximal cliques are disjoint.

We find the chromatic index for three subclasses of indifference graphs: split-indifference graphs, clique-complete reduced indifference graphs and graphs that are the union of two maximal cliques.

We present a zero-one linear model for any graph with a linear number of columns in the size of the graph and we propose a heuristic strategy for solving it. We test computationally this heuristic in some classes of graphs and we conjecture that it solves well the problem in graphs with low density.

C O N T E Ú D O

1	Introdução.....	1
1.1	Definições e notações básicas.....	5.
2	O problema de coloração de arestas no contexto da teoria de grafos.....	8
2.1	O índice cromático.....	8.
2.2	O teorema de Vizing e o problema de classificação	
2.2.1	O teorema de Vizing.....	9
2.2.2	O problema de classificação.....	13
2.3	Complexidade do problema de coloração de arestas..	14
2.3.1	NP-completeza do índice cromático para grafos regulares.....	14
2.3.2	NP-completeza do índice cromático para os grafos perfeitos.....	16
2.3.3	Casos polinomiais.....	16.
3	Os grafos indiferença.....	22
3.1	Caracterizações dos grafos indiferença.....	22
3.2	Colorações de cliques de ordem par.....	23
3.2.1	Uma coloração perfeita.....	24
3.2.2	Colorações equitativas.....	29
3.3	Os grafos split-indiferença.....	30
3.3.1	Caracterização estrutural dos grafos split- indiferença.....	31
3.3.2	Índice cromático dos grafos split-indiferença	
3.4	Os grafos indiferença clique-completo reduzidos...	32
3.4.1	Caracterização dos grafos indiferença clique-completo reduzido.....	37
3.4.2	Índice cromático dos grafos indiferença clique-completo reduzido.....	41
3.5	Os grafos união de duas cliques maximais.....	42

4 O problema de coloração de arestas no contexto de programação matemática.....	46
4.1 O problema de emparelhamento máximo.....	46
4.2 O problema do índice cromático.....	49
5 Um modelo de programação linear para o problema de coloração de arestas.....	53
5.1 O modelo linear.....	53
5.2 Resolução do modelo linear relaxado em algumas classes de grafos.....	55
6 Conclusões e pesquisas futuras.....	63
Bibliografia.....	64
Apêndice.....	67

LISTA DE FIGURAS

2.1	Coloração própria e ótima de G	8
2.2	Passo 1-Teorema de Vizing.....	11
2.3	Passo 2-Teorema de Vizing.....	11
2.4	Passo 3-Teorema de Vizing.....	12
2.5	Coloração ótima de K_5	17
2.6	Coloração ótima de K_G	18
2.7	Coloração ótima de K_{49}	19
2.8	Complexidade do índice cromático em algumas classes de grafos perfeitos.....	21
3.1	Um grafo G indiferença e a sua representação por intervalos unitários.....	23
3.2	O grafo $K_{1,9}$	23
3.3	Caracterização dos grafos split-indiferença.....	31
3.4	Grafos split-indiferença.....	32
3.5	Grafo G split-indiferença tal que $G=G_1 \cup G_2$	33
3.6	Emparelhamento perfeito em G_2	34
3.7	Coloração de G split-indiferença.....	35
3.8	Partição clique de um grafo.....	37
3.9	Um grafo indiferença.....	38
3.10	Uma ordem indiferença de um grafo indiferença clique-completo.....	40
3.11	Um grafo G união de duas cliques.....	42
3.12	Complexidade do índice cromático.....	45

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Uma *coloração própria* das arestas de um grafo é uma atribuição de cores as suas arestas tal que duas arestas adjacentes recebam cores distintas. O *índice cromático* é o menor número de cores necessárias para colorir as arestas de um grafo de forma tal que arestas adjacentes tenham cores distintas.

Neste trabalho abordamos este problema para algumas classes restritas de grafos do ponto de vista da teoria de grafos e o problema geral da perspectiva de programação matemática.

O resultado mais importante relativo a este problema é o Teorema de Vizing [26] que estabelece que o índice cromático de um grafo é igual ao grau máximo do grafo ou ao grau máximo mais um. Lovász e Plummer [17] apresentam uma prova construtiva deste teorema que proporciona um algoritmo polinomial para colorir qualquer grafo com um número de cores igual ao grau máximo mais um. Assim, o problema ainda não resolvido é decidir se um grafo pode ser colorido com um número de cores igual ao seu grau máximo. Leven e Galil mostram em [16] que ele é NP-completo para grafos regulares.

Uma das linhas de pesquisa em torno do índice cromático consiste em estudar este parâmetro em classes restritas de grafos. Existem algoritmos eficientes para os grafos bipartidos [8] e para os grafos completos [26]. Outra linha de pesquisa dedica-se ao estudo de colorações que apresentam propriedades particulares. Uma contribuição deste trabalho é uma coloração denominada *perfeita*. Trata-se de uma coloração ótima que contém pelo menos um emparelhamento perfeito onde todas as arestas possuem cores diferentes. Provamos que todo grafo completo possui uma coloração perfeita.

Um grafo é *perfeito* quando todo subgrafo induzido admite uma coloração dos seus vértices com número cromático igual ao tamanho da maior clique e é de comparabilidade se admite uma orientação transitiva das suas arestas. Cai e Ellis mostram em [4] a NP-completeza do índice cromático para estas classes.

Uma subclasse dos grafos perfeitos é a classe dos grafos indiferença. Um grafo é de *indiferença* se é o grafo interseção de um conjunto de intervalos unitários. Um grafo é *split* se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em um conjunto estável e um conjunto que induz uma clique. A classe dos grafos *split-indiferença* contém os grafos que são *split* e *indiferença*.

Neste trabalho determinamos o índice cromático para esta última classe utilizando uma caracterização estrutural desenvolvida por Szwarcfiter [24]. A prova é construtiva e proporciona algoritmos eficientes para construir a coloração.

O subgrafo *reduzido* de um grafo é obtido identificando-se cada subconjunto de vértices gêmeos em um único vértice. Um grafo *clique-completo* é aquele cujas cliques maximais se interseptom duas a duas. Baseados nas propriedades estabelecidas por de Mello em [18] com respeito aos grafos *indiferença clique-completo* reduzidos provamos que o índice cromático é igual ao grau máximo do grafo. Também determinamos o índice cromático dos grafos *grafos* que são união de duas cliques maximais.

Outra abordagem do problema é através de programação linear. Uma coloração de arestas pode ser definida como uma partição do conjunto de arestas em emparelhamentos. Assim, podemos formular o problema de coloração ótima como um problema de cobertura das arestas do grafo com o menor número de emparelhamentos. Em vista da relação entre estes dois problemas as formulações discutidas na literatura consideram a matriz de incidência aresta-emparelhamento. No programa linear obtido as condições de binariedade das variáveis são relaxadas e embora o número de colunas aumente exponencialmente com o tamanho do grafo, ele pode

ser resolvido eficientemente pelo algoritmo do elipsoide. O caso ainda não resolvido é quando o valor ótimo do programa relaxado é igual ao grau máximo mas a solução ótima é fracionária. Uma abordagem consiste em acrescentar ao programa relaxado desigualdades válidas que são satisfeitas por todas as soluções inteiras do programa linear mas não por todas as soluções. Esta estratégia tem resultado adequada para diversos problemas combinatoriais [20], quando as desigualdades geram facetas da envoltória convexa das soluções inteiras. Stahl obtém em [23] um conjunto de desigualdades válidas para o problema do índice cromático que contém uma restrição para cada subconjunto de vértices de cardinalidade ímpar. O modelo assim obtido contém um número exponencial de colunas e de restrições.

Neste trabalho formulamos um modelo linear que utiliza a matriz de incidência vértice-aresta do grafo ao invés da matriz aresta-emparelhamento. A vantagem é que o número de colunas é linear no tamanho do grafo. Para o caso do valor ótimo deste programa resultar igual a zero mas a solução ser fracionária, estudamos experimentalmente o comportamento de uma heurística baseada em acrescentar iterativamente ao modelo relaxado somente algumas das desigualdades válidas determinadas por Edmonds [5] para o problema de emparelhamentos.

Aplicamos a estratégia proposta a um conjunto de grafos de diversas classes e os resultados permitem conjecturar que ela pode ser bem sucedida para grafos que são pouco densos.

Descrevemos, a seguir, a distribuição deste trabalho.

No Capítulo 2, apresentamos o Teorema de Vizing e os resultados encontrados na literatura relativos à complexidade do problema do índice cromático.

No Capítulo 3, consideramos o problema em três subclasses dos grafos indiferença: os grafos split-indiferença, os grafos indiferença clique-completo reduzidos e os grafos união de duas cliques maximais. Determinamos o índice cromático para cada uma destas classes. Aqui mostramos também que todo grafo completo de

ordem par possui uma coloração perfeita.

No Capítulo 4, apresentamos e discutimos a resolução do programa linear proposto na literatura.

No Capítulo 5, propomos um outro modelo, também linear, e uma estratégia heurística para tentar resolvê-lo. Estudamos experimentalmente o comportamento desta heurística em um conjunto de grafos de até 50 vértices.

Finalmente, no Capítulo 6, apresentamos as conclusões deste trabalho e sugerimos direções para futuras pesquisas.

1.1 DEFINIÇÕES E NOTAÇÕES BASICAS

Um *grafo* G é constituído por um conjunto finito não vazio $V=V(G)$ e outro conjunto $E=E(G)$ de pares não ordenados de elementos distintos de V . Os elementos de V são chamados *vértices* e os de E são as *arestas* de G . Uma aresta é denotada pelo par (u,v) de vértices. Assim, os vértices u e v são os *extremos* da aresta, e são ditos *incidentes* a ela e *adjacentes* entre si.

Um grafo pode ser visualizado através de uma representação no plano, na qual os vértices correspondem a pontos distintos no plano, enquanto que a cada aresta (u,v) é associada uma linha unindo os pontos correspondentes a u e v .

O *complemento* de um grafo G é o grafo \overline{G} que possui o mesmo conjunto de vértices de G e para todo par de vértices distintos u e v de G , (u,v) é uma aresta de \overline{G} se e somente se $(u,v) \notin E$.

Um *subgrafo* H de um grafo G é um grafo tal que $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Se, além disso, $E(H)$ for o conjunto de arestas de G que têm ambos os extremos em $V(H)$ então H é *subgrafo induzido* por $V(H)$.

O grafo $G-v$, obtido do grafo G pela remoção do vértice v é o subgrafo induzido pelo conjunto $V \setminus v$.

O *grau*, $d(v)$, de um vértice v é o número de arestas que incidem em v . Um grafo é *regular* de grau k , quando todos os seus vértices possuírem o mesmo grau k .

O símbolo Δ denota o maior grau de um vértice de G .

A *vizinhança* ou *adjacência* de um elemento v , $Adj(v)$, é o conjunto de vértices adjacentes a v .

Dois grafos G e H são *isomorfos* se existir uma função biunívoca $f: V(G) \rightarrow V(H)$ tal que $(u,v) \in E(G)$ se e somente se

$(f(u), f(v)) \in E(H) \quad \forall u, v \in V(G).$

Uma seqüência de vértices v_1, v_2, \dots, v_k tal que $(v_j, v_{j+1}) \in E$, $1 \leq j \leq k$ é denominada *caminho* de v_1 a v_k . Se todos os vértices do caminho forem distintos, o caminho é *simples*. O valor $k-1$ é o *comprimento* do caminho. Um *ciclo* é um caminho v_1, v_2, \dots, v_k onde $v_1 = v_k$ e $k \geq 3$.

Uma *corda* de um caminho é uma aresta entre dois vértices v_i e v_j tal que $i \neq j+1$ e $i \neq j-1$.

Um caminho entre u e v sem cordas é dito *induzido*. O caminho induzido por k vértices é denotado P_k e o ciclo induzido por k vértices é denotado C_k .

Um grafo G é *conexo* se existir um caminho entre cada par de vértices de G . Denominam-se *componentes conexas* (ou *componentes*) do grafo G aos subgrafos maximais de G que sejam conexos.

Um grafo *completo* ou *clique* é aquele cujos vértices são dois a dois adjacentes. O grafo completo com n vértices é denotado K_n .

Um *conjunto independente* é um subconjunto de vértices dois a dois não adjacentes.

Um grafo G é *bipartido* quando o seu conjunto de vértices V puder ser particionado em dois conjuntos V_1 e V_2 , tais que toda aresta de G une um vértice de V_1 a outro de V_2 . Um grafo *bipartido completo* possui uma aresta para cada par de vértices u e v , sendo que $u \in V_1$ e $v \in V_2$. Se $|V_1| = r$ e $|V_2| = s$ então o grafo bipartido completo é denotado $K_{r,s}$.

Um *conjunto parcialmente ordenado* ou uma *ordem parcial* (S, \leq) consiste de um conjunto não vazio S e uma relação binária \leq em S que é reflexiva, antissimétrica e transitiva. Se, além disso, quaisquer dois elementos x e y de S são tais que ou $x \leq y$ ou $y \leq x$, então (S, \leq) é uma ordem linear.

Um *emparelhamento* em G é um conjunto de arestas com extremos distintos duas a duas. Um *emparelhamento máximo* é aquele que possui um número máximo de arestas. Um emparelhamento em G é *perfeito* quando cobrir todos os vértices de G .

A classe dos problemas de decisão cuja solução pode ser encontrada por um algoritmo em tempo polinomial no tamanho da entrada é denotada por P . O símbolo NP denota a classe dos problemas de decisão que possuem um certificado sucinto à resposta SIM do problema, reconhecido por um algoritmo polinomial no tamanho da entrada.

Um problema em NP é *completo* se qualquer problema em NP puder ser polinomialmente transformado a ele. Estes problemas pertencem à classe dos problemas NP -*completos*.

CAPÍTULO 2

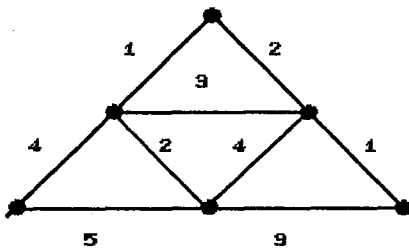
O PROBLEMA DE COLORAÇÃO DE ARESTAS NO CONTEXTO DA TEORIA DE GRAFOS

2.1 O ÍNDICE CROMÁTICO

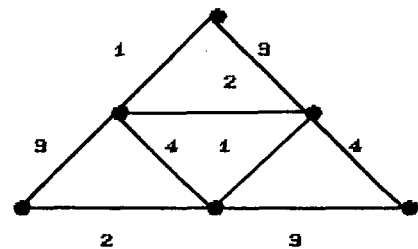
Uma coloração das arestas de um grafo G é uma atribuição de cores às arestas de G . Uma coloração é *própria* se arestas adjacentes possuem cores diferentes. Se uma coloração utiliza k cores ela é dita uma k -coloração.

O índice cromático de G , $\chi'(G)$, é o menor número de cores necessárias para colorir as arestas de G de forma tal que arestas adjacentes possuam cores diferentes. Uma coloração própria que utiliza $\chi'(G)$ cores é chamada *coloração ótima*.

A Figura 2.1 mostra (a) uma coloração própria e (b) uma coloração ótima para o grafo G , denominado pirâmide.



(a) coloração própria



(b) coloração ótima

Figura 2.1: Coloração própria e ótima de G .

Se uma aresta (u,v) possui a cor k , diremos que a cor k está representada nos vértices u e v .

Observamos que se o grau máximo de G é Δ então $\chi'(G) \geq \Delta$.

Ilustramos, a seguir, a definição acima determinando o índice cromático de alguns grafos simples e bem conhecidos.

TEOREMA 2.1 O índice cromático de um grafo caminho P_n com n vértices é 2.

Prova: O grau de P_n é 2, portanto $\chi'(P_n) \geq 2$. Para obter uma coloração com duas cores é suficiente alternar essas duas cores nas arestas, ao longo do caminho. ■

TEOREMA 2.2 O índice cromático de um grafo circuito, C_n , com n vértices esta dado por

$$\chi'(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ é par} \\ 3 & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Prova: O grau de C_n é 2, portanto $\chi'(C_n) \geq 2$. Se n é par então duas cores são suficientes, pois alternam-se essas duas cores nas arestas ao longo do circuito. Quando n é ímpar, precisa-se de uma terceira cor para evitar que a primeira aresta colorida e a última possuam a mesma cor. ■

2.2 O TEOREMA DE VIZING E O PROBLEMA DE CLASSIFICAÇÃO

2.2.1 O TEOREMA DE VIZING

Até 1964 os melhores limites conhecidos do índice cromático de um grafo G qualquer, de grau máximo Δ , eram

$$\Delta \leq \chi'(G) \leq \lfloor 3/2 \Delta \rfloor.$$

A primeira desigualdade é trivial, e a segunda foi provada por Shannon em 1949 [22]. Em 1964, Vizing [26] mostrou que a segunda desigualdade pode ser substituída por $\chi'(G) \leq \Delta + 1$.

Se G é um grafo colorido com as cores α, β, \dots , então denotamos $H(\alpha, \beta)$ o subgrafo de G induzido pelas arestas cuja cor é α ou β . Observe que cada componente de $H(\alpha, \beta)$ deve ser um caminho ou um circuito de comprimento par.

TEOREMA 2.3 (Teorema de Vizing)

Seja G um grafo de grau máximo Δ . Então $\Delta \leq \chi'(G) \leq \Delta+1$.

Prova: A primeira desigualdade é trivial. Para provar que $\chi'(G) \leq \Delta+1$ o autor utilizou indução no número de arestas de G . A idéia é provar que se todas as arestas de G , menos uma delas, podem ser coloridas com $\Delta+1$ cores então existe uma coloração para todas as arestas de G com $\Delta+1$ cores.

Suponha que cada aresta de G foi colorida com uma das $\Delta+1$ cores dadas, com a única exceção da aresta $e_1 = vw_1$. Então deve existir pelo menos uma cor não representada no vértice v , e pelo menos uma cor não representada no vértice w_1 . Se alguma cor não está representada nem em v nem em w_1 , então esta cor pode ser utilizada para colorir a aresta e_1 , o que completaria a prova. Caso contrário, seja α uma das cores não representadas em v e seja $\beta_1 \neq \alpha$ uma das cores não representadas em w_1 . A prova continua nos três passos seguintes:

Passo 1: Seja $e_2 = vw_2$ a aresta incidente no vértice v que tem atribuída a cor β_1 . Esta aresta deve existir pois, caso contrário, a cor β_1 não estaria representada nem em v nem em w_1 , o que levaria a uma contradição com a hipótese inicial. Em seguida, apaga-se a cor da aresta e_2 e associa-se a cor β_1 à aresta e_1 . Veja a Figura 2.2(a).

Pode-se assumir que os vértices v , w_1 e w_2 pertencem à mesma componente do subgrafo $H(\alpha, \beta_1)$ pois, caso contrário, poderiam-se intercambiar as cores das arestas na componente que contém w_2 sem alterar a cor da aresta e_1 . Isto implica em que a aresta e_2 pode

ser colorida α , completando desta forma a coloração de G . Assim, a situação é como na Figura 2.2(b).

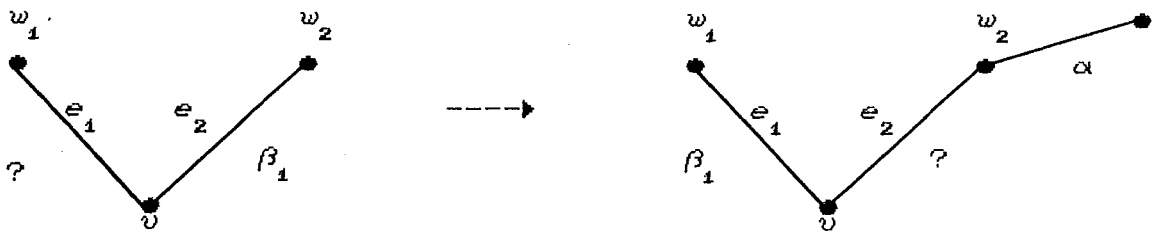


Figura 2.2(a): Passo 1-Teorema de Vizing.

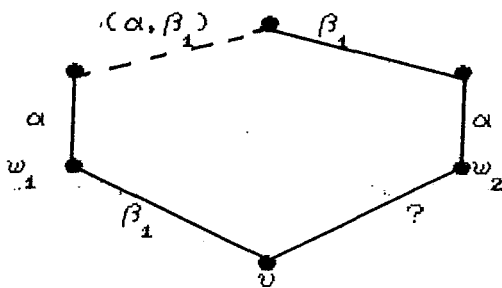


Figura 2.2(b): Passo 1-Teorema de Vizing.

Passo 2: Seja $\beta_2 \neq \beta_1$ uma das cores não representadas em w_2 . Pode-se assumir que a cor β_2 está representada em w pois, caso contrário poderia-se completar a coloração de G colorindo e_2 com a cor β_2 . Portanto, seja $e_3 = vw_3$ a aresta incidente em v que possui a cor β_2 . Então, apaga-se a cor da aresta e_3 e associa-se a cor β_2 à aresta e_2 . Pelo mesmo argumento do passo 1, podemos supor que os vértices v , w_2 e w_3 pertencem à mesma componente de $H(\alpha, \beta_2)$. A Figura 2.3 mostra a nova situação.

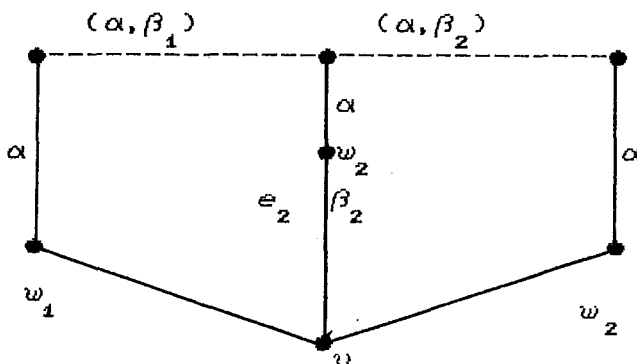


Figura 2.3: Passo 2-Teorema de Vizing.

Passo 3: Repetindo o procedimento anterior, obteremos eventualmente um vértice w_k adjacente ao vértice v , tal que a aresta vw_k não está colorida e alguma cor β_i ($i < k-1$) não representada em w_k . Como antes, podemos assumir que os vértices v, w_i e w_{i+1} pertencem à mesma componente T de $H(\alpha, \beta_i)$. Dado que α não está representada em v , e β_i não está representada em w_{i+1} , T deve ser o caminho desde v até w_{i+1} que passa pelo vértice w_i e que é formado só de arestas coloridas alternadamente β_i e α (ver Figura 2.4). Este caminho não contém w_k , pois β_i não está representada em w_k .

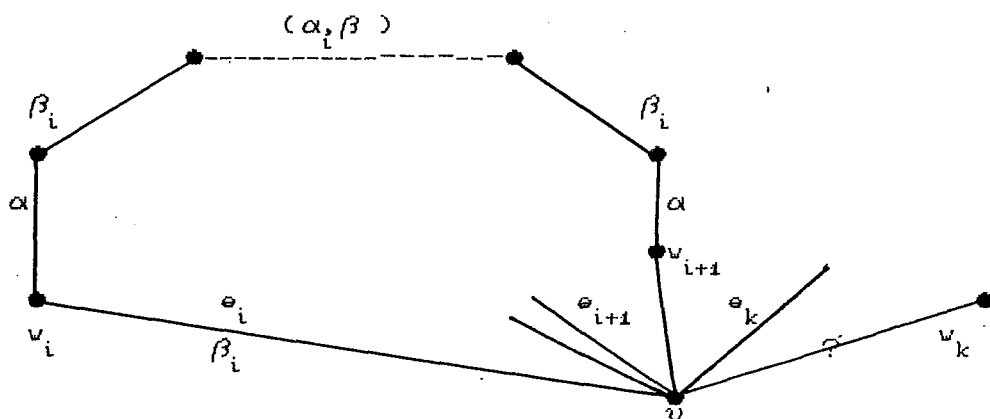


Figura 2.4: Passo 3-Teorema de Vizing.

Se T^* é a componente de $H(\alpha, \beta_i)$ que contém o vértice w_k então T e T^* devem ser disjuntas. Portanto, é possível intercambiar as cores nas arestas de T^* e colorir a aresta vw_k com α . ■

O Teorema de Vizing estabelece que o índice cromático de um grafo G , de grau máximo Δ , é Δ ou $\Delta+1$. Dado que para um grafo qualquer, Δ pode ser determinado em $O(|E(G)|)$ tempo, e que da prova do teorema surge um algoritmo eficiente para colorir as arestas de G com $\Delta+1$ cores, poder-se-ia pensar ser este teorema utilizado para determinar $\chi'(G)$ eficientemente. Infelizmente, isso não é verdade, pois o problema de decisão " $\chi'(G) = \Delta$?" é NP-completo, como veremos na seção seguinte.

