


Grafos Periplanares Maximais: Reconhecimento e Extensões

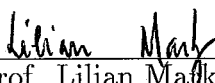
Claudia Marcela Justel

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:



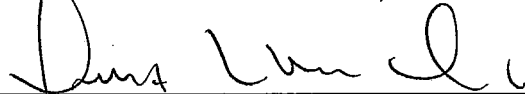
Prof. Nelson Maculan Filho, D.Sc.
(Presidente)



Prof. Lilian Mackenzon, D.Sc.
(Orientador)



Prof. Nair Maria de Abreu, D.Sc.



Prof. Luiz Satoru Ochi, D.Sc.



Prof. Paulo Oswaldo Boaventura Neto, D.Sc.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil
Dezembro de 1996

Justel, Claudia Marcela
Grafos Periplanares Maximais: Reconhecimento e Extensões - Rio de Janeiro
vi, 96 p. 29,7 cm. (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1996)
Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE.
1. Grafos periplanares. 2. Algoritmos.
I. COPPE/UFRJ. II. Título (série).

À minha família

Ao Luis

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.).

Grafos Periplanares Maximais: Reconhecimento e Extensões

Claudia Marcela Justel

Dezembro de 1996

Orientadores: Lilian Markenzon - Paulo Roberto Oliveira
Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Este trabalho trata de grafos Periplanares maximais, fornecendo um novo reconhecimento dos mesmos e apresentando extensões e aplicações.

A caracterização de k -árvores planares é revista e são introduzidos algoritmos de reconhecimento, baseados em propriedades da Busca em Largura Lexicográfica nesta classe de grafos.

Também são apresentados algoritmos específicos para o caso dos grafos periplanares maximais para resolver o problema de ciclo hamiltoniano e para obter a rotulação recursiva dos vértices do grafo.

Uma subclasse dos grafos periplanares maximais é introduzida, os grafos Coroa, e são estudadas propriedades destes grafos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.).

Maximal Outerplanar Graphs: Recognition and Extensions

Claudia Marcela Justel

December, 1996

Supervisors: Lilian Markenzon - Paulo Roberto Oliveira
Department: Computing and Systems Engineering

This work deal with maximal outerplanar graphs. We give a new recognition of this class together with several extensions and applications.

The planar k -trees characterization is revised to introduce recongniton algorithms based on the Lexicographic Breath First Search.

We also present specific algorithms for outerplanar graphs. The problems treated here are how to find the hamiltonian cycle and the recursive rotulation.

A new subclass of maximal outerplanar graphs is presented, the Crown graphs. We prove that any maximal outerplanar graph is a subgraph of some Crown graph.

Conteúdo

i. Preliminares	3
i.1. Introdução	3
i.2. Resultados Conhecidos sobre Grafos Periplanares Maximais	5
i.3. Conceitos Básicos	10
ii. Base Teórica	15
ii.1 Planaridade, Periplanaridade	16
ii.1.1 Grafos Planares	16
ii.1.2 Grafos Periplanares e Grafos Periplanares Maximais	17
ii.2 Grafos Cordais e o seu Reconhecimento	21
ii.3 Busca em Largura Lexicográfica	27
ii.3.1 O Processo de Eliminação e os Grafos Cordais	28
ii.3.2 O Processo de Eliminação e a Busca em Largura Lexicográfica.....	31
ii.4 k -árvores	35
ii.5 Síntese do Capítulo	36
iii. Caracterização e Reconhecimento	39
iii.1 Conjunto Base de Grafos Cordais e k -árvores	40
iii.2 k -árvores	48
iii.3 Grafos Periplanares Maximais	53
iii.4 3-árvores Planares	56
iii.5 Síntese do Capítulo	59
iv. Resultados em Grafos Periplanares Maximais	61
iv.1 Arestas Interiores e Exteriores em Grafos Periplanares Maximais	62
iv.2 Ciclo Hamiltoniano para Grafos Periplanares Maximais	64

iv.3	Rotulação Recursiva para Grafos Periplanares Maximais	68
iv.4	Síntese do Capítulo	71
v	Grafo Coroa	73
v.1	Caracterização de Grafos Coroa	73
v.2	Dual Geométrico de um Grafo Periplanar Maximal	76
v.3	Propriedades dos Grafos Coroa	82
v.4	Síntese do Capítulo	87
vi	Conclusões	89
vii	Referências Bibliográficas	93

Capítulo i

Preliminares

i.1 Introdução

Grafos periplanares constituem uma importante subclasse de grafos planares. Como estes, admitem, também, uma representação geométrica especial. Grafos planares podem ser desenhados no plano de tal maneira que os vértices são representados por pontos, as arestas são representadas por linhas conectando vértices, e o único ponto comum entre duas arestas é um vértice (não existe cruzamento de arestas). Os **grafos periplanares** são grafos planares que podem ser representados no plano, de maneira tal que todos os seus vértices se encontram na face exterior. Equivalentemente com a definição anterior, os grafos periplanares exceto $K_4 - \{e\}$ foram caracterizados por Chartrand e Harary como aqueles grafos que não contêm subgrafo homeomorfo a K_4 ou $K_{2,3}$. Os **grafos periplanares maximais** são grafos periplanares que não admitem a inclusão de qualquer nova aresta, sem perder a condição de periplanaridade.

Os grafos periplanares, tem recebido muita atenção na literatura, devido à sua simplicidade e múltiplas aplicações. Uma referência clássica sobre grafos periplanares e grafos periplanares maximais é *H72*.

Alguns resultados sobre grafos periplanares e grafos periplanares maximais serão descritos na próxima seção.

Apresentamos, neste trabalho, alguns resultados para grafos periplanares maximais bem como para algumas extensões desta família. Propomos, de início, um novo reconhecimento para grafos periplanares maximais. Nosso resultado se baseia na caracterização fornecida por *KM89* para grafos periplanares maximais a partir de 2-árvores, caso particular de k -árvores, que por sua vez são uma subclasse de grafos cordais. Os grafos cordais podem ser reconhecidos em tempo linear, ao verificar se a ordenação obtida por uma **Busca em Largura Lexicográfica** é um esquema de eliminação perfeita para o grafo dado (*G80, S88*). Podemos então reconhecer grafos periplanares maximais aproveitando a estrutura das 2-árvores, e obter um algoritmo linear para reconhecer grafos periplanares maximais diferente dos outros algoritmos propostos na literatura (*B77, Sy78, M79, W87*).

Para obter o algoritmo, apresentamos uma caracterização de k -árvores para k fixo, e 2-árvores em particular. Esta caracterização utiliza fortemente a propriedade de k -árvores serem grafos cordais, e por este motivo a Busca em Largura Lexicográfica é empregada.

A caracterização de 2-árvores permite então obter um algoritmo linear de reconhecimento de grafos periplanares maximais. Podemos estender os resultados para obter um algoritmo linear de reconhecimento de 3-árvores planares. É apresentado também um teorema que determina que as 3-árvores planares são exatamente os grafos cordais e planares maximais com pelo menos 3 vértices.

Observamos ainda que os rótulos obtidos pela Busca em Largura Lexicográfica para um grafo periplanar maximal fornecem informações sobre as arestas interiores. Com estes conhecimentos pode-se construir o unico ciclo hamiltoniano do grafo. Por outro lado, a numeração dos vértices do grafo periplanar maximal dada pelas larguras dos vértices obtidas por uma Busca em Largura Lexicográfica permite obter uma rotulação recursiva dos grafos periplanares maximais como a proposta em *BJM79*.

Finalmente, apresentamos neste trabalho uma família de grafos periplanares maximais, os grafos coroa. Esta família têm propriedades importantes para a classe dos grafos periplanares maximais.

O trabalho é organizado da seguinte maneira. No capítulo i são apresentados a notação e as definições utilizadas no decorrer dos capítulos, bem como resultados já conhecidos. O capítulo ii contém a base teórica necessária para a apresentação dos resultados e algoritmos posteriores. O capítulo iii resume os resultados de *KM89*, apresenta resultados para reconhecer k -árvores. Também são apresentados os resultados para reconhecer grafos periplanares maximais e 3-árvores planares, de maneira conveniente para obter os algoritmos de reconhecimento respectivos. É provada ainda a identificação das 3-árvores planares com os grafos cordais e planares maximais com pelo menos 3 vértices. O capítulo iv traz algumas aplicações da Busca em Largura Lexicográfica para os grafos periplanares maximais. O capítulo v apresenta uma família de grafos periplanares maximais, os grafos coroa, e diversos resultados a respeito deles.

i.2 Resultados Conhecidos

Entre as referências existentes de grafos periplanares e grafos periplanares maximais, faremos um relatório das que, de alguma maneira, nos foram úteis no decorrer de nosso trabalho. Estes artigos podem ser classificados segundo os temas abordados para a classe de grafos periplanares.

Primeiro desenvolvemos as idéias dos artigos que tratam da caracterização dos grafos periplanares.

Em *FGH74* é dada uma caracterização de grafos periplanares biconexos

baseada em dual geométrico. Esta caracterização é diferente da provada por Chartrand e Harary (*H72*). Além disso, são discutidas algumas relações entre os graus dos vértices de grau 1 e 2 dos grafos periplanares e outros números associados ao grafo.

No artigo *Sy78* é apresentada a mesma caracterização de *FGH74* para grafos periplanares biconexos baseada em grafo ciclo e base de ciclos. Também é proposto um algoritmo para reconhecer periplanaridade utilizando a caracterização reformulada, e além disso, é dado um algoritmo para codificar grafos periplanares biconexos em tempo linear. Também são contados os grafos periplanares biconexos não isomorfos com o mesmo número de vértices, tal resultado é obtido utilizando a correspondência entre grafos periplanares biconexos e árvores planas com partição.

Em *Sy79* é provada a equivalência entre as duas formulações da mesma caracterização dadas em *FGH74* e *Sy78*, e é provada a unicidade do ciclo hamiltoniano em grafos periplanares biconexos. Além disso, é proposta uma caracterização de grafos k -periplanares utilizando base de ciclos.

Em seguida, relacionamos os artigos que abordam o problema de reconhecimento dos grafos periplanares. Existem resultados feitos para grafos periplanares em geral, para grafos periplanares maximais, e para grafos periplanares biconexos.

O problema de reconhecimento de grafos periplanares é polinomial (*J85*).

Existem algoritmos lineares de reconhecimento de grafos periplanares apresentados em *B77*, *Sy78*, *M79*, *W87*. Cada um destes artigos faz um reconhecimento diferente dos outros, trabalhando com as diferentes classes de grafos periplanares (gerais, biconexos, maximais).

O algoritmo linear para reconhecer grafos periplanares dado por *B77* é obtido ao fazer uma pequena modificação no algoritmo linear de *HT74* para testar planaridade. Em *HT74* utilizam-se complexas manipulações de filas para atingir a linearidade. Em *B77* estas manipulações são substituídas por uma rotina simples e também obtém-se a linearidade do algoritmo.

O algoritmo de reconhecimento de *Sy78* é baseado no conceito de série maximal de arestas e série de arestas redutíveis. Estas séries de arestas são utilizadas para fazer reduções no grafo e verificar a periplanaridade nos componentes biconexos do mesmo. As séries maximais de arestas são caminhos simples de comprimento maior ou igual a 2, cujos extremos são vértices com grau maior ou igual a 3. As séries de arestas redutíveis são series de arestas maximais para as quais existe no grafo a aresta formada pelos extremos do caminho (neste trabalho é observado que, como consequência de um grafo periplanar verificar que ou contém no mínimo 2 vértices de grau 2, ou contém no mínimo 3 vértices de grau 3, um grafo periplanar biconexo é isomorfo a um ciclo, ou existem no mínimo dois caminhos que são séries de arestas redutíveis). A maneira de procurar eficientemente as séries de arestas maximais no grafo, é por meio da busca em profundidade, utilizando uma observação sobre a configuração destes caminhos com respeito às arestas que os compõem (é provado que existem duas configurações possíveis das arestas que compõem qualquer série maximal de arestas). Uma vez aplicada a busca em profundidade, a que numera os vértices do grafo na ordem em que são atingidos pela busca, é utilizada esta numeração para achar uma seqüência de reduções e transformar o grafo num ciclo. As aresta que não são marcadas no processo de redução do grafo são as arestas que formam o único ciclo hamiltoniano. Desta forma é obtido um algoritmo linear em tempo e espaço para testar periplanaridade.

No trabalho de *M79*, é dado um algoritmo de reconhecimento de grafos periplanares maximais, baseado numa caracterização que utiliza o conceito

de 2-vértice. Este algoritmo de reconhecimento é generalizado para grafos periplanares, considerando o grafo dividido em componentes biconexos.

O algoritmo se baseia em propriedades que caracterizam os grafos periplanares maximais. Trabalha com os componentes biconexos do grafo, e com as seguintes propriedades dos grafos periplanares maximais: existência de vértices de grau dois, impossibilidade de uma aresta pertencer a mais de dois triângulos, e o número de arestas igual a duas vezes o número de vértices menos 3. Podemos descrever intuitivamente o algoritmo da seguinte maneira. Primeiro são removidos os vértices de grau 2 que são adjacentes a subgrafos completos de tamanho dois (maximalidade). Se for possível fazer isto até obter um triângulo, então temos que o grafo original não contém K_4 . Depois é verificado que o grafo original não contém $K_{2,3}$, ao testar se as arestas interiores não pertencem a mais de dois triângulos. Também é sugerido um algoritmo para reconhecer grafos periplanares, aproveitando o algoritmo anterior. O grafo periplanar é completado por arestas, se for possível, até obter um grafo periplanar maximal, enquanto é aplicado o algoritmo anterior. No mesmo trabalho reconhecem-se as arestas que não pertencem à face exterior na representação periplanar do grafo periplanar maximal (arestas interiores), e é obtido o único ciclo hamiltoniano do grafo ao remover as arestas interiores do conjunto de todas as arestas do grafo.

É interessante o trabalho feito por *RM95*, onde é revisado o artigo anterior, e são propostas algumas modificações que permitem reescrever os algoritmos de reconhecimento de grafos periplanares e de grafos periplanares maximais num mesmo algoritmo. Também são dados alguns esclarecimentos a respeito de situações especiais, não consideradas no trabalho original.

O algoritmo dado por *W87* testa periplanaridade, sem necessidade de dividir o grafo em seus componentes biconexos. É testada primeiro a 2-reducibilidade, e é utilizada uma técnica adicional de coloração de arestas. A complexidade do algoritmo é linear.

O problema do isomorfismo não é especificamente tratado em nossa tese. Entretanto, consideramos importante o conhecimento de resultados parciais utilizados nesses trabalhos.

Em *BJM79* é resolvido o problema de isomorfismo em grafos periplanares maximais. Os dois algoritmos propostos apresentam vantagens respeito da aplicação do algoritmo de isomorfismo em grafos planares dado por Hopcroft e Wong para o caso particular dos grafos periplanares maximais. Os dois algoritmos utilizam uma rotulação especial dos vértices, chamada de rotulação recursiva, e produzem a seqüência de graus hamiltoniana do grafo periplanar maximal, que é única a menos de isomorfismo. Para determinar se duas seqüências de graus hamiltonianas são iguais, são propostos dois métodos diferentes, dando origem a dois algoritmos lineares para determinar se dois grafos periplanares maximais são isomorfos.

No artigo de *Sy82* é pesquisado o problema de isomorfismo de grafos periplanares em geral. Os resultados principais são os seguintes. O problema de isomorfismo de grafos periplanares (chamado na literatura de SUBOUTISOM) é NP-completo, ainda quando são impostas condições na conectividade dos grafos. O problema SUBOUTISOM para grafos periplanares biconexos é NP-completo, e a prova é feita dando uma transformação pseudopolinomial deste ao problema PARTIÇÃO. O problema de isomorfismo entre um grafo periplanar G_1 e G_2 um grafo induzido de G_1 (chamado na literatura de IND-SUBOUTISOM) é polinomial para grafos periplanares biconexos. Neste artigo é apresentado um algoritmo polinomial para decidir se um grafo periplanar biconexo G_2 é subgrafo induzido de outro grafo periplanar biconexo G_1 . Isto é obtido utilizando o conceito de dual geométrico modificado (que é o dual geométrico depois de dividir o vértice correspondente á face exterior em n copias, uma por cada aresta exterior do grafo periplanar maximal).

Por último, mencionaremos dois artigos sobre traçado de grafos periplanares. Temos observado na literatura que é uma tendência atual o estudo de casos particulares para desenhar grafos. Desta forma são propostos algoritmos de traçado em cada classe particular, como nos trabalhos a seguir.

Em *MA92* são apresentados algoritmos lineares para enumerar todas as simetrias axiais e rotacionais de um grafo periplanar biconexo no plano, e para construir um desenho do mesmo mostrando todas essas simetrias. Para identificar e enumerar as simetrias anteriores são utilizadas cadeias de inteiros $S_v, \forall v \in V$, que codificam as adjacências de cada vértice no grafo periplanar biconexo. Este trabalho garante que, para um grafo periplanar biconexo com pelo menos 3 vértices, um desenho poligonal regular do grafo exhibe simultaneamente todas as simetrias axiais e rotacionais. Além disso, estes resultados são estendidos para a classe de grafos periplanares.

E em *LL96* é estudado o traçado com linhas retas de grafos periplanares maximais. Este traçado é uma triangulação de peso mínimo para o conjunto de pontos que representam o conjunto de vértices do grafo. Para obter os resultados necessários para o algoritmo proposto são utilizadas propriedades do dual geométrico do grafo periplanar maximal.

i.3 Conceitos Básicos

Apresentamos aqui conceitos básicos de Teoria dos Grafos, utilizado no decorrer do trabalho. Definições complementares são encontradas em *S88*, *H72*, *G85*.

Um **grafo** $G = (V, E)$ é um conjunto finito não vazio V e um conjunto E de pares não ordenados de elementos distintos de V . Quando houver necessidade,

utilizaremos a notação $V(G)$ e $E(G)$ para identificar o grafo de cujos conjuntos de vértices e arestas estamos referindo. Em geral, o conjunto de vértices do grafo contém n elementos, e o conjunto de arestas do grafos contém m elementos. Notamos esta informação $|V| = n$ e $|E| = m$. G é chamado de **grafo trivial** quando $|V| = 1$.

Os elementos de V são os **vértices** e os elementos de E são as **arestas** de G , respectivamente.

Cada aresta $e \in E$ será denotada pelo par de vértices que a forma, $e = (v, w)$. Nesse caso, os vértices v, w são os **extremos** da aresta, e são denominados de **adjacentes**. Notamos por $Adj(v)$ ao conjunto de todos os vértices adjacentes com o vértice v .

Define-se **grau** de um vértice v , denotado por $d_G(v)$, como sendo o número de vértices adjacentes a v no grafo G , ou $d(v)$ quando não é necessario identificar o grafo respeito do qual estamos trabalhando.

Um grafo é **completo** quando existe uma aresta entre cada par de seus vértices. Utiliza-se a notação K_n para designar o grafo completo de n vértices. O grafo K_n possui o número máximo de arestas para um dado valor de n .

Uma seqüência de vértices v_1, \dots, v_k tal que $(v_j, v_{j+1}) \in E$, $1 \leq j < k - 1$, é denominada **caminho** de v_1 a v_k . Um caminho de k vértices é formado por $k - 1$ arestas. O valor $k - 1$ é o **comprimento do caminho**. Se todos os vértices do caminho v_1, \dots, v_k forem distintos, a seqüência recebe o nome de **caminho simples**. Um **ciclo** é um caminho v_1, \dots, v_k, v_{k+1} sendo $v_1 = v_{k+1}$ e $k \geq 3$. Se o caminho v_1, \dots, v_k for simples, o ciclo v_1, \dots, v_k, v_{k+1} é denominado **ciclo simples**. Um **k -ciclo** é um ciclo simples de k vértices e k arestas. Um **triângulo** é um 3-ciclo. Um **ciclo hamiltoniano** é um ciclo que contém todos os vértices do grafo.

Dado um ciclo, uma **corda** é uma aresta num grafo tal que seus extremos pertencem a um ciclo do grafo, mais a aresta mesma não pertence ao ciclo.

