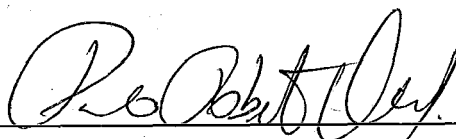


**OPERAÇÃO ESTOCÁSTICA DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS COM  
REPRESENTAÇÃO DA PRODUTIBILIDADE VARIÁVEL**

CLAUDIA MARIA SUANNO

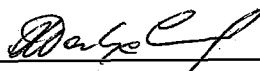
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS.

Aprovada por:

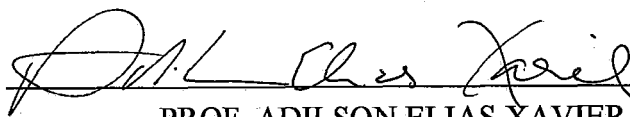


PROF. PAULO ROBERTO DE OLIVEIRA, D.Sc.

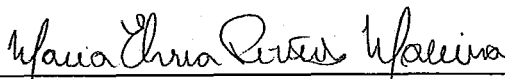
(Presidente)



Dr. MARIO VEIGA FERRAZ PEREIRA, D.Sc.



PROF. ADILSON ELIAS XAVIER, D.Sc.



Dra. MARIA ELVIRA PIÑEIRO MACEIRA, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 1995

**SUANNO, CLAUDIA MARIA**

Operação Estocástica de Sistemas Hidrotérmicos com Representação da Produtibilidade Variável (Rio de Janeiro) 1995.

X, 63 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc. Engenharia de Sistemas, 1995)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.

1. Assunto: Otimização em Sistemas Hidrotérmicos

I. COPPE/UFRJ      II. Título (série)

Aos meus pais Ilária e Umberto  
e  
a Mauro, Thiago e Leonardo

## **AGRADECIMENTOS**

Ao orientador Mário Veiga Ferraz Pereira pelo incentivo e excelente orientação durante o desenvolvimento desta tese.

Aos professores Paulo Roberto de Oliveira e Adilson Elias Xavier pelas valiosas críticas e sugestões a este trabalho.

A amiga Maria Elvira Piñeiro Maceira pelas criteriosas sugestões e torcida pela concretização deste trabalho.

A FURNAS Centrais Elétricas S.A. - nas pessoas de Celso Ferreira, Manoel Arlindo Zaroni Torres, Adelino Rodrigues, Edmundo Alfredo Pochmann da Silva, Carlos Eduardo de Almeida Silva, Gerson Vasconcellos Gomes, Sílvia Maria de Carvalho Celestino e Renato Volponi Lício.

A Mauro Negrini da Silva, companheiro presente em todos os momentos de minha vida, pelas valiosas discussões e sugestões na elaboração desta tese.

A amiga Angela de Oliveira Ghirardi pelas palavras de incentivo e apoio.

Aos meus filhos Thiago e Leonardo pela paciência, carinho e compreensão durante o desenvolvimento deste trabalho.

A minha mãe por toda a demonstração de força de retomada de vida em todos os momentos em que foi solicitada.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

## **OPERAÇÃO ESTOCÁSTICA DE SISTEMAS HIDROTÉRMICOS COM REPRESENTAÇÃO DA PRODUTIBILIDADE VARIÁVEL**

CLAUDIA MARIA SUANNO

DEZEMBRO, 1995

Orientador: Paulo Roberto de Oliveira

Programa: Engenharia de Sistemas

Na representação do parque gerador hidroelétrico, a disponibilidade de energia hidráulica é calculada a partir dos volumes armazenados e afluências aos diversos aproveitamentos que compõem o sistema. Esses valores são transformados respectivamente em energia armazenada e energia afluyente através dos coeficientes de produção das usinas, também conhecidos como *produtibilidades*.

Nos modelos que determinam as estratégias de operação hidrotérmica, a cada etapa do horizonte de planejamento, são definidos montantes de geração hidráulica que produzirão alterações no armazenamento do sistema. Variações no armazenamento implicarão, por sua vez, em mudanças significativas no valor do coeficiente de produção e conseqüentemente na disponibilidade hidráulica para a próxima etapa de operação.

Para o planejamento da operação de sistemas hidrotérmicos que possuem uma parcela substancial de geração de energia produzida por usinas hidroelétricas com reservatório, é extremamente importante a representação da variação da produtividade com o armazenamento, na modelagem do sistema hidráulico.

No Brasil, por exemplo, os modelos de Programação Dinâmica Estocástica atualmente em uso contemplam esta representação. Entretanto, como nestes modelos o esforço

computacional cresce exponencialmente com o número de reservatórios, não é possível a determinação de uma política de operação ótima global.

Em contrapartida, a técnica de Programação Dinâmica Dual Estocástica é capaz de calcular a política de operação ótima global para sistemas com múltiplos reservatórios porém, não pode representar a variação da produtibilidade devido a problemas de convexidade. Esta tese descreve uma transformação não linear de variáveis que supera essas limitações de convexidade permitindo a incorporação da representação da variação da produtibilidade no cálculo da política ótima de operação global.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Sciences (M.Sc.)

**STOCHASTIC OPERATION OF HYDROTHERMAL SYSTEMS  
REPRESENTING THE PRODUCTION COEFFICIENT VARIATION**

CLAUDIA MARIA SUANNO

DECEMBER, 1995

Thesis Supervisor: Paulo Roberto de Oliveira

Department: Engenharia de Sistemas

In the representation of a hydroelectric generation system, the available hydro energy is calculated from the stored water in the system reservoirs and the inflow volumes. The *production coefficient* of each hydro plant is used to transform these values into stored energy and energy inflow, respectively.

The hydrothermal operation strategy determines the hydro generation in each stage of the planning period, which affects the system storage. These storage variations will in turn affect the production coefficients and, consequently, the hydro availability for the next stage.

In the operation planning of hydrothermal systems with a large hydro component, it is important to represent the variation of the production coefficient with stored volume. In Brazil, for example, the stochastic dynamic programming models currently used incorporate this representation. However, due to the increase in computational effort with the number of reservoirs, it is not possible to calculate a global optimum operation policy.

In contrast, the Stochastic Dual Dynamic Programming technique is able to calculate the global optimal policy for a multiple reservoir system, but could not represent the production coefficient variation due to convexity problems. This thesis describes a nonlinear variable

transformation that overcomes these convexity limitations and therefore allows the incorporation of production coefficient variation to a global optimization scheme.



# ÍNDICE

<b>CAPÍTULO I - PLANEJAMENTO OPERATIVO DE UM SISTEMA HIDROTÉRMICO</b> .....	1
I.1 FORMULAÇÃO DO PROBLEMA OPERATIVO .....	1
I.2 APLICAÇÃO DA PDE AO PROBLEMA DE PLANEJAMENTO OPERATIVO.....	2
I.2.1 Função Objetivo.....	3
I.2.2 Equação de Balanço Hídrico.....	3
I.2.3 Equações de Limites de Armazenamento e Turbinamento .....	4
I.2.4 Produção Hidroelétrica.....	4
I.2.5 Custo Imediato de Operação .....	6
I.2.6 Algoritmo de Programação Dinâmica Estocástica .....	7
I.3 LIMITAÇÕES DA PDE.....	8
I.4 PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL ESTOCÁSTICA (PDDE) .....	10
I.5 LIMITAÇÕES DA PDDE .....	11
I.6 OBJETIVO DO TRABALHO .....	12
<b>CAPÍTULO II - ANÁLISE DE CONVEXIDADE - PROBLEMA COM UM ÚNICO RESERVATÓRIO</b> .....	13
II.1 VISÃO GERAL .....	13
II.2 RESERVATÓRIO NA FORMA DE UM CONE RETO .....	13
II.3 RESERVATÓRIO NA FORMA DE UM CILINDRO .....	16

<b>CAPÍTULO III - FORMULAÇÃO CONVEXA DO PROBLEMA DE OPERAÇÃO.....</b>	<b>19</b>
<b>CAPÍTULO IV - CÁLCULO DAS APROXIMAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM NA PDDE .....</b>	<b>24</b>
<b>CAPÍTULO V - CASO EXEMPLO .....</b>	<b>28</b>
<b>CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS .....</b>	<b>41</b>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>42</b>
<b>APÊNDICE A - PROGRAMAÇÃO DINÂMICA DUAL - PDD.....</b>	<b>44</b>
<b>APÊNDICE B - MODELOS AUTO-REGRESSIVOS PERIÓDICOS .....</b>	<b>58</b>

# CAPÍTULO I

## PLANEJAMENTO OPERATIVO DE UM SISTEMA HIDROTÉRMICO

### I.1 Formulação do Problema Operativo

O objetivo da operação de um sistema hidrotérmico é o atendimento do mercado consumidor a *mínimo custo* e com grau adequado de *confiabilidade*. A existência de estoques limitados de energia hidroelétrica faz com que estes objetivos sejam *conflitantes*. Por um lado, a busca do mínimo custo implica na máxima utilização dos estoques. Por outro lado, considerando-se desprezível a possibilidade de falta de combustíveis nas usinas térmicas, a falha no suprimento depende basicamente da disponibilidade de água nos reservatórios. Portanto, o requisito de confiabilidade age no sentido de manter elevados os níveis de estoque.

A Figura 1 ilustra este antagonismo. Se deplecionarmos grandes volumes de água para geração de energia, e ocorrerem baixas afluências no futuro, as usinas hidroelétricas não serão capazes de atender a totalidade da demanda. Haverá então necessidade da utilização intensiva da geração térmica, e um maior risco de interrupção no fornecimento de energia. Por sua vez, se mantivermos elevados os níveis dos reservatórios através do uso mais intenso da geração térmica e ocorrerem afluências elevadas no futuro, poderão ocorrer vertimentos no sistema e consequentemente desperdício de energia.

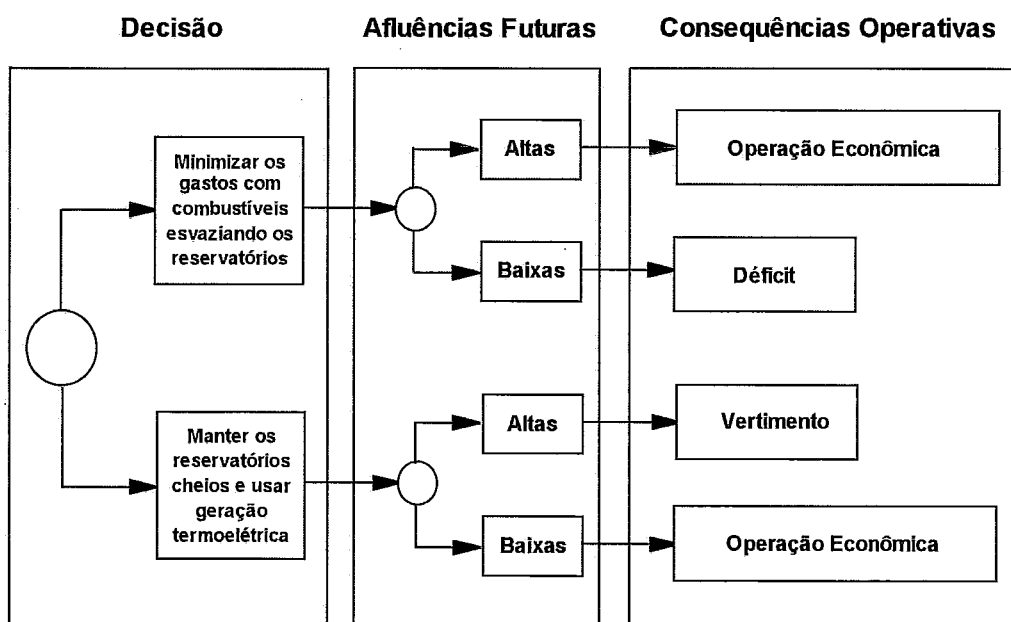


Figura 1 - Economia de Operação x Confiabilidade de Atendimento

O interesse principal do planejamento operativo é portanto determinar a melhor *estratégia* de utilização desta armazenagem, isto é, saber a cada instante qual a vantagem em desestocar a água armazenada nos reservatórios, comparado com mantê-la em estoque para uma utilização futura.

O problema de planejamento operativo de um sistema hidrotérmico, possui as seguintes características principais:

- a) *acoplado no tempo* - uma decisão presente afeta o custo operativo futuro;
- b) *acoplado no espaço* - a água liberada em uma usina para produção de energia afeta a operação de outras usinas a jusante;
- c) *estocástico*, devido à incerteza quanto às afluências futuras;
- d) *não separável* - o valor da energia gerada por uma hidroelétrica não é medido diretamente, e sim em termos da economia nos custos de geração térmica ou déficits evitados no presente e no futuro;
- e) *não linear*, devido à relação não linear entre a produção hidroelétrica e o nível de armazenamento nos reservatórios.

Temos assim um problema de controle estocástico de múltiplos estágios, resolvido tradicionalmente por Programação Dinâmica Estocástica (PDE) [1], [2] e [3].

## **I.2 Aplicação da PDE ao Problema de Planejamento Operativo**

A técnica de Programação Dinâmica Estocástica decompõe o problema de múltiplos estágios em subproblemas de um único estágio (típicamente, etapas mensais). A decisão operativa a cada estágio depende das seguintes *variáveis de estado*:

- volumes armazenados nos diversos reservatórios do sistema no início do mês;
- "tendência hidrológica", representada pelas vazões naturais afluentes aos diversos reservatórios do sistema no mês anterior.

Através de uma recursão mensal no sentido inverso do tempo,  $t = T, T-1, \dots, 1$ , são construídas *funções de custo* que estabelecem para cada estado do sistema o custo futuro total esperado, de  $t$  até  $T$ , onde  $T$  é número de meses do horizonte de planejamento considerado, associado à melhor decisão operativa.

## 1.2.1 Função Objetivo

O problema de otimização estocástico é formulado da seguinte maneira:

$$\alpha_t(X_t) = E_{A_t|X_t} \left[ \text{Min}_{U_t} (C_t(U_t) + \frac{1}{1+\beta} \alpha_{t+1}(X_{t+1})) \right] \quad (I.1)$$

Na equação (I.1),  $C_t(U_t)$  representa o *custo imediato* associado à decisão  $U_t$  e  $\alpha_{t+1}(X_{t+1})$  é *valor esperado do custo futuro* resultante desta decisão,

onde:

- $U_t$  vetor de decisões para o estágio  $t$ . Geralmente representa a decisão do montante de vazão turbinada e vazão vertida pela usina durante o estágio  $t$ ;
- $A_t$  aflúências incrementais durante o estágio  $t$ ;
- $X_t$  estado do sistema no início do estágio  $t$ ;
- $A_t | X_t$  distribuição de probabilidades da aflúência  $A_t$  condicionada ao estado do sistema  $X_t$ ;
- $E_{A_t|X_t}$  valor esperado na distribuição de probabilidades  $A_t | X_t$ ;
- $\beta$  taxa de desconto;
- $\alpha_t(X_t)$  valor esperado do custo de operação do estágio  $t$  até o final do período de planejamento sob a hipótese de operação ótima (função de custo futuro).

## 1.2.2 Equação de Balanço Hídrico

Esta equação traduz a evolução do armazenamento do reservatório  $i$  durante o estágio  $t$

$$V_{t+1}(i) = V_t(i) + A_t(i) - (Q_t(i) + S_t(i)) + \sum_{j \in M_i} (Q_t(j) + S_t(j)) \quad (I.2)$$

onde:

- $V_{t+1}$  nível de armazenamento nos reservatórios no final do estágio  $t$ ;
- $V_t$  nível de armazenamento nos reservatórios no início do estágio  $t$ ;
- $Q_t$  volumes turbinados nos reservatórios durante o estágio  $t$ ;
- $S_t$  volumes vertidos durante o estágio  $t$ ;
- $M_i$  conjunto de usinas hidroelétricas imediatamente a montante da usina hidroelétrica  $i$ .

