SEMÂNTICA PARA LÓGICA DEFAULT E PROGRAMAÇÃO EM LÓGICA BASEADA EM REVISÃO DE CRÊNÇAS

João Carlos Pereira da Silva

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por :

Sheila Regina Murgel Veloso

Profª. Sheila Regina Murgel Veloso, Dsc.

(Presidente)

Mário R. F. Benevides

Prof. Mário Roberto Folhadella Benevides, PhD.

Gerson Zaverucha

Prof. Gerson Zaverucha, PhD.

Marco Antonio Casanova

Prof. Marco Antonio Casanova, PhD.

Hemerly

Profª. Andréa Silva Hemerly, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 1996

SILVA, JOÃO CARLOS PEREIRA DA
Semântica para Lógica Default e Programação em Lógica baseada em Revisão de Crenças [Rio de Janeiro] 1996
viii, 261p., 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1996)
Tese-Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE
1. Lógica Default 2. Revisão de Crenças 3. Programação em Lógica 4. Semântica de Esferas 5. Conjuntos de Crenças 6. Bases de Crenças I. COPPE/UFRJ II. TÍTULO (série)

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.SC.).

SEMÂNTICA PARA LÓGICA DEFAULT E PROGRAMAÇÃO EM LÓGICA BASEADA EM REVISÃO DE CRENÇAS

João Carlos Pereira da Silva

Dezembro de 1996

Orientadora : Profª. Sheila Regina Murgel Veloso

Programa : Engenharia de Sistemas e Computação

Neste trabalho procuramos estabelecer uma relação semântica entre o processo de revisão de crenças e as várias lógicas default e tipos de programas em lógicas existentes. Tal relação estará baseada na conexão entre as noções de *consistência/ inconsistência*, que estão presentes no contexto das lógicas default, e as noções de *expansão/ revisão*, que aparecem no escopo dos processos de revisão de crenças.

Utilizaremos a conexão estabelecida entre estes conceitos de forma a : (i) definir um ambiente semântico simples para as várias lógicas default existentes ; (ii) definir um ambiente semântico para programas em lógicas, permitindo relacionar três importantes áreas dentro da inteligência artificial : revisão de crenças, lógica default e programação em lógica ; (iii) a partir da relação estabelecida entre lógicas default e revisão de crenças, propomos a utilização do ambiente das lógicas default (tanto no caso clássico quanto nos outros) como uma forma de representação de estados epistêmicos e de processos de revisão, tanto do ponto de vista *fundamentalista* (onde as crenças devem ter uma justificativa para serem acreditadas) quanto do ponto de vista *coerente* (onde o conjunto de crenças deve ser apenas consistente).

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.SC.).

SEMANTICS FOR DEFAULT LOGIC AND LOGIC PROGRAMMING BASED ON BELEIF REVISION

João Carlos Pereira da Silva

December, 1996

Thesis Supervisor : Profª. Sheila Regina Murgel Veloso
Department : Systems Engeneering and Computing

In this work, we will stablish a semantical relationship among the process of belief revision and default logic and logic programming. This relationship will be based on the connection between the notions of *consistency/ inconsistency*, that appear in default logic, and the notions of *expansion/ revision*, that appear in the process of belief revision.

We will use the connection between those notions to : (i) define a simple semantical environment for a variety of default logics; (ii) define a semantical environment for logic programs, allowing to relate three important areas in artificial intelligence : belief revision, default logic and logic programming ; (iii) from the relation between belief revision and default logic, we argue that we can use the environment of (classical and non-classical) default logic to represent epistemic states and the process of belief revision itself from a *foundations* point of view (where the agent holds some belief if and only if it possesses a satisfactory reason for that belief) as well as from a *coherence* point of view (where the agent holds some belief just as long as it logically coheres with his others beliefs.)

AGRADECIMENTOS

- À minha orientadora, Profª. Sheila Veloso, pelos valiosos ensinamentos, pelo constante estímulo, pela sua dedicação na orientação deste trabalho e pelo seu empenho em viabilizar minha participação em congressos e workshops ;

- Ao Prof. Gerson Zaverucha, por seus importantes comentários durante o desenvolvimento deste trabalho ;

- À Anamaria Oliveira, pelos livros e artigos que me enviou da Inglaterra ;

- À CAPES e à Universidade Estácio de Sá, pelo apoio financeiro dado a este trabalho.

Dedico este trabalho

a meus pais, Antonio e Jacinta

e

a minha esposa, Andréa

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

Introdução

Uma das características mais interessantes do raciocínio humano é a capacidade que as pessoas apresentam de tomar decisões a partir de um conjunto restrito de fatos ou, colocando de outra forma, chegar a certas conclusões a partir de um conjunto incompleto de informações.

Podemos encarar esta característica de duas maneiras : a primeira, imaginando que, uma vez que não há informação sobre a veracidade ou não de um determinado fato, as pessoas "assumem" este fato como verdadeiro e, baseado nele e em outros fatos que são de seu conhecimento, elas determinam suas ações e/ou conclusões. Uma segunda alternativa é considerar que o conjunto de fatos que são do conhecimento de uma pessoa formam um conjunto "completo" de informações que pode ser alterado (ou não) a partir do instante em que novas informações são obtidas.

As duas abordagens descritas acima sugerem uma certa relação : ao completarmos nosso conhecimento "assumindo" certos fatos como verdadeiros, passamos a encarar tal conjunto "completo" de informações como algo que de fato reflete nossas crenças a respeito do mundo. A partir do instante que obtemos novas informações a cerca deste, podemos ser levados a abandonar certas hipóteses, ou, do ponto de vista de um conjunto "completo" de informações, podemos ser levados a rever tal conjunto. Essas duas situações podem ser descritas através de dois formalismos baseados em lógica : a *lógica default* e *a revisão de crenças.*

A *lógica default* definida por Reiter [58] tem sido um dos formalismos mais utilizados no estudo do raciocínio não-monotônico. Basicamente, a lógica default permite que uma teoria (proposicional ou de primeira-ordem) seja estendida pelo acréscimo, segundo certas condições, de novas sentenças. Tais sentenças, e suas respectivas condições de aplicação, são definidas através de regras chamadas *defaults.* Apesar de Reiter [58] não ter definido uma semântica para a lógica default, o que foi feito posteriormente por Lukaszewicz [41] e por Etherington [24], a simplicidade de representação apresentada por este formalismo contribuiu de maneira decisiva para a sua utilização no estudo de sistemas de raciocínio não-monotônico.

Com o passar do tempo observou-se que a lógica default não apresentava algumas características importantes do tipo de raciocínio que ela procurava representar como, por exemplo, a cumulatividade e a preservação da consistência entre hipóteses (apresentaremos tais conceitos adiante no próximo capítulo), o que acarretava na obtenção de resultados não-intuitivos quando tais propriedades se tornavam críticas no processo de formalização de sistemas não-monotônicos.

Assim, uma série de outras lógicas default ([14],[40],[62],[66],[67]) foram propostas na tentativa de obter variantes da lógica default original, que passaremos a chamar de lógica default clássica, que satisfizessem algumas dessas propriedades. Tais variantes foram obtidas, fundamentalmente, através da alteração do critério de aplicação dos defaults. Ou seja, elas se diferenciam entre si, e cada uma delas difere da lógica default clássica, pelas condições que devem ser satisfeitas para que uma sentença seja acrescentada ou não a uma dada teoria (ou, para que uma sentença possa ser utilizada para completar nosso conhecimento a cerca do mundo).

Interessante observar que, embora fosse claro, do ponto de vista sintático, como a condição de aplicabilidade de um default da lógica default clássica deveria ser alterada para se obter uma nova lógica default que possuísse uma certa propriedade, o mesmo não ocorria do ponto de vista semântico, uma vez que algumas destas novas lógicas acabaram também sendo inicialmente definidas sem uma apresentação semântica.

Como veremos, a condição de aplicabilidade de um default nas diversas lógicas é verificada através de uma série de testes de consistência. Assim, as sentenças e/ou conjuntos de sentenças sobre os quais estamos aplicando o teste de consistência, determinam as várias lógicas default existentes.

Uma abordagem dentro do escopo da representação de conhecimento que também utiliza a noção de consistência e inconsistência é a revisão de crenças (Alchourrón [2], Gärdenfors [27]). No processo de revisão de crenças (Gärdenfors [27]), considera-se que nosso conhecimento a cerca do mundo é representado por um conjunto (fechado sob conseqüência lógica) de sentenças.

Este conjunto pode ser alterado a partir do momento em que novas informações são aprendidas. Caso a nova informação seja consistente com o que se acredita, ela é incorporada ao nosso conjunto de crenças num processo chamado de *expansão*. Caso ela seja inconsistente, devemos de alguma maneira determinar dentro do conjunto de crenças aquelas que são as responsáveis pela inconsistência e eliminá-las do nosso conjunto. Este processo é chamado de *revisão*.

Procuraremos neste trabalho estabelecer uma relação semântica entre o processo de revisão de crenças e as várias lógicas default propostas. Tal relação estará baseada na conexão entre as noções de *consistência/ inconsistência*, que estão presentes no contexto das lógicas default, e as noções de *expansão/ revisão*, que aparecem no escopo dos processos de revisão de crenças.

Utilizaremos a conexão estabelecida entre estes conceitos de forma a :

- definir um ambiente semântico simples para as várias lógicas default existentes ;
- definir um ambiente semântico para programas em lógicas, permitindo relacionar três importantes áreas dentro da inteligência artificial : revisão de crenças, lógica default e programação em lógica ;
- a partir da relação estabelecida entre lógicas default e revisão de crenças, proporemos que o ambiente das lógicas default (tanto no caso clássico quanto nos outros) pode ser utilizado como uma forma de representação de processo de revisão, tanto do ponto de vista *fundamentalista* (onde as crenças devem ter uma justificativa para serem acreditadas) quanto do ponto de vista *coerente* (onde o conjunto de crenças deve ser apenas consistente).

Como veremos (capítulos 4 e 5), o ambiente semântico criado a partir do relacionamento entre as noções de *consistência/ inconsistência* e *expansão/ revisão*, permitirá que a apresentação semântica das lógicas default (e, resp., dos programas em lógica) seja feita de maneira uniforme. Isto significa que, na formulação dos resultados, a diferença aparecerá apenas nas condições de construção que diferem entre si, tal como acontece do ponto de vista sintático.

Este trabalho está organizado da seguinte forma : nos capítulos 2 e 3, faremos uma revisão dos conceitos, respectivamente, de lógica default e revisão de crenças que serão utilizados nos capítulos seguintes. No capítulo 4, será definido o ambiente semântico no qual as diversas lógicas default apresentadas podem ser definidas. No capítulo 5, estendemos os resultados apresentados no capítulo anterior de forma a estabelecer um ambiente semântico para diferentes tipos de programas em lógica. Finalmente, no capítulo 6, apresentaremos como teorias default podem ser utilizadas na representação de processos de revisão.

Capítulo 2

Lógicas Default

I. Introdução

Nosso conhecimento a respeito do mundo é incompleto e, por isto, algumas vezes somos levados a fazer suposições a fim de tomarmos alguma decisão ou chegar a alguma conclusão. Assim, tais conclusões e/ou decisões poderão estar baseadas em hipóteses que podem ser abandonadas e/ou alteradas a partir do instante em que algum novo fato se sobrepõe a elas.

Por exemplo, se estamos informados que Tweety é uma ave, podemos concluir que Tweety voa a partir da suposição de que normalmente as aves voam. Tal conclusão será naturalmente modificada se em algum momento descobrirmos, por exemplo, que Tweety é um pingüim, pois sabemos que pingüins são aves anormais com respeito a habilidade de voar (pingüins são aves que não voam).

Este tipo de raciocínio é chamado de *raciocínio default*. Neste capítulo apresentamos uma variedade de lógicas default que foram desenvolvidas com o objetivo de tentar capturar tal característica do raciocínio humano. Serão apresentadas as seguintes lógicas default : *clássica* de Reiter [58] (seção 2); *justificada* de Lukaszewicz [40] (seção 3); *restrita* de Schaub [62] (seção 4); *cumulativa* de Brewka [14] (seção 5); *cumulativa priorizada* de Zaverucha [66]-[67] (seção 6) e o *sistema de raciocínio default* de Poole [55] (seção 7).

II. Lógica Default Clássica de Reiter

A *lógica default de Reiter* [58] foi um dos primeiros formalismos propostos para a modelagem do raciocínio default. Um *default* é uma expressão da forma :

$$A(x) : B_1(x), ..., B_k(x) / C(x)$$

onde $A(x)$, $B_1(x)$, ..., $B_k(x)$ e $C(x)$ são fórmulas de primeira-ordem. Um default pode ser interpretado da seguinte maneira : "Para todo elemento $x = (x_1, ..., x_n)$, se $A(x)$ é um fato conhecido e todos $B_1(x)$, ..., $B_k(x)$ são consistentes com o que se acredita então

C(x) também deve ser acreditado". Dizemos que a formula A(x) é o *pré-requisito*, $B_1(x)$, ..., $B_k(x)$ são as *justificativas* e C(x) é o *conseqüente* de um default.

Um default $(A(x) : B_1(x), ..., B_k(x) / C(x))$ é chamado *aberto* se, e somente se, pelo menos um dentre A(x), $B_1(x)$, ..., $B_k(x)$, C(x) contém uma variável livre; caso contrário, ele é chamado de *fechado*. Representaremos os defaults fechados por :

$$A : B_1, ..., B_k / C.$$

Dizemos que um default da forma :

: B(x) / B(x) é um *default supernormal*

A(x) : B(x) / B(x) é um *default normal*

A(x) : $B(x) \wedge C(x)$ / C(x) é um *default semi-normal*

A(x) : B(x) / C(x) é um *default não-normal*

Na lógica default, o mundo é modelado através de *teorias default*. Uma *teoria default* é formada pelo par (W,Δ) onde W é um conjunto de fórmulas que representam os fatos verdadeiros que conhecemos a respeito do mundo e Δ é um conjunto de defaults que representam as hipóteses que podem ser utilizadas para completar o conhecimento expresso em W. Uma teoria default é chamada supernormal (resp., normal, semi-normal e não-normal) quando todos os defaults em Δ são supernormais (resp., normais, semi-normais e não-normais).

Pode-se identificar um default aberto com o conjunto de todas as suas instâncias (ver [40]), sendo portanto possível definir um mapeamento que leva toda teoria default aberta T a uma teoria default fechada FECHO(T), obtida a partir de T pela substituição de cada um de seus defaults abertos pelo respectivo conjunto de instâncias do referido default.

Uma *extensão* de uma teoria default é um conjunto de sentenças (fechado sobre conseqüência lógica) que podem ser derivadas a partir dos axiomas em W pela aplicação de um conjunto maximal de defaults. Formalmente :

Definição 2.2.1 (Reiter [58])

Seja (W,Δ) uma teoria default fechada sobre uma linguagem de primeira-ordem L. Para qualquer conjunto de sentenças $S \subseteq L$, seja $\Gamma(S)$ o menor conjunto de sentenças tal que : (1) $\Gamma(S) = Th(\Gamma(S))$;

(2) $W \subseteq \Gamma(S)$;

(3) Se $(A : B_1, ..., B_k / C) \in \Delta$, $A \in \Gamma(S)$ e $\neg B_1 \notin S, ..., \neg B_k \notin S$,

então $C \in \Gamma(S)$.

Um conjunto de sentenças $E \subseteq L$ é uma *extensão* de (W,Δ) se, e somente se, $E = \Gamma(E)$. ■

Definição 2.2.2 (Lukaszewicz [40])

Seja T uma teoria default sobre uma linguagem L_T. E é uma extensão de T quando $E = E' \cap L_T$ e E' é uma extensão de FECHO(T). ■

Exemplo 2.2.1

Considere a teoria default supernormal $T = (W,\Delta)$, onde :

$W = \{BIRD(Tweety) \vee BIRD(Polly)\}$, i.e., ou Tweety ou Polly é uma ave ; e

$\Delta = \{ : \neg BIRD(x) / \neg BIRD(x)\}$, i.e., se é consistente acreditar que x não é ave, então podemos crer que x não é ave.

A teoria T é aberta e podemos considerar o conjunto de indivíduos de T composto por {Tweety,Polly}. Conseqüentemente, a teoria FECHO(T) correspondente a T é formada por :

$W = \{BIRD(Tweety) \vee BIRD(Polly)\}$; e

$\Delta = \{ : \neg BIRD(Tweety) / \neg BIRD(Tweety) , : \neg BIRD(Polly) / \neg BIRD(Polly)\}$, i.e., temos dois defaults : Tweety não é uma ave e Polly não é uma ave.

Como T e FECHO(T) são especificadas sobre a mesma linguagem (conjunto de fórmulas construídas a partir das constantes de predicados e funções que aparecem nos axiomas e nos defaults de T), suas extensões coincidem. São elas :

$E_1 = Th(W \cup \{\neg BIRD(Tweety)\})$ e $E_2 = Th(W \cup \{\neg BIRD(Polly)\})$. ■

Exemplo 2.2.2

Considere a teoria default normal fechada (W,Δ) onde :

$W = \{BIRD(Tweety)\}$, que representa o fato de que Tweety é uma ave, e

$\Delta = \{BIRD(Tweety) : FLY(Tweety) / FLY(Tweety)$,

$FLY(Tweety) : \neg PENGUIN(Tweety) / \neg PENGUIN(Tweety)\}$, que representam, respectivamente, os defaults : se sabemos que Tweety é uma ave e é consistente acreditar que ele voa, então podemos assumir que Tweety voa e se sabemos que Tweety voa e é consistente acreditar que Tweety não é um pingüim, então podemos assumir que Tweety não é um pingüim.

Esta teoria possui somente uma extensão :

$$E_1 = Th(W \cup \{ FLY(Tweety), \neg PENGUIN(Tweety)\}). \blacksquare$$

Uma extensão pode ser caracterizada de maneira mais intuitiva através do seguinte teorema :

Teorema 2.2.1 (Reiter [58])

Se (W,Δ) é uma teoria default fechada, então um conjunto E de sentenças é uma extensão de (W,Δ) se, e somente se, $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, onde :

$E_0 = W$; e para $i \geq 0$:

$E_{i+1} = Th(E_i) \cup \{C \mid (A : B_1, \ldots ,B_k / C) \in \Delta$, onde $E_i \vdash A$ e $\neg B_1 \notin E, \ldots, \neg B_k \notin E\}$. ■

Dado um conjunto qualquer de defaults $\mathcal{D}$, PRER($\mathcal{D}$), JUST($\mathcal{D}$) e CONS($\mathcal{D}$) representarão, respectivamente, o conjunto de pré-requisitos, justificativas e conseqüentes dos defaults em $\mathcal{D}$.

Definição 2.2.3 (Reiter [58])

Seja (W,Δ) uma teoria default fechada e suponha que E é uma extensão de (W,Δ). O *conjunto de default geradores de* E *com respeito a* (W,Δ), denotado por $GD(E,(W,\Delta))$, é definido por :

$$GD(E,(W,\Delta)) = \{(A : B_1, \ldots ,B_k / C) \in \Delta \mid A \in E \text{ e } \neg B_1 \notin E, \ldots, \neg B_k \notin E\}. \blacksquare$$

Teorema 2.2.2 (Reiter [58])

Se E é uma extensão de uma teoria default fechada (W,Δ), então :

$$E = Th(W \cup CONS(GD(E,(W,\Delta)))). \blacksquare$$

Exemplo 2.2.3 (Reiter [58])

Considere a teoria default não-normal fechada (W,Δ) onde :

$$W = \varnothing \text{ e } \Delta = \{:A/\neg A\}.$$

Esta teoria default não possui extensão.

Observe que um candidato a extensão desta teoria seria um conjunto E tal que $\neg A \in E$. Pelo teorema 2.2.1, $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, onde :

$E_0 = W$; e para $i \geq 0$:

$E_1 = Th(E_0) \cup \{C \mid (A : B / C) \in \Delta$, onde $E_0 \vdash A$ e $\neg B \notin E^{\dagger}\}$.

Considerando o default $:A/\neg A$, e como $\neg A \in E$, a condição † não é satisfeita e, portanto, o conjunto E não é uma extensão da teoria (W,Δ). ■

Como podemos observar pelo exemplo anterior, nem toda teoria default possui extensão. As teorias default normais compõem uma classe importante dentro da lógica default, uma vez que para este tipo de teoria é possível garantir a existência de pelo menos uma extensão. Isto ocorre pois a aplicação de um default normal não introduz inconsistência no conjunto ao qual ele é aplicado, além de não refutar as suas próprias justificativas nem a dos outros defaults já aplicados.

Teorema 2.2.3 (Existência de extensão - Reiter [58])

Toda teoria default normal fechada possui uma extensão. ■

Outra importante propriedade das teorias default normais é a semi-monotônicidade, garantida pelo seguinte teorema :

Teorema 2.2.4 (Semi-monotonicidade - Reiter [58])

Sejam Δ e Δ' conjuntos de defaults normais fechados tais que $\Delta' \subseteq \Delta$. Seja E' uma extensão de uma teoria default normal fechada (W,Δ'). Então a teoria default normal fechada (W,Δ) possui uma extensão E tal que $E' \subseteq E$. ■

Marek e Truszczynski [45] definiram um outro tipo de extensão para lógica default, chamada de *extensão fraca*, obtida através do enfraquecimento do critério de aplicabilidade de um default.

Observe que pelo teorema 2.2.1, um default A:B/C pode ser aplicado (seu conseqüente pode ser acrescido ao conjunto E_i) se o seu pré-requisito (A) puder ser derivado a partir do conjunto E_i. No caso da extensão fraca, se exige apenas que o pré-requisito seja derivado somente na extensão. Assim, a extensão fraca pode ser definida da seguinte maneira :

Definição 2.2.4

Seja (W,Δ) uma teoria default fechada sobre uma linguagem de primeira-ordem L. Para qualquer conjunto de sentenças $S \subseteq L$, seja $\Gamma_f(S)$ o menor conjunto de sentenças tal que :

(1) $\Gamma_f(S) = Th(\Gamma_f(S))$;

(2) $W \subseteq \Gamma_f(S)$;

(3) Se $(A : B_1, ..., B_k / C) \in \Delta$, $A \in S$ e $\neg B_1 \notin S, ..., \neg B_k \notin S$, então $C \in \Gamma_f(S)$.

Um conjunto de sentenças $E \subseteq L$ é uma *extensão fraca* de (W,Δ) se, e somente se, $E = \Gamma_f(E)$. ■

Conseqüentemente, as extensões fracas de uma teoria default podem ser caracterizadas alterando-se apenas uma condição no teorema 2.2.1 :

Teorema 2.2.5

Se (W,Δ) é uma teoria default fechada, então um conjunto E de sentenças é uma extensão fraca de (W,Δ) se, e somente se, $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, onde :

$E_0 = W$; e para $i \geq 0$:

$E_{i+1} = Th(E_i) \cup \{C \mid (A : B_1, \ldots, B_k / C) \in \Delta$, onde $A \in E$ e $\neg B_1 \notin E, \ldots, \neg B_k \notin E\}$. ■

Exemplo 2.2.4 (Marek e Truszczynski [45])

Considere a teoria default (W, Δ), onde $W = \{A \rightarrow B\}$ e $\Delta = \{B: /A \ ; \ :\neg B/B\}$. Esta teoria default não possui extensão mas $E = Th(\{A, A \rightarrow B\})$ é uma extensão fraca de (W, Δ). Pelo teorema 2.2.5, temos $E_0 = W = \{A \rightarrow B\}$ e $E_1 = Th(E_0) \cup \{A\}$ pois o default (B: /A) é aplicável uma vez que $B \in E$.■

Brewka [14] definiu uma lógica default priorizada onde o conjunto de defaults Δ foi substituído por conjuntos $\Delta_1,\ldots, \Delta_n$, de forma que os defaults pertencentes a Δ_i possuem prioridade maior que os pertencentes a Δ_j, para quaisquer i e j tais que $i < j$. A noção de extensão de uma teoria default priorizada é definida da seguinte maneira :

Definição 2.2.5 (Brewka [14])

Seja W um conjunto de fatos e Δ_i, $i \in [1,n]$, conjuntos de defaults fechados. Seja $(W_0, \Delta_1,\ldots, \Delta_n)$ uma teoria default fechada priorizada. Dizemos que E é uma *PDL_B-extensão* (Prioritized Default Logic-extension) de $(W, \Delta_1,\ldots, \Delta_n)$ se, e somente se, existem conjuntos de fórmulas $E_1,\ldots,E_n$ tais que :

E_1 é uma extensão de (W,Δ_1)

E_2 é uma extensão de (E_1,Δ_2)

...

$E = E_n$ é uma extensão de (E_{n-1},Δ_n). ■

Esta definição de extensão para lógica default priorizada só funciona de forma adequada no caso de defaults supernormais. No caso de um default qualquer, podem ocorrer dois tipos de problemas (Brewka [14]) :

1. eventualmente, podemos derivar uma sentença em um determinado nível (digamos E_i) que seja inconsistente com a justificativa de um default aplicado em um nível anterior (em E_j, $j < i$) ;

2. o pré-requisito de um default $d \in \Delta_i$, pode ser derivado somente em E_j, para $j > i$, o que impediria que d fosse aplicado.

III. Lógica Default Justificada de Lukaszewicz

A *lógica default justificada* de Lukaszewicz (*justified default logic* [40]) é uma formalização alternativa à lógica default de Reiter, que garante a existência de extensão e a semi-monotonicidade para teorias default em geral. Como vimos anteriormente (teoremas 2.2.3 e 2.2.4), na lógica default clássica, podemos garantir estas propriedade para as teorias default normais.

Neste formalismo, o critério de aplicabilidade de um default utilizado pela lógica default clássica é modificado, e passa a ser o seguinte : "se : (a) acreditamos no pré-requisito de um default, (b) suas justificativas são consistentes com o que acreditamos, e (c) *acrescentando o conseqüente deste default ao conjunto de fatos não obtemos uma inconsistência, nem contradizemos as justificativas deste ou de qualquer outro default já aplicado*, então o conseqüente do default deve ser acreditado".

Portanto, a diferença entre os critérios de aplicabilidade de defaults da lógica default clássica e da lógica default justificada é que, nesta última, na hora de se aplicar um default, não só este é levado em consideração, mas também todos os outros defaults (conseqüentes e justificativas) já aplicados até aquele instante.

Isto implica que nesta lógica há a necessidade de se utilizar um operador extra na definição formal de extensão, que tem como objetivo guardar as justificativas que dão suporte às crenças de uma certa extensão. Formalmente :

Definição 2.3.1 (Lukaszewicz [40])

Seja (W,Δ) uma teoria default fechada sobre a linguagem L. Defina os operadores Γ_1 e Γ_2, sobre pares de conjuntos de sentenças de L, tais que para qualquer par (S,U), $\Gamma_1(S,U)$ e $\Gamma_2(S,U)$ são os menores conjuntos de sentença de L que satisfazem :

(1) $\Gamma_1(S,U) = Th(\Gamma_1(S,U))$;

(2) $W \subseteq \Gamma_1(S,U)$;

(3) Se $(A : B_1,\ldots,B_k / C) \in \Delta$, $A \in \Gamma_1(S,U)$, e

para todo $X \in U \cup \{B_1,\ldots,B_k\}$, $S \cup \{C\} \nvdash \neg X$, então

(i) $C \in \Gamma_1(S,U)$;

(ii) $B_1,\ldots,B_k \in \Gamma_2(S,U)$.

Um conjunto de sentenças $E \subseteq L$ é uma *extensão modificada* (ou, *m-extensão*) de (W,Δ) com respeito a F se, e somente se, $E = \Gamma_1(E,F)$ e $F = \Gamma_2(E,F)$. E é uma *m*-extensão de (W,Δ) se, e somente se, existe um conjunto F tal que E é uma *m*-extensão de (W,Δ) com respeito a F. O conjunto F é chamado *conjunto de justificativas que suportam* E.■

Assim como na lógica default clássica, as *m*-extensões possuem uma caracterização mais intuitiva que é dada por :

Teorema 2.3.1 (Lukaszewicz [40])

Seja (W,Δ) uma teoria default fechada. O conjunto E é uma *m*-extensão de (W,Δ) com respeito a F se, e somente se,

$$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei \text{ e } F = \bigcup_{i=0}^{\infty} Fi \text{, onde :}$$

$E_0 = W$;

$F_0 = \{\ \}$; e para $i \geq 0$:

$$E_{i+1} = Th(E_i) \cup \{C \mid (A : B_1, \ldots ,B_k / C) \in \Delta, E_i \vdash A, \text{ e}$$
$$\text{para cada } X \in F \cup \{B_1, \ldots ,B_k\}, E \cup \{C\} \not\vdash \neg X\}$$

$$F_{i+1} = F_i \cup \{B_1, \ldots ,B_k \mid (A : B_1, \ldots ,B_k / C) \in \Delta, E_i \vdash A, \text{ e}$$
$$\text{para cada } X \in F \cup \{B_1, \ldots ,B_k\}, E \cup \{C\} \not\vdash \neg X\}.$$ ■

As extensões na lógica default clássica e na lógica default justificada estão relacionadas através do seguinte teorema :

Teorema 2.3.2 (Lukaszewicz [40])

Seja (W,Δ) uma teoria default e suponha que E é uma extensão de (W,Δ). Então E é uma *m*-extensão de (W,Δ). ■

A recíproca do teorema anterior só é válida para teorias default normais (ver [40]). Para outros tipos de teorias default, não podemos garantir a recíproca do teorema, como mostra o exemplo a seguir :

Exemplo 2.3.1 (Lukaszewicz [40])

Considere a teoria default fechada (W,Δ) onde :

$$W = \{A,B\} \text{ e } \Delta = \{A:(C \wedge \neg D)/ C \,;\, B : D / D\}.$$

Note esta teoria default possui uma única extensão na lógica default clássica, formada por : $E = Th(\{A,B,D\})$.

Considere agora a formalização alternativa proposta por Lukaszewicz. Podemos aplicar o default $(A{:}(C \wedge \neg D)/\ C)$ uma vez que $A \in W$ e $(C \wedge \neg D)$ é consistente com W. Logo, podemos acrescentar o conseqüente C ao conjunto W, obtendo $Th(W \cup \{C\})$. O segundo default não pode ser aplicado pois a sua justificativa (D) contradiz a justificativa do default já aplicado $(C \wedge \neg D)$. Temos então a *m*-extensão $E_1 = Th(\{A,B,C\})$ com respeito a $\{C \wedge \neg D\}$.