Um **subgrafo** $G_1 = (V_1, E_1)$ de um grafo $G = (V, E)$ é um grafo tal que $V_1 \subseteq V$ e $E_1 \subseteq \mathcal{P}_2(V_1) \cap E$. Se além disso, $E_1 = \mathcal{P}_2(V_1) \cap E$ então G_1 é

o **subgrafo induzido** pelo subconjunto de vértices V_1 . O subgrafo induzido pelo conjunto de vértices V_1 será notado $G(V_1)$. Em particular dado um grafo $G = (V, E)$ e um subconjunto $A \subseteq V$, dizemos que $G(A)$ é o subgrafo induzido pelo conjunto de vértices A onde $G(A) = (A, E(A))$.

Um grafo é denominado **conexo** quando existe caminho entre cada par de vértices nele. Caso contrario, o grafo é **desconexo**.

Seja S um conjunto e $S' \subseteq S$. Diz-se que S' é **maximal** em relação a uma certa propriedade P , quando S' satisfaz a propriedade P e não existe subconjunto S'' que também satisfaz P e $S' \subset S''$.

Denominam-se **componentes conexos** de um grafo G aos subgrafos maximais de G que sejam conexos.

Sejam $e \in E$, $v, w \in V$. Denota-se por $G - e$ ao grafo obtido de G pela exclusão da aresta e . Se v, w são dois vértices de G não adjacentes, a notação $G + (v, w)$ representa o grafo obtido adicionando-se a G a aresta (v, w) . O grafo $G - v$ denota aquele obtido de G pela remoção do vértice v de G . (Observar que excluir um vértice implica em remover de G o vértice em questão e as arestas a ele incidentes).

Um vértice v é uma **articulação** quando sua remoção de G o desconecta, ou seja o grafo $G - v$ é desconexo. Um grafo é **biconexo** ou **2-conexo** se e somente se não possuir articulações. Denominam-se **componentes biconexos** ou **blocos** do grafo G aos subgrafos maximais de G que sejam biconexos.

Denomina-se **clique** de um grafo G a um subgrafo de G que seja completo. O **tamanho** de uma clique é igual à cardinalidade de seu conjunto de vértices. Uma **clique máxima** de um grafo G é a clique de tamanho máximo em G . Uma **k -clique** é uma clique formada por k vértices.

Dois grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ e $G_2 = (V_2, E_2)$, $|V_1| = |V_2| = n$ são **isomorfos**, se existir uma função unívoca $f : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $(v, w) \in E_1$ se e somente se $(f(v), f(w)) \in E_2$, $\forall v, w \in V_1$.

Dois grafos são **homeomorfos** se um deles pode-se fazer isomorfo ao outro pela adição ou remoção de vértices de grau dois.

O **grafo estrela** é um grafo conexo formado por n vértices de maneira tal que um vértice tem grau $n - 1$ e todos os outros vértices restantes tem grau 1. O grafo estrela de n vértices é $K_{1,n-1}$.

Capítulo i. Preliminares

Capítulo ii

Base Teórica

Neste capítulo vamos apresentar os conceitos necessários à compreensão dos capítulos que se seguem. Todos são conhecidos na literatura, e em cada seção serão dadas as referências correspondentes. Deve-se observar que, os nomes e as notações diferem muitas vezes de livro para livro. Este capítulo apresenta esses conceitos com a preocupação de unificar os nomes e torná-los coerentes com as necessidades do nosso trabalho.

Apresentamos na seção **ii.1** os conceitos de Grafos Planares, Grafos Periplanares e Grafos Periplanares Maximais. Estes últimos grafos compõem a classe na qual estamos interessados.

Na seção **ii.2** apresentamos os Grafos Cordais e o seu reconhecimento, baseado em uma Busca em Largura Lexicográfica. A Busca em Largura Lexicográfica será de suma importância nos algoritmos desenvolvidos posteriormente. Foram também estabelecidas relações entre resultados conhecidos, já com a finalidade de fundamentação teórica para os novos resultados apresentados nos próximos capítulos.

Na seção **ii.3** apresentamos os trabalhos *R70* e *RTL76*, que são o fundamento teórico do algoritmo de Busca em Largura Lexicográfica.

Finalmente, na seção **ii.4** é apresentado o conceito de k -árvore e alguns teoremas que caracterizam esta classe de grafos.

ii.1 Planaridade, Periplanaridade

ii.1.1 Grafos Planares

Um grafo se diz **imerso** numa superfície S quando ele pode ser desenhado nesta superfície de maneira que não apresente interseção de arestas.

Um **grafo planar** é um grafo que pode ser imerso no plano. Um **grafo plano** é um grafo planar que já foi imerso no plano.

As regiões definidas por um grafo plano são chamadas de **faces**, e a região não limitada é chamada de **face exterior**.

A **fórmula de Euler** para grafos planares dá a relação entre o número de vértices, o número de arestas e o número de faces do grafo:

$$n - m + f = 2.$$

Um **grafo planar maximal** é um grafo planar tal que ao acrescentar novas arestas, perde a condição de planaridade.

Seja o grafo conexo $G = (V, E)$, $|V| = n$, $|E| = m$.

Lema 1 *H72.* Se G um grafo plano conexo tal que cada face é um k -ciclo, então $m = k(n - 2)/(k - 2)$.

Lema 2 *H72.* Se G um grafo plano maximal, então toda face é um triângulo e temos que $m = 3n - 6$.

Se G um grafo plano tal que cada face é um 4-ciclo, então $m = 2n - 4$.

Lema 3 *H72.* Se G um grafo planar tal que $n \geq 3$, então $m \leq 3n - 6$.

Se G é um grafo planar biconexo sem triângulos, então $m \leq 2n - 4$.

Lema 4 *H72.* K_5 e $K_{3,3}$ são não planares.

Teorema 1 *H72.* Um grafo G é planar se e somente se todos os seus blocos são planares.

Teorema 2 *H72*. *Um grafo planar biconexo pode ser imerso no plano de maneira tal que uma face especificada seja a face exterior.*

Observe que a partir do Lema 2 e do Teorema 2, podemos concluir que todas as imersões de um grafo planar maximal no plano tem a face exterior limitada por um triângulo (ou 3-ciclo).

Existem diferentes caracterizações de grafos planares. A caracterização de Kuratowsky utiliza subgrafos proibidos, a de Whitney faz uso do dual combinatório, e a caracterização de Mc Lane usa base de ciclos (*H72*).

ii.1.2 Grafos Periplanares e Grafos Periplanares Maximais

Um grafo planar G é k -**periplanar** se o número máximo de vértices que limitam a face exterior de uma imersão de G no plano é k . Um grafo é **periplanar** se G pode ser imerso no plano de maneira tal que todos os seus vértices pertencem a uma mesma face, suposta como a face exterior (portanto G é n -periplanar).

Teorema 3 *H72*. *Um grafo G é periplanar se e somente se todos os seus blocos são periplanares.*

Em decorrência do Teorema 3, vamos restringir nossa apresentação aos grafos biconexos.

Pelo Teorema 2 da seção **ii.1.1**, temos que um grafo planar biconexo pode ser imerso no plano de maneira tal que qualquer uma das faces seja a face exterior. No caso particular dos grafos periplanares biconexos, a definição dos mesmos limita o número de imersões do grafo no plano de modo a respeitar a condição de todos os vértices pertencerem à mesma face. Ou seja, nem toda imersão de um grafo periplanar biconexo no plano permite verificar a definição de periplanaridade. Chamamos de **imersão periplana** de um grafo periplanar

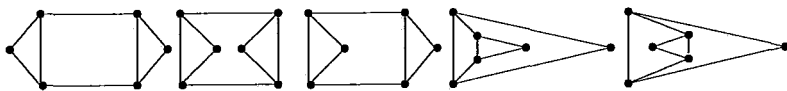


Figura ii.1 Diferentes imersões de um mesmo grafo periplanar biconexo

biconexo a imersão do grafo no plano com todos os seus vértices pertencentes à face exterior.

Observe na Figura ii.1, a primeira representação é uma imersão periplana do grafo, enquanto que as outras não.

Um **grafo periplanar maximal** é um grafo periplanar tal que ao se acrescentar novas arestas, perde a condição de periplanaridade. É claro que um grafo periplanar maximal é a triangulação de um polígono de n vértices. (H72).

Teorema 4 *Seja G um grafo periplanar maximal tal que $n \geq 3$. Então G verifica $m = 2n - 3$.*

Prova:

Pela fórmula de Euler temos que:

$$n - m + f = 2,$$

ou

$$n - m + f - 1 = 1.$$

Como G é um grafo periplanar maximal, então G é uma triangulação de um polígono. Temos então que a face exterior de G contém n vértices, e $f - 1$ faces interiores são triângulos, onde f é o número total de faces. Como cada aresta pertence a duas faces, temos que,

$$3(f - 1) + n = 2m.$$

Portanto,

$$f - 1 = (2m - n)/3.$$

Utilizando as equações anteriores temos que:

$$n - m + (2m - n)/3 = 1$$

$$3n - 3m + 2m - n = 3$$

$$2n - m = 3$$

$$2n - 3 = m. \blacksquare$$

Corolário 1 *Seja G um grafo periplanar maximal tal que $n \geq 3$. Então G tem $n - 1$ faces, e portanto $n - 2$ faces interiores.*

Prova:

Pela fórmula de Euler temos que $n - m + f = 2$, ou seja $f = 2 + m - n$.

Pelo teorema anterior, é verdadeiro que $m = 2n - 3$.

Então,

$$f = 2 + m - n = 2 + 2n - 3 + n = n - 1. \blacksquare$$

Do Teorema 4 também podemos obter o corolário a seguir.

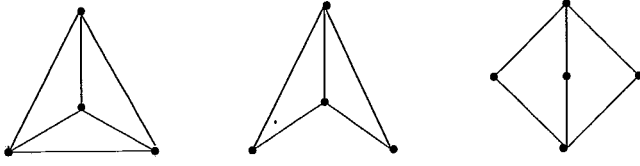
Corolário 2 *H72. K_4 e $K_{2,3}$ são não periplanares.*

Os grafos periplanares exceto $K_4 - \{e\}$, onde e é uma aresta de K_4 , foram caracterizados por Chartrand e Harary (H72) como aqueles grafos que não contém subgrafo homeomorfo a K_4 e $K_{2,3}$. Existe outra caracterização de grafos periplanares proposta independentemente por Syslo (Sy78) e por Fleischer, Geller e Harary (FGH74) utilizando duas formulações diferentes. Estas formulações foram feitas em termos de base de ciclos (Sy79), e de dual geométrico fraco (FGH74).

O Teorema a seguir é a caracterização de grafos periplanares dada por Chartrand e Harary.

Teorema 5 *H72. Um grafo é periplanar se e somente se não contém subgrafo homeomorfo a K_4 e $K_{2,3}$ exceto $K_4 - \{e\}$.*

Observe que se K_4 é o grafo completo de 4 vértices e $K_4 - \{e\}$ o grafo obtido ao remover uma aresta de K_4 , então $K_{2,3}$ é homeomorfo a $K_4 - \{e\}$,

Figura ii.2 K_4 , $K_4 - \{e\}$ e $K_{2,3}$

mas $K_4 - \{e\}$ é periplanar (Figura ii.2).

Outra caracterização de grafos periplanares é dada no Teorema a seguir, em termos de dual geométrico fraco de um grafo (os conceitos de dual geométrico e dual geométrico fraco de um grafo serão apresentados no capítulo v).

Teorema 6 *Sy79.* Um grafo é periplanar se e somente se tem um dual geométrico G^* que contém um vértice v tal que $G^* - v$ não contém ciclos.

Pode-se reformular o Teorema anterior em termos de grafo ciclo e base de ciclos (*Sy79*).

O Lema a seguir garante a existência de um único ciclo hamiltoniano no caso particular dos grafos periplanares biconexos.

Lema 5 *Sy78.* Um grafo periplanar biconexo possui um único ciclo hamiltoniano.

Em particular, todo grafo periplanar biconexo maximal com no mínimo 3 vértices possui um único ciclo hamiltoniano.

O Lema 5 nos permite classificar as arestas de um grafo periplanar biconexo em arestas exteriores e interiores.

Seja G um grafo periplanar biconexo.

Uma **aresta exterior** de G é uma aresta de G que pertence ao único ciclo hamiltoniano.

Uma **aresta interior** de G é uma aresta de G que não pertence ao único ciclo

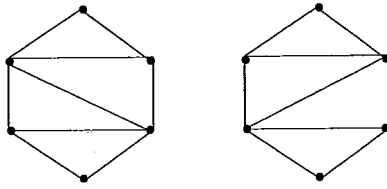


Figura ii.3 Um grafo G_1 e sua imagem especular G_2

hamiltoniano.

Como Corolário do Lema anterior, podemos obter também o resultado a seguir, que determina as maneiras possíveis de representar um grafo periplanar biconexo num plano, considerando o mesmo um plano orientado.

Corolário 3 *Sy78.* Um grafo periplanar biconexo tem precisamente duas imersões periplanas, dadas por um grafo periplanar G_1 com todos os vértices na face exterior e o seu grafo imagem especular (mirror-image) G_2 .

Observe na Figura ii.3 um grafo periplanar biconexo G_1 e seu grafo imagem especular G_2 . Estes dois grafos são isomorfos, mas observe na figura que, percorrendo os vértices na ordem dada pelo único ciclo hamiltoniano no sentido dos ponteiros do relógio, obtemos resultados distintos.

ii.2 Grafos Cordais e o seu Reconhecimento

Os resultados relativos aos grafos cordais e o seu reconhecimento podem ser encontrados em *G80*, *S88* e *VI89*.

Em *S88* estes resultados são didaticamente expostos, enquanto que em *VI89* achamos uma apresentação mais extensa e detalhada.

Optamos por rerepresentar no texto a Busca em Largura Lexicográfica na próxima seção, tendo em vista sua utilização nos capítulos que se seguem.

Um grafo G é **cordal** se cada k -ciclo onde $k \geq 4$ possui uma corda.

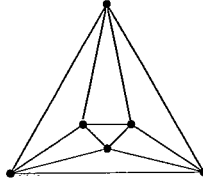


Figura ii.4 Exemplo de um grafo planar maximal e não cordal

Agora achamos necessário esclarecer alguns pontos referentes a conceitos e suas diversas denominações encontradas na literatura.

Os grafos cordais também são chamados na literatura de grafos triangularizados, monótono transitivo, circuito rígido e de eliminação perfeita (triangulated, rigid-circuit, monotone transitive, perfect elimination graphs) (*G80*). Optamos pelo nome cordal, pois achamos o mais adequado para nossa apresentação.

Os grafos planares maximais, por sua vez, são também chamados na literatura de grafos planares triangulares (*R74*) e grafos de triangulação planar (*G85*, *BM76*).

Já no trabalho de *R74* é apresentado um exemplo de grafo planar maximal e não cordal, observe-o na Figura ii.4. Também é verdade que nem todo grafo cordal é planar maximal (por exemplo K_5 é cordal e não é planar). Por outro lado, os grafos periplanares maximais são cordais, como será visto no capítulo iii.

Os conceitos de grafos cordais e grafos planares maximais serão frequentemente utilizados nos capítulos que se seguem.

Um vértice v em G é **simplicial** se o subgrafo induzido pelo conjunto $Adj(v)$ é um grafo completo.

Lema 6 *Se G é cordal e $n \geq 1$, então $G - v$ é cordal.*

Lema 7 *Seja G um grafo cordal. Se G for completo, então todos os seus vértices são simpliciais mas se G é cordal e não completo, então G contém um par de vértices não adjacentes simpliciais.*

Sejam $x, y \in V$ tal que $(x, y) \notin E$, e $S \subseteq V$. S é um x - y **separador** se x, y pertencem a componentes conexos distintos de $G - S$. Um x - y **separador minimal** é um x - y separador que não contém propriamente um outro x - y separador.

Lema 8 *Seja G um grafo não completo e conexo.*

G é cordal se e somente se todo separador minimal induz uma clique.

Dado $G = (V, E)$, $|V| = n$, uma **ordenação de V** é uma bijeção $s : \{1, \dots, n\} \rightarrow V$ tal que associa $s(i) = v_i$; $i = s^{-1}(v)$ indica a posição de v na ordenação. A ordenação é notada pela seqüência $s = v_1, \dots, v_n$. $G_s = (G, s)$ é o **grafo ordenado** associado a G .

O conjunto de **vértices monótonamente adjacentes a $v \in V$** é o conjunto $MAdj(v) = Adj(v) \cap \{w : s^{-1}(w) > s^{-1}(v)\}$, ou equivalentemente $MAdj(v) = \{w \in Adj(v) : w \text{ está a direita de } v \text{ em } s\}$.

Um grafo ordenado G_s é **monótono transitivo** se $\forall v \in V, w \in MAdj(v), z \in MAdj(v) \Rightarrow w \in Adj(z)$.

Lema 9 *G é cordal se e somente se \exists ordenação s de V tal que G_s é monótono transitivo.*

Seja $s = v_1, \dots, v_n$ uma seqüência ordenada dos vértices de G . s é um **esquema de eliminação perfeita (EEP)** se $\forall v_i \in V$, o subgrafo induzido por $Adj(v_i) - \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ é completo, ou seja v_i é um vértice simplicial de $G - \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$.

Observe que $Adj(v_i) - \{v_1, \dots, v_{i-1}\} = MAdj(v_i)$.

Lema 10 *A seqüência s é um esquema de eliminação perfeita para G se e somente se G_s é monótono transitivo.*

Corolário 4 *G é cordal se e somente se G possui um esquema de eliminação perfeita. Além disso, qualquer vértice simplicial pode iniciar um esquema de eliminação perfeita.*

A determinação eficiente de um **EEP** utiliza o algoritmo de Busca em Largura Lexicográfica para achar a função s . Portanto vamos ver em que consiste esse algoritmo.

Para poder apresentar o algoritmo definimos inicialmente os conceitos a seguir:

Sejam $X = x_1, \dots, x_p$ e $Y = y_1, \dots, y_q$ duas seqüências de inteiros. Diz-se que X é **lexicograficamente maior** que Y quando:

- i) existe algum índice j , $1 \leq j \leq p, q$ tal que $x_j > y_j$ e para todo k , $1 \leq k < j$, $x_k = y_k$, ou
- ii) $p > q$, e para todo k , $1 \leq k \leq p$, $x_k = y_k$.

A ordenação de V obtida pelo algoritmo é a seqüência s .

Define-se **largura** de cada vértice v , notando-se $larg(v)$, ao inteiro correspondente à ordem de pesquisa do vértice durante a execução do algoritmo de Busca em Largura Lexicográfica.

Define-se **complemento de largura** de cada vértice v , como o valor $s^{-1}(v) = n + 1 - larg(v)$.

Observe-se que o complemento de largura de cada vértice corresponde ao valor inteiro determinado pela função inversa de s obtida pelo algoritmo.

Chamamos de **rótulo de v** ao vetor $R(v)$ obtido pelo algoritmo.

O algoritmo de Busca em Largura Lexicográfica é então:

Procedimento[Busca em Largura Lexicografica($G = (V, E), n$)]

para $v \in V$ fazer $R(v) = \emptyset$

para $j = n, 1$ fazer

1. escolher $v \in V$: $s^{-1}(v)$ não definido e tal que $R(v)$ e lexicograficamente maximo

2. $s(j) = v$

3. para $w \in Adj(v)$: $s^{-1}(w)$ não definido fazer
incluir j a direita em $R(w)$

fim[Busca em Largura Lexicografica]

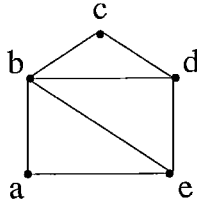


Figura ii.5 Exemplo de grafo cordal para BFS-Lexicográfica

Para observar o comportamento dos rótulos, fornecemos o exemplo a seguir.