### I.2.3 Equações de Limites de Armazenamento e Turbinamento

Correspondem aos limites físicos de armazenamento e turbinamento nos reservatórios do sistema.

$$V_{t+1}(i) \leq \bar{V}(i) \quad (I.3)$$

$$Q_t(i) \leq \bar{Q}(i) \quad (I.4)$$

onde:

$\bar{V}$  capacidade máxima de armazenamento;

$\bar{Q}$  limites máximos de turbinamento.

### I.2.4 Produção Hidroelétrica

As usinas hidroelétricas convertem a energia potencial da água em energia cinética que é utilizada para acionar as turbinas. A energia potencial de um volume  $\Delta v$  é calculada através da seguinte expressão:

$$EP = \gamma \Delta v g h(v) \quad (I.5)$$

onde:

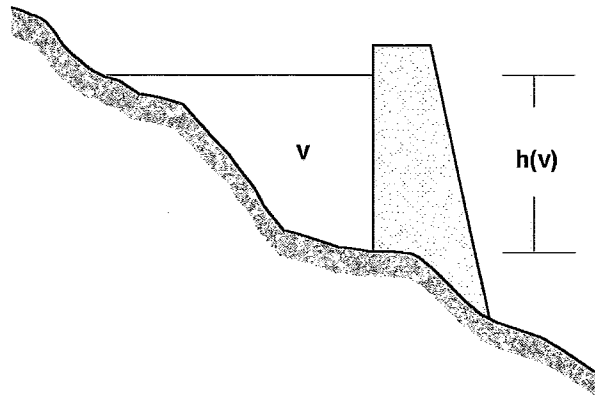
$\Delta v$  volume turbinado ( $m^3$ );

$\gamma$  massa específica da água ( $kg/m^3$ );

$g$  aceleração da gravidade ( $m/s^2$ );

$h(v)$  altura de queda líquida (diferença entre o nível de montante e de jusante) correspondente à um dado volume armazenado (m) - ver Figura 2;

EP energia potencial (Joules).



**Figura 2 - Aproveitamento Hidroelétrico com Reservatório**

Considerando o horizonte de planejamento discretizado em intervalos mensais, a energia hidráulica produzida pela usina ao turbinar o volume  $\Delta v$  ao longo de um mês é calculada pela seguinte expressão:

$$EH = K \eta EP = K \eta \gamma \Delta v g h(v) \quad (I.6)$$

onde:

$\eta$  rendimento global do conjunto turbina-gerador

$K$  constante de transformação de unidades ( $10^{-6}$  / n° de segundos do mês). Com a introdução desta constante a energia obtida pela equação (I.6) fica expressa na unidade usual MW médio.

Outra forma de se obter a energia hidráulica é através da seguinte expressão:

$$EH = K' \eta \gamma g h(v) Q = \rho(v) Q \quad (I.7)$$

onde:

$K'$  constante de transformação de unidades ( $10^{-6}$ )

$Q$  vazão turbinada ( $m^3/s$ )

A partir de (I.7) a produtibilidade é dada por:

$$\rho(v) = K' \eta \gamma g h(v) \quad (I.8)$$

O fator  $\rho(v)$  é expresso em MWmed/ $m^3/s$ .

A energia produzida nas usinas hidroelétricas é obtida então através da seguinte expressão:

$$GH(U_t) = \sum_{i=1}^{NUH} \rho_i(V_t) Q_t(i) \quad (I.9)$$

onde  $\rho_i(V_t)$  é produtividade da  $i$ -ésima usina hidroelétrica.

Desta forma, a cada etapa do horizonte de planejamento são definidos montantes de geração hidráulica que produzirão alterações no armazenamento do sistema. Variações no armazenamento implicarão, por sua vez, em mudanças no valor da produtividade e consequentemente na disponibilidade hidráulica de energia para a próxima etapa de operação.

### I.2.5 Custo Imediato de Operação

O custo imediato de operação resulta da geração térmica necessária para complementar a produção das usinas hidroelétricas no atendimento à demanda de energia.

As unidades térmicas entram em operação pela ordem crescente de custo unitário, isto é, uma unidade térmica mais barata é utilizada até a sua capacidade máxima antes de outra unidade térmica de custo mais elevado entrar em operação, conforme mostra a Figura 3.

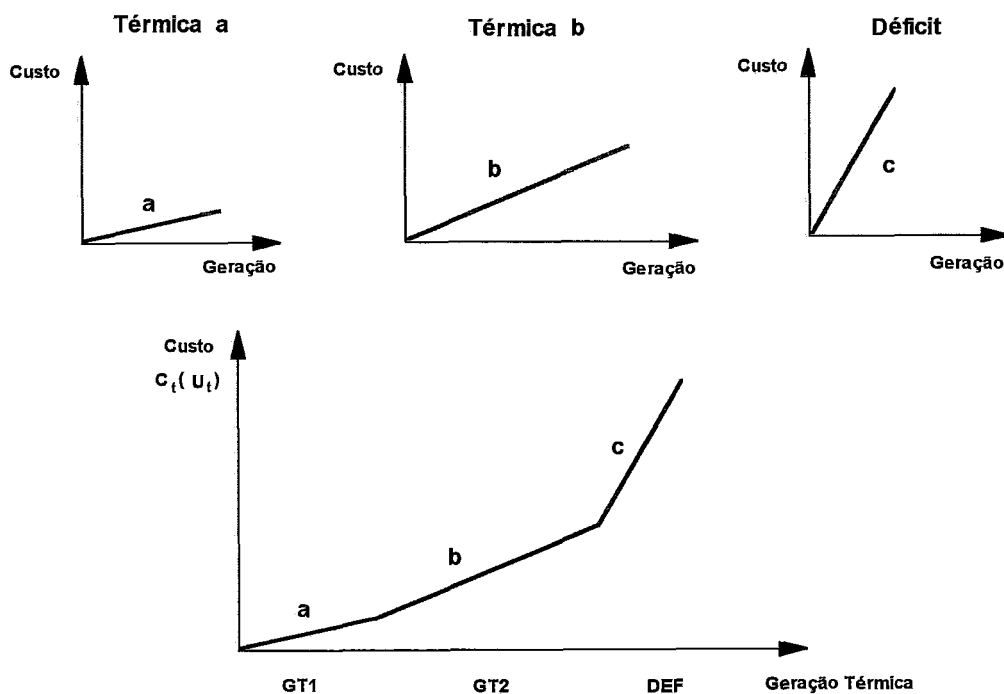


Figura 3 - Representação do Custo de Geração Térmica



Logo, o custo imediato de operação a cada estágio  $t$  é obtido resolvendo-se:

$$C_t(U_t) = \text{Min} \sum_{j=1}^{\text{NUT}} CT_j(GT_{t,j})$$

$$\text{s.a.} \tag{I.10}$$

$$GH(U_t) + \sum_{j \in \text{NUT}} GT_{t,j} = D_t \tag{I.11}$$

$$GT_{t,j} \leq \overline{GT}_j \quad j = 1, \dots, \text{NUT} \tag{I.12}$$

onde

NUT total de usinas térmicas;

$GT_{t,j}$  geração da  $j$ -ésima usina térmica no estágio  $t$ ;

$\overline{GT}_j$  capacidade máxima da  $j$ -ésima usina térmica;

$CT_j$  custo de geração da  $j$ -ésima usina térmica;

$D_t$  demanda de energia no estágio  $t$ .

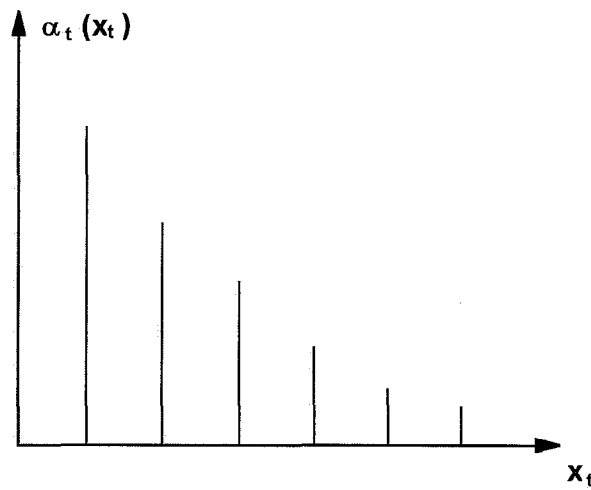
## 1.2.6 Algoritmo de Programação Dinâmica Estocástica (PDE)

O algoritmo de PDE constrói a função custo futuro,  $\alpha_t(X_t)$ , discretizando o vetor de estados  $X_t$  e resolvendo a equação (I.1) para cada um dos valores discretizados. Valores intermediários de  $\alpha_t(X_t)$  são obtidos por interpolação dos valores discretizados.

Na determinação de  $\alpha_t(X_t)$  supõem-se conhecidos no início de cada mês:

- a) a função de custo futuro atualizada para o final do mês  $t$ ,  $\alpha_{t+1}(X_{t+1})$ . Para  $t = T$  considera-se a condição de fronteira  $\alpha_T(X_T) \equiv 0$ ;
- b) a distribuição de probabilidades das afluições durante o mês  $t$  condicionada à afluição observada no mês anterior (tendência hidrológica);
- c) a carga do sistema, as térmicas envolvidas e todos os componentes que representam o sistema e suas limitações físicas.

Aplicando a técnica de PDE para um sistema hidrotérmico com um único reservatório considerando-se apenas o volume armazenado como variável de estado, teremos a função de custo futuro  $\alpha_t(X_t)$  com o comportamento da Figura 4.



**Figura 4 - Função de Custo Futuro construída por PDE**

Este comportamento se deve ao fato de que, para um determinado mês  $t$ , quanto maior é o volume armazenado no reservatório do sistema, menor é a probabilidade de ocorrerem déficits no futuro e conseqüentemente o custo futuro de operação de  $t$  até  $T$  será menor. Da mesma forma, quanto menor o volume armazenado no sistema maiores são as chances de ocorrerem déficits futuros e maior será o custo futuro de  $t$  até  $T$ .

### **I.3 Limitações da PDE**

O algoritmo PDE é bastante robusto e possui características interessantes, como por exemplo a de permitir a resolução de problemas complexos com funções objetivo e restrições discretas, não lineares, não convexas, etc. Entretanto, como a estratégia de operação deve ser calculada para todas as combinações de níveis dos reservatórios e tendências hidrológicas, o esforço computacional cresce exponencialmente com o número de reservatórios. Suponhamos, por exemplo, que 20 valores discretos sejam utilizados para representar o intervalo de variação dos volumes armazenados em cada reservatório e que 20 valores adicionais sejam necessários para representar a tendência hidrológica. Se o sistema tem um número  $N$  de reservatórios, haverá  $20^{2N}$  possíveis combinações de estados. Sendo assim temos:

1 usina hidroelétrica	$20^2$	= 400 estados
2 usinas hidroelétricas	$20^4$	= 160.000 estados
3 usinas hidroelétricas	$20^6$	= 64 milhões de estados
4 usinas hidroelétricas	$20^8$	= 25 bilhões de estados
5 usinas hidroelétricas	$20^{10}$	= 10 trilhões de estados

Isto significa que a resolução da equação (I.1) pelo algoritmo de PDE torna-se inviável computacionalmente mesmo para sistemas com um número bastante reduzido de usinas hidroelétricas.

Convém observar que o sistema brasileiro possui cerca de 50 reservatórios e além disso a consideração, no vetor de estados, da tendência hidrológica requer em alguns estágios pelo menos cinco variáveis (modelos estocásticos PAR(p))[4].

Foram desenvolvidos métodos capazes de fornecer a solução aproximada do problema de operação, a um esforço computacional aceitável. A solução adotada consiste em reduzir o número de variáveis de estado através da agregação dos diversos reservatórios em um único reservatório equivalente de energia (Modelo a Sistema Equivalente) [5].

Na representação do parque gerador hidroelétrico a sistema equivalente, a disponibilidade de energia hidráulica é calculada a partir dos volumes armazenados e afluências aos diversos aproveitamentos que compõem o sistema. Esses valores são transformados respectivamente em energia armazenada e energia afluente ao sistema equivalente.

Mesmo assim, se utilizarmos para cada subsistema brasileiro: Sul, Sudeste, Norte e Nordeste, a técnica de agregação dos reservatórios num único reservatório equivalente de energia teríamos, para cada região, cinco variáveis correspondentes à tendências hidrológicas e uma correspondente ao armazenamento. Para o sistema como um todo teríamos portanto, um total de 24 variáveis inviabilizando computacionalmente a aplicação do algoritmo PDE mesmo numa representação simplificada.

Devido à esta limitação, adota-se atualmente a suposição de que a tendência hidrológica pode ser representada por apenas uma variável de estado (modelo PAR(1)) e são aplicados procedimentos heurísticos sub-ótimos para representar os intercâmbios de energias entre os subsistemas[6].

## I.4 Programação Dinâmica Dual Estocástica (PDDE)

Em 1987, foi desenvolvida a técnica de *Programação Dinâmica Dual Estocástica*, PDDE[7], [8], [9], utilizando decomposição de Benders a multi-estágio[10], que evita os problemas de dimensionalidade devidos à discretização do espaço de estados. Esta técnica constrói iterativamente a função de custo futuro como uma função linear por partes, sem discretizar o espaço de estados.

A cada iteração segmentos lineares são gerados a partir de informações do problema dual. Esses segmentos lineares podem ser vistos como aproximações de primeira ordem da função de custo futuro em torno de estados selecionados. Em termos gráficos, eles são tangentes à função de custo futuro, como se vê na Figura 5. Tem-se assim uma **aproximação inferior** para a verdadeira função de custo futuro.

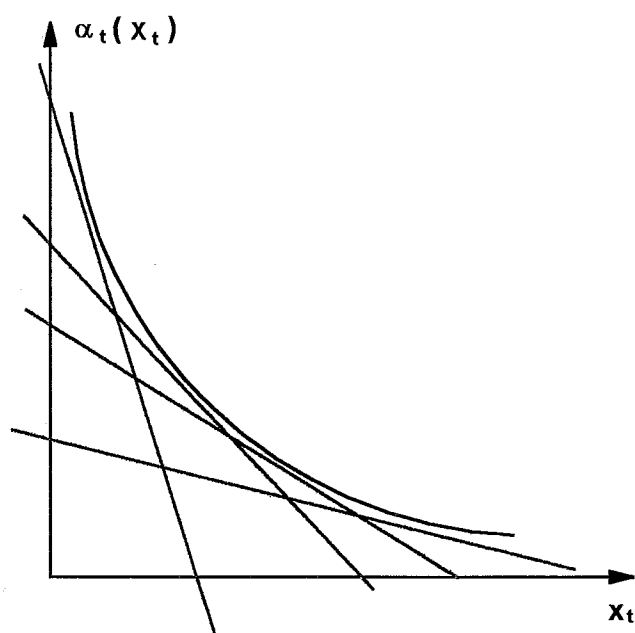


Figura 5 - Função de Custo Futuro construída por PDDE

Em termos computacionais a PDDE apresenta as seguintes vantagens:

- não é necessária a discretização do espaço de estados;
- a cada iteração o algoritmo calcula um limite superior e inferior para o valor ótimo da função objetivo, permitindo uma solução de compromisso entre esforço computacional e precisão.
- o algoritmo pode ser estendido para casos estocásticos.

A PDDE foi aplicada aos sistemas do Brasil, Colômbia, Estados Unidos, etc, com até 60 reservatórios e 6 variáveis para representação da tendência hidrológica. A descrição detalhada do método[11] encontra-se no Apêndice A deste trabalho.

### 1.5 - Limitações da PDDE

Como mencionado, a idéia principal do algoritmo PDDE é construir uma aproximação para a função de custo futuro através de aproximações de primeira ordem em determinados pontos. Isso requer que a função a ser aproximada seja **convexa** pois, caso contrário, a aproximação construída pelo algoritmo não será aderente à função e não representará um limite inferior para a mesma, como exemplifica a Figura 6.