2.2.2 O PROBLEMA DE CLASSIFICAÇÃO

O Teorema de Vizing (1964) proporciona uma forma simples de classificar os grafos em uma de duas classes. Um grafo G se diz que é de Classe 1 se $\chi'(G)=\Delta$ e de Classe 2 se $\chi'(G)=\Delta+1$. Na seção anterior vimos que os grafos caminho são de Classe 1 e que os grafos circuito de ordem ímpar são de Classe 2. O problema está em aberto para a maioria de classes particulares de grafos. Conjectura-se que a Classe 2 é reduzida. A base para esta conjectura é estabelecida por Erdos e Wilson [6]. Eles provaram que quase todos os grafos são de Classe 1, no sentido que se $P(n)$ é a probabilidade de um grafo aleatório, de n vértices, ser de Classe 1, então $P(n) \rightarrow 1$ quando $n \rightarrow \infty$.

Parece natural esperar que quanto mais arestas um grafo possuir, mais provável será que ele pertença à Classe 2. Beineke e Wilson provaram uma condição necessária para um grafo ser de Classe 2. Observe que o teorema é aplicável só quando n é ímpar.

TEOREMA 2.4 (Beineke e Wilson [1]) Seja G um grafo com n vértices, m arestas e grau máximo Δ . Então G é de Classe 2 se $m > \Delta \lfloor \frac{1}{2} n \rfloor$.

Prova: Se G é de Classe 1 então qualquer coloração própria das arestas de G com Δ cores particiona o conjunto de arestas em Δ conjuntos disjuntos. Mas, o número de arestas de cada subconjunto não pode exceder $\lfloor \frac{1}{2} n \rfloor$, pois caso contrário, duas destas arestas seriam adjacentes. Portanto, $m \leq \Delta \lfloor \frac{1}{2} n \rfloor$. ■

A seguir, enunciaremos alguns corolários deste teorema.

COROLÁRIO 2.5.

- (i) Todo grafo regular de ordem ímpar é de Classe 2.
- (ii) Seja H um grafo regular de ordem ímpar e grau máximo Δ . Se G é qualquer grafo obtido de H eliminando, no máximo, $\frac{1}{2}\Delta-1$ arestas, então G é de Classe 2.
- (iii) Se H é um grafo regular de ordem par e se G é qualquer grafo obtido de H inserindo um novo vértice em qualquer uma das arestas

de H , então G é de Classe 2.

Outro resultado interessante relativo ao problema de classificação, para grafos de grau máximo grande, é o seguinte.

TEOREMA 2.6 (Hilton e Johnson [12]) Seja G um grafo com n vértices e grau máximo $\Delta(G) \geq n-2$. Se n é ímpar então G é de Classe 2 se e somente se $|E(G)| > \Delta(G) \lfloor 1/2 n \rfloor$, e se n é par então G é de Classe 2 se e somente se para algum vértice $v \in V(G)$, $\Delta(G-v) = \Delta(G)$ e $|E(G-v)| > \Delta(G) \lfloor 1/2(n-1) \rfloor$.

2.3 COMPLEXIDADE DO PROBLEMA DE COLORAÇÃO DE ARESTAS

Em 1981 Holyer [13] provou que o problema de decidir se o índice cromático de um grafo 3-regular é 3 ou 4 é NP-completo, o que implica que o problema é NP-completo para um grafo qualquer. Holyer conjecturou nesse trabalho, também, que o problema análogo para grafos de grau máximo Δ é NP-completo. Posteriormente, em 1983, Leven e Galil [16], provaram esta conjectura.

2.3.1 NP-COMPLETEZA DO ÍNDICE CROMÁTICO PARA GRAFOS REGULARES

A técnica utilizada é mostrar uma redução polinomial do problema 3-SAT, que definiremos a seguir, ao problema de decidir o índice cromático de um grafo.

Considere um conjunto de variáveis booleanas u_1, \dots, u_m e os seus complementos $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_m$. Isto é, cada variável u_i toma um valor verdadeiro ou falso e u_i é verdadeiro se e somente se \bar{u}_i for falso. Considere, também, um conjunto de cláusulas $C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ nas variáveis u_1, \dots, u_m , cada cláusula C_i

consistindo de três literais l_{i1}, l_{i2} e l_{i3} onde cada literal l_{ij} é uma variável u_k ou o seu complemento \bar{u}_k .

Uma cláusula é dita *satisfatível* se existe uma atribuição de valores, verdadeiro ou falso, para as variáveis de tal modo que pelo menos um dos literais seja verdadeiro. O problema de 3-satisfabilidade ou 3-SAT, consiste em determinar se existe uma atribuição de valores de verdade às variáveis tal que toda cláusula em C seja satisfatível.

TEOREMA 2.7 (Holyer [13]) O problema de determinar se o índice cromático de um grafo 3-regular é 3 ou 4 é NP-completo.

A idéia da prova é a seguinte. Dada uma instância C do problema 3-SAT, constrói-se um grafo G que é 3-colorível se e somente se C é satisfatível.

O grafo G é construído através da união de "partes" ou componentes, cada uma delas realizando uma tarefa específica. Pares de arestas levam informação entre as diversas componentes. Em uma 3-coloração de G , estes pares de arestas, se diz que representam o valor verdadeiro se as arestas possuem a mesma cor, e que representam o valor falso se as arestas tiverem cores distintas.

Os autores definem três tipos de componentes: uma associada a cada variável u_i , uma para cada cláusula C_j , e outra para os literais que são \bar{u}_i . Eles mostram como construir o grafo 3-regular a partir delas, em tempo polinomial.

TEOREMA 2.8 (Leven e Galil [16]) Dado um inteiro k , o problema de decidir se o índice cromático de um grafo regular, de grau k , é k ou $k+1$ é NP-completo.

2.3.2 NP-COMPLETEZA DO ÍNDICE CROMÁTICO PARA OS GRAFOS PERFEITOS

Em vista dos resultados anteriores, uma das linhas de pesquisa em torno ao índice cromático consiste em estudar este parâmetro em classes restritas de grafos. Cai e Ellis mostram em [4] a NP-completeza do problema de decisão associado ao índice cromático para os grafos regulares de comparabilidade e portanto para os grafos perfeitos. Eles, também, provam a NP-compleza do problema para os grafos livres de garra ($K_{1,3}$).

Um grafo é *perfeito* quando para todo subgrafo induzido o número cromático é igual ao tamanho da maior clique.

Seja \vec{G} o grafo direcionado ou orientado obtido atribuindo uma orientação às arestas do grafo G , não orientado. Se para cada par de arestas (u,v) e (v,w) de G , orientadas de u para v e de v para w , existir a aresta (u,w) orientada de u para w , então \vec{G} é uma *orientação transitiva* e G é um grafo de *comparabilidade*. Isto é, G é de comparabilidade se e somente se G admite uma orientação transitiva das suas arestas.

TEOREMA 2.9 (Cai e Ellis [4]) Dado $k \geq 3$ inteiro, determinar o índice cromático de um grafo k -regular de comparabilidade é NP-completo.

COROLÁRIO 2.10 Dado um inteiro $k \geq 3$, determinar o índice cromático de um grafo k -regular perfeito é NP-completo.

Prova: Todo grafo de comparabilidade é perfeito. ■

2.3.3 CASOS POLINOMIAIS

Embora, o problema do índice cromático resultar difícil, ainda em classes restritas de grafos, existem algumas classes onde ele pode ser resolvido eficientemente.

O índice cromático de um grafo completo K_n tem sido

determinado por diversos autores, a saber: Vizing [26], Behzad, Chartrand e Cooper [2] e Berge [3]). Apresentamos, a seguir, uma prova construtiva desenvolvida por Fiorini e Wilson.

TEOREMA 2.11 (Fiorini e Wilson [8]) O índice cromático de um grafo completo, K_n , está dado por

$$\chi'(K_n) = \begin{cases} n-1 & \text{se } n \text{ é par} \\ n & \text{se } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Prova: Observe que $\chi'(K_n) \geq n-1$, pois o grau de cada vértice é $n-1$.

Se n é ímpar, então o máximo número de arestas que é possível colorir com uma mesma cor é $1/2(n-1)$, caso contrário duas destas arestas seriam adjacentes. Assim, o máximo número de arestas em K_n é $1/2(n-1)\chi'(K_n)$. De outra parte, o número de arestas de K_n é $1/2(n-1)n$. Portanto, $\chi'(K_n) \geq n$. Para provar a igualdade, os autores mostram uma forma de construir uma coloração própria com n cores. Para isso, os vértices de K_n são colocados na forma de um polígono regular e as arestas deste polígono são coloridas cada uma com uma cor distinta. As outras arestas são coloridas atribuindo a cada uma delas a cor utilizada na aresta paralela com ela na fronteira. Na Figura 2.5 ilustra-se o caso $n=5$.

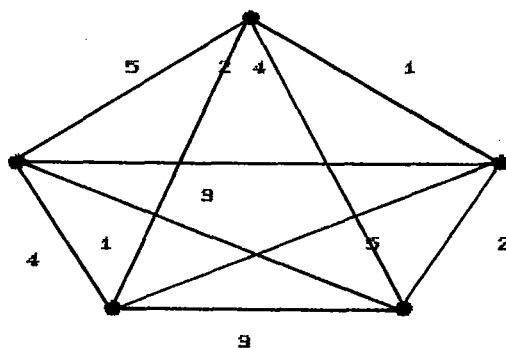


Figura 2.5: Coloração ótima de K_5 .

O caso $n = 2$ é trivial. Se $n > 2$ e par, escolhe-se um vértice qualquer, v , de K_n e o subgrafo induzido $K_n - v$, que é um grafo

completo com $n-1$ vértices, é colorido da forma descrita acima. Em cada vértice há exatamente uma cor não representada, e as cores não representadas são todas diferentes. As arestas de K_n incidentes em v são coloridas utilizando estas cores faltantes. ■

A Figura 2.6 mostra o caso $n=6$.

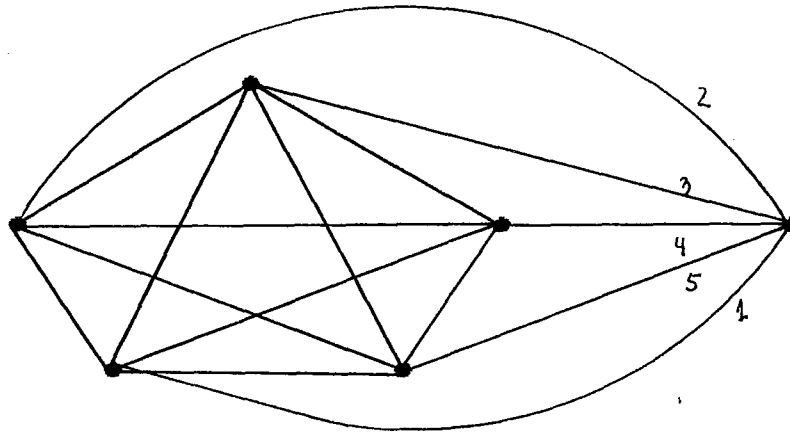


Figura 2.6: Coloração ótima de K_6 .

Os grafos bipartidos completos são outra classe de grafos onde o índice cromático pode ser determinado eficientemente. Fiorini e Wilson apresentam, também, para este caso uma prova construtiva.

TEOREMA 2.12 O índice cromático de um grafo bipartido completo, $K_{r,s}$, é $\max\{r,s\}$.

Prova: Suponha, sem perda de generalidade, que $r \geq s$. Assim, $\chi'(K_{r,s}) \geq r$. Para provar a igualdade os autores constroem uma r -coloração, da seguinte forma: os r vértices são colocados em uma linha horizontal e os s vértices em outra linha horizontal, abaixo da primeira. A coloração é obtida atribuindo cores às arestas incidentes em cada um dos s vértices. Em cada vértice as arestas são consideradas na direção horária e utilizando as cores $\{1,2,\dots,r\}; \{2,3,\dots,r,1\}; \dots$; e $\{s,\dots,r,1,\dots,s-1\}$. A Figura 2.7 mostra a coloração para $K_{4,3}$. ■

Este resultado segue, também, como corolário direto do Teorema de König, a seguir.

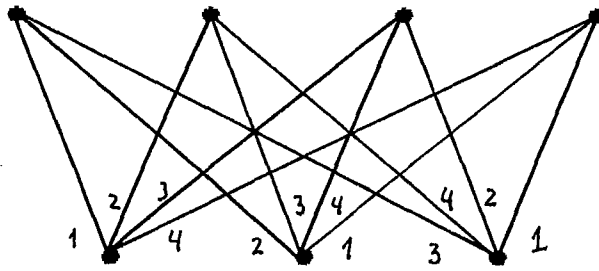


Figura 2.7: Coloração ótima de $K_{4,4}$.

TEOREMA 2.13 (Teorema de König) Seja G um grafo bipartido com grau máximo Δ . Então $\chi'(G) = \Delta$.

Prova: König utilizou indução no número de arestas de G . Claramente, é suficiente provar que se todas as arestas de G , menos uma delas, são coloridas usando, no máximo, Δ cores, então existe uma Δ -coloração para todas as arestas de G .

Suponha que cada aresta de G possui uma das Δ cores, com a única exceção da aresta $e=vw$. Então deve existir pelo menos uma cor não representada no vértice v , e pelo menos uma cor não representada no vértice w . Se existir uma cor não representada em ambos vértices v e w , então pode-se utilizar esta cor para colorir a aresta e , e a prova estaria completa. Caso contrário, seja α uma das cores não representadas em v , $\beta \neq \alpha$ uma das cores não representadas em w , e $H(\alpha, \beta)$ o subgrafo conexo de G formado pelo vértice w e todos os vértices e arestas de G que podem ser alcançados desde w por um caminho consistente só de arestas coloridas α ou β . Como G é bipartido, o subgrafo $H(\alpha, \beta)$ não pode conter o vértice v , e portanto podem-se intercambiar as cores α e β neste subgrafo sem afetar v ou a coloração restante. Logo, a aresta (v, w) pode ser colorida com a cor α , completando, assim, a coloração de G . ■

Finalmente, apresentamos na Figura 2.8, junto com as relações de pertinência de algumas classes de grafos perfeitos, a complexidade do problema do índice cromático restrito a estas

classes. Denotamos $A \rightarrow B$ se a classe B de grafos está contida na classe A.

Um grafo de comparabilidade é de *permutação* se o seu grafo complemento é também de comparabilidade.

Um grafo é dito sem P_4 ou *cografo* se não contém subgrafos induzidos isomórfos ao caminho P_4 .

Um grafo *triangulado* é aquele em que todo ciclo induzido de comprimento maior do que três possui uma corda.

Um grafo triangulado é chamado *split* se o seu complemento for triangulado. Os grafos *split*, também são caracterizados como aqueles grafos cujo conjunto de vértices pode ser particionado em um conjunto independente e um conjunto que induz uma clique.

O grafo *interseção* de uma família F de conjuntos é o grafo obtido associando-se um vértice a cada conjunto da família, e definindo uma aresta entre dois vértices se e somente se os conjuntos correspondentes se intersectam. Um grafo é de *intervalo* se é o grafo interseção de um conjunto de intervalos da reta real. Se os intervalos são unitários então o grafo interseção é denominado grafo de *intervalo próprio*, *intervalo unitário* ou *indiferença*.

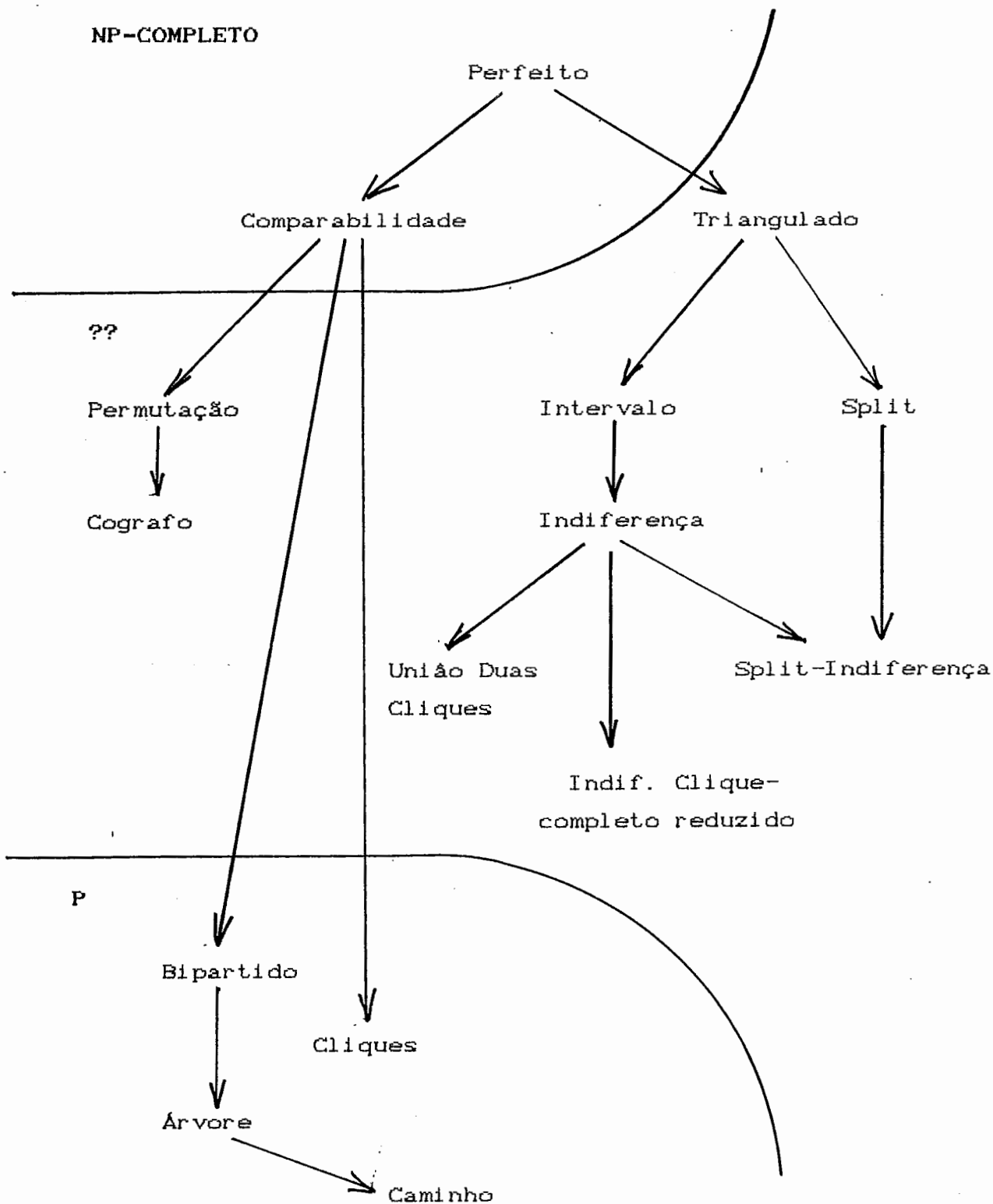


Figura 2.8: Complexidade do Índice Cromático em Algumas Classes de Grafos Perfeitos.

CAPÍTULO 3

OS GRAFOS INDIFERENÇA

Neste capítulo consideramos o problema do índice cromático em três subclasses da classe dos grafos indiferença: os grafos split-indiferença, os grafos indiferença clique-completo reduzidos e os grafos união de duas cliques maximais.

Na seção 3.1 apresentamos algumas caracterizações dos grafos indiferença.

A seção 3.2 trata de dois tipos de colorações que usaremos na coloração dos grafos antes mencionados. Apresentamos a coloração equitativa encontrada na literatura, e definimos a coloração perfeita.

Na seção 3.3 determinamos o índice cromático dos grafos split-indiferença, utilizando uma caracterização estrutural própria da subclasse. A seção 3.4 está dedicada aos grafos indiferença clique-completo reduzidos e a seção 3.5 aos grafos união de duas cliques maximais.

3.1 CARACTERIZAÇÕES DOS GRAFOS INDIFERENÇA

No capítulo anterior foi definido um grafo indiferença como aquele que é o grafo interseção de um conjunto de intervalos unitários na reta real. A Figura 3.1 mostra um grafo indiferença e sua representação por intervalos unitários.

Um resultado de Roberts que apresentamos a seguir, caracteriza os grafos indiferença em termos das suas cliques maximais.

TEOREMA 3.1 (Roberts [21]) Um grafo é de indiferença se e somente se admite uma ordem linear sobre seus vértices, na qual os vértices contidos em uma mesma clique maximal são consecutivos.

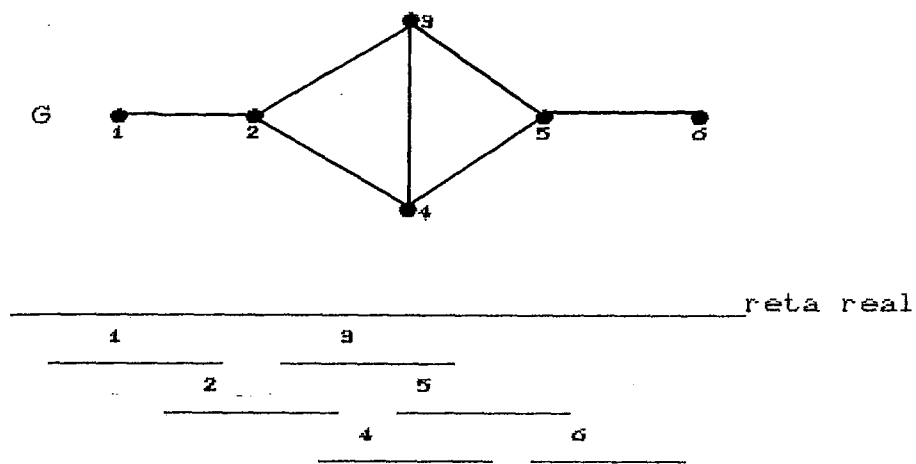


Figura: 3.1 Um grafo G indiferença e a sua representação por intervalos unitários.

Uma ordem linear sobre os vértices de um grafo que satisfaz a condição do teorema acima é chamada *ordem indiferença*.

Os grafos indiferença foram também caracterizados por Roberts em termos de subgrafos proibidos.

TEOREMA 3.2 (Roberts [21]) Os grafos indiferença são exatamente os grafos de intervalo que não contêm $K_{1,3}$ como subgrafo induzido. Veja Figura 3.2

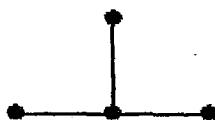


Figura 3.2: O grafo $K_{1,3}$.

3.2 COLORAÇÕES DE CLIQUES DE ORDEM PAR

Diversos autores têm estudado o problema de coloração das arestas de um grafo completo, também denominado um-fatorização do grafo completo, desde o século passado. A publicação mais antiga, devida a Kirkman [14], data de 1847. Porém, pela relação deste

problema com o problema dos torneios, é possível que ele tenha sido considerado ainda mais cedo.

Alguns dos trabalhos têm sido dedicados ao desenvolvimento de algoritmos eficientes para colorir uma clique, como foi mencionado no capítulo anterior. Outros estudam questões relacionadas com colorações que apresentem propriedades particulares. Algumas destas questões são: Quantas arestas em comum podem ter duas colorações próprias de uma clique de ordem par?, Qual é o maior número de arestas coloridas com cores distintas que contém um ciclo hamiltoniano em uma coloração própria de uma clique?, Qual é o maior número de cores diferentes em um emparelhamento perfeito em qualquer coloração própria?

Nesta seção estamos interessados em colorações ótimas de uma clique de ordem par, K_n , que apresentam emparelhamentos perfeitos onde as arestas possuem todas cores distintas, e também em propriedades das colorações próprias com n cores. Woolbright [28] provou que em qualquer coloração própria de K_n (n par) existe um emparelhamento perfeito, com $n/2$ arestas, tal que $n/2-1$ delas possuem cores distintas.

3.2.1 UMA COLORAÇÃO PERFEITA

Um subgrafo de uma clique K_n colorida é chamado *totalmente multicolorido* se todas as arestas do subgrafo possuem cores diferentes.

Denominaremos *coloração perfeita* a uma coloração ótima que contém pelo menos um emparelhamento perfeito totalmente multicolorido.

TEOREMA 3.1 Existe uma coloração perfeita do grafo completo K_n de ordem par.

Prova: Sejam v_1, v_2, \dots, v_n os vértices de K_n . Nos referiremos à aresta (v_i, v_j) , simplesmente como a aresta (i, j) para facilitar a notação.