Seja G o grafo da Figura ii.5, onde temos os seguintes valores de largura, complemento da largura e rótulo de cada vértice v :

$larg(v)$	v	$s^{-1}(v)$	$R(v)$
1	a	5	\emptyset
2	b	4	5
5	c	1	4,2
4	d	2	4,3
3	e	3	5,4

A seqüência s obtida pelo algoritmo de Busca em Largura Lexicográfica é $s = \{v_1 = c, v_2 = d, v_3 = e, v_4 = b, v_5 = a\}$, para os quais temos os seguintes conjuntos $MAdj(v_i)$:

v	$MAdj(v)$	$R(v)$
a	\emptyset	\emptyset
b	a	5
c	b,d	4,2
d	b,e	4,3
e	b,a	5,4

Por resultados que serão apresentados na seção ii.3.2, temos o seguinte lema:

Se G é cordal e s é a ordenação obtida pela Busca em Largura Lexicográfica, então temos que

$$R(v) = \{s^{-1}(w) : w \in MAdj(v)\}.$$

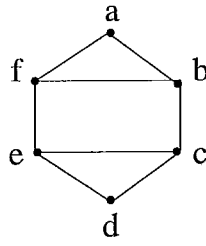


Figura ii.6 Exemplo de grafo não cordal para BFS-Lexicográfica

Então podemos afirmar que os conjuntos $R(v)$ e $MAdj(v)$ tem a mesma cardinalidade, e que cada elemento no rótulo de v identifica um único elemento no conjunto $MAdj(v)$.

Lema 11 *Seja G um grafo cordal, e seja a seqüência $s = \{v_1, \dots, v_n\}$ dos vértices ordenados decrescentemente segundo suas larguras, ou crescentemente segundo os complementos de suas larguras definidos por uma Busca em Largura Lexicográfica. A seqüência s é um esquema de eliminação perfeita.*

No exemplo anterior, o grafo é cordal e a seqüência s obtida pelo algoritmo de Busca em Largura Lexicográfica é um esquema de eliminação perfeita pois $\forall v \in V$ o conjunto $MAdj(v)$ é completo, ou seja $\forall v \in V$ o conjunto $MAdj(v)$ induz uma clique.

Vejamos agora um exemplo de um grafo G não cordal. Aqui a seqüência s obtida pelo algoritmo de Busca em Largura Lexicográfica não é um esquema de eliminação perfeita pois $\exists v \in V$ tal que o conjunto $MAdj(v)$ não é completo.

Seja G o grafo dado na Figura ii.6, onde temos os seguintes valores de complemento da largura, rótulo e conjunto de vértices monótonamente adjacentes de cada vertice v :

v	$s^{-1}(v)$	$R(v)$	$MAdj(v)$
a	6	\emptyset	\emptyset
b	5	6	a
c	3	5	b
d	1	3,2	c,e
e	2	4,3	f,c
f	4	6,5	a,b

A seqüência $s = \{v_1, \dots, v_n\} = \{d, e, c, f, b, a\}$ é uma ordenação dos vértices de V mas não é um esquema de eliminação perfeita para G pois o subgrafo induzido por $MAdj(v_2) = G(\{f, c\})$ não é completo.

Teorema 7 G80. *O algoritmo Busca em Largura Lexicográfica pode ser implementado para um grafo $G = (V, E)$ com complexidade de tempo e espaço de $O(n + m)$.*

Após a determinação da seqüência s , resta-nos verificar se é um esquema de eliminação perfeita. O procedimento **Perfeito**, visto a seguir, efetua essa tarefa.

Procedimento[Perfeito(s)]

1. para $v \in V$ fazer $L(v) = \emptyset$
 2. para $i = 1, n$ fazer
 3. $v = s(i)$
 4. $MAdj(v) = \{x \in Adj(v) : s^{-1}(x) > s^{-1}(v)\}$
 5. se $MAdj(v) = \emptyset$ então ir a (8)
 6. $u = s(\min\{s^{-1}(x) : x \in MAdj(v)\})$
 7. concatenar $MAdj(v) - \{u\}$ a $L(u)$

fim
 8. para $i = 1, n$ fazer $v = s(i)$

se $L(v) - Adj(v) \neq \emptyset$ então retornar FALSO
 9. retornar VERDADEIRO
- fim*[Perfeito]

Teorema 8 G80. *O algoritmo Perfeito testa corretamente quando uma ordenação s é um esquema de eliminação perfeita de vértices de $G = (V, E)$ e pode ser implementado com complexidade de tempo e espaço de $O(n + m)$.*

ii.3 Busca em Largura Lexicográfica

Nesta seção rerepresentamos detalhadamente os conceitos teóricos que justificam a Busca em Largura Lexicográfica. Na seção **ii.3.1** veremos o Processo de Eliminação e os Grafos Cordais, e na seção **ii.3.2** veremos a relação do Processo de Eliminação Perfeita e a Busca em Largura Lexicográfica. Estes

conceitos constituem também a fundamentação teórica necessária aos novos resultados apresentados nos capítulos que se seguem.

ii.3.1 O Processo de Eliminação e os Grafos Cordais

Em 1970, Rose apresentou um trabalho sobre grafos cordais e o processo de eliminação (R70). Nesse artigo estudou os grafos cordais e a sua relação com o processo de eliminação. Este estudo permitirá obter as ferramentas necessárias para gerar o algoritmo de Busca em Largura Lexicográfica reapresentado a seguir. Os detalhes deste trabalho são importantes tendo em vista que as relações aqui ressaltadas justificam a utilização da Busca em Largura Lexicográfica para os algoritmos de reconhecimento de grafos periplanares máximos e 3-árvores planares, apresentados posteriormente.

Seja $G = (V, E)$ e seja $A \subseteq V$. O **grafo induzido** $G(A)$ é o subgrafo $G(A) = (A, E(A))$ onde $E(A) = \{(x, y) \in E : x, y \in A\}$.

Um **separador** de um grafo $G = (V, E)$ é um subconjunto $S \subset V$ tal que o grafo induzido $G(V - S)$ contém dois ou mais componentes conexos, $C_i = (V_i, E_i)$, $1 \leq i \leq c$, onde c é o número de componentes conexos de $G(V - S)$. Os grafos induzidos $G(S \cup V_i)$, $1 \leq i \leq c$ são as **folhas** de G com respeito a S . Um **separador minimal** é um separador tal que nenhum subconjunto dele é também separador. Dados $x, y \in V$, onde $x \notin Adj(y)$, um x - y **separador** é um separador tal que x e y pertencem a componentes conexos distintos (C_x, C_y) . Notar que um separador minimal é um x - y separador minimal para algum par de vértices $x, y \in V$, mas um x - y separador minimal não é em geral um separador minimal. Uma **clique** C de um grafo é um subconjunto de vértices que são adjacentes dois a dois, e uma **clique separadora** é um separador que é uma clique.

Relembramos as definições de ordenação, grafo ordenado, e vértices monotonicamente adjacentes.

Seja $|V| = n$. Uma **ordenação** de V é uma função bijetora

$$s : \{1, \dots, n\} \rightarrow V.$$

Se s é uma ordenação de V , então $G_s = (G, s)$ é o **grafo ordenado** associado a G .

Para qualquer $x \in V$ onde $G_s = (G, s)$ o conjunto de vértices **monótonamente adjacente** a x é

$$MAdj(x) = Adj(x) \cap \{z : s^{-1}(z) > s^{-1}(x)\}.$$

A **deficiência** $D(x)$ é o conjunto de todos os pares de vértices não adjacentes no conjunto $Adj(x)$,

$$D(x) = \{(z, y) : y, z \in Adj(x), y \notin Adj(z)\}.$$

A **deficiência monótona** $MD(x)$ é o conjunto

$$MD(x) = \{(y, z) : y, z \in MAdj(x), y \notin Adj(z)\}.$$

Dado um vértice y num grafo G , o grafo H_y obtido de G por:

- a) eliminar y e as suas arestas incidentes,
 - b) acrescentar arestas para tornar todos os vértices em $Adj(y)$ adjacentes
- é o **y -grafo de eliminação** de G .

$$H_y = (V - \{y\}, E(V - \{y\}) \cup D(y)).$$

Para um grafo ordenado $G = (G, s)$ a **seqüência de ordem** de grafos de eliminação H_1, \dots, H_{n-1} é definida por $H_1 = H_{v_1}$, e

$$H_i = (H_{i-1})_{v_i}, i = 2, \dots, n - 1.$$

Como os grafos H_i determinam a evolução do processo de eliminação de vértices, definimos o **processo de eliminação** de um grafo $G = (V, E)$ com ordenação s ao conjunto ordenado

$$P(G; s) = [G = H_0, H_1, \dots, H_{n-1}].$$

Um processo de eliminação $P(G; s)$ é perfeito se

$$H_i = G(V - \cup_{1 \leq j \leq i} v_j) = G(\{v \in V : s^{-1}(v) \geq i + 1\}) = G_{i+1}(s)$$

$$\forall 0 \leq i \leq n - 1.$$

O fato de um processo de eliminação ser perfeito depende do grafo ordenado G_s .

Relembramos agora a definição de grafo monótono transitivo. Um grafo ordenado $G_s = (G, s)$ é **monótono transitivo** quando para todo $x \in V$ temos que

$$y \in MAdj(x), z \in MAdj(x) \Rightarrow y \in Adj(z).$$

Lema 12 R70. *Seja $G_s = (G, s)$ um grafo ordenado. Então são equivalentes:*

- i) G_s é monótono transitivo
- ii) $MD(x) = \emptyset, \forall x \in V$
- iii) $P(G; s)$ é um processo de eliminação perfeita

Relembramos também a definição de grafos cordais. Um grafo G é **cordal** se todo ciclo de comprimento maior que 3 contém uma corda.

Teorema 9 R70. *Para um grafo $G = (V, E)$ as seguintes condições são equivalentes:*

- 1) Existe uma ordenação s de V tal que $G_s = (G, s)$ é monótono transitivo;
- 2) O grafo $G = (V, E)$ é cordal;
- 3) Cada x - y separador minimal de G é uma clique.

Lema 13 B67. *Se $G = (V, E)$ é cordal e $A \subseteq V$ então o subgrafo induzido $G(A)$ é cordal.*

Lema 14 R70. *Seja $G = (V, E)$ um grafo com clique separador S e folhas $L_i, 1 \leq i \leq c$. Se S_0 é um separador para algum L_i , então S_0 é um separador de G . Além disso, se S_0 é um x - y separador minimal de L_i para algum i , então S_0 é um x - y separador minimal de G .*

Lema 15 *R70.* Seja $G = (V, E)$ que satisfaz a propriedade 3) do Teorema 9. Então ou V é uma clique ou dada uma clique $C \subset V$, existe um vértice $x \notin C$ tal que $D(x) = \emptyset$.

Lema 16 *R70.* Seja $G = (V, E)$ um grafo cordal com clique $C \subseteq V$. Então existe uma ordenação monótona transitiva s tal que $s(j) \in C, j = k + 1, \dots, n$ onde $k = n - |C|$.

Teorema 10 *R70.* Seja $G = (V, E)$ um grafo cordal e seja s uma ordenação monótona transitiva. Se S é um x - y clique separador minimal de G , então $S = MAdj(v_j)$ para algum $v_j \in V$. Reciprocamente, para qualquer $v_j \in V$ tal que os vértices do grafo de eliminação H_{i-1} não são uma clique, $MAdj(v_j)$ é uma clique separadora de G .

Seja $G_s = (G, s)$ um grafo ordenado associado com $G = (V, E)$ e $d(s(i))$ o grau do vértice $s(i)$ no grafo de eliminação H_{i-1} (ou seja $d(s(i)) = |Adj(s(i))|$ em H_{i-1}). Se o grafo $G = (G, s)$ é monótono transitivo então

$$\sum_{i=1}^{n-1} d(s(i)) = |E|$$

pois cada aresta em E é computada uma única vez em algum $d(s(i))$.

ii.3.2 O Processo de Eliminação e a Busca em Largura Lexicográfica

Nesta seção veremos a relação existente entre os resultados apresentados na seção anterior e a Busca em Largura Lexicográfica. Os conceitos aqui desenvolvidos são extraídos do artigo *RTL76*.

Sejam $G = (V, E)$ um grafo, s uma ordenação de G e o processo de eliminação de G com respeito a s ,

$$P(G; s) = [G = H_0, H_1, \dots, H_{n-1}]$$

onde

$$H_i = (V_i, E_i), 0 \leq i \leq n - 1$$

é a seqüência dos grafos de ordem dos grafos de eliminação. Definimos o **fill-in**

$$F(G_s) = \cup_{1 \leq i \leq n-1} \tau_i, \tau_i = D(v_i) \text{ em } H_{i-1}$$

e o **grafo de eliminação**

$$G_s^* = (V, E \cup F(G_s)).$$

Dado $G = (V, E)$, uma ordenação de V s é um **esquema de eliminação perfeita** se $F(G_s) = \emptyset$ (Observar que $F(G_s) = \emptyset$ se e somente se $G_s^* = G$, ou seja todas as arestas acrescentadas para construir os v_i -grafos de eliminação já pertencem ao grafo G e não é necessário acrescentá-las. Isto ocorre se e somente se $H_i = G(V - \cup_{1 \leq j \leq i} v_j)$).

Um **grafo de eliminação perfeita** é um grafo que admite um esquema de eliminação perfeita.

Damos a seguir a motivação da idéia de Busca em Largura Lexicográfica ao relacionar a Busca em Largura com o esquema de eliminação perfeita.

Dado um grafo G , uma Busca em Largura (BFS) em G com início num vértice v é o percurso pelas arestas de G utilizando o algoritmo a seguir:

Procedimento[BFS($G(V, E)$)]
início
 $Q = v$ { Q fila}
 $nivel(v) = 0$
 marcar v
 enquanto $Q \neq \emptyset$ fazer
 remover o primeiro vertice v em Q
 (*) para $w \in Adj(v)$ fazer
 se w não marcado então
 $Q = Q \cup \{w\}$
 $nivel(w) = nivel(v) + 1$
 marcar (v, w) aresta da arvore
 marcar w
fim[BFS]

Em cada passo, o algoritmo BFS analisa arestas incidentes ao vértice mais antigo na fila, o que conduz a um vértice já atingido, ou a um vértice novo (que agora será considerado atingido e marcado).

Durante a execução do algoritmo, cada aresta é examinada duas vezes. O efeito produzido pelo algoritmo é:

- 1) construir uma árvore geradora de G dada pelas arestas (u, w) tais que w não foi atingido ainda quando é executada a linha (*) com $w \in Adj(u)$.
- 2) particionar os vértices de G em níveis, se u é um vértice tal que $nivel(u) = i$ então o caminho mais curto de v até u tem comprimento i .

Cada aresta une dois vértices no mesmo nível ou em níveis adjacentes.

Se s é um esquema de eliminação perfeita para um grafo G , e um vértice x é unido a um vértice w com $nivel(w) = nivel(x) + 1$, e a um vértice u com $nivel(u) = nivel(x) - 1$, então $s^{-1}(x) > \min\{s^{-1}(u), s^{-1}(w)\}$ pois temos que $(u, w) \notin E$. Isto nos sugere que existe uma relação entre o esquema de eliminação perfeita e a ordenação por níveis. Então os níveis dados pela Busca em Largura transmitem informação sobre o esquema de eliminação perfeita, mas para obtê-la será necessário desempatar dentro dos níveis. Para fazer isto, apresentamos uma modificação do algoritmo anterior.

Procedimento[LEX-M($G(V, E)$)]

inicio

para $v \in V$ *fazer* $R(v) = \emptyset$

para $i = n, 1$ *fazer*

- (1) escolher um vertice v não numerado de maior $R(v)$

{atribuir a v o valor i }

$s(i) = v$

- (2) *para* cada vertice não numerado w tal que existe um caminho

de v a w com todos os vertice intermediarios u com valor

$s^{-1}(u) < s^{-1}(w)$, anexar i a $R(w)$

fim[LEX-M]

O algoritmo LEX-M constrói uma ordenação s para um grafo inicialmente desordenado $G = (V, E)$ e constrói um rótulo $R(x)$ dado pelo valor do arranjo ao finalizar o procedimento.

Seja G um grafo qualquer. A ordenação s produzida por LEX-M é minimal no seguinte sentido, não existe ordenação β de G tal que $F(G_\beta) \subset F(G_s)$.

Chamamos de **ordenação lexicográfica** à ordenação dada por LEX-M.

Pelo Lema 7 provado em *RTL76* temos que se G é um grafo qualquer e s é ordenação lexicográfica de G , então em $G_s^* = (V, E \cup F(G_s))$ é válido que para todo $w \in V$

$$R(w) = \{s^{-1}(v) : v \in MAdj(w)\}.$$

Então, simplificamos o passo (2) em LEX-M para obter o algoritmo de Busca em Largura Lexicográfica.

Procedimento [Busca em Largura Lexicografica($G(V, E), n$)]

início

para $v \in V$ fazer $R(v) = \emptyset$

para $j = n, 1$ fazer

(1) escolher um vertice $v \in V : s^{-1}(v)$ não definido e tal que $R(v)$ lexicograficamente maximo

$$s(j) = v$$

(2) para $w \in Adj(v) : s^{-1}(w)$ não definido fazer incluir j a direita de $R(w)$

fim[Busca em Largura Lexicografica]

O algoritmo Busca em Largura Lexicográfica gera uma ordenação s que será perfeita se G tiver um esquema de eliminação perfeita.

Para fazer uma implementação eficiente do algoritmo de Busca em Largura Lexicográfica não serão calculados explicitamente os rótulos dos vértices. Para cada valor de rótulo, mantemos o conjunto S de todos os vértices que tem este rótulo. Armazenamos todos os conjuntos numa lista ordenada lexicograficamente por rótulo (de maior a menor). Quando um novo vértice x é marcado, criamos um novo conjunto S' para todo conjunto existente S que contém um vértice w tal que $w \in MAdj(x)$. Eliminar de S todos os vértices w e acrescentá-los ao novo conjunto S' , que será inserido na lista de conjuntos na frente de S .

Pode-se observar que este método mantém a ordenação lexicográfica sem calcular especificamente os rótulos.

Uma outra observação se faz necessária. *RLT76* afirma que se G é um grafo de eliminação perfeita e s uma ordenação lexicográfica, então $F(G_s) = \emptyset$. Podemos concluir então que no caso do grafo G cordal, pelo Teorema 7 da seção **ii.3.1** temos que G_s é monótono transitivo e pelo Lema 12 da mesma seção $P(G; s)$ é um processo de eliminação perfeita. Então G é um grafo de eliminação perfeita e temos que em $G_s^* = G$, para todo $w \in V$, $R(w) = \{s^{-1}(v) : v \in MAdj(w)\}$. Assim podemos enunciar o Lema a seguir.

Lema 17 *Se G é cordal e s é a ordenação obtida pela Busca em Largura Lexicográfica, então temos que*

$$R(v) = \{s^{-1}(w) : w \in MAdj(v)\}.$$

ii.4 k -árvores

Os resultados que se seguem são conhecidos e podem ser encontrados em *R74*. Nesse artigo apresenta-se uma caracterização de k -árvores utilizando os conceitos de clique, separador e caminho. As definições e os teoremas, necessários para o nosso trabalho, são vistos a seguir.

R74. Uma **k -árvore** é um grafo definido recursivamente assim:

- 1) Uma k -clique é uma k -árvore de k vértices.
- 2) Dada uma k -árvore T_n de n vértices, uma k -árvore de $n+1$ vértices é obtida quando acrescentamos um novo vértice que é adjacente exatamente a todos os vértices de uma única k -clique em T_n .

k -árvores são uma subclasse da classe de grafos cordais. Pode-se observar que se $x_i, 1 \leq i \leq n$ são os vértices da k -árvore de n vértices construída como na definição, então este grafo é monótono transitivo com ordenação $s(i) = v_i = x_{n+1-i}, 1 \leq i \leq n$.

Teorema 11 *R74.* Um grafo $G = (V, E)$ é uma k -árvore se e somente se:

- i) G é conexo,
- ii) G contém uma k -clique mas não contém uma $(k+2)$ -clique,
- iii) cada x - y separador minimal de G é uma k -clique.

Teorema 12 *R74.* $G = (V, E)$ é uma k -árvore se e somente se verificam-se:

- a) G contém uma k -clique e não contém uma $(k+2)$ -clique.
- b) cada x - y separador minimal de G é uma clique.
- c) $m = kn - \frac{1}{2}k(k+1)$.

Observar que b) no Teorema 12 é equivalente a ter um grafo cordal, pelo Lema 8 seção ii.2. Então, podemos reescrever o Teorema 12 da seguinte maneira:

Teorema 13 $G = (V, E)$ é uma k -árvore se e somente se verificam-se:

- a) G contém uma k -clique e não contém uma $(k+2)$ -clique.
- b) G é cordal.
- c) $m = kn - \frac{1}{2}k(k+1)$.

ii.5 Síntese do Capítulo

Neste capítulo apresentamos a base teórica para os capítulos posteriores. Os resultados mais importantes que foram enunciados nesta parte, são:

O Teorema 4 que determina o número de arestas num grafo periplanar maximal.