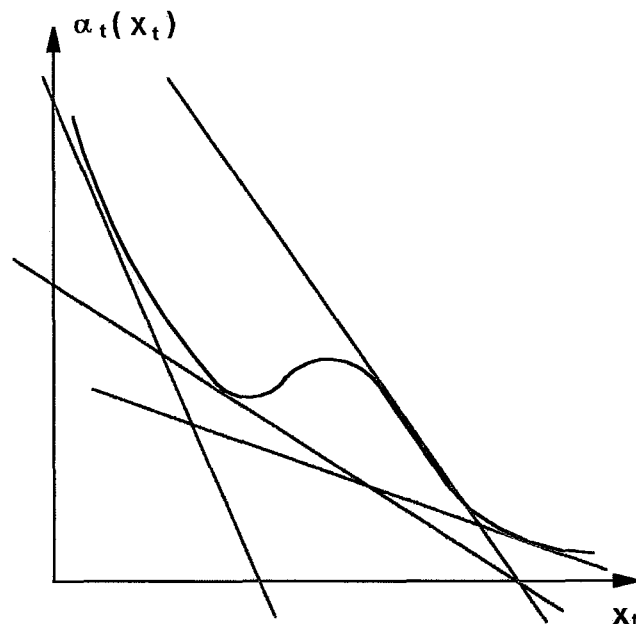


Figura 6 - Função de Custo Futuro não convexa

No problema de operação de um sistema hidrotérmico, as equações de balanço hídrico (I.2) e aquelas correspondentes a limites de armazenamento (I.3) e de turbinamento (I.4) são lineares, não afetando portanto a convexidade. As funções de custo de operação térmica são aproximadas por funções lineares por partes sem perda de informação. A dificuldade surge no termo não linear  $\rho(v) Q$  da equação de geração hidroelétrica (I.9), que pode tornar não convexa a função de custo futuro. Para contornar esse problema utiliza-se a aproximação  $\rho(v) = \rho = cte$ . Esta aproximação é razoável na maior partes dos países onde a variação de  $h(v)$  não é significativa, ou seja, a produção de energia elétrica é praticamente independente do

valor da altura de queda. Entretanto, no Brasil *os reservatórios não apresentam esta característica*, fazendo-se necessário a representação da variação da produtividade.

## **I.6 Objetivo do Trabalho**

O objetivo deste trabalho é investigar a convexidade do problema de otimização da operação energética e estabelecer uma solução adequada para a modelagem da variação da produtividade em função do armazenamento nos reservatórios do sistema em algoritmos de Programação Dinâmica Dual Estocástica [12].

## CAPÍTULO II

### ANÁLISE DE CONVEXIDADE - PROBLEMA COM UM ÚNICO RESERVATÓRIO

#### II.1 Visão Geral

A convexidade do problema de otimização da operação energética será inicialmente analisada para um sistema composto apenas por um único reservatório e uma térmica de custo 1 US\$/MWmed.

No último estágio do horizonte de planejamento a operação é trivial. O atendimento da demanda de energia é feito através da geração hidráulica até o valor da demanda ou até esgotar o volume armazenado. Neste caso, o atendimento será complementado com geração térmica. Portanto, a função de custo futuro será :

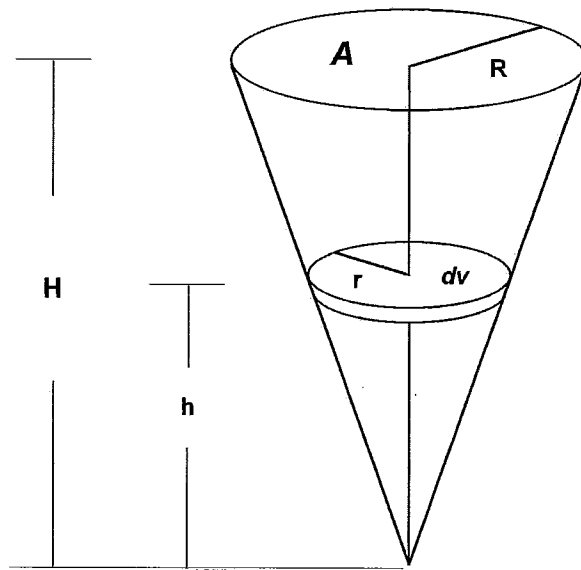
$$\alpha(v) = \max \left\{ 0, d - \int_0^v \rho(x) dx \right\} \quad (\text{II.1})$$

onde:

$\alpha(v)$       função de custo futuro;  
 $d$             demanda de energia em MWmed;  
 $\int_0^v \rho(x) dx$     energia que pode ser gerada ao se turbinar o volume armazenado no reservatório do sistema.

#### II.2 Reservatório na Forma de um Cone Reto

Supondo por simplicidade que o reservatório tenha a forma de um cone reto, como pode ser visto através da Figura 7, teremos as seguintes expressões para o volume armazenado e produtibilidade:



**Figura 7 - Reservatório representado de forma simplificada (cone reto)**

Foi visto em (I.8) que:

$$\rho(v) = K \eta \gamma g h(v) \quad (\text{II.2})$$

O volume do cone em função da altura é:

$$v = \frac{1}{3} \pi r^2 h \quad (\text{II.3})$$

Por sua vez  $r$  é dado por:

$$\frac{r}{R} = \frac{h}{H} \quad \Rightarrow \quad r = R \frac{h}{H} \quad (\text{II.4})$$

Substituindo (II.4) em (II.3) temos:

$$v = \frac{1}{3} \pi \left( R \frac{h}{H} \right)^2 h = \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{H^2} h^3 \quad (\text{II.5})$$

Da equação anterior, podemos explicitar o valor de  $h$ :

$$h = \left( \frac{3 H^2}{\pi R^2} v \right)^{1/3} \quad (\text{II.6})$$

Substituindo (II.6) em (II.2) temos:

$$\rho(v) = K \eta \gamma g \left( \frac{3 H^2}{\pi R^2} v \right)^{1/3} = k_1 v^{1/3} \quad (\text{II.7})$$



A energia que pode ser gerada com o volume armazenado  $v$  (EA), é dada então pela expressão:

$$EA = \int_0^v \rho(x) dx = k_2 v^{4/3} \quad (\text{II.8})$$

Conforme a expressão (II.1), para os estados de armazenamento em que não é possível atender totalmente a demanda com o volume armazenado, a parcela restante será atendida com geração térmica. O atendimento dessa parcela restante implica portanto em custos.

Substituindo a expressão (II.8) na expressão (II.1) e, considerando estados do sistema em que a energia armazenada é baixa o custo futuro de operação  $\alpha(v)$  é proporcional à diferença:  $d - k_2 v^{4/3}$

Podemos então escrever:

$$\alpha(v) = d - k_2 v^{4/3} \quad (\text{II.9})$$

derivando a expressão anterior em relação a  $v$ , temos:

$$\frac{\partial \alpha(v)}{\partial v} = -\frac{4}{3} k_2 v^{1/3} \quad (\text{II.10})$$

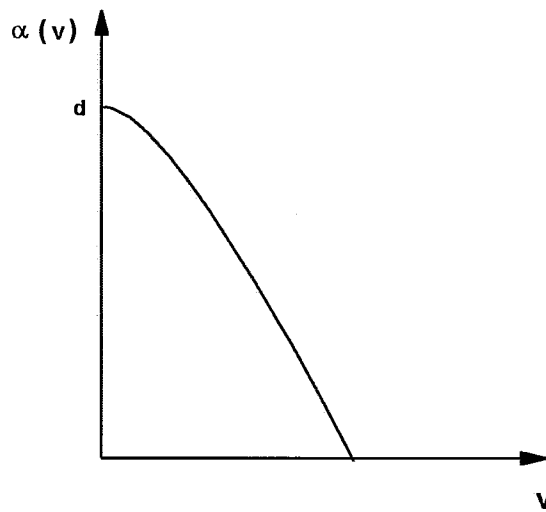
onde:

$$k_2 > 0$$

Pela expressão anterior  $\frac{\partial \alpha(v)}{\partial v}$  não é uma função monótona não decrescente de  $v$  e portanto  $\alpha(v)$  **não** é uma função convexa em  $v$ .

Sendo assim, a condição necessária para a resolução do problema por PDDE **não** é satisfeita.

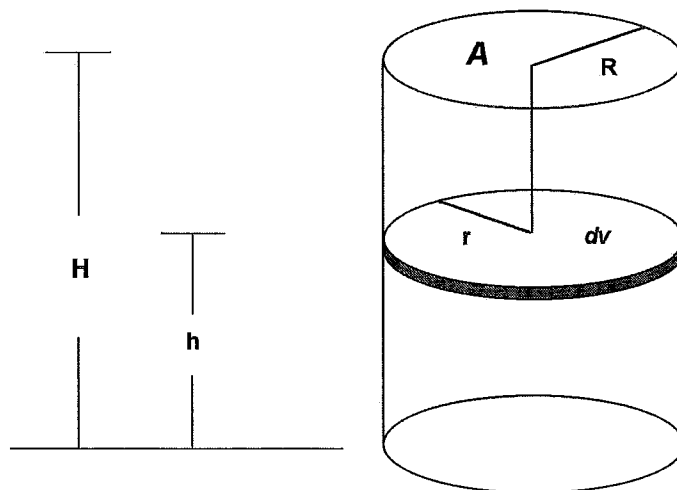
A Figura 8 a seguir mostra o gráfico da função de custo futuro expressa pela equação (II.9)



**Figura 8 - Função de Custo Futuro**

### II.3 Reservatório na Forma de um Cilindro

Consideremos agora a análise para um caso mais favorável onde a altura varia linearmente com o volume, para isto vamos supor que o reservatório tenha a forma de um cilindro como ilustrado através da Figura 9. Teremos, neste caso, as seguintes expressões para o volume armazenado e a produtividade:



**Figura 9 - Reservatório representado de forma simplificada (cilindro)**

Para o cilindro o volume como função da altura é:

$$v = A h \quad (\text{II.11})$$

onde:

$v$  é o volume correspondente à uma altura  $h$ ;

$A$  é a área da base do cilindro;

$h$  é a altura de queda.

Por sua vez  $h$  é dada por:

$$h = \frac{v}{A} = k_3 v \quad (\text{II.12})$$

Substituindo (II.12) em (I.2) teremos a seguinte expressão para a produtividade:

$$\rho(v) = K \eta \gamma g k_3 v = k_4 v \quad (\text{II.13})$$

A energia gerada pelo aproveitamento com esse reservatório é dada então pela expressão:

$$EA = \int_0^v \rho(x) dx = k_5 v^2 \quad (\text{II.14})$$

Seguindo os mesmos passos utilizados para o caso da representação do reservatório por um cone reto, substituiremos agora a expressão (II.14) em (II.1) para proceder a análise da representação através do cilindro:

$$\alpha(v) = d - k_5 v^2 \quad (\text{II.15})$$

derivando a expressão anterior em relação a  $v$ , temos:

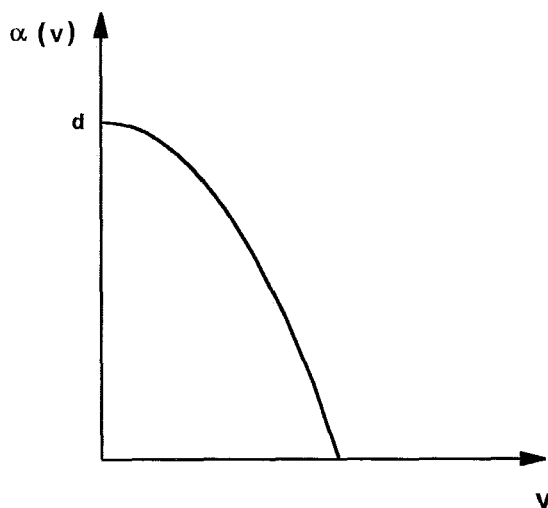
$$\frac{\partial \alpha(v)}{\partial v} = -2 k_5 v \quad (\text{II.16})$$

onde:

$$k_5 > 0$$

Pela expressão anterior verificamos que, mesmo para uma representação bem simplificada, representação do reservatório por um cilindro,  $\frac{\partial \alpha(v)}{\partial v}$  não é uma função monótona não decrescente de  $v$  e portanto  $\alpha(v)$  **não** é uma função convexa em  $v$ .

A Figura 10 a seguir mostra o gráfico da função de custo futuro expressa pela equação (II.15)



**Figura 10 - Função de Custo Futuro**

Sendo assim, podemos reafirmar que a função de custo futuro não é uma função convexa de  $v$ .

## CAPÍTULO III

### FORMULAÇÃO CONVEXA DO PROBLEMA DE OPERAÇÃO

Foi visto no Capítulo anterior que a representação da produtividade com o volume armazenado no reservatório nos leva à uma função de custo futuro não convexa, invalidando em princípio a aplicação da técnica de PDDE na solução do problema de otimização da operação energética.

Voltemos ao problema simples de apenas um reservatório na forma de um cone reto.

Como foi visto anteriormente, a expressão para a função de custo futuro no último estágio do período de planejamento é dada em (II.9) por:

$$\alpha(v) = d - k_2 v^{4/3} \quad (\text{III.1})$$

De (II.8) temos a expressão para a energia hidráulica que pode ser gerada ao se turbinar o volume do reservatório do sistema:

$$EA = k_2 v^{4/3} \quad (\text{III.2})$$

Substituindo a expressão (III.2) na expressão (III.1), temos:

$$\alpha(EA) = d - EA \quad (\text{III.3})$$

Temos agora uma função de custo futuro **convexa** em termos da nova variável energia.

Existe portanto, uma maneira de transformar o problema não convexo original num problema convexo onde se pode aplicar PDDE para obter a solução.

A transformação de variáveis utilizada tem toda uma interpretação física. Vejamos como são escritas as equações do problema em termos de energia.

#### **Equação de Balanço Hídrico**

Como a energia cinética do volume de água que aciona as turbinas é igual à energia potencial que esse mesmo volume possui quando chega ao reservatório, podemos transformar o volume afluente que chega à usina em energia afluente através da avaliação de **sua energia potencial**,

ou seja, o valor energético da afluência pode ser determinado quando ela **chega** ao reservatório e não quando ela é turbinada.

Podemos então escrever:

$$EAF_t = \rho(v_t) A_t \quad (III.4)$$

onde:

$\rho(v_t)$  produtibilidade, que é função do volume armazenado no início do estágio  $t$ ;

$A_t$  afluência ao sistema durante o estágio  $t$ ;

$EAF_t$  energia afluenta ao sistema durante o estágio  $t$ ;

Temos então a seguinte expressão para a equação de balanço hídrico:

$$EA_{t+1} = EA_t + \rho(v_t) A_t - GH_t - EVERT_t \quad (III.5)$$

onde:

$EA_t$  energia armazenada correspondente ao volume armazenado no início do estágio  $t$ ;

$GH_t$  energia hidráulica gerada pelo sistema no estágio  $t$ ;

$EVERT_t$  energia vertida no sistema no estágio  $t$ ;

Convém lembrar que o termo  $\rho(v) A_t$  é uma função côncava em  $v$  conforme visto nas equações (II.7) e (II.13). Como agora estamos trabalhando com energia e não com volume, podemos expressar a equação (III.4) como:

$$EAF_t = \rho(v_t) A_t = \rho'(EA_t) A_t \quad (III.6)$$

onde:

$\rho'(EA_t)$  produtibilidade em função da energia armazenada no início do estágio  $t$ ;

Vamos agora verificar se a característica de concavidade é mantida ao expressarmos a produtibilidade em função da energia armazenada. Da equação (II.8) podemos escrever o volume em função da energia armazenada:

$$v = k_6 (EA_t)^{3/4} \quad (III.7)$$

Repetindo a equação (II.7) temos:

$$\rho(v) = k_1 v^{1/3}$$

Substituindo (III.7) em (II.7) temos que:

$$\rho'(EA_t) = k_7 (EA_t)^{1/4} \quad (\text{III.8})$$

A partir de (III.8), verificamos que o termo  $\rho'(EA_t) A_t$  **também é côncavo** em  $EA_t$ .