Podemos obter outra *m*-extensão se considerarmos, primeiramente, a aplicação do default $(B : D / D)$. Como antes, o outro default $(A{:}(C \wedge \neg D)/\ C)$ não pode ser utilizado pois a sua justificativa contradiz a justificativa do default já aplicado. Portanto, temos uma outra *m*-extensão : $E_2 = Th(\{A,B,D\})$ com respeito a $\{D\}$.■

Definição 2.3.2 (Risch [59])

Seja (W,Δ) uma teoria default e E uma *m*-extensão de (W,Δ) com respeito a F. O conjunto de defaults de uma extensão E de (W,Δ) com respeito a F, denotado por $GD^F(E,(W,\Delta))$, é definido por :

$$GD^F(E,(W,\Delta)) = \{(A : B_1, \ldots ,B_k / C) \in \Delta \mid A \in E,\ B_1 \in F, \ldots ,B_k \in F, \text{ e}$$
$$\text{para cada } X \in F,\ E \not\vdash \neg X\}.■$$

Teorema 2.3.3 (Risch [59])

Se E é uma *m*-extensão de uma teoria default (W,Δ) com respeito a F, então :

$$E = Th(W \cup CONS\ (GD^F(E,(W,\Delta))) \text{ e}$$
$$F = JUST(GD^F(E,(W,\Delta))).\ ■$$

Diferente da lógica default clássica, a lógica default justificada possui as propriedades da existência de *m*-extensão e da semi-monotonicidade, qualquer que seja o tipo de teoria default (normal ou não) :

Teorema 2.3.4 (Existência de extensão - Lukaszewicz [40])

Toda teoria default fechada possui uma *m*-extensão. ■

Teorema 2.3.5 (Semi-monotonicidade - Lukaszewicz [40])

Sejam Δ e Δ' conjuntos de defaults fechados tais que $\Delta' \subseteq \Delta$. Seja E' uma *m*-extensão de (W,Δ') com respeito a F'. Então (W,Δ) possui uma *m*-extensão E com respeito a F tal que $E' \subseteq E$ e $F' \subseteq F$. ■

IV. Lógica Default Restrita de Schaub

A *lógica default restrita* (*constrained default logic*) foi proposta por Schaub [62] e é uma outra variante da lógica default clássica. A diferença entre elas é que na lógica default restrita as justificativas dos defaults aplicados são guardadas para serem utilizadas como um *contexto* que deve ser levado em conta quando se quiser aplicar um novo default.

Dada uma teoria default (clássica) (W,Δ), dizemos que uma *extensão restrita* é formada pelo par (E,Θ) de conjuntos de fórmulas onde $E \subseteq \Theta$. A *extensão* E contém todas as fórmulas que são assumidas como verdadeiras e o *conjunto de restrições* Θ é formado por E e todas as justificativas de todos os defaults aplicados. Desta maneira, um default A:B/C pode ser aplicado quando o seu pré-requisito (A) puder ser provado a partir da extensão (restrita) E e a sua justificativa (B) junto com o seu conseqüente (C) são consistentes com o conjunto de restrições Θ. Formalmente, uma extensão restrita é definida da seguinte forma :

Definição 2.4.1 (Schaub [62])

Seja (W,Δ) uma teoria default. Para qualquer conjunto de fórmulas T, seja $\Upsilon(T)$ o par formado pelos menores conjuntos de fórmulas (S',T ') tais que :

1. $W \subseteq S' \subseteq T'$,
2. $S' = Th(S')$ e $T' = Th(T')$,
3. Para qualquer $A : B / C \in \Delta$, se $A \in S'$ e $T \cup \{B\} \cup \{C\} \not\vdash \bot$

então $C \in S'$ e $B \wedge C \in T'$.

Um par de conjuntos de fórmulas (E,Θ) é uma *extensão restrita* de (W,Δ) se, e somente se, $\Upsilon(\Theta) = (E,\Theta)$. ■

Assim como as outras lógicas defaults apresentadas até aqui, as extensões restritas podem ser caracterizadas de uma maneira intuitiva através do seguinte teorema:

Teorema 2.4.1 (Schaub [62])

Sejam (W,Δ) uma teoria default, E e Θ conjuntos de fórmulas. Defina :

$E_0 = W$ e $\Theta_0 = W$;

e para $i \geq 0$

$$E_{i+1} = Th(E_i) \cup \{C \mid A : B / C \in \Delta,\ A \in E_i,\ \Theta \cup \{B\} \cup \{C\} \not\vdash \bot\}$$

$$\Theta_{i+1} = Th(\Theta_i) \cup \{B \wedge C \mid A : B / C \in \Delta,\ A \in E_i,\ \Theta \cup \{B\} \cup \{C\} \not\vdash \bot\}.$$

Dizemos que (E,Θ) é uma extensão restrita de (W,Δ) se, e somente se, $(E,\Theta) = (\bigcup_{i=0}^{\infty} Ei, \bigcup_{i=0}^{\infty} \Theta i)$.■

Definição 2.4.2 (Schaub [62])

Seja (W,Δ) uma teoria default e S e T conjuntos de fórmulas. O conjunto de regras defaults geradores de (S,T) com relação a Δ é definida como :

$$GD^{(S,T)}{}_{\Delta} = \{A : B / C \in \Delta \text{ tal que } A \in S , T \cup \{B\} \cup \{C\} \not\vdash \bot\}$$■

Teorema 2.4.2 (Schaub [62])

Seja (E,Θ) uma extensão restrita de uma teoria default (W,Δ). Então :

$$E = Th(W \cup CONS(GD^{(E,\Theta)}{}_{\Delta})),$$

$$\Theta = Th(W \cup CONS(GD^{(E,\Theta)}{}_{\Delta}) \cup JUST(GD^{(E,\Theta)}{}_{\Delta})).$$■

Exemplo 2.4.1 (Schaub [62])

Considere a teoria default (W_0,Δ), onde $W_0 = \varnothing$ e $\Delta = \{ : B / A \;;\; :\neg B / A\}$. Este teoria default possui duas extensões restritas :

$$(E_1,\Theta_1) = (Th(\{A\}),Th(\{A,B\})) \text{ e}$$

$$(E_2,\Theta_2) = ((Th(\{A\}),Th(\{A,\neg B\})).$$

Observe que o default $(:\neg B/A)$ não pode ser aplicado a (E_1,Θ_1) uma vez que $\neg B$ é inconsistente com Θ_1. Analogamente, o default $:B/A$ não pode ser aplicado a (E_2,Θ_2) pois B é inconsistente com Θ_2. ■

Assim, como a lógica default justificada apresentada na seção anterior, a lógica default restrita também satisfaz as propriedades da existência de extensão e a semi-monotonicidade :

Teorema 2.4.3 (Semi-monotonicidade - Schaub [62])

Sejam (W,Δ) uma teoria default e Δ' um conjunto de defaults tal que $\Delta \subseteq \Delta'$. Se (E,Θ) é uma extensão restrita de (W,Δ), então existe uma extensão restrita (E',Θ') de (W,Δ') tal que $E \subseteq E'$ e $\Theta \subseteq \Theta'$. ■

Teorema 2.4.4 (Existência de extensão - Schaub [62])

Toda teoria default possui uma extensão restrita. ■

V. Lógica Default Cumulativa de Brewka

A *lógica default cumulativa* (*cumulative default logic* - Brewka [14]) foi proposta com o objetivo de suprir a ausência, na lógica default clássica, das seguintes propriedades : a *cumulatividade* e a *preservação da consistência entre as hipóteses.*

Dizemos que uma relação de inferência é *cumulativa* se, dado um conjunto de premissas S, o conjunto de fórmulas deriváveis a partir de S não se altera quando acrescentamos a este conjunto alguns de seus teoremas. Por exemplo, a relação de inferência $\vdash$ da lógica clássica possui esta propriedade ([43]), uma vez que, se $S \vdash \alpha$ então ($S \vdash \beta$ se, e somente se, $S \cup \{\alpha\} \vdash \beta$).

No caso de relações de inferência não-monotônicas $\mid\!\sim$, a cumulatividade é formalmente expressa da seguinte maneira ([43]) : dado um conjunto de sentenças S, se $S \mid\!\sim \alpha$ então ($S \mid\!\sim \beta$ se, e somente se, $S \cup \{\alpha\} \mid\!\sim \beta$). No caso da lógica default clássica, como uma teoria default pode ter mais de uma extensão, devemos levar em conta duas noções de derivação :

- a ***crédula***, na qual cada extensão é vista como um possível conjunto de crenças e, desta forma, uma sentença α é provada a partir de (W,Δ) (denotado por $(W,\Delta) \mid\!\sim_{Créd} \alpha$), quando α pertence a *alguma* extensão de (W,Δ);
- e a ***cética***, onde a interseção de todas as extensões é considerada como o único conjunto de crenças existente, e portanto, uma sentença α é provada a partir de (W,Δ) (denotado por $(W,\Delta) \mid\!\sim_{Cét} \alpha$), quando α pertence a *todas* extensões de (W,Δ).

No caso ***cético***, podemos utilizar a noção de cumulatividade como formulada acima. No caso ***crédulo***, a propriedade da cumulatividade deve ser formulada da seguinte maneira (Makinson [43]) : "Se existe pelo menos uma extensão de (W,Δ) contendo α, então E é uma extensão de (W,Δ) que contém α se, e somente se, E é uma extensão de $(W \cup \{\alpha\},\Delta)$". Isto quer dizer que, ao acrescentarmos α ao conjunto W, devemos obter todas (e somente estas) extensões que continham α. Esta reformulação do conceito de cumulatividade abrange o caso cético quando for possível garantir a existência de extensões (como é o caso da lógica default definida por Brewka [14] que veremos adiante).

Makinson [43] mostrou em seu estudo sobre propriedades gerais de relações de inferência não-monotônicas que, independente da noção de derivação que esteja sendo utilizada (cética ou crédula), a lógica default clássica não é cumulativa. Podemos observar isto através do seguinte exemplo (ver [43]) : considere a teoria default (W,Δ), onde $W = \varnothing$ e $\Delta = \{:A/A\ ;\ A \vee B:\neg A/\neg A\}$. Esta teoria possui uma única extensão : $E_1 = Th(\{A\})$. Note que :

$$(W,\Delta) \mid\!\sim_{Cét} A \vee B \quad \text{e} \quad (W,\Delta) \mid\!\sim_{Créd} A \vee B.$$

Acrescentando $A \vee B$ ao conjunto W, além da extensão E_1, obtemos uma outra extensão : $E_2 = Th(\{\neg A,B\})$.

Vamos examinar agora a propriedade de *preservação da consistência entre as hipóteses*. Poole [56] observou que na lógica default clássica podemos ter extensões construídas a partir de justificativas consistentes porém contraditórias. Um exemplo disto é a teoria default (W, Δ), onde $W = \varnothing$ e $\Delta = \{:\neg A/B\ ;\ :A/C\}$, que possui uma única extensão : $Th(\{B,C\})$. Observe que o conjunto formado pelas justificativas dos defaults que geram esta extensão é inconsistente. Este fato pode parecer ser contra-intuitivo uma vez que a aplicação de um default está (implicitamente) associada a consistência de suas justificativas com o que se acredita. Acontece que, na lógica default clássica, esta associação é *individual* (justificativa por justificativa) e não *global* (como um *conjunto consistente* que dê sustentação às nossas crenças).

No nosso exemplo, B foi acrescentado ao conjunto de fatos pois, implicitamente, estamos supondo que $\neg A$ é consistente com o que acreditamos. O mesmo ocorre para C, onde estamos supondo que A é consistente com o que acreditamos (note que $\neg A$ *não é uma de nossas crenças*). Dessa maneira, a extensão obtida sugere que somos levados a acreditar em certos fatos (B e C) por razões que juntas são contraditórias (A e $\neg A$).

Visando capturar as características descritas acima, a lógica default cumulativa possui uma estrutura de representação mais complexa que a lógica default clássica. Ela difere desta em três aspectos : (a) ao invés de sentenças, utiliza-se aqui uma estrutura chamada de *assertiva* (ver definição 2.5.1 abaixo) que contém as justificativas e os conseqüentes dos defaults utilizados na derivação de uma determinada crença; (b) as justificativas e os conseqüentes de todos defaults utilizados na derivação de alguma assertiva são guardados; (c) a condição de aplicabilidade de um default exige que suas justificativas e o seu conseqüente sejam consistentes com o que é acreditado e também com o *suporte* das fórmulas acreditadas. Dessa forma, podemos distinguir dentre as nossas crenças aquelas que são axiomas (ou derivadas destes) e aquelas que são acreditadas porque uma certa informação é consistente (ou seja, foram derivadas com o auxílio de algum default).

Definição 2.5.1 (Brewka [14])

Sejam $\alpha, \beta_1, \ldots, \beta_n$ fórmulas de primeira-ordem. Então $<\alpha : \{\beta_1, \ldots, \beta_n\}>$ é chamada uma *assertiva*, e $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ o *suporte desta assertiva*. Para um conjunto de assertivas W, Form(W) é o conjunto $\{\alpha \mid <\alpha : J> \in W$, para algum J$\}$, chamado de *fórmulas de* W; e Supp(W) é o conjunto $\{\beta \mid \beta \in J$ e $<\alpha : J> \in W$, para algum $\alpha\}$, chamado de *suporte* de W.■

Definição 2.5.2 (Brewka [14])

Uma *teoria default assertiva* é um par (W,Δ), onde Δ é um conjunto de defaults (como na lógica default clássica), e W é um conjunto de assertivas. Uma teoria default assertiva (W,Δ) é bem-fundamentada se, e somente se, Form(W) $\cup$ Supp(W) é consistente. ■

Definição 2.5.3 (Brewka [14])

Seja W um conjunto de assertivas. O conjunto de teoremas suportados de W, denotado por $Th_S(W)$, é o menor conjunto de assertivas tal que :

(1) $W \subseteq Th_S(W)$,

(2) se $<A_1 : J_1>, \ldots, <A_k : J_k> \in Th_S(W)$ e $A_1, \ldots, A_k \vdash C$,

então $<C: J_1 \cup \ldots \cup J_k> \in Th_S(W)$.■

Definição 2.5.4 (Brewka [14])

Seja (W,Δ) uma teoria default assertiva. Para qualquer conjunto de assertivas S, seja $\Gamma_B(S)$ o menor conjunto de assertivas S' tal que :

(1) $W \subseteq S'$,

(2) $Th_S(S') = S'$,

(3) se $(A : B/C) \in \Delta$, $<A : \{J_1 , \ldots, J_k\}> \in S'$, e

$\{B,C\} \cup$ Form(S) $\cup$ Supp(S) é consistente,

então $<C : \{J_1 , \ldots, J_k, B, C\}> \in S'$.

Um conjunto de assertivas E é uma CDL-extensão de (W,Δ) se , e somente se , $\Gamma_B(E) = E$.■

As CDL-extensões podem ser caracterizadas através da seguinte proposição :

Proposição 2.5.1 (Brewka [14])

Um conjunto de assertivas E é uma CDL-extensão de uma teoria default assertiva (W,Δ) se, e somente se,

$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i$ onde :

$E_0 = W$; e

para $i \geq 0$:

$$E_{i+1} = Th_S(E_i) \cup \{<C : \{J_1, ..., J_k, B, C\}> \mid A : B / C \in \Delta,$$
$$<A : \{J_1, ..., J_k\}> \in E_i \text{, e}$$
$$\{B, C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \perp\}.\blacksquare$$

Exemplo 2.5.1 (Brewka [14])

Considere a teoria default assertiva (W_0,Δ), onde :

$$W_0 = \{<A \vee B : \{\ \}>\} \text{ e } \Delta = \{: C \wedge \neg A / C \ ; \ : D \wedge \neg B / D\}.$$

Esta teoria possui duas CDL-extensões :

$E_1 = Th_S(W \cup \{<C : \{\neg A \wedge C\}>\})$, obtida pela aplicação do primeiro default, e

$E_2 = Th_S(W \cup \{<D : \{\neg B \wedge D\}>\})$, obtida pela aplicação do segundo default.

Observe que, diferentemente da lógica default clássica, ao acrescentarmos o conseqüente de um default ao conjunto de assertivas W_0, ele estará rotulado com a sua respectiva justificativa, indicando que estas fórmulas foram derivadas com o auxílio de algum default.■

Definição 2.5.5 (Brewka [14])

Seja (W,Δ) uma teoria default assertiva e seja $\mathcal{F}$ um conjunto de assertivas. O conjunto de defaults geradores de $\mathcal{F}$ com respeito a Δ é definido como :

$$GD^{\mathcal{F}}_{\Delta} = \{A : B / C \in \Delta \mid <A : \{J_1, ..., J_k\}> \in \mathcal{F},$$
$$Form(\mathcal{F}) \cup Supp(\mathcal{F}) \cup \{B\} \cup \{C\} \not\vdash \perp\}\blacksquare$$

Teorema 2.5.1 (Schaub [62])

Seja E uma CDL-extensão de uma teoria default assertiva (W,Δ). Temos :

$$E = Th_S(W \cup \{<C : \{J_1, ..., J_k, B, C\}> \mid A : B / C \in GD^{E}_{\Delta},$$
$$<A : \{J_1, ..., J_k\}> \in E\}). \blacksquare$$

Corolário 2.5.1 (Schaub [62])

Seja E uma CDL-extensão de uma teoria default assertiva (W,Δ). Temos :

$$\text{Form}(E) = \text{Th}(\text{Form}(W) \cup \text{CONS}(GD^E_\Delta))\text{, e}$$

$$\text{Supp}(E) = \text{Supp}(W) \cup \text{CONS}(GD^E_\Delta) \cup \text{JUST}(GD^E_\Delta).\blacksquare$$

A lógica default cumulativa possui uma série de propriedades importantes como a semi-monotonicidade, a existência de extensão e a cumulatividade. Formalmente :

Proposição 2.5.2 (Semi-monotonicidade - Brewka [14])

Se E' é uma CDL-extensão de uma teoria default assertiva qualquer (W,Δ') e $\Delta' \subseteq \Delta$, então existe uma CDL-extensão E de (W,Δ) tal que $E' \subseteq E$. ■

Proposição 2.5.3 (Existência de Extensão - Brewka [14])

Toda teoria default CDL possui uma CDL-extensão. ■

Proposição 2.5.4 (Cumulatividade - Brewka [14])

Se existe pelo menos uma CDL-extensão F de (W,Δ) contendo $<A:J>$, então E é uma CDL-extensão de (W,Δ) contendo $<A:J>$ se, e somente se, E é uma CDL-extensão de $(W \cup \{<A:J>\},\Delta)$. ■

Brewka [14] observou que a propriedade da semi-monotonicidade da lógica default cumulativa torna impossível a representação de prioridades entre os defaults através de defaults semi-normais como na lógica default clássica. Veja o exemplo :

Exemplo 2.5.2 (Brewka [14])

Considere a teoria default clássica (W,Δ), onde :

$$W = \{A\} \text{ e } \Delta = \{A{:}B/B \ ; \ A{:}C/C \ ; \ B{:}D \wedge \neg C/D \ ; \ C{:} \neg D/\neg D\}.$$

Tal teoria possui uma única extensão clássica : $E = \text{Th}(\{A,B,C,\neg D\})$.

Representando a teoria acima como uma teoria default assertiva (W',Δ), onde :

$$W' = \{<A : \{\ \}>\},$$

obtemos duas CDL-extensões :

$$E_1 = \text{Th}_S(\{<A{:}\{\ \}>,<B{:}\{B\}>,<C{:}\{C\}>,<\neg D{:}\{C,\neg D\}>\})\text{, e}$$

$$E_2 = \text{Th}_S(\{<A{:}\{\ \}>,<B{:}\{B\}>,<D{:}\{B,\neg C \wedge D\}>\}).\blacksquare$$

Para solucionar este problema, Brewka [14] sugeriu a utilização de um filtro que seria aplicado nas CDL-extensões, selecionando somente aquelas que preservam a prioridade estabelecida nos defaults. Formalmente:

Definição 2.5.6 (Brewka [14])

Seja E uma CDL-extensão de (W,Δ). Dizemos que E *preserva prioridade* se para nenhum default $A{:}B/C \in \Delta \setminus GD^E_\Delta$:

a) $A \in Form(E)$;

b) $\{B,C\} \cup Form(E) \not\vdash \bot$, e

c) $\{C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \vdash \bot$. ■

Continuação do exemplo 2.5.2 (Brewka [14])

A CDL-extensão $E_2 = Th_S(\{<A:\{\ \}>, <B:\{B\}>, <D:\{B, \neg C \wedge D\}>\})$ não preserva a prioridade, uma vez que o default $A{:}C/C \in \Delta \setminus GD^{E}_{\Delta}$ satisfaz as condições (a), (b) e (c) da definição 2.5.6. Somente a extensão E_1 preserva prioridade. ■

Portanto, a lógica cumulativa definida por Brewka [14] mais o teste estabelecido pela definição 2.5.6, permitiu a definição de uma lógica chamada de *lógica cumulativa com filtro*, que apresenta características comuns a lógica default clássica (não são semi-monotônicas nem garantem a existência de extensão) e a lógica cumulativa (cumulatividade e preservação de consistência entre as hipóteses utilizadas).

Zaverucha [66] definiu a lógica cumulativa com filtro diretamente através do critério de aplicabilidade dos defaults (ou seja, definiu extensões utilizando a noção de ponto fixo) da seguinte maneira :

Definição 2.5.7 (Zaverucha [66])

Seja (W,Δ) uma teoria default assertiva. Para qualquer conjunto de asserções S, seja $\Gamma_{BZ}(S)$ o menor conjunto de asserções S' tal que :

(1) $W \subseteq S'$,

(2) $Th_S(S') = S'$,

(3) para qualquer $A{:}B/C \in \Delta$,

se $((<A : \{J_1, ..., J_k\}> \in S'$, e $\{B,C\} \cup Form(S) \cup Supp(S) \not\vdash \bot)$ **ou**

$(<A : \{J_1, ..., J_k\}> \in S$, e $Form(S) \cup Supp(S) \not\vdash \bot$ e

$Form(S) \cup \{B,C\} \not\vdash \bot$ e $\{C\} \cup Form(S) \cup Supp(S) \vdash \bot))$

então $<C : \{J_1, ..., J_k, B, C\}> \in S'$.

Um conjunto de assertivas E é uma CDL_F-extensão de (W,Δ) se, e somente se, $E = \Gamma_{BZ}(E)$. ■

Uma caracterização mais intuitiva das CDL_F-extensões é dada através do seguinte resultado :

Teorema 2.5.2 (Zaverucha [66])

O conjunto de asserções E é uma CDL_F-extensão da teoria default assertiva (W,Δ) se, e somente se, $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$ onde :

$E_0 = W$; e para $i \geq 0$:

$E_{i+1} = Th_S(E_i) \cup \{<C : \{J_1, ..., J_k, B, C\}> \mid A : B / C \in \Delta$, onde

$(<A : \{J_1, ..., J_k\}> \in E_i$, e $\{B,C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \perp)$

ou

$(<A : \{J_1, ..., J_k\}> \in E$, $Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \perp$,

$Form(E) \cup \{B,C\} \not\vdash \perp$, e $Form(E) \cup Supp(E) \cup \{C\} \vdash \perp)\}$.■

Definição 2.5.8

Seja (W,Δ) uma teoria default assertiva e seja E uma CDL_F-extensão. O conjunto de defaults geradores de E com respeito a Δ é definido como :

$GD^E_{\Delta f} = \{A : B / C \in \Delta \mid <A : \{J_1, ..., J_k\}> \in E$ e

$([Form(E) \cup Supp(E) \cup \{B\} \cup \{C\} \not\vdash \perp]$ ou

$[(Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \perp)$ e

$(Form(E) \cup \{B\} \cup \{C\} \not\vdash \perp)$ e

$(Form(E) \cup Supp(E) \cup \{C\} \vdash \perp)])\}$■

Teorema 2.5.3

Seja E uma CDL_F-extensão de uma teoria default assertiva (W,Δ). Temos :

$E = Th_S(W \cup \{<C : \{J_1, ..., J_k, B, C\}> \mid A : B / C \in GD^E_{\Delta f}$,

$<A : \{J_1, ..., J_k\}> \in E\})$. ■

VI. Lógica Default Cumulativa Priorizada de Zaverucha

Zaverucha [67][1] observou que aplicando a lógica cumulativa com filtro ao problema do tiro (Yale Shooting Problem [32]) e ao exemplo não temporal (correspondente ao problema do tiro) apresentado por Morris [51], tal como na lógica default clássica, duas extensões (uma não intuitiva) são geradas. Veja o seguinte exemplo:

[1] Versão preliminar.

Exemplo 2.6.1 (Zaverucha [67])

Considere a teoria default clássica (W,Δ), onde :

$W = \{B, B \rightarrow A, S \rightarrow F, S \rightarrow AB_1\}$ e $\Delta = \{A : \neg F \wedge \neg AB_1 / \neg F \;;\; B : S \wedge \neg AB_2 / S\}$.

Esta teoria possui duas extensões : $E_1 = Th(W \cup \{\neg F\})$ e $E_2 = Th(W \cup \{S\})$.

Considerando a teoria default assertiva (W',Δ'),obtida a partir de (W,Δ), onde :

$$W' = \{<B : \{\ \}>, <B \rightarrow A : \{\ \}>, <S \rightarrow F : \{\ \}>, <S \rightarrow AB_1 : \{\ \}>\} \text{ e}$$

$$\Delta' = \{A : \neg F \wedge \neg AB_1 / \neg F \;;\; B : S \wedge \neg AB_2 / S\}$$

podemos verificar que ela também possui duas extensões :

$E_1 = Th_S (W' \cup \{<\neg F : \neg F \wedge \neg AB_1\})$ e $E_2 = Th_S (W' \cup \{<S : S \wedge \neg AB_2\})$.■

A substituição dos defaults em Δ pelos defaults não-normais $(A : \neg AB_1 / \neg F)$ e $(B : \neg AB_2 / S)$, solução proposta por Morris [51] para eliminar a extensão não-intuitiva E_2, não funciona para a lógica default cumulativa com filtro (Zaverucha [66]).

Analisando este problema, Zaverucha [67] definiu um membro semi-normal de uma família de lógicas default priorizadas cumulativas onde as partes normais e não-normais de uma regra default semi-normal são tratadas de maneira distinta (Pequeno[54], Zaverucha [67]). Isto permite que a prioridade seja dada ao default que deriva a condição de exceção de um outro default, como pretendido pela lógica cumulativa com filtro, permitindo a eliminação da extensão não-intuitiva obtida nesta lógica.

Formalmente :

Definição 2.6.1 (Makinson [43])

Sejam $\alpha,\beta_1,\ldots, \beta_n,\chi_1,\ldots, \chi_n$ fórmulas de primeira-ordem. Então $<\alpha:\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}: \{\chi_1,\ldots, \chi_n\}> = <\alpha:I:J>$é chamada uma *afirmação*, $I = \{\beta_1,\ldots,\beta_n\}$ o *conjunto de conseqüentes dos defaults* usados para derivar α, e $J = \{\chi_1,\ldots, \chi_n\}$ o *conjunto de justificativas dos defaults.*

Dado um conjunto de afirmações W :

- $Form(W) = \{\alpha \mid <\alpha : I : J> \in W\}$,
- $Cons(W) = \{\gamma \in I \mid <\alpha : I : J> \in W\}$,
- $Just(W) = \{\beta \in J \mid <\alpha : I : J> \in W\}$,
- $Supp(W) = Cons(W) \cup Just(W)$.■

Definição 2.6.2 (Zaverucha [67])

Uma *teoria default afirmativa* é um par (W,Δ), onde W é um conjunto de afirmações e Δ é um conjunto de defaults da forma $\alpha : (\gamma \mid \beta) / \gamma$.■

Definição 2.6.3 (Zaverucha [67])

Seja W um conjunto de afirmações. O conjunto de teoremas suportados de W, denotado por $Th_{Sa}(W)$, é o menor conjunto tal que :

(1) $W \subseteq Th_{Sa}(W)$,

(2) se $<A_1 : I_1 : J_1>, \ldots, <A_k : I_k : J_k> \in Th_{Sa}(W)$ e $A_1,\ldots,A_k \vdash C$,

então $<C : I_1 \cup \ldots \cup I_k : J_1 \cup \ldots \cup J_k> \in Th_{Sa}(W)$.■

Definição 2.6.4 (Zaverucha [67])

Seja (W,Δ) uma teoria default afirmativa. Para qualquer conjunto de afirmações S, seja $\Gamma_Z(S)$ o menor conjunto de afirmativas S' tal que :

(1) $W \subseteq S'$,

(2) $Th_{Sa}(S') = S'$,

(3) Para qualquer $A : (C \mid B) / C \in \Delta$,

se $((<A : \{\beta_1,\ldots,\beta_n\} : \{\chi_1,\ldots,\chi_n\}> \in S'$ e $Form(S) \cup Supp(S) \cup \{B,C\} \nvdash \bot)$

ou

$(<A : \{\beta_1,\ldots,\beta_n\} : \{\chi_1,\ldots,\chi_n\}> \in S$ e

$Form(S) \cup Supp(S) \nvdash \bot$ e $Form(S) \cup \{B\} \nvdash \bot$ e

$Form(W) \cup \{C\} \nvdash \bot$ e $Form(W) \cup Just(S) \cup \{C\} \vdash \bot))$

então $<C : \{\beta_1,\ldots,\beta_n, C\} : \{\chi_1,\ldots,\chi_n, B\}> \in S'$.

Um conjunto de afirmações E é uma PCDL-extensão semi-normal de (W,Δ) se, e somente se, $\Gamma_Z(E) = E$. ■

As PCDL-extensões semi-normais podem ser caracterizadas através da seguinte proposição :

Proposição 2.6.1

Um conjunto de afirmativas E é uma PCDL-extensão semi-normal de uma teoria default afirmativa (W,Δ) se, e somente se,

$$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i \text{ onde :}$$

$E_0 = W$; e para $i \geq 0$:

$E_{i+1} = Th_{Sa}(E_i) \cup \{<C : \{\beta_1,...,\beta_n, C\} : \{\chi_1,..., \chi_n, B\}> \mid A : (C \mid B) / C \in \Delta$, onde

$((<A : \{\beta_1,...,\beta_n\}: \{\chi_1,..., \chi_n\}> \in E_i$ e

$Form(E) \cup Supp(E) \cup \{B,C\} \not\vdash \perp)$

ou

$(<A : \{\beta_1,...,\beta_n\}: \{\chi_1,..., \chi_n\}> \in E$ e $Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \perp$ e

$Form(E) \cup \{B\} \not\vdash \perp$ e $Form(W) \cup \{C\} \not\vdash \perp$ e

$Form(W) \cup Just(E) \cup \{C\} \vdash \perp))\}$. ■

Definição 2.6.5

Seja (W,Δ) uma teoria default afirmativa e seja E uma PCDL-extensão semi-normal. O conjunto de defaults geradores de E com respeito a Δ é definido como :

$GD^E_{\Delta z} = \{A : (C \mid B) / C \in \Delta \mid <A : \{\beta_1,...,\beta_n\}: \{\chi_1,..., \chi_n\}> \in E$ e

$[(Form(E) \cup Supp(E) \cup \{B,C\} \not\vdash \perp)$

ou

$(Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \perp$ e $Form(E) \cup \{B\} \not\vdash \perp$ e

$Form(W) \cup \{C\} \not\vdash \perp$ e $Form(W) \cup Just(E) \cup \{C\} \vdash \perp)]$.■

Teorema 2.6.1

Seja E uma $PCDL_F$-extensão de uma teoria default afirmativa (W,Δ). Temos :

$E = Th_{Sa}(W \cup \{<C : \{\beta_1,...,\beta_n, C\} : \{\chi_1,..., \chi_n, B\}> \mid A : (C \mid B) / C \in GD^E_{\Delta z}$,

$<A : \{\beta_1,...,\beta_n\}: \{\chi_1,..., \chi_n\}> \in E\})$. ■

Continuação do exemplo 2.6.1 (Zaverucha [67])

Podemos traduzir a teoria default assertiva (W',Δ'), para a teoria default afirmativa (W'',Δ''), onde :

$W'' = \{<B : \{\ \} : \{\ \}>, <B \to A : \{\ \} : \{\ \}>, <S \to F : \{\ \} : \{\ \}>, <S \to AB_1 : \{\ \} : \{\ \}>,$

e

$\Delta'' = \{A : \neg F \mid \neg AB_1 / \neg F \ ; \ B : S \mid \neg AB_2 / S\}$

Pela proposição 2.6.1 podemos verificar que esta teoria possui uma extensão :

$E''_1 = Th_{Sa} (W'' \cup \{<S: \{S\} : \{\neg AB_2\})$

e a extensão não-intuitiva não é gerada aqui.■

VII. Sistema para Raciocínio Default de Poole

O sistema para raciocínio default de Poole [55] parte do princípio de que não há necessidade de se definir uma nova lógica para tratar o raciocínio não-monotônico. Segundo Poole [55], este tipo de raciocínio pode ser adequadamente tratado dentro da lógica clássica, desde que esta seja manipulada de maneira correta.