O Lema 5 que garante a existência e unicidade de ciclo hamiltoniano para os grafos periplanares maximais.

Os Teoremas 7 e 8 que provam a linearidade do algoritmo de reconhecimento dos grafos cordais.

O Lema 17 que relaciona os conjuntos monótonamente adjacentes com os rótulos obtidos pela Busca em Largura Lexicográfica.

O Teorema 13 que caracteriza as k -árvores.

Todos estes resultados serão utilizados freqüentemente nos capítulos que se seguem.

Capítulo ii. Base Teórica

Capítulo iii

Caracterização e Reconhecimento

Neste capítulo estudamos a caracterização e o reconhecimento de k -árvores, para obter algoritmos de reconhecimento para os grafos periplanares maximais e as 3-árvores planares. Estas duas classes de grafos são casos particulares de k -árvores. Por serem utilizados nos próximos capítulos, os resultados aqui apresentados são de grande importância para o desenvolvimento do nosso trabalho.

Na seção **iii.1** apresentaremos o trabalho realizado por *KM89* para introduzir o conceito de conjunto base de grafos cordais, obtido a partir de um esquema de eliminação perfeita para o grafo dado.

Na seção **iii.2** apresentaremos resultados novos que relacionam a definição de k -árvore com a Busca em Largura Lexicográfica. Estes resultados permitirão obter um algoritmo de reconhecimento de k -árvores, para k fixo.

Nas seções **iii.3** e **iii.4** casos particulares importantes de k -árvores serão apresentados. Na seção **iii.3** apresentaremos a caracterização e o algoritmo de reconhecimento de grafos periplanares maximais. Na seção **iii.4** generalizamos os resultados da seção anterior para o caso de 3-árvores planares. Ainda nesta seção, provaremos que as 3-árvores planares constituem exatamente a interseção entre os grafos cordais e os grafos planares maximais.

iii.1 Conjunto Base de Grafos Cordais e k -árvores

Em *KM89* é proposto um algoritmo linear para reconhecer grafos cordais planares mais simples que o algoritmo geral para testar planaridade. Além disso, é provado um resultado que caracteriza os grafos periplanares maximais a partir das 2-árvores. Os conceitos teóricos apresentados neste trabalho serão de grande utilidade para os algoritmos de reconhecimento de grafos periplanares maximais e 3-árvores planares que serão obtidos nas próximas seções.

Sejam $G = (V, E)$ um grafo cordal, conexo, não trivial e s um esquema de eliminação perfeita para G . Definimos para $1 \leq i \leq n$

$V_i(s) = \{u \in V : s^{-1}(u) \geq i\}$, e

$G_i(s)$ o subgrafo induzido por $V_i(s)$. Portanto temos

$G_1(s) = G(\{u \in V : s^{-1}(u) \geq 1\}) = G(V) = G$,

e $G_n(s) = G(\{v \in V : s^{-1}(v) = n\}) = \{v_n\}$.

Observe que os conjuntos $G_i(s)$, $n \geq i \geq 1$ permitem reconstruir o grafo cordal G ao acrescentar um por um os vértices de G na ordem dada pelo esquema de eliminação perfeita s , partindo do grafo formado pelo único vértice v_n e chegando no grafo G , enquanto que na seção **ii.3.1** os conjuntos H_j , $0 \leq j \leq n - 1$ vão eliminando um por um os vértices do grafo cordal G , partindo do grafo G e chegando no grafo formado pelo único vértice v_n .

KM 89. Dizemos que $B \subseteq V$ é um **conjunto base** de um grafo cordal G em relação a s se existir $v \in V : s^{-1}(v) = t$, e verificam-se:

i) $B = MAdj(v) = Adj(v) \cap \{u \in V : s^{-1}(u) > s^{-1}(v)\}$,

ii) B não é clique maximal em $G_{t+1}(s)$.

Por exemplo, seja G o grafo dado na Figura iii.1, onde temos os seguintes

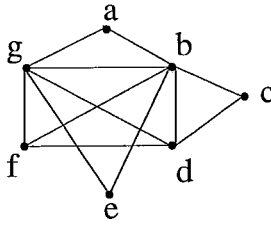


Figura iii.1 Exemplo grafo cordal

valores para o complemento de largura, rótulo e conjunto de vértices monotonicamente adjacentes a cada vértice $v \in V$, obtidos por uma Busca em Largura Lexicográfica.

v	$s^{-1}(v)$	$R(v)$	$MAdj(v)$
a	7	\emptyset	\emptyset
b	6	7	a
c	1	6,4	b,d
d	4	6,5	b,g
e	2	6,5	b,g
f	3	6,5,4	b,g,d
g	5	7,6	a,b

São conjuntos base para o grafo G :

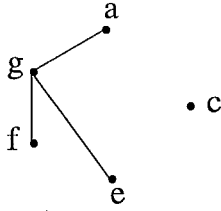
$$B = \{b, d\}, B' = \{b, g\}.$$

KM89. Para um conjunto base B , $D(B, s) = \{v : v \text{ satisfaz i) e ii) da definição de conjunto base}\}$ é chamado de **conjunto de vértices dependentes em relação a s** .

$|D(B, s)| = \mu(B, s)$ é a **multiplicidade do conjunto B em relação a s** .

No exemplo anterior temos, para o conjunto base $B = \{b, d\}$, $D(B, s) = \{c\}$ e $\mu(B, s) = 1$, e para o conjunto base $B' = \{b, g\}$, $D(B', s) = \{e, d\}$ e $\mu(B', s) = 2$.

Lema 18 *KM89*. O número de conjuntos base de um grafo cordal G em relação a s é, no máximo, um menos do que o número de cliques maximais em G .

Figura iii.2 Componentes conexos de $G(V - B)$

Lema 19 *KM89.* Seja B um conjunto base de um grafo cordal G em relação a s , e seja $t = \max\{s^{-1}(x) : x \in D(B, s)\}$. Então B é clique separadora de $G_j(s)$, $1 \leq j \leq t$.

Em particular, para $j = 1$ temos que se B é conjunto base de um grafo cordal em relação a s então B é clique separadora de $G_1(s) = G$.

KM89. Seja B um conjunto base de um grafo cordal G em relação a s . Chama-se **componente dependente de B no subgrafo $G_i(s)$** ao componente conexo M de $G(V_i - B)$ que verificar que existe um $x \in V(M)$ tal que $\forall y \in B, (x, y) \in E(G_i(s))$.

Notamos ao **número de componentes dependentes de B no subgrafo $G_i(s)$** por $d_i(B, s)$, para $1 \leq i \leq n$.

Observe que $d_1(B, \alpha) = d_1(B, \beta)$ onde α, β são dois esquemas de eliminação perfeita distintos de G . Isto é pois $G_1(\alpha) = G_1(\beta) = G$. Então, notaremos $d_1(B, s) = d(B)$ uma vez que o grafo $G_1(s)$ coincide com G para todo esquema de eliminação perfeita s de G .

No exemplo anterior temos, para o conjunto base $B = \{b, d\}$, os componentes conexos de $G(V - B)$ dados na Figura iii.2.

O componente conexo $\{c\}$ é componente dependente de B em $G(s)$.
O componente conexo $\{a, g, f, e\}$ é componente dependente de B em $G(s)$.

Podemos dizer que os componentes dependentes de B no grafo G são os componentes conexos de $G(V - B)$ onde temos, no mínimo, um vértice adjacente a todos os vértices de B . Como G é cordal e B é clique separadora, então existe uma clique com, no mínimo, um elemento a mais que o número de elementos de B se existir algum componente dependente de B no grafo $G_1(s) = G$.

Lema 20 *KM89.* *Seja B um conjunto base de um grafo cordal G em relação a s . Então $d(B) = \mu(B, s) + 1$.*

Corolário 5 *KM89.* *Se B é um conjunto base de um grafo cordal G em relação a s , então B é propriamente contido em, no mínimo, $\mu(B, s) + 1$ cliques maximais de G .*

Corolário 6 *KM89.* *Seja B conjunto base de um grafo cordal G em relação a s . Não existem dois vértices do conjunto $D(B, s)$ que pertençam ao mesmo componente dependente de B .*

Teorema 14 *KM89.* *Sejam α, β dois esquemas de eliminação perfeita de um mesmo grafo cordal G .*

i) se B é conjunto base de G em relação a α , então é conjunto base de G em relação a β .

ii) $\mu(B, \alpha) = \mu(B, \beta) = \mu(B)$.

Então, quando falamos de conjunto base, podemos esquecer o esquema de eliminação perfeita.

Lema 21 *KM89.* *Seja G uma 3-árvore.*

G é planar se e somente se cada conjunto base B de G verifica $\mu(B) = 1$.

A prova do Lema que se segue é fundamental para o algoritmo de reconhecimento de grafos periplanares maximais. Por essa razão será aqui reproduzida.

Lema 22 *KM89.* *Seja G uma 2-árvore.*

G é periplanar maximal se e somente se cada conjunto base B de G verifica $\mu(B) = 1$.

Prova:

\Leftarrow)

Seja s um esquema de eliminação perfeita para G . Seja P_i uma imersão periplana de $G_i(s)$, $1 \leq i \leq n$. Suponhamos que todos os vértices de $G_i(s)$ encontram-se na face exterior de P_i .

As arestas de P_i que formam a face exterior são chamadas de arestas exteriores, e as arestas restantes em P_i são chamadas de arestas interiores.

Provaremos por indução em t a seguinte hipótese indutiva:

$G_{n-t}(s)$, $0 \leq t \leq n-1$ tem uma imersão periplana maximal P_{n-t} , $0 \leq t \leq n-1$ na qual uma aresta é aresta interior se e somente se a aresta forma um conjunto base de $G_{n-t}(s)$, $0 \leq t \leq n-1$.

Se $0 \leq t \leq 2$ então $G_{n-t}(s)$ é $(t+1)$ -clique e não contém arestas interiores, portanto não temos nada a provar.

Seja $n-1 > t > 2$. Seja $v = V_{n-(t+1)}(s) - V_{n-t}(s)$, e seja $B = MAdj(v)$. Suponhamos que B é conjunto base de $G_{n-t}(s)$, então B tem multiplicidade 2, o que é um absurdo pois pela hipótese temos que $\mu(B) = 1$. Então temos que B não é conjunto base de $G_{n-t}(s)$. E temos pela hipótese indutiva que B é uma aresta exterior em P_{n-t} .

Para obter $P_{n-(t+1)}$ colocamos v na face exterior de P_{n-t} e acrescentamos duas arestas para uni-lo com os vértices de B .

Então temos que uma aresta é interior em $P_{n-(t+1)}$ se e somente se é um conjunto base de $G_{n-(t+1)}(s)$. Isto é válido ou pela hipótese indutiva (já era aresta interior de P_{n-t}) ou pois a aresta é uma aresta interior obtida ao acrescentar as duas arestas para unir v com os vértices de B . Assim temos que vale a prova da hipótese indutiva e portanto G admite uma imersão periplana.

\Rightarrow)

Seja G grafo periplanar maximal, $n = |V|$.

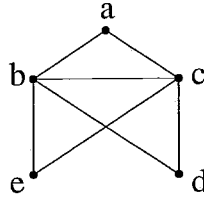


Figura iii.3 Exemplo de 2-árvore não periplanar maximal (grafo tenda)

Então temos que $m = 2n - 3$, G é cordal, e G não contém K_4 . Então G é 2-árvore.

Suponhamos que B é conjunto base de G tal que $\mu(B) \geq 2$.

Pelo Corolário 5 anterior, B está contido no mínimo em 3 cliques maximais de G (ou seja em 3 triângulos). Absurdo, pois cada aresta num grafo periplanar maximal está contida no máximo em 2 triângulos (observar que o menor grafo que verifica que uma aresta pertence a 3 triângulos é o grafo "tenda" dado na figura iii.3. O grafo tenda contém como subgrafo o grafo $K_{2,3}$, obtido ao eliminar a aresta comum aos três triângulos. Portanto o grafo tenda não é periplanar pelo Teorema 5 seção ii.1.2, e assim o grafo que contiver o grafo tenda não é periplanar maximal).

Então temos que $\mu(B) = 1$ para todo conjunto base de G . ■

Teorema 15 KM89. *Um grafo G é uma k -árvore planar se e somente se G é ou uma árvore, ou uma 2-árvore, ou uma 3-árvore onde cada conjunto base tem multiplicidade um.*

A seguir damos exemplos de 2-árvore não periplanar, grafo periplanar maximal, 3-árvore e 3-árvore planar.

Exemplo 1: Seja G o grafo da Figura iii.3, para o qual temos os seguintes dados:

v	$s^{-1}(v)$	$R(v)$	$MAdj(v)$
a	5	\emptyset	\emptyset
b	4	5	a
c	3	5,4	a,b
d	2	4,3	b,c
e	1	4,3	b,c

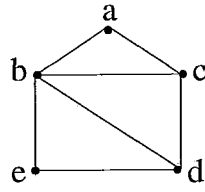


Figura iii.4 Exemplo de grafo periplanar maximal

Observe que $\forall i < n - 2$ o conjunto $MAdj(v)$, onde $v = s(i)$, é conjunto base.

$$B = \{b, c\}, D(B, s) = \{d, e\}, \mu(B, s) = 2$$

G é 2-árvore e não é periplanar maximal pois não verifica o Lema 22. Isto é, podemos concluir que o grafo é uma 2-árvore utilizando a definição, e temos que existe um conjunto base B com multiplicidade diferente de 1.

Exemplo 2: Seja G o grafo da Figura iii.4, para o qual temos os seguintes dados:

v	$s^{-1}(v)$	$R(v)$	$MAdj(v)$
a	5	\emptyset	\emptyset
b	4	5	a
c	3	5,4	a,b
d	2	4,3	b,c
e	1	4,2	b,d

Observe que $\forall i < n - 2$ o conjunto $MAdj(v)$, onde $v = s(i)$, é conjunto base.

$$B = \{b, c\}, D(B, s) = \{d\}, \mu(B, s) = 1$$

$$B' = \{b, d\}, D(B', s) = \{e\}, \mu(B', s) = 1.$$

G é 2-árvore e periplanar maximal pois verifica o Lema 22. G é 2-árvore, e $\forall B, \mu(B) = 1$.

Exemplo 3: Seja G o grafo da Figura iii.5, para o qual temos os seguintes dados:

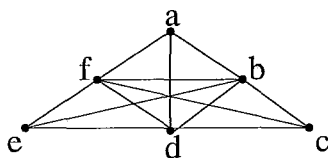


Figura iii.5 Exemplo de 3-árvore não planar

v	$s^{-1}(v)$	$R(v)$	$MAdj(v)$
a	6	\emptyset	\emptyset
b	5	6	a
c	2	5,4,3	b,f,d
d	3	6,5,4	a,b,f
e	1	5,4,3	b,f,d
f	4	6,5	a,b

Observe que $\forall i < n - 3$ o conjunto $MAdj(v)$ onde $v = s(i)$ é conjunto base.

$$B = \{b, f, d\}, D(B, s) = \{c, e\}, \mu(B, s) = 2$$

G é 3-árvore e não é planar pois não verifica o Lema 21. G é 3-árvore porque verifica a definição, e existe conjunto base B com multiplicidade diferente de 1.

Exemplo 4: Seja G o grafo da Figura iii.6, para o qual temos os seguintes dados:

v	$s^{-1}(v)$	$R(v)$	$MAdj(v)$
a	5	\emptyset	\emptyset
b	4	5	a
c	3	5,4	a,b
d	2	5,4,3	a,b,c
e	1	4,3,2	b,c,d

Observe que $\forall i < n - 3$ o conjunto $MAdj(v)$, onde $v = s(i)$, é conjunto base.

$$B = \{b, c, d\}, D(B, s) = \{e\}, \mu(B, s) = 1$$

G é 3-árvore planar pois verifica o Lema 21. G é 3-árvore e $\forall B, \mu(B) = 1$.

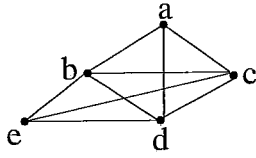


Figura iii.6 Exemplo de 3-árvore planar

iii.2 k -árvores

As k -árvores foram apresentadas na seção ii.4. Nesta seção daremos resultados novos para obter um algoritmo de reconhecimento de k -árvores para k fixo, utilizando a Busca em Largura Lexicográfica. Como já vimos no Teorema 15 da seção iii.1, as k -árvores planares são exatamente as árvores, as 2-árvores e as 3-árvores planares. Estes três subconjuntos do conjunto das k -árvores encontram-se na interseção da classe dos grafos cordais com a classe dos grafos planares. Nas seções a seguir aproveitaremos os resultados obtidos nesta para os casos particulares de 2-árvores e 3-árvores que, juntamente com os Lemas 21 e 22 da seção anterior, darão sustento aos algoritmos de reconhecimento de grafos periplanares maximais e 3-árvores planares.

Lema 23 *Seja $G = (V, E)$ uma k -árvore de $n \geq k$ vértices. Então temos que $\forall v \in V, d(v) \geq k$.*

Prova:

É imediata da definição por indução. ■

Lema 24 *Seja $G = (V, E)$ uma k -árvore de $n > k$ vértices. Então temos que $|Adj(v)| = k$ para todo vértice simplicial de G .*

Prova:

Seja v um vértice simplicial em G .

Temos que $|Adj(v)| \leq k$ pois senão teríamos que $|Adj(v) \cup \{v\}| > k + 1$. $Adj(v) \cup \{v\}$ é completo, então G conteria uma clique de tamanho igual a

$k + 2$, o que é uma contradição.

Pelo Lema anterior temos que $\forall v \in V, d(v) \geq k$ e portanto $|Adj(v)| \geq k$.

Assim temos se v é vértice simplicial de uma k -árvore G então $|Adj(v)| \leq k$ e $|Adj(v)| \geq k$, ou seja $|Adj(v)| = k$. ■

Lema 25 *Seja $G = (V, E)$ uma k -árvore de $n > k$ vértices e seja v um vértice simplicial de G . Então $G - v$ é k -árvore.*

Prova:

Seja v vértice simplicial em G .

Pelo Lema 6 da seção ii.2 temos que $G - v$ é cordal.

$G - v$ contém k -clique pois $n > k$ por hipótese. Então $|V - v| = n - 1 \geq k$, portanto v é adjacente a k vértices em $V - v$ que formam uma clique. Assim temos que $G - v$ contém k -clique.

$G - v$ não contém $(k + 2)$ -clique pois $G - v \subset G$ e G não contém $(k + 2)$ -clique. Agora vamos provar que se $|V - v| = n'$ e $|E - \{(v, u) : u \in Adj(v)\}| = m'$ então $m' = kn' - \frac{1}{2}k(k + 1)$.

Pela definição de k -árvore temos que $m = kn - \frac{1}{2}k(k + 1)$. E então $m' = m - k = kn - \frac{1}{2}k(k + 1) - k = k(n - 1) - \frac{1}{2}k(k + 1) = kn' - \frac{1}{2}k(k + 1)$.

Assim temos que $G - v$ verifica as três condições do Teorema 13 seção ii.4 e portanto $G - v$ é k -árvore. ■

Corolário 7 *Seja $G = (V, E)$ uma k -árvore e sejam s um esquema de eliminação perfeita para G dado por uma Busca em Largura Lexicográfica e $G_i(s) = \{u \in V : s^{-1}(u) \geq i\}$, $1 \leq i \leq n$. Seja $v_i, i \leq n - k$ um vértice simplicial em $G_i(s)$. Então temos que $G_{i+1}(s) = G_i(s) - v_i$ é k -árvore para todo $i \leq n - k$.*

Teorema 16 *Seja $G = (V, E)$ um grafo cordal e seja s um esquema de eliminação perfeita para G dado por uma Busca em Largura Lexicográfica.*

G é k -árvore se e somente se $|R(v_i)| = k, \forall i \leq n - k; |R(v_{n-j})| = j, \forall 0 \leq j \leq k - 1$.