Considere a seguinte matriz simétrica M_n , onde m_{ij} é a cor da aresta (i, j) .

-	1	2	3	4	5	n-2	n-1
1	-	3	4	5	n-1	2	
2	3	-	5	6	1	4	
3	4	5	-	7	2	6	
4	5	6	7	-	9	3	8
.
.
.
.
n-2	n-1	1	2	3	-	n-3	
n-1	2	4	6	8	n-3	-	

Os elementos da diagonal principal não interessam, pois o grafo não tem ciclos elementares.

Observe que

(i) $m_{ij} = [2(i-1) \bmod (n-1) + (j-1)] \bmod (n-1)$
 se $1 \leq i \leq n-2, j \neq n-1$ e $j > i$.

(ii) $m_{i, n-i} = n-1$ se $1 \leq i < n/2$.

(iii) $m_{i, n-1} = [2(i-1)] \bmod (n-1)$ para $i = 1, 2, \dots, n-1$.

(iv) $m_{i, n} = [2(i-1)] \bmod (n-1)$ para $2 \leq i \leq n-1$.

(v) $m_{1, n} = n-1$.

A matriz M_n representa uma coloração ótima de K_n , pois em cada linha e cada coluna os elementos são todos distintos, portanto arestas adjacentes possuem cores diferentes. Além disso, somente $n-1$ cores são utilizadas.

Para K_{12} a matriz M_{12} é a seguinte

-	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	-	3	4	5	6	7	8	9	10	11	2
2	3	-	5	6	7	8	9	10	11	1	4
3	4	5	-	7	8	9	10	11	1	2	6
4	5	6	7	-	9	10	11	1	2	3	8
5	6	7	8	9	-	11	1	2	3	4	10
6	7	8	9	10	11	-	2	3	4	5	1
7	8	9	10	11	1	2	-	4	5	6	3
8	9	10	11	1	2	3	4	-	6	7	5
9	10	11	1	2	3	4	5	6	-	8	7
10	11	1	2	3	4	5	6	7	8	-	9
11	2	4	6	8	10	1	3	5	7	9	-

Em uma coloração perfeita existem $n/2$ arestas coloridas com cada cor k .

Para k ímpar as arestas coloridas com a cor k são:

- ° $(1, k+1), (2, k), (3, k-1), (4, k-2), \dots, (\lfloor k/2 \rfloor, \lfloor k/2 \rfloor + 1),$
- ° $(k+2, n-1), (k+3, n-2), \dots, (n/2 + \lfloor k/2 \rfloor, n/2 + \lfloor k/2 \rfloor + 2),$
- ° e a aresta $(n/2 + \lfloor k/2 \rfloor + 1, n).$

Para k par as arestas coloridas com a cor k são:

- ° $(1, k+1), (2, k), (3, k-1), \dots, (k/2, k/2 + 2),$
- ° $(k+2, n-1), (k+3, n-2), \dots, (n/2 + k/2, n/2 + k/2 + 1),$
- ° e a aresta $(k/2 + 1, n)$

Considere o conjunto formado pelas arestas $(1,2), (2,3), (3,4), \dots, (n-1,n)$ localizadas na segunda diagonal da matriz M_n . Sabemos que $m_{i,i+1} = 2(i-1) \bmod (n-1) + 1$. Portanto,

$$m_{i,i+1} = \begin{cases} 1, 3, 5, 7, \dots, n-1 & i=1, 2, 3, \dots, n/2 \\ 2, 4, 6, \dots, n-4 & i=n/2 + 1, \dots, n-2 \end{cases}$$

Logo, os primeiros $n-2$ elementos deste conjunto de arestas possuem cores diferentes. A aresta $(n-1, n)$ tem a cor ímpar $n-3$, isto é, a mesma cor da aresta $(n/2-1, n/2)$

Seja R o subconjunto, do conjunto anterior, formado pelas arestas $(1,2), (3,4), (5,6), (7,8), \dots, (n-1, n)$. Então R é um emparelhamento perfeito para K_n .

Quando $n/2$ é ímpar todas as arestas de R possuem cores diferentes, pois a aresta $(n/2-1, n/2)$ não pertence a R . Portanto, R é um emparelhamento perfeito totalmente multicolorido.

Se $n/2$ é par, tanto a aresta $(n/2-1, n/2)$ quanto a aresta $(n-1, n)$ pertencem a R . Substituindo as arestas $(1,2), (3,4)$ e $(n-1, n)$ pelas arestas $(3, n-1), (2,4)$ e $(1, n)$ obtemos um emparelhamento perfeito totalmente multicolorido, pois a aresta $(3, n-2)$ tem a mesma cor da aresta $(1,2)$, a aresta $(2,4)$ possui a mesma cor da aresta $(n/2+2, n/2+3)$ que não pertence a R , e a aresta $(1, n)$ tem a cor da aresta $(n/2, n/2+1)$ que também não pertence a R . Assim, o conjunto R é totalmente multicolorido. ■

Para K_{12} o conjunto $\{(1,12), (2,4), (3,11), (5,6), (7,8), (9,10)\}$ define um emparelhamento perfeito totalmente multicolorido, e a coloração dada pela matriz M_{12} é perfeita.

Para K_{14} temos que o conjunto $\{(1,2), (3,4), (5,6), (7,8), (9,10), (11,12), (13,14)\}$ também é um emparelhamento perfeito totalmente multicolorido e M_{14} proporciona uma coloração perfeita.

COROLÁRIO 3.2 A coloração ótima da clique K_n , de ordem par, representada pela matriz M_n , do teorema anterior, contém um caminho de comprimento $n-2$ totalmente multicolorido.

Prova: As $n-2$ arestas $(1,2), (2,3), \dots, (n-2, n-1)$, localizadas na segunda diagonal da matriz M_n formam um caminho em K_n , e todas possuem cores distintas. ■

COROLÁRIO 3.3 A coloração ótima da clique K_n , de ordem par, representada pela matriz M_n , contém um ciclo hamiltoniano com $n-2$ cores diferentes.

Prova: Considere o ciclo formado por todas as arestas da segunda diagonal da matriz M_n e a aresta $(1,n)$. ■

Observamos que o emparelhamento perfeito totalmente multicolorido do teorema 3.1 não é o único que possui essa coloração.

Quando $n/2$ é ímpar, outro emparelhamento, com as mesmas propriedades, está constituído pelas arestas localizadas na segunda diagonal de M_n , não consideradas no teorema e acrescentando a aresta $(1,n)$. Isto é, as arestas $(2,3), (4,5), (6,7), \dots, (n-2, n-3)$, e $(1,n)$. Também, as arestas localizadas na diagonal que começa na posição $(1, n/2+1)$ e acaba na posição $(n/2, n)$ formam um emparelhamento perfeito totalmente multicolorido.

Para $n/2$ par, os conjuntos de arestas considerados acima apresentam exatamente uma cor repetida. Efetuando substituição de algumas arestas, como na prova do teorema, podemos obter emparelhamentos com as características desejadas. No conjunto definido pelas arestas $(2,3), (4,5), \dots, (n-2, n-1)$ e $(1,n)$ as arestas $(1,n)$ e $(n/2, n/2+1)$ possuem a cor $n-1$. Substituindo as arestas $(2,3), (4,5)$ e $(1,n)$ pelas arestas $(1,2), (3,4)$ e $(n-1, n)$ obtemos um conjunto totalmente multicolorido. Para o conjunto $(1, n/2+1), (2, n/2+2), \dots, (n/2-1, n)$, as arestas $(n/4, n/4n)$ e $(n/2, n)$ possuem a cor $n-2$. Neste caso, consideramos as arestas das diagonais vizinhas com esta. As arestas $(1, n/2), (2, n/2+1), \dots, (n/4, n/4n-1)$ estão coloridas com as cores ímpares $n/2-1, n/2-3, n/2-5, \dots, n-3$ respectivamente, e as arestas $(n/4+1, n/4n+2), (n/4+2, n/4n+3), \dots, (n/2-2, n-1)$ possuem as cores pares $2, 4, 6, \dots, n/2-4$ respectivamente. Acrescentando ao conjunto as arestas $(n/4n, n/4n+1)$ e $(n/2-1, n)$ que têm as cores $n/2$ e $n-4$, respectivamente, obtem-se o resultado.

3.2.2 COLORAÇÕES EQUITATIVAS

Diversos tipos de colorações próprias de um grafo têm sido propostas. Uma das mais interessantes parece ser a *coloração equitativa* definida por de Werra [27].

Seja $k_i(v)$ o número de arestas incidentes no vértice v coloridas com a cor i . Então, uma k -coloração de G é chamada equitativa se

$$\max_{i, j \leq k} |k_i(v) - k_j(v)| \leq 1 \quad \forall v \in V(G)$$

Consideremos a seguinte coloração de K_n com n cores para n par. Sejam c_1, c_2, \dots, c_n as cores a serem utilizadas. Vamos colorir K_n de tal forma que as cores c_i , para $i=1, 2, \dots, n/2$ estejam representadas em todos os vértices de K_n , e as cores c_i , para $i=n/2+1, \dots, n$ estejam representadas em exatamente $n-2$ vértices de K_n .

A coloração acima descrita é equitativa para K_n . Basta observar que se h_i é o número de arestas coloridas com a cor c_i em K_n , então $h_i = n/2$ para $i=1, \dots, n/2$ e $h_i = n/2 - 1$ para $i=n/2+1, \dots, n$.

Este tipo de coloração de uma clique de ordem par tem sido utilizada na prova de diversos teoremas. Apresentamos, como exemplo, uma coloração equitativa de K_n , n par, utilizada por Cai e Ellis, no seu trabalho sobre complexidade do índice cromático.

TEOREMA 3.4 (Cai e Ellis [4]) Existe uma n -coloração da clique K_n de ordem par, tal que as cores não representadas em $n/2$ dos vértices do grafo são todas distintas e são as mesmas cores não representadas nos outros $n/2$ vértices.

Prova: Considere a coloração representada pela matriz L_n , a seguir, e seja $t=n/2$.

1	2	3	4	t	t+1	n-1	n
2	3	4	5	t+1	t+2	n	1
.....									
.....									
t	t+1			n-1	n	t-2	t-1
t+1	t+2			n	1	t-1	t
.....									
.....									
n-1	n			t-2	t-1	n-3	n-2
n	1			t-1	t	n-2	n-1

Cada elemento m_{ii} indica a cor não representada no vértice i .

Observe que $m_{ii} = (2(i-1) \bmod n) + 1$ para $1 \leq i \leq n$. Portanto,

$m_{ii} = m_{t+i, t+i}$ para $1 \leq i \leq n/2$ e $m_{ii} \neq m_{jj}$ para $1 \leq i \neq j \leq n/2$. Logo, as cores não representadas nos vértices v_1, v_2, \dots, v_t são todas distintas e são as mesmas cores não representadas nos vértices $v_{t+1}, v_{t+2}, \dots, v_n$. ■

TEOREMA 3.5 A coloração de K_n de ordem par descrita no teorema anterior é equitativa.

Prova: cada uma das cores indicadas pelo elemento m_{ii} da matriz L_n está representada em $n-2$ vértices. Logo, existem $n/2 - 1$ arestas coloridas com cada cor $i=1, 3, 5, \dots, n-1$. As restantes cores estão representadas em cada um dos n vértices de K_n . Portanto, existem $n/2$ arestas coloridas com cada cor $i=2, 4, 6, \dots, n$. ■

3.3 OS GRAFOS SPLIT-INDIFERENÇA

Nosso interesse, nesta seção, é a classe dos grafos split-indiferença. O primeiro teorema apresenta uma caracterização destes grafos, e posteriormente determinamos o índice cromático, apresentando uma prova construtiva.

3.3.1 CARACTERIZAÇÃO ESTRUTURAL DOS GRAFOS SPLIT-INDIFERENÇA

Um grafo G é *split-indiferença* se é *split* e *indiferença*. Tanto os grafos *split* quanto os *indiferença* foram caracterizados no capítulo anterior. Claramente, um grafo que satisfaz simultaneamente alguma das caracterizações para ser *split* e alguma das caracterizações para ser *indiferença* pertence à subclasse *split-indiferença*. Szwarcfiter [24] caracterizou estes grafos em termos das suas cliques maximais, proporcionando, assim, uma caracterização estrutural própria dos grafos *split-indiferença*.

TEOREMA 3.6 (Szwarcfiter [24]) Um grafo conexo G é *split-indiferença* se e somente se

1. G é uma clique, ou
2. G é a união de duas cliques maximais G_1 e G_2 tais que $G_1 \setminus G_2 = K_1$ e $G_2 \setminus G_1 = K_1$, ou
3. G é a união de três cliques maximais G_1 , G_2 e G_3 tais que $G_1 \setminus G_2 = K_1$, $G_3 \setminus G_2 = K_1$ e
 - (i) $G_1 \cap G_3 = \emptyset$ ou
 - (ii) $V(G_1) \cup V(G_3) = V(G)$.

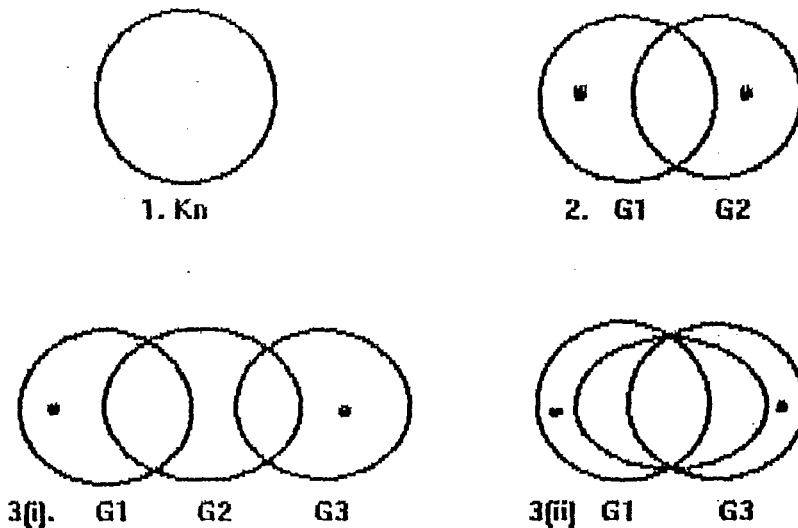


Figura 3.3: Caracterização dos Grafos Split-Indiferença.

A Figura 3.4 apresenta alguns exemplos de grafos split-indiferença.

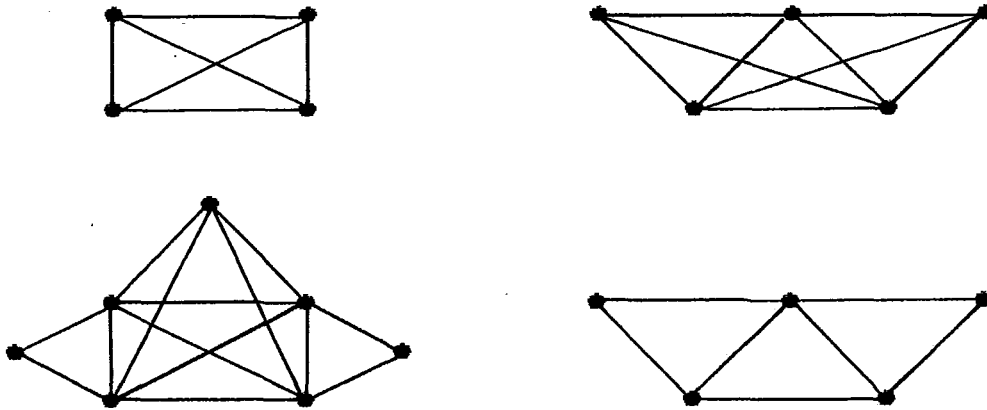


Figura 3.4: Grafos Split-Indiferença.

Uma propriedade interessante é que se um grafo for split e indiferença então ele é de comparabilidade [7].

3.3.2 ÍNDICE CROMÁTICO DOS GRAFOS SPLIT-INDIFERENÇA

Utilizaremos a caracterização dada pelo teorema 3.4 para determinar o índice cromático dos grafos split-indiferença. A prova é constructiva, portanto proporciona algoritmos eficientes para obter uma coloração ótima.

TEOREMA 3.7 Seja G um grafo split-indiferença com n vértices. Com a notação anterior:

- (a) Se G é uma clique, ou se $G = G_1 \cup G_2$ tal que $G_1 \setminus G_2 = K_1$ e $G_2 \setminus G_1 = K_1$ então

$$\chi'(G) = \begin{cases} n-1 & \text{se } n \text{ é par ou } G = P_3 \\ n & \text{se } n \text{ é ímpar e } n \geq 5. \end{cases}$$

(b) Se $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ tal que $G_1 \setminus G_2 = K_1$ e $G_3 \setminus G_2 = K_1$ e $V(G_1) \cap V(G_3) = \emptyset$ então

$$\chi'(G) = \begin{cases} n-2 & \text{se } n \text{ é ímpar, ou} \\ & n \text{ é par, } |V(G_1)| \leq n/2 \text{ e } |V(G_3)| \leq n/2 \\ n-1 & \text{caso contrario} \end{cases}$$

(c) Se $G = G_1 \cup G_2 \cup G_3$ tal que $G_1 \setminus G_2 = K_1$ e $G_3 \setminus G_2 = K_1$ e $V(G_1) \cup V(G_3) = V(G)$ então

$$\chi'(G) = \begin{cases} n-1 & \text{se } n \text{ é par, ou} \\ & n \text{ é ímpar e } |V(G_2 \setminus G_3)| + |V(G_2 \setminus G_1)| > \frac{1}{2}(n-1) - 2 \\ n & \text{caso contrario.} \end{cases}$$

Prova: (a) Se G é uma clique o resultado vem do teorema 2.11. Se G é a união de duas cliques maximais então o grau máximo de G é $n-1$. Portanto, pelo teorema de Vizing, $n-1 \leq \chi'(G) \leq n$.

Seja u o vértice tal que $G_1 \setminus G_2 = \{u\}$ e v o vértice tal que $G_3 \setminus G_2 = \{v\}$. G é subgrafo da clique de ordem n . De fato, ao acrescentar a G a aresta (u,v) obtemos uma clique com n vértices. Veja a Figura 3.5.

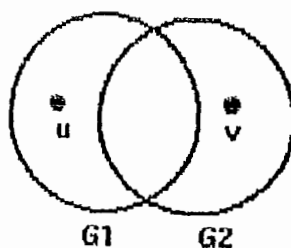


Figura 3.5: Grafo G split-indiferença tal que $G = G_1 \cup G_2$

Se n é par, como $\chi'(K_n) = n-1$, então $\chi'(G) = n-1$.

Se n é ímpar, utilizamos o corolário 2.5(ii) para argumentar. Este corolário estabelece que qualquer grafo obtido eliminando, no máximo, $\frac{1}{2}n - 1$ arestas de um grafo regular de ordem ímpar, é de

Classe 2. Sendo que $1 \leq \lfloor \frac{1}{2}(n-1) \rfloor - 1$ para $n \geq 5$, temos que $\chi'(G) = n$ se $n \geq 5$.

Observe que o único grafo split-indiferença que possui a estrutura dada e três vértices é o caminho P_3 .

Assim, se G é a união de duas cliques maximais, basta acrescentar a aresta (u,v) , colorir a clique resultante e retirá-la em seguida, para obter uma coloração ótima de G .

(b) Neste caso, o grau máximo de G é $n-2$. Portanto, $n-2 \leq \chi'(G) \leq n-1$.

Observamos que G_2 é uma clique de ordem $p = n-2$. Se p é ímpar então $\chi'(G_2) = \chi'(K_{n-2}) = n-2$. Podemos colorir G_2 utilizando $n-2$ cores e tal que em cada vértice exista uma cor não representada. Como estas cores são todas distintas, podemos estender a coloração de G_2 ao grafo G , colorindo as arestas (u,x) para todo $x \in V(G_1 \setminus G_2)$ com essas cores. Analogamente para as arestas (v,y) $\forall y \in V(G_3 \setminus G_2)$. Como $V(G_1) \cap V(G_3) = \emptyset$ não precisamos de novas cores. Logo, $\chi'(G) = n-2$.

Se p é par, consideremos a seguinte partição de $V(G_2)$: $V_1 = V(G_1) \cap V(G_2)$, $V_2 = V(G_2) \setminus (V(G_1) \cup V(G_3))$ e $V_3 = V(G_3) \cap V(G_2)$, e sejam C_1, C_2 e C_3 os subgrafos induzidos por V_1, V_2 e V_3 respectivamente.

Suponha que $|V_1| \leq p/2$ e $|V_3| \leq p/2$. Construa em G_2 um emparelhamento perfeito tal que nenhuma aresta possui seus dois extremos no subgrafo C_1 ou no subgrafo C_3 . Veja Figura 3.6.

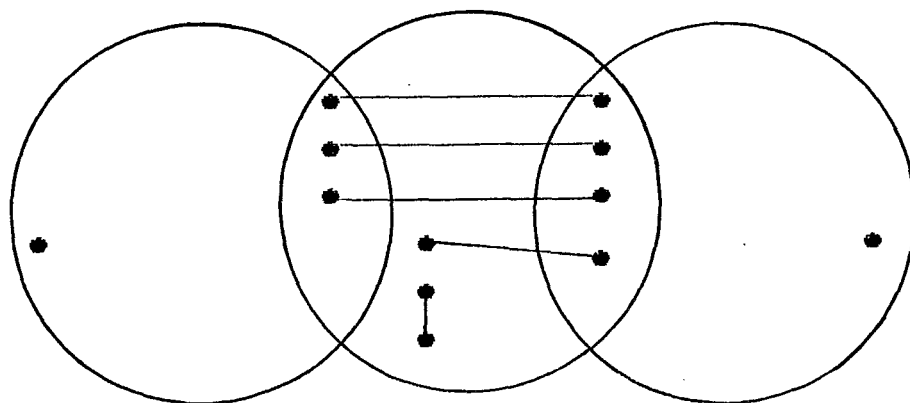


Figura 3.6: Emparelhamento Perfeito em G_2 .

Utilizando o teorema 3.1 podemos atribuir cores diferentes às arestas deste emparelhamento e completar a coloração de G_2 . Como $G_2 = K_{n-2}$ então $\chi'(G_2) = n-3$. Para estender esta coloração de G_2 ao grafo G utilizamos o seguinte procedimento que precisa de mais uma cor, isto é, da cor $p = n-2$. Seja (x,y) uma aresta pertencente ao emparelhamento construído inicialmente. Se $x \in V_1$ e $y \in V_3$ então trocamos a cor de (x,y) pela cor p e às arestas (u,x) e (y,v) atribuímos a cor inicial de (x,y) . Se $x \in V_1$ e $y \in V_2$, colorimos a aresta (u,x) com a cor de (x,y) e a aresta (x,y) com a cor p . Analogamente, se $x \in V_2$ e $y \in V_3$ (veja a Figura 3.7).

Logo, $\chi'(G) = \chi'(G_2) + 1 = n-2$.

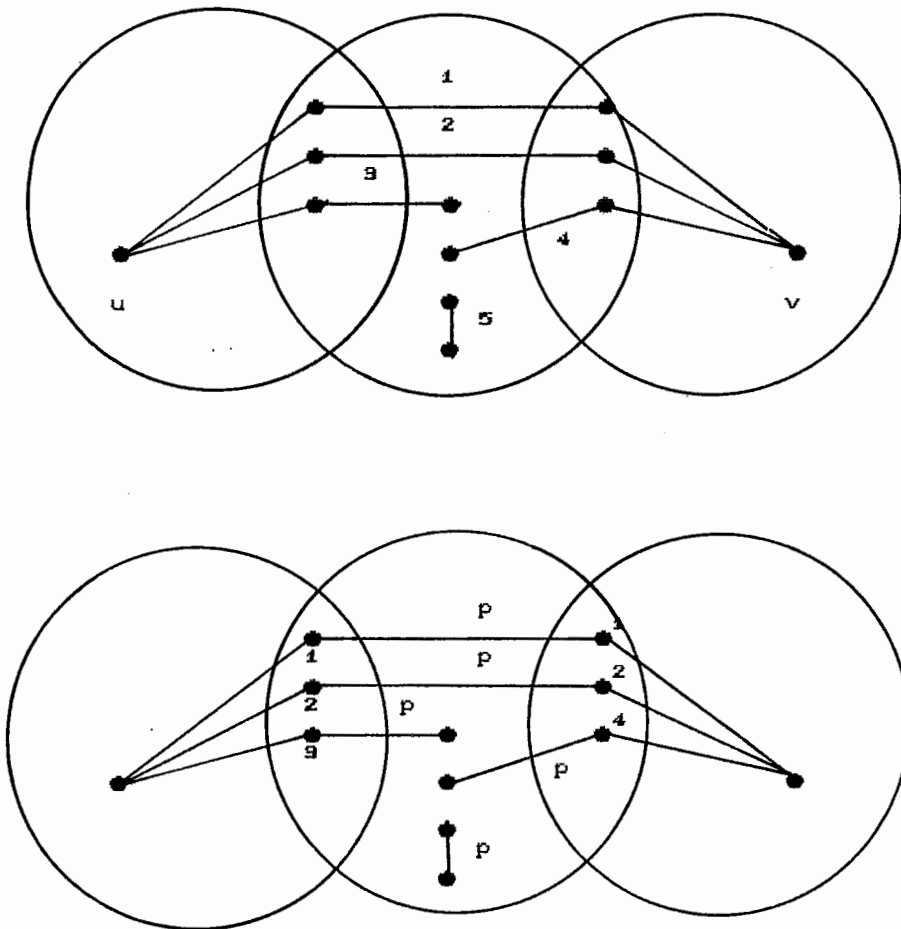


Figura 3.7: Coloração de G split-indiferença.