Assim, ao invés de definir uma nova lógica de defaults, Poole [55] desenvolveu um sistema que constrói uma teoria a partir de um conjunto de *axiomas*, de um conjunto de *hipóteses possíveis* e de um conjunto de *restrições*. Quando se deseja explicar alguma fórmula, seleciona-se dentre as hipóteses possíveis aquelas que são consistentes com os fatos e com as restrições e que, junto com os fatos, é capaz de explicar a fórmula desejada. Segundo Poole [55], esta é uma maneira simples e natural de se caracterizar o raciocínio default.

Assim, a estrutura apresentada por Poole [55] para o raciocínio default pode então ser vista como uma tripla (F,Δ,C), onde :

- F é um conjunto de fórmulas fechadas, que representam declarações que são verdadeiras na interpretação desejada (*fatos*) e que não podem ser descartadas ou revistas;

- Δ é um conjunto de fórmulas, chamado de conjunto de hipóteses possíveis (*defaults*), onde qualquer instância básica destas fórmulas pode ser utilizada como hipótese (caso seja consistente, como veremos abaixo);

- C é um conjunto de fórmulas fechadas, chamado de conjunto de restrições, que expressam a seguinte idéia : "um certo default não deve ser *aplicado* em um determinado caso". Tais restrições não acarretam nenhum outro efeito além de bloquear a utilização de um default.

Um *cenário* de (F,Δ,C) é um conjunto $F \cup \mathcal{D}$, onde $\mathcal{D}$ é um conjunto de instâncias básicas de elementos de Δ tal que $F \cup \mathcal{D} \cup C$ é consistente. Uma fórmula fechada α é *explicável* a partir de (F,Δ,C) se existe um conjunto $\mathcal{D}$ de instâncias básicas de elementos de Δ tal que : (i) $F \cup \mathcal{D} \models \alpha$, e

(ii) $F \cup \mathcal{D} \cup C$ é consistente.

Diz-se que $F \cup \mathcal{D}$ é uma *explicação* de α.

Observe que o conjunto de restrições é utilizado somente para rejeitar cenários, não podendo ser utilizado para explicar fórmulas. Este conjunto estabelece explicitamente as prioridades entre as hipóteses possíveis, e também servem para bloquear a aplicação de defaults.

Definição 2.7.1 (Poole [55])

Uma *extensão* de (F,Δ,C) é o conjunto de conseqüências lógicas de um cenário maximal (com respeito a inclusão de conjuntos) de (F,Δ,C).■

Teorema 2.7.1 (Poole [55])

Uma fórmula α é *explicável* se, e somente se, α está em alguma extensão. ■

Exemplo 2.7.1

Considere os seguintes conjuntos de fatos F e defaults Δ :

$F = \{Penguin(x) \rightarrow Bird(x), Penguin(Polly), Bird(Tweety)\}$

$\Delta = \{Bird(x) \rightarrow Fly(x), Penguin(x) \rightarrow \neg Fly(x)\}$

Temos aqui representados os *fatos* : (1) todos os pingüins são aves; (2) Polly é um pingüim; (3) Tweety é uma ave; e os *defaults* : (4) as aves voam; (5) os pingüins não voam.

A partir do conjunto acima, pode-se explicar tanto $\neg$Fly(Polly) utilizado-se o default {Penguin(x) $\rightarrow$ $\neg$Fly(x)} quanto Fly(Polly) utilizando-se o default {Bird(x) $\rightarrow$ Fly(x)}. Note que temos duas extensões, uma das quais (a segunda) é contra-intuitiva e, portanto, não desejável.

Para impedir a existência da extensão não intuitiva, é necessário que a informação mais específica (ser pingüim) tenha maior prioridade, ou seja, é preciso dizer que se x é um pingüim então o default (Bird(x) $\rightarrow$ Fly(x)) não pode ser aplicado. Assim, devemos definir o conjunto de restrições *C* como sendo formado pela seguinte sentença :

$$\{Penguin(x) \rightarrow \neg(Bird(x) \rightarrow Fly(x))\} \quad (*)$$

Agora, Fly(Polly) não é mais explicável uma vez que :

$$\{Penguin(x) \rightarrow Bird(x), Penguin(Polly), Bird(Tweety)\} \cup$$
$$\{(Bird(Polly) \rightarrow Fly(Polly))\} \cup$$
$$\{Penguin(x) \rightarrow \neg(Bird(x) \rightarrow Fly(x))\}$$

é inconsistente. Logo, o default (Bird(Polly) $\rightarrow$ Fly(Polly)) não pode ser aplicado. ■

Este sistema possui algumas propriedades importantes, como a semi-monotonicidade e a existência de extensão :

Teorema 2.7.2 (Semi-monotonicidade - Poole [55])

O acréscimo de defaults pode somente aumentar o número de fatos explicáveis ; o acréscimo de restrições pode somente diminuir o número de fatos explicáveis. ■

Corolário 2.7.1 (Existência de extensão - Poole [55])

Se $F \cup C$ é consistente, então sempre existe uma extensão. ■

O sistema de raciocínio de Poole pode ser mapeado na lógica default clássica, o que nos permite relacionar as extensões deste sistema com as da lógica default clássica. Dix [19] utilizou o seguinte mapeamento, definido por Brewka [14] : $(F,\Delta,\mathcal{C}) \Rightarrow (W,\mathit{\Delta})$ com $W = F$ e $\mathit{\Delta} = \{(\emptyset: K \wedge d \,/\, d) \,/\, d \in \Delta\}$, onde K é a conjunção de todos os elementos de $\mathcal{C}$, para demonstrar o seguinte teorema :

Teorema 2.7.3 (Dix [19])

Via $(F,\Delta,\mathcal{C}) \Rightarrow (W,\mathit{\Delta})$, as extensões de Poole de $(F,\Delta,\mathcal{C})$ são exatamente as mesmas extensões de teoria default clássica $(W,\mathit{\Delta})$.■

VIII. Conclusão

Neste capítulo apresentamos uma variedade de lógicas utilizadas para formalizar o raciocínio default. Vimos que a lógica default clássica de Reiter serve de ponto de partida para a definição das outras lógicas, e que elas se diferenciam basicamente através da condição de aplicabilidade de um default. Como veremos no capítulo 4, isto nos permitirá definir um ambiente semântico, onde os modelos das extensões nas diferentes lógicas default poderão ser facilmente caracterizados.

CAPÍTULO 3

Revisão de Crenças

I. Introdução

Rever crenças significa que se tomamos conhecimento de uma nova informação que contradiga as informações em que acreditamos, somos levados a abandonar algumas das antigas crenças se quisermos manter nosso conjunto de crenças consistente. Neste capítulo, apresentaremos um resumo dos tópicos de interesse dentro da área de revisão de crenças que nos serão úteis ao longo deste trabalho.

Inicialmente, apresentaremos a noção de conjuntos de crenças, utilizada com o intuito de modelar estados epistêmicos. Uma série de postulados serão apresentados com o objetivo de caracterizar os tipos de atitudes e de atualizações epistêmicas que podemos observar quando consideramos um conjunto de crenças e uma dada sentença.

Na seção 3.2, apresentaremos o modelo de esferas proposto por Grove [30] onde um estado de crenças é modelado através de um conjunto de mundos possíveis. Na seção 3.3, examinaremos uma abordagem onde os estados de crenças são modelados através de conjuntos finitos de sentenças, chamados de *bases de crenças*, ao invés de conjuntos fechados sob conseqüência lógica.

Finalizando, na seção 3.4, veremos uma abordagem onde se considera que uma operação de revisão não deve levar em conta a forma sintática nem da base de crenças que descreve o mundo, nem da sentença que está revendo a base em questão. Neste caso, um conjunto de crenças é visto através do conjunto de modelos que satisfazem uma certa base de crenças e, rever tal conjunto, significa selecionar os modelos que satisfazem a nova sentença e que sejam *minimamente diferentes* dos modelos da base de crenças inicial.

II. O Modelo de AGM

Conjuntos de crenças ([1],[2],[25],[26]) são conjuntos de sentenças fechados sob conseqüência lógica, utilizados na modelagem de estados epistêmicos. Dados um conjunto de crenças consistente K e uma sentença A, podemos ter uma das seguintes atitudes epistêmicas :

(a) $A \in K$ (i.e., A é aceito);

(b) $\neg A \in K$ (i.e., A é rejeitado);

(c) $A \notin K$ e $\neg A \notin K$ (i.e., A é indeterminado).

Uma atualização do estado epistêmico de uma sentença pode ser caracterizado através da mudança de um estado epistêmico para outro. Existem três tipos de atualização epistêmica :

- *Expansão* : representada por K^+_A. É definido como sendo o fecho sob conseqüência lógica de $K \cup \{A\}$. Neste caso, passamos da atitude epistêmica (c) para ou (a) ou (b).
- *Contração* : representada por K^-_A. Quando removemos a sentença A de K, de modo que o conjunto resultante não mais implica em A. Nenhuma sentença é acrescida ao conjunto K. Passamos, portanto, da atitude epistêmica (a) (ou (b)) para (c).
- *Revisão* : representada por K^*_A. Quando a sentença A é acrescida a K e, de modo a preservar a consistência, é preciso remover algumas sentenças do conjunto K. Passamos da atitude epistêmica (a) para (b) (resp. (b) para (a)).

A *expansão* é o tipo mais simples de atualização dos estados epistêmicos. Formalmente, a expansão + é uma função de pares de conjuntos de crenças e sentenças (**K** x **L**) em conjuntos de crenças (**K**). É expressa através do seguinte conjunto de postulados :

(K^+1) Para qualquer sentença A e qualquer conjunto de crenças K, K^+_A é um conjunto de crenças ;

(K^+2) $A \in K^+_A$, a nova sentença A pertencerá ao conjunto de crenças expandido (por A);

(K^+3) $K \subseteq K^+_A$, nenhuma crença de K é removida quando um conjunto de crenças K é expandido por uma sentença A;

(K^+4) Se $A \in K$ então $K^+_A = K$.
O acréscimo de uma sentença A, que já pertence ao conjunto K, não muda em nada este conjunto.

(K^+5) Se $K \subseteq H$ então $K^+_A \subseteq H^+_A$.

Este é o *postulado da monotonicidade* : quando $K \subseteq H$, expandir os conjuntos de crenças K e H por A implica que $K^{+}{}_{A}$ não deve conter nenhuma crença que também não pertençam a $H^{+}{}_{A}$.

($K^{+}6$) Para quaisquer conjuntos de crenças K e quaisquer sentenças A, $K^{+}{}_{A}$ é o menor conjunto de crenças que satisfaz ($K^{+}1$)-($K^{+}5$).

Este postulado assegura que o conjunto de crenças $K^{+}{}_{A}$ não terá crenças sem justificativa (somente A e seus conseqüentes lógicos são acrescidos a K).

A expansão pode ser explicitamente definida através do seguinte teorema :

Teorema 3.2.1 (Gärdenfors [26])

Uma função de expansão + satisfaz ($K^{+}1$)-($K^{+}6$) se, e somente se, $K^{+}{}_{A} = Cn(K \cup \{A\})$.■

Retirar sentenças de um conjunto de crenças K quando ele é *revisto* por uma sentença A significa que queremos retirar algumas sentenças que são inconsistentes com a nova sentença A retendo, tanto quanto possível, as crenças antigas pertencentes a K. Logo, é importante saber quais crenças continuarão em K após o processo de revisão e quais deverão ser retiradas. Formalmente, * é uma função de pares de conjuntos de crenças e sentenças (**K** x **L**) em conjuntos de crenças (**K**). O modelo de AGM utiliza o seguinte conjunto de postulados, que devem ser satisfeitos por qualquer função de revisão * :

($K^{*}1$) Para qualquer sentença A e qualquer conjunto de crenças K, $K^{*}{}_{A}$ é um conjunto de crenças ;

($K^{*}2$) $A \in K^{*}{}_{A}$, a nova sentença A pertencerá ao conjunto de crenças resultante da revisão ;

($K^{*}3$) $K^{*}{}_{A} \subseteq K^{+}{}_{A}$,

($K^{*}4$) Se $\neg A \notin K$ então $K^{+}{}_{A} \subseteq K^{*}{}_{A}$

Os postulados ($K^{*}3$) e ($K^{*}4$) estabelecem que a expansão é um caso especial da revisão, exceto quando $K^{*}{}_{A} = K_{\perp}$, onde $K_{\perp}$ é o conjunto de todas as sentenças.

($K^{*}5$) $K^{*}{}_{A} = K_{\perp}$ se, e somente se, $\vdash \neg A$

K^*_A é um conjunto de crenças consistente a menos que $\neg A$ seja logicamente necessário.

(K*6) Se $\vdash A \leftrightarrow B$, então $K^*_A = K^*_B$.

Sentenças equivalentes produzem as mesmas mudanças em um conjunto de crenças.

(K*7) $K^*_{A \wedge B} \subseteq (K^*_A)^+_B$.

(K*8) Se $\neg B \notin K^*_A$, então $(K^*_A)^+_B \subseteq K^*_{A \wedge B}$

Os postulados (K*7) e (K*8) são generalizações de (K*3) e (K*4).

A *contração* é utilizada quando queremos retirar alguma sentença A de um conjunto de crenças. Como a expansão e a revisão, ela pode ser formalmente definida através de uma função $^-$ de pares de conjuntos de crenças e sentenças (**K** x **L**) em conjuntos de crenças (**K**). A contração pode ser caracterizada através do seguinte conjunto de postulados :

(K^-1) Para qualquer sentença A e qualquer conjunto de crenças K, K^-_A é um conjunto de crenças.

(K^-2) $K^-_A \subseteq K$, uma vez que K^-_A é formado retirando-se algumas crenças do conjunto K.

(K^-3) Se $A \notin K$ então $K^-_A = K$.

Remover uma sentença A de um conjunto de crenças K ao qual ela não pertence, não afeta este conjunto.

(K^-4) Se A não é uma tautologia então $A \notin K^-_A$.

Este postulado assegura que uma sentença retirada do conjunto de crenças K não é conseqüência lógica das crenças em K^-_A, a menos que A seja logicamente válida.

(K^-5) Se $A \in K$ então $K \subseteq (K^-_A)^+_A$.

Todas as crenças em K são *recuperadas* após uma contração e uma expansão de K por uma mesma sentença A.

(K^-6) Se $\vdash A \leftrightarrow B$, então $K^-_A = K^-_B$.

Sentenças equivalentes produzem contração idênticas em um conjunto de crenças.

(K⁻7) $K^{-}_{A} \cap K^{-}_{B} \subseteq K^{-}_{A \wedge B}$

As crenças que pertencem a K^{-}_{A} e a K^{-}_{B} também pertencem a $K^{-}_{A \wedge B}$.

(K⁻8) Se $A \notin K^{-}_{A \wedge B}$, então $K^{-}_{A \wedge B} \subseteq K^{-}_{A}$

As funções de revisão e de contração estão relacionadas através das seguintes identidades :

$$\text{Levi}: \; K^{*}_{A} = (K^{-}_{\neg A})^{+}_{A}$$

$$\text{Harper}: \; K^{-}_{A} = K \cap K^{*}_{\neg A}$$

III. O Sistema de Esferas de Grove

Este é um modelo para funções de revisão proposto por Grove [30] que utiliza um sistema de esferas similar a semântica de "esferas" para contrafactuais apresentada por Lewis [36]. Considere M_L como sendo o conjunto de todos os conjuntos maximais consistentes de literais básicos em L, ou seja, é o conjunto de todos os mundos possíveis que podem ser descritos em uma linguagem L. Um conjunto de crenças K pode ser representado pelo subconjunto [K] de M_L formado por todos os conjuntos nos quais todas as sentenças em K estão incluídas : $[K] = \{M \in M_L: K \subseteq M\}$.

Se o conjunto de crenças K é inconsistente, então $[K] = \emptyset$. Para qualquer formula A, o conjunto [A] é formado pelos elementos pertencentes a M_L que satisfazem A.

Reciprocamente, para qualquer subconjunto não vazio $\mathcal{M}$ de M_L, o conjunto $K_{\mathcal{M}} = \cap\, (M \in \mathcal{M})$, de formulas pertencentes a todos os elementos de $\mathcal{M}$ é um conjunto de crenças. Se $\mathcal{M} = \emptyset$, defina $K_{\mathcal{M}} = K_{\perp}$.

Definição 3.3.1 (Grove [30])

Um *sistema de esferas centrado em* [K] é uma coleção **S** de subconjuntos de M_L que satisfaz as seguintes condições :

(S1) **S** é totalmente ordenada por $\subseteq$ (inclusão de conjuntos), i.e., se S, S' $\in$ **S** então $S \subseteq S'$ ou $S' \subseteq S$;

(S2) [K] é o $\subseteq$-mínimo de **S** ;

(S3) M_L está em **S** ;

(S4) Se A é uma sentença e existe uma esfera em **S** interceptando [A], então existe uma menor esfera (sob inclusão de conjunto) em **S** interceptando [A].■

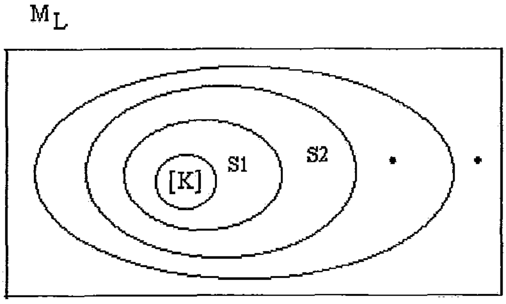


Fig. 3.3.1 - Sistema de esferas centrado [K]

Observe que para qualquer sentença A, a condição (S4) assegura que se [A] intercepta qualquer esfera em **S**, então existe uma esfera menor S_A em **S** que é interceptada por [A]. Se [A] não intercepta nenhuma esfera (por S3, quando [A] = $\varnothing$), defina $S_A = M_L$. O conjunto C(A) = [A] $\cap$ S_A é o conjunto de elementos de M_L que estão "mais próximos" a [K] que satisfazem A. (ver fig. 3.3.2).

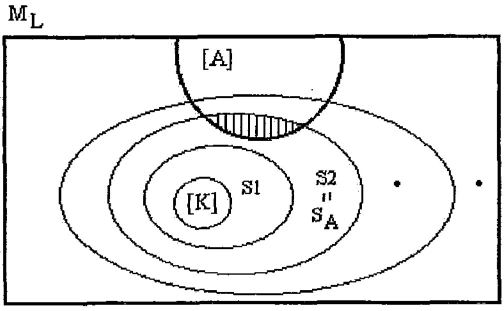


Fig. 3.3.2 - Uma representação de mundos possíveis para o conjunto C(A) (área sombreada)

Grove [30] provou os seguintes teoremas :

Teorema 3.3.1 (Grove [30])

Seja **S** um sistema de esferas qualquer em M_L centrado em [K] para algum conjunto de crenças K. Se, para qualquer sentença A, K^*_A é definido como sendo $K_{C(A)}$, então a função de revisão resultante satisfaz os postulados de revisão de crenças (K*1)-(K*8).■

Teorema 3.3.2 (Grove [30])

Seja * qualquer função de revisão que satisfaça os postulados (K*1)-(K*8). Então para qualquer conjunto de crenças (fixo) K existe um sistema de esferas **S** centrado em [K] e que satisfaz $K^*_A = K_{C(A)}$ para qualquer sentença A.■

Portanto, os modelos do conjunto de crenças K^*_A, correspondentes a revisão do conjunto K pela sentença A, podem ser representados pelo conjunto de "mundos" C(A). De fato, uma função de revisão pode ser representada por uma família de sistemas de esferas, uma para cada conjunto de crenças K.

Exemplo 3.3.1

Considere $L = \{A,B\}$ e $K = Cn(\{A, A \rightarrow B\})$. Então :

$$M_L = \{\{A,B\}, \{\neg A,B\}, \{A,\neg B\}, \{\neg A,\neg B\}\} \quad e \quad [K] = \{\{A,B\}\}$$

Considere o seguinte sistema de esferas **S** em M_L centrado em [K] :

$$\mathbf{S} = \{ S_0, S_1, S_2, S_3 \}$$

onde $S_0 = [K]$; $S_1 = \{\{A,B\}, \{\neg A,B\}\}$; $S_2 = \{\{A,B\}, \{\neg A,B\}, \{A,\neg B\}\}$; $S_3 = M_L$. Observe que $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3$.

Suponha que queremos determinar os modelos do conjunto de $K^*_{\neg B}$. Para isto, temos que :

- $[\neg B] = \{\{A,\neg B\}, \{\neg A,\neg B\}\}$, i.e., um conjunto maximal de M_L onde $\neg B$ é satisfeito.
- $S_{\neg B} = S_2 = \{\{A,B\}, \{\neg A,B\}, \{A,\neg B\}\}$, i.e., S_2 é a menor esfera em **S** interceptada por $[\neg B]$.

Logo, $C(\neg B) = [\neg B] \cap S_{\neg B} = \{\{A,\neg B\}\}$ (modelos de $K^*_{\neg B}$). Observe que não podemos ter $K^*_{\neg B} = Cn(\{A \rightarrow B, \neg B\})$ pois neste caso, o mundo $\{\{A,\neg B\}\}$ não satisfaz $\{A \rightarrow B, \neg B\}$.■

Exemplo 3.3.2

Considere $L = \{A,B,C\}$ e $K = \{A, A \rightarrow B, B \rightarrow C\}$. Então :

$M_L = \{\{A,B,C\}, \{A,B,\neg C\}, \{\neg A,B,C\}, \{\neg A,B,\neg C\}, \{A,\neg B,C\}, \{A,\neg B,\neg C\},$
$\{\neg A,\neg B,C\}, \{\neg A,\neg B,\neg C\}\}$ e

$[K] = \{\{A,B,C\}\}$

Considere o seguinte sistema de esferas **S** em M_L centrado em [K] :

$$\mathbf{S} = \{ [K] ; S_1 ; S_2 ; S_3 ; S_4 ; S_5 ; S_6 ; M_L\}$$

onde :

$$S_1 = \{\{A,B,C\}, \{A,B,\neg C\}\} \qquad S_2 = S_1 \cup \{\{\neg A,B,C\}\}$$

$S_3 = S_2 \cup \{\{\neg A, B, \neg C\}\}$ $\qquad$ $S_4 = S_3 \cup \{\{A, \neg B, C\}\}$

$S_5 = S_4 \cup \{\{A, \neg B, \neg C\}\}$ $\qquad$ $S_6 = S_5 \cup \{\{\neg A, \neg B, C\}\}$

Para determinar a classe de modelos de $K^*_{\neg B}$, temos que :

$[\neg B] = \{\{A, \neg B, C\}, \{A, \neg B, \neg C\}, \{\neg A, \neg B, C\}, \{\neg A, \neg B, \neg C\}\}$

$S_{\neg B} = S_4 = \{\{A,B,C\}, \{A,B,\neg C\}, \{\neg A,B,C\}, \{\neg A,B,\neg C\}, \{A,\neg B,C\}\}$, i.e., S_4 é a menor esfera em S interceptada por $[\neg B]$.

Portanto, $C(\neg B) = [\neg B] \cap S_{\neg B} = \{\{A, \neg B, C\}\}$, e

$[K^*_{\neg B}] = [K_{C(\neg B)}] = \{\{A, \neg B, C\}\}$, ou seja, $K^*_{\neg B}$ é formada por $Cn(\{A , B \rightarrow C\})$. Note que $K^*_{\neg B}$ não pode ser formada nem por $Cn(\{A , A \rightarrow B\})$ nem por $Cn(\{A \rightarrow B , B \rightarrow C\})$ uma vez que o mundo $\{\{A, \neg B, C\}\}$ não satisfaz àqueles conjuntos.■

Como vimos acima, a *expansão* de um conjunto de crenças K por uma sentença A, (K^+_A), é um caso particular do processo de revisão onde todas as sentenças continuam a pertencer a K após o acréscimo da nova sentença A. Podemos caracterizar este fato usando o sistema de esferas de Grove da seguinte forma :

Teorema 3.3.3

Seja K um conjunto de crenças e A uma sentença. Seja S um sistema de esferas centrado em [K]. A revisão K^*_A é uma *expansão* (i.e., $K^*_A = K^+_A$) quando [K] é a menor esfera que [A] intercepta no sistema S (ver figura 3.3.3). ■

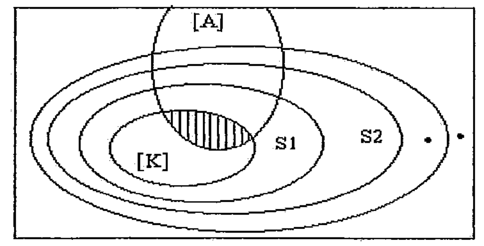


Fig. 3.3.3 - Expansão de K por A ($C(A) \subseteq [K]$)

IV. Bases de Crenças

Proposto por Nebel [52], este é um modelo alternativo de representação de estados epistêmicos. Ao invés de considerar os estados de crenças como sendo um conjunto fechado sob conseqüência lógica (***conjunto de crenças***), cada estado é representado por um conjunto finito de sentenças (***bases de crenças***). Neste caso, considera-se que algumas crenças surgem somente como conseqüências de crenças mais básicas. Este tipo de distinção entre crenças (algumas mais básicas que outras) não pode ser feito quando se utiliza conjuntos de crenças fechados sob conseqüência lógica. Assim, Nebel [52] propôs que um conjunto de crenças K fosse representado através de uma *base de crenças finita* B_K, formalmente definida por :

Definição 3.4.1 (Nebel [52])

Um conjunto B_K é a *base de um conjunto de crenças* K se, e somente se, B_K é um subconjunto finito de K e $Cn(B_K) = K$, ou seja, K é finitamente axiomatizável por B_K.■

Como conseqüência da utilização de bases de crenças na modelagem dos estados epistêmicos, as funções de revisão e contração que foram definidas anteriormente para conjuntos de crenças devem ser reformuladas para funções que sejam definidas para conjuntos finitos de crenças. Estas funções serão chamadas de *funções de revisão* e *contração de uma base de crenças* [52].

O processo de revisão de uma base de crenças B_K por uma sentença ϕ consiste, inicialmente, na construção do conjunto $(B_K \downarrow \neg\phi)$ composto pelos subconjuntos maximais de B_K que não implicam $\neg\phi$. A revisão de B_K por ϕ é então definida como sendo a ***expansão*** (ver seção anterior) do conjunto formado pela interseção das conseqüências de todos os elementos de $(B_K \downarrow \neg\phi)$ por ϕ. Formalmente :

Definição 3.4.2 (Nebel [52])

A revisão de uma base de crenças B_K por uma sentença ϕ, escrita como $B_K \oplus \phi$, é definida por :

$$B_K \oplus \phi = \begin{cases} \left(\bigcap_{\zeta \in (B_k \downarrow \neg\phi)} Cn(\zeta) \right)^{+}_{\phi}, & \text{se } (B_K \downarrow \neg\phi) \neq \emptyset \\ Cn(\bot), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

onde ($B_K \downarrow \neg\phi$) é o conjunto de subconjuntos maximais de B_K que não implicam $\neg\phi$.

Dizemos que $B_K \oplus \phi$ é uma ***revisão simples da base*** $\mathbf{B_K}$ ***por*** ϕ. ■

De modo a estabelecer prioridades entre as várias sentenças de uma base de crenças B_K e, desta forma, distingüir o grau de importância das sentenças que formam esta base, Nebel [52] utilizou uma pré-ordem completa sobre B_K. Esta pré-ordem, representada por $\leq$ (relação reflexiva e transitiva), é chamada *ordem de relevância epistêmica*. Assim, para quaisquer sentenças ϕ, $\psi \in B_K$, temos que ou $\phi \leq \psi$ ou $\psi \leq \phi$. Além disso, uma vez que B_K é finito, existe pelo menos um elemento maximal ϖ, ou seja, para nenhuma sentença ψ temos que $\varpi < \psi$, (o que significa que $\varpi \leq \psi$ mas $\psi \leq \varpi$ não é válido).

Esta ordem induz uma relação de equivalência, denotada por $\approx$, que é definida por : $\phi \approx \psi$ se, e somente se, ($\phi \leq \psi$ e $\psi \leq \phi$). Uma vez que as bases de crenças são finitas, considere que $\|\chi_1\|$, $\|\chi_2\|$, ..., $\|\chi_n\|$ representam as classes de equivalência correspondente a uma base qualquer B_K. Tais classes também são chamadas de *graus de relevância epistêmica de* B_K. Como $\leq$ é completa, podemos considerar que, para todo i $\in$ [1,n], os elementos de $\|\chi_i\|$ possuem maior relevância epistêmica do que os elementos de $\|\chi_{i+1}\|$. O conjunto de classes de equivalências $B_K/\approx$ será denotado por $\mathbf{B}_\approx$. Logo, $B_K = \cup_{i \in [1,n]} \|\chi_i\|$. Uma base de crenças junto com uma ordem de relevância epistêmica é chamada *base de crenças priorizada*. Para definir a revisão de uma base de crenças priorizada, precisamos inicialmente definir a noção de *contração* de uma base priorizada:

Definição 3.4.3 (Nebel [52])

A *contração priorizada* da sentença ϕ da base de crenças B_K, denotada por ($B_K \Downarrow \phi$), é definida por : $\zeta \in (B_K \Downarrow \phi)$ se, e somente se :

1. $\zeta = \cup_{i \in [1,n]} B_{K_i}$;
2. $B_{K_i} \subseteq \|\chi_i\|$, para todo $\|\chi_i\| \in \mathbf{B}_\approx$, e
3. para todo i $\in$ [1,n], B_{K_i} é maximal (sob inclusão de conjuntos) entre os subconjuntos de $\|\chi_i\|$ tal que $\cup_{j \in [1,i]} B_{K_j} \not\vdash \phi$. ■

Assim, os elementos de $(B_K \Downarrow \phi)$ são construídos da seguinte maneira : primeiro, seleciona-se um subconjunto maximal B_{K_1} de $\|\chi_1\|$ (conjunto que possui o maior grau de relevância epistêmica) que não implica a sentença ϕ. Em seguida, seleciona-se um subconjunto maximal B_{K_2} de $\|\chi_2\|$ (que possui o segundo maior grau de relevância epistêmica) que, junto com o subconjunto maximal obtido no passo anterior, não implica a sentença ϕ. Este processo continua até que tenhamos percorrido todos os graus de relevância epistêmica existentes.