Prova:

\Rightarrow)

Seja $G = (V, E)$ uma k -árvore e seja s um esquema de eliminação perfeita para G dado por uma Busca em Largura Lexicográfica.

Dividimos a prova em duas partes:

1) Sejam $i \leq n - k$, $G_{i+1}(s) = G_i(s) - v_i$, e v_i vértice simplicial em $G_i(s)$; G_i é k -árvore e $|V_i| > k$. Então temos pelo Lema 24 que $|MAdj(v_i)| = k$, e pelo Lema 17 seção **ii.3.2** que $|R(v_i)| = |MAdj(v_i)|$.

Portanto, temos que $|R(v_i)| = k$.

2) Seja $i = n - j$, $0 \leq j \leq k - 1$. Pelo Corolário 7 para $i = n - k$ temos que v_{n-k} é vértice simplicial de $G_{n-k}(s)$ e $G_{n-k+1}(s)$ é uma k -árvore. Então $G_{n-k+1}(s) = G(\{u \in V : s^{-1}(u) \geq n - k + 1\}) = G(\{v_{n-k+1}, \dots, v_n\})$ é uma k -árvore de k vértices. Assim, pela definição de k -árvore de k vértices temos que $G_{n-k+1}(s) = G(\{v_{n-k+1}, \dots, v_n\})$ é uma clique de tamanho k . Então temos que v_{n-j} é adjacente a j vértices em $G_{n-j}(s)$, $0 \leq j \leq k - 1$.

E então temos que

$$|R(v_{n-j})| = |MAdj(v_{n-j})| = |Adj(v_{n-1}) \cap \{u \in V : s^{-1}(u) \geq n - j\}| = j, 0 \leq j \leq k - 1.$$

Assim, temos que

$$|R(v_i)| = k, \forall i \leq n - k; |R(v_{n-j})| = j, \forall 0 \leq j \leq k - 1. .$$

\Leftarrow)

Seja G cordal e seja s um esquema de eliminação perfeita para G dado por uma Busca em Largura Lexicográfica onde temos que:

$$|R(v_i)| = k, \forall i \leq n - k \text{ e}$$

$$|R(v_{n-j})| = j, \forall 0 \leq j \leq k - 1.$$

Vamos reconstruir a k -árvore pela definição.

Temos que $v_n, \dots, v_{n-(k-1)}$ formam uma clique de tamanho k pois

$$|R(v_{n-j})| = |MAdj(v_{n-j})| = |Adj(v_{n-1}) \cap \{u \in V : s^{-1}(u) \geq n - j\}| = j, 0 \leq j \leq k - 1.$$

$$G_{n-k+1}(s) = G(V_{n-k+1}(s)) = G(\{v_{n-k+1}, \dots, v_n\}) = G(V - \{v_1, \dots, v_{n-k}\}).$$

Acrescentar v_{n-i} no grafo G_{n-i+1} para obter G_{n-i} , $k \leq i \leq n-1$. Finalmente temos que G_1 assim construído é o grafo G e verifica a definição de k -árvore.

Portanto temos o resultado desejado. ■

Pelo Teorema 16 anterior, temos que se G é cordal e $s = \{v_1, \dots, v_n\}$ é um esquema de eliminação perfeita dado por uma Busca em Largura Lexicográfica para G tal que $|R(v_i)| = k \forall i \leq n-k$; $|R(v_{n-j})| = j$, $0 \leq j \leq k-1$ então G é uma k -árvore.

Então propomos o seguinte algoritmo linear para reconhecer k -árvores. São conhecidos o grafo G , cordal com $n > 3$; a seqüência s e os rótulos $R(v) : v = s(i)$, $1 \leq i \leq n$, obtidos pela Busca em Largura Lexicográfica.

Procedimento[k -arvore]

k ARVORE=VERDADEIRO

para $i = 1, n$ fazer

 se $i > n - k$ então

 se $|R(s(i))| \neq n - i$ então k ARVORE=FALSO

 senão se $|R(s(i))| \neq k$ então k ARVORE=FALSO

se k ARVORE=VERDADEIRO então " G k -arvore"

caso contrario " G não k -arvore"

fim[k -arvore]

O procedimento anterior determina corretamente quando um grafo é uma k -árvore, pois é baseado nos resultados anteriores.

Lema 26 *A complexidade do procedimento k -árvore é de $O(kn)$.*

Prova:

Observe que é possível verificar a cordalidade do grafo em tempo linear devido aos Teoremas 7 e 8 da seção ii.2. Nessa verificação obtemos o esquema de eliminação perfeita para G .

O laço do procedimento k -árvore é iterado n vezes no máximo, e cada iteração

toma tempo de $O(k)$, tendo em vista que cada rótulo precisa ser percorrido para análise. ■

Enunciamos o seguinte teorema que permite obter a ordenação dos vértices dada na definição de k -árvore, utilizando a numeração obtida pela Busca em Largura Lexicográfica para uma k -árvore.

Teorema 17 *Seja G uma k -árvore, e seja $s = \{v_1, \dots, v_n\}$ um esquema de eliminação perfeita para G obtido por a Busca em Largura Lexicográfica. Sejam os vértices de G numerados da seguinte maneira:*

$$x_j = v_{n-j+1} \text{ onde } 1 \leq j \leq n.$$

Então temos que os vértices numerados por x_1, \dots, x_n verificam a definição de k -árvore.

Prova:

Como temos que G é uma k -árvore então pelo Teorema 13 seção ii.4 G é cordal, e então temos que $\forall v \in V$ o subgrafo induzido por $MAdj(v)$ é completo.

Pelo Teorema 16 visto anteriormente, temos que para G uma k -árvore, e s um esquema de eliminação perfeita para G , verifica-se que $\forall v : s^{-1}(v) \leq n - k$, $|R(v)| = k$.

Seja $j \leq n - k$, então $|R(v_j)| = k$ e então, pelo Lema 17 da seção ii.3.2 temos que $|MAdj(v_j)| = k$.

Portanto, podemos dizer que $\forall j \leq n - k$, o vértice v_j é adjacente a uma clique de tamanho k em $G - \{v_1, \dots, v_j\}$.

Por outro lado, temos que em $G - \{v_1, \dots, v_{n-k}\}$ há k vértices, e eles compõem uma clique de k elementos (pois temos que pelo Teorema 16 $|R(v_{n-j})| = j$, $\forall 0 \leq j \leq k - 1$, e assim $|MAdj(v_{n-j})| = j$, $\forall 0 \leq j \leq k - 1$).

Então $x_j = v_{n-j+1}$, $1 \leq j \leq n$ verifica a definição de k -árvore pois $x_1, \dots, x_k = v_n, \dots, v_{n-(k-1)}$ é uma k -clique, e para todo $j \geq k + 1$, $x_j = v_{n-j+1}$ é adjacente a uma k -clique. ■

Lema 27 *Se $s = \{v_1, \dots, v_n\}$ é um esquema de eliminação perfeita para o grafo G que é uma k -árvore, então*

$$\forall v : s^{-1}(v) < n - k \Rightarrow MAdj(v) \text{ é conjunto base}$$

Prova:

Seja $v : s^{-1}(v) = t < n - k$.

Queremos provar que o conjunto $MAdj(v)$ não é clique maximal em $G_{t+1}(s)$ e assim verificar a parte ii) da definição de conjunto base.

Seja $G_t(s) = G(\{v_n, \dots, v_t\}) = G(\{v : s^{-1}(v) \geq t\})$.

Pelo Lema 17 da seção ii.3.2 temos que $|R(v)| = |MAdj(v)|$. Como $t = s^{-1}(v) < n - k$ então, pelo Teorema 16 $|MAdj(v)| = k$ e o subgrafo induzido por $MAdj(v)$ é completo (por ser G cordal), então temos que $MAdj(v)$ induz uma clique de tamanho k em G , e em particular em $G_{t+1}(s) \subseteq G$.

Ou seja se $t = s^{-1}(v)$, $MAdj(v)$ induz uma clique de tamanho k em $G_{t+1}(s)$. Queremos provar que $MAdj(v)$ não é clique maximal em $G_{t+1}(s)$. Para isso veremos que existe uma clique de tamanho $k + 1$ em $G_{t+1}(s)$ que contém $MAdj(v)$.

Por ser $t = s^{-1}(v) < n - k$, temos que $t + 1 = s^{-1}(v) + 1 < n - k + 1 = n - (k - 1)$, e então $t + 1 \leq n - (k - 1) + 1 = n - k$. E assim em $G_{t+1}(s) = G(\{v_n, \dots, v_{t+1}\})$ existem $n - (t + 1) + 1$ vértices, ou seja existem $n - t$ vértices.

Se $t < n - k$, então $t \leq n - k - 1$ e assim temos que $-t \geq -n + k + 1$, e $n - t \geq k + 1$. Então em $G_{t+1}(s)$ existem pelo menos $k + 1$ vértices e portanto existe clique de tamanho $k + 1$ em $G_{t+1}(s)$ (observar que a clique gerada por $MAdj(v_{n-k}) \cup \{v_{n-k}\}$ está contida em $G_{t+1}(s)$ e é de tamanho $k + 1$). ■

iii.3 Grafos Periplanares Maximais

Nessa seção tratamos do reconhecimento de grafos periplanares maximais, supondo conhecido o reconhecimento de uma 2-árvore (seção iii.2 para o caso particular $k = 2$).

Assim temos o Lema 28 que permite estabelecer quando uma 2-árvore é um grafo periplanar maximal. Além disso, obtemos um algoritmo linear para reconhecer grafos periplanares maximais.

Lembramos primeiro o Lema 22 de seção iii.1.

Seja G uma 2-árvore.

G é periplanar maximal se e somente se cada conjunto base B de G verifica $\mu(B) = 1$.

Baseando-se no lema anterior, podemos apresentar o seguinte resultado.

Lema 28 *Seja G uma 2-árvore, e seja s um esquema de eliminação perfeita para G obtido por uma Busca em Largura Lexicográfica tal que os rótulos $R(v_i) \forall i < n - 2$ são todos diferentes. Então G é periplanar maximal.*

Prova:

Suponhamos que G é uma 2-árvore e que s é um esquema de eliminação perfeita para G obtido por uma Busca em Largura Lexicográfica.

Suponhamos também que os rótulos $R(v_i) \forall i < n - 2$ são todos diferentes.

Pelo Lema 17 de seção ii.3.2 temos que $\forall i, R(v_i) = \{s^{-1}(w) : w \in MAdj(v_i)\}$, onde s é uma bijeção. Então se os conjuntos $R(v_i), \forall i < n - 2$ são diferentes temos que os conjuntos $MAdj(v_i) \forall i < n - 2$ são diferentes.

Observar que pelo Lema 27 seção iii.2, os conjuntos $MAdj(v_i), \forall i < n - 2$ são conjunto base para a 2-árvore G .

Então temos, pelo Lema 22 enunciado recentemente, que o grafo G é periplanar maximal. ■

Vejamos agora um algoritmo de reconhecimento de 2-árvores.

Pelo Teorema 16 seção iii.2, para o caso particular de $k = 2$, temos que se G é cordal, $s = \{v_1, \dots, v_n\}$ um esquema de eliminação perfeita dado por uma Busca em Largura Lexicográfica para G tal que $|R(v_i)| = 2, \forall i \leq n - 2$; $|R(v_{n-1})| = 1$; $|R(v_n)| = 0$ então G é 2-árvore.

Então temos o seguinte algoritmo linear para reconhecer 2-árvores que é um caso particular do algoritmo anterior para $k = 2$.

São conhecidos o grafo G , cordal com $n > 3$; a seqüência s e os rótulos $R(v)$, $v = s(i)$, $\forall 1 \leq i \leq n$, obtidos pela Busca em Largura Lexicográfica.

Procedimento[2-árvore]

2ARVORE=VERDADEIRO

se $|R(s(n))| \neq \emptyset$ então 2ARVORE=FALSO

se $|R(s(n-1))| \neq 1$ então 2ARVORE=FALSO

para $i = 2, n$ fazer

 se $|R(s(i))| \neq 2$ então 2ARVORE=FALSO

se 2ARVORE=VERDADEIRO então "G 2-árvore"

caso contrario "G não 2-árvore"

fim[2-árvore]

O procedimento anterior determina corretamente quando um grafo é uma 2-árvore.

A complexidade do procedimento **2-árvore** é $O(n)$, pois já foi mostrado que o procedimento **k-árvore** tem complexidade da ordem $O(kn)$, portanto para o caso particular $k = 2$ temos complexidade de $O(2n) = O(n)$.

Observe que o algoritmo de Busca em Largura Lexicográfica produz os rótulos correspondentes a cada vértice v . Então, para verificar se a 2-árvore dada é um grafo periplanar maximal, só será necessário determinar se os rótulos $R(v_i) \forall i < n - 2$ são diferentes.

Como o algoritmo de Busca em Largura Lexicográfica permite obter os rótulos ordenados (segundo a ordem dos complementos de largura), temos o seguinte algoritmo linear para reconhecer grafos periplanares maximais. São conhecidos o grafo G , cordal com $n > 3$; a seqüência s e os rótulos $R(v)$, $v = s(i)$, $\forall 1 \leq i \leq n$, obtidos pela Busca em Largura Lexicográfica.

Procedimento[Periplanar-Maximal]

PERIPLANAR=VERDADEIRO

se $|R(s(n))| \neq \emptyset$ então PERIPLANAR=FALSO

se $|R(s(n-1))| \neq 1$ então PERIPLANAR=FALSO

para $i = 2, n$ fazer
 se $|R(s(n - i))| \neq 2$ então PERIPLANAR=FALSO
 $t = n - 3$
 enquanto $t \geq 2$ e PERIPLANAR=VERDADEIRO
 se $R(s(t)) = R(s(t - 1))$ então
 PERIPLANAR=FALSO (G 2-árvore, não periplanar maximal)
 $t = t - 1$
 se PERIPLANAR=VERDADEIRO então " G periplanar maximal"
 senão " G não periplanar maximal"
 fim[Periplanar-Maximal]

O procedimento anterior determina corretamente quando um grafo é periplanar maximal, pois é baseado nos resultados anteriores.

Lema 29 *A complexidade do procedimento **Periplanar-Maximal** é de $O(n)$.*

Prova:

Observar que é possível verificar a cordalidade do grafo em tempo linear (Teoremas 7 e 8 seção ii.2). Nessa verificação obtemos o esquema eliminação perfeita para G .

O primeiro laço no procedimento é executado, no máximo, n vezes, e cada iteração toma tempo constante, pois trabalha com rótulos de tamanho constante (menor ou igual a 2).

O segundo laço no procedimento é executado, no máximo, $n - 3$ vezes, e cada iteração toma tempo constante (os rótulos são obtidos ordenados, ao seguir a ordem dos complementos das larguras dos vértices).

Então, o procedimento **Periplanar-Maximal** tem complexidade de $O(n)$. ■

iii.4 3-árvores Planares

Da mesma maneira que na seção anterior, podemos obter um algoritmo para reconhecer 3-árvores planares supondo que sabemos reconhecer 3-árvores.

Lembramos de seção iii.1 o Lema 21.

Seja G uma 3-árvore.

G é planar se e somente se cada conjunto base B de G verifica $\mu(B) = 1$.

Aproveitando o Lema anterior, podemos provar o seguinte resultado:

Lema 30 *Seja G uma 3-árvore, e seja s um esquema de eliminação perfeita para G obtido por uma Busca em Largura Lexicográfica tal que os rótulos $R(v_i) \forall i < n - 3$ são todos diferentes. Então G é planar.*

Da mesma maneira que na seção anterior, podemos formular um algoritmo para reconhecer 3-árvores que é um caso particular do algoritmo apresentado na seção iii.2. Como no caso das 2-árvores, temos que o algoritmo de reconhecimento de 3-árvores apresenta complexidade de $O(n)$.

Além disso, também podemos formular o seguinte algoritmo para reconhecer 3-árvores planares.

São conhecidos o grafo cordal G com $n > 4$, a seqüência s e os rótulos $R(v)$, $v = s(i)$, $\forall 1 \leq i \leq n$ obtidos pela Busca em Largura Lexicográfica.

```

Procedimento[3-arvore-planar]
3ARVOREPLANAR=VERDADEIRO
se  $|R(s(n))| \neq 0$  então 3ARVOREPLANAR=FALSO
se  $|R(s(n-1))| \neq 1$  então 3ARVOREPLANAR=FALSO
se  $|R(s(n-2))| \neq 2$  então 3ARVOREPLANAR=FALSO
para  $i = 3, n$  fazer
    se  $|R(s(n-i))| \neq 3$  então 3ARVOREPLANAR=FALSO
 $t = n - 4$ 
enquanto  $t \geq 2$  e 3ARVOREPLANAR=VERDADEIRO
    se  $R(s(t)) \neq R(s(t-1))$  então
        3ARVOREPLANAR=FALSO ( $G$  3-arvore, não planar)
         $t = t - 1$ 
se 3ARVOREPLANAR=VERDADEIRO então "G 3-arvore planar"
senão "G 3-arvore não planar"
fim[3-arvore-planar]

```

Lema 31 *A complexidade do procedimento 3-arvore-planar é de $O(n)$.*

Como foi apresentado no Lema 22 da seção **iii.1**, se uma 2-árvore verifica que todos os seus conjuntos base tem multiplicidade um, então ela é um grafo periplanar maximal. É natural então nos perguntar se as 3-árvores planares, ou seja as 3-árvores que verificam que todos os seus conjuntos base tem multiplicidade um, formam algum subconjunto especial dos grafos cordais e planares.

Observamos primeiro que as 3-árvores planares são grafos cordais e planares. Além disso, pelo Teorema 13 seção **ii.4** temos que as 3-árvores planares verificam que $m = 3n - 6$, ou seja contém o número máximo de aresta admitidos num grafo planar (Lema 3 seção **ii.1.1**). Assim temos que as 3-árvores planares são cordais e planares maximais.

Enunciamos o Teorema seguinte que garante que os grafos cordais e planares maximais com pelo menos 3 vértices são exatamente as 3-árvores planares.

Teorema 18 *G é 3-árvore planar se e somente se G contém pelo menos 3 vértices, é cordal e planar maximal.*

\Rightarrow)

Seja G 3-árvore planar, então G é cordal e $m = 3n - \frac{1}{2}3(3 + 1)$ pelo Teorema 13 seção **ii.4**.

Como G 3-árvore planar então G é planar.

Assim temos que G é cordal, e G é planar maximal.

\Leftarrow)

Seja G cordal e planar maximal com $n \geq 3$, queremos provar que G é 3-árvore. Assim teremos que G é 3-árvore planar.

Seja $G = (V, E)$.

Por ser G cordal, temos que \exists s ordenação de V tal que $G_s = (V, E, s)$ é monótono transitivo (ou seja $MAdj(v_i)$ é completo $\forall 1 \leq i \leq n$). E s é um esquema de eliminação perfeita para G .

Além disso temos, por os resultados da seção **ii.3.1**, que

$$m = \sum_{i=1}^{n-1} d(s(i)), \text{ onde } d(s(i)) = |Adj(s(i))| \text{ em } H_{i-1} = G(\{V - \cup_{1 \leq j \leq i-1} v_j\}) =$$

$G - \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$.

Como temos que $MAdj(v_i) = Adj(v_i) - \{v_1, \dots, v_{i-1}\} = Adj(v_i)$ em $G - \{v_1, \dots, v_{i-1}\}$ (seção ii.2), então

$$m = \sum_{i=1}^{n-1} d(s(i)) = \sum_{i=1}^{n-1} |MAdj(s(i))| = \sum_{i=1}^{n-1} |MAdj(v_i)|.$$

Por outro lado temos que G é planar maximal, então $m = 3n - 6$.

E como G planar, então em particular, G não contém K_5 .

Então se G planar temos que $|MAdj(v_i)| < 4, \forall 1 \leq i \leq n$ (isto é pois se existir i tal que $|MAdj(v_i)| \geq 4$ então $|MAdj(v_i) \cup \{v_i\}| \geq 5$, e $MAdj(v_i) \cup \{v_i\}$ é completo. Então G contém K_5 , o que é um absurdo).

Portanto temos que $|MAdj(v_i)| \leq 3, \forall 1 \leq i \leq n$.

Como $G_{n-1}(s) = \{v_n, v_{n-1}\}$, então $|MAdj(v_{n-1})| \leq 1$.