Para o caso $|V_1| > p/2$ ou $|V_3| > p/2$, suponha, sem perda de generalidade, que $|V_3| > p/2$ e considere o subgrafo G_1UG_2 .

Como G_1UG_2 tem grau máximo $n-2$ então é subgrafo de K_{n-1} . Se $|V_3| > p/2$ então $|V_1| + |V_2| \leq p/2$ e $|E(K_{n-1})| - |E(G_1UG_2)| < p/2$. Pelo corolário 2.5(ii) $\chi'(G_1UG_2) = n-1$. Podemos, então colorir G_1UG_2 colorindo K_{n-1} e retirando as arestas acrescentadas. Para estender esta coloração ao grafo G , as arestas $(y,v) \forall y \in V_3$ são coloridas com as cores não representadas nos vértices y , sem precisar de novas cores. Assim, $\chi'(G) = n-1$.

Se $|V_1| < p/2$ consideramos o subgrafo G_2UG_3 e aplicamos o procedimento análogo.

(c) Se $V(G_1) \cup V(G_2) = V(G)$ então o grau máximo de G é $n-1$. Portanto, $n-1 \leq \chi'(G) \leq n$.

Se n é par como G é subgrafo da clique de ordem n par, então $\chi'(G) = n-1$.

Se n é ímpar, dado que o grau máximo de G é $n-1$ podemos utilizar o teorema 2.6. A condição necessária e suficiente deste teorema para o grafo G ser de Classe 2 é $|E(G)| > \Delta \lfloor 1/2n \rfloor$. Como $|E(G)| = 1/2(n-1)n - \{ |V(G_2 \setminus G_3)| + |V(G_2 \setminus G_1)| + 1 \}$ então a condição do teorema é

$1/2(n-1)n - \{ |V(G_2 \setminus G_3)| + |V(G_2 \setminus G_1)| \} > 1/2(n-1)^2$. Portanto, se $|V(G_2 \setminus G_3)| + |V(G_2 \setminus G_1)| \leq 1/2(n-1) - 2$ então $\chi'(G) = n$. Caso contrário $\chi'(G) = n-1$. ■

3.4 OS GRAFOS INDIFERENÇA CLIQUE-COMPLETOS REDUZIDOS

3.4.1 CARACTERIZAÇÃO DOS GRAFOS INDIFERENÇA CLIQUE-COMPLETOS REDUZIDOS

Seja $G=(V,E)$ um grafo qualquer; M_1, \dots, M_l as cliques maximais de G ; $V(M_i)$ e $E(M_i)$ os conjuntos de vértices e arestas de M_i , para $i=1, \dots, l$ e $X_l = \{1, 2, \dots, l\}$.

Hamelink [10] define uma família de subconjuntos de V , induzida pelas cliques maximais de G , cujos elementos são os conjuntos, V_S , definidos a seguir. Para todo subconjunto, não vazio, S , de X_l

$$V_S = \left\{ v \in V \mid v \in \bigcap_{k \in S} V(M_k) \setminus \bigcup_{k \in X_l \setminus S} V(M_k) \right\}$$

Assim, V_S denota o conjunto de vértices de G que pertencem somente à interseção das cliques cujos índices estão no conjunto S . Para simplificar a notação escrevemos, simplesmente, $S=1,2,3$ e V_{123} para $S=\{1,2,3\}$ e $V_{\{1,2,3\}}$ respectivamente.

Como exemplo, considere o grafo da Figura 3.8 que mostra um grafo G com três cliques maximais e subconjuntos $S \subseteq X_3$ indicados na própria figura. Se S nomeia um vértice do grafo, quer dizer que $V_S \neq \emptyset$ e contém o vértice S . Temos então, os conjuntos V_1, V_{12}, V_{23}, V_3 e V_{123} não vazios e os demais $V_S, S \subseteq X_3$, vazios.

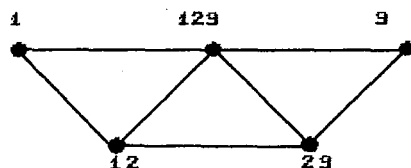


Figura 3.8: Partição clique de um grafo.

Hamelink demonstrou que os conjuntos V_S , $S \subseteq X_1$, não vazios, formam uma partição de V e a denominou *partição clique*. Por este motivo, às vezes, nos referiremos a V_S como a *região* V_S do grafo. Observe que a região V_S induz uma clique em G , para qualquer $S \subseteq X_1$.

Dois vértices v e w são *gêmeos* se $\text{Adj}(v) \cup \{v\} = \text{Adj}(w) \cup \{w\}$. Observe que dois vértices gêmeos são adjacentes. Identificando cada subconjunto de vértices gêmeos de G em um único vértice obtem-se o subgrafo reduzido de G . Mais formalmente, seja R uma relação de equivalência sobre os vértices de G definida por xRy se e somente se x e y são vértices gêmeos em G .

O grafo $G^* = G^*(V^*, E^*)$ denota o grafo que possui como conjunto de vértices as classes de equivalência módulo R . Seja $[x]$ a classe de equivalência determinada pelo elemento x , então $([x], [y]) \in E^*$ se e somente se $(x, y) \in E$.

Chamaremos G^* de grafo quociente de G . Todo subgrafo H de G tal que H é isomorfo a G^* será chamado de *subgrafo reduzido*. Por definição, um grafo reduzido não possui vértices gêmeos.

Observamos que subgrafos de grafos reduzidos não são necessariamente grafos reduzidos. Considere o grafo da Figura 3.9, o subgrafo H gerado por $\langle 1, 2, 3, 4 \rangle$ é um subgrafo não reduzido do grafo indiferença reduzido G .

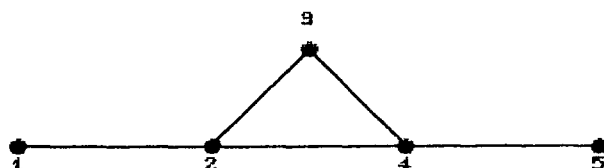


Figura 3.9 Um grafo indiferença

Por construção, tem-se que G^* é um subgrafo induzido de G . Sendo que subgrafos induzidos de grafos indiferença são grafos indiferença, o grafo reduzido de um grafo indiferença é também indiferença.

O teorema 3.8 prova a unicidade da ordem indiferença, no seguinte sentido: um grafo indiferença reduzido G admite exatamente duas ordens indiferença, uma inversa da outra.

TEOREMA 3.8 (Roberts [21]) Seja G um grafo indiferença reduzido. A ordem indiferença é única.

Observe que a unicidade está restrita aos grafos indiferença, pois no grafo $K_{1,3}$ (Figura 3.2), que é um grafo de intervalo reduzido mas não de indiferença, qualquer permutação das suas cliques maximais é uma ordem linear.

de Mello [18] provou as seguintes propriedades em relação aos grafos reduzidos.

TEOREMA 3.9 (de Mello [18]) Dois vértices de um grafo são gêmeos se e somente se pertencem ao mesmo elemento da partição clique do grafo.

COROLÁRIO 3.10 Seja G um grafo. Então H é um subgrafo reduzido de G se e somente se os elementos da partição clique de H são unitários.

O *grafo clique*, $K(G)$, de um grafo G é o grafo interseção das cliques maximais de G . Um grafo G é *clique-completo* se $K(G)$ for um grafo completo.

O teorema 3.11, a seguir, mostra que os grafos clique-completos que são indiferença possuem um vértice universal, isto é, um vértice que é adjacente a todos os outros vértices do grafo.

TEOREMA 3.11 (Hedman [11]) Todo grafo de intervalo que é clique-completo possui um vértice universal.

Portanto, sendo os grafos indiferença uma subclasse dos grafos intervalo, o teorema acima também é válido para eles. C.P. de Mello caracterizou os grafos indiferença clique-completos utilizando a partição clique do grafo.

TEOREMA 3.12 (de Mello [18]) Um grafo G é indiferença clique-completo com l cliques maximais se e somente se os únicos subconjuntos S de X_l com $V_S \neq \emptyset$ são $\langle 1 \rangle, \langle 1, 2 \rangle, \langle 1, 2, 3 \rangle, \dots, \langle 1, 2, \dots, l-1 \rangle, \langle 1, 2, \dots, l \rangle, \langle 2, \dots, l \rangle, \langle 3, \dots, l \rangle, \dots, \langle l-1, l \rangle, \langle l \rangle$.

COROLÁRIO 3.13 Seja G um grafo indiferença clique-completo. Então $V_1 < V_{12} < \dots < V_{12\dots l} < V_{2\dots l} < \dots < V_l$ é uma ordem linear sobre a partição clique de G tal que regiões que contêm vértices de uma mesma clique maximal são consecutivos na ordem. Veja a Figura 3.10.

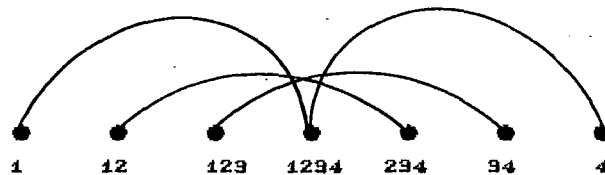


Figura 3.10: Uma ordem indiferença de um grafo indiferença clique-completo.

COROLÁRIO 3.14 (de Mello [18]) Seja G um grafo indiferença clique-completo. Se G contém l cliques maximais então a cardinalidade da partição clique de G é $2^l - 1$.

Observe que se G é um grafo indiferença clique-completo e reduzido, a ordem linear sobre a partição clique de G coincide com a ordem indiferença, pois cada região contém exatamente um vértice de G .

3.4.2 ÍNDICE CROMÁTICO DOS GRAFOS INDIFERENÇA CLIQUE-COMPLETO REDUZIDOS

Para determinar o índice cromático dos grafos indiferença clique-completo e reduzidos, determinamos primeiramente o número de arestas destes grafos, baseados nesta última propriedade.

COROLÁRIO 3.15 Seja G um grafo indiferença clique-completo e reduzido. Se G contém l cliques maximais então o número de arestas de G é $m = 1/2(l-1)(3l-2)$.

Prova: Falaremos do vértice V_S do grafo ao invés da região V_S que contém apenas um vértice e denotaremos $d(V_S)$ ao grau do vértice V_S .

Temos que $d(V_{12\dots k}) = 1-1+k-1 = 1+k-2$ para $k \leq l$, e
 $d(V_{k\dots l}) = 1-1+l-k = 2l-k-1$ para $2 \leq k \leq l$.

$$\text{Então, } m = 1/2 \sum_{k=1}^l d(V_{12\dots k}) + 1/2 \sum_{k=2}^l d(V_{k\dots l})$$

$$m = 1/2 \sum_{k=1}^l (1+k-2) + 1/2 \sum_{k=2}^l (2l-k-1)$$

$$m = 1/2 \{l(l-2) + 1/2l(l+1) + (l-1)^2 + 1/2l(l-1) - (l-1)\}$$

Logo, $m = 1/2(l-1)(3l-2)$ ■

TEOREMA 3.16 Seja G um grafo indiferença clique-completo e reduzido. Se G contém l cliques maximais, então o índice cromático de G é $2(l-1)$.

Prova: G possui um número ímpar, $2l-1$, de vértices e o vértice $V_{12\dots l}$ é universal.

O teorema 2.6 estabelece que G é de Classe 1 se e somente se o número de arestas m é no máximo $2(l-1)^2$. Pelo corolário 3.15 $m = 1/2(l-1)(3l-2) = (l-1)^2 + 1/2l(l-1)$ e como $1/2l \leq l-1$ então G é de Classe 1. ■

Para colorir um grafo G indiferença clique-completo e reduzido, sendo que G é de ordem ímpar, $2l-1$, se G possui l cliques maximais, consideramos o subgrafo induzido $H=G-v$ onde v é um dos vértices extremos de G , isto é, V_1 ou V_l . Então H possui $2(l-1)$ vértices e grau máximo $2(l-1)-1$, portanto, pelo teorema de Vizing, $2(l-1)-1 \leq \chi'(G) \leq 2(l-1)$. Como H é subgrafo da clique de ordem par $K_{2(l-1)}$, podemos construir uma coloração equitativa para H com $2(l-1)$ cores tal que cada cor não está representada em dois vértices de H . Suponha que $v = V_l$ e que a coloração é tal que as cores não representadas nos vértices $\{V_1, V_{12}, \dots, V_{123 \dots l-1}\}$ são as mesmas cores não representadas nos vértices $\{V_{12 \dots l}, V_{2 \dots l}, \dots, V_{l-1, l}\}$, então essa coloração pode ser estendida ao grafo G colorindo as arestas $(V_{12 \dots l}, v), (V_{2 \dots l}, v), \dots, (V_{l-1, l}, v)$ com as cores faltantes. Analogamente, se $v = V_1$.

3.5 OS GRAFOS UNIÃO DE DUAS CLIQUES MAXIMAIS

Seja $G=(V,E)$ o grafo união de duas cliques maximais K_p e K_q . Denotado também $G = K_p \cup K_q$.

Vamos supor que $K_p \cap K_q \neq \emptyset$.

O conjunto de vértices de G resulta ser a união de três conjuntos disjuntos, cada um deles induzindo uma clique:

$$\begin{aligned} V_1 &= V(K_p) \setminus V(K_q) \\ V_2 &= V(K_q) \setminus V(K_p), \text{ e} \\ V_3 &= V(G) \setminus (V_1 \cup V_2) = V(K_p) \cap V(K_q). \end{aligned}$$

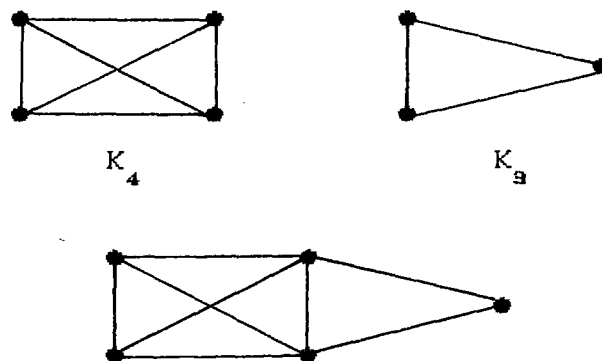


Figura 3.11: Um grafo G união de duas cliques.

Seja n o número de vértices e Δ o grau máximo de G . Se $K_p \cap K_q \neq \emptyset$ então todo vértice da clique induzida por V_2 é universal em G , portanto $\Delta = n-1$.

TEOREMA 3.17 Seja G o grafo união de duas cliques maximais K_p e K_q , com n vértices, m arestas e tal que $K_p \cap K_q \neq \emptyset$. Então o índice cromático de G é

$$\chi'(G) = \begin{cases} n-1 & \text{se } n \text{ é par ou} \\ & n \text{ é ímpar e } m \leq \frac{1}{2}(n-1)^2 \\ n & \text{se } n \text{ é ímpar e } m > \frac{1}{2}(n-1)^2 \end{cases}$$

Prova: Sendo que $\Delta = n-1$, temos que $n-1 \leq \chi'(G) \leq n$.

Se n é par, como G é subgrafo de uma clique K_n , então $\chi'(G) = n-1$.

Se n é ímpar, pelo Teorema 2.6, G é de Classe 2 se e somente se $m > \Delta \lfloor \frac{1}{2}n \rfloor$. Logo, $\chi'(G) = n$ se e somente se $m > \frac{1}{2}(n-1)^2$. ■

Observe que se $k = |V_2|$ então o número de arestas de G é $m = \frac{1}{2}(n-1)n - |V_1||V_3|$, e a condição do teorema acima é, neste caso $\frac{1}{2}(n-1)n - |V_1||V_3| > \frac{1}{2}(n-1)^2$, que é equivalente a $n > 2|V_1||V_3| + 1$.

Assim, se n é ímpar então G é de Classe 2 se e somente se $|V_1||V_3| < (n-1)/2$.

COROLÁRIO 3.18 Seja G o grafo união de duas cliques maximais K_p e K_q , com n vértices. Se $p = q$ e n é ímpar, com a notação anterior, então G é de classe dois se e somente se $|V_1| = |V_3| = (\frac{1}{2}(n-1))^{1/2}$.

Neste capítulo temos provado que o problema do índice cromático pode ser resolvido eficientemente em algumas classes de grafos indiferença: os grafos split-indiferença e indiferença clique-completo reduzido. Também mostramos como determinar o índice cromático dos grafos união de duas cliques maximais. Assim, a Figura 2.8 que mostrava a complexidade do problema em algumas classes de grafos perfeitos fica como mostra a Figura 3.12.

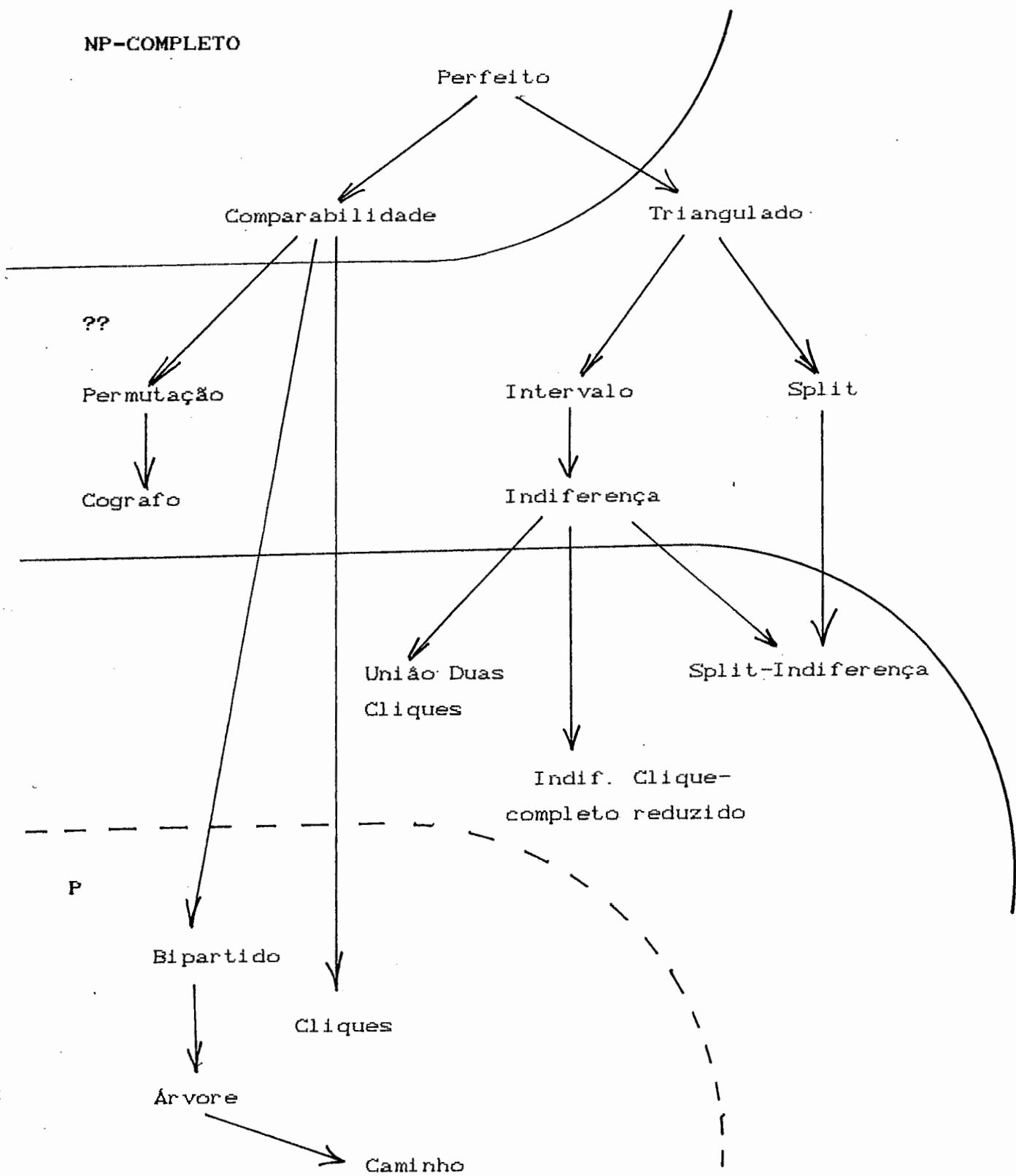


Figura 3.12: Complexidade do Índice Cromático.

CAPÍTULO 4

O PROBLEMA DE COLORAÇÃO DE ARESTAS NO CONTEXTO DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Neste capítulo estamos interessados na abordagem do problema de coloração de arestas através de programação linear e a sua relação com o problema de emparelhamentos.

Uma coloração própria das arestas de um grafo pode ser definida como uma partição do conjunto de arestas em emparelhamentos. Uma coloração é viável se e somente se arestas da mesma cor formam um emparelhamento.

Assim, podemos formular o problema de coloração ótima como um problema de cobertura das arestas do grafo com o menor número de emparelhamentos.

4.1 O PROBLEMA DE EMPARELHAMENTO MÁXIMO

Consideremos um grafo G tal que cada aresta e tem associado um peso c_e . O problema do *emparelhamento de peso máximo* consiste em determinar um emparelhamento $M \in E(G)$ em G tal que a soma dos pesos das suas arestas seja máximo. No caso de todas as arestas ter peso 1 denomina-se *emparelhamento de cardinalidade máxima*.

O teorema a seguir, devido a Berge, é a base dos algoritmos mais eficientes, existentes até hoje, para determinar emparelhamentos de cardinalidade máxima.

Definimos previamente a terminologia necessária.

Dado o grafo G e um emparelhamento M , um caminho em G se diz *alternante* relativo a M se as suas arestas pertencem alternadamente a M e a $E \setminus M$. Um vértice v é dito *exposto* relativo a M se nenhuma aresta em M é incidente em v . Um caminho em G é de *aumento* relativo a M se é alternante e seus dois vértices extremos são expostos.

TEOREMA 4.1 (Berge [3]) Um emparelhamento M é de cardinalidade máxima se e somente se não existir um caminho de aumento relativo a M .

A idéia do algoritmo consiste em, a partir de um emparelhamento dado qualquer, aumentar o tamanho de uma árvore de caminhos alternantes, enraizada em um vértice exposto. Se uma folha da árvore é também exposta, então existe um caminho de aumento.

A complexidade deste algoritmo é $O(mn)$, sendo que m é o número de arestas e n o número de vértices..

Retornando ao problema geral de emparelhamento de peso máximo, a formulação como problema de programação linear binária é a seguinte:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{e \in E} c_e x_e \\ \text{s. a.} \quad & \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V(G) \end{aligned} \quad (4.1)$$

$$x_e = 0, 1 \quad \forall e \in E(G) \quad (4.2)$$

onde $\delta(v)$ é o conjunto de arestas incidentes no vértice v e $x_e = 1$ se a aresta e pertence ao emparelhamento e $x_e = 0$ caso contrário.

O programa linear obtido ao substituir as condições (4.2) pelas condições $x_e \geq 0$ não possui necessariamente solução ótima inteira. Somente no caso de G ser bipartido a solução é sempre binária, pois a matriz gerada pelas restrições (4.1) é a matriz de incidência vértice-aresta, que é totalmente unimodular se e somente se G for bipartido.

Os algoritmos polinomiais para este problema utilizam implicitamente uma descrição da envoltória convexa dos emparelhamentos do grafo, através de desigualdades lineares.

Edmonds [5] provou a seguinte caracterização da envoltória convexa

TEOREMA 4.2 Seja o grafo $G=(V,E)$. Para $U \subseteq V$, seja $E(U)$ o conjunto de arestas com ambos extremos em U . O politopo definido pelas restrições seguintes é o casco convexo dos emparelhamentos de G

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V \quad (4.3)$$

$$\sum_{e \in E(U)} x_e \leq \lfloor |U|/2 \rfloor \quad \forall U \subseteq V \text{ tal que } |U| \geq 3 \text{ e ímpar} \quad (4.4)$$

$$x_e \geq 0 \quad \forall e \in E \quad (4.5)$$

As restrições (4.4) são válidas pois em um emparelhamento cada aresta é incidente, no máximo, em dois vértices.