A partir da definição anterior, podemos concluir que uma operação de contração priorizada seleciona um subconjunto de subconjuntos maximais de uma base de crenças que não implicam uma dada proposição. Portanto, a *revisão* $\otimes$ *de uma base de crenças priorizada* pode ser definida simplesmente substituindo $\downarrow$ por $\Downarrow$. Formalmente :

Proposição 3.4.1 (Nebel [52])

Dadas uma base de crenças B_K e uma ordem de relevância $\leq$, para qualquer sentença ϕ : $(B_K \Downarrow \phi) \subseteq (B_K \downarrow \phi)$.■

Definição 3.4.4 (Nebel [52])

A revisão de uma base de crenças priorizada B_K por uma sentença ϕ, escrita como $B_K \otimes \phi$, é definida por :

$$B_K \otimes \phi = \begin{cases} \left(\bigcap_{\zeta \in (B_K \Downarrow \neg\phi)} Cn(\zeta)\right)^{+}_{\phi}, & \text{se } (B_K \Downarrow \neg\phi) \neq \varnothing \\ Cn(\perp), & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Dizemos que $B_K \otimes \phi$ é uma *revisão priorizada da base* B_K *por* ϕ.■

Exemplo 3.4.1 (Nebel [52])

Considere uma base de crenças priorizada B_K tal que :

$$\|\chi_1\| = \{(A \wedge B) \to C\}$$

$$\|\chi_2\| = \{B\}$$

$$\|\chi_3\| = \{A\}$$

$$B_K = \|\chi_1\| \cup \|\chi_2\| \cup \|\chi_3\|$$

Suponha que queremos rever esta base de crenças pela sentença $\neg C$. Inicialmente, devemos construir $(B_K \Downarrow C)$. Considerando o conjunto com maior grau de relevância epistêmica ($\|\chi_1\|$), podemos observar que seu subconjunto maximal que não implica C é o próprio $\|\chi_1\|$ ($B_{K_1} = \|\chi_1\|$).

A seguir, devemos determinar o subconjunto maximal de $\|\chi_2\|$ que, junto com B_{K_1}, não implica C. Novamente, o próprio conjunto em questão é o subconjunto maximal que procuramos.

Finalmente, devemos examinar o conjunto $\|\chi_3\|$. Note que neste caso, $\|\chi_3\|$ não é o subconjunto maximal que desejamos pois a partir de $\|\chi_3\|$ e dos outros subconjuntos maximais (B_{K_1} e B_{K_2}) podemos inferir C. Logo, o subconjunto maximal de $\|\chi_3\|$ que estamos procurando é $\emptyset$. Assim, ($B_K \Downarrow C$) = $\{B_{K_1} \cup B_{K_2} \cup B_{K_3}\}$, onde B_{K_1} = $\{(A \wedge B) \rightarrow C\}$, $B_{K_2} = \{B\}$ e $B_{K_3} = \emptyset$.

Conseqüentemente : $B_K \otimes \neg C = Cn(\{(A \wedge B) \rightarrow C, B\} \cup \{\neg C\})$.■

O processo de revisão definido acima, tanto no caso da revisão simples quanto da priorizada, implica que duas bases de crenças distintas B'_K e B''_K, que representam um mesmo conjunto de crenças K ($Cn(B'_K) = Cn(B''_K) = K$), podem gerar resultados diferentes quando revistas por uma mesma sentença α ($Cn(B'_K \otimes \alpha) \neq Cn(B''_K \otimes \alpha)$). Desta forma, a revisão de bases de crenças se torna intimamente ***dependente*** de como o mundo é sintaticamente descrito, o que, segundo Nebel [52], "*para algumas aplicações não parece ser má idéia*" uma vez que isto permite "*derivar preferências da forma sintática de representação de um conjunto de crenças*". Como veremos a seguir, esta dependência sintática não é vista por todos como uma propriedade desejável.

V. Mudança Mínima

Nesta seção, apresentaremos a proposta de Katsuno e Mendelzon [34], na qual os operadores de revisão que satisfazem os postulados de Gärdenfors (veja seção II acima) são caracterizados em termos de *mudança mínima (com respeito a uma ordem entre as interpretações) na classe de modelos* do conjunto de crenças que está sendo revisto.

Como ocorreu na seção anterior, aqui também partimos do princípio de que nossas crenças devem ser representadas por conjuntos finitos de sentenças mas, ao contrário do que ocorre com os operadores $\oplus$ e $\otimes$, consideramos que uma operação de revisão não deve levar em conta a forma sintática nem da base de crenças que descreve o mundo, nem da sentença que está revendo a base em questão. Este é o chamado *princípio da irrelevância sintática* (Dalal [17]).

Assim, considere K um conjunto de crenças e $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ um conjunto finito de sentenças tais que $\psi \equiv (\xi_1 \wedge \xi_2 \wedge \ldots \wedge \xi_n)$ e $K = \{\theta \mid \psi \vdash \theta\}$, i.e., K é finitamente axiomatizado por ψ. Logo, um conjunto de crenças K será representado nesta seção ***pela fórmula proposicional*** ψ, que será chamada de ***base de conhecimento***.

Dada uma base de conhecimento ψ e uma senteça μ, $\psi \circ \mu$ representará a ***revisão*** de ψ por μ, ou seja, $\psi \circ \mu$ será a base de conhecimento obtida pela revisão de ψ por μ. O símbolo $\circ$ foi utilizado por Katsuno e Mendelzon [34] ao invés do símbolo * simplesmente como uma forma de chamar atenção para o fato de que um conjunto de crenças K é representado aqui por uma fórmula proposicional ψ.

Katsuno e Mendelzon [34] estabeleceram a correspondência entre $(K*\mu)$ e $(\psi\circ\mu)$, através dos seguintes resultados :

Lema 3.5.1 (Katsuno e Mendelzon [34])

Dado um conjunto de crenças K finitamente axiomatizado por ψ. Seja * um operador de revisão sobre conjuntos de crenças e $\circ$ seu operador correspondente sobre bases de conhecimento. Então * satisfaz (K*1)-(K*6) se, e somente se, $\circ$ satisfaz as condições (R1)-(R4) :

(R1) $\psi \circ \mu$ implica μ.

(R2) Se $\psi \wedge \mu$ é satisfatível então $\psi \circ \mu \equiv \psi \wedge \mu$.

(R3) Se μ é satisfatível então $\psi \circ \mu$ é também satisfatível.

(R4) Se $\psi_1 \equiv \psi_2$ e $\mu_1 \equiv \mu_2$ então $\psi_1 \circ \mu_1 \equiv \psi_2 \circ \mu_2$. ■

As condições do lema acima significam que : (R1) a nova crença pertence ao conjunto resultante da revisão; (R2) garante que se μ é consistente com ψ, apenas acrescentamos a sentença μ a base de crenças; (R3) garante a consistência no resultado da revisão, se a sentença que está revendo a base é satisfatível; (R4) é o *princípio da irrelevância sintática* de Dalal [17].

Lema 3.5.2 (Katsuno e Mendelzon [34])

Os postulados (K*7) e (K*8) são equivalentes, respectivamente, as condições (R5) e (R6) :

(R5) $(\psi \circ \mu) \wedge \phi$ implica $\psi \circ (\mu \wedge \phi)$.

(R6) Se $(\psi \circ \mu) \wedge \phi$ é satisfatível, então $\psi \circ (\mu \wedge \phi)$ implica $(\psi \circ \mu) \wedge \phi$.■

Para a caracterização semântica da noção de mudança mínima (Katsuno e Mendelzon [34]), considere M_L como o conjunto de todas as interpretações que podem ser descritas numa linguagem proposicional L.

Seja $[\psi]$ o conjunto de todos os modelos da fórmula proposicional ψ. Considerando uma função que atribua a cada fórmula proposicional ψ uma pré-ordem $\leq_\psi$ sobre M_L (relação reflexiva e transitiva), ela é chamada de uma *atribuição confiável (faithful)* se as seguintes condições são verdadeiras :

1. Se $I, J \in [\psi]$ então $I <_\psi J$[1] não ocorre.
2. Se $I \in [\psi]$ e $J \notin [\psi]$, então $I <_\psi J$ vale.
3. Se $\psi \equiv \phi$ então $\leq_\psi = \leq_\phi$.

Dizemos que uma interpretação I é *minimal* em um subconjunto M de M_L com respeito a $\leq_\psi$ se $I \in M$ e não existe $I' \in M$ tal que $I' <_\psi I$. Defina : $Min(M,\leq_\psi) = \{I \,/\, I$ é minimal em M com respeito a $\leq_\psi\}$. A partir disto, é possível determinar o conjunto de todas as interpretações em M que estão "mais próximas" de $[\psi]$, o que permitiu estabelecer o seguinte resultado :

Teorema 3.5.1 (Katsuno e Mendelzon [34])

Um operador de revisão $\circ$ satisfaz as condições (R1)-(R6) se, e somente se, existe uma atribuição confiável que mapeia cada base de crença ψ à uma pré-ordem total[2] $\leq_\psi$ tal que $[\psi \circ \mu] = Min([\mu],\leq_\psi)$.■

VI. Conclusão

Neste capítulo, apresentamos vários conceitos relativos à revisão de crenças. Nos capítulos que seguem, os utilizaremos de forma distinta : enquanto o modelo de esferas de Grove [30] será utilizado como ponto de partida para a definição de ambientes semânticos para as lógicas defaults (ver capítulo 4) apresentadas no capítulo anterior e para programas em lógica (ver capítulo 5); as bases de crenças e o conceito de mudança mínima serão utilizados para mostrar que podemos representar processos de revisão através de lógicas defaults, baseando-nos na semântica de esferas propostas para estas lógicas (ver capítulo 6).

---

[1] $I <_\psi J$ se, e somente se, $I \leq_\psi J$ mas $J \leq_\psi I$ não é válido.

[2] Para quaisquer $I, J \in M_L$, ou $I \leq_\psi J$ ou $J \leq_\psi I$.

CAPÍTULO 4

Ambiente Semântico Baseado em Esferas para Lógicas Default

I. Introdução

Alguns estudos nas áreas de revisão de crenças e de lógicas não-monotônicas têm mostrado que existe uma forte relação entre estas duas abordagens. Makinson e Gärdenfors [44] argumentaram que esta conexão aparece de maneira mais clara quando comparam-se as condições gerais dos operadores de inferência não-monotônicos aos operadores da teoria de revisão de crenças, embora ao nível de construções específicas tal correspondência não seja sempre exata. Neste mesmo trabalho [44], eles mostraram que a relação entre o sistema de Poole [55] para raciocínio não-monotônico e a revisão "full meet" de Alchourron e Makinson [2] é muito próxima da identidade.

O trabalho de Boutilier ([8],[9]) é outro exemplo onde a relação entre revisão de crenças e lógicas não-monotônicas é estudada. Boutilier ([8],[9]) apresenta uma família de lógicas modais para raciocínio em revisão de crenças no qual o processo de revisão de uma base de conhecimento por alguma sentença é representado através de um conectivo condicional. O ambiente modal utilizado permitiu estabelecer relações entre revisão, raciocínio default e lógica autoepistêmica.

O objetivo deste capítulo é estabelecer uma conexão semântica entre revisão de crenças e lógicas default, através da definição de um ambiente semântico geral no qual as diversas lógicas default existentes possam ser semanticamente definidas. A idéia central é relacionar as noções de *consistência / inconsistência* presentes nas lógicas default com as noções de *expansão / revisão* presentes nas funções de revisão de crenças.

Por exemplo, considere a lógica default de Reiter [58]. Uma teoria default na lógica de Reiter é definida como o par (W,Δ) onde W é um conjunto de fatos e Δ é um conjunto de defaults. Aplicar um default $(A{:}B/C) \in \Delta$ ao conjunto W significa que *acrescentamos* a sentença C (conseqüente do default) ao conjunto W sob certas condições (*condição de aplicabilidade de um default* - capítulo 2). Sabemos que se a condição de aplicabilidade do default (A:B/C) é satisfeita, não precisamos retirar nenhuma sentença de W quando acrescentamos C, uma vez que C só é acrescido ao conjunto W quando $W \cup \{C\}$ for *consistente*.

No processo de revisão de crenças, quando acrescentamos uma sentença C a um conjunto de crenças W sem retirar nenhuma sentença deste, estamos simplesmente *expandindo* o conjunto W pela sentença em questão. Comparando os dois processos, podemos considerar que *aplicar* um default a um conjunto é o mesmo que *expandir* um conjunto de crenças quando certas condições são satisfeitas. Mais que isso, podemos dizer que uma sentença C é *consistente* com um conjunto W quando podemos *expandir* tal conjunto por esta sentença. Por outro lado, uma sentença C é *inconsistente* com um conjunto W quando ao acrescentar C ao conjunto W causamos uma *revisão* deste conjunto (com o objetivo de preservar a consistência do conjunto revisto).

A fim de estabelecer formalmente a conexão semântica entre o processo de revisão de crenças e as lógicas default, e a relação entre os conceitos de *consistência/ inconsistência* e *expansão/revisão*, utilizaremos o modelo para funções de revisão proposto por Grove [30]. Através dele, caracterizaremos os modelos das extensões nas diversas lógicas default apresentadas no capítulo 2.

Como veremos ao longo deste capítulo, o ambiente semântico proposto obedece sempre a um mesmo padrão. Isto nos permite caracterizar as extensões nas diversas lógicas default sempre de forma semelhante : por exemplo, dada uma teoria default qualquer (W,Δ), primeiramente definimos como uma seqüência qualquer de defaults em Δ deve gerar um sistema de esferas **S** (segundo a *condição de aplicabilidade de um default*). Em seguida, o conjunto das seqüências que definem sistemas de esferas segundo o critério estabelecido é parcialmente ordenado pela relação prefixo. A classe de modelos de uma extensão de (W,Δ) será determinada pela seleção das seqüências maximais com respeito a tal ordem (no caso da lógica default clássica, tais sistemas devem satisfazer a uma condição adicional : a estabilidade).

Este capítulo está organizado da seguinte maneira : caracterizaremos a classe de modelos das extensões na lógica default de Reiter (seção 2), de Lukaszewicz (seção 3), de Schaub (seção 4), de Brewka(seção 5), de Zaverucha(seção 6) e do sistema de Poole para raciocínio default (seção 7).

II. Semântica de Esferas para Lógica de Reiter

Considere a teoria default supernormal fechada (W,Δ), onde :

$W = \{BIRD(Tweety) \vee BIRD(Polly)\}$, i.e., ou Tweety ou Polly é uma ave ; e

$\Delta = \{ : \neg BIRD(Tweety) / \neg BIRD(Tweety) , : \neg BIRD(Polly) / \neg BIRD(Polly)\}$, i.e., os defaults representam, respectivamente, que Tweety não é uma ave e Polly não é uma ave.

Esta teoria default possui duas extensões :

$E_1 = Th(W \cup \{\neg BIRD(Tweety)\})$ e $E_2 = Th(W \cup \{\neg BIRD(Polly)\})$.

Utilizando o teorema 2.2.1 , podemos ver como a extensão E_1 da teoria default (W,Δ) foi construída: começamos com um conjunto W, composto pelos fatos a respeito do mundo nos quais acreditamos; como $\neg BIRD(Tweety)$ é consistente com os fatos expressos em W, o critério de aplicabilidade deste default é satisfeito, e portanto o default $(:\neg BIRD(Tweety) / \neg BIRD(Tweety))$ *pode ser aplicado* ao conjunto W. Isto significa que podemos *acrescentar o conseqüente* deste default a W, obtendo o conjunto $E_1 = Th(W \cup \{\neg BIRD(Tweety)\})$.

Por outro lado, não podemos aplicar o default $(: \neg BIRD(Polly) / \neg BIRD(Polly))$ ao conjunto E_1 uma vez que $\neg BIRD(Polly)$ é *inconsistente* com tal conjunto, e portanto, o critério de aplicabilidade deste default não é satisfeito. Não havendo mais defaults em Δ a serem considerados, E_1 é uma extensão da teoria default (W,Δ).

A obtenção da extensão E_2 se dá da mesma maneira, bastando considerar inicialmente o default $(:\neg BIRD(Polly) / \neg BIRD(Polly))$ ao invés do default $(:\neg BIRD (Tweety) / \neg BIRD(Tweety))$: como $\neg BIRD(Polly)$ é consistente com W, e portanto satisfaz o critério de aplicabilidade deste default, podemos aplicá-lo ao conjunto W, obtendo então o conjunto $E_2 = Th(W \cup \{\neg BIRD(Polly)\})$. Conseqüentemente, o default $\neg BIRD(Tweety) / \neg BIRD(Tweety)$ não pode ser aplicado ao conjunto E_2 (pois $\neg BIRD(Tweety)$ é inconsistente com E_2). Logo, E_2 é uma outra extensão da teoria default (W,Δ).

Vamos examinar o exemplo acima no escopo do modelo de Grove para funções de revisão de conjuntos de crenças. Considere $W = Th(\{BIRD(Tweety) \vee$

BIRD(Polly)}) como um conjunto de crenças, e suponha que gostaríamos de revê-lo com a sentença ¬BIRD(Tweety). Como vimos no capítulo anterior, sendo ¬BIRD(Tweety) consistente com o conjunto de crenças W, podemos *acrescentar a sentença* ¬BIRD(Tweety) *ao conjunto de crenças* W *sem precisar remover nenhuma outra crença deste conjunto.* Temos portanto neste caso uma *expansão* (caso particular da *revisão*) do conjunto de crenças W pela sentença ¬BIRD (Tweety), ou seja :

$$W^{*}_{\neg BIRD(Tweety)} = W^{+}_{\neg BIRD(Tweety)} = Cn(W \cup \neg BIRD(Tweety))$$

Podemos visualizar esta situação através do sistemas de esferas de Grove : considere o sistema **S** formado pelas esferas [W] e M_L. Note que a menor esfera que [¬BIRD(Tweety)] intercepta no sistema **S** é [W]. Sendo tal esfera o centro deste sistema, temos, como conseqüência do teorema 3.3.3, que estamos fazendo uma *expansão* do conjunto de crenças W pela sentença ¬BIRD(Tweety) (ver figura 4.2.1).

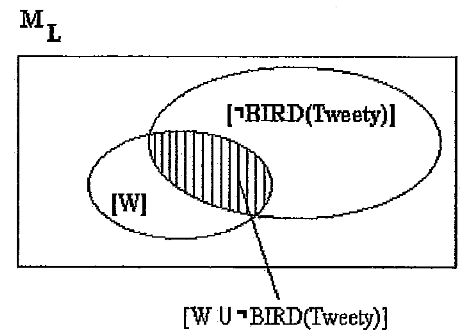


Fig. 4.2.1 : W é expandido por ¬BIRD(Tweety)

Considere agora a revisão do conjunto $W^{+}_{\neg BIRD(Tweety)}$ pela sentença ¬BIRD(Polly). Como $W^{+}_{\neg BIRD(Tweety)} \cup \{\neg BIRD(Polly)\}$ é inconsistente, se quisermos acrescentar ¬BIRD(Polly) ao nosso conjunto de crenças $W^{+}_{\neg BIRD(Tweety)}$, seremos forçados a *retirar* alguma outra crença deste conjunto de forma a evitar inconsistência.

Podemos visualizar esta situação através do sistema de esferas **S'** formado pelas esferas [W'] = $[W^{+}_{\neg BIRD(Tweety)}]$ = [W ∪ {¬BIRD(Tweety)}], [W] e M_L, obtido a partir do sistema S. É fácil ver que trata-se de uma *revisão* e não de uma *expansão* do conjunto W $\cup$ {¬BIRD(Tweety)}] pela sentença ¬BIRD(Polly) (o centro do sistema não é interceptado - ver figura 4.2.2).

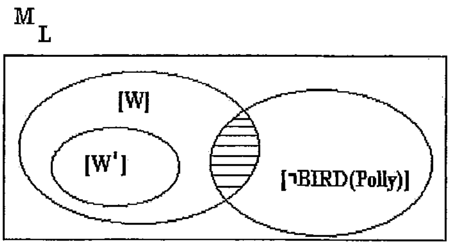


Fig. 4.2.2 : $W^{+}_{\neg BIRD(Tweety)}$ é revisto por ¬BIRD(Polly)

A comparação do exemplo acima no ambiente da lógica default e no ambiente da revisão de crenças, sugere que podemos *interpretar* a aplicação de um default supernormal fechado utilizando a noção de expansão e revisão de conjuntos de crenças da seguinte maneira :

Um *default supernormal fechado :A/A* :

- ***pode ser aplicado a um conjunto K*** (consistente) significa ***expandir*** tal conjunto pelo conseqüente deste default : K^{+}_{A} resulta em um conjunto consistente ;
- ***não pode ser aplicado a um conjunto K*** significa que se quisermos introduzir o conseqüente deste default no conjunto K, temos que ***rever*** este conjunto de maneira a manter a consistência : K^{*}_{A}.

Deste ponto de vista, a extensão E_1 (resp. E_2) da teoria default supernormal fechada (W,Δ) corresponde a *expansão* do conjunto W pela sentença ¬BIRD(Tweety) (resp. ¬BIRD(Polly)), i.e., $E_1 = W^{+}_{\neg BIRD(Tweety)}$ (resp. $E_2 = W^{+}_{\neg BIRD(Polly)}$).

Para estabelecer formalmente a idéia apresentada acima, utilizaremos o sistema de esferas de Grove para determinar quando o conseqüente de um default supernormal fechado *revê* ou simplesmente *expande* um dado conjunto. Lembre que se K é um conjunto de crenças, pela definição 3.3.1, podemos construir um sistema de esferas S centrado em [K]. Os modelos do conjunto de crenças K^*_A podem ser representado pelo conjunto de "mundos" $C(A) = [A] \cap S_A$, onde S_A é a menor esfera em **S** que é interceptada por [A] (teoremas 3.3.1 e 3.3.2).

Sem perda de generalidade, considere K consistente. Pelo teorema 3.3.3, se S_A = [K], temos que $K^*_A = K^+_A$ e $K \cup \{A\}$ é consistente (figura 4.2.3). Quando $S_A \neq$ [K] temos que $K \cup \{A\}$ é inconsistente (figura 4.2.4). Logo, do ponto de vista do modelo de Grove para funções de revisão, para determinar quando um default supernormal fechado (:A/A) pode ser aplicado a um conjunto K temos que verificar se a sentença A está somente *expandindo* o conjunto K (default aplicável: $[A] \cap [K] \neq \emptyset$) ou revendo-o (default não aplicável : $[A] \cap [K] = \emptyset$). Veremos adiante que estas associações entre as noções de *consistência / expansão* e *inconsistência / revisão* nos permitirão estender tal interpretação de aplicabilidade de defaults para todos os tipos de teorias default da lógica de Reiter (e também para outros tipos de lógicas defaults).

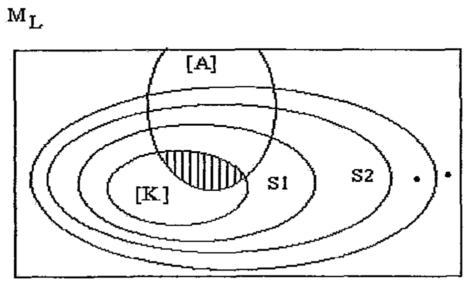


Fig. 4.2.3 : $K \cup \{A\}$ é consistente (expansão)

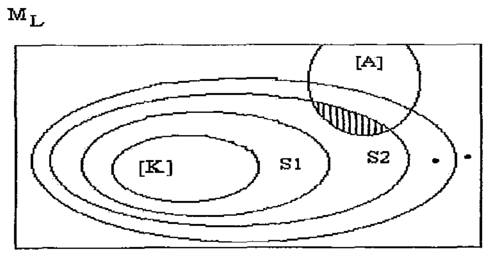
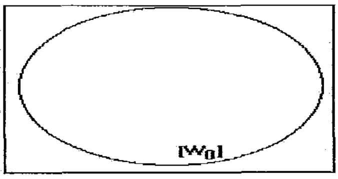


Fig. 4.2.4 : $K \cup \{A\}$ é inconsistente (revisão)

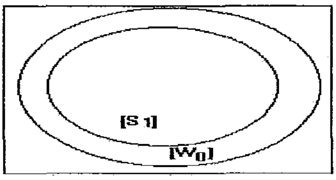
Note que uma vez aplicado o default (:A/A) ao conjunto K, devemos verificar se existe algum outro default em Δ que pode ser aplicado no conjunto resultante (conjunto $Cn(K \cup \{A\})$). Para isto, temos que considerar o novo conjunto de crenças

Cn(K $\cup$ {A}) e, como fizemos antes para K, construir um sistema de esferas **S'** (obtido a partir do sistema de esferas anterior **S**) centrado agora em [K $\cup$ {A}]. Um default supernormal (:B / B) $\in \Delta$ poderá ser aplicado a este conjunto se [B] $\cap$ [K $\cup$ {A}] $\neq \varnothing$. Este processo deve ser repetido até que todos os defaults em Δ sejam testados e, quando possível, aplicados, obtendo-se a classe de todos os modelos de uma extensão desta teoria default.

É importante chamar a atenção sobre a função que o sistema de esferas de Grove desempenha no processo de determinação da classe de modelos de uma extensão E de uma teoria default (W,Δ) : primeiro, ele é utilizado para determinar se um default pode ser aplicado em um determinado passo da construção de uma extensão E; segundo, uma vez que as condições de aplicabilidade sejam satisfeitas, construimos um novo sistema de esferas a partir dele, que será utilizado na verificação das condições de aplicabilidade de um outro default. Isto gera uma seqüência de sistemas de esferas que são utilizadas na verificação das condições de aplicabilidade dos defaults (ver figura 4.2.5) e, como subproduto, este processo gera um sistema de esferas centrado em [E], onde [E] é a classe de todos os modelos da extensão E.

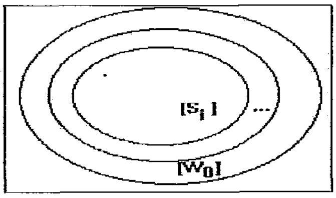


Sistema Inicial



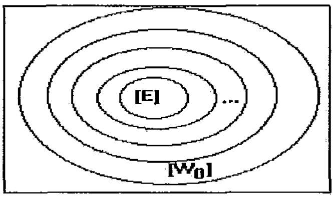
Sistema obtido pela aplicação do primeiro default

...



Sistema obtido pela aplicação do i-ésimo default

...



Sistema obtido após a aplicação de todos os default possíveis

Fig. 4.2.5 : Seqüência de Sistemas de Esferas

Formalmente, podemos determinar a classe de modelos de uma *teoria default normal* (W,Δ) usando o modelos de esferas de Grove da seguinte forma[1] :

Definição 4.2.1

Dada uma classe de modelos [K] e um default d = A : B / C, dizemos que **d** ***é aplicável a* [K]** se, e somente se: (a) $[K] \subseteq [A]$; (b) $[K] \cap [B] \neq \varnothing$.■

Definição 4.2.2

Seja (W_0,Δ) uma teoria default normal e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) de defaults em Δ tal que $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / B_\varsigma$. O sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é o conjunto $\{M_L, [W_0], \ldots, [W_n], \ldots\}$ onde $[W_0]$ é a classe de modelos do conjunto W_0 e, para cada $\varsigma \in I$, $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [B_\varsigma]$ se d_ς ***é aplicável a*** $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma]$.

O sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ está centrado em $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma]$.■

Definição 4.2.3

Seja (W_0,Δ) uma teoria default normal, **S** o sistema de esferas definido por uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ de defaults em Δ (definição 4.2.2), que está centrado em $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma]$. Dizemos que **S** satisfaz :

- a ***condição de consistência***, se $\bigcap_{\gamma\leq\varsigma} [W_\gamma] \neq \varnothing$, para todo $\varsigma \in I$.■

Teorema 4.2.1

Seja (W_0,Δ) uma teoria default normal. Então, qualquer sistema de esferas **S** construído a partir de (W_0,Δ), segundo a definição 4.2.2, satisfaz a condição de consistência. ■

Definição 4.2.4

Dado o sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (definição 4.2.2) e centrado em $[\mathcal{W}]$, dizemos que **S** ***provê*** $\mathcal{W}$.■

Definição 4.2.5

Seja (W_0,Δ) uma teoria default normal e Ξ o conjunto de todas as seqüências de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ que definem sistemas de esferas como na definição 4.2.2. O conjunto Ξ pode ser parcialmente ordenado por $\leq_N$ definido como : $<d'> \leq_N <d''>$ se $<d'>$ é prefixo de $<d''>$.

---

[1] Como vimos no capítulo 3, $K^+_A = K_{C(A)} = K^*_A$ e conseqüentemente $[K^+_A] = [K^*_A] = [A] \cap [K] \neq \varnothing$.

Dizemos que $<d> \in \Xi$ é uma **seqüência maximal com respeito a** $\leq_N$ de defaults em Δ se não existe nenhuma seqüência $<d'> \in \Xi$ tal que $<d> \leq_N <d'>$. ■

Teorema 4.2.2

Seja (W_0,Δ) uma teoria default normal e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal com respeito a $\leq_N$ de defaults em Δ que define o sistema de esferas **S** (como na definição 4.2.2). Então **S** provê uma extensão E de (W_0,Δ).■

Teorema 4.2.3

Seja (W_0,Δ) uma teoria default normal, $E = Th(W_0 \cup CONS(GD(E,(W_0,\Delta))))$ uma extensão de (W_0,Δ), sendo $GD(E,(W_0,\Delta))$ o conjunto de defaults geradores de E com respeito a (W_0,Δ), e M a classe de todos os modelos de E. Os defaults em $GD(E,(W_0,\Delta))$ podem ser colocados em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que o sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 4.2.2) provê E. ■

Exemplo 4.2.1 (Reiter [58])

Considere a teoria default supernormal (W_0,Δ) onde $W_0 = \{B \rightarrow \neg A \wedge \neg C\}$ e $\Delta = \{:A/A\ ,\ :B/B\ ,\ :C/C\}$. Esta teoria possui duas extensões :

$$E_1 = Th(W_0 \cup \{A,C\}) \qquad \text{e} \qquad E_2 = Th(W_0 \cup \{B\})$$

que possuem, respectivamente, as seguintes classes de modelos : $M_1 = \{\{A,\neg B,C\}\}$ e $M_2 = \{\{\neg A,B,\neg C\}\}$.

Seja : $M_L = \{ \{A,B,C\}, \{A,B,\neg C\}, \{\neg A,B,C\}, \{\neg A,B,\neg C\}, \{A,\neg B,C\},$
$\{A,\neg B,\neg C\}, \{\neg A,\neg B,C\}, \{\neg A,\neg B,\neg C\}\}$.

Utilizando a definição 4.2.2 e o teorema 4.2.3, podemos construir os seguintes sistemas de esferas centrados em M_1 e M_2, respectivamente :

- Considerando a seqüência de defaults $<:A/A\ ,\ :C/C>$, temos um sistema de esferas **S** formado por :

M_L

$[W_0] = \{\{\neg A,B,\neg C\}, \{A,\neg B,C\}, \{A,\neg B,\neg C\}, \{\neg A,\neg B,C\}, \{\neg A,\neg B,\neg C\}\}$,

$[W_1] = [W_0] \cap [A] = \{\{A,\neg B,C\}, \{A,\neg B,\neg C\}\} = [W_0{}^+A] \neq \varnothing$,

$[W_2] = [W_1] \cap [C] = \{\{A,\neg B,C\}\} = [W_1{}^+C] = [(W_0{}^+A)^+C] \neq \varnothing$.

Portanto, temos $M_1 = [W_2] = [(W_0{}^+A)^+C]$.

- Considerando a seqüência de defaults $<:B/B>$, temos um sistema de esferas **S'** formado por :

M_L

$[W_0] = \{\{\neg A,B,\neg C\}, \{A,\neg B,C\}, \{A,\neg B,\neg C\}, \{\neg A,\neg B,C\}, \{\neg A,\neg B,\neg C\}\}$,

$[W_1] = [W_0] \cap [B] = \{\{\neg A,B,\neg C\}\} = [W_0{}^{+}{}_{B}] \neq \emptyset$,

Logo, $M_2 = [W_1] = [W_0{}^{+}{}_{B}]$.