Como $G_{n-2}(s) = \{v_n, v_{n-1}, v_{n-2}\}$, então $|MAdj(v_{n-1})| \leq 2$.

Como $G_{n-k}(s) = \{v_n, \dots, v_{n-k}\}, 1 \leq k \leq n - 3$ contém mais de 3 vértices distintos de v_{n-k} , então $|MAdj(v_{n-k})| \leq 3, 1 \leq k \leq n - 3$.

Assim temos que:

$$m = \sum_{i=1}^{n-1} |MAdj(v_i)| \leq 1 + 2 + 3(n - 3) = 3n - 6.$$

Se existir algum $1 \leq i \leq n$ tal que $|MAdj(v_i)|$ é diferente dos valores limitados anteriormente, então G contém $m < 3n - 6$ arestas e portanto G não é planar maximal. Então G verifica com igualdade as três condições.

Como G é cordal, então $|MAdj(v_i)| = |R(v_i)|, \forall 1 \leq i \leq n$ (Lema 17 seção ii.3.2). Então temos que G é cordal, $|R(v_{n-1})| = 1; |R(v_{n-2})| = 2; \forall 1 \leq k \leq n - 3, |R(v_{n-k})| = 3$ (observe que $|R(v_n)| = 0$ pois $G_n(s)$ não contém vértices diferentes de v_n).

Assim pelo Teorema 16 seção iii.2 para $k = 3$ temos que G é 3-árvore.

iii.5 Síntese do Capítulo

Neste capítulo foram apresentadas as idéias necessárias para trabalhar com grafos periplanares maximais e a Busca em Largura Lexicográfica. Foram provados resultados importantes para o desenvolvimento dos próximos capítu-

los. Fazemos um resumo dos resultados mais significativos.

O Lema 22 caracteriza os grafos periplanares maximais a partir das 2-árvores e dos conjuntos base. Este Lema foi provado em *KM89*. Mencionamos aqui que existe um trabalho posterior destes autores, aonde é fornecido um algoritmo de tempo linear para o problema de isomorfismo numa classe de grafos cordais que contém os grafos periplanares maximais (*VKM92*). Estes resultados não foram incluídos no capítulo, pois não são de utilidade para o nosso trabalho.

O Teorema 16 permite determinar se um grafo é uma k -árvore utilizando a Busca em Largura Lexicográfica.

O Lema 27 determina os conjuntos base de uma k -árvore por meio dos conjuntos monótonamente adjacentes dos vértices do grafo.

O Lema 28 permite reconhecer os grafos periplanares maximais a partir das 2-árvores e a Busca em Largura Lexicográfica.

O Teorema 18 determina que as 3-árvores planares são exatamente os grafos cordais e planares maximais com pelo menos 3 vértices.

Capítulo iv

Alguns Resultados em Grafos Periplanares Maximais

Neste capítulo apresentamos resultados obtidos para os grafos periplanares maximais, utilizando a Busca em Largura Lexicográfica e aproveitando as informações obtidas com o algoritmo de reconhecimento proposto no capítulo anterior.

O problema de achar um ciclo Hamiltoniano para um grafo geral é NP-completo (*GJ79*); no caso particular dos grafos periplanares biconexos, temos pelo Lema 5 seção **ii.1.2** que eles contém um único ciclo hamiltoniano. Portanto o problema de achar o ciclo hamiltoniano num grafo periplanar biconexo é trivial, no sentido que existe uma única resposta possível para esse problema. É válida a mesma observação para os grafos periplanares maximais em particular.

Na seção **iv.1** é provado que a partir da Busca em Largura Lexicográfica temos as arestas interiores do grafo periplanar maximal, representadas pelos rótulos dos vértices que verificam certa condição. Este resultado será utilizado nas duas seções posteriores.

Em **iv.2** é achado em tempo linear o único ciclo hamiltoniano de G , grafo periplanar maximal, aproveitando a informação obtida com a Busca em Largura Lexicográfica.

Em **iv.3** achamos uma rotulação recursiva dos vértices do grafo G peri-

planar maximal, dada pelas larguras dos vértices. Esta largura é fornecida também pelo algoritmo de Busca em Largura Lexicográfica.

iv.1 Arestas Interiores e Exteriores em Grafos Periplanares Maximais

O Lema 5 da seção ii.1.2 nos permite obter informação importante respeito da classificação das arestas de um grafo periplanar biconexo em arestas exteriores e interiores. Esta classificação será utilizada nos resultados propostos nesta seção e nas que se seguem.

Como já sabemos, os grafos periplanares maximais com no mínimo 3 vértices são biconexos, então os grafos periplanares maximais com no mínimo 3 vértices possuem um único ciclo hamiltoniano. Assim podemos utilizar as definições de arestas interiores e exteriores para esta classe particular de grafos periplanares biconexos.

Podemos observar que toda aresta exterior de um grafo G periplanar maximal com pelo menos 3 vértices é uma aresta que limita a face exterior de G .

Apresentamos a seguir o resultado que mostra a relação entre os rótulos obtidos pela Busca em Largura Lexicográfica e as arestas interiores dos grafos periplanares maximais. Este Teorema permitirá obter o algoritmo da seção iv.2 para achar o ciclo hamiltoniano, e também a definição recursiva de grafos periplanares com pelo menos 3 vértices da seção iv.3.

Teorema 19 *Sejam G periplanar maximal $n \geq 3$, e s o esquema de eliminação perfeita para G obtido por uma Busca em Largura Lexicográfica. Então $\forall 1 \leq i \leq n - 3, R(v_i)$ representa uma aresta interior de G .*

Prova:

Seja s o esquema de eliminação perfeita. Sejam $G_i(s) = (V_i(s), E(V_i(s)))$ e $V_i(s) = \{v \in V : s^{-1}(v) \geq i\}$, $1 \leq i \leq n$.

$G_n(s)$ é 1-clique. $G_{n-1}(s)$ é 2-clique. $G_{n-2}(s)$ é 3-clique. Todos esses grafos

não contêm arestas interiores.

Faremos a prova por indução.

O grafo $G = G_1(s)$ é periplanar maximal com $n \geq 3$.

Seja $G_{n-j}(s)$, $3 \leq j \leq n-1$ grafo periplanar maximal (pois ele é subgrafo de $G_1(s)$).

Então existe uma imersão periplanar de $G_{n-j}(s)$ no plano onde todos os vértices de $G_{n-j}(s)$ se encontram na face exterior, para todo $3 \leq j \leq n-1$.

Queremos provar que $R(v_i)$, $1 \leq i \leq n-3$ representa uma aresta interior de G . Ou equivalentemente, que $R(v_{n-j})$, $3 \leq j \leq n-1$ determina uma aresta interior de G .

Seja $v_{n-j} = V_{n-j}(s) - V_{n-(j-1)}(s)$ para j fixo tal que $3 \leq j \leq n-1$.

Temos que $n-j \leq n-3 < n-2$, então pelo Teorema 16 seção iii.2 para o caso $k=2$ temos que $|R(v_{n-j})| = 2$.

Seja $R(v_{n-j}) = \{a_j, b_j\}$, onde $s^{-1}(u_j) = a_j$, $s^{-1}(w_j) = b_j$;

$a_j > n-j$, $b_j > n-j$.

Então $(u_j, w_j) \in E$ (pois G_s é monótono transitivo), e

$(u_j, w_j) \in E(V_{n-j}(s)) \cap E(V_{n-(j-1)}(s))$ ($s^{-1}(u_j) > n-j \Rightarrow s^{-1}(u_j) \geq n-(j-1)$), assim $u_j \in V_{n-(j-1)}(s)$, idem para w_j ($w_j \in V_{n-(j-1)}(s)$).

Então temos que os extremos da aresta $e = (u_j, w_j)$ pertencem a $V_{n-(j-1)}(s)$.

Queremos provar que e é aresta exterior de $G_{n-(j-1)}(s)$.

Se e fosse aresta interior de $G_{n-(j-1)}(s)$ então e pertence a dois triângulos em $G_{n-(j-1)}(s)$. Ao acrescentar v_{n-j} a $G_{n-(j-1)}(s)$, temos que e pertenceria a três triângulos em $G_{n-j}(s)$, o que é um absurdo pois $G_{n-j}(s)$ é periplanar maximal.

Então (u_j, w_j) é aresta exterior de $G_{n-(j-1)}(s)$.

Seja $G_{n-j}(s) = (V_{n-j}(s), E(V_{n-j}(s)))$, $V_{n-j}(s) = V_{n-(j-1)}(s) \cup \{v_{n-j}\}$.

Acrescentando à imersão periplanar de $G_{n-(j-1)}(s)$ o vértice v_{n-j} e as arestas (v_{n-j}, u_j) , (v_{n-j}, w_j) , temos agora uma imersão periplanar de $G_{n-j}(s)$ onde $e = (u_j, w_j)$ é uma aresta interior de $G_{n-j}(s)$.

Assim, $\forall n-1 \geq j \geq 3$, $R(v_{n-j}) = \{a_j, b_j\}$ determina a aresta interior de $G_{n-j}(s)$ $e = (u_j, w_j)$, onde $s^{-1}(u_j) = a_j$, $s^{-1}(w_j) = b_j$.

Então $\forall 3 \leq j \leq n - 1$, $R(v_{n-j}) = \{a_j, b_j\}$ determina uma aresta interior de $G_1(s) = G$, e assim temos a prova do Teorema. ■

iv.2 Ciclo Hamiltoniano para Grafos Periplanares Maximais

Já sabemos da importância do ciclo hamiltoniano em grafos periplanares. Nesta seção vamos apresentar um algoritmo que, dado o grafo periplanar maximal G representado pelas listas de adjacência de todos os seus vértices, e dados a seqüência s e os rótulos $R(v)$, $\forall v : s^{-1}(v) < n - 2$ obtidos por uma Busca em Largura Lexicográfica em G , gera o único ciclo hamiltoniano em G .

Na seção anterior foi provado que os rótulos para os vértices v tal que $s^{-1}(v) < n - 2$ representam as arestas interiores do grafo, onde cada vértice extremo da aresta é numerado pelo complemento de largura.

O algoritmo para a determinação do ciclo hamiltoniano gera uma lista CICLO com os vértices do grafo G periplanar maximal na ordem em que aparecem no ciclo, obtida a partir das arestas exteriores do grafo.

As estruturas utilizadas no algoritmo são as seguintes:

As listas ARESTAS, ARESTAS-INTERIORES, ARESTAS-EXTERIORES e CICLO são seqüenciais.

A lista ARESTAS contém todas as arestas do grafo, onde os vértices estão representados pelos complementos de largura, e cada aresta apresenta seus elementos ordenados da seguinte maneira: o primeiro elemento no par é maior que o segundo elemento.

A lista ARESTAS-INTERIORES é formada pelos rótulos dos vértices do grafo v que verificam $s^{-1}(v) < n - 2$ (cada aresta interior apresenta seus extremos ordenados da mesma maneira que no caso de ARESTAS).

A lista ARESTAS-EXTERIORES será obtida a partir das outras duas listas de arestas, ao subtrair os elementos da lista ARESTAS-INTERIORES da lista ARESTAS.

A lista CICLO é formada pelos vértices do grafo G periplanar maximal, com seus nomes originais, na ordem em que eles se apresentam no único ciclo hamiltoniano do grafo.

O procedimento **Ciclo-Hamiltoniano** gera, a partir das listas de adjacência do grafo periplanar maximal $G = (V, E)$ e do esquema de eliminação perfeita s dado pela Busca em Largura Lexicográfica, a lista ARESTAS formada pelas arestas do grafo cujos vértices são numerados pelos complementos de largura $s^{-1}(v)$, $\forall v \in V$.

Em seguida, os elementos da lista ARESTAS são ordenados lexicograficamente utilizando a ordenação por caixas.

Depois, será gerada a lista ARESTAS-EXTERIORES, a partir das listas ARESTAS e ARESTAS-INTERIORES (esta última formada pelos rótulos dos vértices do grafo que representam as arestas interiores, e que foi obtida pela Busca em Largura Lexicográfica).

Uma vez obtida a lista ARESTAS-EXTERIORES, o procedimento **Gera-Ciclo** produz as listas de adjacência do subgrafo formado pelos vértices e as arestas exteriores de G . Observe que estas listas são construídas a partir dos complementos de largura dos vértices do grafo. Percorrendo os vértices deste subgrafo segundo suas adjacências, obtemos o único ciclo hamiltoniano de G .

Procedimento[Ciclo-Hamiltoniano($G(V, E), s$)]

início

para $v \in V$ fazer

para $w \in Adj(v)$ fazer

*se $s^{-1}(v) > s^{-1}(w)$ então incluir $(s^{-1}(v), s^{-1}(w))$ em
ARESTAS.*

ordenar lexicograficamente ARESTAS.

para $v \in V : s^{-1}(v) < n - 2$ fazer

{seja $R(v) = a, b$ }

incluir (a, b) em ARESTAS-INTERIORES.

ARESTAS-EXTERIORES=ARESTAS - ARESTAS-INTERIORES.

Gera-Ciclo

fim[Ciclo-Hamiltoniano]

Procedimento[Gera-Ciclo(ARESTAS-EXTERIORES)]

inicio

$V_{ciclo} = \{1, \dots, n\}$

para $j \in V_{ciclo}$ fazer $adj(j) = \emptyset$

para $e = (j, k) \in$ ARESTAS-EXTERIORES fazer

$adj(j) = adj(j) \cup k$

$adj(k) = adj(k) \cup j$

$\{adj(1) = \{x, y\}\}$

CICLO(1)= $s(1)$; CICLO(2)= $s(x)$

anterior=1; atual= x ; $i = 3$

enquanto $i \leq n$ fazer

{seja $adj(atual) = \{w_1, w_2\}$ }

se $w_1 = anterior$ então próximo= w_2

senão próximo= w_1

CICLO(i)= $s(próximo)$; $i = i + 1$

anterior=atual; atual=próximo

fim[Gera-Ciclo]

Lema 32 A complexidade do procedimento **Ciclo-Hamiltoniano** é de $O(n)$.

Prova:

É fornecido ao procedimento **Ciclo-Hamiltoniano** um grafo periplanar maximal; o número de arestas do grafo é então $2n - 3$, e assim o número de iterações necessárias para gerar a lista ARESTAS é de $O(n)$. A ordenação por caixas da lista ARESTAS é também de $O(n)$. A construção da lista ARESTAS-EXTERIORES consta de um percurso simultâneo das listas ARESTAS e ARESTAS-INTERIORES, ambas ordenadas. Isto garante a linearidade.

O procedimento **Gera-Ciclo** é linear. De início percorre a lista ARESTAS-EXTERIORES e em seguida os vértices do grafo. Ambos os percursos são de $O(n)$. ■

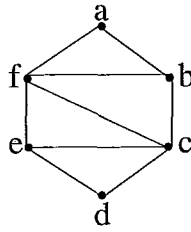


Figura iv.1 Exemplo para determinar ciclo Hamiltoniano

Exemplo:

Seja $G = (V, E)$ um grafo periplanar maximal dada pela seguinte lista de adjacências (grafo da Figura iv.1):

v	$Adj(v)$
a	b,f
b	a,f,c
c	b,d,e,f
d	c,e
e	c,d,f
f	a,b,c,e

E seja a saída da Busca em Largura Lexicográfica para G :

v	$s^{-1}(v)$	$R(v)$
a	6	-
b	4	6,5
c	3	5,4
d	1	3,2
e	2	5,3
f	5	6

Todas as arestas do grafo G ordenadas lexicograficamente, onde temos cada vértice extremo dado pelo complemento de largura correspondente, são:

ARESTAS=(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 2), (5, 3), (5, 4),
(6, 4), (6, 5)

As arestas interiores ordenadas lexicograficamente estão dadas por:

ARESTAS-INTERIORES=(3, 2), (5, 3), (5, 4)

E as arestas exteriores são:

ARESTAS-EXTERIORES=(2, 1), (3, 1), (4, 3), (5, 2), (6, 4), (6, 5)

Assim temos o ciclo hamiltoniano de G na lista encadeada CICLO a seguir:

CICLO= d, e, f, a, b, c

iv.3 Rotulação Recursiva para Grafos Periplanares Maximais

A definição de 2-árvore é uma definição recursiva. Vamos utilizá-la, juntamente com os resultados obtidos no Lema 22 da seção iii.1, para obter uma definição recursiva de grafos periplanares maximais, equivalente à definição tradicional.

Lembramos a definição de 2-árvore:

Um grafo G é uma **2-árvore** se verifica a seguinte definição recursiva:

1. Uma aresta é uma 2-árvore de dois vértices.
2. Dada uma 2-árvore T_n de n vértices, uma 2-árvore de $n + 1$ vértices é obtida quando acrescentamos um novo vértice que é adjacente exatamente a os vértices extremos de uma aresta em T_n .

Sabe-se pelo Lema 22 da seção iii.1 que uma 2-árvore tal que todos os seus conjuntos base tem multiplicidade um é um grafo periplanar maximal. Então podemos definir agora grafos periplanares maximais a partir da definição de 2-árvores, ao acrescentar a condição para os conjuntos base. Como os conjuntos base numa 2-árvore podem ser identificados com os rótulos obtidos por uma Busca em Largura Lexicográfica para $v : s^{-1}(v) < n - 2$ (Lema 27 seção iii.2 para $k = 2$), e esses mesmos rótulos são identificados com as arestas in-

teriores num grafo periplanar maximal (Teorema 19 seção iv.1), então temos a definição a seguir:

Um grafo G é **periplanar maximal** com $n \geq 3$ se verifica a seguinte definição recursiva:

1. K_3 é grafo periplanar maximal de 3 vértices.
2. dado um grafo periplanar maximal H de n vértices, obtemos um grafo periplanar maximal G de $n + 1$ vértices ao acrescentar um novo vértice adjacente exatamente aos vértices extremos de uma aresta da face exterior de H .

No artigo *BJM79* é apresentada a rotulação recursiva de um grafo periplanar maximal que reflete a maneira na qual o grafo foi construído, em relação à definição recursiva de grafos periplanares maximais dada acima. Esta rotulação é utilizada para dar a seqüência de graus do grafo periplanar maximal, e por sua vez esta seqüência é usada para obter um algoritmo linear para isomorfismo de grafos periplanares maximais.

Damos agora a definição de rotulação recursiva de um grafo periplanar maximal (*BJM79*):

Um grafo periplanar maximal G com $n \geq 3$ vértices é **rotulado recursivamente** se:

- i) os vértices rotulados 1,2,3 compõem um triângulo em G .
- ii) cada vértice com rótulo $k : 3 < k \leq n$ é adjacente a exatamente dois vértices com rótulo menor estrito do que k .

Vamos provar que a numeração dada pelas larguras obtidas por uma Busca em Largura Lexicográfica é uma rotulação recursiva para G grafo periplanar maximal.

Teorema 20 *Seja G um grafo periplanar maximal com $n \geq 3$ vértices. Seja s um esquema de eliminação perfeita para G obtido por uma Busca em Largura*

Lexicográfica. Então a numeração dada pelas larguras correspondentes a cada vértice em G é uma rotulação recursiva do grafo periplanar maximal.

Prova:

Seja G periplanar maximal, e seja $largura(v) = n + 1 - s^{-1}(v)$, onde $s^{-1}(v)$ é o complemento da largura de v obtido por uma Busca em Largura Lexicográfica para G .

i) os vértices v com $largura(v) = 1, 2, 3$ compõem um triângulo. Esses 3 vértices correspondem aos vértices com complemento de largura $n, n - 1, n - 2$. Como G é periplanar maximal com pelo menos 3 vértices, então G é cordal, G contém 2-clique e não contém 4-clique, e $m = 2n - 3$. Assim G verifica as condições do Teorema 13 seção ii.4. Então pelo Teorema 16 seção iii.2 e o Lema 17 seção ii.3.2, temos que $|R(v_n)| = |MAdj(v_n)| = 0, |R(v_{n-1})| = |MAdj(v_{n-1})| = 1, |R(v_{n-2})| = |MAdj(v_{n-2})| = 2$ e assim temos também que $MAdj(v_n) = \emptyset, MAdj(v_{n-1}) = \{v_n\}, MAdj(v_{n-2}) = \{v_n, v_{n-1}\}$.

ii) seja v tal que $largura(v) = k, k > 3$.