Esta caracterização e o fato do problema de programação linear estar na Classe P , não leva diretamente a um algoritmo polinomial pois a caracterização contém um número exponencial (no tamanho do grafo) de restrições.

O algoritmo polinomial para o problema de emparelhamento de peso máximo, desenvolvido por Edmonds [5], utiliza dualidade para certificar a otimalidade da solução. Ele resolve o problema:

$$\begin{aligned} \text{Max} \quad & \sum_{e \in E} c_e x_e \\ \text{s. a.} \quad & \sum_{e \in \delta(v)} x_e \leq 1 \quad \forall v \in V \\ & \sum_{e \in E(U)} x_e \leq \lfloor |U|/2 \rfloor \quad \forall U \subseteq V \text{ tal que } |U| \geq 3 \text{ e ímpar} \\ & x_e \geq 0 \quad \forall e \in E \end{aligned}$$

O dual associado a este problema é:

$$\text{Min } \omega = \sum_{v \in V} \pi_v + \sum_U \lfloor |U|/2 \rfloor y_U$$

s. a.

$$\sum_{v: e \in \delta(v)} \pi_v + \sum_{U: e \in E(U)} y_U \geq c_e \quad \forall e \in E$$

$$\pi_v \geq 0$$

$$\forall v \in V$$

$$y_U \geq 0$$

$$\forall U \subseteq V \text{ tal que}$$

$$|U| \geq 3 \text{ e ímpar}$$

O algoritmo mantém viabilidade primal e dual, e obtém a otimalidade quando as condições de folga complementar são satisfeitas. Em cada iteração maior a cardinalidade do emparelhamento é acrescentada. Isto é feito resolvendo um problema de emparelhamento de cardinalidade máxima. A complexidade do algoritmo é $O(n^4)$, mas a estrutura de dados necessária na implementação é muito complexa. As implementações de Gabow [9] e Lawler [15] tem complexidade $O(n^3)$.

4.2 O PROBLEMA DO ÍNDICE CROMÁTICO

No contexto anterior, o problema de coloração de arestas consiste em determinar um cobrimento de cardinalidade mínima das arestas do grafo com emparelhamentos maximais, que pode ser formulado como o programa seguinte:

$$\begin{aligned} \text{(IP)} \quad & \text{Mín } 1x \\ & \text{s. a.} \\ & Ax \geq 1 \\ & x \text{ binário} \end{aligned}$$

onde A é a matriz de incidência aresta-emparelhamento, isto é, $a_{ij}=1$ se a aresta i pertence ao emparelhamento j e $a_{ij}=0$ em caso contrário, e $X_j=1$ se e somente se o emparelhamento j pertence ao cobrimento.

Se consideramos a relaxação linear do programa acima, obtemos o seguinte problema, denominado problema da coloração fracionária de arestas:

$$\begin{aligned}
\text{(LP)} \quad & \text{Min } 1x \\
& \text{s. a.} \\
& Ax \geq 1 \\
& x \geq 0
\end{aligned}$$

O valor ótimo deste problema, denotada $\chi^*(G)$, é chamado de índice cromático fracionário. O dual de (LP) é:

$$\begin{aligned}
\text{(DP)} \quad & \text{Max } 1y \\
& \text{s. a.} \\
& yA \leq 1 \\
& y \geq 0
\end{aligned}$$

que consiste em determinar um peso não negativo y_e para cada aresta e de tal forma que a soma dos pesos das arestas em cada emparelhamento seja no máximo 1 e que a soma dos pesos de todas as arestas seja máximo.

Claramente, $\chi^*(G) \leq \chi(G)$ e pelo Teorema de Vizing $\chi^*(G) \leq \Delta(G) + 1$.

TEOREMA 4.3 Seja $v(\text{DP})$ o valor ótimo do problema (DP). Se $v(\text{DP}) > \Delta(G)$ então $\chi'(G) = \Delta + 1$.

Prova: Observamos que $\Delta(G) \leq v(\text{DP})$ pois uma solução viável para (DP) é $y_e = 1$ para toda aresta $e \in \delta(v^*)$, onde v^* é algum vértice de grau máximo. Por dualidade, $v(\text{DP}) = \chi^*(G) \leq \chi'(G)$. Portanto, se $v(\text{DP}) > \Delta(G)$ então $\chi'(G) > \Delta(G)$ e pelo Teorema de Vizing $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$. ■

Assim, se $v(\text{DP}) > \Delta(G)$ então $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$ e se $v(\text{DP}) = \Delta(G)$ e (LP) admite solução ótima inteira então $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Embora o número de colunas do problema (LP) possa aumentar exponencialmente com o tamanho de G , ele pode ser resolvido eficientemente.

Em efeito, o problema dual (DP) possui uma restrição por cada emparelhamento maximal e a viabilidade de um vetor de pesos não

negativos y pode ser verificada encontrando-se um emparelhamento de peso máximo em G. Isto é, se o peso máximo é menor ou igual a 1 então y é viável, caso contrário o emparelhamento correspondente define uma restrição dual que não é satisfeita por y.

Como o problema de emparelhamento de peso máximo pode ser resolvido em tempo polinomial, do resultado de Grötschel, Lővász e Schrijver segue-se que (DP) e (LP) podem ser resolvidos em tempo polinomial pelo algoritmo do elipsoide.

Desta forma, se $\chi^*(G) > \Delta(G)$ ou se $\chi^*(G) = \Delta(G)$ e existe uma solução ótima inteira para o problema (LP) então é possível encontrar uma coloração ótima das arestas de G em tempo polinomial. O caso ainda não resolvido é quando $\chi^*(G) = \Delta(G)$ mas as soluções ótimas de (LP) são fracionárias.

Uma abordagem para este caso consiste em adicionar ao problema relaxado desigualdades válidas que são satisfeitas por todas as soluções inteiras de (LP) mas não por todas as soluções. Seja P(G) o poliedro gerado pela envoltória convexa do conjunto de soluções viáveis do problema (IP) e seja E(U) com $U \subseteq V$ o subconjunto de arestas com os dois extremos em U. Um emparelhamento pode cobrir no máximo $\lfloor 1/2 |U| \rfloor$ arestas de E(U). Stahl obtém em [23] o seguinte conjunto de desigualdades válidas para P(G):

$$\sum_{j \in M_j \cap E' \neq \emptyset} x_j \geq \lceil |E'| / \lfloor 1/2 |U| \rfloor \rceil \quad \forall U \subseteq V \text{ e} \quad (4.6) \\ \forall E' \subseteq E(U)$$

onde x_j é a variável correspondente ao emparelhamento maximal M_j . O modelo que resulta de acrescentar a (LP) as restrições (4.6) contém um número exponencial de colunas e de restrições.

Um caso interessante é quando U é ímpar e suas arestas formam um ciclo.

Se $|U|$ é ímpar e o subgrafo $C=(U, E')$ é um circuito então o lado direito de (4.6) é $\lceil (2k+1)/k \rceil = 3$ e obtém-se o conjunto de restrições de circuitos ímpares dado por

$$\sum_{j \in M_j \cap C \neq \emptyset} x_j \geq 3 \quad \forall \text{ circuito ímpar } C \quad (4.7)$$

Estas restrições, em geral, não são implicadas pelas restrições de (LP), a menos que $|C|=3$. Nemhauser e Park mostram em [19] que para um grafo 3-regular é suficiente adicionar ao problema (LP) as restrições de circuitos ímpares para resolver o problema de coloração de arestas, o que não quer dizer que elas definam $P(G)$.

Seja $v(\text{ALP})$ o valor ótimo do problema linear obtido adicionando a (LP) as restrições (4.7).

TEOREMA 4.4 (Nemhauser e Park [19]) Se G é 3-regular e $\chi'(G)=4$ então $v(\text{ALP}) > 3$.

Os autores também provaram o seguinte resultado.

TEOREMA 4.5 Se $G=(V,E)$ é um grafo completo tal que $|V| \geq 6$ então as restrições de circuitos ímpares de tamanho ≥ 5 definem facetas para $P(G)$.

Ainda não existe uma caracterização dos grafos para os quais estas restrições definem facetas.

CAPÍTULO 5

UM MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR PARA O PROBLEMA DE COLORAÇÃO DE ARESTAS

Neste capítulo estamos interessados no estudo do problema de coloração das arestas de um grafo através de um modelo linear que utiliza a matriz de incidência vértice-aresta ao invés da matriz aresta-emparelhamento. A vantagem é que o número de colunas (e linhas) da primeira é linear no tamanho do grafo sendo que na última o número de colunas é exponencial.

5.1 O MODELO LINEAR

Seja $x_{ek}=1$ se a aresta e recebe a cor k e $x_{ek}=0$ no caso contrário, e seja $K=\{1,2,\dots,\Delta,\Delta+1\}$ o conjunto de cores suficientes para colorir um grafo de grau máximo Δ . A formulação linear é a seguinte:

$$(P) \quad \text{Min} \quad \sum_{e \in E} x_{e, \Delta+1}$$
$$\text{s. a.} \quad \sum_{k \in K} x_{ek} = 1 \quad \forall e \in E \quad (4.8)$$

$$\sum_{e \in \delta(v)} x_{ek} \leq 1 \quad \forall v \in V, k \in K \quad (4.9)$$

$$x_{ek} = 0,1 \quad \forall e \in E, k \in K \quad (4.10)$$

as restrições (4.8) impõem que cada aresta $e \in E$ deve ser colorida com uma única cor e as restrições (4.9) que as arestas incidentes no vértice $v \in V$ devem ter cores distintas.

Sob forma matricial o modelo é:

$$\begin{array}{ll}
 \text{Min } 1 X^{\Delta+1} & \\
 \text{s. a.} & \\
 I X^1 + I X^2 + \dots + I X^{\Delta} + I X^{\Delta+1} = 1 & \\
 N X^1 \leq 1 & \\
 N X^2 \leq 1 & \\
 \dots & \\
 N X^{\Delta} \leq 1 & \\
 N X^{\Delta+1} \leq 1 & \\
 X^k \text{ binário} &
 \end{array}$$

onde I é a matriz identidade de ordem $|E|=m$, N a matriz de incidência vértice-aresta e $X^k = (x_{1k}, x_{2k}, \dots, x_{mk})^T$.

Observamos que N é totalmente unimodular se e somente se o grafo G é bipartido.

Substituindo as condições de binariedade (4.10) por $x_{ek} \geq 0$ obtemos o problema relaxado (PR) associado a (P). Sejam $v(P)$ e $v(PR)$ os valores ótimos dos problemas (P) e (PR) respectivamente e χ^* a solução ótima de (P). Claramente, $v(P) \geq 0$, $v(PR) \geq 0$ e $v(PR) \leq v(P)$.

TEOREMA 5.1 Se $v(PR)=0$ e χ^* é binário então $\chi'(G)=\Delta$ e se $v(PR)>0$ então $\chi'(G)=\Delta+1$.

Prova: direta de $v(PR) \leq v(P)$. ■

Se $v(PR)=0$ e χ^* é fracionário não é possível concluir o valor de $\chi'(G)$.

5.2 RESOLUÇÃO DO MODELO LINEAR RELAXADO EM ALGUMAS CLASSES DE GRAFOS

A idéia é estudar experimentalmente o comportamento desta formulação, como uma forma de explorar uma justificativa para aprofundar nela, no futuro. A estratégia consiste em resolver o modelo relaxado (PR) e quando a solução obtida não for inteira resolver uma sequência de problemas. Cada novo problema é obtido acrescentando-se algumas das restrições (4.4) do politopo de emparelhamentos ao problema anterior na sequência. Inicialmente, se $|V|$ é ímpar acrescentamos as restrições correspondentes a $U=V$. Se a solução é novamente fracionária ou $|V|$ é par, os conjuntos U considerados são tais que contém arestas cujas variáveis são fracionárias na solução do problema anterior.

Por outro lado, com o objetivo de induzir uma solução inteira estudamos também o impacto de fixar inicialmente algumas variáveis. Para isso, escolhemos um dos vértices de grau máximo e as arestas incidentes nele são coloridas com cores distintas. Seja $v \in V$ um dos vértices de grau máximo Δ em G então para cada $e \in \delta(v)$ fazemos $x_{ek} = 1$ para algum $k \in K$ e $x_{el} = 0 \quad \forall l \neq k$, escolhendo k de modo que $\sum_{k \in K} x_{ek} = 1 \quad \forall e \in \delta(v)$.

A análise computacional foi feita em 48 grafos, contendo desde 6 até 50 vértices. Destes grafos 10 são bipartidos; 10 são triangulados, no sentido de Delaunay, sendo 6 deles perfeitos; 10 são de comparabilidade; 5 são grafos split e 5 são split-indiferença. Além disso, foram consideradas as cliques K_5, K_6, \dots e K_{12} . Todos eles são apresentados no apêndice. Chamamos B_i, T_i e $C_i \quad i=1, \dots, 10$ os grafos bipartidos, triangulados e de comparabilidade, respectivamente. Os grafos split são chamados S_i e os split-indiferença $SI_i \quad i=1, \dots, 5$.

Os problemas foram resolvidos utilizando o programa MPSX em um computador IBM 9221-130. Os tempos são todos inferiores a dois minutos de CPU.

Em primeiro lugar é analisado o comportamento do modelo relaxado (PR) e em seguida comparado com os resultados ao fixar as cores de um vértice de grau máximo. Chamamos (P_1) o modelo resultante da fixação de variáveis em (PR). Nas tabelas N°1 até N°5 a seguir n é o número de vértices, m o número de arestas, Δ o grau máximo do grafo e z é o valor ótimo. Na coluna x é indicado se a solução é binária ou não (B = binária, NB = não binária) e # A.F. é o número de arestas com cores fracionárias na solução ótima.

	n	m	Δ	(PR)		z	(P_1)		
				x	# A.F.		z	x	# A.F.
B_1	6	8	4	0	B	0	0	B	0
B_2	9	8	2	0	B	0	0	B	0
B_3	9	10	3	0	B	0	0	B	0
B_4	7	10	5	0	B	0	0	B	0
B_5	7	12	4	0	B	0	0	B	0
B_6	8	15	5	0	B	0	0	B	0
B_7	9	20	5	0	B	0	0	B	0
B_8	25	32	6	0	B	0	0	B	0
B_9	30	40	7	0	B	0	0	B	0
B_{10}	45	45	5	0	B	0	0	B	0

Tabela N°1: Grafos Bipartidos

	n	m	Δ	(PR)			z	(P_1)		
				z	x	# A.F.		z	x	# A.F.
T ₁	5	5	3	0	B	0	0	B	0	
T ₂	7	11	4	0	NB	3	0	B	0	
T ₃	7	9	4	0	B	0	0	B	0	
T ₄	10	19	6	0	B	0	0	B	0	
T ₅	8	15	5	0	B	0	0	NB	3	
T ₆	8	15	5	0	NB	3	0	B	0	
T ₇	9	12	6	0	B	0	0	B	0	
T ₈	15	17	4	0	B	0	0	B	0	
T ₉	25	53	8	0	NB	15	0	NB	4	
T ₁₀	15	30	6	0	NB	18	0	B	0	

Tabela N°2: Grafos Triangulados

	n	m	Δ	(PR)			z	(P_1)		
				z	x	# A.F.		z	x	# A.F.
C ₁	10	14	7	0	B	0	0	B	0	
C ₂	7	12	5	0	B	0	0	NB	5	
C ₃	15	36	13	0	NB	9	0	B	0	
C ₄	14	27	9	0	NB	9	0	B	0	
C ₅	50	124	31	0	NB	39	0	NB	7	
C ₆	20	43	13	0	B	0	0	B	0	
C ₇	40	75	6	0	B	0	0	NB	3	
C ₈	28	48	5	0	B	0	0	NB	18	
C ₉	24	41	4	0	B	0	0	B	0	
C ₁₀	30	52	12	0	B	0	0	B	0	

Tabela N°3: Grafos de Comparabilidade

	n	m	Δ	(PR)			z	(P_1)		
				z	x	# A.F.		z	x	# A.F.
S_1	8	16	6	0	B	0	0	B	0	
S_2	8	14	5	0	B	0	0	B	0	
S_3	12	28	9	0	NB	12	0	B	0	
S_4	20	57	12	0	NB	44	0	NB	8	
S_5	28	102	16	0	NB	91	0	NB	70	
SI_1	7	20	6	0	NB	19	0	NB	12	
SI_2	8	27	7	0	NB	24	0	NB	15	
SI_3	10	34	8	0	NB	31	0	NB	24	
SI_4	12	51	10	0	NB	48	0	NB	36	
SI_5	10	40	9	0	NB	39	0	NB	23	

Tabela N°4: Grafos Split e Split-indiferença

	n	m	Δ	(PR)			z	(P_1)		
				z	x	# A.F.		z	x	# A.F.
K_5	5	10	4	0	NB	6	0	NB	6	
K_6	6	15	5	0	NB	8	0	B	0	
K_7	7	21	6	0	NB	19	0	NB	15	
K_8	8	28	7	0	NB	26	0	B	0	
K_9	9	36	8	0	NB	36	0	NB	25	
K_{10}	10	45	9	0	NB	42	0	NB	29	
K_{11}	11	55	10	0	NB	55	0	NB	44	
K_{12}	12	66	11	0	NB	63	0	NB	54	

Tabela N°5: Cliques

Para os grafos bipartidos a solução é sempre binária. Considerando o modelo relaxado (PR), dos grafos triangulados 6 têm solução binária e 4 fracionária; dos de comparabilidade 7 têm

solução binária e 3 não; dos grafos split 2 têm solução binária e 3 deles fracionária; em todos os split-indiferença a solução é fracionária e também nas cliques.

No modelo (P_1) alguns dos problemas com solução fracionária para (PR) conseguem uma solução inteira: $T_2, T_6, T_{10}, C_9, C_4, S_3, K_6$ e K_8 . Mas, alguns dos problemas com solução binária para (PR) ficam agora fracionários: T_5, C_2, C_7 e C_8 . Portanto, para as classes aqui consideradas pode-se conjecturar que é conveniente começar com o modelo sem fixar variáveis e só no caso da solução resultar fracionária tentar induzir uma solução inteira com este procedimento.

Em seguida consideram-se aqueles problemas para os quais nem (PR) nem (P_1) apresentam solução inteira e acrescentam-se a (P_1) as restrições (4.4).

Isto é feito iterativamente, gerando-se uma sequência de problemas P_2, P_3, P_4, \dots etc, a partir de P_1 segundo a estratégia a seguir.

Para obter P_{i+1} de P_i $i=1,2,3,\dots$ utiliza-se o procedimento seguinte:

-Sejam U_j $j=1,\dots,J$ os conjuntos de vértices da restrição (4.4) incluídos no problema P_i e seja W o conjunto de vértices com pelo menos uma aresta incidente fracionária na solução ótima dele.

-Se $|W|$ é ímpar e $W \neq U_j \quad \forall j=1,\dots,J$ então $U_{j+1} = W$ e P_{i+1} é obtido acrescentando a P_i as restrições geradas por U_{j+1} .

-Caso contrário, se W resultar com um número insuficiente ou inadequado de vértices, isto é, $|U_1| < 3$ ou $|U_1|$ par, pode-se:

(i) adicionar a W um dos vértices adjacentes a ele para obter a cardinalidade adequada, ou eliminar algum dos vértices.

(ii) particionar W em varios conjuntos U_l de forma tal que para cada U_l : $|U_l|$ seja ímpar e $U_l \neq U_j \forall j=1, \dots, J$.

Acrescentar o conjunto U_l ao problema P_i para obter P_{i+1} . Se tiver mais de um conjunto U_l eles são acrescentados um por um, até esgotá-los, isto é, cada vez que adiciona-se um novo conjunto gera-se um novo problema P_i .

Se o número de arestas binárias (com uma única cor na solução ótima) de P_{i+1} decrescer muito comparado com P_i então escolher outro U_l para gerar P_{i+1} . Caso contrário acrescentar o seguinte conjunto U_l .

Problema	P_1			P_2		
	z	x	# A.F.	z	x	# A.F.
T_0	0	NB	4	0	B	0
C_5	0	NB	7	0	B	0
S_4	0	NB	8	0	NB	13
S_5	0	NB	70	0	NB	75
SI_1	0	NB	12	2	B	0
SI_2	0	NB	15	0	B	0
SI_3	0	NB	24	0	NB	9
SI_4	0	NB	36	0	NB	38
SI_5	0	NB	23	0	NB	36
K_5	0	NB	6	2	B	0
K_7	0	NB	15	3	B	0
K_9	0	NB	25	4	NB	28
K_{10}	0	NB	29	0	NB	36
K_{11}	0	NB	44	5	NB	44
K_{12}	0	NB	54	0	NB	55

Tabela N°6: Restrições adicionais

Na tabela N°6 apresentam-se os resultados obtidos ao acrescentar a (P_1) o conjunto U_1 gerado pelos vértices com arestas incidentes fracionárias, isto é, arestas que tem mais do que uma cor associada, no problema (P_1) . Os resultados são comparados com (P_1) .

Assim, dos 48 grafos 25 têm solução inteira no modelo (PR) e dos 23 restantes 8 conseguem solução binária no modelo (P_1) . Dos 15 grafos para os quais (P_1) tem solução fracionária, para 6 deles o modelo (P_2) apresenta solução binária: os grafos T_9 , C_5 , SI_1 , SI_2 , K_5 e K_7 .

Nos outros problemas foi utilizado o procedimento descrito anteriormente, gerando até um máximo de 10 problemas (P_i) . Desta forma, só foi possível encontrar solução binária para K_9 . Para este último, foi necessário resolver 6 problemas P_i . Descrevemos a seguir cada um destes problemas.

Dado que na solução de (PR) todos os vértices têm arestas fracionárias, a exceção do vértice que foi escolhido para fixar variáveis, resulta o conjunto $W = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, mas $|W| = 8$ que é par. Adicionando a W o vértice 1 obtemos $U_1 = V$ e acrescentando a (P_1) as restrições geradas por U_1 obtem-se (P_2) .

Na solução de (P_2) resultam só 10 arestas binárias, das quais 8 foram fixadas ao gerar (PR). Assim, temos que o conjunto W é o mesmo de (P_1) . Portanto, eliminamos um dos vértices dele para obter $U_2 = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e (P_3) .

A solução de (P_3) tem 12 arestas binárias e W é o mesmo de P_1 e P_2 . Particionamos W em $\{2, 3, 4\}$, $\{5, 6, 7\}$ e $\{8, 9\}$. Como este último tem só dois elementos acrescentamos a ele o vértice 1.

O problema (P_4) é obtido acrescentando a (P_3) o conjunto $U_3 = \{2, 3, 4\}$. A solução contém 21 arestas binárias. A seguir, adicionamos a (P_4) o conjunto $U_4 = \{5, 6, 7\}$ obtendo (P_5) . A solução tem só 12 arestas binárias, portanto elimina-se este conjunto do

problema P_5 e substitui-se por $U_4 = \{1, 8, 9\}$. A nova solução de (P_4) têm 31 arestas binárias.

Da solução de (P_5) obtém-se $W = \{2, 3, 5, 6, 7, 9\}$ como $|W| = 6$, eliminando-se o vértice 9 obtém-se $U_5 = \{2, 3, 5, 6, 7\}$ que é acrescentado a (P_5) para obter (P_6) . A solução deste último é binária.

Para o grafo SI_9 a melhor solução encontrada com esta estratégia tem 3 arestas fracionárias. Para os outros grafos o número de arestas fracionárias é grande (mais do que 50%).

Os grafos para os quais não foram encontradas soluções binárias correspondem aos grafos mais densos, cliques e grafos que contém uma clique. Desta forma, a estratégia proposta nos indica um caminho para continuar testando em grafos pouco densos.

CAPITULO 6

CONCLUSÕES E PESQUISAS FUTURAS

Neste trabalho foi estudado o problema do índice cromático de dois pontos de vista. Partindo da teoria de grafos, utilizando as propriedades estruturais de algumas classes de grafos, e estudando o problema geral do ponto de vista da programação matemática.

Mostramos que ainda em uma classe restrita de grafos, os grafos indiferença, nem todas as instâncias pertencem à mesma classe cromática. Ainda mais, provamos que a pertinência de um grafo split-indiferença à Classe 1 ou à Classe 2 depende da sua estrutura o mesmo acontecendo com os grafos união de duas cliques maximais. Também provamos que os grafos indiferença clique-completo reduzidos são de Classe 1.