Reescrevendo a equação (III.3), abatendo da demanda a ser atendida também o recurso da energia afluyente, temos:

$$\alpha(EA) = d - EAF - EA \quad (\text{III.9})$$

Substituindo (III.6) em (III.9) temos:

$$\alpha(EA) = d - \rho'(EA) A_t - EA \quad (\text{III.10})$$

Substituindo agora (III.8) em (III.10) e supondo uma afluência de  $1 \text{ m}^3/\text{s}$ , temos:

$$\alpha(EA) = d - k_7 (EA)^{1/4} A_t - EA \quad (\text{III.11})$$

Sabemos que  $k_7 (EA_t)^{1/4}$  é função côncava em  $EA$ , logo  $-k_7 (EA_t)^{1/4}$  é convexa em  $EA$ . Como  $-EA$  é também convexa, então a função de custo futuro  $\alpha(EA)$  é **convexa**.

O resultado obtido através destas análises é bastante conveniente pois vem de encontro às técnicas de representação de sistema equivalente[5] e [13], que transforma o conjunto de reservatórios do parque gerador hidroelétrico em um único reservatório de energia potencial e as afluências ao sistema em afluências energéticas equivalentes.

### **Equação de Limite de Armazenamento**

Para cada estágio ao se determinar o novo valor da energia armazenada este deve ser limitado à capacidade máxima de armazenamento do sistema que, por sua vez, pode variar ao longo do horizonte de planejamento devido à entrada de novos reservatórios no sistema.

$$EA_{t+1} \leq \bar{EA}_{t+1} \quad (\text{III.12})$$

onde:

$\bar{EA}_{t+1}$  Limite máximo de armazenamento no início do estágio  $t+1$ .

A expressão da energia que pode ser gerada com o deplecionamento do reservatório de uma usina a partir de um estado de volume inicial até um estado de volume final, pode ser escrita como:

$$EA = \int_{V_1}^{V_2} \rho(x) dx \quad (\text{III.13})$$

onde:

$V_2$  Volume final

$V_1$  Volume inicial

Fazendo o volume final igual ao volume máximo e o volume inicial igual ao volume mínimo do reservatório obtemos através da expressão (III.13) o valor da energia armazenável máxima do reservatório.

### **Equação de Limite Máximo de Geração Hidráulica**

Similarmente ao armazenamento, a geração hidráulica durante cada estágio é limitada ao seu valor máximo que também é variável ao longo do horizonte de planejamento devido à entrada no sistema de novas unidades geradoras.

$$GH_t \leq \overline{GH}_t \quad (\text{III.14})$$

onde:

$\overline{GH}_t$  Limite máximo de geração hidráulica do sistema no estágio  $t$ .

A geração hidráulica máxima de um aproveitamento hidroelétrico em função da energia armazenada é dado por:

$$\overline{GH}_t = \rho'(EA_t) \overline{Q} \quad (\text{III.15})$$

onde:

$\overline{Q}$  Limite máximo de turbinamento da usina.



## Custo Imediato de Operação

A cada estágio são definidos montantes de geração hidráulica e geração térmica para o atendimento da demanda de energia. O valor de geração térmica durante o estágio  $t$  será aquele obtido da resolução do seguinte problema de programação matemática:

$$C_t(GH_t) = \text{Min} \sum_{j=1}^{NUT} CT_j(GT_{t,j})$$

$$\text{s.a.} \tag{III.16}$$

$$GH_t + \sum_{j \in NUT} GT_{t,j} = D_t \tag{III.17}$$

$$GT_{t,j} \leq \overline{GT}_j \quad j = 1, \dots, NUT \tag{III.18}$$

onde:

$C_t(GH_t)$  custo imediato de operação no estágio  $t$ , função da geração hidráulica no estágio  $t$ ;

$NUT$  total de usinas térmicas;

$GT_{t,j}$  geração da  $j$ -ésima usina térmica no estágio  $t$ ;

$\overline{GT}_j$  capacidade máxima da  $j$ -ésima usina térmica;

$CT_j$  custo de geração da  $j$ -ésima usina térmica;

$D_t$  demanda de energia no estágio  $t$ .

A equação (III.17) é conhecida como equação de atendimento à demanda.

## CAPÍTULO IV

### CÁLCULO DAS APROXIMAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM NA PDDE

O problema de operação ótima de sistemas hidrotérmicos interligados pode então ser resolvido por Programação Dinâmica Dual. O subproblema de operação no algoritmo de PDDE é formulado como o seguinte problema de programação linear:

$$\alpha_t(X_t) = \text{Min} \left( CT \text{ GT}_t + \frac{1}{1+\beta} \alpha_{t+1}(X_{t+1}) \right)$$

$$\text{s.a:} \quad (IV.1)$$

$$EA_{t+1} + GH_t + EVERT_t = EA_t + \rho(EA_t) A_t \quad (IV.2)$$

$$GH_t + GT_t = D_t \quad (IV.3)$$

$$GH_t \leq \overline{GH}_t \quad (IV.4)$$

$$\underline{GT}_t \leq GT_t \leq \overline{GT}_t \quad (IV.5)$$

$$EA_{t+1} \leq \overline{EA}_{t+1} \quad (IV.6)$$

onde:

- $\alpha_t$  valor esperado do custo total de operação do estágio  $t$  até o final do período de planejamento;
- $X_t$  estado do sistema no início do estágio  $t$ , representado pela energia armazenada  $EA_t$  no início do estágio  $t$  e afluência ao sistema no mês anterior  $A_{t-1}$ ;
- $\beta$  taxa de desconto;
- $EA_t$  energia armazenada correspondente ao volume armazenado no início do estágio  $t$ ;
- $GH_t$  energia hidráulica gerada pelo sistema no estágio  $t$ ;
- $EVERT_t$  energia vertida no sistema no estágio  $t$ ;
- $\rho(EA_t)$  produtividade, que é função da energia armazenada no início do estágio  $t$ ;
- $A_t$  afluência ao sistema durante o estágio  $t$ ;
- $EAF_t$  energia afluenta ao sistema durante o estágio  $t$ ;

$GT_t$	geração da usina térmica no estágio $t$ ;
$CT$	custo de geração da usina térmica;
$D_t$	demanda de energia no estágio $t$ .
$\underline{GT}_t, \overline{GT}_t$	limites mínimo e máximo de geração da usina térmica;
$\overline{Q}$	limite máximo de turbinamento da usina do sistema;
$\overline{GH}_t$	limite máximo de geração hidráulica do sistema no estágio $t$ ;
$\overline{EA}_{t+1}$	limite máximo de armazenamento no início do estágio $t+1$ .

Como já visto anteriormente, para representar o efeito da variação da produtibilidade com a altura de queda é necessário se aplicar uma transformação de variáveis ao problema original para que este seja resolvido por PDDE.

Numa primeira etapa calcula-se a produtibilidade como função da energia armazenada  $\rho(EA_t)$ . De posse desta função podemos determinar para o sistema, ao início de cada estágio, a energia afluyente ( $EAF_t$ ) e a geração hidráulica máxima ( $\overline{GH}_t$ ) através das equações (IV.2) e (IV.4).

O problema de planejamento operativo formulado dessa maneira possui um espaço de estados caracterizado pelas seguintes variáveis:

- energia armazenada no início do estágio  $t$ ;
- tendência hidrológica representada pelas vazões afluentes nos  $p$  meses anteriores, ou seja, a vazão afluyente em um determinado mês pode ser escrita em função das vazões afluentes de  $p$  meses anteriores.

Supondo que a tendência hidrológica seja representada apenas pela vazão afluyente ao mês anterior,  $A_{t-1}$ , equivale a dizer que as vazões afluentes ao sistema seguem um processo auto-regressivo periódico de ordem 1 (caso particular do PAR( $p$ ) onde o vetor  $p$  é unitário)[4].

Podemos então escrever:

$$A_t = \varphi_{1,t} A_{t-1} + \xi_t \quad (IV.7)$$

onde:

$\varphi_{1,t}$  coeficiente auto-regressivo de ordem 1;

$\xi_t$  série de ruídos aleatórios independentes.

Conforme foi visto no Capítulo I, item I.4, a PDDE constrói iterativamente a função de custo futuro como uma função linear por partes. Segmentos lineares são gerados a partir de informações do problema dual, e podem ser vistos como aproximações locais de primeira ordem da função de custo futuro. Essas aproximações são obtidas a partir da determinação dos multiplicadores de Lagrange associados as equações (IV.2) e (IV.4) e medem as variações marginais da função objetivo em relação as variáveis de estado: energia armazenada no início do estágio  $t$  ( $EA_t$ ) e tendência hidrológica representada, neste caso, pela vazão afluente do mês anterior ( $A_{t-1}$ ).

Repetindo a equação de balanço hídrico (IV.2) temos:

$$EA_{t+1} + GH_t + EVERT_t = EA_t + \rho(EA_t) A_t$$

Substituindo (IV.7) em (IV.2), a equação de balanço hídrico será modificada para:

$$EA_{t+1} + GH_t + EVERT_t = EA_t + \rho(EA_t) (\varphi_{1,t} A_{t-1} + \xi_t) \quad (IV.8)$$

Repetindo também a equação de limite de geração hidráulica (III.16) temos:

$$GH_t \leq \rho(EA_t) \bar{Q}$$

Para o cálculo das derivadas do custo total de operação (função objetivo) em relação às variáveis de estado podemos aplicar a regra da derivação de uma função composta (Regra da Cadeia).

Observando a função objetivo sob o enfoque **DUAL** temos, a partir da equação de balanço hídrico (IV.8) e da equação de limite máximo de geração hidráulica (III.16), a seguinte expressão para a função de custo futuro:

$$\alpha_t(EA_t, A_{t-1}) = (\pi_{EA})_t [ EA_t + \rho(EA_t) (\varphi_{1,t} A_{t-1} + \xi_t) ] + (\pi_{GH})_t [\rho(EA_t) \bar{Q}] \quad (IV.9)$$

Derivando a expressão acima em relação à  $EA_t$  temos:

$$\frac{\partial \alpha_t}{\partial EA_t} = (\pi_{EA})_t \left( 1 + \frac{\partial \rho(EA_t)}{\partial EA_t} A_t \right) + (\pi_{GH})_t \frac{\partial \rho(EA_t)}{\partial EA_t} \bar{Q} \quad (IV.10)$$

onde:

$(\pi_{EA})_t$  multiplicador de Lagrange associado à equação de balanço hídrico.

$(\pi_{GH})_t$  multiplicador de Lagrange associado à equação de limite máximo de geração hidráulica.

Derivando agora a expressão (IV.9) em relação à  $A_{t-1}$ , temos:

$$\frac{\partial \alpha_t}{\partial A_{t-1}} = (\pi_{EA})_t \rho(EA_t) \varphi_{1,t} \quad (IV.11)$$

## CAPÍTULO V

### CASO EXEMPLO

A fim de avaliar os reflexos da consideração da variação da produtibilidade no cálculo das estratégias de operação de sistemas interligados, determinamos em uma primeira etapa, essas estratégias para dois sistemas hidrotérmicos (A e B) interligados considerando-se a produtibilidade constante. A seguir, estas estratégias foram calculadas considerando-se a produtibilidade variável.

Como já descrito anteriormente, no Capítulo IV, no cálculo das estratégias de operação a variação da produtibilidade é feita através da função  $\rho(EA_t)$  inserida nas equações de restrição (IV.2) e (IV.4) dos subproblemas de operação no algoritmo de PDDE. O caso particular de produtibilidade constante, ou seja, a não consideração da variação do coeficiente de produção com o armazenamento, é facilmente implementado fazendo-se  $\rho(EA_t) = cte$ .

Podemos assim determinar estratégias, ou melhor, funções de custo futuro  $\alpha_t(X_t)$  para ambos os casos. Uma vez calculadas essas funções, podemos **simular a operação** dos sistemas interligados utilizando essas funções para a determinação da **decisão ótima** (geração térmica e intercâmbio) a ser empregada a cada mês no atendimento da demanda de energia.

Essa decisão ótima é obtida resolvendo-se o subproblema de operação no algoritmo PDDE (resolução de um problema linear) supondo conhecidas as vazões afluentes aos sistemas interligados.

As vazões afluentes utilizadas poderiam ser aquelas correspondentes à série histórica de vazões naturais afluentes, verificadas ao longo dos últimos sessenta anos, único cenário disponível na prática. No entanto, por ser esta amostra considerada de tamanho pequeno para análises probabilísticas necessárias atualmente nas diversas atividades do planejamento e operação de sistemas hidrotérmicos, criou-se a necessidade da modelagem probabilística de afluências aos diversos aproveitamentos hidroelétricos ou a subsistemas. Os modelos estocásticos atualmente em uso, obtêm as características básicas da série histórica e são capazes de produzir séries sintéticas de vazões afluentes diferentes da série histórica porém igualmente prováveis.

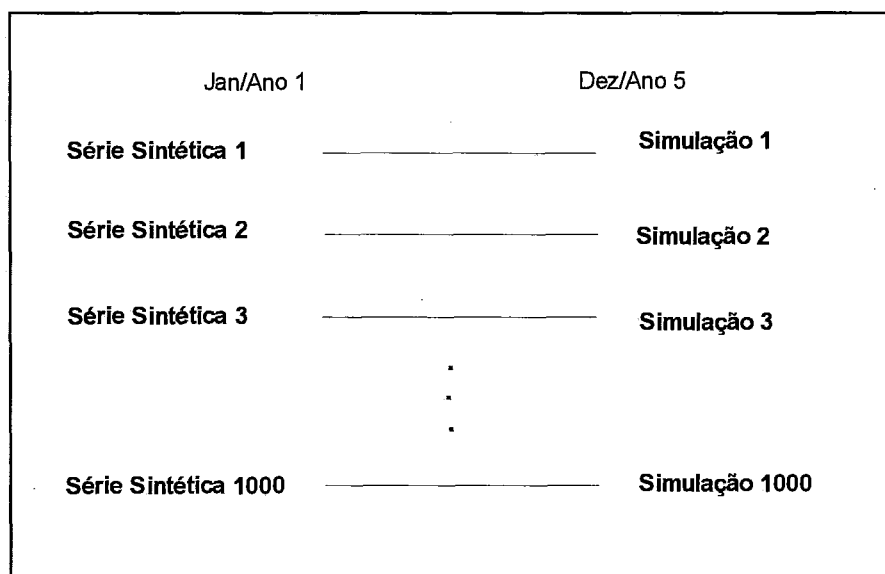
Os valores de vazões afluentes utilizados, neste caso exemplo, são obtidos a partir do ajuste de um modelo estocástico auto-regressivo periódico de ordem seis à série histórica de vazões mensais. Este modelo gera séries sintéticas de vazões mensais considerando que cada valor

mensal de vazão gerada pode ser escrito em função de até seis valores de vazões passadas, maiores detalhes da metodologia [4] encontram-se no Apêndice B deste trabalho.

Uma vez definidas as gerações térmicas em ambos os sistemas e o intercâmbio entre eles, a evolução do estado de cada sistema fica perfeitamente determinada a partir da equação de balanço hídrico.

Fica estabelecida assim uma sequência mensal de estados, para os dois subsistemas, obtida a partir de uma série sintética de vazões e de uma sequência de decisões ótimas. Temos assim uma simulação da operação interligada.

A avaliação do desempenho de cada uma destas estratégias será feita analisando-se os resultados de simulações da operação para um período de cinco anos, considerando um conjunto de 1000 séries sintéticas de vazões. Cada série sintética é também comumente denominada de cenário de vazões.



**Figura 11 - Esquema de Simulação por 1000 Séries Sintéticas**

O estado do sistema para este caso exemplo está representado por 14 variáveis (uma correspondente ao armazenamento e seis correspondentes à tendência hidrológica para cada sistema). Devemos observar que este caso é computacionalmente inviável para a PDE tradicional.

O sistema A tem uma usina hidroelétrica cuja capacidade máxima de armazenamento em termos de energia equivale ao sistema Sudeste brasileiro, 120.701 MWmês, e 8 usinas

térmicas. O sistema B é composto de uma usina de capacidade máxima de armazenamento em termos de energia equivalente ao subsistema Sul brasileiro, 12.222 MWmês, e 7 usinas térmicas.