Sabe-se que $largura(v) = n + 1 - s^{-1}(v)$; então, $s^{-1}(v) = n + 1 - k$.

Como $n + 1 - k < n + 1 - 3 = n - 2$, podemos concluir que $R(v) = \{i_1 \neq i_2\}$. Isto é pois se G é periplanar maximal, então G verifica o Teorema 13 da seção ii.4 para o caso particular $k = 2$ pois G é cordal, G contém 2-clique e não contém 4-clique e $m = 2n - 3$. Então pelo Teorema 16 seção iii.2, $R(v) = \{i_1, i_2\}$, $i_1 > s^{-1}(v) = n + 1 - k, i_2 > s^{-1}(v) = n + 1 - k$.

Sejam $i_1 = s^{-1}(v_{i_1}), i_2 = s^{-1}(v_{i_2})$.

$largura(v_{i_1}) = n + 1 - i_1 = n + 1 - s^{-1}(v_{i_1}) < n + 1 - s^{-1}(v) = k$

$largura(v_{i_2}) = n + 1 - i_2 = n + 1 - s^{-1}(v_{i_2}) < n + 1 - s^{-1}(v) = k$

Então, a numeração dada pelas larguras dos vértices de G é uma rotulação recursiva pois verifica a definição. ■

iv.4 Síntese do Capítulo

Neste capítulo foram apresentadas algumas aplicações da utilização da Busca em Largura Lexicográfica nos grafos periplanares maximais.

Dois resultados podem ser destacados no capítulo. O primeiro, obtido no Teorema 19, provando que as arestas interiores dos grafos periplanares maximais podem ser representadas com os rótulos obtidos pela Busca em Largura Lexicográfica. Este resultado foi utilizado para estabelecer o único ciclo hamiltoniano do grafo periplanar maximal.

O segundo, fornecido pelo Teorema 20 obtém uma rotulação recursiva de um grafo periplanar maximal, utilizando também a Busca em Largura Lexicográfica. Este resultado pode ser utilizado para o traçado automático de grafos periplanares maximais.

Capítulo iv. Alguns Resultados em Grafos Periplanares Maximais

Capítulo v

Grafo Coroa

Neste capítulo apresentaremos uma nova família de grafos periplanares maximais, os grafos coroa, e uma série de resultados obtidos a partir deles.

Na seção **v.1** é dada a definição da família, são apresentadas importantes características que estes grafos possuem.

Na seção **v.2** definimos o dual geométrico de um grafo planar, e provamos que o dual geométrico fraco dos grafos periplanares maximais possui características especiais. O dual geométrico fraco dos grafos coroa é particularmente estudado.

Na seção **v.3** estudamos propriedades dos grafos coroa. A relação estabelecida entre o dual geométrico fraco do grafo coroa e o dual geométrico dos grafos periplanares maximais em geral permite obter o seguinte resultado: qualquer grafo periplanar maximal está contido em algum grafo coroa. Também é possível determinar, dado um grafo periplanar maximal, qual é o menor grafo coroa que o contém.

v.1 Caracterização de Grafos Coroa

O grafo coroa $CR_j = (V_j, E_j)$, $j \geq 0$, é definido recursivamente da seguinte maneira:

- i) $CR_0 = K_3$,
- ii) Dado CR_j , $j \geq 0$, definimos CR_{j+1} assim:

Acrescentar $3(2^j)$ vértices no grafo CR_j , cada um dos quais adjacente aos dois extremos de uma aresta diferente da face exterior de CR_j .

Teorema 21 1. $CR_j, \forall j \geq 0$, é 2-árvore.
2. $CR_j, \forall j \geq 0$, é periplanar maximal.

Prova:

1. Imediato pela definição (acrescentar um por um os $3(2^j)$ vértices de maneira de garantir que com cada vértice acrescentado, o novo grafo é 2-árvore).

2. Por indução. Temos que $CR_0 = K_3$ é periplanar maximal.

Suponhamos que CR_j é periplanar maximal, e provaremos que CR_{j+1} é periplanar maximal. As arestas acrescentadas a CR_j para obter CR_{j+1} permitem obter o ciclo exterior de CR_{j+1} com todos os vértices da seguinte maneira: Como CR_j é periplanar maximal, então existe uma imersão periplana de CR_j onde todos os vértices pertencem à face exterior. Acrescentar a esta imersão os $3(2^j)$ vértices, cada um dos quais é adjacente aos dois extremos de uma aresta exterior diferente de CR_j . Desta maneira temos uma imersão periplana de CR_{j+1} onde todos os seus vértices pertencem à face exterior. Assim temos que é válido o passo indutivo e portanto é válido que CR_j é periplanar maximal. ■

Teorema 22 1. $n_j = |V_j| = 3(2^j)$.
2. $m_j = |E_j| = 3(2^{j+1} - 1)$.
3. $CR_j, \forall j \geq 0$, tem grau máximo $2(j + 1)$.

Prova:

1. É imediato pela definição.

2. Pelas partes 1. e 2. do Teorema 21, CR_j contém $2n_j - 3$ arestas (isto é pois tanto as 2-árvores quanto os grafos periplanares maximais tem essa relação entre número de vértices e arestas). Então temos que $|E_j| = 2(3 \cdot 2^j) - 3 =$

$3(2^{j+1} - 1)$.

(Uma outra prova por Indução. Se $j = 0$ então $n_0 = 3, m_0 = 3 = 3(2^1 - 1)$.

Supor válido para $j = k, n_k = 3(2^k), m_k = 3(2^{k+1} - 1)$, e seja $j = k + 1$,

$$n_{k+1} = 3(2^{k+1})$$

$$m_{k+1} = m_k + 2n_k = 3(2^{k+1} - 1) + 6(2^k) = 3(2^{k+1}) - 3 + 3(2^{k+1}) = 6(2^{k+1}) - 3 =$$

$$3(2^{k+2}) - 3 = 3(2^{k+2} - 1) = 3(2^{j+1} - 1).$$

3. Por Indução. Se $j = 0$ é válido.

Suponhamos válido para $j = k$, ou seja o grafo tem grau máximo $2(k + 1)$ (hipótese indutiva). Seja $j = k + 1$. Os graus de todos os vértices em CR_j são acrescentados em 2 (pois cada vértice no grafo CR_j é um vértice na face exterior e é extremo de duas arestas exteriores).

Assim, pela hipótese indutiva temos que o grau máximo em CR_j é $2(j + 1) = 2(k + 1)$ e então o grau máximo em CR_{j+1} será $2(k + 1) + 2 = 2j + 2 = 2(j + 1)$, e temos que é válido o resultado. ■

Teorema 23 *Se $j = 0$ então existem exatamente 3 vértices de grau 2 em CR_0 .*

Se $j = 1$ então CR_1 contém 3 vértices de grau 2 e 3 vértices de grau 4.

Se $j > 1$ então CR_j contém 3 vértices de grau $2(j + 1)$, e $3(2^i)$ vértices de grau $2(j - i), 0 \leq i \leq j - 1$.

Prova:

A prova é semelhante à prova feita na parte 3 do Teorema anterior. ■

Observe que o grafo $CR_j, j > 0$, contém a metade de seus vértices de grau 2. Pelo Teorema 23 temos que, para todo $j > 1, CR_j$ contém $3(2^{j-1})$ vértices de grau 2, e pela definição temos que $|V_j| = n_j = 3(2^j)$, portanto temos que

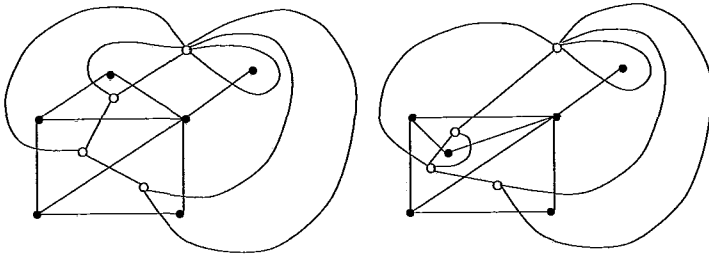


Figura v.1 Duas imersões planas diferentes do mesmo grafo

o número de vértices de grau 2 em CR_j é $n_j/2$. Para os casos particulares $j = 0, 1$ também é válido.

v.2 Dual Geométrico de um Grafo Periplanar Maximal

Seja $G = (V, E)$ um grafo planar. O **dual geométrico** $G^* = (V^*, E^*)$ é construído da seguinte maneira:

Seja G' uma imersão de G no plano. Para cada face de G' , criar um vértice em V^* . Para cada aresta $e \in E$, criar uma aresta $e^* \in E^*$ da seguinte maneira. Se duas faces de G' compartilham uma aresta $e \in E$, unir o vértice correspondente a cada face por uma aresta $e^* \in E^*$ atravessando a aresta e . No caso particular de uma aresta em G pertencer a uma única face de G' , esta aresta dá origem a um laço no vértice de V^* correspondente a tal face.

O resultado desta construção é um pseudografo (pode conter laços e/ou arestas múltiplas).

G^* contém laços se e somente se G contém vértices de grau um.

G^* contém arestas múltiplas se e somente se G tem pelo menos duas faces com duas arestas ou mais em comum.

Dado um grafo planar, diferentes imersões do mesmo grafo no plano podem produzir duais geométricos diferentes. Um exemplo pode ser visto na Figura

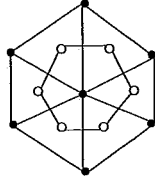


Figura v.2 Um grafo planar G e o seu dual geométrico fraco T

v.1.

Dado um grafo planar G e G' uma imersão plana de G , sejam G^* o dual geométrico de G e $v_{f_e} \in V^*$ o vértice correspondente à face exterior de G' . Chamamos a $T = G^* - v_{f_e}$ de **dual geométrico fraco** de G . Na Figura v.2 temos um grafo planar G e o seu dual geométrico fraco T .

Neste capítulo utilizaremos o dual geométrico fraco de um grafo, e não o dual estendido ou modificado, utilizado na literatura para trabalhar com os problemas de isomorfismos em grafos periplanares biconexos (*Sy78, Sy82*).

Seja agora G um grafo periplanar maximal com $n \geq 3$.

Pelo Corolário 3 seção **ii.1.2** temos que todo grafo periplanar biconexo tem uma única imersão periplana a menos de imagem especular. Agora estamos interessados no dual geométrico fraco de um grafo periplanar maximal que é biconexo. Entretanto estas duas imersões não apresentam dificuldade na hora de trabalhar com o dual geométrico fraco. Os duais geométricos fracos de um grafo periplanar maximal e seu grafo imagem especular são árvores isomorfas (no sentido comum). Então não existe ambiguidade na obtenção do dual geométrico de um grafo periplanar maximal, para $n \geq 3$.

É possível provar que G é periplanar biconexo se e somente se seu dual geométrico fraco não contém ciclos (*FGH74*).

O dual geométrico fraco associado com um grafo periplanar biconexo não determina univocamente o grafo periplanar biconexo. Observe os exemplos na Figura v.3.

Neste capítulo estamos interessados em grafos periplanares maximais com

pelo menos 3 vértices, e portanto as provas a seguir são feitas obedecendo a esta condição.

Lema 33 *Seja G um grafo periplanar maximal, $n \geq 3$. Então $G^* - v_{f_e}$ é uma árvore de $n - 2$ vértices.*

Prova:

Primeiro provaremos que $G^* - v_{f_e}$ é um grafo.

Como G é um grafo periplanar maximal, $n \geq 3$, então G é uma 2-árvore e $n \geq 3$, portanto G é biconexo. Então G não contém vértices de grau um. Logo G^* não contém laços.

Cada aresta interior de G é uma aresta comum a duas faces interiores de G .

Os vértices de G^* correspondentes às faces interiores de G que contêm vértices de grau dois, tem arestas múltiplas incidentes (estas arestas também são incidentes ao vértice correspondente à face exterior de G , v_{f_e}). Isto é pois existem duas arestas que limitam a face exterior de G que contém vértice de grau dois.

Os vértices de G^* correspondentes às faces interiores de G que não contêm vértices de grau dois, têm, no máximo uma aresta incidente.

Então, seja $G^* - v_{f_e}$ o grafo obtido ao eliminar de G^* o vértice correspondente à face exterior.

$G^* - v_{f_e}$ não contém laços ($G^* - v_{f_e}$ é subgrafo de G^*) e $G^* - v_{f_e}$ não contém arestas múltiplas (pois foram eliminadas as únicas arestas múltiplas de G^*).

Portanto $G^* - v_{f_e}$ é um grafo.

Agora provamos que $G^* - v_{f_e}$ é uma árvore de $n - 2$ vértices.

Seja $T = G^* - v_{f_e} = (V(T), E(T))$.

O grafo T é conexo pois $G^* - v_{f_e}$ é conexo.

Temos que $|V(T)| = |V(G)| - 1 = n - 2$, pois o número total de faces de um grafo periplanar maximal com $n \geq 3$ é $n - 1$, e eliminando o vértice correspondente à face exterior temos $n - 2$ vértices correspondentes às faces interiores de G .

E temos que $|E(T)| = n - 3$ pois num grafo periplanar maximal com $n \geq 3$

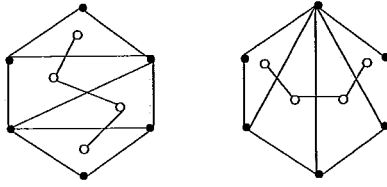


Figura v.3 Grafos não isomorfos com o mesmo dual geométrico fraco

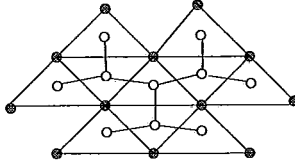


Figura v.4 Grafo coroa CR_2 e o seu dual geométrico fraco T_2

existem $n - 3$ arestas interiores, cada uma das quais é comum a duas faces interiores. ■

Lema 34 *Seja G um grafo periplanar maximal, $n \geq 3$. Seja $T = G^* - v_{f_e}$. Então $d(v) \leq 3, \forall v \in V(T)$.*

Prova:

Suponhamos que existe $v \in V(T)$ tal que $d(v) > 3$. Então a face interior correspondente ao vértice v é limitada por $d(v) > 3$ arestas.

Isto é um absurdo pois G é um grafo periplanar maximal, portanto cada face interior de G é um triângulo (limitada por 3 arestas).

Então temos que $d(v) \leq 3, \forall v \in V(T)$. ■

Vamos considerar a notação seguinte: dado CR_j , o grafo coroa de $n_j = 3(2^j)$ vértices, o dual geométrico fraco de CR_j é notado por $T_j = (V(T_j), E(T_j))$. Vemos na Figura v.4 os desenhos de CR_2 e T_2 .

Podemos definir recursivamente o grafo $T_j, \forall j \geq 0$, a partir da definição de dual geométrico fraco de um grafo e da definição recursiva do grafo Coroa CR_j .

O dual geométrico fraco de $CR_j, T_j = (V(T_j), E(T_j)), j > 0$ é definido recursivamente da seguinte maneira:

- i) T_1 é o grafo estrela de 4 vértices.
- ii) Dado T_j , o dual geométrico de $CR_j, j \geq 1, T_{j+1}$ o dual geométrico de CR_{j+1} é obtido de T_j ao acrescentar 2 vértices de grau 1 adjacentes a cada uma das folhas de T_j .

Lema 35 *Seja T_j o dual geométrico de $CR_j, j > 0$.*

Então $n_j^ = |V(T_j)| = 3(2^j) - 2, m_j^* = |E(T_j)| = 3(2^j) - 3$.*

Prova:

Imediato das definições de CR_j e T_j . ■

Observe que dado $T_j, j > 0$, o grafo periplanar maximal $CR_j, j > 0$ tal que o seu dual geométrico fraco é T_j fica univocamente determinado. Isto é pois os vértices em T_j identificam faces interiores do grafo periplanar maximal cujo dual geométrico fraco é T_j , e as arestas em T_j determinam as adjacências entre faces interiores no grafo. Como o grau de cada vértice não folha em T_j é 3, não existe ambigüidade para determinar o grafo periplanar maximal associado. Então, podemos obter uma imersão periplana do grafo periplanar maximal cujo dual geométrico fraco é T_j utilizando a informação respeito de faces interiores e adjacência entre as mesmas.

Lema 36 *Seja T_j o dual geométrico fraco do grafo coroa CR_j . Então $\forall v \in V(T_j), d(v) = 3$ ou $d(v) = 1$.*

E mais, o número de vértices de grau 3 em T_j é $n_j^/2 - 1$, e o número de vértices de grau 1 em T_j é $n_j^*/2 + 1$.*

Prova:

Provamos por indução em j .

Seja $j = 1$ então temos que $G_1 = CR_1$, $n_1^* = 3(2^1) - 2 = 4$. Verifica-se portanto que todos os vértices em T_1 tem grau 1 ou 3, e que $|\{v : d(v) = 1\}| = 3 = n_1^*/2 + 1$, e $|\{v : d(v) = 3\}| = 1 = n_1^*/2 - 1$.

Suponhamos agora que o lema é válido para $j = k$, e o provaremos para $j = k + 1$.

Pela hipótese indutiva temos que a árvore $T_k = (G^* - v_{f_e})$ verifica:

- i) $\forall v \in V(T_k), d(v) = 1$ ou $d(v) = 3$,
- ii) $|\{v : d(v) = 1\}| = [3(2^k) - 2]/2 + 1$,
- iii) $|\{v : d(v) = 3\}| = [3(2^k) - 2]/2 - 1$.

Seja $T_{k+1} = G_{k+1}^* - v_{f_e} = (V(T_{k+1}), E(T_{k+1}))$.

T_{k+1} é obtido ao acrescentar $3(2^k)$ vértices em T_k , cada um dos quais é adjacente a uma das folhas de T_k , de maneira tal que cada folha em T_k é adjacente a dois novos vértices em T_{k+1} .

Então, $\forall v \in V(T_k) : d(v) = 3$, v não foi modificado e continua com grau 3 (e temos $[3(2^k) - 2]/2 - 1$ vértices nesta condição).

Temos que $\forall v \in V(T_k) : d(v) = 1$, v tem aumentado seu grau de 1 para 3.

Finalmente, temos que $\forall v \in V(T_{k+1}) - V(T_k), d(v) = 1$.

Então, em T_{k+1} temos:

$$|\{v \in V(T_{k+1}) : d(v) = 3\}| = |\{v \in V(T_k) : d(v) = 3\}| + |\{v \in V(T_k) : d(v) = 1\}| = [3(2^k) - 2]/2 - 1 + [3(2^k) - 2]/2 + 1 = [3(2^k) - 2]2/2 = [3(2^{k+1}) - 4]/2 = [3(2^{k+1}) - 2]/2 - 1 = n_j^*/2 - 1.$$

e em T_{k+1} temos:

$$|\{v \in V(T_{k+1}) : d(v) = 1\}| = 3(2^k) = 3(2^{k+1})/2 = [3(2^{k+1}) - 2 + 2]/2 = [3(2^{k+1}) - 2]/2 + 1 = n_j^*/2 + 1. \blacksquare$$

v.3 Propriedades dos Grafos Coroa

Nesta seção provaremos propriedades importantes, que fazem dos grafos coroa uma família especial dos grafos periplanares maximais. A seguir apresentamos definições necessárias nas provas posteriores.

Denomina-se **distância** entre dois vértices v, w de um grafo, $d(v, w)$, ao comprimento do menor caminho entre v e w . Chamamos **excentricidade** de um vértice $v \in V$ ao valor da distância máxima entre v e $w, \forall w \in V$. O **centro** de um grafo G , $centro(G)$ é o subconjunto dos vértices de excentricidade mínima. O **diâmetro** de um grafo G , $diam(G)$, é a máxima excentricidade entre as excentricidades de todos os seus vértices.

O Lema a seguir estabelece o diâmetro do dual geométrico fraco de um grafo coroa.

Lema 37 *Seja o grafo coroa $G_j = CR_j, j \geq 0$. Então $diam(T_j) = 2j$.*

Prova:

Provamos por indução em j .

Se $j = 0$, $diam(T_0) = 0$.

Suponhamos que $diam(T_j) = 2j$. Provaremos que $diam(T_{j+1}) = 2(j + 1)$.