Em relação a colorações com propriedades especiais, mostramos que um grafo completo de ordem par possui uma coloração perfeita e que nesta coloração existe um ciclo hamiltoniano tal que todas as arestas dele, menos uma, recebem cores distintas.

Uma linha de pesquisa futura, que surge naturalmente, é estender o cálculo do índice cromático nas classes que contenham as aqui consideradas. Os grafos split e os grafos de intervalo são duas classes de grafos perfeitos que apresentam propriedades estruturais que poderiam resultar interessantes na coloração de arestas.

O modelo de programação linear e a abordagem proposta para sua solução foram estudados experimentalmente. Dos grafos utilizados na experiência computacional foram bem sucedidos os que são pouco densos. Assim, é interessante estudar em pesquisas futuras desigualdades válidas para o modelo proposto que sejam facetadas da envoltória convexa de soluções inteiras e também desenvolver estratégias análogas para os grafos densos.

B I B L I O G R A F I A

- [1] Beineke, L.W. and Wilson, R.J., On the edge-chromatic number of a graph, *Discrete Mathematics* 5 (1973) 15-20.
- [2] Behzad, M., Chartrand, G. and Cooper, J.K., The colour numbers of complete graphs, *J. London Math. Soc.* 42 (1967) 226-228.
- [3] Berge, C., Graph theory, *Amer. Math. Monthly* 71 (1964) 471-481.
- [4] Cai, L. and Ellis, J., NP-completeness of edge-colouring some restricted graphs, *Disc. Appl. Math.* 30 (1991) 15-17.
- [5] Edmonds, J., Maximum matching and a polyhedron with 0-1 vertices, *J. Res. Bur. Standards Sect. B* 69 (1965) 125-130.
- [6] Erdos, P. and Wilson, R.J., On the chromatic index of almost all graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* 23 (1977) 255-257.
- [7] Figueiredo, C.M.H., Mello, C.P., Ortiz, C. and Villanueva, M., Split-Indifference Graphs, *Investigación Operativa* 3(1) (1993) 61-67.
- [8] Fiorini, S. and Wilson, R.J., Edge-colourings of graphs, Pitman (1977).
- [9] Gabow, H.P., Efficient algorithms for finding minimum spanning trees in undirected and directed graphs, *Combinatorica* 6 (1986) 109-122.
- [10] Hamelink, R.C., A partial characterization of clique graphs, *J. Combin. Theory* 5 (1968) 192-197.
- [11] Hedman, B., Clique graphs of time graphs, *J. Combin. Theory Ser. B* 37 (1984) 270-278.

- [12] Hilton, A. J. W. and Johnson, P. D., Graphs which are vertex-critical with respect to the edge-chromatic number, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 102 (1987) 211-221.
- [13] Holyer, I., The NP-completeness of edge-colouring, *SIAM J. Comput.* 10 (1981) 718-720.
- [14] Kirkman, T. P., On a problem in combinations, *Cambridge and Dublin Math. J.* 2 (1847) 191-204.
- [15] Lawler, E. L., Combinatorial optimization: networks and matroids, *Holt, Rinehart and Winston, NY* (1976).
- [16] Leven, D. and Galil, A. Z., NP-completeness of finding the chromatic index of regular graphs, *J. of Algorithms* 4 (1983) 35-44.
- [17] Lovász, L and Plummer, M. D., Matching Theory, *Annals of Disc. Math.* 29 (1986).
- [18] de Mello, C. P., Sobre grafos clique-completos, *Tese de Doutorado COPPE/Universidade Federal de Rio de Janeiro* (1992).
- [19] Nemhauser, G. L. and Park, S., A polyhedral approach to edge coloring, *Oper. Res. Letters* 10 (1991) 315-322.
- [20] Nemhauser, G. L. and Wolsey, L. A., Integer and Combinatorial Optimization, Wiley (1988).
- [21] Roberts, F., Indifference graphs, in *Proof Techniques in Graph Theory*, F. Harary (ed), Acad. Press, N.Y. (1969) 139-146.
- [22] Shannon, C. E., A theorem on colouring the lines of a network, *J. Math. Phys.* 28 (1949) 148-151.

- [23] Stahl, R., Fractional edge coloring, *Cahiers Centre Etudes Rech. Oper.* 21 (1979) 127-131.
- [24] Szwarcfiter, J.L., A note on split-indifference graphs, *Private Communication*.
- [25] Vizing, V.G., On an estimate of the chromatic class of a p -graph, *Diskret. Analiz.* 3 (1964) 25-30.
- [26] Vizing, V.G., The chromatic class of a multigraph, *Cybernetics* 3 (1965) 32-41.
- [27] de Werra, D., Some colouring techniques, *Annals of Disc. Math.* 1 (1977) 179-184.
- [28] Woolbright, D.E., On the size of partial 1-factors of 1-factorizations of the complete k -uniform hypergraph on kn vertices, *ARS Combinatorica* 6 (1978) 185-192.

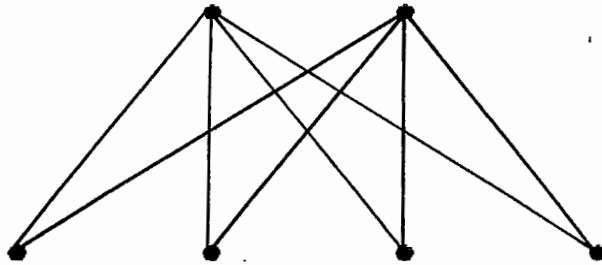
A P E N D I C E

Apresentamos neste apêndice os grafos utilizados no capítulo 5.