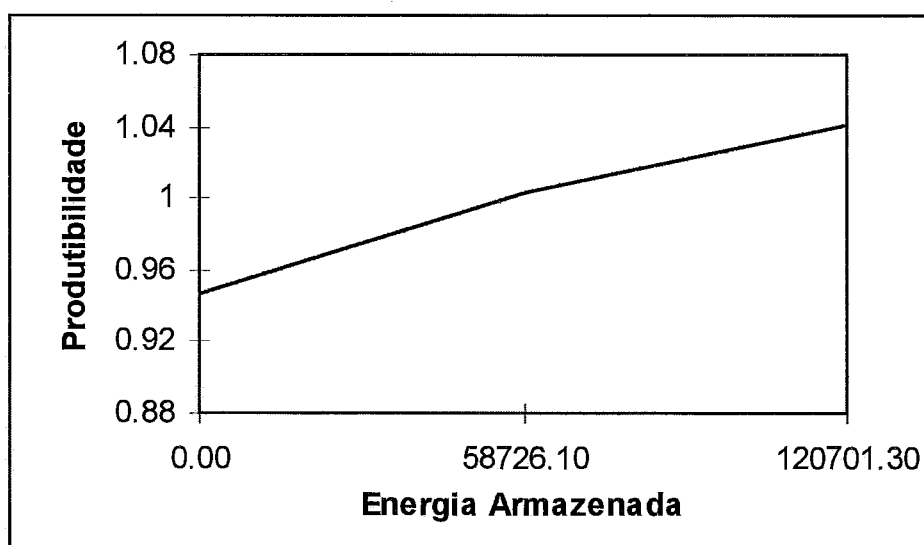
A energia armazenada inicial para cada sistema foi assumida igual a 50% da energia armazenável máxima.

A tabela 1 apresenta as principais características das usinas hidroelétricas que participam da configuração dos sistemas considerados.

**Tabela 1- Configuração hidroelétrica**

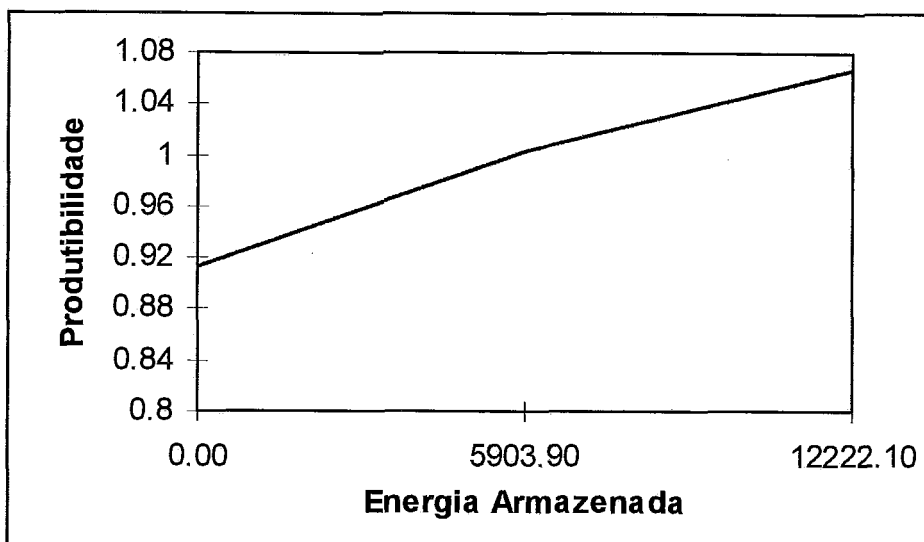
<b>Sistema</b>	<b>Volume Inicial (%)</b>	<b>Volume Máximo (<math>10^3 \text{ hm}^3</math>)</b>	<b>Volume Mínimo (<math>10^3 \text{ hm}^3</math>)</b>	<b>Capacidade Instalada (MW)</b>
A	50	238,0	23,0	32,3
B	50	129,0	9,5	8,1

A variação da produtividade com a energia armazenada nos Sistemas A e B é ilustrada através das Figuras 12 e 13.



**Figura 12 - Função Produtibilidade x Energia Armazenada - Sistema A**





**Figura 13 - Função Produtibilidade x Energia Armazenada - Sistema B**

As configurações das usinas térmicas estão descritas nas tabelas 2 e 3.

**Tabela 2 - Dados da Configuração Térmica do Subsistema A**

<b>USINA</b>	<b>Capacidade Instalada ( MW )</b>	<b>Custo de Operação ( US\$/MWh )</b>
Angra	657	8,5
Santa Cruz	608	24,99
Igarapé RV	125	27,29
Piratininga 3/4	270	33,75
Carioba	36	36,49
Piratininga 1/2	200	37,73
R.Silveira / S Gonçalo	32	43,43
<b>TOTAL</b>	<b>1928</b>	

**Tabela 3 - Dados da Configuração Térmica do Subsistema B**

<b>USINA</b>	<b>Capacidade Instalada (MW)</b>	<b>Custo de Operação (US\$/MWh)</b>
P.Médici/Candiota	446	11,92
Jorge Lacerda B	250	20,34
Jorge Lacerda A	232	22,96
Charqueadas	72	33,62
Figueira	20	34,12
Nutepa	24	40,66
Alegrete	66	44,51
São Jerônimo	17	55,37
<b>TOTAL</b>	<b>1127</b>	

O custo de déficit considerado para cada um dos subsistemas foi de 380 US\$/MWh.

A interligação entre os subsistemas é representada através de limites de intercâmbio. A tabela 4 contém as capacidades máximas de intercâmbio entre os subsistemas.

**Tabela 4 - Capacidades máximas de intercâmbio**

<b>CAPACIDADES DE INTERCÂMBIO ENTRE OS SUBSISTEMAS</b>	
SUBSISTEMA A → SUBSISTEMA B	3707
SUBSISTEMA B → SUBSISTEMA A	3768

O mercado de energia utilizado em todos os meses do período de estudo foi de 19800 MWh para o sistema A e de 4700 MWh para o sistema B.

A seguir, são apresentados os resultados, para dois casos exemplo, das simulações da operação do Sistema Interligado A / B para um período de estudo de cinco anos e 1000 cenários de vazões. Estes resultados foram obtidos utilizando-se para a resolução dos subproblemas um pacote de programação linear denominado XMP, XMP Software Inc, e o tempo de processamento de cada um destes casos foi de 3720 segundos em um microcomputador 486, 50MHz.

As simulações foram *sempre* feitas considerando-se a representação da produtividade variável uma vez que a operação real de uma usina hidroelétrica leva em conta este efeito.

Temos então os seguintes casos estudados:

CASO 1 -Cálculo das estratégias de operação considerando produtividade constante e simulação da operação considerando produtividade variável.

CASO 2 -Cálculo das estratégias de operação e simulação da operação considerando produtividade variável.

Ao compararmos os resultados encontrados através dos casos estudados verificamos que o *caso 2* leva o sistema interligado à uma operação mais econômica que o *caso 1*. O custo total esperado de operação para o *caso 1* foi de **US\$ 1843 milhões** e para o *caso 2* este custo foi de **US\$ 1786 milhões**.

As tabelas 5 e 6 apresentam os valores de risco anual de déficit e valor esperado de energia não suprida para cada ano do estudo.

**Tabela 5 - Risco Anual de Déficit e Valor Esperado da Energia não Suprida - CASO 1**

<b>RISCO ANUAL DE DÉFICIT E VALOR ESPERADO DA ENERGIA NÃO SUPRIDA (EENS)</b>				
<b>ANO</b>	<b>SUBSISTEMA A</b>		<b>SUBSISTEMA B</b>	
	<b>RISCO (%)</b>	<b>EENS MWmês</b>	<b>RISCO (%)</b>	<b>EENS MWmês</b>
1	2,9	361,2	10,7	321,6
2	3,9	771,9	11,5	615,1
3	4,3	1140,0	10,3	736,5
4	5,3	1635,7	10,0	953,5
5	4,3	1034,1	10,7	732,0
<b>TOTAL</b>		<b>4942,9</b>		<b>3358,7</b>

**Tabela 6 - Risco Anual de Déficit e Valor Esperado da Energia não Suprida - CASO 2**

<b>RISCO ANUAL DE DÉFICIT E VALOR ESPERADO DA ENERGIA NÃO SUPRIDA (EENS)</b>				
<b>ANO</b>	<b>SUBSISTEMA A</b>		<b>SUBSISTEMA B</b>	
	<b>RISCO (%)</b>	<b>EENS MWmês</b>	<b>RISCO (%)</b>	<b>EENS MWmês</b>
1	4,0	545,7	4,4	240,8
2	4,9	903,6	5,9	476,6
3	5,3	1143,1	5,9	548,5
4	5,6	1598,8	5,7	814,2
5	5,3	1065,0	6,0	595,4
<b>TOTAL</b>		<b>5256,2</b>		<b>2675,5</b>

As Figuras 14 e 15 a seguir ilustram, graficamente, o risco anual de déficit para cada subsistema, para cada um dos casos estudados.

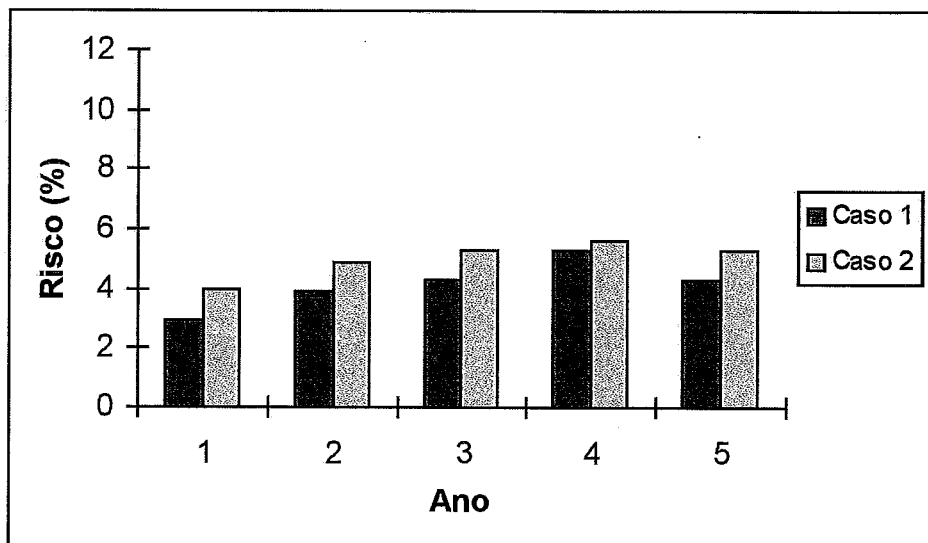


Figura 14 - Risco Anual de Déficit - Sistema A

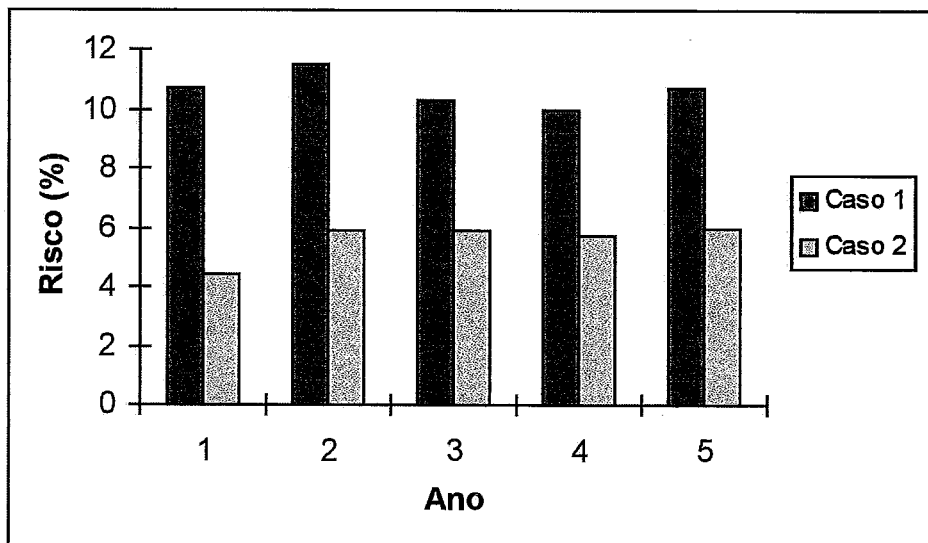
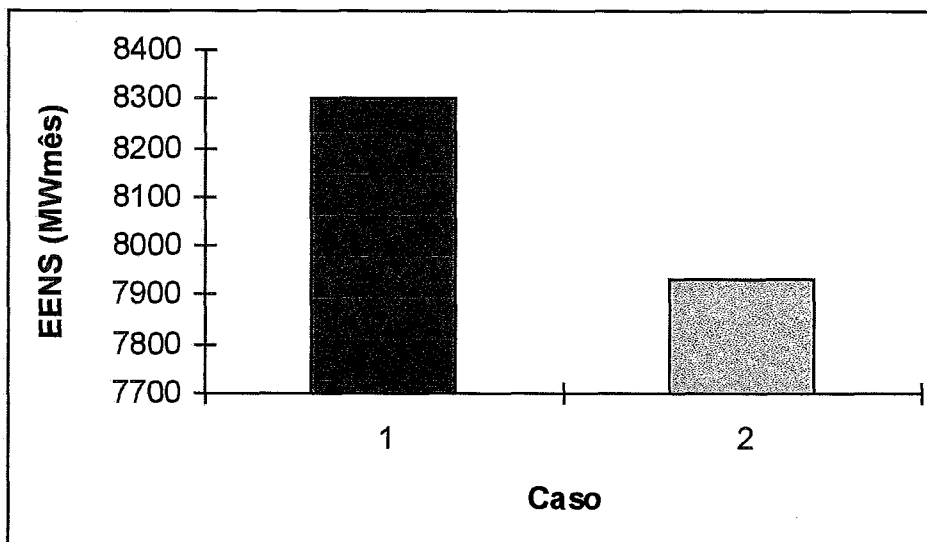


Figura 15 - Risco Anual de Déficit - Sistema B

Através da Figura 16 pode-se ver que a representação da produtividade variável leva a um

montante menor de valor esperado da energia não suprida global.



**Figura 16 - Valor Esperado de Energia Não Suprida Global**

A solução dos casos exemplo também fornecem os valores esperados dos montantes de geração térmica para cada período do horizonte de estudo, conforme as tabelas 7 e 8.

**Tabela 7 - Valor Esperado de Geração Térmica e Custo de Operação - CASO 1**

VALOR ESPERADO DE GERAÇÃO TÉRMICA E CUSTO DE GERAÇÃO				
ANO	SUBSISTEMA A		SUBSISTEMA B	
	GERAÇÃO TÉRMICA MWmês	CUSTO 10 <sup>3</sup> US\$	GERAÇÃO TÉRMICA MWmês	CUSTO 10 <sup>3</sup> US\$
1	4083,6	92,5	1966,5	39,7
2	1855,3	40,6	1041,5	18,2
3	2485,7	48,5	1414,9	22,0
4	1997,1	34,2	1169,8	17,3
5	1090,8	18,1	577,9	7,7
<b>TOTAL</b>	<b>11512,5</b>	<b>233,9</b>	<b>6170,6</b>	<b>104,9</b>

Tabela 8 - Valor Esperado de Geração Térmica e Custo de Operação - CASO 2

VALOR ESPERADO DE GERAÇÃO TÉRMICA E CUSTO DE GERAÇÃO				
ANO	SUBSISTEMA A		SUBSISTEMA B	
	GERAÇÃO TÉRMICA MWmês	CUSTO US\$	GERAÇÃO TÉRMICA MWmês	CUSTO US\$
1	4161,7	95,5	1989,4	41,3
2	1902,8	41,8	1071,1	19,0
3	2409,5	47,8	1346,5	21,4
4	1926,4	33,8	1047,8	14,8
5	977,0	16,2	483,2	6,5
<b>TOTAL</b>	<b>11377,4</b>	<b>235,1</b>	<b>5938,0</b>	<b>103,0</b>

As Figuras 17 e 18 mostram a evolução da geração térmica para cada um dos subsistemas, para cada um dos casos estudados.