Observe que a seqüência de defaults $<:A/A\ ,\ :B/B\ ,\ :C/C>$ não pode gerar um sistema de esferas como estabelecido pela definição 4.2.2, uma vez que :

M_L

$[W_0] = \{\{\neg A,B,\neg C\}, \{A,\neg B,C\}, \{A,\neg B,\neg C\}, \{\neg A,\neg B,C\}, \{\neg A,\neg B,\neg C\}\}$,

$[W_1] = [W_0] \cap [A] = \{\{A,\neg B,C\}, \{A,\neg B,\neg C\}\} = [W_0{}^{+}{}_{A}] \neq \emptyset$,

$[W_2] = [W_1] \cap [B] = \emptyset$, que não satisfaz a condição de aplicabilidade $[W_1] \cap [B] \neq \emptyset$.

De fato, qualquer seqüência de defaults que contenha todos os defaults de Δ não pode gerar um sistema de esferas que satisfaça todas as condições desejadas. Desta forma, temos somente duas seqüências maximais de defaults que satisfazem as condições do teorema 4.2.2. ■

Exemplo 4.2.2

Considere a teoria default normal (W_0,Δ) onde :

$W_0 = \{BIRD(Tweety)\}$ e

$\Delta = \{BIRD(Tweety) : FLY(Tweety) / FLY(Tweety)$,

$FLY(Tweety) : \neg PENGUIN(Tweety) / \neg PENGUIN(Tweety)\}$.

Esta teoria possui uma única extensão $E_1 = Th(W_0 \cup \{B,C\})$ que possui o modelo $M_1 = \{\{A, B, C\}\}$, onde :

$A \equiv BIRD(Tweety)$, $B \equiv FLY(Tweety)$ e $C \equiv \neg PENGUIN(Tweety)$.

Seja : $M_L = \{ \{A,B,C\}, \{A,B,\neg C\}, \{\neg A,B,C\}, \{\neg A,B,\neg C\}, \{A,\neg B,C\}$,

$\{A,\neg B,\neg C\}, \{\neg A,\neg B, C\}, \{\neg A,\neg B,\neg C\}\}$.

Considerando a seqüência de defaults $< A:B / B\ ,\ B:C / C >$, podemos construir o sistema de esferas S formado por :

M_L

$[W_0] = \{\{A,B,C\}, \{A,B,\neg C\}, \{A,\neg B,C\}, \{A,\neg B,\neg C\}\}$,

$[W_1] = [W_0] \cap [FLY(Tweety)] = \{\{A,B,C\}, \{A,B,\neg C\}\} = [W_0{}^{+}{}_{FLY(Tweety)}] \neq \emptyset$,

$[W_2] = [W_1] \cap [\neg PENGUIN(Tweety)] = \{\{A,B,C\}\} = [W_1{}^{+}{}_{\neg PENGUIN(Tweety)}] =$

$= [(W_0{}^{+}{}_{FLY(Tweety)})^{+}{}_{\neg PENGUIN(Tweety)}] \neq \emptyset$.

Note que neste sistema de esferas : $[W_0] \subseteq [A]$ e $[W_1] \subseteq [B]$.

Logo, temos $M_1 = [W_2] = [(W_0{}^{+}_{FLY(Tweety)})^{+}_{\neg PENGUIN(Tweety)}]$.

Observe que, com a seqüência de defaults <B : C / C , A : B / B >, não poderíamos construir um sistema de esferas uma vez que não teríamos a seguinte condição satisfeita : $[W_0] \subseteq [B]$. ■

Podemos estender os resultados apresentados acima ao caso de *teorias default genéricas* (não-normais) da seguinte forma :

Definição 4.2.6

Seja (W_0,Δ) uma teoria default e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) de defaults em Δ tal que $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma$. O sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é o conjunto $\{M_L, [W_0], \ldots ,[W_n], \ldots \}$ onde $[W_0]$ é a classe de modelos do conjunto W_0 e, para cada $\varsigma \in I$, $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$ se d_ς ***é aplicável***[2] ***a*** $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma]$.

O sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ está centrado em $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma]$.■

Definição 4.2.7

Seja (W_0,Δ) uma teoria default, **S** o sistema de esferas definido por uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ de defaults em Δ (definição 4.2.6), que está centrado em $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma]$. Dizemos que **S** satisfaz :

- a ***condição de consistência***, se $\bigcap_{\gamma\leq\varsigma} [W_\gamma] \neq \emptyset$, para todo $\varsigma \in I$; e
- a ***condição de estabilidade***, se $[\mathcal{W}] \cap [B_\varsigma] \neq \emptyset$, para todo $\varsigma \in I$.■

Teorema 4.2.4

Seja **S** o sistema de esferas definido (segundo a definição 4.2.6) por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, cujo centro é $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma]$. Se **S** satisfaz a condição de estabilidade então **S** satisfaz a condição de consistência.■

Definição 4.2.8

Dado o sistema de esferas **S** definido (segundo a definição 4.2.6) por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, cujo centro é $[\mathcal{W}]$, dizemos que **S** ***provê*** $\mathcal{W}$ quando **S** satisfaz a condição de estabilidade.■

Definição 4.2.9

Seja (W_0,Δ) uma teoria default e Ξ_R o conjunto de todas as seqüências de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, d_2,\ldots>$ que definem sistemas de esferas como na definição 4.2.6.

[2] Segundo a definição 4.2.1.

O conjunto Ξ_R pode ser parcialmente ordenado por $\leq_R$ definida como : <d'> $\leq_R$ <d">, se <d'> é prefixo de <d">.

Dizemos que $<d> \in \Xi_R$ é uma seqüência maximal com respeito a $\leq_R$ de defaults em Δ se não existe nenhuma seqüência $<d'> \in \Xi_R$ tal que $<d> \leq_R <d'>$. ■

Teorema 4.2.5

Seja (W_0,Δ) uma teoria default e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal com respeito a $\leq_R$ de defaults em Δ que define o sistema de esferas **S** (como na definição 4.2.6). Se **S** satisfaz a condição de estabilidade, então **S** provê uma extensão E de (W_0,Δ).■

Teorema 4.2.6

Seja (W_0,Δ) uma teoria default, $E = Th(W_0 \cup CONS\ (GD(E,(W_0,\Delta))))$ uma extensão de (W_0,Δ), sendo $GD(E,(W_0,\Delta))$ o conjunto de defaults geradores de E, e M a classe de todos os modelos de E. Os defaults em $GD(E,(W_0,\Delta))$ podem ser colocados em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que o sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 4.2.6) provê E. ■

Exemplo 4.2.3 (Poole [55])

Considere a teoria default (W_0,Δ) onde :

$$W_0 = \{A \vee B\} \text{ e } \Delta = \{:C \wedge \neg B / C\ ;\ :D \wedge \neg A / D\}.$$

Esta teoria possui uma extensão: $E_1 = Th(W_0 \cup \{C, D\})$, que tem a seguinte classe de modelos :

$$M = \{\{A,B,C,D\}, \{A,\neg B,C,D\}, \{\neg A,B,C,D\}\}.$$

A classe de modelos M pode ser obtida pela construção do seguinte sistema de esferas : considere a seqüência de defaults $< :C \wedge \neg B\ /\ C\ ;\ \ :D \wedge \neg A\ /\ D >$. Esta seqüência gera o sistema de esferas **S** formado por :

M_L

$[W_0] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B,C,\neg D\}, \{A,B,\neg C,D\}, \{A,B,\neg C,\neg D\}, \{A,\neg B,C,D\},$
$\{A,\neg B,C,\neg D\}, \{A,\neg B,\neg C,D\}, \{A,\neg B,\neg C,\neg D\}, \{\neg A,B,C,D\}, \{\neg A,B,C,\neg D\},$
$\{\neg A,B,\neg C,D\}, \{\neg A,B,\neg C,\neg D\}\}.$

- Como $[W_0] \cap [C \wedge \neg B] \neq \varnothing$, temos :

$[W_1] = [W_0] \cap [C] = \{ \{A,B,C,D\}, \{A,B,C,\neg D\}, \{A,\neg B,C,D\}, \{A,\neg B,C,\neg D\},$
$\{\neg A,B,C,D\}, \{\neg A,B,C,\neg D\}\} \neq \varnothing.$

Logo, $[W_1] = [W_0{}^{+}C]$.

- Como $[W_1] \cap [D \wedge \neg A] \neq \varnothing$, temos :

  $[W_2] = [W_1] \cap [D] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,\neg B,C,D\}, \{\neg A,B,C,D\}\} \neq \varnothing$.

  Logo, $[W_2] = [W_1{}^{+}D] = [(W_0{}^{+}C)^{+}D]$.

Além disso, temos $[W_2] \cap [C \wedge \neg B] \neq \varnothing$ e $[W_2] \cap [D \wedge \neg A] \neq \varnothing$. Portanto, os conseqüentes dos defaults aplicados não contradizem nenhuma das justificativas dos outros defaults já aplicados. Obtemos então $M = [W_2]$.■

Exemplo 4.2.4 (Reiter [58])

Considere a teoria default (W_0,Δ) onde $W_0 = \varnothing$ e $\Delta = \{:A/\neg A\}$. Esta teoria não possui extensão. Note que existe uma seqüência maximal de defaults que pode definir um sistema de esferas como na definição 4.2.6 : a seqüência $<:A/\neg A>$ define o sistema de esferas $S = \{[W_0], [W_1]\}$, onde $[W_0] = M_L = \{(A), (\neg A)\}$ e $[W_1] = [W_0] \cap [\neg A] = \{\{\neg A\}\}$ pois $[W_0] \cap [A] \neq \varnothing$. Porém, este sistema não provê extensão de (W_0,Δ) uma vez que a condição de estabilidade não é satisfeita : $[W_1] \cap [A] = \varnothing$. Logo, a justificativa A é inconsistente com o conseqüente $\neg A$ do default aplicado e então a expansão de W_0 por $\neg A$ não é válida para se obter os modelos de uma extensão de (W_0,Δ). Assim, esta teoria default não possui extensão. ■

Exemplo 4.2.5 (Etherington [23])

Considere a teoria default onde :

$$W_0 = \varnothing \text{ e } \Delta = \{:(A \wedge \neg B)/A;\ :(B \wedge \neg C)/B;\ :(C \wedge \neg A)/C\}.$$

Sabemos que esta teoria não possui nenhuma extensão. Vamos examinar o que ocorre no modelo de esferas.

Temos $[W_0] = M_L$. Suponha que desejamos construir um sistema de esferas utilizando a seguinte seqüência de defaults : $<:(A \wedge \neg B)/A;\ :(B \wedge \neg C)/B;\ :(C \wedge \neg A)/C>$. Note que :

- como $[W_0] \cap [A \wedge \neg B] = \{\{A,\neg B,C\}, \{A,\neg B,\neg C\}\} \neq \varnothing$,

  teríamos $[W_1] = [W_0] \cap [A] = \{\{A,B,C\}, \{A,B,\neg C\}, \{A,\neg B,C\}, \{A,\neg B,\neg C\}\}$;
- como $[W_1] \cap [B \wedge \neg C] = \{\{A,B,\neg C\}\} \neq \varnothing$,

  teríamos $[W_2] = [W_1] \cap [B] = \{\{A,B,C\}, \{A,B,\neg C\}\}$; mas
- $[W_2] \cap [C \wedge \neg A] = \varnothing$, e, pela definição 4.2.6, não poderíamos considerar a esfera $[W_3] = [W_2] \cap [C]$ no nosso sistema de esferas (o default $:(C \wedge \neg A)/C$ não é aplicável a $[W_2]$).

Desta forma, teríamos que considerar somente a seqüência de defaults $<:(A \wedge \neg B)/A\,;\,:(B \wedge \neg C)/B>$. Mas neste caso :

- $[W_2] \cap [A \wedge \neg B] = \emptyset$, ou seja, a condição de estabilidade não é satisfeita.

Observe que se considerarmos qualquer seqüência de defaults formada somente por um default (como por exemplo, $<:(A \wedge \neg B)/A>$), ela não será maximal. Podemos portanto concluir, pelo teorema 4.2.5, que esta teoria default não possui extensão.■

Podemos também caracterizar os modelos das extensões fracas através do sistema de esferas. Note que isto pode ser feito facilmente uma vez que a definição de extensão de Reiter e a extensão fraca diferem somente no tratamento dado ao pré-requisito. Assim, basta substituir a condição $[K] \subseteq [A]$ da definição 4.2.1 por $[K] \cap [A] \neq \emptyset$ (definição 4.2.10 abaixo) e verificar se a condição (dos pré requisitos) $[\mathcal{W}] \subseteq [A_j]$, onde $[\mathcal{W}]$ é o centro do sistema de esfera, é satisfeita. Formalmente :

Definição 4.2.10

Dada uma classe de modelos [K] e um default d = A : B / C, dizemos que **d** ***é fracamente aplicável a*** **[K]** se, e somente se: (a) $[K] \cap [A] \neq \emptyset$; (b) $[K] \cap [B] \neq \emptyset$.■

Definição 4.2.11

Seja (W_0,Δ) uma teoria default e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) de defaults em Δ tal que $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma$. O sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é o conjunto $\{M_L, [W_0], \ldots ,[W_n], \ldots\}$ onde $[W_0]$ é a classe de modelos do conjunto W_0 e, para cada $\varsigma \in I$, $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$ se d_ς ***é fracamente aplicável a*** $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma]$.

O sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ está centrado em $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma]$.■

Definição 4.2.12

Seja (W_0,Δ) uma teoria default, **S** o sistema de esferas definido por uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ de defaults em Δ (definição 4.2.11), que está centrado em $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma]$. Dizemos que **S** satisfaz :

- a ***condição dos pré-requisitos***, se $[\mathcal{W}] \subseteq [A_\varsigma]$, para todo $\varsigma \in I$;
- a ***condição de consistência***, se $\bigcap_{\gamma \leq \varsigma} [W_\gamma] \neq \emptyset$, para todo $\varsigma \in I$; e
- a ***condição de estabilidade***, se $[\mathcal{W}] \cap [B_\varsigma] \neq \emptyset$, para todo $\varsigma \in I$.■

Teorema 4.2.7

Seja **S** o sistema de esferas definido (segundo a definição 4.2.11) por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, cujo centro é $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma]$. Se **S** satisfaz a condição de estabilidade então **S** satisfaz a condição de consistência.■

Definição 4.2.13

Dado o sistema de esferas **S** definido (segundo a definição 4.2.11) por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, cujo centro é $[\mathcal{W}]$, dizemos que **S** ***provê fracamente*** $\mathcal{W}$ quando **S** satisfaz as condições dos pré-requisitos e de estabilidade.■

Definição 4.2.14

Seja (W_0,Δ) uma teoria default e Ξ_{Rf} o conjunto de todas as seqüências de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ que definem sistemas de esferas como na definição 4.2.11. O conjunto ξ_{Rf} pode ser parcialmente ordenado por $\leq_{Rf}$ definida como : $<d'> \leq_{Rf} <d''>$ se $<d'>$ é prefixo de $<d''>$.

Dizemos que $<d> \in \Xi_{Rf}$ é uma seqüência maximal com respeito a $\leq_{Rf}$ de defaults em Δ se não existe nenhuma seqüência $<d'> \in \Xi_{Rf}$ tal que $<d> \leq_{Rf} <d'>$. ■

Teorema 4.2.8

Seja (W_0,Δ) uma teoria default e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal com respeito a $\leq_{Rf}$ de defaults em Δ que define o sistema de esferas **S** (como na definição 4.2.11). Se **S** satisfaz as condições dos pré-requisitos e de estabilidade, então **S** provê fracamente uma extensão fraca E de (W_0,Δ).■

Teorema 4.2.9

Seja (W_0,Δ) uma teoria default, $E = Th(W_0 \cup CONS\ (GD(E,(W_0,\Delta))))$ uma extensão fraca de (W_0,Δ), sendo $GD(E,(W_0,\Delta))$ o conjunto de defaults geradores de E, e M a classe de todos os modelos de E. Os defaults em $GD(E,(W_0,\Delta))$ podem ser colocados em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que o sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 4.2.11) provê fracamente E. ■

Exemplo 4.2.6 (Marek e Truszczynski [45])

Considere a teoria default (W_0,Δ), onde $W_0 = \{A \rightarrow B\}$ e $\Delta = \{B: /A\ ;\ :\neg B/B\}$. Esta teoria default não possui extensão mas $E = Th(\{A, A \rightarrow B\})$ é uma extensão fraca de (W, Δ). Vamos construir o sistema de esferas **S** correspondente a esta extensão.

Inicialmente, considere a seqüência de defaults formada por $<B: /A>$. Temos :

- $[W_0] = \{\{A,B\}, \{\neg A,B\}, \{\neg A, \neg B\}\}$;
- Como $[W_0] \cap [B] \neq \emptyset$, então $[W_1] = [W_0] \cap [A] = \{\{A,B\}\} \neq \emptyset$.

Obtemos assim o sistema de esferas $S = \{M_L,[W_0], [W_1]\}$ onde $[W_1]$ é a classe de modelos da extensão fraca E (note que $[W_1] \cap [B] \neq \emptyset$). ■

Para finalizar esta seção, vamos caracterizar as extensões das teorias default supernormais priorizadas definidas por Brewka [14]. Nos limitaremos a caracterizar apenas teorias default supernormais priorizadas uma vez que, conforme observou Brewka [14], da forma como está definida (ver capítulo 2) tal lógica só funciona de maneira adequada para este tipo de teoria. Formalmente :

Definição 4.2.15

Seja : $(W_0, \Delta_1,..., \Delta_n)$ uma teoria default supernormal priorizada, $<d_{\Delta i\varsigma}>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) de defaults em Δ_i ($i \in [1,n]$) e $<d_\Delta>_{\xi \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) de defaults obtida pela concatenação das seqüências $<d_{\Delta 1\varsigma}>_{\varsigma \in I}$, $<d_{\Delta 2\varsigma}>_{\varsigma \in I}$, ..., $<d_{\Delta n\varsigma}>_{\varsigma \in I}$.

O sistema de esferas S definido por $<d_\Delta>_{\xi \in I}$ é o conjunto $\{M_L, [W_0], [W_1],... \}$ onde $[W_0]$ é a classe de modelos do conjunto W_0 e, para cada $\xi \in I$, $[W_\xi] = \bigcap_{\gamma<\xi}[W_\gamma] \cap [B_\xi]$ se d_ξ é aplicável a $\bigcap_{\gamma<\xi}[W_\gamma]$ (segundo a definição 4.2.1).

O sistema de esferas S definido por $<d_\Delta>_{\xi \in I}$ é centrado em $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\xi \in I} [W_\xi]$. ■

Definição 4.2.16

Seja $(W_0, \Delta_1,..., \Delta_n)$ uma teoria default supernormal priorizada, S o sistema de esferas definido por uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\Delta>_{\xi \in I}$ de defaults em Δ (definição 4.2.15), que está centrado em $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\xi \in I} [W_\xi]$. Dizemos que S satisfaz :

- a ***condição de consistência***, se $\bigcap_{\gamma\leq\xi} [W_\gamma] \neq \emptyset$, para todo $\xi \in I$. ■

Teorema 4.2.10

Seja $(W_0, \Delta_1,..., \Delta_n)$ uma teoria default supernormal priorizada. Então, qualquer sistema de esferas S construído a partir de $(W_0, \Delta_1,..., \Delta_n)$, segundo a definição 4.2.15, satisfaz a condição de consistência. ■

Definição 4.2.16

Dado o sistema de esferas S definido por $<d_\Delta>_{\xi \in I}$ (segundo a definição 4.2.15) e centrado em $[\mathcal{W}]$, dizemos que S provê $\mathcal{W}$. ■

Definição 4.2.17

Seja $(W_0, \Delta_1,..., \Delta_n)$ uma teoria default supernormal priorizada e Ξ_{PDL} o conjunto de todas as seqüência de defaults $<d_\Delta>_{\xi \in I}$ que definem sistemas de esferas como na definição 4.2.15. O conjunto Ξ_{PDL} pode ser parcialmente ordenado por $\leq_{PDL}$ definido como : dadas as seqüências $<d'> = <<d'_{\Delta 1\varsigma}>_{\varsigma \in I}, <d'_{\Delta 2\varsigma}>_{\varsigma \in I}, ..., <d'_{\Delta n\varsigma}>_{\varsigma \in I}>$ e $<d''> = <<d''_{\Delta 1\varsigma}>_{\varsigma \in I}, <d''_{\Delta 2\varsigma}>_{\varsigma \in I}, ..., <d''_{\Delta n\varsigma}>_{\varsigma \in I}>$, dizemos que $<d'> \leq_{PDL} <d''>$ se, para todo i $\in [1,n]$, $<d'_{\Delta i\varsigma}>_{\varsigma \in I} \leq_N <d'_{\Delta i\varsigma}>_{\varsigma \in I}$.

Dizemos que $<d> \in \Xi_{PDL}$ é uma seqüência maximal com respeito a $\leq_{PDL}$ de defaults em Δ se não existe nenhuma seqüência $<d'> \in \Xi_{PDL}$ tal que $<d> \leq_{PDL} <d'>$. ■

Teorema 4.2.11

Seja $(W_0, \Delta_1,..., \Delta_n)$ uma teoria default supernormal priorizada e $<d_\Delta>_{\xi \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal com respeito a $\leq_{PDL}$ de defaults que define o sistema de esferas S (como na definição 4.2.15). Então S provê uma PDL-extensão E de $(W_0, \Delta_1,..., \Delta_n)$. ■

Teorema 4.2.12

Seja $(W_0, \Delta_1,..., \Delta_n)$ uma teoria default supernormal priorizada e $E = Th(W_0 \cup CONS(GD(E,(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n))))$ uma PDL-extensão de $(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n)$, sendo $GD(E, (W_0,\Delta_1,...,\Delta_n))$ o conjunto de defaults geradores de E com respeito a $(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n)$, e $\mathcal{M}$ a classe de todos os modelos de E. Os defaults em $GD(E,(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n))$ podem ser colocados em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\Delta>_{\xi \in I}$ tal que o sistema de esferas S definido por $<d_\Delta>_{\xi \in I}$ (como na definição 4.2.15) provê E. ■

Observe que todos os resultados apresentados até aqui obedecem a um mesmo padrão. Por exemplo, no caso da lógica default clássica, dada uma teoria default (W,Δ), primeiramente definimos como uma seqüência qualquer de defaults em Δ deve gerar um sistema de esferas S (definição 4.2.6). Em seguida, o conjunto das seqüências que definem sistemas de esferas segundo o critério estabelecido (definição 4.2.1) é parcialmente ordenado pela relação prefixo (definição 4.2.9). A classe de modelos de uma extensão será então determinada pela seleção das seqüências maximais com respeito a tal ordem que satisfazem certas condições (teoremas 4.2.4, 4.2.5, 4.2.6).

Comparando a caracterização semântica das extensões na lógica default clássica com, por exemplo, a das extensões fracas (definições 4.2.10 e 4.2.11, teoremas 4.2.8 e 4.2.9), vemos que os critérios de aplicabilidade de um default estão diretamente relacionados às condições de construção do sistema de esferas que têm como centro a classe de modelos de uma extensão (clássica ou fraca). Isto sugere que, como as várias lógicas default diferem entre si basicamente no critério de aplicabilidade de um default, a caracterização semântica das extensões de qualquer lógica default será obtida pela simples modificação nos critérios de construção dos sistemas de esferas. De fato, veremos isto nas próximas seções.

III. Semântica de Esferas para Lógica de Lukaszewicz

Como vimos no capítulo 2, as lógicas default de Reiter e de Lukaszewicz se diferenciam no *critério de aplicabilidade* de um default : nesta última, o critério de aplicabilidade abrange, em cada passo, não somente o default em questão mas também todos os outros defaults já aplicados até aquele instante.

Assim, é natural supor que possamos utilizar o sistema de esferas de Grove (como fizemos na seção anterior) para determinar as classes de modelos das *m*-extensões de uma teoria default na lógica default justificada. De fato, podemos fazê-lo de uma maneira simples, através da modificação das condições estabelecidas para construção de sistemas de esferas. Antes de fazê-lo formalmente, vamos examinar o seguinte exemplo :

Exemplo 4.3.1 (Lukaszewicz [40])

Considere a teoria default (W,Δ) tal que :

$$W_0 = \{A,B\} \text{ e } \Delta = \{A{:}C \wedge \neg D/C \ ; \ B{:}D/D\}$$

Esta teoria possui duas *m*-extensões :

$$E_1 = Th(W_0 \cup \{C\}) \text{ com respeito a } \{C \wedge \neg D\} \text{ e}$$

$$E_2 = Th(W_0 \cup \{D\}) \text{ com respeito a } \{D\},$$

mas somente E_2 é uma extensão clássica. Vamos examinar o que acontece no caso clássico através do sistema de esferas.

Observe que no caso da extensão E_2, temos que considerar a seqüência de defaults <B:D/D> que define o sistema de esferas **S** formado por $\{M_L, [W_0], [W_1]\}$, onde :

M_L,

$[W_0] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B,C, \neg D\}, \{A,B, \neg C,D\}, \{A,B, \neg C, \neg D\}\}$, e

$$[W_1] = [W_0] \cap [D] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B, \neg C,D\}\}, \text{ uma vez que :}$$

$$[W_0] \subseteq [B] \text{ e } [W_0] \cap [D] \neq \varnothing.$$

A seqüência de defaults acima é maximal pois a seqüência <B : D/D, A : C $\wedge$ $\neg$D/ C > não gera um sistema de esferas como estabelecido na definição 4.2.6, uma vez que :

$$[W_1] \cap [C \wedge \neg D] = \varnothing,$$

e portanto, não podemos aplicar o segundo default da seqüência.

Logo, $[E_2] = [W_1]$ representa a classe de modelos da extensão E_2. Além disso, observe que E_2 é também uma *m*-extensão pela mesma razão que ele é uma extensão : não é possível aplicar o segundo default pois sua justificativa é inconsistente com o conjunto $W_0 \cup \{D\}$.

No caso do conjunto E_1, ele não será uma extensão clássica pois para isto a seqüência de defaults <A:C $\wedge$ $\neg$D/C > deveria gerar um sistemas de esferas centrado na classe de modelos de E_1. Mas esta seqüência não é maximal (com respeito a $\leq_R$). Considere a seqüência de defaults <A:C $\wedge$ $\neg$D/C ; B:D/D>. Ela gera o seguinte sistema de esferas (definição 4.2.6) :

M_L,

$[W_0] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B,C, \neg D\}, \{A,B, \neg C,D\}, \{A,B, \neg C, \neg D\}\}$,

$[W_1] = [W_0] \cap [C] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B, C, \neg D\}\}$, uma vez que :

$[W_0] \subseteq [A]$ e $[W_0] \cap [C \wedge \neg D] \neq \varnothing$,

$[W_2] = [W_1] \cap [D] = \{\{A,B,C,D\}\}$, uma vez que :

$[W_1] \subseteq [B]$ e $[W_1] \cap [D] \neq \varnothing$.

Portanto, <A:C $\wedge$ $\neg$D/C> $\leq_R$ <A:C $\wedge$ $\neg$D/C ; B:D/D >.

Além disso, observe que a seqüência maximal de defaults <A:C $\wedge$ $\neg$D/C; B:D/D> também não gera um sistema de esferas centrado na classe de modelos de uma extensão da teoria (W_0,Δ) pois a condição de estabilidade (definição 4.2.7) é violada:

$$[W_2] \cap [C \wedge \neg D] = \varnothing$$

ou seja, a justificativa do primeiro default aplicado não é consistente com este candidato a extensão.

Examinemos como é obtido a *m*-extensão E_1 da teoria (W_0,Δ). Vimos no capítulo 2 que, na lógica default justificada, ao examinarmos a *condição de aplicabilidade* de um default temos que levar em conta também as justificativas dos defaults já aplicados. Assim, a *m*-extensão E_1 é construída da seguinte forma :

- considerando o default $(A{:}C \wedge \neg D/C)$, sabemos que o pré-requisito A é satisfeito por W_0 ($[W_0] \subseteq [A]$) e, além disso, temos que $(C \wedge \neg D)$ é consistente com W_0 ($[W_0] \cap [C \wedge \neg D] \neq \emptyset$). Como nenhum outro default foi aplicado, não precisamos verificar a consistência de C com nenhuma outra justificativa. Logo, $[W_1] = [W_0] \cap [C] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B, C, \neg D\}\} \neq \emptyset$;
- considerando agora o default $(B{:}D/D)$, sabemos que o pré-requisito B é satisfeito por $[W_1]$ ($[W_1] \subseteq [B]$) e, além disso, temos que D é consistente com W_1 ($[W_1] \cap [D] \neq \emptyset$). Como já aplicamos um default anteriormente, precisamos verificar se a justificativa deste primeiro default não é inconsistente com o conseqüente do default que queremos aplicar, ou seja, temos que verificar se $\{W_1\} \cup \{D\} \cup \{C \wedge \neg D\}$ é consistente (ou seja, $[W_1] \cap [D] \cap [C \wedge \neg D] \neq \emptyset^{\dagger}$). É óbvio que este segundo default *não pode ser aplicado.*

Note que comparando a condição de estabilidade que foi violada na lógica de Reiter com a condição †, não satisfeita pelo default $(B{:}D/D)$ na lógica de Lukaszewicz, surge a questão : o que difere, no escopo dos sistemas de esferas, a lógica default clássica da justificada ? Por que E_1 não é uma extensão clássica mas é uma *m*-extensão ?

A resposta está no fato de que tanto na lógica de Reiter como na de Lukaszewicz, o sistema de esferas é construído a partir de uma seqüência maximal de defaults que *satisfazem a condição de aplicabilidade de um default* (no caso de Reiter, veja definição 4.2.1). Como essas lógicas diferem na condição de aplicabilidade, a seqüência maximal de defaults que satisfaz a condição de aplicabilidade, eventualmente, será diferente em cada uma das lógicas. É o caso do default $(B{:}D/D)$, que *não satisfaz a condição de aplicabilidade na lógica default justificada*, e portanto não pode ser utilizado na construção do sistema de esferas (ver definição 4.3.1 abaixo). Isto acarretará que, na lógica default justificada, a seqüência de defaults $\langle A{:}C \wedge \neg D/C \rangle$ *será maximal* (neste caso, com relação a $\leq_L$ - ver definição no apêndice C). ■

Portanto, na lógica default justificada, devemos definir a construção de um sistema de esferas de modo que este reflita a condição de aplicabilidade de um default desta lógica. Formalmente :

Definição 4.3.1

Dada uma classe de modelos [K] e um default d = A : B / C, dizemos que **d** ***é L-aplicável a*** **[K]** se, e somente se: (a) [K] $\subseteq$ [A] ; (b) [K] $\cap$ [B $\wedge$ C] $\neq \emptyset$ ***(teste de consistência de*** **K** ***com relação a*** **(B $\wedge$ C))**.■

Definição 4.3.2

Seja (W_0,Δ) uma teoria default e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, d_2,...>$ uma seqüência (possivelmente infinita) de defaults em Δ tal que $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma$. O sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é o conjunto $\{M_L, [W_0], ... ,[W_n], ... \}$ onde $[W_0]$ é a classe de modelos do conjunto W_0 e, para cada $\varsigma \in I$, $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$ se d_ς ***é L-aplicável a*** $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma]$ e $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma]$ satisfaz o teste de consistência com relação a $(B_\gamma \wedge C_\varsigma)$ para $\gamma < \varsigma$.

O sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ está centrado em $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\varsigma\in I} [W_\varsigma]$. ■

Comparando-se as definições anteriores com as definições 4.2.1 e 4.2.6, vemos que a condição presente na definição 4.3.1 :

$$[K] \cap [B \wedge C] \neq \emptyset \qquad (*)$$

substitui a condição da definição 4.2.1 :

$$[K] \cap [B] \neq \emptyset \qquad (**).$$

Além disso, na construção de um sistema de esferas, no caso da lógica default de Lukaszewicz, uma outra condição deve ser satisfeita : o teste de consistência de $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma]$ com relação a $(B_\gamma \wedge C_\varsigma)$ para $\gamma < \varsigma$. Isto significa que a cada novo default que está sendo examinado para possível aplicação, devemos verificar se o seu conseqüente é consistente com o que se acredita até ali, mais todas as justificativas dos defaults já aplicados e a justificativa do default em questão. No caso da lógica default de Reiter, vemos que essa preocupação se dá somente sobre a justificativa do default em exame (condição (**)).

Definição 4.3.3

Seja **S** o sistema de esferas definido (segundo a definição. 4.3.2) por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ e centrado em $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\varsigma\in I} [W_\varsigma]$. Dizemos que **S** satisfaz :

- a ***condição de consistência***, se $\bigcap_{\gamma\leq\varsigma} [W_\gamma] \neq \emptyset$, para todo $\varsigma \in I$.■

Teorema 4.3.1

Seja **S** o sistema de esferas definido (segundo a definição 4.3.2) por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, cujo centro é $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma]$. Então **S** satisfaz a condição de consistência.■

Definição 4.3.4

Dado o sistema de esferas **S** definido (segundo a definição 4.3.2) por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, cujo centro é $[\mathcal{W}]$, dizemos que **S** ***provê*** $\mathcal{W}$.■

Teorema 4.3.2

Seja (W_0,Δ) uma teoria default e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal com respeito a $\leq_L$ [3] de defaults em Δ que define o sistema de esferas **S** (como na definição 4.3.2). Então **S** provê uma m-extensão E de (W_0,Δ).■

Teorema 4.3.3

Seja (W_0,Δ) uma teoria default, $E = Th(W_0 \cup CONS(GD^F(E,(W_0,\Delta))))$ uma m-extensão de (W_0,Δ) com respeito a F, onde F é o conjunto de justificativas que dão suporte a E e $GD^F(E,(W_0,\Delta))$ é o conjunto de defaults geradores de E, e M a classe de todos os modelos de E. Os defaults em $GD^F(E,(W_0,\Delta))$ podem ser colocados em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que o sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 4.3.2) provê E. ■

Continuação do exemplo 4.3.1

Considerando a teoria default (W_0,Δ) onde :

$$W_0 = \{A,B\} \text{ e } \Delta = \{A:(C \wedge \neg D)/ C \; ; B : D / D\}$$

vamos construir os sistemas de esferas correspondentes a cada uma das m-extensões desta teoria : $E_1 = Th(\{A,B,C\})$ com respeito a $\{C \wedge \neg D\}$, e

$E_2 = Th(\{A,B,D\})$ com respeito a $\{D\}$.

Usando a semânticas de esferas, construa um sistema de esferas usando a seguinte seqüência de defaults $<A : (C \wedge \neg D)/C \; ; B : D / D>$. Neste caso,

---

[3] Assim como ocorreu na seção anterior, o conjunto formado pelas seqüências de defaults que definem sistemas de esferas segundo os critérios estabelecidos (neste caso, pela definição 4.3.1), pode ser parcialmente ordenado pela relação prefixo. Uma vez definida tal ordenação, no teorema devemos considerar apenas as seqüências maximais de defaults. A definição formal desta e das demais relações de ordem parcial relativas as outras lógicas default, que veremos nas próximas seções, se encontram no apêndice C.

$[W_0] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B,C,\neg D\}, \{A,B,\neg C,D\}, \{A,B,\neg C,\neg D\}\}$

- Como $[W_0] \subseteq [A]$ e $[W_0] \cap [C \wedge \neg D] \neq \emptyset$, temos $[W_1] = [W_0] \cap [C] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B,C,\neg D\}\} \neq \emptyset$. Além disso, $[W_1] \cap [C \wedge \neg D] \neq \emptyset$;
- Como $[W_1] \subseteq [B]$ e $[W_1] \cap [D] \neq \emptyset$, temos $[W_2] = [W_1] \cap [D] = \{\{A,B,C,D\}\}$; porém $[W_2] \cap [C \wedge \neg D] = \emptyset$.

Portanto, esta seqüência de defaults não é uma seqüência maximal que satisfaça a definição 4.3.2. Considerando as seqüências $<A : (C \wedge \neg D)/C>$ e $<B : D / D>$, obtemos a classe de modelos das extensões E_1 e E_2, respectivamente :

- Como $[W_0] \subseteq [A]$ e $[W_0] \cap [C \wedge \neg D] \neq \emptyset$, temos $[W_1] = [W_0] \cap [C] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B,C,\neg D\}\}$. Além disso, $[W_1] \cap [C \wedge \neg D] \neq \emptyset$;

Logo, $[W_1]$ é a classe de modelos de $E_1 = Th(\{A, B, C\})$ com respeito a $\{C \wedge \neg D\}$, onde $\{C \wedge \neg D\}$ é o conjunto de justificativas dos defaults que aparecem na seqüência.

- Como $[W_0] \subseteq [B]$ e $[W_0] \cap [D] \neq \emptyset$, temos $[W'_1] = [W_0] \cap [D] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B,\neg C,D\}\}$. Além disso, $[W'_1] \cap [D] \neq \emptyset$;

Logo, $[W'_1]$ é a classe de modelos de $E_2 = Th(\{A,B,D\})$ com respeito a $\{D\}$, onde $\{D\}$ é o conjunto de justificativas dos defaults que aparecem na seqüência.■

IV. Semântica de Esferas para Lógica de Schaub

Na lógica default restrita, as justificativas dos defaults utilizados na construção de uma extensão são tratados de maneira conjunta, dando suporte a extensão como um todo, diferentemente da lógica justificada, onde a consistência entre as justificativas e o conjunto era verificada individualmente para cada default. Formalmente, podemos caracterizar as extensões na lógica default restritiva da seguinte maneira :

Definição 4.4.1

Considere as classes de modelos $[K]$ e $[J]$ tais que $[J] \subseteq [K]$, um conjunto de sentenças J e um default $d = A : B / C$. Dizemos que **d** ***é S-aplicável a*** **[K]** ***com respeito a*** **[J]** se, e somente se: (a) $[K] \subseteq [A]$; (b) $[J] \cap [B \wedge C] \neq \emptyset$ (***teste de consistência de*** **J** ***com relação a*** **(B ∧ C)**).■

Definição 4.4.2

Seja (W_0,Δ) uma teoria default e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, d_2,...>$ uma seqüência (possivelmente infinita) de defaults em Δ tal que $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma$.

O sistema de esferas S definido pela seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é o conjunto $\{M_L, [W_0], ..., [W_n], ... \}$ onde $[W_0]$ é a classe de modelos do conjunto W_0 e, para cada $\varsigma \in I$, $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$ se d_ς ***é S-aplicável a*** $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma]$ ***com respeito a*** $(\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [J_\varsigma])$, onde $J_\varsigma = \{JUST(d_\gamma) / \gamma < \varsigma\}$.

O sistema de esferas S definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ está centrado em $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma]$.■

Teorema 4.4.1

Seja S o sistema de esferas definido (segundo a definição 4.4.2) por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ e centrado em $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma]$. Então S sempre satisfaz a condição : para todo $\varsigma \in I$, $[W_\varsigma] \cap [J_\varsigma] \neq \emptyset$, onde $J_\varsigma = \{JUST(d_\gamma) / \gamma \leq \varsigma\}$.■

Definição 4.4.3

Dado o sistema de esferas S definido (segundo a definição 4.4.2) por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ e centrado em $[\mathcal{W}]$, dizemos que S ***provê*** $(\mathcal{W},\mathcal{W} \cup \mathcal{J})$, onde $\mathcal{J} = \{JUST(d) / d$ faz parte da seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}\}$. ■

Teorema 4.4.2

Seja (W_0,Δ) uma teoria default e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal com respeito a $\leq_S$ de defaults em Δ que define o sistema de esferas S (como na definição 4.4.2). Então S provê uma extensão restrita (E,Θ) de (W_0,Δ). ■

Teorema 4.4.3

Seja (W_0,Δ) uma teoria default, (E,Θ) uma extensão restrita de (W_0,Δ), sendo $GD^{(E,\Theta)}{}_\Delta$ o conjunto de defaults geradores, e $(\mathcal{M},\mathcal{N})$ o par formado pela classe de todos modelos de E e Θ, respectivamente. Os defaults em $GD^{(E,\Theta)}{}_\Delta$ podem ser colocados em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que o sistema de esferas S definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 4.4.2) provê (E,Θ).■

Exemplo 4.4.1 (Schaub [62])

Considere a teoria default (W_0,Δ), onde $W_0 = \emptyset$ e $\Delta = \{ : B / A \ ; \ :\neg B / A\}$, que possui duas extensões restritas : $(E_1,\Theta_1) = (Th(\{A\}),Th(\{A,B\}))$ e

$(E_2,\Theta_2) = ((Th(\{A\}),Th(\{A,\neg B\}))$.

Inicialmente, considere a seguinte seqüência de defaults $<:B / A ; :\neg B / A>$. Não é possível construir um sistema de esferas como na definição 4.4.2. Observe que :

$$J_1 = \emptyset, J_2 = \{B\}, J_3 = \{B,\neg B\},$$

$$M_L = \{\{A,B\} , \{A,\neg B\} , \{\neg A,B\} , \{\neg A,\neg B\}\} \text{ e } [W_0] = M_L.$$

Logo,

- como $[W_0] \cap [J_1] \cap [B \wedge A] = \{\{A,B\}\} \neq \emptyset$, teríamos $[W_1] = [W_0] \cap [A] = \{\{A,B\}, \{A,\neg B\}\}$;
- mas $[W_1] \cap [J_2] \cap [\neg B \wedge A] = \emptyset$, e portanto, $<:B / A \ ; \ :\neg B / A>$ não é uma seqüência maximal que satisfaz as condições que queremos. Nem a seqüência $<:\neg B/A; :B/A>$ geraria um sistema de esferas que satisfizesse as condições da definição 4.4.2.

Considerando as seqüências compostas por um único default, $<:B / A >$ e $<:\neg B / A>$, teremos, respectivamente :

- $J_1 = \emptyset$, $J_2 = \{B\}$, $M_L = \{\{A,B\} , \{A,\neg B\} , \{\neg A,B\} , \{\neg A,\neg B\}\}$ e $[W_0] = M_L$.

  Como $[W_0] \cap [J_1] \cap [B \wedge A] = \{\{A,B\}\} \neq \emptyset$, temos $[W_1] = [W_0] \cap [A] = \{\{A,B\}, \{A,\neg B\}\}$ (note que $[W_1] \cap [J_2] = \{\{A,B\}\} \neq \emptyset$).

  Portanto, temos $([W_1],[W_1] \cap [J_2]) = (\{\{A,B\}, \{A,\neg B\}\},\{\{A,B\}\})$, que é a classe de modelos da extensão restrita (E_1,Θ_1) (figura 4.4.1);
- $J_1 = \emptyset$, $J_2 = \{\neg B\}$, $M_L = \{\{A,B\} , \{A,\neg B\} , \{\neg A,B\} , \{\neg A,\neg B\}\}$ e $[W'_0] = M_L$.

  Como $[W'_0] \cap [J_1] \cap [\neg B \wedge A] = \{\{A,\neg B\}\} \neq \emptyset$, temos $[W'_1] = [W'_0] \cap [A] = \{\{A,B\} , \{A,\neg B\}\}$ (note que $[W'_1] \cap [J_2] = \{\{A,\neg B\}\} \neq \emptyset$).

  Logo, temos $([W'_1],[W'_1] \cap [J_2]) = (\{\{A,B\}, \{A,\neg B\}\},\{\{A,\neg B\}\})$, que é a classe de modelos da extensão restrita (E_2,Θ_2) (figura 4.4.1).

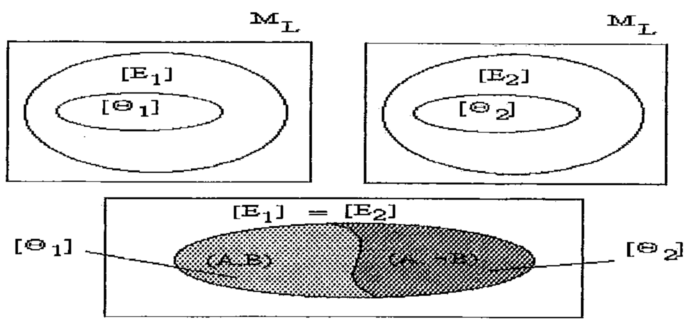


Fig. 4.4.1 : Extensões restritas (E_1,Θ_1) e (E_2,Θ_2).

V. Semântica de Esferas para Lógica de Brewka

A lógica default cumulativa tem características semelhantes a lógica default restrita. A diferença principal está no fato de que, enquanto nesta lógica as justificativas dos defaults utilizados na construção de uma extensão são tratados de maneira conjunta, dando suporte a extensão como um todo, na lógica de Brewka, a cada sentença era associado o conjunto de justificativas que lhe dava suporte.

A lógica default cumulativa foi definida com o objetivo de dar a lógica default clássica as propriedades da cumulatividade e da conservação de hipóteses. Para isto, foi necessário criar uma estrutura de representação mais complexa do que a utilizada na lógica default clássica : aqui utilizam-se *assertivas* ao invés de sentenças. Elas nos permitem guardar as justificativas e os conseqüentes dos defaults usados na derivação de crenças. Além disso, a condição de aplicabilidade de um default requer que suas justificativas e seu conseqüente sejam consistentes com o que é acreditado e também com as fórmulas que dão suporte a tais crenças.

É interessante observar que esta maior complexidade de representação que a lógica default cumulativa apresenta com relação a lógica default clássica não aparece quando analisamos aquela lógica do ponto de vista do modelo de esferas. Vejamos o seguinte exemplo :

Exemplo 4.5.1

Considere a teoria default assertiva (W_0,Δ), onde :

$$W_0 = \{<A \vee B: \{\ \}>\} \text{ e } \Delta = \{:C \wedge \neg A/C \ ; \ :D \wedge \neg B/D\}.$$

Esta teoria possui duas CDL-extensões :

$E_1 = Th_S(W_0 \cup \{<C : \{C \wedge \neg A\}>\})$ e $E_2 = Th_S(W_0 \cup \{<D : \{D \wedge \neg B\}>\})$.

Vamos analisar a construção destas extensões através do sistema de esferas. Considere inicialmente o sistema de esferas **S** composto por $\{M_L,[Form(W_0)]\}$, onde :

$[Form(W_0)] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B,\neg C,D\}, \{A,B,C,\neg D\}, \{A,B,\neg C,\neg D\},$
$\{A,\neg B,C,D\}, \{A,\neg B,\neg C,D\}, \{A,\neg B,C,\neg D\}, \{A,\neg B,\neg C,\neg D\},$
$\{\neg A,B,C,D\}, \{\neg A,B,\neg C,D\}, \{\neg A,B,C,\neg D\}, \{\neg A,B,\neg C,\neg D\}\}$

Considerando o default $(:C \wedge \neg A/C)$, observe que :

$[Form(W_0)] \cap [C \wedge \neg A] = \{\{\neg A,B,C,D\}, \{\neg A,B,C,\neg D\}\} \neq \emptyset$, ou seja, a justificativa é consistente com o que acreditamos. Portanto, podemos aplicar este default, obtendo :

$[Form(W_1)] = [Form(W_0)] \cap [C] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B,C,\neg D\}, \{A,\neg B,C,D\},$
$\{A,\neg B,C,\neg D\}, \{\neg A,B,C,D\}, \{\neg A,B,C,\neg D\}\}$.

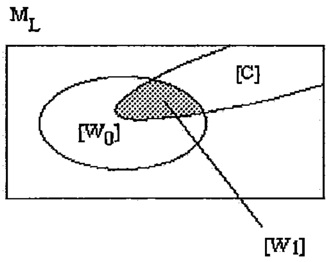


Fig. 4.5.1 : Sistema de esferas S' resultante da aplicação do default $(:C \wedge \neg A/C)$.

Agora temos verificar se a condição de aplicabilidade para o default $(:D \wedge \neg B/D)$ é satisfeita. Note que como já foi aplicado um default anteriormente, devemos levar em consideração também as suas justificativas. Isto significa que não basta verificar se $D \wedge \neg B$ é consistente com $Form(W_0 \cup \{<C : \{C \wedge \neg A\}>\}) = \{A \vee B,C\}$, mas se esta sentença é consistente com $Form(W_0 \cup \{<C : \{C \wedge \neg A\}>\}) \cup Supp(W_0 \cup \{<C : \{C \wedge \neg A\}>\}) = \{A \vee B,C\} \cup \{C \wedge \neg A\}$, ou seja, se ela é consistente com o que se acredita mais o conseqüente e a justificativa do default aplicado.

Do ponto de vista de um sistema de esferas, isso representa que teremos que considerar o sistema de esferas **S"** formado por $\{M_L,[Form(W_0)],[Form(W_1)], [W'_1]\}$, onde $[W'_1]$ corresponde aos mundos que satisfazem Form($W_0 \cup \{<C : \{C \wedge \neg A\}>\}$) $\cup$ Supp($W_0 \cup \{<C : \{C \wedge \neg A\}>\}$). Observe que $[\text{Form}(W_1)] \supseteq [W'_1]$.

Assim, o default ($:D \wedge \neg B/D$) não pode ser aplicado uma vez que : $[W'_1] \cap [D \wedge \neg B] = \emptyset$.

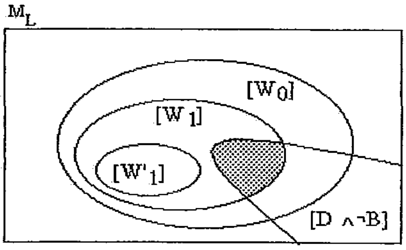


Fig. 4.5.2 : $[W'_1] \cap [D \wedge \neg B] = \emptyset$, ou seja, a condição de aplicabilidade não é satisfeita

Observe que se estivéssemos utilizando o critério de aplicabilidade da lógica default clássica, poderíamos ter aplicado este segundo default. Logo, a classe de modelos das fórmulas assertivas da extensão E_1 (Form(E_1)) é igual a [Form(W_1)].

Os modelos da extensão E_2 podem ser obtidos de forma semelhante, bastando considerar inicialmente o default ($D \wedge \neg B/D$).■

Para caracterizar semanticamente as CDL-extensões utilizando o ambiente semântico de esferas, devemos definir :

Definição 4.5.1

Seja K um conjunto de assertivas da forma $<\alpha:\beta>$, Form(K) = $\{\alpha \,/\, <\alpha:\beta> \in K\}$ e Supp(K) = $\{\beta \,/\, <\alpha:\beta> \in K\}$, respectivamente, o conjunto de fórmulas e de suporte de K, e d = A : B / C um default. Dizemos que **d** ***é B-aplicável a*** **[Form(K)]** ***com respeito a*** **[Supp(K)]** se, e somente se: (a) [Form(K)] $\subseteq$ [A] ; (b) [Form(K)] $\cap$ [Supp(K)] $\cap$ $[B \wedge C] \neq \emptyset$ (***teste de consistência de*** **Form(K)** ***e*** **Supp(K)** ***com relação a*** **($B \wedge C$)**).■

Definição 4.5.2

Seja (W_0,Δ) uma teoria default assertiva, Form(W_0) = $\{\alpha \,/\, <\alpha:\beta> \in W_0\}$, Supp($W_0$) = $\{\beta \,/\, <\alpha:\beta> \in W_0\}$ e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, \ldots, d_n, \ldots>$ uma seqüência (possivelmente infinita) de defaults em Δ tal que $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma$.

O sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é o conjunto formado por $\{M_L, [Form(W_0)], \ldots, [Form(W_n)], \ldots\}$ onde $[Form(W_0)]$ é a classe de modelos do conjunto $Form(W_0)$ e, para cada $\varsigma \in I$, $[Form(W_\varsigma)] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [Form(W_\gamma)] \cap [C_\varsigma]$ se d_ς é B-aplicável a $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [Form(W_\gamma)]$ com respeito a $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [Supp(W_\gamma)]$, onde $Supp(W_\gamma) = Supp(W_0) \cup \{JUST(d_\xi) / \xi \leq \gamma\} \cup \{CONS(d_\xi) / \xi \leq \gamma\}$.

O sistema de esferas definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é centrado em $[Form(\mathcal{W})] = \bigcap_{\varsigma \in I}[Form(W_\varsigma)]$.■

Teorema 4.5.1

Seja S o sistema de esferas definido (segundo a definição 4.5.2) por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, cujo centro é $[Form(\mathcal{W})] = \bigcap_{\varsigma \in I} [Form(W_\varsigma)]$. Então **S** sempre satisfaz a condição: para todo $\varsigma \in I$, $([Form(W_\varsigma)]) \cap ([Supp(W_\varsigma)]) \neq \emptyset$.■

Definição 4.5.3

Dado o sistema de esferas S definido (segundo a definição 4.5.2) por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ e centrado em $[Form(\mathcal{W})]$, dizemos que **S *provê* (Form($\mathcal{W}$), Form($\mathcal{W}$) $\cup$ Supp($\mathcal{W}$))**, onde $Supp(\mathcal{W}) = Supp(W_0) \cup \{JUST(d) / d$ faz parte da seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}\} \cup \{CONS(d) / d$ faz parte da seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}\}$. ■

Teorema 4.5.2

Seja (W_0,Δ) uma teoria default assertiva e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal de defaults com respeito a $\leq_B$ em Δ que define o sistema de esferas S (como na definição 4.5.2). Então **S** provê (Form(E), Form(E) $\cup$ Supp(E)), onde E é uma CDL-extensão de (W_0,Δ).■

Teorema 4.5.3

Seja (W_0,Δ) uma teoria default assertiva, E uma CDL-extensão de (W_0,Δ), com GD^E_Δ sendo o conjunto de defaults geradores, e *M* e *N* as classes de todos os modelos, respectivamente, das fórmulas e dos suportes de E.. Os defaults em GD^E_Δ podem ser colocados em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que o sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 4.5.2) provê (Form(E), Form(E) $\cup$ Supp(E)).■

Continuação do exemplo 4.5.1

Considere a teoria default assertiva (W_0,Δ), vista acima. Note que com a seguinte seqüência de defaults $<: C \wedge \neg A / C \;;\; : D \wedge \neg B / D>$ não é possível construir um sistema de esferas como na definição 4.5.2 pois :

$$\text{Form}(W_0) = \{A \vee B\} \qquad \text{Supp}(W_0) = \emptyset$$

- $[\text{Form}(W_1)] = [\text{Form}(W_0)] \cap [C]$ uma vez que $[\text{Form}(W_0)] \cap [\text{Supp}(W_0)] \cap [C \wedge \neg A] \neq \emptyset$ (o default $C \wedge \neg A/C$ é B-aplicável a $[\text{Form}(W_0)]$ com respeito a $[\text{Supp}(W_0)]$) ;

mas :

- o default $: D \wedge \neg B/D$ não é B-aplicável a $[\text{Form}(W_1)]$ com respeito a $[\text{Supp}(W_1)]$ pois $[\text{Form}(W_1)] \cap [\text{Supp}(W_1)] \cap [D \wedge \neg B] = \emptyset$, onde $\text{Supp}(W_1) = \text{Supp}(W_0) \cup \{C \wedge \neg A\}$.

Portanto, a seqüência de defaults $<: C \wedge \neg A / C \;;\; : D \wedge \neg B / D>$ não é uma seqüência maximal que gera o sistema de esferas desejado.

Para obter os modelos das CDL-extensões E_1 e E_2, temos que considerar cada default individualmente como uma seqüência. Assim, a classe de modelos de E_1 e E_2 serão compostas, respectivamente, pelos pares $([\{A \vee B , C\}],[\{A \vee B, C \wedge \neg A\}])$ e $([\{A \vee B , D\}],[\{A \vee B, D \wedge \neg B\}])$.■

Utilizando a definição direta da lógica cumulativa com filtro estabelecida por Zaverucha [66], podemos caracterizar as CDL_F-extensões através do ambiente semântico de esferas. Isto é feito de maneira simples uma vez que a caracterização de Zaverucha [66] foi obtida através da modificação do critério de aplicabilidade de um default na lógica cumulativa de Brewka [14]. Portanto, basta que tal mudança esteja refletida nas condições de construção do sistema de esferas para que as CDL_F-extensão sejam semanticamente caracterizadas. Formalmente :

Definição 4.5.4

Seja K um conjunto de assertivas da forma $<\alpha:\beta>$, $\text{Form}(K) = \{\alpha \;/\; <\alpha:\beta> \in K\}$ e $\text{Supp}(K) = \{\beta \;/\; <\alpha:\beta> \in K\}$, respectivamente, o conjunto de fórmulas e de suporte de K, e $d = A : B / C$ um default. Dizemos que **d** ***é B_f-aplicável a*** **[Form(K)]** ***com respeito a*** **[Supp(K)]** se, e somente se:

(a) $[\text{Form}(K)] \subseteq [A]$, e

(b) $[Form(K)] \cap [Supp(K)] \cap [B \wedge C] \neq \emptyset$

ou

(c) $[Form(K)] \cap [A] \neq \emptyset$, e

(d) $[Form(K)] \cap [Supp(K)] \neq \emptyset$, e

(e) $[Form(K)] \cap [B \wedge C] \neq \emptyset$, e

(f) $[Form(K)] \cap [Supp(K)] \cap [C] = \emptyset$. ■

Definição 4.5.5

Seja (W_0,Δ) uma teoria default assertiva, $Form(W_0) = \{\alpha \,/\, <\alpha{:}\beta> \in W_0\}$, $Supp(W_0) = \{\beta \,/\, <\alpha{:}\beta> \in W_0\}$ e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, \ldots, d_n, \ldots>$ uma seqüência (possivelmente infinita) de defaults em Δ tal que $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma$.

O sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é o conjunto formado por $\{M_L,[Form(W_0)], \ldots ,[Form(W_n)],\ldots\}$ onde $[Form(W_0)]$ é a classe de modelos do conjunto $Form(W_0)$ e, para cada $\varsigma \in I$, $[Form(W_\varsigma)] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [Form(W_\gamma)] \cap [C_\varsigma]$ se d_ς é B_f-aplicável a $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [Form(W_\gamma)]$ com respeito a $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [Supp(W_\gamma)]$, onde $Supp(W_\gamma) = Supp(W_0) \cup \{JUST(d_\xi) / \xi \leq \gamma\} \cup \{CONS(d_\xi) / \xi \leq \gamma\}$.

O sistema de esferas definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é centrado em $[Form(\mathcal{W})] = \bigcap_{\varsigma \in I}[Form(W_\varsigma)]$.■

Definição 4.5.6

Dado o sistema de esferas **S** definido (segundo a definição 4.5.5) por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, cujo centro é $[Form(\mathcal{W})]$, dizemos que **S** ***provê*** **(Form($\mathcal{W}$), Form($\mathcal{W}$) $\cup$ Supp($\mathcal{W}$))**,onde $Supp(\mathcal{W}) = Supp(W_0) \cup \{JUST(d) / d$ faz parte da seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}\} \cup \{CONS(d) / d$ faz parte da seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}\}$ quando $[Form(\mathcal{W})] \cap [Supp(\mathcal{W})] \neq \emptyset$. ■

Teorema 4.5.4

Seja (W_0,Δ) uma teoria default assertiva e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal de defaults com respeito a $\leq_{Bf}$ em Δ que define o sistema de esferas **S** (como na definição 4.5.5) centrado em $[Form(\mathcal{W})]$. Se **S** satisfaz a condição $[Form(\mathcal{W})] \cap [Supp(\mathcal{W})] \neq \emptyset$, então **S** provê $(Form(E), Form(E) \cup Supp(E))$, onde E é uma CDL_F-extensão de (W_0,Δ).■

Teorema 4.5.5

Seja (W_0,Δ) uma teoria default assertiva, E uma CDL_F-extensão de (W_0,Δ), com $GD^E{}_{\Delta f}$ sendo o conjunto de defaults geradores, e M e N as classes de todos os modelos, respectivamente, das fórmulas e dos suportes de E. Os defaults em $GD^E{}_{\Delta f}$ podem ser colocados em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que o sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 4.5.5) provê (Form(E), Form(E) $\cup$ Supp(E)).■

Exemplo 4.5.2 (Brewka [14])

Considere a teoria default assertiva (W_0,Δ) formada por :

$W_0 = \{<A:\{\ \}>\}$ e $\Delta = \{A:B/B\ ;\ A:C/C\ ;\ B:D \wedge \neg C/D\ ;\ C: \neg D/ \neg D\}$.

Esta teoria possui duas CDL-extensões :

$E_1 = Th_S(\{<A:\{\ \}>, <B:\{B\}>, <C:\{C\}>, <\neg D:\{C,\neg D\}>\})$ e

$E_2 = Th_S(\{<A:\{\ \}>, <B:\{B\}>, <D:\{B, \neg C \wedge D\}>\})$

mas somente E_1 é uma CDL_F-extensão. Vamos examinar esta teoria através do sistema de esferas.

Note que a extensão E_2 é gerada pelas seqüência de defaults $<A:B/B;\ B:D \wedge \neg C/D>$. Mas esta seqüência não é maximal. Considere o sistema de esferas **S** construído a partir da seqüência de defaults $<A:B/B;\ B:D \wedge \neg C/D;\ A:C/C>$, da seguinte maneira :

- $[Form(W_0)] = [A]$
- Considere o default A:B/B, note que $[Form(W_0)] \subseteq [A]$ e $[Form(W_0)] \cap [Supp(W_0)] \cap [B] = [A] \cap [B] \neq \emptyset$. Assim, a primeira parte da disjunção na definição 4.5.4 é satisfeita e podemos construir $[Form(W_1)] = [Form(W_0)] \cap [B]$ e $[Supp(W_1)] = [B]$.
- Considerando o default $B:D \wedge \neg C/D$, note que $[Form(W_1)] \subseteq [B]$ e $[Form(W_1)] \cap [Supp(W_1)] \cap [D \wedge \neg C] = [A] \cap [B] \cap [D \wedge \neg C] \neq \emptyset$. Novamente, a primeira parte da disjunção na definição 4.5.4 é satisfeita e podemos construir $[Form(W_2)] = [Form(W_1)] \cap [D]$ e $[Supp(W_2)] = [\{B, D \wedge \neg C\}]$.

- Considerando o default A:C/C, note que [Form(W_2)] $\subseteq$ [A] mas [Form(W_2)] $\cap$ [Supp(W_2)] $\cap$ [C] = $\emptyset$ e, portanto, a primeira parte da disjunção na definição 4.5.4 não é satisfeita. Mas a segunda parte da disjunção é satisfeita : [Form(W_2)] $\cap$ [A] $\neq$ $\emptyset$, [Form(W_2)] $\cap$ [Supp(W_2)] $\neq$ $\emptyset$, [Form(W_2)] $\cap$ [C] $\neq$ $\emptyset$ e [Form(W_2)] $\cap$ [Supp(W_2)] $\cap$ [C] = $\emptyset$. Logo, podemos construir [Form(W_3)] = [Form(W_2)] $\cap$ [C] e [Supp(W_3)] = [{B, D $\wedge$ $\neg$C,C}].