T_{j+1} difere de T_j em $3(2^j)$ vértices de grau 1, todos eles adjacentes a folhas de T_j . Então o caminho mais longo em T_{j+1} é obtido ao acrescentar dois novos vértices no caminho mais longo de T_j .

Assim temos que $diam(T_{j+1}) = diam(T_j) + 2 = 2j + 2 = 2(j + 1)$. ■

O Lema a seguir relaciona os duais geométricos fracos de um grafo periplanar maximal qualquer e os dos grafos coroa.

Lema 38 *Seja G um grafo periplanar maximal, $n \geq 3$. Seja*

$$r = \lceil diam(T(G))/2 \rceil.$$

Então $T(G)$ é subgrafo de T_j para todo $j \geq r$, e $T(G)$ não é subgrafo de T_k para todo $k < r$.

Prova:

Seja $v = \text{centro}(T(G))$ (se $\text{centro}(T(G))$ tiver mais de um vértice, escolher qualquer um dos vértices do centro).

Se $d(v) = 3$, nada a fazer; senão completar com vértices adjacentes a v até obter o grau de v igual a 3.

Consideramos os vértices situados a distância 1 de v .

Se todos esses vértices tem grau 1, parar. Senão, se existir algum desses vértices de grau menor que 3, completar com vértices adjacentes até obter o grau dos vértices a distância 1 de v de grau 3.

Repetir para vértices a distância i de v , $1 < i \leq r$.

Assim completaremos a árvore $T(G)$, obtendo uma árvore tal que os vértices são folhas ou tem grau 3, onde temos $n^* = 3(2^r) - 2$, $m^* = 3(2^r) - 2 - 1 = 3(2^r) - 3$, que é a árvore de T_r .

Se $j > r$ então $T(G)$ é subgrafo de T_r que por sua vez é subgrafo de T_j .

Concluimos então que $T(G)$ é subgrafo de T_j para todo $j \geq r$, provando a primeira parte do Lema.

Vejam agora o caso em que $k < r$. Separamos a prova em dois subcasos, segundo $\text{diam}(T(G))$ seja par ou ímpar.

Se $k < r$ e $\text{diam}(T(G))$ é par então $r = \lceil \text{diam}(T(G))/2 \rceil = \text{diam}(T(G))/2$, e portanto temos que $2k < 2r = \text{diam}(T(G))$ e $2k = \text{diam}(T_k)$, então $\text{diam}(T_k) < \text{diam}(T(G))$. E assim $T(G)$ não é subgrafo de T_k para $k < r$ e $\text{diam}(T(G))$ par.

Se $k < r$ e $\text{diam}(T(G))$ é ímpar então temos que $\text{diam}(T(G)) = 2d + 1$ e $r = \lceil \text{diam}(T(G))/2 \rceil = d + 1$, portanto temos que $2k < 2r = 2d + 2$, assim temos que $2k \leq 2d + 1 = \text{diam}(T(G))$. É impossível que $2k$ seja igual a $\text{diam}(T(G))$ pois $2k$ é par e $\text{diam}(T(G))$ é ímpar. Então temos que $2k < \text{diam}(T(G))$, e assim $T(G)$ não é subgrafo de T_k para todo $k < r$, e assim temos a segunda parte do Lema. ■

Apresentamos agora um procedimento que dado um grafo periplanar maximal com pelo menos 3 vértices G , produz uma nova numeração dos vértices do grafo, considerando-se a estrutura das faces interiores. Esta numeração será utilizada na prova do Teorema 24.

Seja G um grafo periplanar maximal, $n \geq 3$.

Numeramos os vértices de G pelas suas larguras dadas por uma Busca em Largura Lexicográfica de G . Pelo Teorema 20 seção iv.3, esta numeração é uma rotulação recursiva de G .

Numeramos, em seguida, cada face interior de G pela largura do vértice de maior largura pertencente a essa face.

Obtemos assim a árvore $T(G) = G^* - v_{f_e}$ com os vértices numerados pelos valores dados a cada face interior (numerados de 3 até n).

Determinamos o centro da árvore $T(G)$. O centro pode ter um ou dois vértices no centro. Se $T(G)$ tiver mais de um vértice, escolhemos qualquer um deles.

Finalmente, determinamos o $diam(T(G))$.

Seja agora $r = \lceil diam(T(G))/2 \rceil$.

Executamos novamente a Busca em Largura Léxicográfica para G , mas escolhendo como primeiro vértice a ser percorrido um dos vértices de G que pertence à face interior de G cujo vértice associado em $T(G)$ foi centro escolhido anteriormente. Continuamos a busca de maneira tal que os 3 vértices desta face interior especial, sejam numerados com larguras 1, 2 e 3.

Ao finalizar a busca, temos uma nova numeração das larguras dos vértices de G que pode ou não coincidir com a primeira numeração obtida pela Busca em Largura Lexicográfica. Mas esta numeração das larguras permitirá garantir que G está contido no grafo coroa CR_r .

Exemplo:

Seja G o grafo da Figura v.5.

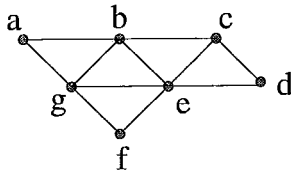


Figura v.5 Exemplo

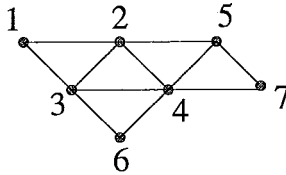


Figura v.6 Grafo da figura anterior numerado pelas larguras

Suponhamos que foi realizada uma Busca em Largura Lexicográfica em G e foram obtidas as larguras dos vértices dadas na Figura v.6.

Numeramos agora as faces interiores do grafo da seguinte maneira, para cada face interior de G , determinar o valor de largura máximo entre os vértices que determinam tal face. Obtemos então a numeração das faces interiores dada na Figura v.7. Nessa mesma figura temos $T(G)$, o dual geométrico fraco de G com os vértices numerados de acordo com a numeração das faces interiores.

O centro de $T(G)$ é formado pelos vértices 4 e 5. O diâmetro de $T(G)$ é igual a 3. Portanto $r = \lceil \text{diam}(T(G))/2 \rceil = 2$. Assim $T(G)$ está contido em T_2 o dual geométrico fraco de CR_2 , o grafo coroa com $n = 3(2^2)$ vértices.

Escolhemos $v = 4$.

Executamos uma Busca em Largura Lexicográfica em G onde os vértices de largura 1,2,3 correspondentes aos vértices da face 4 (b,e,g). Obtemos assim uma nova numeração dos vértices do grafo G pelas larguras da última Busca

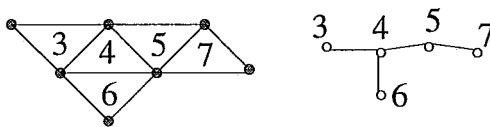


Figura v.7 Grafo onde as faces interiores são numeradas

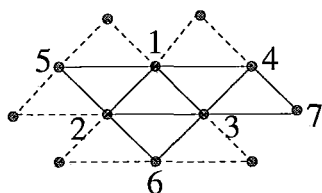


Figura v.8 O grafo do exemplo como subgrafo de CR_2

em Largura Lexicográfica. Na Figura v.8 temos o grafo com a nova numeração, que está contido em CR_2 .

Pelo Lema 38, temos que o dual geométrico fraco de um grafo periplanar maximal com pelo menos 3 vértices está contido no dual geométrico fraco de todos os grafos coroa CR_j , $j \geq r$, e r é o mínimo inteiro que verifica essa inclusão. O Teorema 24 prova que um grafo periplanar maximal está contido em todos os grafos coroa CR_j , $j \geq r$, e r é o menor inteiro que verifica esta condição.

Teorema 24 *Seja G um grafo periplanar maximal, $n \geq 3$. Então G é subgrafo de CR_r , onde $r = \lceil \text{diam}(T(G))/2 \rceil$.*

Prova:

Aplicamos o procedimento anterior ao grafo G para obter uma numeração das larguras dos vértices de G com os vértices de largura 1, 2 e 3 sendo os vértices da face interior que está associada a um dos vértice do centro de $T(G)$. Devemos provar que G é subgrafo de CR_j . Para isso, fazemos a construção seguinte. Seja $G_i = (V_i, E_i)$, onde temos que os vértices de G estão numerados pelas suas larguras obtidas do procedimento anterior.

$$G_0 = G(V_0), V_0 = \{1, 2, 3\}.$$

$$G_i = G(V_i), 1 \leq i \leq r, \text{ onde } V_i = V_{i-1} \cup \{\text{vértices de } G \text{ adjacentes exclusivamente com vértices de } V_{i-1}\}.$$

Observe que cada conjunto V_i difere de V_{i+1} em $3(2^i)$ vértices, $0 \leq i \leq r - 1$.

Observe também que $G_r = G$, pois $\text{diam}(T(G))/2 = r$. Então temos pela

definição de grafo Coroa, que $G = G_r \subseteq CR_r \subset CR_j, \forall j > r$.

E assim G é subgrafo do grafo coroa CR_r .

Além disso, temos que r é o menor índice que verifica tal condição. ■

v.4 Síntese do Capítulo

Neste capítulo foi apresentada uma nova família de grafos, os grafos coroa. Estes grafos formam uma seqüência que verifica uma propriedade importante provada no Teorema 24: todo grafo periplanar maximal está contido num grafo coroa CR_j para um valor j conveniente. Utilizando este lema, podemos concluir também que todo grafo periplanar está contido num grafo coroa conveniente.

Capítulo v. Grafo Coroa

Capítulo vi

Conclusões

Neste trabalho foi estudada a classe dos grafos periplanares maximais, e como uma extensão, a classe das 3-árvores planares.

Foi apresentada a caracterização dos grafos periplanares maximais dada em *KM89*, utilizando 2-árvores e conjuntos base. Esta caracterização permitiu estabelecer um novo algoritmo para reconhecer os grafos periplanares maximais, utilizando a Busca em Largura Lexicográfica. O algoritmo difere das idéias do algoritmo de reconhecimento de grafos cordais e planares dado no trabalho *KM89* na utilização dos rótulos $R(v)$. Além disso, a extensão obtida para o caso das 3-árvores planares, motivou a observação feita no capítulo **iii**, a respeito das 3-árvores planares serem os grafos cordais e planares maximais (Teorema 18 capítulo **iii**).

Todo esses resultados, tiveram como consequência uma melhor compreensão tanto da classe dos grafos cordais planares, como das 2-árvores e 3-árvores em particular. Apresentamos na figura vi.1 um esquema que estabelece os membros das diferentes classes de grafos que formam a interseção dos grafos cordais e planares. As interseções das diferentes classes de grafos que não apresentam grafos são vazias.

O Teorema 20, visto no capítulo **iv**, prova que a numeração dada pela Busca em Largura Lexicográfica num grafo periplanar maximal é uma rotulação recursiva dos vértices, o que permite unificar o algoritmo de reconhecimento com

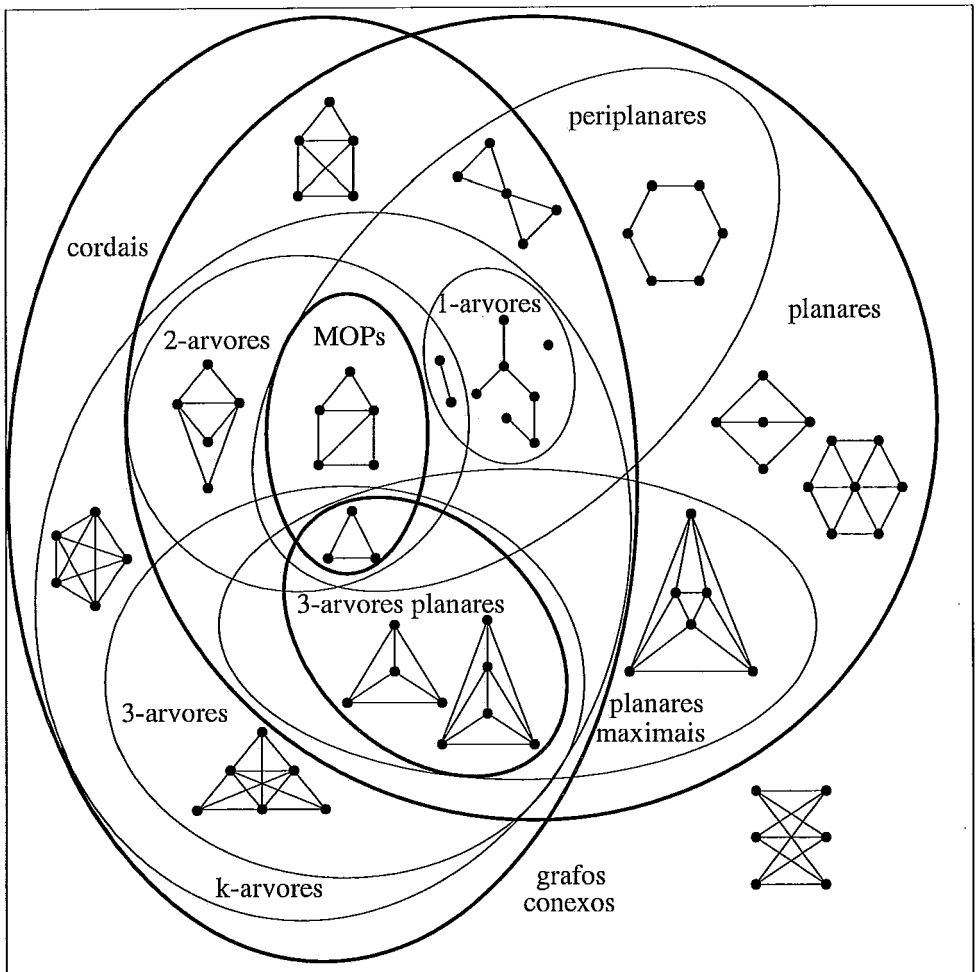


Figura vi.1 Interseção planar cordal

a geração de uma tal rotulação.

Por outro lado, nosso trabalho permitiu a definição de uma classe de grafos periplanares maximais com características particulares, os grafos coroa que foram apresentados no capítulo v, onde podemos destacar o Teorema 24.

Como propostas para desenvolvimentos futuros enunciamos as seguintes:

i) Aproveitar propriedades de uma família específica de grafos com objetivo de melhorar a complexidade de algoritmos é um recurso bastante utilizado na literatura. Por exemplo, no seu trabalho *F87*, Frederickson apresenta uma melhora do Algoritmo de Dijkstra para o problema de caminhos mínimos de fonte simples em grafos planares. Para obter tal melhora, é proposta uma fase de pré-processo, a qual gera uma divisão do grafo planar em regiões. Esta divisão é obtida utilizando o algoritmo separador de Lipton e Tarjan (*LT79*). Nossa idéia para trabalhar na classe dos grafos periplanares, é, aproveitando os resultados obtidos nesta tese, propor uma divisão do grafo periplanar em regiões, de maneira tal que a fase de pré-processo do algoritmo de Frederickson seja simplificada.

ii) Pelos mesmos motivos já expostos, propomos estudar os algoritmos de traçado de grafos planares para verificar se a aplicação dos mesmos a grafos periplanares maximais pode ser simplificada. Algoritmos de traçado de grafos planares são, geralmente, lineares porém de grande dificuldade de implementação.

iii) Estudar as classes de grafos obtidas pela relaxação das condições nas caracterizações de grafos periplanares, como por exemplo os grafos série paralelo e os grafos Halim (*Sy86*), assim como os grafos k -periplanares.

Capítulo vi. Conclusões

Capítulo vii

Referências Bibliográficas

[B77] Brehaupt, W. "An Efficient Outerplanarity Algorithm". Proc. 8th. S-E Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Louisiana State University, Feb. 1977.

[BJM79] Beyer, T., Jones, W., Mitchell, S. "Linear Algorithms for Isomorphism of Maximal Outerplanar Graphs", J. of ACM **26**:4 (1979), pp. 603-610.

[BM76] Bondy, J.A., Murty, U.S.R. "Graph Theory with Applications", Elsevier, New York (1976).

[FGH74]. Fleischner, H.J., Geller, D.P., Harary, F. *Outerplanar Graphs and Weak Duals*, J. Indian Math. Soc. **38** (1974), pp. 215-219.

[F87] Frederickson, G. "Fast Algorithms for Shortest Paths in Planar Graphs, with Applications", SIAM J. Comp. **16**:6 (1987), pp. 1004-1022.

[GJ79] Garey, M.R., Johnson, D.S. "Computers and Intractability- A Guide to the Theory of NP-Completeness", Freeman, San Francisco (1979).

[G85] Gibbons, A. "Algorithmic Graph Theory", Cambridge University

Press, Cambridge, Great Britain (1985).

[G80] Golombic, M.C. "*Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*", Academic Press, New York (1980).

[H72] Harary, F. "*Graph Theory*", Addison-Wesley, Reading, MA (1972).

[HT74] Hopcroft, J., Tarjan, R.E. "*Efficient Planarity Testing*", J.of ACM **21:4** (1974), pp. 549-568.

[J85] Jhonson, D.S. "*The NP-Completeness Column: an Ongoing Guide*", Journal of Algorithms **6** (1985), pp. 434-451.

[KM89] Kumar, P.S., Madhavan, C.E.V. "*A New Class of Separators and Planarity of Chordal Graphs*", Lecture Notes in Comp. Sci. **405** (1989), pp. 30-41.

[LL96] Lenhart, W., Liotta, G. "*Drawing outerplanar minimum weight triangulations*", Inf. Processing Letters **57** (1996), pp. 253-260.

[LT79] Lipton, R.J., Tarjan, R.E. "*A Separator Theorem for Planar Graphs*", SIAM J.Appl.Math. **36:2** (1979), pp. 177-189.

[M79] Mitchell, S. "*Linear Algorithms to Recognize Outerplanar and Maximal Outerplanar Graphs*", Inf. Processing Letters **9** (1979), pp. 229-232.

[MA92] Manning, J., Atallah, M. "*Fast detection and display of symmetry in outerplanar graphs*", Discrete Applied Mathematics **39** (1992), pp. 13-35.

[RM95] Rodrigues, R., Markenzon, L. "*Grafos Periplanares: Caracterização*

e Reconhecimento”, Instituto Militar de Engenharia, Depto. de Engenharia de Sistemas, Relatório Técnico Nro. 006/DE9/95 (1995).

[R70] Rose, D. *“Triangulates Graphs and the Elimination Process”*, J.of Mathematical Analysis and Applications **32** (1970), pp. 597-609.

[R74] Rose, D. *“On Simple Characterizations of k -Trees”*, Discrete Mathematics **7** (1974), pp. 317-322.

[RTL76] Rose, D., Tarjan, R.E., Leucker, G. *“Algorithmic Aspects of Vertex Elimination on Graphs”*, SIAM J.Comp. **5:2** (1976), pp. 266-283.

[Sy78] Syslo, M.M. *Outerplanar Graphs: characterizations, testing, coding and counting*, Bull.Acad.Polon.Sci.Ser.Sci.Math. **26** (1978) , pp. 675-684.

[Sy79] Syslo, M.M. *Characterization of Outerplanar Graphs*, Discrete Mathematics **26** (1979), pp. 47-53.

[Sy82] Syslo, M.M. *The Subgraph Isomorphism Problem for Outerplanar Graphs*, Theoretical Computer Science **17** (1982), pp. 91-97.

[Sy86] Syslo, M.M. *On some generalizations of outerplanar graphs Results and Open Problems*, Lecture Notes in Comp. Sci. **246** (1986) Proc. of Graph-Theoretic Concepts in Computer Sc. Intern. Workshop WG’86, pp. 146-164.

[S88] Szwarcfiter, J.L. *“Grafos e Algoritmos Computacionais”*, Ed. Campus (1988).

[VKM92] Veeraraghavulu, N.Ch., Kumar, P.S., Madhavan, C.E.V. *“A linear time algorithm for isomorphism of a subclass of chordal graphs”*, Inf. Pro-

cessing Letters **44** (1992), pp. 45-49.

[VI89] Villanueva Ilufi, M. "*Grafos Triangularizados, Caracterizações, Restrições, Extensões*", Tese Mestrado, COPPE-Sistemas, UFRJ, (1989).

[W87] Wieggers, M. "*Recognizing Outerplanar Graphs in Linear Time*", Lecture Notes in Comp. Sci. **246** (1987), pp. 165-176.