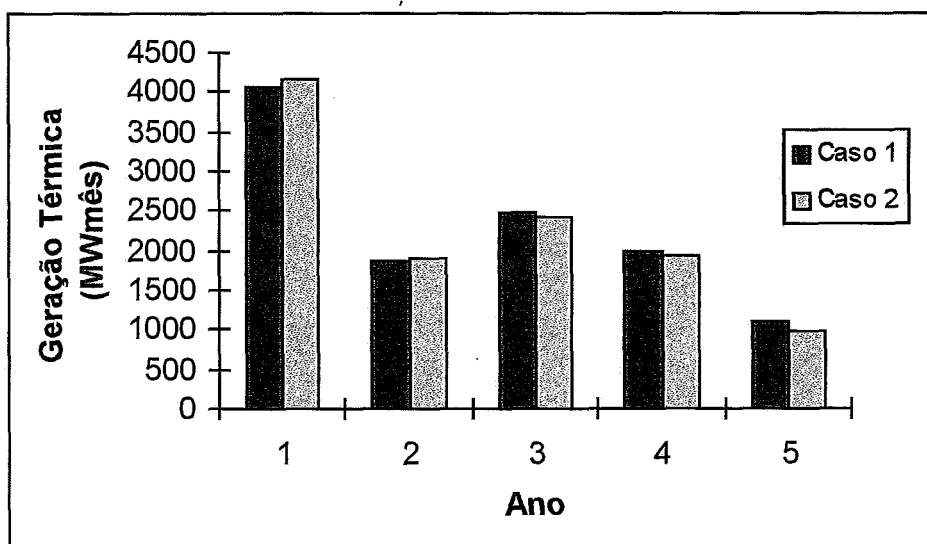
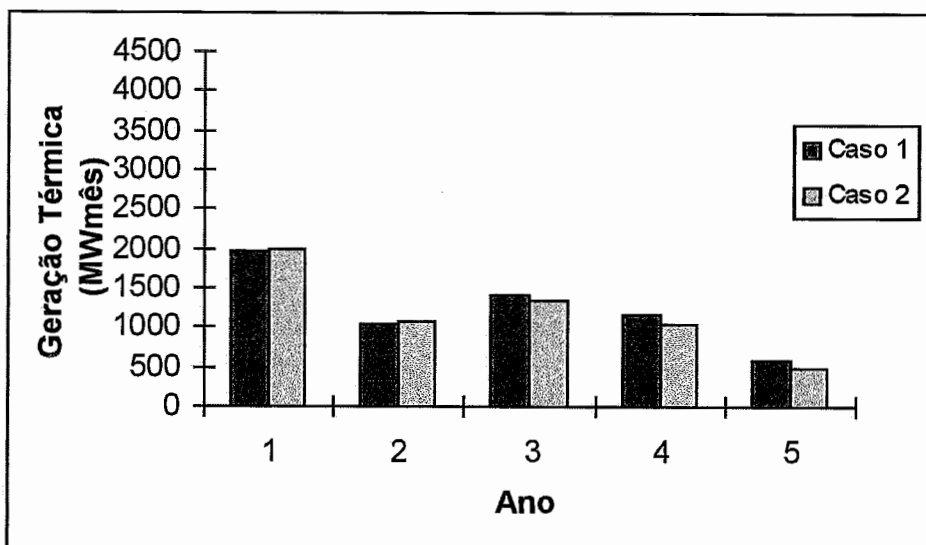


Figura 17 - Evolução da Geração Térmica - Subsistema A



**Figura 18 - Evolução da Geração Térmica - Subsistema B**

A tabela 9 a seguir mostra o intercâmbio líquido entre os sistemas que, para este caso exemplo, se verificou em média para todos os anos de estudo do Sistema A para o Sistema B.

**Tabela 9 - Intercâmbio Líquido**

INTERCÂMBIO LÍQUIDO		
SISTEMA A → SISTEMA B		
ANO	CASO 1	CASO 2
1	13110	21052
2	17295	17945
3	16443	16904
4	16547	17167
5	19076	15157

A Figura 19 a seguir ilustra graficamente a evolução do intercâmbio líquido entre subsistemas ao longo do período de estudo.



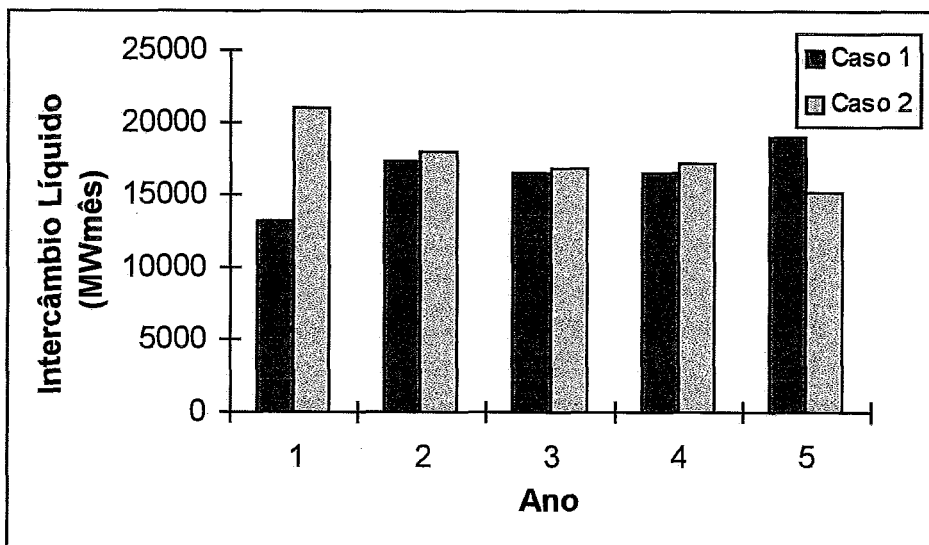


Figura 19 - Evolução do Intercâmbio Líquido entre Subsistemas

A economia observada se deve ao fato de que as funções de custo futuro, que determinam a decisão ótima a cada estágio do problema no *caso 2*, contém mais informações sobre o estado do sistema ao considerar a variação da produtividade tanto na etapa de cálculo das estratégias como na etapa de simulação.

A consideração da representação da variação da produtividade, permite ao sistema identificar, através das funções de custo futuro, que perdas de altura de queda nos reservatórios implicam em perdas de energia armazenada e **também** em perdas de energia afluente. Sendo assim temos efeitos cumulativos, o que não ocorre no *caso 1*.

Ao compararmos os níveis de geração térmica nos dois subsistemas tanto no *caso 1* quanto no *caso 2*, verificamos que estes valores não são significativamente diferentes.

No entanto percebemos que houve uma redução no valor esperado da energia não suprida do primeiro para o segundo caso. Desta forma, podemos concluir que a redução do custo total esperado de operação deve ser atribuída à esta redução.

Se observarmos agora a tabela 9, verificamos que para o *caso 2* há um aumento de transferência de energia entre os subsistemas.

Isto se deve ao fato de que as estratégias calculadas no *caso 2* se antecipam às estratégias obtidas no *caso 1* no que se refere ao intercâmbio entre os sistemas, ou seja, as transferências

de energia ocorrem mais prematuramente, o que reduz a probabilidade de déficits futuros ou pelos menos a profundidade destes, no atendimento à demanda de energia.

Sendo assim, temos que a consideração da variação da produtividade no cálculo das estratégias de operação do sistema hidrotérmico leva a uma operação mais econômica. Neste caso exemplo a economia foi de **3,1%**, que representa **US\$ 57 milhões** em cinco anos. Este valor corresponde a uma redução no valor esperado de energia não suprida global de **369,9 MWmês**.

Cabe ressaltar que, atualmente os modelos de cálculo de estratégias ótimas de operação para o sistema hidrotérmico brasileiro, utilizam Programação Dinâmica Estocástica tradicional. No entanto, já vem sendo desenvolvido um novo modelo de cálculo de estratégias onde se utiliza a técnica de Programação Dinâmica Dual Estocástica e onde este trabalho se enquadra.

## CAPÍTULO VI

### CONCLUSÕES E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

#### VI.1 - Conclusões

Esta tese apresentou uma metodologia para a representação da variação da produtividade com o volume armazenado no reservatório de um sistema hidrotérmico, capaz de possibilitar a resolução do problema de planejamento da operação energética utilizando algoritmos de Programação Dinâmica Dual Estocástica.

Foi demonstrado que ao se aplicar uma transformação de variáveis para representar a variação da produtividade, o problema originalmente não convexo torna-se convexo e pode ser formulado de forma compatível com as técnicas de otimização utilizadas.

A aplicação da metodologia foi ilustrada através de um caso exemplo, utilizando-se um sistema real de geração de energia elétrica, permitindo avaliar o efeito da representação da produtividade variável nos custos totais esperados de operação.

O estudo apresenta uma redução nestes custos da ordem de 3,1%, o que representa uma economia de aproximadamente US\$ 12 milhões em cada ano do horizonte de estudo, ao se aplicar a metodologia proposta.

#### VI.2 - Desenvolvimentos Futuros

Extensão da metodologia proposta para sistemas hidrotérmicos com múltiplos reservatórios em cascata.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Terry, L.A., Pereira, M.V.F., Araripe Neto, T.A., Silva, L.F.C.A., Sales, P.R.H., "Coordinating the Energy Generation of the Brazilian National Hydrothermal Electrical Generating System", *INTERFACES*, N° 16, January-February - 1986.
- [2] Brito, S.S., Camozzato, I., Almeida, J.E.B., Pantoja, J.F.A.O., "Aplicação da Programação Dinâmica Estocástica na Determinação de Decisões Ótimas de Operação para um Sistema Hidrotermoelétrico - III SOBRAPO - São Paulo - 1970.
- [3] Araripe Neto, T.A., Kligerman, A.S., Negrini, M., Reis Neto, J.L., "A Experiência do GCOI na Coordenação do Planejamento da Operação Energética do Sistema Hidrotérmico Brasileiro - VIII SNPTEE - São Paulo - 1985.
- [4] Maceira, M.E.P., "Operação Ótima de Reservatórios com Previsão de Afluências", Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, Março 1989.
- [5] Terry, L.A. et al., "Modelo a Sistema Equivalente - Descrição Geral.", *Relatório Técnico CEPEL 1705/80*, 1980.
- [6] GCOI, SCEN/GTMC, "BACUS, Determinação de Intercâmbios de Energia entre Subsistemas Equivalentes pela Equalização do Valor da Água", Relatório n° 1/1987.
- [7] Pereira, M.V.F., Pinto, L.M.V.G., "Stochastic Optimization of a Multireservoir Hydroelectric System: A Decomposition Approach", *Water Resources Research*, Vol. 21, N° 6, pages 779-792, June/1985.
- [8] Pereira, M.V.F., "Optimal Stochastic Operations of Large Hydroelectric Systems", *Electrical Power & Energy Systems*, Vol. 11, N° 3, pages 161-169, July/1989.
- [9] Gorestin, B., Campodonico, N.M., Costa, J.P., Pereira, M.V.F., "Stochastic Optimization of a Hydro-Thermal System Including Network Constraints", *IEEE Transactions on PS*, Vol. 7, N° 2, May/1992.
- [10] Benders, J.F., "Dynamic Programming" - Princeton University Press - 1957.
- [11] Maceira, M.E.P., "Programação Dinâmica Dual Estocástica Aplicada ao Planejamento da Operação Energética de Sistemas Hidrotérmicos com Representação do Processo Estocástico de Afluências por Modelos Auto-Regressivos Periódicos", *Relatório Técnico CEPEL 237/93*, 1993.

- [12] Suanno, C.M., Maceira, M.E.P.,Costa,J.P., "Representação da Variação da Produtibilidade no Algoritmo de Programação Dinâmica Dual Estocástica - Projeto Newave", *Relatório Técnico CEPEL 153/95*, 1995.
- [13] Arvantidis,N.V., Rosing, J., "Composite Representation of a Multireservoir Hydroelectric Power Sistem - IEEE Transactions on Power Apparatus and System - Vol. 89, 319-326 - 1970.

## APÊNDICE A

### Programação Dinâmica Dual - PDD

#### Programação Dinâmica Dual Determinística

Seja o problema de operação hidrotérmica em que a afluência a cada usina hidroelétrica, em qualquer estágio do período de planejamento, é conhecida. Este problema em apenas dois estágios pode ser representado por:

$$z = \text{Min } c_1 x_1 + c_2 x_2 \tag{A.1}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } \quad & A_1 x_1 \geq b_1 \\ & E_1 x_1 + A_2 x_2 \geq b_2 \end{aligned}$$

E pode ser interpretado como um processo de decisão em dois estágios.

1º estágio      escolhe-se-se uma decisão  $x_1$  viável,  $x_1^*$ , tal que  $A x_1^* \geq b_1$ .

2º estágio      dada a decisão  $x_1^*$ , resolve-se o problema de otimização do 2º estágio:

$$\text{Min } c_2 x_2 \tag{A.2}$$

$$\text{s.a. } A_2 x_2 \geq b_2 - E_1 x_1^*$$

onde  $x_1^*$ , por ser conhecido, passa para o lado direito do conjunto de restrições do problema.

Os vetores  $x_1$  e  $x_2$  representam os volumes finais das usinas hidroelétricas, as vazões turbinadas, as gerações térmicas, etc., no primeiro e segundo estágio respectivamente. E o objetivo do processo é minimizar  $c_1 x_1 + c_2 x_2$ .

Observa-se que  $c_2 x_2^*$ , onde  $x_2^*$  é a solução ótima do problema de 2º estágio, é uma função da decisão  $x_1^*$ , do problema de 1º estágio. Logo, podemos escrever:

$$\alpha_1(x_1) = \text{Mín } c_2 x_2 \tag{A.3}$$

$$\text{s.a. } A_2 x_2 \geq b_2 - E_1 x_1$$

E sendo  $\alpha_1(x_1)$  a solução ótima do problema (A.3), reescreve-se o problema original (A.1) como:

$$\text{Mín } c_1 x_1 + \alpha_1(x_1) \tag{A.4}$$

$$\text{s.a. } A_1 x_1 \geq b_1$$

Dessa forma, pode-se entender  $\alpha_1(x_1)$  como uma função que fornece informações sobre as consequências da decisão  $x_1$  no futuro.

O princípio de decomposição de Benders é uma técnica que permite construir, de forma iterativa, aproximações para a função  $\alpha_1(x_1)$ , baseada na solução do problema de 2º estágio. De forma simplificada, os problemas de 1º estágio e 2º estágio são resolvidos, como se segue:

1. Adote uma aproximação para  $\hat{\alpha}_1(x_1)$
2. Resolva o problema de 1º estágio, obtendo-se  $x_1^*$
3. Dado  $x_1^*$ , resolva o problema de 2º estágio, cuja solução é dada por  $x_2^*$
4. Associados a solução do problema de 2º estágio, existem os multiplicadores de Lagrange, que medem variações na função objetivo devido a variações marginais em  $x_1$ . Esses multiplicadores são usados para construir uma aproximação mais precisa  $\hat{\alpha}_1(x_1)$
5. Retorne ao passo (2)

O comportamento da função custo futuro,  $\alpha_1(x_1)$ , pode ser caracterizado a partir do dual do problema de 2º estágio, sob a hipótese de linearidade deste problema. Seja o dual do problema (A.3):

$$\alpha_1(x_1) = \text{Max } \pi (b_2 - E_1 x_1) \tag{A.5}$$

$$\text{s.a. } \pi A_2 \leq c_2$$

onde o vetor  $\pi$  representa as variáveis duais.