Assim, a seqüência de defaults <A:B/B; B:D $\wedge$ $\neg$C/D> não é maximal. Além disso, o sistema de esferas **S** gerado pela seqüência de defaults <A:B/B; B:D $\wedge$ $\neg$C/D; A:C/C> não satisfaz as condições do teorema 4.5.4 uma vez que [Form(W_3)] $\cap$ [Supp(W_3)] = $\emptyset$, e portanto, o centro de **S** ([Form(W_3)]) não corresponde a nenhuma classe de modelos de uma CDL_F-extensão.

A extensão E_1 é gerada pelas seqüência de defaults <A:B/B; A:C/C; C:$\neg$D/$\neg$D>. Considere o sistema de esferas **S'** construído a partir desta seqüência :

- [Form(W_0)] = [A]
- Considere o default A:B/B, note que [Form(W_0)] $\subseteq$ [A] e [Form(W_0)] $\cap$ [Supp(W_0)] $\cap$ [B] = [A] $\cap$ [B] $\neq$ $\emptyset$. Assim, a primeira parte da disjunção na definição 4.5.4 é satisfeita e podemos construir [Form(W_1)] = [Form(W_0)] $\cap$ [B] e [Supp(W_1)] = [B].
- Considerando o default A:C/C, note que [Form(W_1)] $\subseteq$ [A] e [Form(W_1)] $\cap$ [Supp(W_1)] $\cap$ [C] = [A] $\cap$ [B] $\cap$ [C] $\neq$ $\emptyset$. Novamente, a primeira parte da disjunção na definição 4.5.4 é satisfeita e podemos construir [Form(W_2)] = [Form(W_1)] $\cap$ [C] e [Supp(W_2)] = [{B, C}].
- Considerando o default C:$\neg$D/$\neg$D, note que [Form(W_2)] $\subseteq$ [C] e [Form(W_2)] $\cap$ [Supp(W_2)] $\cap$ [C] $\neq$ $\emptyset$ e, portanto, a primeira parte da disjunção na definição 4.5.4 é satisfeita. Logo, podemos construir [Form(W_3)] = [Form(W_2)] $\cap$ [$\neg$D] e [Supp(W_3)] = [{B, C, $\neg$D}].

A seqüência de defaults <A:B/B; A:C/C; C:$\neg$D/$\neg$D> é maximal (note que no caso da única seqüência maior que esta, <A:B/B; A:C/C; C:$\neg$D/$\neg$D; B:D $\wedge$ $\neg$C/D>, o default B:D $\wedge$ $\neg$C/D não seria aplicado por não satisfazer nenhuma parte da disjunção na definição 4.5.2). Note que o sistema S' satisfaz as condições do teorema 4.5.4, então ([Form(W_3)], [Form(W_3)] $\cap$ [Supp(W_3)]) corresponde a classe de modelos da CDL_F-extensão E_1. ■

VI. Semântica de Esferas para Lógica de Zaverucha

Como nas outras lógicas estudadas até aqui, na lógica default cumulativa priorizada de Zaverucha [67] também podemos caracterizar a classe de modelos de suas PCDL-extensões através do sistema de esferas, uma vez que, também neste caso, o que ocorre é uma mudança nos critérios de aplicação dos defaults. Formalmente :

Definição 4.6.1

Seja (W_0,Δ) uma teoria default afirmativa e K um conjunto de afirmações da forma $<\alpha:\beta:\gamma>$ tal que $W_0 \subseteq$ K. Considere Form(K) = $\{\alpha \,/\, <\alpha:\beta:\gamma> \in K\}$, Cons(K) = $\{\beta \,/\, <\alpha:\beta:\gamma> \in K\}$ e Just(K) = $\{\gamma \,/\, <\alpha:\beta:\gamma> \in K\}$, respectivamente, o conjunto de fórmulas, de conseqüentes e de justificativas de K. Seja Supp(K) = Cons(K) $\cup$ Just(K) o conjunto de suporte de K e d = A : C | B / C um default. Dizemos que **d** ***é Z-aplicável a*** **[Form(K)]** ***com respeito a*** **[Supp(K)]** se, e somente se :

(a) [Form(K)] $\subseteq$ [A] ; e

(b) [Form(K)] $\cap$ [Supp(K)] $\cap$ [B] $\cap$ [C] $\neq \emptyset$

ou

(c) [Form(K)] $\cap$ [A] $\neq \emptyset$; e

(d) [Form(K)] $\cap$ [Supp(K)] $\neq \emptyset$, e

(e) [Form(K)] $\cap$ [B] $\neq \emptyset$, e

(f) [Form(W_0)] $\cap$ [C] $\neq \emptyset$

(g) [Form(W_0)] $\cap$ [Just(K)] $\cap$ [C] = $\emptyset$). ■

Definição 4.6.2

Seja (W_0,Δ) uma teoria default afirmativa, Form(W_0), Cons(W_0) e Just(W_0), respectivamente, o conjunto de fórmulas, de conseqüentes e de justificativas de W_0 e Supp(W_0) = Cons(W_0) $\cup$ Just(W_0). Seja $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, \ldots, d_n, \ldots>$ uma seqüência (possivelmente infinita) de defaults em Δ tal que $d_\varsigma = A_\varsigma : C_\varsigma \mid B_\varsigma / C_\varsigma$.

O sistema de esferas S definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é o conjunto formado por $\{M_L$,[Form(W_0)], ... ,[Form(W_n)],...$\}$ onde [Form(W_0)] é a classe de modelos do conjunto Form(W_0) e, para cada $\varsigma \in I$, $[Form(W_\varsigma)] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [Form(W_\gamma)] \cap [C_\varsigma]$ se d_ς é Z-aplicável a $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [Form(W_\gamma)]$ com respeito a $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [Supp(W_\gamma)]$, onde :

$$Cons(W\varsigma) = (\bigcup_{\gamma<\varsigma} Cons(W_\gamma)) \cup \{C_\varsigma\} ;$$

$$Just(W\varsigma) = (\bigcup_{\gamma<\varsigma} Just(W_\gamma)) \cup \{B_\varsigma\} \text{ e}$$

$$Supp(W\varsigma) = \bigcup_{\gamma<\varsigma} (Cons(W_\gamma) \cup Just(W_\gamma)).$$

O sistema de esferas definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é centrado em $[Form(\mathscr{W})] = \bigcap_{\varsigma \in I}[Form(W_\varsigma)]$.■

Definição 4.6.3

Dado o sistema de esferas **S** definido (segundo a definição 4.6.2) por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, cujo centro é $[Form(\mathscr{W})]$, dizemos que **S** ***provê*** **(Form($\mathscr{W}$), Cons($\mathscr{W}$), Just($\mathscr{W}$))**, quando $[Form(\mathscr{W})] \cap [Supp(\mathscr{W})] \neq \varnothing$, onde $Supp(\mathscr{W}) = Cons(\mathscr{W}) \cup Just(\mathscr{W})$. ■

Teorema 4.6.1

Seja (W_0,Δ) uma teoria default afirmativa e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal com respeito a $\leq_Z$ de defaults em Δ que define o sistema de esferas **S** (como na definição 4.6.2). Se **S** satisfaz a condição $[Form(E)] \cap [Supp(E)] \neq \varnothing$, então **S** provê (Form(E), Cons(E), Just(E)), onde E é uma PCDL-extensão semi-normal E de (W_0,Δ).

Teorema 4.6.2

Seja (W_0,Δ) uma teoria default afirmativa, E uma PCDL-extensão semi-normal de (W_0,Δ), com $GD^E_{\Delta Z}$ sendo o conjunto de defaults geradores, e (M,N,O) a tripla formada pelas classes de todos os modelos de Form(E), Cons(E) e Just(E). Os defaults em $GD^E_{\Delta Z}$ podem ser colocados em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que o sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 4.6.2) provê E.■

Exemplo 4.6.1

Considere a teoria default afirmativa (W,Δ), onde :

$$W_0 = \{<B:\{\ \}:\{\ \}>, <B \rightarrow A:\{\ \}:\{\ \}>, <S \rightarrow F:\{\ \}:\{\ \}>, <S \rightarrow AB_1:\{\ \}:\{\ \}>\} \text{ e}$$

$$\Delta = \{A : \neg F \mid \neg AB_1 / \neg F \quad ; \quad B : S \mid \neg AB_2 / S\}.$$

Esta teoria afirmativa possui uma única PCDL-extensão : E = Th_{Sa}(W ∪ {<S : {S} : {¬ AB_2}>}). Vamos construir o sistema de esferas S = {M_L,[Form(W_0)], [Form(W_1)]} correspondente a esta extensão. Considere a seqüência de defaults formada pelo default gerador da PCDL-extensão < B : S | ¬ AB_2 / S >. Note que :

- [Form(W_1)] = [Form(W_0)] ∩ [S] ≠ ∅, uma vez que [Form(W_0)] ⊆ [B] e [Form(W_0)] ∩ [Supp(W_0)] ∩ [S] ∩ [¬ AB_2] ≠ ∅ (o que satisfaz a primeira parte da disjunção na definição 4.6.1).

Como [Form(W_1)] ∩ [Supp(W_1)] ≠ ∅, então ([Form(W_1)], [Cons(W_1)], [Just(W_1)]) é a classe de modelos de E.

Observe que a seqüência de defaults <B : S | ¬ AB_2 / S ; A : ¬F | ¬ AB_1 / ¬F> não gera um sistema de esferas que satisfaça a definição 4.6.1 uma vez que, considerando [Form(W_1)] = [Form(W_0)] ∩ [S] (veja acima), nenhuma das componentes da disjunção na definição 4.6.1 é satisfeita pois [Form(W_1)] ∩ [Supp(W_1)] ∩ [¬F] ∩ [¬AB_1] = ∅ (invalida a primeira parte da disjunção) e [Form(W_1)] ∩ [¬ AB_1] = ∅ (invalida a segunda parte da disjunção).

Considerando a seqüência de defaults <A : ¬F | ¬ AB_1 / ¬F ; B :S | ¬ AB_2 / S> podemos obter um sistema de esferas S' = {M_L,[Form(W_0)],[Form(W_1)], [Form(W_2)]} que satisfaça a definição 4.6.1 :

- [Form(W_1)] = [Form(W_0)] ∩ [¬F] ≠ ∅, uma vez que [Form(W_0)] ⊆ [A] e [Form(W_0)] ∩ [Supp(W_0)] ∩ [¬F] ∩ [¬ AB_1] ≠ ∅, o que satisfaz a primeira parte da disjunção na definição 4.6.1 ;
- [Form(W_2)] = [Form(W_1)] ∩ [S] ≠ ∅, uma vez que [Form(W_1)] ⊆ [B], [Form(W_1)] ∩ [Supp(W_1)] ≠ ∅, [Form(W_1)] ∩ [¬AB_2] ≠ ∅, [Form(W_0)] ∩ [S] ≠ ∅, [Form(W_0)] ∩ [Just(W_1)] ∩ [S] = ∅, o que satisfaz a segunda parte da disjunção na definição 4.6.1. Observe que [Form(W_1)] ∩ [Supp(W_1)] ∩ [S] ∩ [¬ AB_2] = ∅ invalida a primeira parte da disjunção na mesma definição.

Como [Form(W_2)] ∩ [Supp(W_2)] = ∅, a condição do teorema 4.6.1 não é satisfeita, não existe nenhuma PCDL-extensão da teoria (W_0,Δ) cuja classe de modelos seja obtida através deste sistema de esferas, como era esperado.■

VII. Semântica de Esferas para o Sistema de Poole

No caso mais simples, o sistema de Poole para raciocínio default utiliza dois conjuntos : um conjunto consistente F formado por *fatos* e um conjunto Δ formado por *hipóteses possíveis* que são utilizadas na construção de *cenários* (conjunto consistente F ∪ ***D*** onde ***D*** é um conjunto de instâncias básicas dos elementos de Δ). Uma *extensão* de (F,Δ) é o conjunto de conseqüências lógicas de um cenário maximal de (F,Δ).

Observe que uma extensão (ou cenário) F ∪ $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ pode ser considerado, do ponto de vista do modelo de funções de revisão de Grove, como sendo a expansão do "conjunto de crenças" F por todos os elementos em $\{A_1,A_2,...,A_n\}$ (i.e.,$(...((W^+{A_1})^+{A_2})...)^+{A_n} = (...((W^*{A_1})^*{A_2})...)^*{A_n}$). Conseqüentemente, a classe de todos os modelos de uma extensão (ou cenário) F ∪ $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ e a classe de todos os modelos da expansão do "conjunto de crenças" F por $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ são iguais. De fatos, este caso corresponde ao caso da lógica default supernormal visto na seção 4.2.1.

O caso mais interessante ocorre quando consideramos a introdução de um conjunto de *restrições C*. Como vimos no capítulo 2, este conjunto foi introduzido com o objetivo de bloquear a utilização da contrapositiva de um default sem qualquer outro efeito colateral. Assim, um cenário de (F,Δ,*C*) é um conjunto consistente F ∪ ***D*** onde ***D*** é um conjunto de instâncias básicas de elementos de Δ tal que ***D*** ∪ F ∪ *C* é consistente, e uma *extensão* de (F,Δ,*C*) é o conjunto de conseqüências lógicas de um cenário maximal de (F,Δ, *C*).

Por exemplo, supondo que Δ = {A}, F ∪ {A} e F ∪ {A} ∪ *C* são conjuntos consistentes, ou seja, F ∪ {A} é uma extensão de (F,Δ,*C*). No modelo de esferas de Grove, isso significa que [F ∪ *C*] é a menor esfera que [A] intercepta uma vez que se [F ∪ *C*] ∩ [A] = ∅ e [F] ∩ [A] ≠ ∅, temos que A é inconsistente com as sentenças no conjunto de restrições *C*. Portanto, devemos ter uma revisão do conjunto F ∪ *C* pela sentença {A} (ver figuras 4.7.1 e 4.7.2).

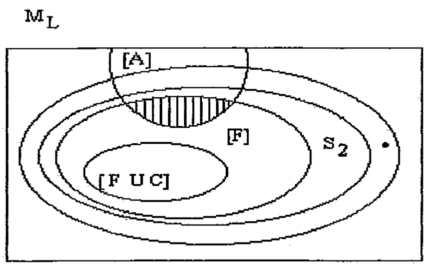


Figura 4.7.1 : O conjunto [F $\cup$ *C*] é revisto pela sentença A

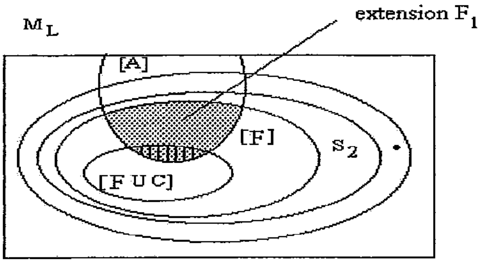


Figura 4.7.2 : O conjunto [F $\cup$ *C*] é expandido pela sentença A

Formalmente :

Definição 4.7.1

Seja [K] e [K'] classes de modelos tais que [K'] $\subseteq$ [K], e h uma sentença. Dizemos que **h** ***é P-aplicável a*** **[K]** ***com respeito a*** **[K']** se, e somente se, [K'] $\cap$ [h] $\neq \emptyset$.■

Definição 4.7.2

Seja (F_0,Δ,*C*) uma tripla, onde F_0 é um conjunto de fatos, Δ é um conjunto de hipóteses possíveis, e *C* é um conjunto de restrições. Seja $<h_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <h_1, \ldots , h_n, \ldots>$ uma seqüência (possivelmente infinita) de hipóteses possíveis em Δ. O sistema de esferas S definido por $<h_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é o conjunto $\{M_L, [F_0], \ldots , [F_n], \ldots\}$, onde $[F_0]$ é a classe de modelos do conjunto F_0 e, para cada $\varsigma \in I$, $[F_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [F_\gamma] \cap [h_\varsigma]$ se h_ς é P-aplicável a $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [F_\gamma]$ com respeito a $(\bigcap_{\gamma<\varsigma} [F_\gamma] \cap [C])$.

O sistema de esferas S definido por $<h_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ está centrado em $[\mathcal{F}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [F_\varsigma]$.■

Definição 4.7.3

Seja $(F_0,\Delta,\mathcal{C})$ uma tripla, onde F_0 é um conjunto de fatos, Δ é um conjunto de hipóteses possíveis, e $\mathcal{C}$ é um conjunto de restrições. Seja **S** o sistema de esferas definido por uma seqüência (possivelmente infinita) $\langle h_\varsigma \rangle_{\varsigma \in I}$ de hipóteses possíveis em Δ (definição 4.7.2), que está centrado em $[\mathcal{F}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [F_\varsigma]$. Dizemos que **S** satisfaz :

- a ***condição de consistência***, se $\bigcap_{\gamma \leq \varsigma} [F_\gamma] \neq \emptyset$, para todo $\varsigma \in I$.■

Teorema 4.7.1

Seja $(F_0,\Delta,\mathcal{C})$ uma tripla, onde F_0 é um conjunto de fatos, Δ é um conjunto de hipóteses possíveis, e $\mathcal{C}$ é um conjunto de restrições. Então, qualquer sistema de esferas **S** construído a partir de $(F_0,\Delta,\mathcal{C})$, segundo a definição 4.7.2, satisfaz a condição de consistência. ■

Definição 4.7.4

Dado o sistema de esferas **S** definido por $\langle h_\varsigma \rangle_{\varsigma \in I}$ (definição 4.7.2) e centrado em $[\mathcal{F}]$, dizemos que **S** ***provê*** $\mathcal{F}$.■

Teorema 4.7.2

Seja $(F_0,\Delta,\mathcal{C})$ uma tripla onde F_0 é o conjunto de fatos, Δ é o conjunto de possíveis hipóteses, e $\mathcal{C}$ é um conjunto de restrições. Seja $\langle h_\varsigma \rangle_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal com respeito a $\leq_P$ de hipóteses possíveis em Δ que define o sistema de esferas **S** (como na definição 4.7.2). Então **S** provê uma extensão E de $(F_0,\Delta,\mathcal{C})$.■

Teorema 4.7.3

Seja $(F_0,\Delta,\mathcal{C})$ uma tripla onde F_0 é o conjunto de fatos, Δ é o conjunto de possíveis hipóteses, e $\mathcal{C}$ é um conjunto de restrições. Seja $E = F_0 \cup \{h_1, \ldots, h_n, \ldots\}$ uma extensão de $(F_0,\Delta,\mathcal{C})$, e $\mathcal{M}$ a classe de todos os modelos de E. O conjunto $\{h_1, \ldots, h_n, \ldots\}$ pode ser colocado numa seqüência (possivelmente infinita) $\langle h_\varsigma \rangle_{\varsigma \in I}$ tal que o sistema de esferas **S** definido por $\langle h_\varsigma \rangle_{\varsigma \in I}$ (como na definição 4.7.2) provê E. ■

Para provar esse teorema (veja apêndice C), utilizamos a caracterização estabelecida por Dix [19], onde o sistema de raciocínio de Poole é mapeado na lógica default de Reiter. Conseqüentemente, para determinar a classe de modelos de todas as extensões de Poole de (F,Δ,C), podemos traduzir (F,Δ,C) na teoria default clássica correspondente (W,Δ) (teorema 2.7.3 - capítulo 2) e determinar a classe de modelos de todas as extensões de (W,Δ).

Exemplo 4.7.1 (Poole [55])

Considere os seguintes conjuntos de fatos, hipóteses possíveis e restrições, respectivamente, que corresponde a tradução do exemplo 4.2.5, no sistema de Poole :

$$F_0 = \{\ \} \ ; \ \Delta = \{A,B,D\} \ ; \text{ e } \ \mathcal{C} = \{B \rightarrow \neg A \, , D \rightarrow \neg B \, , A \rightarrow \neg D\}$$

Neste caso, o sistema de Poole obtém três extensões, onde cada uma delas é obtida pela aplicação de um único default, e cuja classes de modelos são :

$$\mathcal{M}_1 = \{\{A,B,D\} , \{A,B,\neg D\} , \{A,\neg B,D\} , \{A,\neg B,\neg D\}\},$$

$$\mathcal{M}_2 = \{\{A,B,D\}, \{A,B,\neg D\} , \{\neg A,B,D\} , \{\neg A,B,\neg D\}\},$$

$$\mathcal{M}_3 = \{\{A,B,D\} , \{\neg A,B,D\} , \{A,\neg B,D\} , \{\neg A,\neg B,D\}\}.$$

Vamos examinar o que acontece através do sistema de esferas. Considere a seqüência de hipóteses possíveis <A>. Temos que :

$$[F_0 \cup \mathcal{C}] = [\mathcal{C}] = \{\{A,\neg B,\neg D\} , \{\neg A,B,\neg D\} , \{\neg A,\neg B,D\} , \{\neg A,\neg B,\neg D\}\}$$

e o sistema de esferas S formado por :

- $[F_0] = M_L$ e
- $[F_1] = [F_0] \cap [A] = \{\{A,B,D\},\{A,B,\neg D\}, \{A,\neg B,D\} , \{A,\neg B,\neg D\}\} = \mathcal{M}_1$. Observe que tal definição é coerente pois $[F_0 \cup \mathcal{C}] \cap [A] = \{\{A,\neg B,\neg D\}\} \neq \emptyset$.

Como $[F_1 \cup \mathcal{C}] \cap [B] = \emptyset$ e $[F_1 \cup \mathcal{C}] \cap [D] = \emptyset$, <A> é uma seqüência maximal de hipóteses satisfazendo a definição 4.7.2.

Portanto, considerando o sistema de esferas $S = \{[F_0] , [F_1]\}$, todas as condições do definição 4.7.2 são satisfeitas. Podemos utilizar o mesmo raciocínio para mostrar que <B> e <D> são seqüências de hipóteses possíveis que podem gerar, respectivamente, sistemas de esferas S' e S" tais que $[F'_1] = \mathcal{M}_2$ e $[F''_1] = \mathcal{M}_3$. ■

VIII. Sistemas de Esferas e Outras Semânticas

Para lógica default clássica, a primeira caracterização semântica (Lukaszewicz [40]) foi proposta apenas para teorias default normais. Posteriormente, esta caracterização foi estendida por Etherington [24] para teorias default genéricas. Ambas abordagens partem do princípio de que uma semântica para lógica default *"pode ser vista* *em termos de restrições de conjuntos de modelos da teoria subjacente*" (Etherington [24]). Ou seja, devemos considerar o conjunto de fatos W como uma descrição parcial do mundo, que é enriquecida pela aplicação dos defaults. Conforme W é enriquecido, a classe de modelos (de W que satisfazem os defaults que são aplicados) vai sendo restringida. Ou seja, basicamente o mesmo processo utilizado no ambiente dos sistemas de esferas.

Tal restrição dos modelos de W foi feita (Etherington [24]) através da definição da *relação de preferência* $\geq_\delta$: dados um default $\delta = A : B / C$ e uma classe de modelos Π, a ordem $\geq_\delta$ em 2^Π é definida de modo que, para todo $\Pi_1, \Pi_2 \in 2^\Pi$ temos que $\Pi_1 \geq_\delta \Pi_2$ (Π_1 ***é preferível a*** Π_2) se, e somente se,

1. $\forall m \in \Pi_2, m \models A$,
2. $\exists\, m \in \Pi_2, m \models B$,
3. $\Pi_1 = \{ m \in \Pi_2 \mid m \models C\}$.

Assim, um default δ prefere Π_1 (que satisfaz seu conseqüente) a Π_2 (que não necessariamente satisfaz seu conseqüente, embora o seu pré-requisito seja satisfeito e sua justificativa seja consistente). Observe que, dados um conjunto de default Δ e uma classe de modelos Π, o fecho transitivo de todas as ordens $\geq_\delta$ tal que $\delta \in \Delta$, induz uma ordem $\geq_\Delta$ em 2^Π (Etherington [24]) : para todo $\Pi_1, \Pi_2 \in 2^\Pi$ temos que $\Pi_1 \geq_\Delta \Pi_2$ se, e somente se,

1. $\exists\delta \in \Delta,\ \Pi_1 \geq_\delta \Pi_2$, ou
2. $\exists\Pi_3 \in 2^\Pi, \Pi_1 \geq_\Delta \Pi_3$ e $\Pi_3 \geq_\Delta \Pi_2$.

Dada uma teoria default (W_0,Δ), é fácil ver que qualquer sistema de esferas S construído conforme a definição 4.2.6, define uma ordem $\geq_\Delta$ em $2^{[W0]}$. Reciprocamente, dada uma ordem $\geq_\Delta$ em $2^{[W0]}$, podemos construir um sistema de esferas S conforme a definição 4.2.6.

Porém, para caracterizar a classe de modelos de uma extensão, não basta que ele seja um elemento $\geq_\Delta$-maximal em $2^{[W0]}$, é preciso que ele também seja ***estável*** (Etherington [24]): dadas uma teoria default (W_0,Δ) e Π uma classe $\geq_\Delta$-maximal em $2^{[W0]}$, dizemos que Π é ***estável*** para (W_0,Δ) se, e somente se, existe um conjunto $\Delta' \subseteq \Delta$ tal que :

1. $\Pi \geq_{\Delta'} MOD(W_0)$,
2. $\forall \delta = A : B / C \in \Delta'$, $\exists\, m \in \Pi$ tal que $m \models B$.

Nos teoremas 4.2.5 e 4.2.6, a condição de estabilidade é definida em termos de esferas pela seguinte condição : $\bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma] \cap [B_i] \neq \emptyset$, para todo $i \in I$. Ela garante que todas as justificativas B_i dos defaults aplicados sejam consistentes com $\bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma]$ (centro do sistema de esferas e, portanto, um elemento $\geq_\Delta$-maximal em $2^{[W0]}$). Ou seja, a semântica de esferas e a proposta de Etherington [24] são equivalentes. Para lógica justificada, podemos obter resultados semelhantes ao apresentado acima, uma vez que sua semântica é definida de forma semelhante a que acabamos de ver.

A semântica para a lógica default restrita, proposta por Schaub [62], foi chamada de ***semântica de modelo focados***[4]. Ela também foi inspirada na semântica de Etherington [24] : assim como nesta, aqui é definida uma relação de preferência mas, ao invés de considerar apenas uma classe de modelos Π, Schaub [62] utilizou um par de classes de modelos (Π,Π') tal que $\Pi' \subseteq \Pi$, chamada de ***estrutura de modelo focado***. A classe de modelos Π corresponde aos modelos de uma extensão restrita (modelos de W mais os conseqüentes dos defaults aplicados) e a classe Π' corresponde ao ***contexto***[5] no qual a extensão foi construída (modelos de W mais os conseqüentes e justificativas dos defaults aplicados).

Portanto, a *relação de preferência* $\succ_\delta$ fica definida por : dados um default $\delta = A : B / C$ e uma classe de modelos Π, a ordem $\succ_\delta$ em $2^\Pi \times 2^\Pi$ é definida de modo que, para todo $(\Pi_1, \Pi'_1), (\Pi_2, \Pi'_2) \in 2^\Pi \times 2^\Pi$ temos que $(\Pi_1, \Pi'_1) \succ_\delta (\Pi_2, \Pi'_2)$ se, e somente se,

1. $\forall m \in \Pi_2$, $m \models A$,
2. $\exists\, m \in \Pi'_2$, $m \models B \wedge C$,
3. $\Pi_1 = \{ m \in \Pi_2 \mid m \models C\}$,
4. $\Pi'_1 = \{ m \in \Pi'_2 \mid m \models B \wedge C\}$.

---

[4] A estrutura de modelos focados foi utilizada também na definição semântica das CDL-extensões (lógica default cumulativa), como veremos no apêndice C.

[5] Lembre que nas lógicas default restrita e cumulativa, as justificativas dos defaults aplicados são armazenadas e devem ser levadas em conta na hora de decidir se um default pode ser aplicado ou não.

Logo, um default $\delta = A : B / C$ ***prefere*** a estrutura (Π_1, Π'_1) a (Π_2, Π'_2), se o seu pré-requisito é válido em Π_2 e a conjunção $B \wedge C$ é satisfeita por algum modelo de Π'_2, e se Π_1 e Π'_1 implicam, resp., C e $B \wedge C$.

Como na semântica de Etherington, o fecho transitivo de todas as ordens $\succ_\delta$ tais que δ pertence a um conjunto de defaults Δ, induz uma ordem $\succ_\Delta$ em $2^\Pi x 2^\Pi$ definida por : para todo (Π_1, Π'_1), $(\Pi_2, \Pi'_2) \in 2^\Pi \times 2^\Pi$ temos que $(\Pi_1, \Pi'_1) \succ_\Delta (\Pi_2, \Pi'_2)$ se, e somente se,

1. $\exists \delta \in \Delta$, $(\Pi_1, \Pi'_1) \succ_\delta (\Pi_2, \Pi'_2)$, ou
2. $\exists (\Pi_3, \Pi'_3) \in 2^\Pi \times 2^\Pi$, tal que $(\Pi_1, \Pi'_1) \succ_\Delta (\Pi_3, \Pi'_3)$ e $(\Pi_3, \Pi'_3) \succ_\Delta (\Pi_2, \Pi'_2)$.

A presença do contexto (segundo item do par (Π, Π')) e os conseqüentes testes de consistência feitos nesta classe, implicam na dispensa do teste de estabilidade na classe Π. Para uma teoria default (W_0,Δ), a classe de modelos focados de uma extensão restrita (E,Θ) será o elemento $\succ_\Delta$-maximal (Π, Π') com relação a $([W_0],[W_0])$.

Observe que no ambiente de esferas (definição 4.4.1), o contexto aparece como uma condição que deve ser satisfeita durante a construção de um sistema de esferas **S** : na construção de cada esfera do sistema, devemos satisfazer a condição $[J] \cap [B \wedge C] \neq \emptyset$, onde J é o conjunto dos fatos mais os conseqüentes e justificativas dos defaults já aplicados. Isto permite caracterizar os modelos de uma extensão restrita sem que seja preciso utilizar duas estruturas de modelos focados.

É interessante ressaltar o fato de que, a modificação feita na definição do sistema de esferas relativa aos modelos de uma extensão default clássica, de forma a se obter a caracterização dos modelos de uma extensão restrita, é de extrema simplicidade : apenas a condição $[K] \cap [B] \neq \emptyset$ (definição 4.2.1) é substituída por $[J] \cap [B \wedge C] \neq \emptyset$ $([J] \subseteq [K])$. Conforme podemos ver, a definição semântica (no ambiente de esferas) das extensões restritas é obtida de forma mais simples do que a proposta semântica de Schaub [62].

Portanto, podemos utilizar qualquer sistema de esferas **S** construído conforme a definição 4.4.2, para definir uma ordem $\succ_\Delta$ em $2^\Pi x 2^\Pi$. O elemento $\succ_\Delta$-maximal com relação a $([W_0],[W_0])$ corresponderá ao centro de **S**. Da mesma forma, dada uma ordem $\succ_\Delta$ em $2^\Pi x 2^\Pi$ podemos construir um sistema de esferas **S** conforme a definição 4.4.2.

Além disso, nos teoremas 4.4.2 e 4.4.3, nenhuma condição é imposta sobre os sistemas que foram construídos a partir da definição 4.4.2. Ou seja, como na semântica dos modelos focados, no sistema de esferas não é necessária a utilização do teste de estabilidade para a lógica default restrita (idem para a cumulativa). Portanto, como no caso anterior, o sistema de esferas é equivalente a estrutura de modelos focados.