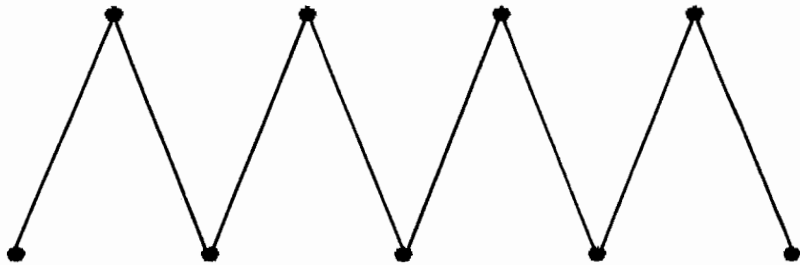
Grafos Bipartidos

Seja $B_{i,j}$ o grafo bipartido completo tal que $|V_1|=i$ e $|V_2|=j$

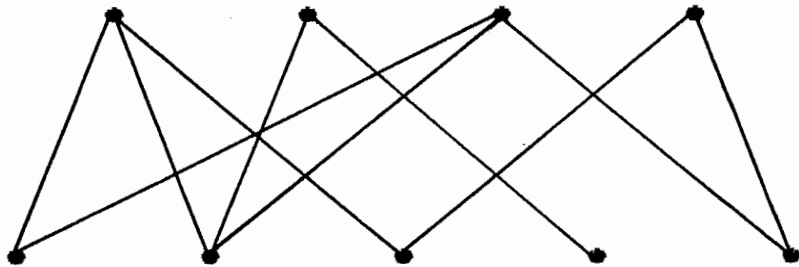
$B_1 = B_{2,4}$



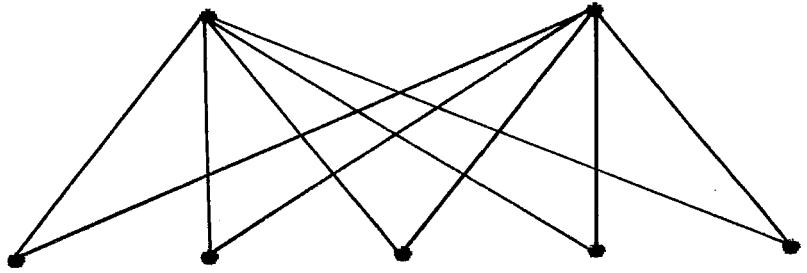
B_2



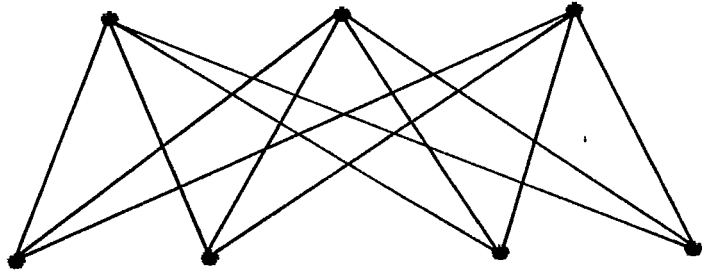
B_3



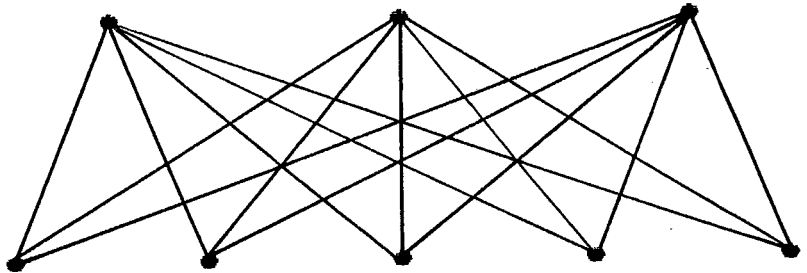
$$B_4 = B_{2,5}$$



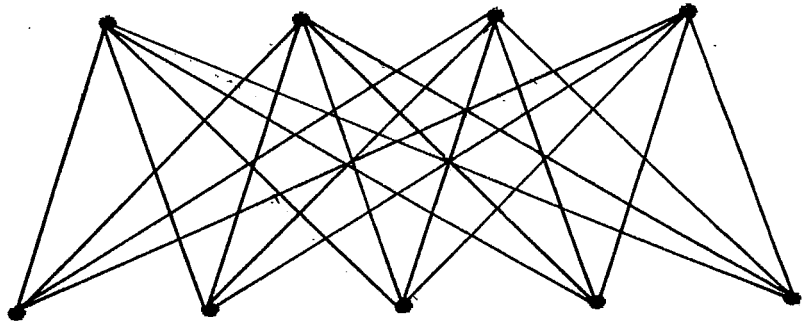
$$B_5 = B_{3,4}$$



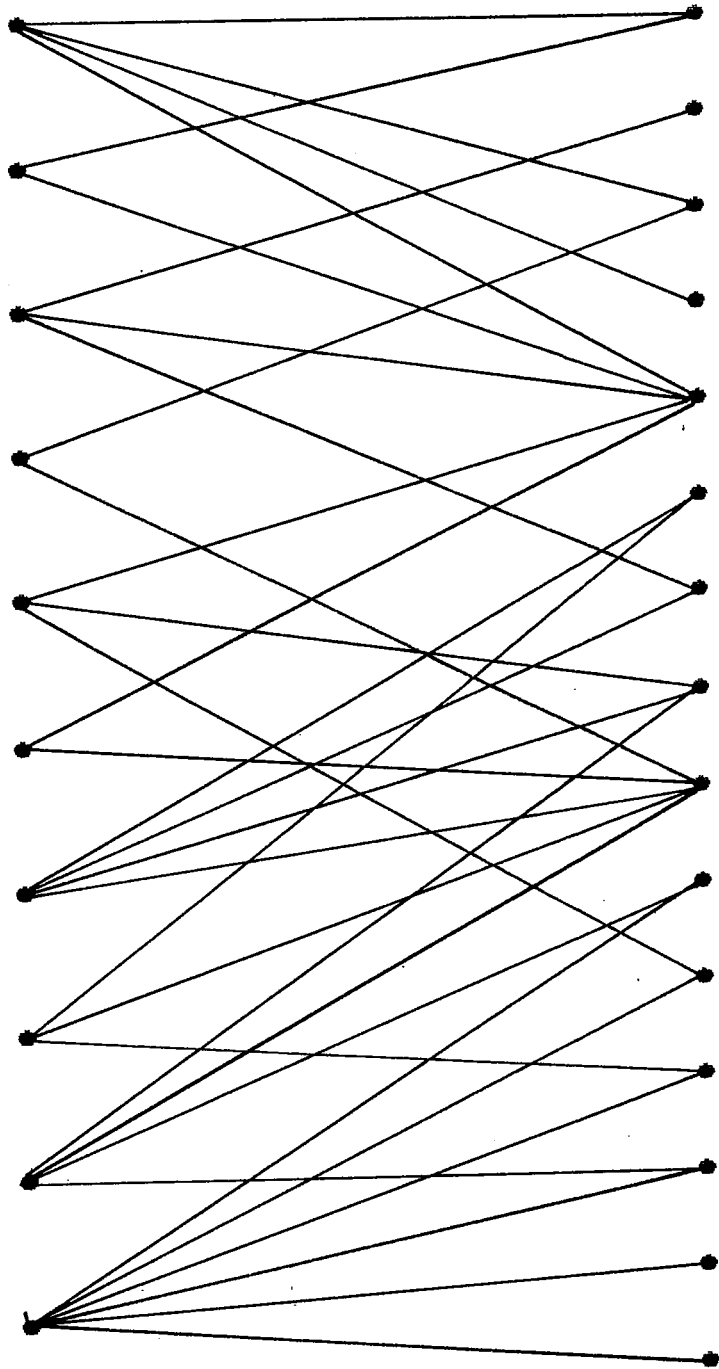
$$B_6 = B_{3,5}$$



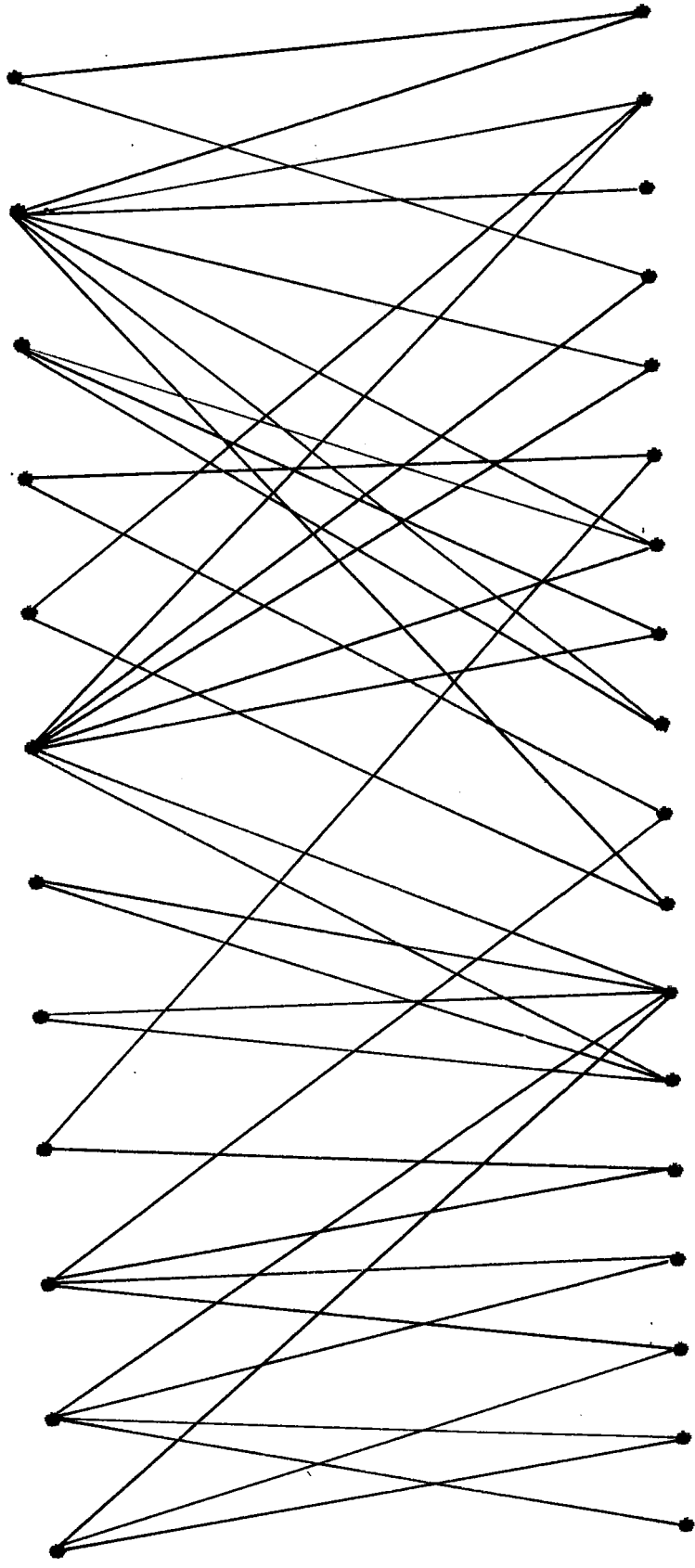
$$B_7 = B_{4,5}$$



B₈

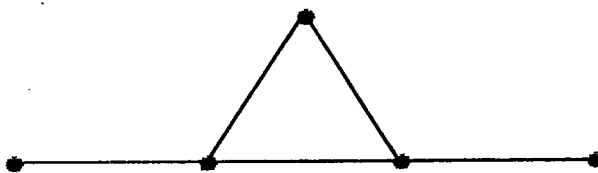


B₉

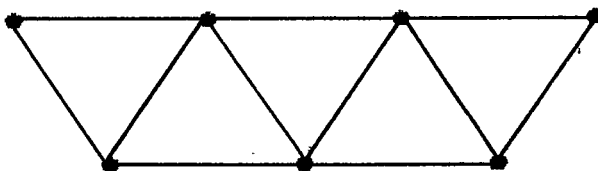


Grafos Triangulados

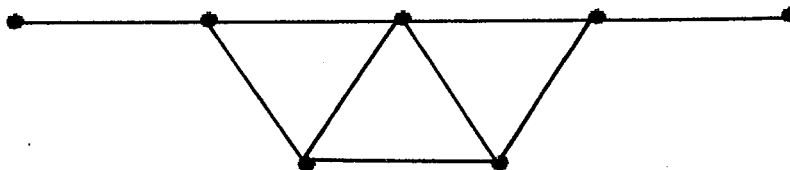
T_1



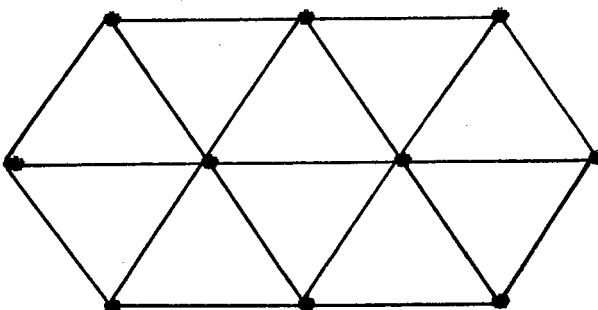
T_2



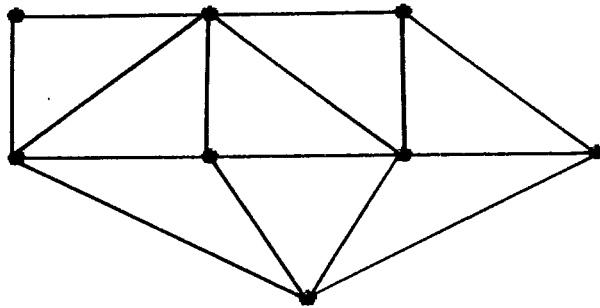
T_3



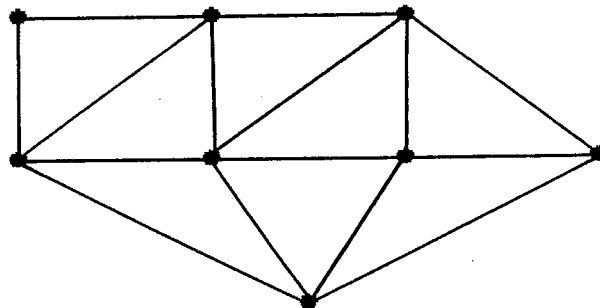
T_4



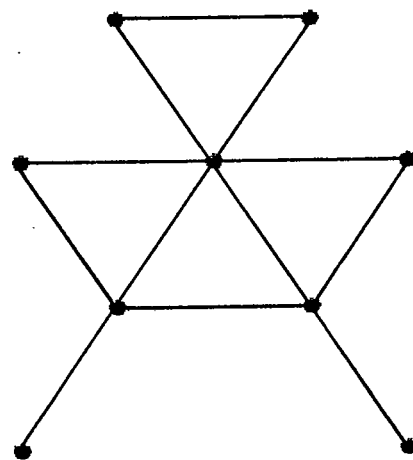
T_5



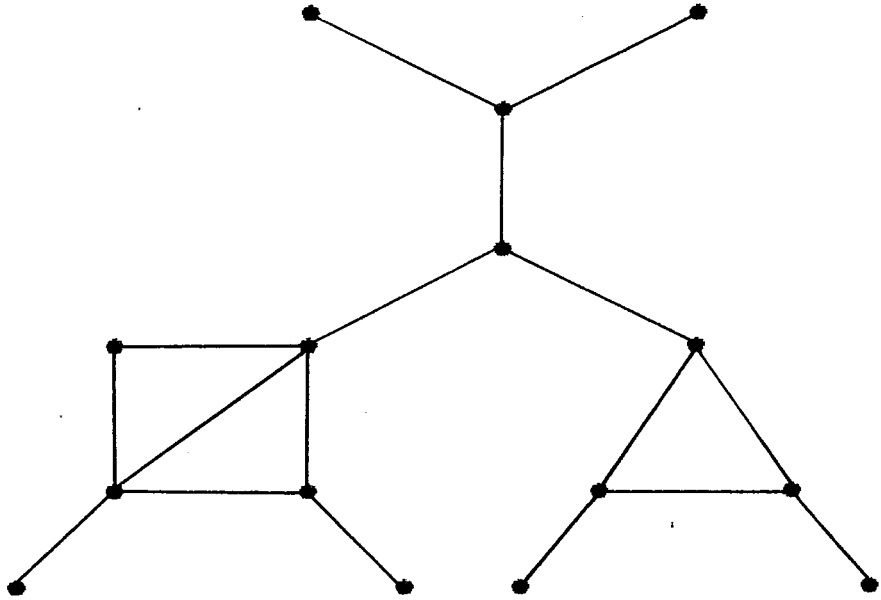
T_6



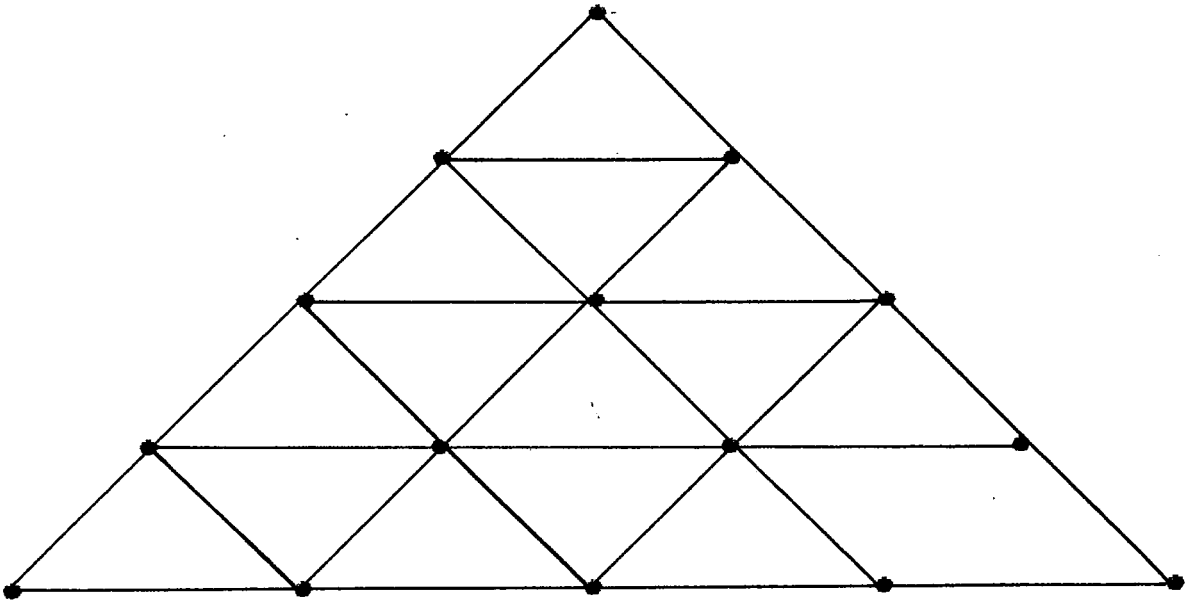
T_7



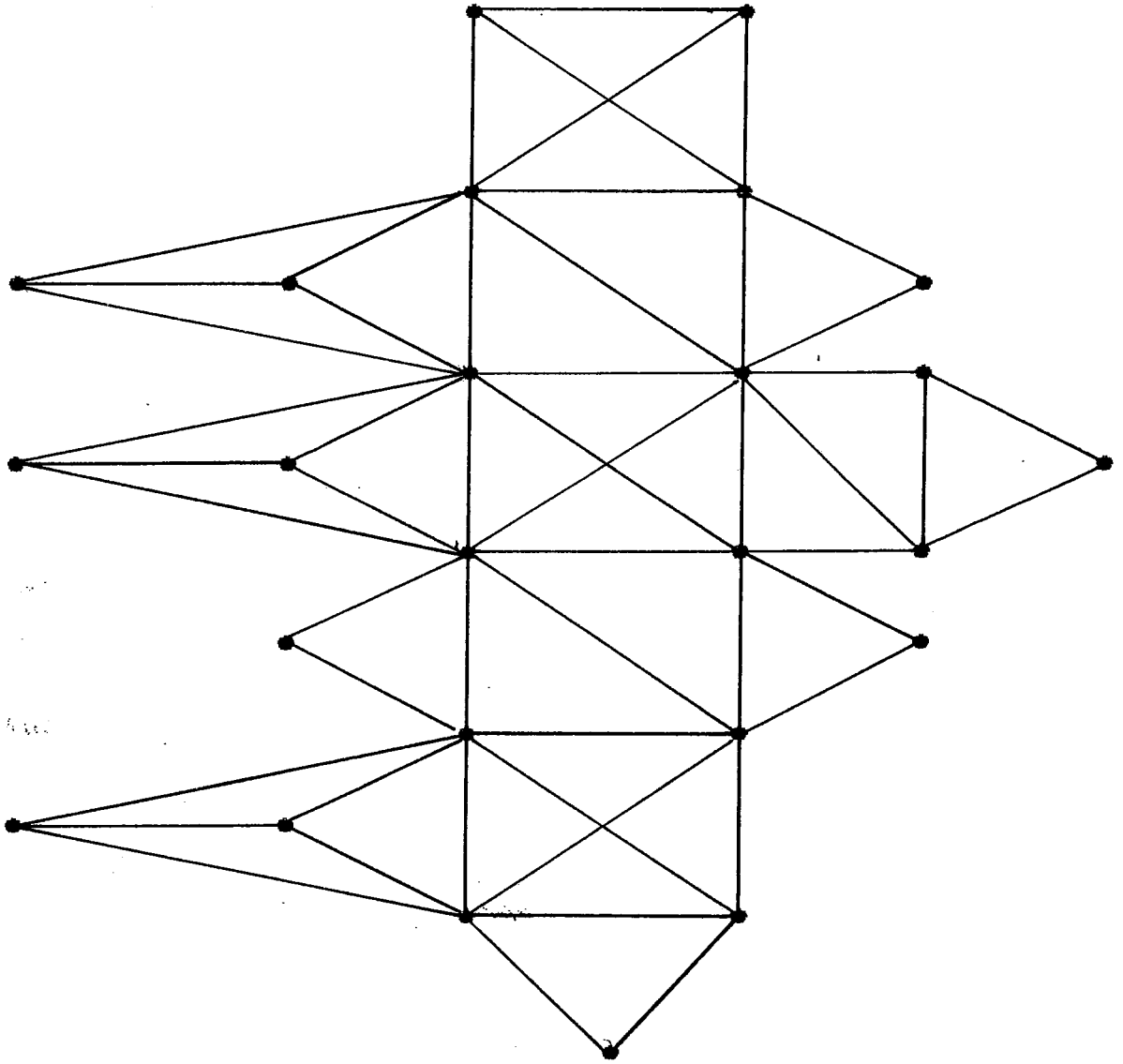
T_8



T_{10}

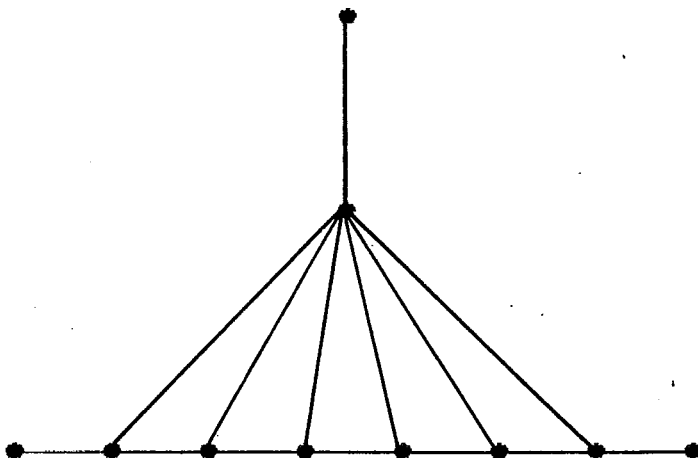