O conjunto de restrições  $\pi A_2 \leq c_2$  define uma região viável para o problema (A.5) que não depende da decisão de 1º estágio  $x_1$ . Da teoria de programação linear, sabe-se que esta região é um poliedro convexo, e pode ser caracterizada pelo conjunto de pontos extremos ou vértices  $\pi = \{\pi^1, \pi^2, \dots, \pi^p\}$ . Como a solução ótima de um problema de programação linear sempre corresponde a um vértice da região viável, o problema (A.5) pode ser resolvido por enumeração:

$$\text{Max } \pi^i (b_2 - E_1 x_1) \tag{A.6}$$

$$\pi^i \in \pi$$

O problema (A.6) pode ser reescrito da seguinte forma:

$$\begin{aligned} &\text{Min } \alpha \\ &\text{s.a. } \alpha \geq \pi^1 (b_2 - E_1 x_1) \\ &\quad \alpha \geq \pi^2 (b_2 - E_1 x_1) \\ &\quad \vdots \\ &\quad \alpha \geq \pi^p (b_2 - E_1 x_1) \end{aligned} \tag{A.7}$$

sendo  $\alpha$  uma variável escalar.

Por ser  $\alpha$  maior ou igual a cada  $\pi^i (b_2 - E_1 x_1)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , será maior ou igual ao maior deles. Como a função objetivo do problema (A.7) é minimizar  $\alpha$ , pelo menos uma restrição

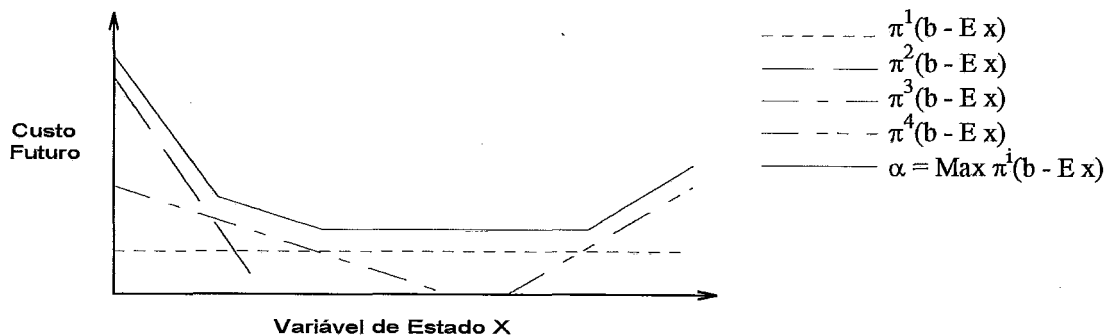


estará ativa na solução ótima. Portanto, a solução deste problema é igual a solução ótima do problema (A.6), e consequentemente, igual a solução ótima do problema (A.5).

Em um problema de programação linear, o valor da função objetivo do problema primal e do problema dual coincidem na solução ótima. Como o problema (A.7) é equivalente ao problema (A.5), pode-se concluir que as restrições  $\alpha \geq \pi^i (b_2 - E_1 x_1)$  do problema (A.7) definem a função  $\alpha_1(x_1)$  do problema original (A.4). Este problema pode então ser reescrito como:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & c_1 x_1 + \alpha \\
 \text{s.a.} \quad & A_1 x_1 \geq b_1 \\
 & \pi^1 (b_2 - E_1 x_1) - \alpha \leq 0 \\
 & \pi^2 (b_2 - E_1 x_1) - \alpha \leq 0 \\
 & \quad \quad \quad \vdots \\
 & \pi^p (b_2 - E_1 x_1) - \alpha \leq 0
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

onde  $\alpha$  corresponde ao valor de uma função convexa definida por restrições lineares do tipo  $\pi^i (b_2 - E_1 x_1)$ , e os  $\{\pi^i\}$  são os coeficientes dos hiperplanos suporte:



**Figura A1 - Interpretação Geométrica da Função Custo Futuro**

Logo, o problema original (A.1) pode ser escrito somente em função das variáveis do problema de 1º estágio mais a variável escalar  $\alpha$ .

O conjunto de restrições  $\pi^i (b_2 - E_1 x_1) - \alpha \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, p$ , pode ter grandes dimensões, porém somente algumas delas estarão ativas na solução ótima. Isto sugere o uso de técnicas

de relaxação, base do algoritmo de decomposição de Benders. A idéia é obter, iterativamente, um subconjunto desses vértices e construir, a cada iteração, uma aproximação mais precisa, para a função custo futuro.

O algoritmo *programação dinâmica dual (PDD)* em dois estágios é, então descrito pelos seguintes passos:

a Faça  $J = 0$ ; limite superior  $\bar{z} = +\infty$ ; aproximação inicial da função custo futuro  $\hat{\alpha}_1(x_1) = 0, \forall x_1$  (isto significa que não está disponível nenhuma informação sobre o conjunto de pontos extremos ou vértices  $\pi$ )

b Resolva o problema relaxado

$$\begin{aligned} \text{Min } & c_1 x_1 + \hat{\alpha} \\ & A_1 x_1 \geq b_1 \\ & \pi^j (b_2 - E_1 x_1) - \hat{\alpha} \leq 0 \quad j = 1, \dots, J \end{aligned} \tag{A.9}$$

c Seja  $(x_1^*, \alpha^*)$  a solução ótima do problema (12). Definindo:

$$\underline{z} = c_1 x_1^* + \hat{\alpha}^* \tag{A.10}$$

Pode-se concluir que  $\underline{z}$  é um limite inferior para a solução do problema original (A.4), pois

o problema (A.8) é uma versão relaxada do problema (A.7).

d De posse da decisão  $x_1^*$ , resolva o problema de 2º estágio

$$\alpha_1(x_1^*) = \text{Min } c_2 x_2 \tag{A.11}$$

$$\text{s.a. } A_2 x_2 \geq b_2 - E_1 x_1^*$$

e Seja  $x_2^*$  a solução ótima do problema (A.11). O par  $(x_1^*, x_2^*)$  é uma solução viável do problema (A.7), mas não necessariamente a solução ótima. Portanto,

$$\bar{z} = \text{Min } \{\bar{z}, c_1 x_1^* + c_2 x_2^*\} \tag{A.12}$$

é um limite superior da solução ótima.

- f Seja TOL uma tolerância pré-especificada. Verifique se  $(\bar{z} - z \leq \text{TOL})$ . Em caso afirmativo, a solução ótima é o par  $(x_1^*, x_2^*)$  associado a  $\bar{z}$ . Caso contrário, vá para (g).
- g Seja  $\pi^*$  o vetor de multiplicadores simplex associados às restrições do problema (A.11). Sabe-se da teoria de programação linear que este vetor é uma solução básica viável do problema dual (A.5), e portanto um vértice da região viável  $\pi A_2 \leq c_2$ . Este vértice pode ser usado para formar uma nova restrição do tipo  $\pi^* (b_2 - E_1 x_1) - \alpha \leq 0$ , denominada *corte de Benders*, que será adicionada ao problema relaxado (A.8).

Seja  $w^*$  o valor da solução ótima do problema (A.11) e  $\pi^*$  o vetor de multiplicadores simplex associado. Da igualdade de soluções ótimas dos problemas primal e dual podemos escrever:

$$w^* = \pi^* (b_2 - E_1 x_1^*) \quad (\text{A.13})$$

Colocando  $(\pi^* b_2)$  em evidência, obtem-se:

$$\pi^* b_2 = w^* + \pi^* E_1 x_1^*$$

Substituindo na expressão  $\pi^* (b_2 - E_1 x_1) - \alpha \leq 0$ , obtem-se uma expressão alternativa para o corte de Benders:

$$w^* + \pi^* E_1 (x_1^* - x_1) - \alpha \leq 0 \quad (\text{A.14})$$

- h Faça  $J = J + 1$ ;  $\pi^J = \pi^*$ ; Vá para (b).

É importante observar que neste algoritmo não há necessidade da discretização do espaço de estados  $x$ . A cada iteração, uma nova aproximação da função custo futuro é gerada em torno do ponto obtido a partir da solução do problema de 1º estágio,  $x_1^*$ . Isto significa que, a cada iteração, uma nova restrição linear (com coeficiente dado por  $\pi^*$ ) é adicionada à aproximação  $\hat{\alpha}_1(x_1)$ .

No caso de problemas multi-estágios o algoritmo PDD pode ser estendido da seguinte forma:

$$\text{Min } c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_T x_T \tag{A.15}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } A_1 x_1 &\geq b_1 \\ E_1 x_1 + A_2 x_2 &\geq b_2 \\ E_2 x_2 + A_3 x_3 &\geq b_3 \\ &\vdots \\ E_{T-1} x_{T-1} + A_T x_T &\geq b_T \end{aligned}$$

O problema anterior pode ser representado por:

$$\text{Min } c_1 x_1 + \alpha_1(x_1) \tag{A.16}$$

$$\text{s.a. } A_1 x_1 \geq b_1$$

onde  $\alpha_1(x_1)$  representa as consequências da decisão de 1º estágio,  $x_1$ , nas decisões dos demais estágios.

A função  $\alpha_1(x_1)$  é calculada através de:

$$\alpha_1(x_1) = \text{Min } c_2 x_2 + \dots + c_T x_T \tag{A.17}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } A_2 x_2 &\geq b_2 - E_1 x_1 \\ E_2 x_2 + A_3 x_3 &\geq b_3 \\ &\vdots \\ E_{T-1} x_{T-1} + A_T x_T &\geq b_T \end{aligned}$$

Repetindo este procedimento (T-2) vezes obtem-se:

$$\alpha_{T-2}(x_{T-2}) = \text{Min } c_{T-1} x_{T-1} + \alpha_{T-1}(x_{T-1}) \quad (\text{A.18})$$

$$\text{s.a. } A_{T-1} x_{T-1} \geq b_{T-1} - E_{T-2} x_{T-2}$$

onde  $\alpha_{T-1}(x_{T-1})$  é a função do T-ésimo estágio:

$$\alpha_{T-1}(x_{T-1}) = \text{Min } c_T x_T \quad (\text{A.19})$$

$$\text{s.a. } A_T x_T \geq b_T - E_{T-1} x_{T-1}$$

Dessa forma uma estratégia de solução do problema multi-estágios é:

- a Faça  $J = 0$ ; limite superior  $\bar{z} = +\infty$ ; aproximação inicial da função custo futuro ( $\hat{\alpha}_t(x_t) = 0$ ,  $t = 1, \dots, T$ ),  $\forall x_t$  (isto significa que não está disponível nenhuma informação sobre o conjunto de pontos extremos ou vértices  $\pi$  associados a cada estágio).
- b Resolva o problema aproximado de 1º estágio:

$$\text{Min } c_1 x_1 + \hat{\alpha}_1 \quad (\text{A.20})$$

$$\text{s.a. } A_1 x_1 \geq b_1$$

$$\pi_2^j (b_2 - E_1 x_1) - \hat{\alpha}_1 \leq 0 \quad j = 1, \dots, J$$

solução ótima:  $(x_1^*, \hat{\alpha}_1^*)$

- c calcule  $\underline{z}$  pela expressão (A.10).
- d Repita para  $t = 2, \dots, T$  (simulação "forward")

Dado  $x_{t-1}^*$ , resolva o problema aproximado do t-ésimo estágio:

$$\hat{\alpha}_{t-1}(x_{t-1}) = \text{Min } c_t x_t + \hat{\alpha}_t \quad (\text{A.21})$$

s.a.  $A_t x_t \geq b_t - E_{t-1} x_{t-1}^*$  (representam restrições do estágio t)

$$\pi_{t+1}^j (b_{t+1} - E_t x_t) - \hat{\alpha}_t \leq 0$$

ou  $w_{t+1}^j + \pi_{t+1}^j E_t (x_t^* - x_t) - \hat{\alpha}_t \leq 0 \quad j = 1, \dots, J$  (representam a aproximação da função custo futuro  $\hat{\alpha}_t(x_t)$ )

(exceto para  $t = T$ , onde  $\hat{\alpha}_T$  é sempre igual a zero)

solução ótima:  $(x_t^*, \hat{\alpha}_t^*)$

e O vetor  $(x_1^*, \dots, x_T^*)$  é uma solução viável do problema (A.15), mas não necessariamente a solução ótima. Portanto,

$$\bar{z} = \text{Min } \{ \bar{z}, \sum_{t=1}^T c_t x_t^* \} \quad (\text{A.22})$$

é um limite superior da solução ótima.

f Seja TOL uma tolerância pré-especificada. Verifique se  $(\bar{z} - \underline{z} \leq \text{TOL})$ . Em caso afirmativo, a solução ótima é o par  $(x_1^*, \dots, x_T^*)$  associado a  $\bar{z}$ . Caso contrário, vá para (g).

g Faça  $J = J + 1$ .

Repita para  $t = T, \dots, 2$  (recursão "backward")

Resolva o problema de otimização:

$$\text{Min } c_t x_t + \hat{\alpha}_t \quad (\text{A.23})$$

s.a.  $A_t x_t \geq b_t - E_{t-1} x_{t-1}^*$

$$\pi_{t+1}^j (b_{t+1} - E_t x_t) - \hat{\alpha}_t \leq 0$$

$$\text{ou } w_{t+1}^j + \pi_{t+1}^j E_t(x_t^* - x_t) - \hat{\alpha}_t \leq 0 \quad j = 1, \dots, J$$

(exceto para  $t = T$ , onde  $\hat{\alpha}_T = 0$ )

Seja  $\pi_t^J$  o vetor de multiplicadores simplex associado ao conjunto de restrições do problema (A.23) na solução ótima.  $\pi_t^J$  medem a variação do custo de operação do estágio  $t$  até o final do período de planejamento  $T$  devido a variações marginais nos níveis de armazenamento dos reservatórios no início do estágio  $t$  (ou final do estágio  $(t-1)$ ), representados por  $x_{t-1}^*$ . Estes multiplicadores são usados para formar uma nova restrição do tipo  $\pi_t^J (b_t - E_{t-1} x_{t-1}) - \hat{\alpha}_{t-1} \leq 0$  (*corte de Benders*) que será adicionada à função  $\hat{\alpha}_{t-1}(x_{t-1})$ , obtendo-se uma nova aproximação.

h Vá para (b).

Observa-se que o passo (d) do algoritmo PDD (simulação forward) tem dois objetivos:

1. cálculo de um limite superior  $\bar{z}$
2. seleção dos pontos  $(x_t^*, t = 1, \dots, T)$ , em torno dos quais são geradas novas aproximações para função custo futuro

## Programação Dinâmica Dual Estocástica

Uma característica importante do algoritmo de programação dinâmica é a capacidade de representar problemas de otimização estocástica. No problema de operação hidrotérmica significa que é possível representar a estocasticidade das afluições aos reservatórios.

É possível estender o algoritmo PDD para problemas de otimização estocástica, em que o problema de 2º estágio depende dos valores que uma ou mais variáveis aleatórias podem assumir. Por exemplo, supondo que o vetor  $b$  no problema (4) possa assumir  $m$  valores,  $b_1, b_2, \dots, b_m$ , com probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_m$  respectivamente ( $p_1 + p_2 + \dots + p_m = 1$ ), o problema consiste em determinar a estratégia que minimiza o valor esperado do custo de operação:

$$z = \text{Min } c_1 x_1 + p_1 c_2 x_{21} + p_2 c_2 x_{22} + \dots + p_m c_2 x_{2m} \quad (\text{A.24})$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & A_1 x_1 \geq b_1 \\ & E_1 x_1 + A_2 x_{21} \geq b_{21} \\ & E_1 x_1 + A_2 x_{22} \geq b_{22} \\ & \vdots \\ & E_1 x_1 + A_2 x_{2m} \geq b_{2m} \end{aligned}$$

O problema acima corresponde ao seguinte processo de decisão:

1º estágio: determine uma solução viável  $x^*$  tal que  $A x_1^* \geq b_1$ ;

2º estágio: encontre o vetor  $(x_{21}^*, x_{22}^*, \dots, x_{2m}^*)$ , solução do problema a seguir:



$$z = \text{Min } p_1 c_2 x_{21} + p_2 c_2 x_{22} + \dots + p_m c_2 x_{2m} \quad (\text{A.25})$$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } \quad & A_2 x_{21} \geq b_{21} - E_1 x_1^* \\ & A_2 x_{22} \geq b_{22} - E_1 x_1^* \\ & \quad \quad \quad \vdots \\ & A_2 x_{2m} \geq b_{2m} - E_1 x_1^* \end{aligned}$$

O problema (A.25) pode também ser decomposto em  $m$  subproblemas de otimização independentes:

$$\text{Min } c_2 x_{21} \quad (\text{A.26})$$

$$\text{s.a. } A_2 x_{21} \geq b_{21} - E_1 x_1^*$$

$$\text{Min } c_2 x_{22} \quad (\text{A.27})$$

$$\text{s.a. } A_2 x_{22} \geq b_{22} - E_1 x_1^*$$

⋮

$$\text{Min } c_2 x_{2m} \quad (\text{A.28})$$

$$\text{s.a. } A_2 x_{2m} \geq b_{2m} - E_1 x_1^*$$

onde as soluções de (A.26), (A.27), ..., (A.28) são ponderadas pelas probabilidades  $p_1, p_2, \dots, p_m$ , respectivamente.

Assim como no caso determinístico, a solução de cada subproblema de 2º estágio é uma função da decisão  $x_1$  do problema de 1º estágio. Portanto, o problema (A.24) pode ser reescrito como:

$$z = \text{Min } c_1 x_1 + \bar{\alpha}(x_1)$$

(A.29)

$$\text{s.a. } A x_1 \geq b_1$$

onde  $c_1 x_1$  representa o custo imediato e  $\bar{\alpha}(x_1)$  representa o valor esperado do custo futuro (valor esperado das consequências da decisão  $x_1$  no futuro).  $\bar{\alpha}(x_1)$  é também o valor esperado das soluções dos subproblemas (A.26) a (A.28). A função  $\bar{\alpha}(x_1)$  é um poliedro convexo que pode ser construído a partir do valor esperado dos multiplicadores simplex associados a cada subproblema.

Sejam  $\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m$  os multiplicadores simplex associados às restrições dos problemas (A.26) a (A.28), e  $w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^*$  os valores das soluções ótimas correspondentes. O corte de Benders associado ao problema (A.29) é:

$$p_1 \pi_1 (b_{21} - E_1 x_1) + p_2 \pi_2 (b_{22} - E_1 x_1) + \dots + p_m \pi_m (b_{2m} - E_1 x_1) \leq \bar{\alpha} \quad (\text{A.30})$$

Ou alternativamente pela equação (14):

$$p_1 (w_1^* + \pi_1 E_1 (x_1^* - x_1)) + p_2 (w_2^* + \pi_2 E_1 (x_1^* - x_1)) + \dots + p_m (w_m^* + \pi_m E_1 (x_1^* - x_1)) \leq \bar{\alpha} \quad (\text{A.31})$$

Agrupando tem-se:

$$\bar{w}^* + \bar{\pi} E_1 (x_1^* - x_1) \leq \bar{\alpha} \quad (\text{A.32})$$

onde

$$\bar{w}^* = p_1 w_1^* + p_2 w_2^* + \dots + p_m w_m^* \quad (\text{A.33})$$

e

$$\bar{\pi} = p_1 \pi_1 + p_2 \pi_2 + \dots + p_m \pi_m \quad (\text{A.34})$$

Se o problema além de estocástico é multi-estágios os resultados obtidos acima são válidos.

É fácil notar que para o caso em que a cada estágio ( $t$ ) há  $m$  possíveis cenários de afluências.

## APÊNDICE B

### Modelos Auto-Regressivos Periódicos PAR(p)

A adoção de critérios probabilísticos em diversas atividades do planejamento e operação de sistemas hidrotérmicos criou a necessidade da modelagem probabilística de afluições a locais de aproveitamentos hidroelétricos ou a subsistemas. Em estudos energéticos, critérios de suprimento são baseados em índices de risco, estimados a partir da simulação da operação energética do sistema para diversos cenários (sequências) de afluições aos aproveitamentos hidroelétricos ou subsistemas.

O único cenário disponível na prática, o registro de afluições observado no passado (chamado de série histórica) é, no entanto, insuficiente para compor uma amostra de tamanho necessário para estimar índices de risco com incertezas aceitáveis. Entretanto, as características básicas da série histórica podem ser capturadas por modelos estocásticos capazes de produzir séries sintéticas de afluições, diferentes da série histórica mas igualmente prováveis. Dessa forma, a informação contida na série histórica pode ser mais completamente extraída, permitindo a avaliação de riscos e incertezas pertinentes a um sistema hidroelétrico.

Medindo-se, por exemplo, a vazão afluente mensal a um dado local por um período de cinco anos, podemos obter a curva 1 da Figura B.1. Realizando-se as mesmas medições para outro segmento de cinco anos, obtém-se outra curva, que é em geral diferente da primeira.

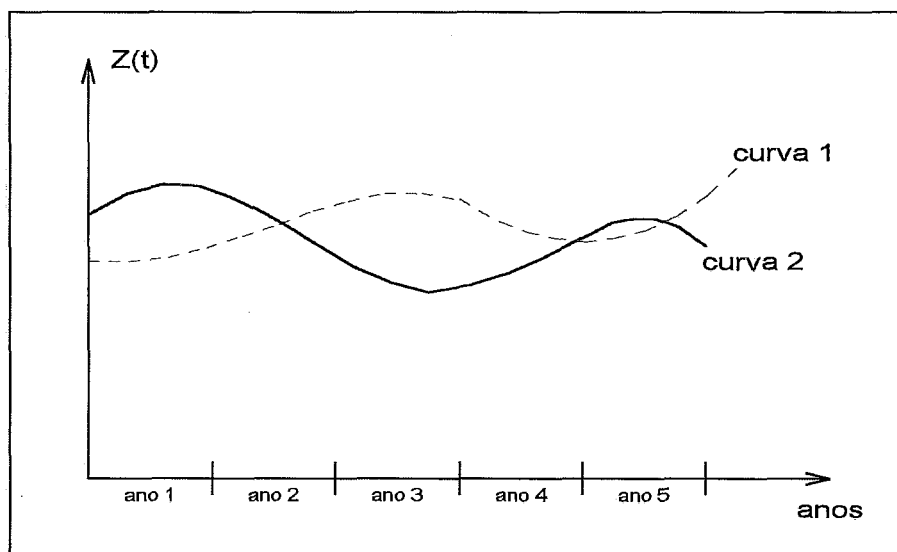


Figura B.1 - Vazão Afluente Anual x Anos

Estas curvas são chamadas de trajetórias ou realizações do processo físico que está sendo observado. Este pode ser modelado por um *processo estocástico*, que nada mais é do que o conjunto de todas as possíveis trajetórias que podem ser observadas. Cada trajetória é também chamada de *série temporal*.

Na prática, só está disponível uma realização do processo estocástico, a *série histórica*. Assim, temos que para cada instante do tempo (dia, mês, ano, etc) o processo estocástico é uma variável aleatória. O valor observado em um instante  $t$  qualquer (valor da série histórica no instante  $t$ ), nada mais é do que o valor "amostrado" da distribuição de probabilidades associada a variável aleatória do processo estocástico no instante  $t$ .

Um processo estocástico é totalmente descrito pelo conjunto de todas as séries temporais que o compõe ou pela distribuição de probabilidades conjunta de todas as variáveis aleatórias envolvidas. Como na realidade não está disponível nem uma coisa nem outra, a modelagem de *séries sintéticas* tem por objetivo ajustar um modelo pelo qual acreditamos que a série histórica tenha sido produzida e a partir dele gerar séries sintéticas que representam as séries temporais que podem ser "amostradas" pelo processo físico que se está observando, o processo estocástico.

É comum assumir algumas hipóteses simplificadoras do problema, por exemplo, *estacionaridade*. Um processo estocástico é estacionário se ao longo do tempo as suas propriedades estocásticas não se alteram. Isto significa que a média, o desvio padrão, etc., não sofrem modificações ao longo do tempo, ou de uma forma mais abrangente, significa que a distribuição de probabilidades em um instante  $t$  qualquer é válida para qualquer outro instante. A não estacionaridade de um processo estocástico pode ser causada pela intervenção direta do homem, ou da natureza, no processo físico, ou ainda pela presença de ciclos sazonais (características que se repetem dentro de um ano). Neste sentido, o processo de afluências anuais é considerado estacionário e o processo de afluências mensais é considerado não estacionário.

Séries hidrológicas de intervalo de tempo menor que o ano, tais como séries mensais, têm como característica o comportamento periódico das suas propriedades probabilísticas, como por exemplo a média, a variância, a assimetria e a estrutura de auto-correlação. A análise deste tipo de séries pode ser feita pelo uso de formulações auto-regressivas cujos parâmetros apresentam um comportamento periódico. A esta classe de modelos costuma-se denominar

modelos auto-regressivos periódicos. Estes modelos são referenciados por modelos PAR(p), onde p é a ordem do modelo, ou seja, o número de termos auto-regressivos do modelo. Em geral, p é um vetor,  $p = (p_1, p_2, \dots, p_{12})$ , onde cada elemento fornece a ordem de cada período.

O modelo PAR( $p_1, p_2, \dots, p_{12}$ ) pode ser descrito matematicamente por:

$$\left(\frac{Z_t - \mu_m}{\sigma_m}\right) = \phi_1^m \left(\frac{Z_{t-1} - \mu_{m-1}}{\sigma_{m-1}}\right) + \dots + \phi_{p_m}^m \left(\frac{Z_{t-p_m} - \mu_{m-p_m}}{\sigma_{m-p_m}}\right) + a_t \quad (\text{B.1a})$$

ou

$$\Phi^m(B) \left(\frac{Z_t - \mu_m}{\sigma_m}\right) = a_t \quad (\text{B.1b})$$

onde:

$Z_t$  é uma série sazonal de período s

s é o número de períodos (s = 12 para séries mensais)

N é o número de anos

t é o índice do tempo,  $t = 1, 2, \dots, sN$ , função do ano T ( $T = 1, 2, \dots, N$ ) e do período m ( $m = 1, 2, \dots, s$ )

$\mu_m$  é a média sazonal de período s

$\sigma_m$  é desvio-padrão sazonal de período s

$\Phi^m(B)$  é o operador auto-regressivo de ordem  $p_m$

$$\Phi^m(B) = (1 - \phi_1^m B - \phi_2^m B^2 - \dots - \phi_{p_m}^m B^{p_m}),$$

$B^i$  aplicado a  $Z_t$  resulta em  $Z_{t-i}$  ( $B^i Z_t = Z_{t-i}$ )

$p_m$  é a ordem do operador auto-regressivo do período m

$a_t$  série de ruídos independentes com média zero e variância  $\sigma_a^{2(m)}$

Seja  $\rho^m(k)$  a correlação entre  $Z_t$  e  $Z_{t-k}$ , de tal forma que t corresponda ao período m:

$$\rho^m(k) = E \left[ \left( \frac{(Z_t - \mu_m)}{\sigma_m} \right) \left( \frac{(Z_{t-k} - \mu_{m-k})}{\sigma_{m-k}} \right) \right] \quad (\text{B.2})$$

O conjunto de funções de autocorrelação  $\rho^m(k)$  dos períodos  $m = 1, \dots, s$ , descrevem a estrutura de dependência temporal da série. Estas funções são obtidas por:

Multiplicando-se ambos os lados da equação (B.1a) por  $\left( \frac{(Z_{t-k} - \mu_{m-k})}{\sigma_{m-k}} \right)$  e tomando o valor esperado obtemos para cada período:

$$\begin{aligned} E \left[ \left( \frac{(Z_t - \mu_m)}{\sigma_m} \right) \left( \frac{(Z_{t-k} - \mu_{m-k})}{\sigma_{m-k}} \right) \right] &= \phi_1^m E \left[ \left( \frac{(Z_{t-1} - \mu_{m-1})}{\sigma_{m-1}} \right) \left( \frac{(Z_{t-k} - \mu_{m-k})}{\sigma_{m-k}} \right) \right] + \\ &\dots + \phi_{p_m}^m E \left[ \left( \frac{(Z_{t-p_m} - \mu_{m-p_m})}{\sigma_{m-p_m}} \right) \left( \frac{(Z_{t-k} - \mu_{m-k})}{\sigma_{m-k}} \right) \right] + \\ &E \left[ a_t \left( \frac{(Z_{t-k} - \mu_{m-k})}{\sigma_{m-k}} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Por exemplo, para  $k = 1$  a expressão (B.3) resulta em:

$$\rho^m(1) = \phi_1^m + \phi_2^m \rho^{m-1}(1) + \dots + \phi_{p_m}^m \rho^{m-1}(p_m-1)$$

Conhecidos os parâmetros de um modelo PAR(p) as funções  $\rho^m(k)$  são dadas pela solução de (B.3) e podem ser expressas por uma combinação de decaimentos exponenciais e/ou ondas senoidais, o que faz com que cada  $\rho^m(k)$  tenda a zero à medida que  $k$  cresce.

Fixando-se  $m$  e variando  $k$  de 1 a  $p_m$  em (B.3) obtemos para cada período um conjunto de equações comumente denominado de equações de Yule-Walker. Para um período  $m$  qualquer:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho^{m-1}(1) & \rho^{m-1}(2) & \dots & \rho^{m-1}(p_m-1) \\ \rho^{m-1}(1) & 1 & \rho^{m-2}(1) & \dots & \rho^{m-2}(p_m-2) \\ \rho^{m-1}(2) & \rho^{m-2}(1) & 1 & \dots & \rho^{m-3}(p_m-3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{m-1}(p_m-1) & \rho^{m-2}(p_m-2) & \rho^{m-3}(p_m-3) & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_1^m \\ \phi_2^m \\ \phi_3^m \\ \dots \\ \phi_{p_m}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^m(1) \\ \rho^m(2) \\ \rho^m(3) \\ \dots \\ \rho^m(p_m) \end{bmatrix}$$

(B.4)

Chamando  $\phi_{kj}$  o  $j$ -ésimo parâmetro auto-regressivo de um processo de ordem  $k$ ,  $\phi_{kk}$  é o último parâmetro deste processo. As equações de Yule-Walker para cada período  $m$  podem ser reescritas da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} 1 & \rho^{m-1}(1) & \rho^{m-1}(2) & \dots & \rho^{m-1}(k-1) \\ \rho^{m-1}(1) & 1 & \rho^{m-2}(1) & \dots & \rho^{m-2}(k-2) \\ \rho^{m-1}(2) & \rho^{m-2}(1) & 1 & \dots & \rho^{m-3}(k-3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho^{m-1}(k-1) & \rho^{m-2}(k-2) & \rho^{m-3}(k-3) & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{k1}^m \\ \phi_{k2}^m \\ \phi_{k3}^m \\ \dots \\ \phi_{kk}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho^m(1) \\ \rho^m(2) \\ \rho^m(3) \\ \dots \\ \rho^m(k) \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

Ao conjunto de valores  $\phi_{kk}^m$ ,  $k = 1, 2, \dots$ , chamamos de função autocorrelação parcial do período  $m$ . O conjunto de funções  $\phi_{kk}^m$ ,  $m = 1, 2, \dots, s$ , é uma outra forma de representar a estrutura de dependência do processo estocástico ao longo do tempo. Em um processo auto-regressivo de ordem  $p_m$ , a função de autocorrelação parcial  $\phi_{kk}^m$  será diferente de zero para  $k$  menor ou igual a  $p_m$  e zero para  $k$  maior que  $p_m$ .



Para  $k = 0$ , a expressão (B.3) fica:

$$1. = \phi_1^m \rho^m(1) + \phi_2^m \rho^m(2) + \dots + \phi_{p_m}^m \rho^m(p_m) + E \left[ a_t \left( \frac{(Z_t - \mu_m)}{\sigma_m} \right) \right] \quad (\text{B.6})$$

Multiplicando (B.1a) por  $a_t$  e tomando o valor esperado, obtemos:

$$E \left[ a_t \left( \frac{(Z_t - \mu_m)}{\sigma_m} \right) \right] = \sigma_a^{2(m)} \quad (\text{B.7})$$

Substituindo (B.7) em (B.6) temos:

$$\sigma_a^{2(m)} = 1. - \phi_1^m \rho^m(1) - \phi_2^m \rho^m(2) - \dots - \phi_{p_m}^m \rho^m(p_m) \quad (\text{B.8})$$

Esta expressão é válida para qualquer período  $m$ .