T_D

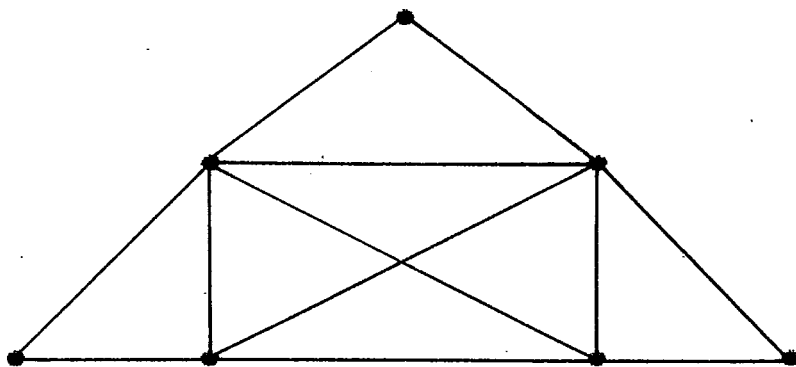


Grafos de Comparabilidade

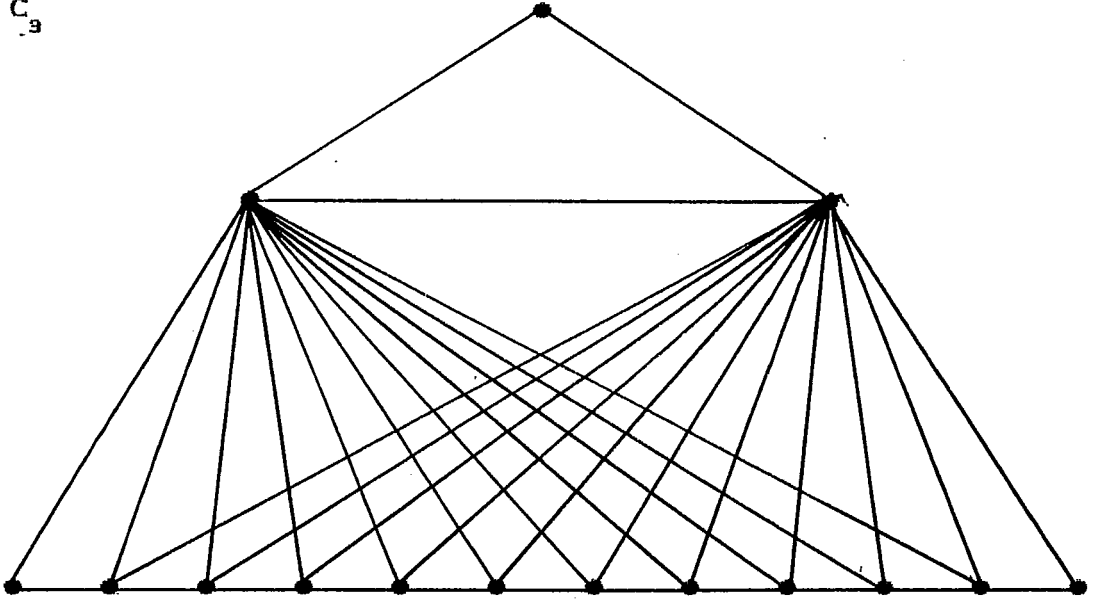
C_1



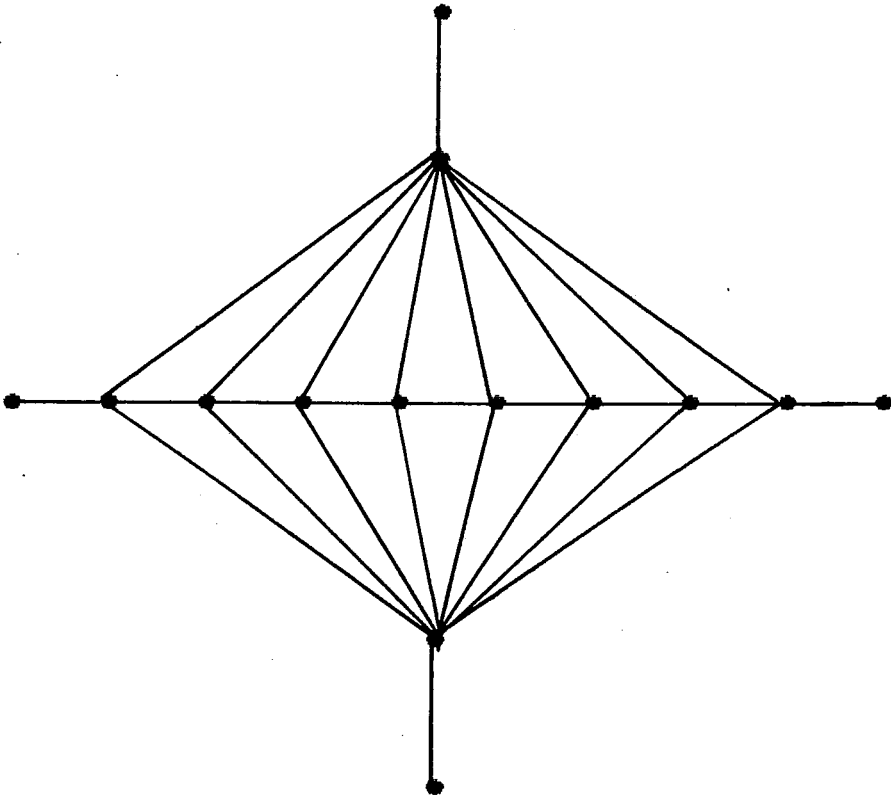
C_2

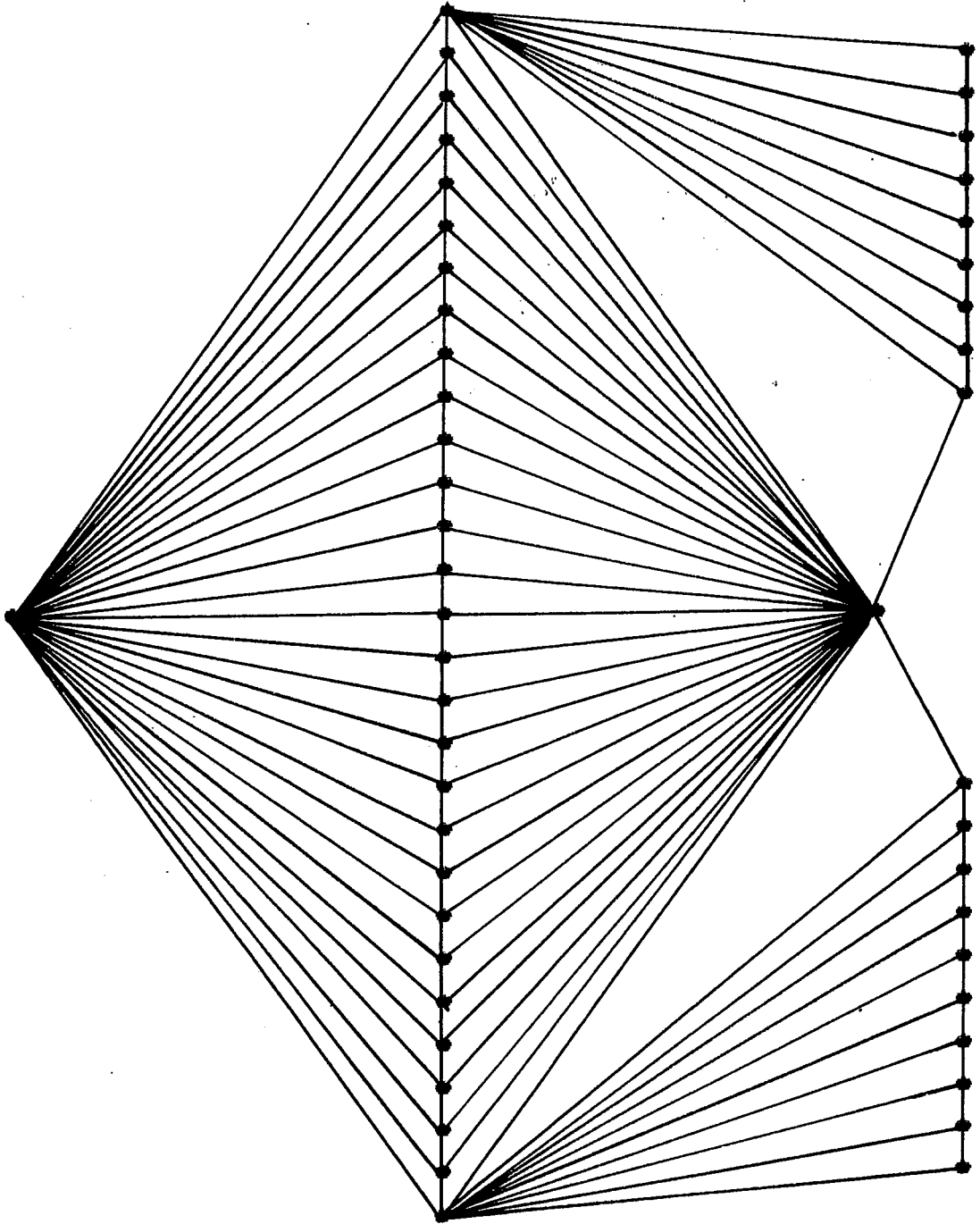


C_3

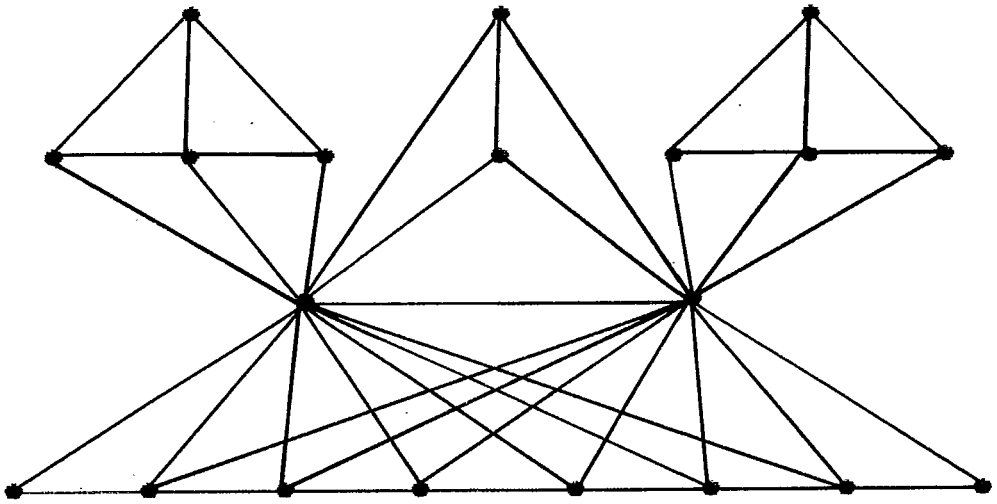


C_4

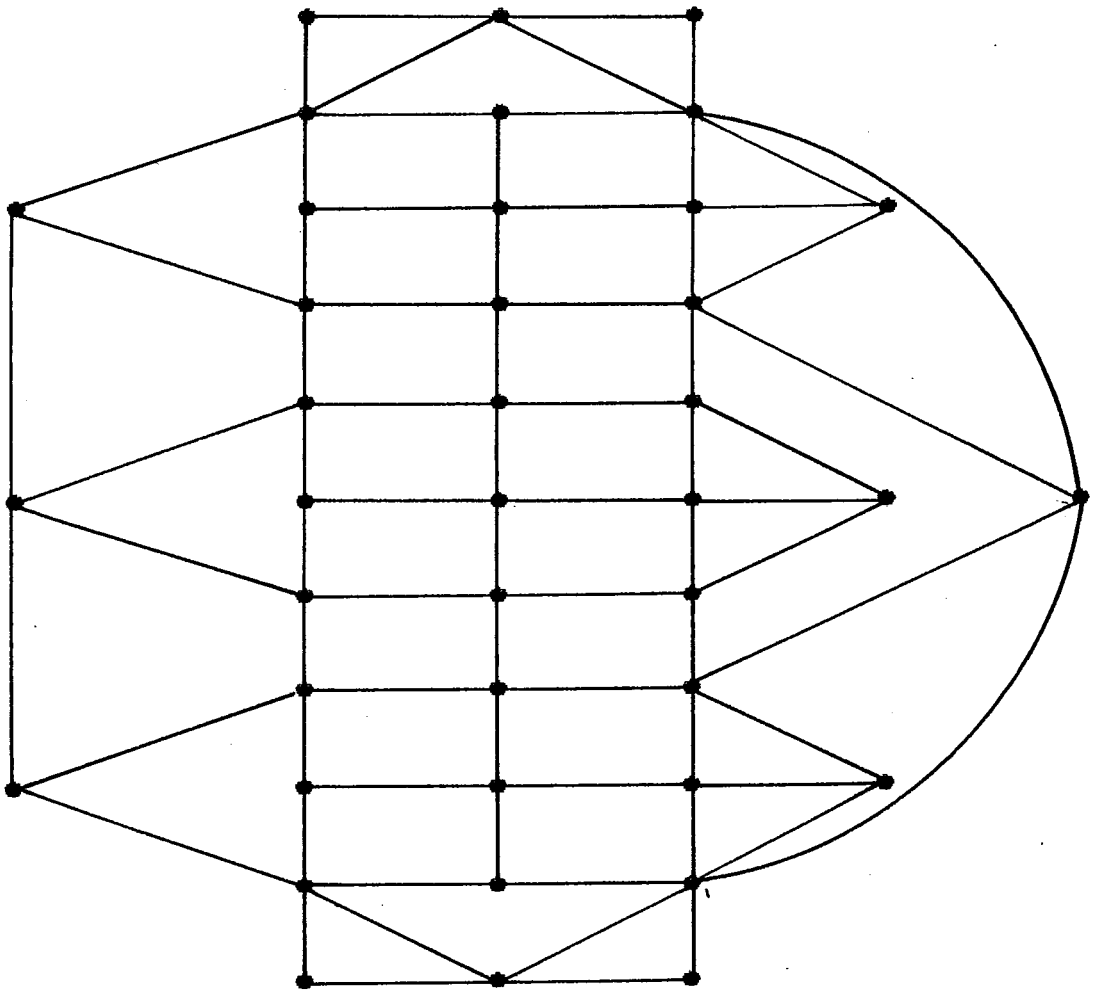




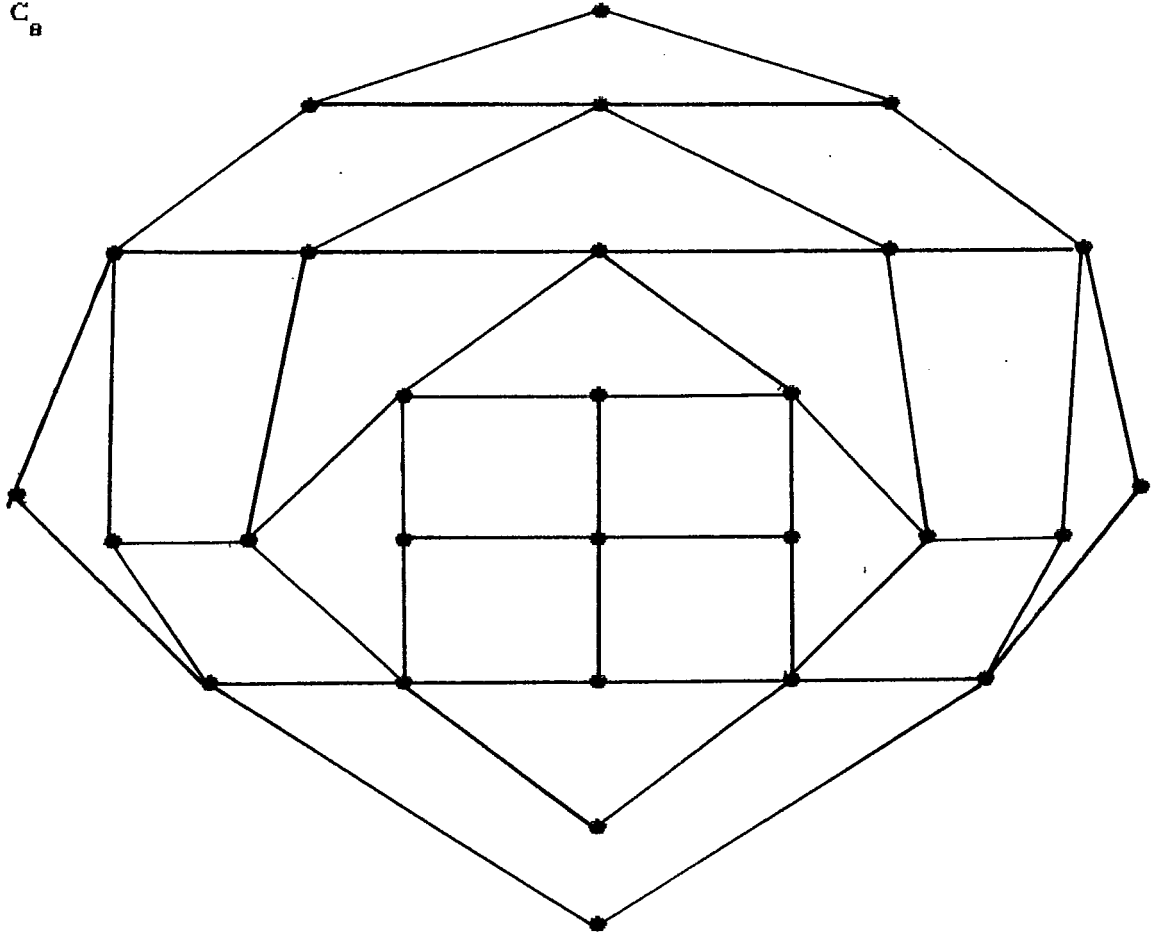
C_6



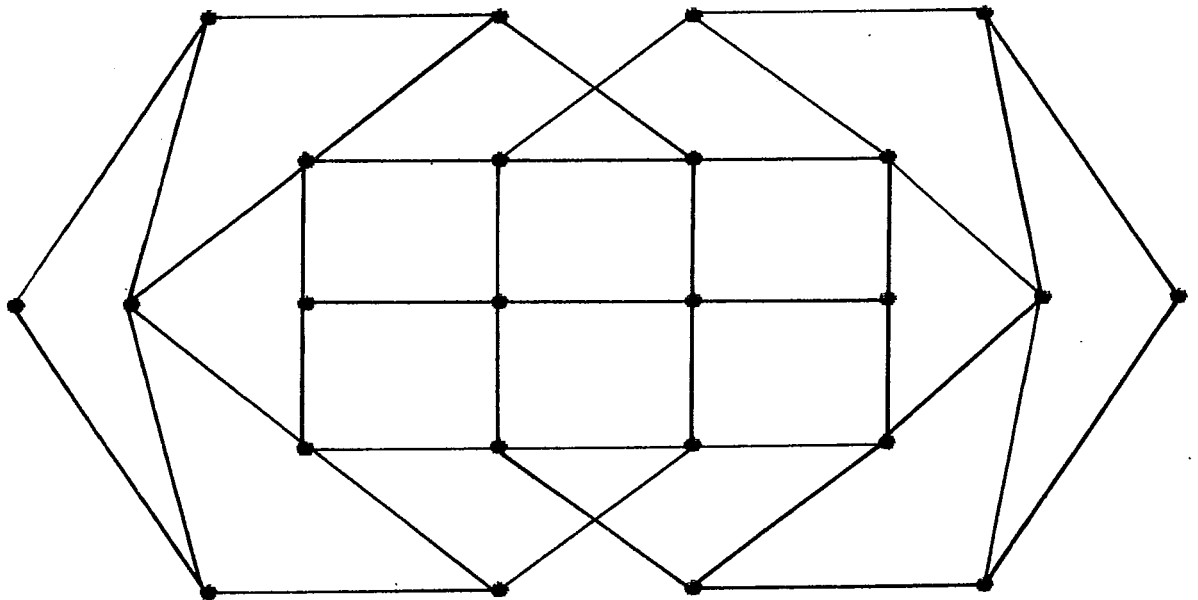
C_7



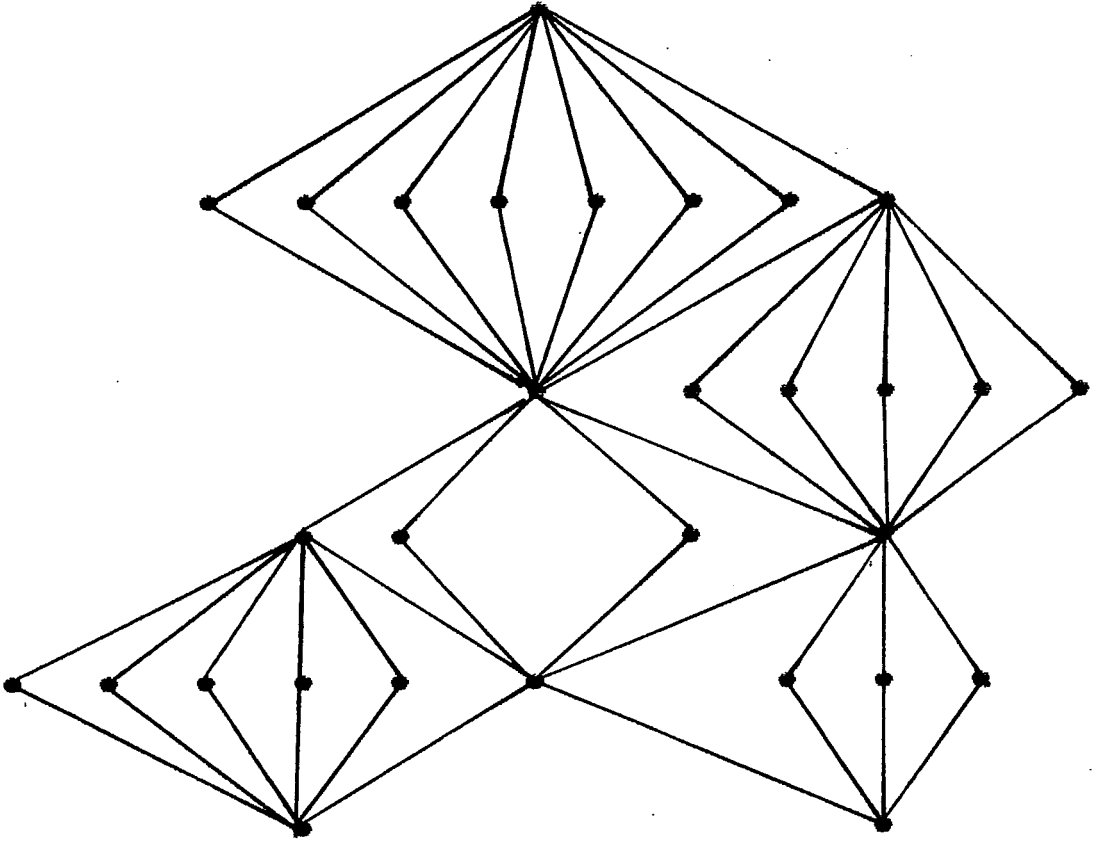
C_B



C_A

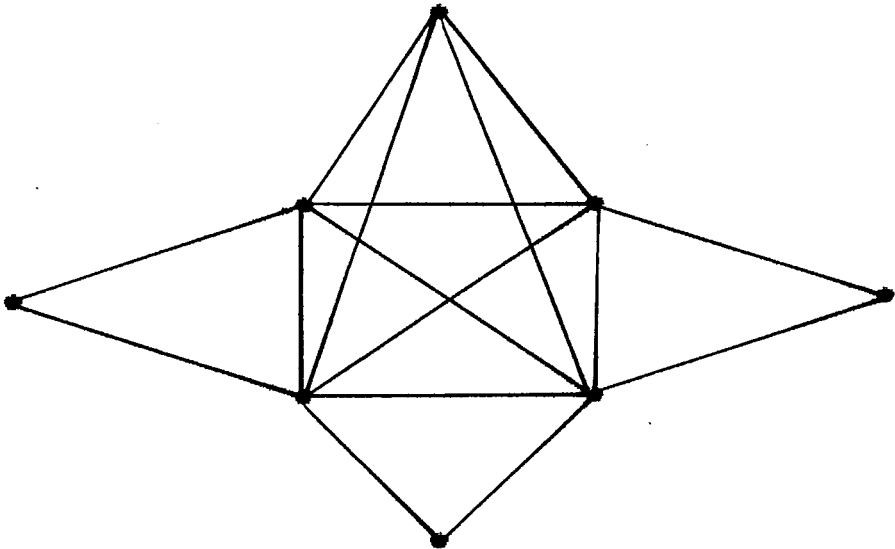


C_{10}

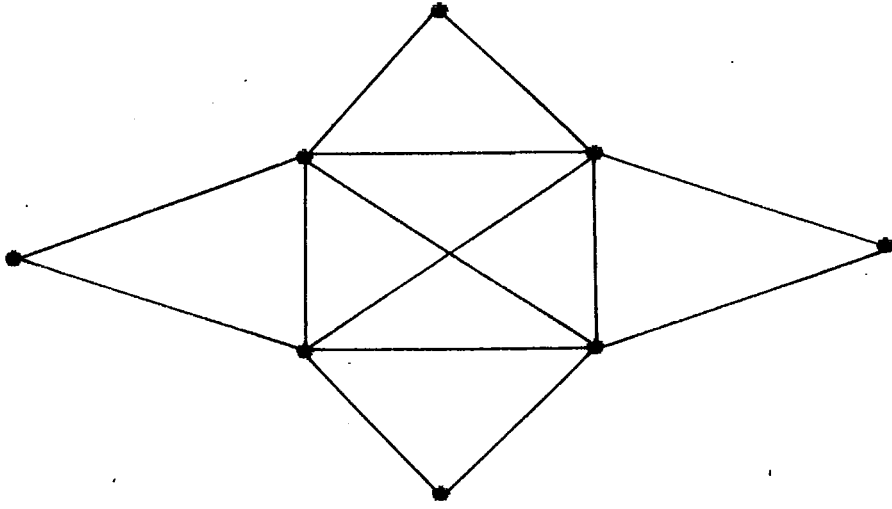


Grafos Split

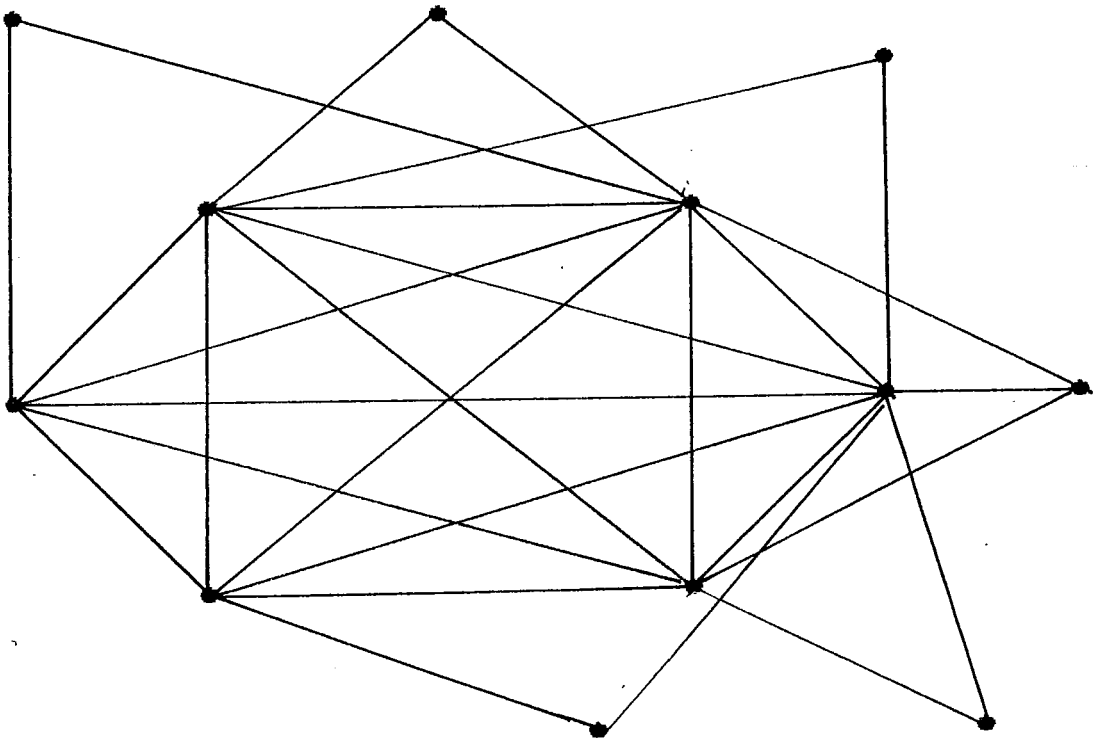
S_4



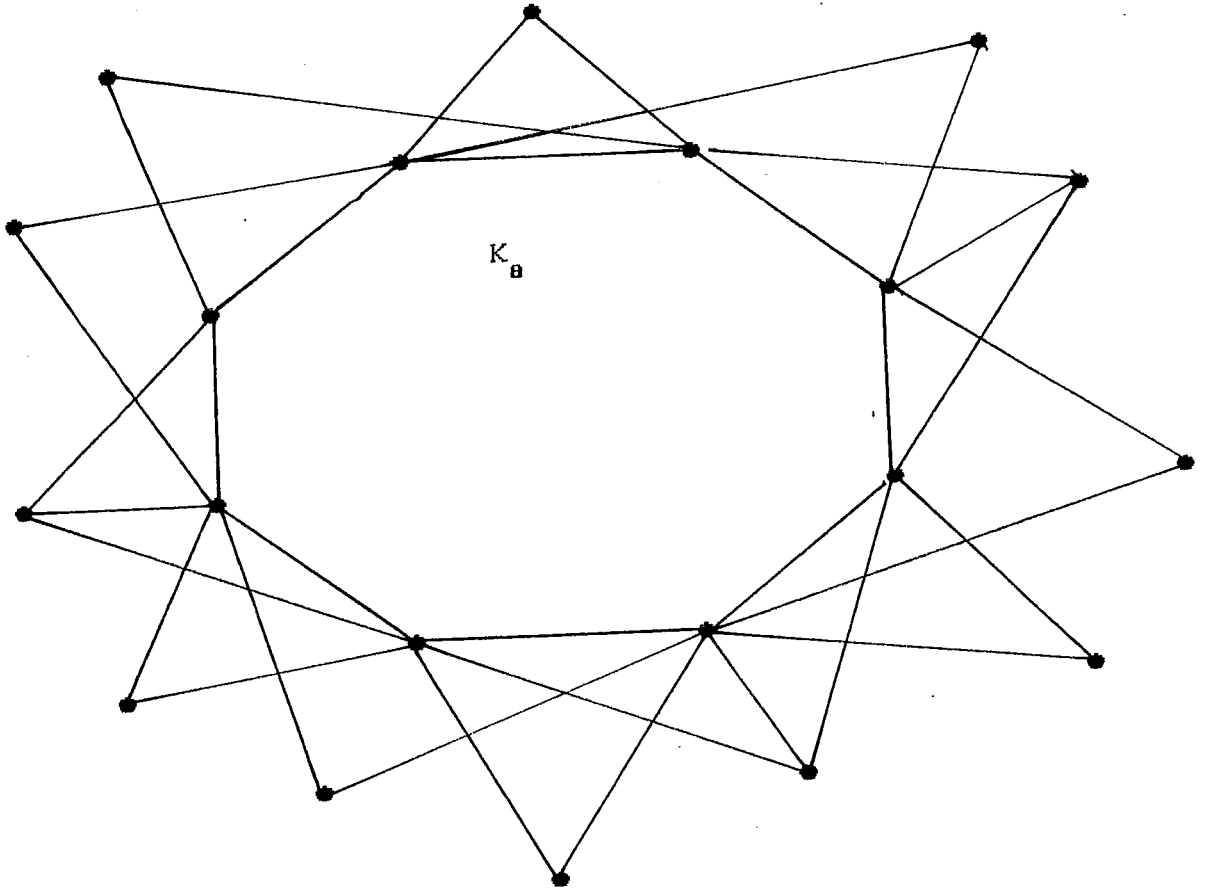
52



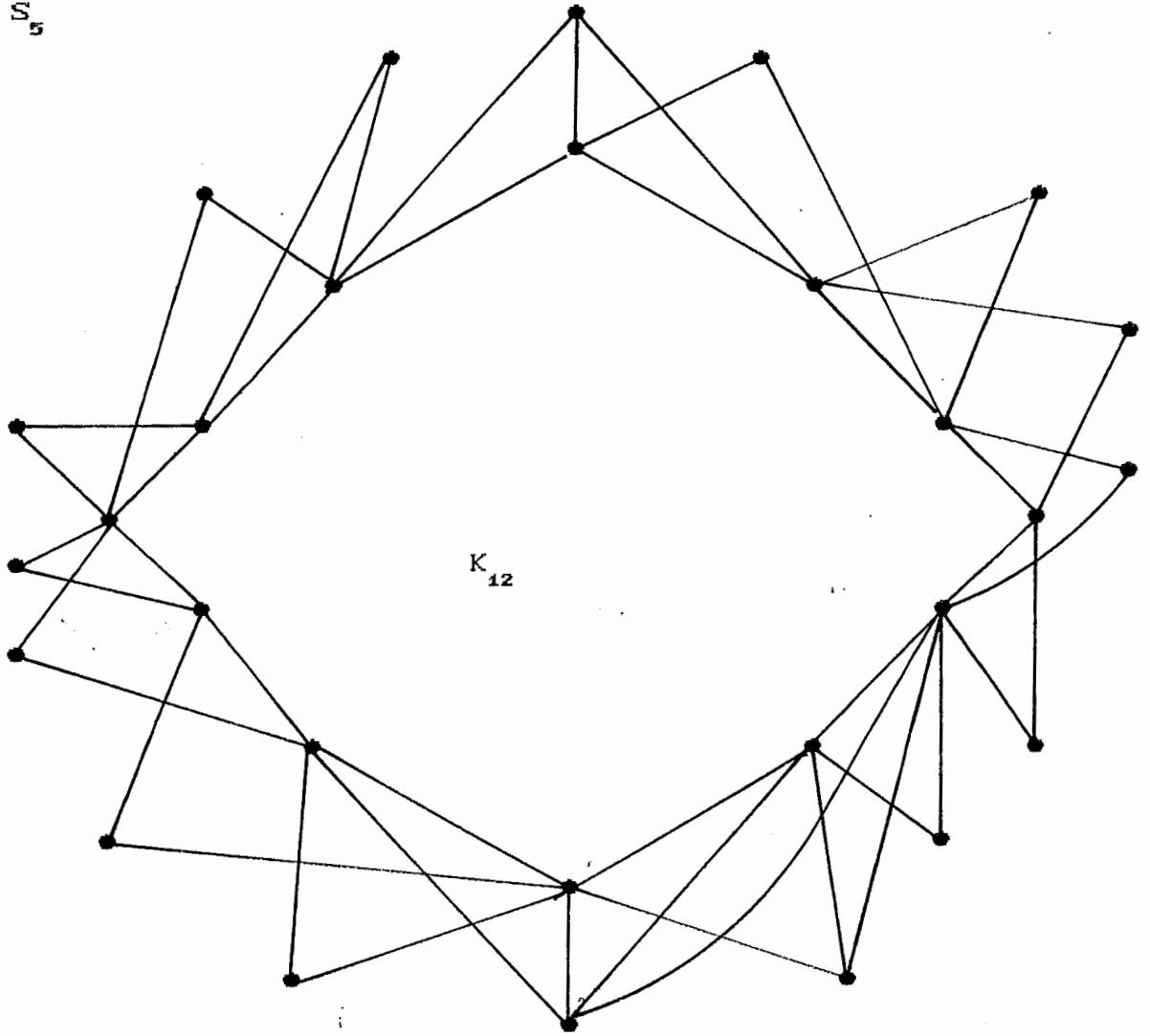
53



S_4

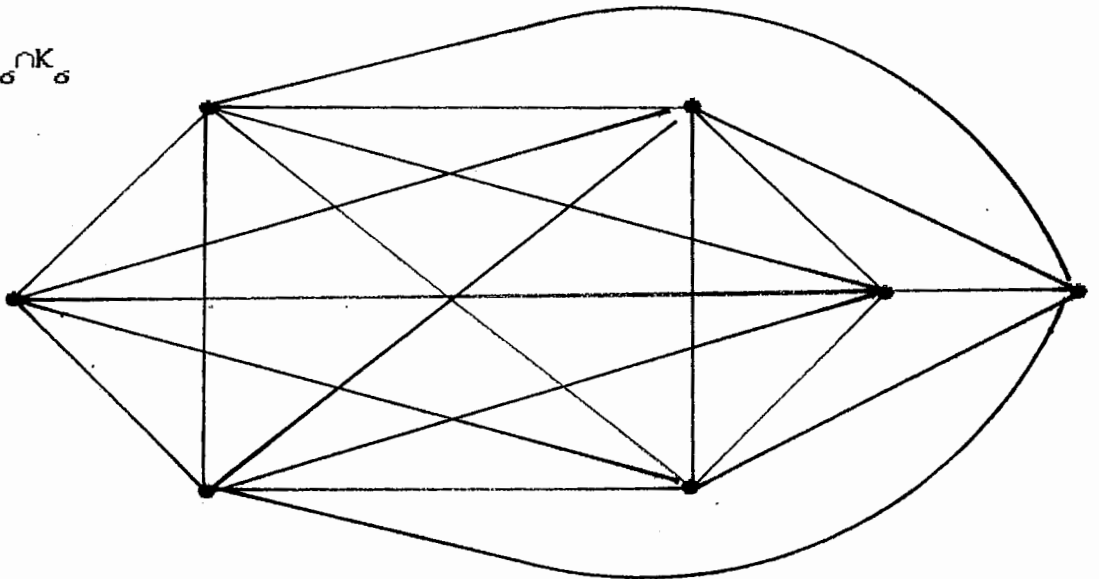


S_5

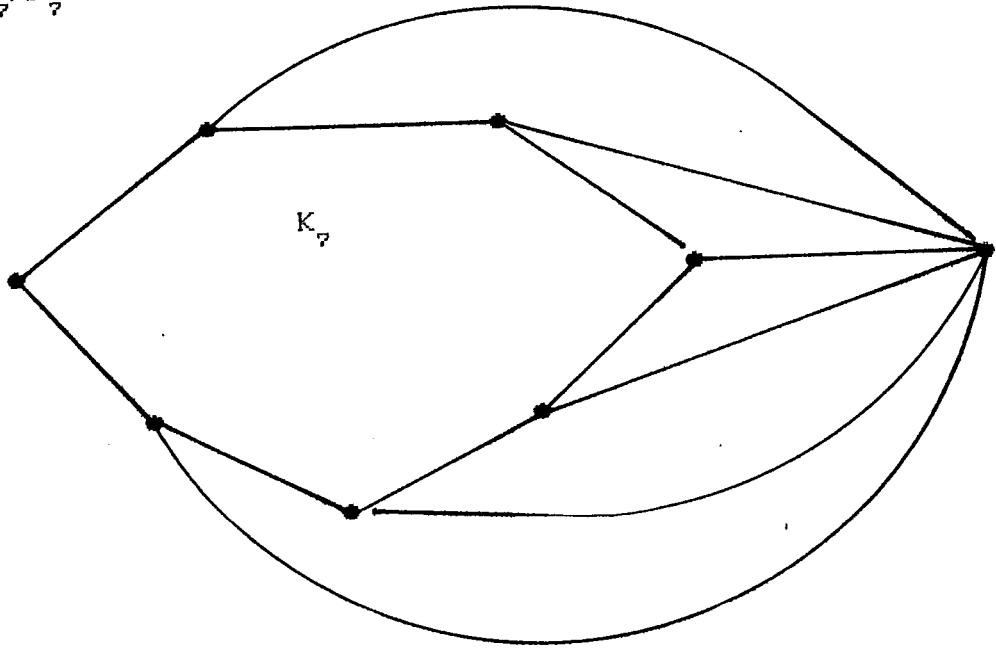


Grafos Split-indiferença

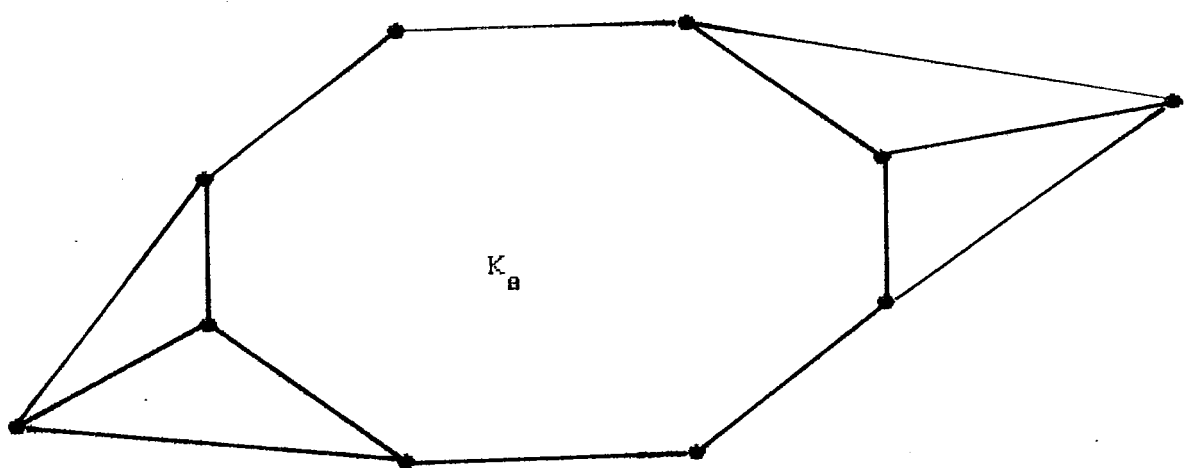
$$SI_1 = K_6 \cap K_6$$



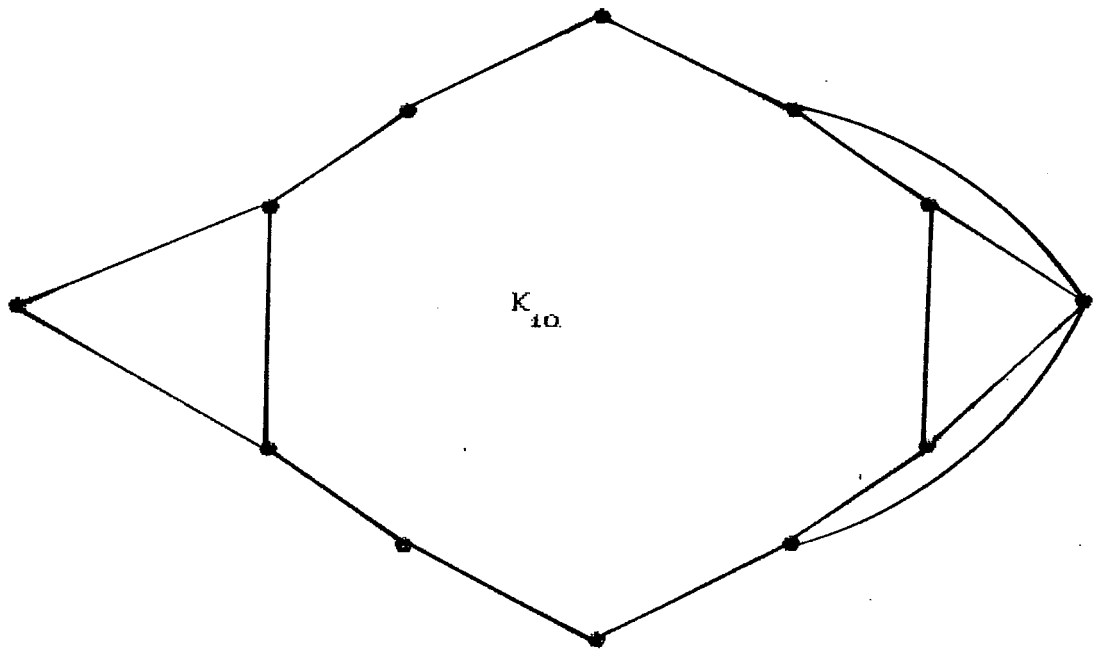
$$SI_2 = K_7 \cap K_7$$



$$SI_3 = K_4 \cap K_8 \cap K_4$$



$$SI_4 = K_9 \cap K_{10} \cap K_5$$



$$SI_5 = K_7 \cap K_8 \cap K_7$$