Schaub [62] também propôs um ambiente semântico para lógicas default em termos de estruturas de Kripke. Basicamente, este ambiente considera os mundos reais de uma certa classe de estruturas de Kripke como sendo aqueles que expressam nossas crenças e os mundos acessíveis como sendo aqueles que expressam as condições segundo as quais nossas crenças foram construídas. A seguir, mostraremos que os dois ambientes propostos (o de esferas e o modal) são equivalentes.

Considere que uma estrutura de Kripke, chamada de K-modelo, é representada pela quadrupla $<\omega_0,\Omega,R,\mathcal{I}>$, onde Ω é um conjunto não-vazio (chamado de *conjunto de mundos*), um mundo $\omega_0 \in \Omega$, uma relação binária sobre Ω (chamada de *relação de acessibilidade*) e $\mathcal{I}$ é uma função que define uma interpretação $\mathcal{I}_\omega$ para cada $\omega \in \Omega$. Um K-modelo $<\omega_0,\Omega,R,\mathcal{I}>$ é tal que o domínio de $\mathcal{I}_\omega$ é um subconjunto do domínio de $\mathcal{I}_{\omega'}$ sempre que $(\omega,\omega') \in R$.

As fórmulas nos K-modelos são interpretadas da seguinte forma : em um K-modelo $<\omega_0,\Omega,R,\mathcal{I}>$, para cada $\omega \in \Omega$, a interpretação de primeira-ordem é estendida de forma que para cada $e \in D_\omega$ (o domínio de $\mathcal{I}_\omega$), uma constante $\ddot{e}$ é introduzida, fazendo $\mathcal{I}_\omega(\ddot{e}) = e$. Em todo mundo ω, cada termo é mapeado em um elemento de D_ω da seguinte forma : $\mathcal{I}_\omega(f(t_1,\ldots,t_n)) = (\mathcal{I}_\omega(f))(\mathcal{I}_\omega(t_1),\ldots, \mathcal{I}_\omega(t_n))$, $n \geq 0$.

Dado um K-modelo $m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{I}>$, a relação de conseqüência modal $\omega \models \alpha$ (em m) é definida por :

$\omega \models P(t_1,\ldots,t_n)$ se, e somente se, $(\mathcal{I}_\omega(t_1),\ldots, \mathcal{I}_\omega(t_n)) \in \mathcal{I}_\omega(P)$

$\omega \models \neg\alpha$ se, e somente se, $\omega \not\models \alpha$

$\omega \models \alpha \wedge \beta$ se, e somente se, $\omega \models \alpha$ e $\omega \models \beta$

$\omega \models \alpha \vee \beta$ se, e somente se, $\omega \models \alpha$ ou $\omega \models \beta$

$\omega \models \forall x\, \alpha[x]$ se, e somente se, $\omega \models \alpha[\ddot{e}]$ para todo $e \in D_\omega$

$\omega \models \Box\alpha$ se, e somente se, $\omega' \models \alpha$, para todo $\omega' \in \Omega$ tal que $(\omega,\omega') \in R$.

$\omega \models \Diamond\alpha$ se, e somente se, $\omega' \models \alpha$, para algum $\omega' \in \Omega$ tal que $(\omega,\omega') \in R$.

Representamos m $\models \alpha$ se $\omega_0 \models \alpha$ (em m), o que significa que m é um modelo de α. As classes de K-modelos são representadas por $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M} \models \alpha$ significa que cada K-modelo em $\mathfrak{M}$ implica α.

Para caracterizar semanticamente as extensões nas lógicas default clássica, justificada e restrita, Schaub [62] definiu, respectivamente, as seguintes famílias de ordens parciais :

Definição 4.8.1 (Schaub [62])

Seja $d = \alpha : \beta / \gamma$. Seja $\mathfrak{M}$ e $\mathfrak{M}'$ classes distintas de K-modelos. Defina :

- $\mathfrak{M} >_d \mathfrak{M}'$ se, e somente se, $\mathfrak{M} = \{m \in \mathfrak{M}' \,/\, m \models \gamma \wedge \Box\gamma \wedge \Diamond\beta\}$ e $\mathfrak{M}' \models \alpha$ e $\mathfrak{M}' \not\models \Box\neg\beta$ (relativa a ***lógica default clássica***);
- $\mathfrak{M} \succ_d \mathfrak{M}'$ se, e somente se, $\mathfrak{M} = \{m \in \mathfrak{M}' \,/\, m \models \gamma \wedge \Box\gamma \wedge \Diamond\beta\}$ e $\mathfrak{M}' \models \alpha$ e $\mathfrak{M}' \not\models \Box\neg\beta \vee \Diamond\neg\gamma$ (relativa a ***lógica default justificada***);
- $\mathfrak{M} \blacktriangleright_d \mathfrak{M}'$ se, e somente se, $\mathfrak{M} = \{m \in \mathfrak{M}' \,/\, m \models \gamma \wedge \Box(\gamma \wedge \beta)\}$ e $\mathfrak{M}' \models \alpha$ e $\mathfrak{M}' \not\models \Box\neg(\gamma \wedge \beta)$ (relativa a ***lógica default restrita***);■

Dado um conjunto de defaults Δ, as ordens $>_\Delta$, $\succ_\Delta$ e $\blacktriangleright_\Delta$ são definidas, respectivamente, pela união das relações $>_d$, $\succ_d$ e $\blacktriangleright_d$:

Definição 4.8.2 (Schaub [62])

Seja Δ um conjunto de defaults e $\mathfrak{M}$ uma classe de K-modelos. Defina as seguintes ordens sobre $2^{\mathfrak{M}}$:

- $>_\Delta$: Para todo $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}'' \in 2^{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{M}' >_\Delta \mathfrak{M}''$ se, e somente se, existe uma enumeração $<d_i>_{i \in I}$ de algum $\Delta' \subseteq \Delta$ tal que $\mathfrak{M}_{i+1} >_d \mathfrak{M}_i$ para alguma seqüência $<\mathfrak{M}_i>_{i \in I}$ de subclasses de $\mathfrak{M}''$ satisfazendo $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}_0$ e $\mathfrak{M}' = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{M}_i$.

- $>_\Delta$: Para todo $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}'' \in 2^{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{M}' >_\Delta \mathfrak{M}''$ se, e somente se, existe uma enumeração $<d_i>_{i \in I}$ de algum $\Delta' \subseteq \Delta$ tal que $\mathfrak{M}_{i+1} >_d \mathfrak{M}_i$ para alguma seqüência $<\mathfrak{M}_i>_{i \in I}$ de subclasses de $\mathfrak{M}''$ satisfazendo $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}_0$ e $\mathfrak{M}' = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{M}_i$.

- $>_\Delta$: Para todo $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}'' \in 2^{\mathfrak{M}}$, $\mathfrak{M}' \succ_\Delta \mathfrak{M}''$ se, e somente se, existe uma enumeração $\langle d_i \rangle_{i \in I}$ de algum $\Delta' \subseteq \Delta$ tal que $\mathfrak{M}_{i+1} \succ_d \mathfrak{M}_i$ para alguma seqüência $\langle \mathfrak{M}_i \rangle_{i \in I}$ de subclasses de $\mathfrak{M}''$ satisfazendo $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}_0$ e $\mathfrak{M}' = \bigcap_{i \in I} \mathfrak{M}_i$.■

Para uma teoria default (W,Δ), defina a classe de K-modelo associada a W como sendo $\mathfrak{M}_W = \{m \,/\, m \models \gamma \wedge \Box\gamma, \gamma \in W\}$ e as classes $>_\Delta$-maximais (respec., $>_\Delta$-maximais e $\succ_\Delta$-maximais) de K-modelos acima de $\mathfrak{M}_W$ como as *classes preferidas* de K-modelos com respeito a (W,Δ).

Teorema 4.8.1 (Schaub [62] - lógica default clássica)

Seja (W,Δ) uma teoria default, $\mathfrak{M}$ uma classe de K-modelos e E um conjunto de fórmulas fechado sob conseqüência tal que $\mathfrak{M} = \{m \,/\, m \models E \wedge \Box E \wedge \Diamond C_E$[6]$\}$. Então : E é uma extensão consistente de (W,Δ) se, e somente se, $\mathfrak{M}$ é uma classe $>_\Delta$-maximal não-vazia acima de $\mathfrak{M}_W$.■

Teorema 4.8.2 (Schaub [62] - lógica default justificada)

Seja (W,Δ) uma teoria default, $\mathfrak{M}$ uma classe de K-modelos, E um conjunto de fórmulas fechado sob conseqüência e J um conjunto de fórmulas tais que $J = C(E,J)$[7] e $\mathfrak{M} = \{m \,/\, m \models E \wedge \Box E \wedge \Diamond C_{(E,J)}\}$. Então : E é uma *m*-extensão de (W,Δ) com respeito a J se, e somente se, $\mathfrak{M}$ é uma classe $>_\Delta$-maximal acima de $\mathfrak{M}_W$.■

Teorema 4.8.3 (Schaub [62] - lógica default restrita)

Seja (W,Δ) uma teoria default, $\mathfrak{M}$ uma classe de K-modelos e E e Θ conjuntos de fórmulas fechados sob conseqüência tais que $\mathfrak{M} = \{m \,/\, m \models E \wedge \Box\Theta\}$. Então : E é uma extensão restrita de (W,Δ) se, e somente se, $\mathfrak{M}$ é uma classe $\succ_\Delta$-maximal acima de $\mathfrak{M}_W$.■

Podemos então relacionar este ambiente modal proposto para estas três lógicas com o ambiente de esferas através dos seguintes resultados :

---

[6] C_E é o conjunto das justificativas dos defaults geradores de um conjunto de fórmulas E.

[7] $C_{(E,J)}$ é o conjunto das justificativas dos defaults geradores de um conjunto de fórmulas E com relação ao conjunto J.

Teorema 4.8.4 (Lógicas default clássica e justificada)

Seja (W,Δ) uma teoria default, E uma de suas extensões (resp., uma *m*-extensão) e **S** um sistema de esferas centrado em [E] construido segundo a definição 4.2.6 (resp., definição 4.3.2). Seja $\mathfrak{M}$ a classe de todos os K-modelos. Então, existe uma seqüência $<\mathfrak{M}_i>_{i\in I}$ de subclasses não-vazias de $\mathfrak{M}$, obtida a partir de **S**, e tal que $\mathfrak{M}' = \cap_{i\in I} \mathfrak{M}_i$ é uma classe $>_\Delta$-maximal (resp., $>_\Delta$-maximal) não-vazia acima de $\mathfrak{M}$.■

Teorema 4.8.5 (Lógicas default clássica e justificada)

Seja (W,Δ) uma teoria default, E uma de suas extensões (resp., *m*-extensões) e $\mathfrak{M}$ uma classe $>_\Delta$-maximal (resp., $>_\Delta$-maximal) não-vazia acima de $\mathfrak{M}_W$ tal que $\mathfrak{M} = \{m \,/\, m \models E \wedge \Box E \wedge \Diamond C_E\}$ (resp., $\mathfrak{M} = \{m \,/\, m \models E \wedge \Box E \wedge \Diamond C_{(E,J)}\}$). Então, existe um sistema de esferas $\mathbf{S} = \{M_L,[W_0], [W_1],\ldots\}$ centrado em $\bigcap_{\varsigma\in I} [W_\varsigma] = [E]$, definido como na definição 4.2.6 (resp., definição 4.3.2), e tal que **S** satisfaz a condição de estabilidade (resp., a condição de consistência). ■

Teorema 4.8.6 (Lógica default restrita)

Seja (W,Δ) uma teoria default, (E,Θ) uma de suas extensões restritas e **S** um sistema de esferas centrado em [E] construido segundo a definição 4.4.2. Seja $\mathfrak{M}$ a classe de todos os K-modelos. Então, existe uma seqüência $<\mathfrak{M}_i>_{i\in I}$ de subclasses não-vazias de $\mathfrak{M}$, obtida a partir de **S**, e tal que $\mathfrak{M}' = \cap_{i\in I} \mathfrak{M}_i$ é uma classe $\succ_\Delta$-maximal acima de $\mathfrak{M}$.■

Teorema 4.8.7 (Lógicas default restrita)

Seja (W,Δ) uma teoria default, (E,Θ) uma de suas extensões restritas e $\mathfrak{M}$ uma classe $\succ_\Delta$-maximal acima de $\mathfrak{M}_W$ tal que $\mathfrak{M} = \{m \,/\, m \models E \wedge \Box\Theta\}$. Então, existe um sistema de esferas $\mathbf{S} = \{M_L,[W_0], [W_1],\ldots\}$ centrado em $\bigcap_{\varsigma\in I} [W_\varsigma] = [E]$, definido como na definição 4.4.2 e tal que $(\bigcap_{\varsigma\in I} [W_\varsigma], \bigcap_{\varsigma\in I} [W_\varsigma] \cap [\mathcal{J}]) = ([E],[\Theta])$, onde $\mathcal{J}$ é o conjunto de justificativas dos defaults utilizados na construção de **S**. ■

IX. Conclusão

Neste capítulo, estabelecemos uma relação entre revisão de crenças e várias lógicas default através da definição de um ambiente semântico para lógicas default baseado no sistema de esferas de Grove [30]. Além de estreitar a relação existente entre estas duas áreas, a importância deste resultado está no fato dele permitir a definição semântica de lógicas default de maneira simples e diretamente relacionadas a definição sintática das mesmas. Isto pode ser visto de forma clara comparando-se a caracterização sintática das várias lógicas default apresentadas (capítulo 2) com as condições segundo as quais os seus respectivos sistemas de esferas são construídos (tabelas abaixo) :

Caracterização Sintática		*Caracterização Semântica*	
$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i \ : \ E_0 = W_0$ $E_{i+1} = Th(E_i) \cup \{C \mid (A : B / C) \in \Delta$, onde :		$d = A : B / C$ *é aplicável a* $[K]$	
Teorema	**Condição**	**Definição**	**Condição de Aplicabilidade**
2.2.1 (clássica)	$- A \in E_i$ $- \neg B \notin E$	4.2.1 [8]	$- [K] \subseteq [A]$ $- [K] \cap [B] \neq \emptyset$
2.2.5 (fraca)	$- A \in E$ $- \neg B \notin E$	4.2.11 [9]	$- [K] \cap [A] \neq \emptyset$ $- [K] \cap [B] \neq \emptyset$
2.3.1[10] (justificada)	$- E \cup \{C\} \not\vdash \neg X$, $\forall X \in F \cup \{B\}$	4.3.1	$- [K] \subseteq [A]$ $- [K] \cap [B \wedge C] \neq \emptyset$ [11]
2.4.1 [12] (restrita)	$- A \in E_i$ $- \Theta \cup \{B\} \cup \{C\} \not\vdash \bot$	4.4.1 [13]	$- [K] \subseteq [A]$ $- [J] \cap [B \wedge C] \neq \emptyset$ [14]

Tabela 4.9.1 : Fórmulas de E : sentenças de primeira-ordem.

[8] Condição extra : estabilidade.

[9] Condições extras : estabilidade e pré-requisitos.

[10] Com relação a $F = \bigcup_{i=0}^{\infty} F_i \ : \ F_0 = \emptyset$; e para $i \geq 0 : F_{i+1} = F_i \cup \{B \mid (A : B / C) \in \Delta, E_i \vdash A$, e $\forall X \in F \cup \{B\}, E \cup \{C\} \not\vdash \neg X\}$.

[11] Teste de consistência de [K] com relação a $(B \wedge C)$. (**TC([K],B ∧ C)**)

[12] Extensão Restrita $(E,\Theta) = (\bigcup_{i=0}^{\infty} E_i , \bigcup_{i=0}^{\infty} \Theta_i)$, $\Theta_0 = W$; e para $i \geq 0$, $\Theta_{i+1} = Th(\Theta_i) \cup \{B \wedge C \mid A : B / C \in \Delta, A \in E_i, \Theta \cup \{B\} \cup \{C\} \not\vdash \bot\}$.

[13] Aplicável a [K] com respeito a [J] ($[J] \subseteq [K]$).

[14] Teste de consistência de [J] com relação a $(B \wedge C)$. (**TC([J],B ∧ C)**)

Caracterização Sintática		***Caracterização Semântica***	
$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i \; : \; E_0 = W_0$ $E_{i+1} = Th_S(E_i) \cup \{< C: Supp(A) \cup \{B,C\} > \mid$ $A : B / C \in \Delta$, onde:		d = A : B / C *é aplicável a* [Form(K)] com respeito a [Supp(K)]	
Proposição	**Condição**	**Definição**	**Condição de Aplicabilidade**
2.5.1 (CDL)	- $< A : Supp(A) > \in E_i$ - $\{B,C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot$	4.5.1	- $[Form(K)] \subseteq [A]$ - $[Form(K)] \cap [Supp(K)] \cap [B \wedge C] \neq \emptyset$
2.5.2 (CDL_F)	- $< A : Supp(A) > \in E_i$ - $\{B,C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot$ ou - $< A : Supp(A) > \in E$ - $Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot$ - $Form(E) \cup \{B,C\} \not\vdash \bot$ - $Form(E) \cup Supp(E) \cup \{C\} \vdash \bot$	4.5.4	- $[Form(K)] \subseteq [A]$ - $[Form(K)] \cap [Supp(K)] \cap [B \wedge C] \neq \emptyset$ ou - $[Form(K)] \cap [A] \neq \emptyset$ - $[Form(K)] \cap [Supp(K)] \neq \emptyset$ - $[Form(K)] \cap [B \wedge C] \neq \emptyset$ - $[Form(K)] \cap [Supp(K)] \cap [C] = \emptyset$

Tabela 4.9.2 : Fórmulas de E : Assertivas $\vartheta = <\alpha,\beta>$, onde
$\alpha = Form(\vartheta)$ e $\beta = Supp(\vartheta)$.

Caracterização Sintática		***Caracterização Semântica***	
$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} E_i \; : \; E_0 = W_0$ $E_{i+1} = \; Th_{Sa}(E_i) \cup \{< C : Cons(A) \cup \{C\}:$ $Just(A) \cup \{B\} > \mid A : (C \mid B) / C \in \Delta,$		d = A : (C | B) / C *é aplicável a* [Form(K)] com respeito a [Supp(K)]	
Proposição	**Condição**	**Definição**	**Condição de Aplicabilidade**
2.6.1 (PCDL)	- $(< A : Cons(A) : Just(A) > \in E_i$ - $Form(E) \cup Supp(E) \cup \{B,C\} \not\vdash \bot$ ou - $< A : Cons(A) : Just(A) > \in E$ - $Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot$ - $Form(E) \cup \{B\} \not\vdash \bot$ - $Form(W_0) \cup \{C\} \not\vdash \bot$ - $Form(W_0) \cup Just(E) \cup \{C\} \vdash \bot$	4.5.1	- $[Form(K)] \subseteq [A]$ - $[Form(K)] \cap [Supp(K)] \cap [B \wedge C] \neq \emptyset$ ou - $[Form(K)] \cap [A] \neq \emptyset$ - $[Form(K)] \cap [Supp(K)] \neq \emptyset$ - $[Form(K)] \cap [B] \neq \emptyset$ - $[Form(W_0)] \cap [C] \neq \emptyset$ - $[Form(W_0)] \cap [Just(K)] \cap [C] = \emptyset$

Tabela 4.9.3 : Fórmulas de E : Afirmativas $\vartheta = <\alpha,\beta,\gamma>$, onde :
$\alpha = Form(\vartheta)$, $\beta = Cons(\vartheta)$ e $\gamma = Just(\vartheta)$. ($Supp(\vartheta) = Cons(\vartheta) \cup Just(\vartheta)$)

É interessante observar que, apesar da definição (sintática) de diversas lógicas default ser feita de forma simples (normalmente são variações da lógica default clássica obtidas pela mudança no critério de aplicabilidade de um default), em geral, o problema da definição semântica das mesmas não é visto como sendo um problema de igual simplicidade. Basta lembrar que a semântica da lógica default clássica só foi definida alguns anos após a sua apresentação em [24]-[40] e, mesmo mais recentemente, algumas variações desta lógica são apresentadas sem uma definição semântica (por exemplo, a lógica cumulativa de Brewka [14] só foi semanticamente caracterizada posteriormente em Schaub [62]).

No apêndice C são apresentadas as demonstrações dos teoremas deste capítulo. Nas demonstrações procurou-se, sempre que possível, relacionar as semânticas definidas para as diversas lógicas default com o ambiente de esferas. Embora alguns aspectos das outras semânticas sejam semelhantes a construção de esferas como, por exemplo, a forma como a noção de aplicabilidade de um default é definida na semântica para lógica default clássica e justificada, é fácil perceber a simplicidade gerada pelo relacionamento entre as noções de *consistência/ inconsistência* e *expansão/ revisão* utilizada pelo ambiente de esferas, que permite uma caracterização semântica simples sem a necessidade da utilização de mais de uma estrutura semântica (caso dos modelos focados) nem a utilização de estruturas modais (caso do ambiente proposto por Schaub [62]).

Veremos adiante que a relação aqui estabelecida nos permitirá ampliar ainda mais a conexão entre revisão de crenças e lógicas default, além de nos permitir relacionar revisão de crenças e programas em lógica.

CAPÍTULO 5

Programação em Lógica e Sistemas de Esferas

I. Introdução

A lógica default e a programação em lógica possuem uma relação semântica definida por Bidoit e Froidevaux [5] e, independentemente, por Marek e Truszczynski [46]. Nela foi estabelecida uma conexão entre a classe de modelos de um programa em lógica e a classe de modelos das extensões da teoria default correspondente a este programa, onde a forma como a negação é interpretada em um programa em lógica nos conduz a sistemas não-monotônicos.

Neste capítulo, vamos mostrar que, motivados pela relação mencionada acima e dos resultados obtidos no capítulo anterior, podemos utilizar sistemas de esferas para determinar a classe de modelos de programas em lógica. Com isso, estaremos relacionando semanticamente três importantes áreas dentro da inteligência artificial : revisão de crenças, lógica default e programação em lógica.

Inicialmente, definiremos os conceitos básicos da programação em lógica (seção II). Na seção III, apresentaremos como um programa em lógica pode ser representado através de teorias default e como as extensões desta teoria são utilizadas para caracterizar a classe de modelos do programa através de sistemas de esferas.

II. Programação em Lógica - Definições

Nesta seção, apresentaremos alguns conceitos de programação em lógica, que serão necessários no desenvolvimento da seção seguinte. Uma abordagem mais abrangente da programação em lógica pode ser encontrada em Apt et. al. [3], Casanova et. al. [16], Lloyd [39].

Suponha que estejamos trabalhando com uma linguagem de primeira-ordem $\mathcal{L}$. Um ***programa em lógica*** é formado por um conjunto de ***cláusulas***, que são expressões da forma :

$$A \leftarrow B_1 , \ldots , B_m , \textbf{not}(C_1), \ldots, \textbf{not}(C_n) , (m, n \geq 0) \quad (*)$$

onde A, B_i e C_i são fórmulas atômicas da linguagem de primeira-ordem $\mathcal{L}$. Dizemos que A é a ***cabeça*** da cláusula e $B_1 , \ldots , B_m$, $\textbf{not}(C_1), \ldots, \textbf{not}(C_n)$ formam o ***corpo*** da cláusula. Quando n = 0 em (*), ela é chamada ***cláusula de Horn*** e um programa composto somente por cláusulas de Horn é chamado de ***programa Horn***. Dado um programa em lógica $\mathbf{P}$, dizemos que *ground*($\mathbf{P}$) é o conjunto de todas as instâncias básicas de todas as cláusulas em $\mathbf{P}$.

Uma cláusula da forma (*) pode ser interpretada como a seguinte fórmula de primeira-ordem :

$$(\forall x_1 , \ldots , x_k) (B_1 \wedge \ldots \wedge B_m \wedge \neg C_1 \wedge \ldots \wedge \neg C_n \rightarrow A) \text{ ou}$$

$$(\forall x_1 , \ldots , x_k) (\neg B_1 \vee \ldots \vee \neg B_m \vee C_1 \vee \ldots \vee C_n \vee A) ,$$

onde $x_1 , \ldots , x_k$ são todas as variáveis livres que ocorrem em A, B_i $(1 \leq i \leq m)$ e C_i $(1 \leq i \leq n)$. Conseqüentemente, um programa em lógica $\mathbf{P}$ é interpretado como sendo a teoria composta pela interpretação, através da lógica de primeira-ordem $\mathcal{L}$, de cada uma de suas cláusulas. Neste caso, **not** e $\leftarrow$ são considerados, respectivamente, como sendo a negação e a implicação clássicas. Este tipo de interpretação de um programa em lógica é chamado de ***interpretação declarativa***.

Observe que *ground*($\mathbf{P}$) pode ser considerado como um programa em lógica na linguagem da lógica proposicional gerada pelas fórmulas atômicas básicas de $\mathcal{L}$, ou seja, um programa em lógica *ground*($\mathbf{P}$) é formado por cláusulas da forma :

$$A \leftarrow B_1 , \ldots , B_m , \textbf{not}(C_1), \ldots, \textbf{not}(C_n) \quad (**),$$

onde A, $B_1 , \ldots , B_m , C_1, \ldots, C_n$ representam fórmulas atômicas básicas de $\mathcal{L}$. Logo :

O ***universo de Herbrand*** da linguagem $\mathcal{L}$, denotado por U_H, é o conjunto de todos os termos básicos de $\mathcal{L}$. Dado um conjunto $\mathcal{C}$ de cláusulas da forma (**), o ***universo de Herbrand para*** $\mathcal{C}$, denotado por $U_H[\mathcal{C}]$, é definido como sendo o conjunto de termos básicos gerado a partir das constantes e símbolos de função que ocorrem em $\mathcal{C}$. A ***base de Herbrand para*** $\mathcal{C}$, denotada por B_H, é o conjunto de todas as fórmulas atômicas básicas $p(t_1,\ldots, t_n)$, onde p é um símbolo de predicados n-ário (n>0) que ocorre em $\mathcal{C}$ e $t_1,\ldots, t_n$ são termos básicos de $U_H[\mathcal{C}]$. Uma estrutura I de um conjunto $\mathcal{C}$ é chamada de ***estrutura de Herbrand*** se, e somente se, (i) $I = U_H[\mathcal{C}]$; (ii) para cada constante c, I(c) = c ; (iii) I(f)(t_1,..., t_n) = f(t_1,..., t_n), para todo símbolo de função n-ária f e todo (t_1,..., t_n) $\in$ $U_H[\mathcal{C}]$. Uma estrutura de Herbrand I para $\mathcal{C}$ é um ***modelo de Herbrand de*** $\mathcal{C}$ se, e somente se, I satisfaz todas as fórmulas em $\mathcal{C}$.

Dado um conjunto de fórmulas $\mathcal{C}$, um modelo de Herbrand M é chamado de ***minimal*** se não existe nenhum outro modelo de Herbrand M' de $\mathcal{C}$ tal que $M' \subseteq M$; e M é o ***menor modelo de Herbrand de*** $\mathcal{C}$, se M é um subconjunto de todos os outros modelos de Herbrand de $\mathcal{C}$.

A partir dos conceitos acima, podemos então definir :

Teorema 5.2.1 (Marek e Truszczynski [45])

Todo programa em lógica $\mathbf{P}$ possui um ***modelo minimal de Herbrand.*** ■

Teorema 5.2.2 (Marek e Truszczynski [45])

Seja $\mathbf{P}$ um programa em lógica e $M \subseteq B_H$. Então M é um modelo de Herbrand de $\mathbf{P}$ se, e somente se, M é um modelo proposicional de *ground*($\mathbf{P}$). ■

Os programas Horn, como todo programa em lógica, possuem um modelo minimal de Herbrand. Além disso, eles possuem uma propriedade mais forte que esta, estabelecida pelo seguinte teorema :

Teorema 5.2.3 (Marek e Truszczynski [45])

Todo programa Horn $\mathbf{P}$ possui um ***menor modelo de Herbrand.*** ■

Gelfond e Lifschitz [28] utilizaram a noção de modelos estáveis (stable models) para caracterizar os modelos de um programa em lógica genérico. Para isto, dado um programa em lógica $\mathbf{P}$, obtém-se o seu *reduto* (que será um programa de Horn). O modelo estável de $\mathbf{P}$ será então o menor modelo de Herbrand do reduto deste programa. Formalmente :

Definição 5.2.1 (Gelfond e Lifschitz [28])

Seja M um subconjunto da base de Herbrand B_H.

1. Uma cláusula A $\leftarrow$ B_1 , ... , B_m , **not**(C_1), ..., **not**(C_n), onde A, B_i e C_i são fórmulas atômicas básicas, é ***irrelevante com respeito a M*** se pelo menos um dos C_i está em M.
2. Seja $\mathbf{P}$ um programa em lógica. O ***reduto de*** $\mathbf{P}$ ***com respeito a M***, representado por $\mathbf{P}^M$, é obtido a partir de *ground*($\mathbf{P}$) da seguinte maneira :

   (a) Removendo todas as cláusulas que são irrelevantes com respeito a M.

(b) Removendo cada premissa **not**(c_i) das cláusulas restantes. ■

Definição 5.2.2 (Gelfond e Lifschitz [28])

Seja $\mathbf{P}$ um programa em lógica e $M \subseteq B_H$. O conjunto M é um ***modelo estável*** de $\mathbf{P}$ se M é o ***menor modelo de Herbrand*** do reduto $\mathbf{P}^M$. ■

Exemplo 5.2.1 (Marek e Truszczynski [45])

Considere o programa em lógica $\mathbf{P}$, formado pelas cláusulas :

$$A \leftarrow \qquad\qquad B \leftarrow$$

$$C \leftarrow A, \textbf{not}(D) \qquad\qquad D \leftarrow B, \textbf{not}(C)$$

Este programa possui três modelos : $M_1 = \{A,B,C\}$, $M_2 = \{A,B,C,D\}$ e $M_3 = \{A,B,D\}$. Pela definição 5.2.3, os redutos do programa $\mathbf{P}$ com respeito, respectivamente, a M_1, M_2 e M_3 são:

$$\mathbf{P}^{M1} = \{ A \leftarrow ; B \leftarrow ; C \leftarrow A\}, \mathbf{P}^{M2} = \{ A \leftarrow ; B \leftarrow \} \text{ e } \mathbf{P}^{M3} = \{ A \leftarrow ; B \leftarrow ; D \leftarrow B\}$$

e suas respectivas classes de modelos são :

$$M'_1 = \{A,B,C\}, M'_2 = \{A,B\} \text{ e } M'_3 = \{A,B,D\}.$$

Como $M_1 = M'_1$, $M_3 = M'_3$ e $M_2 \neq M'_2$, M_1 e M_3 são modelos estáveis de $\mathbf{P}$ enquanto M_2 não é um modelo estável para este programa. ■

Como conseqüência das definições acima, temos o seguinte resultado :

Teorema 5.2.4 (Marek e Truszczynski [45])

Seja $\mathbf{P}$ um programa de Horn. Então, este programa possui um único modelo estável, que é o menor modelo de Herbrand de $\mathbf{P}$. ■

A noção de ***modelo suportado*** é utilizada de forma a identificar dentre os modelos mínimais de um programa em lógica aqueles que são exclusivamente compostos pelas cabeças das regras $A \leftarrow B_1, \ldots, B_m, \textbf{not}(C_1), \ldots, \textbf{not}(C_n)$, onde A, B_i e C_i são fórmulas atômicas básicas, tais que cada B_i ($i \in [1,m]$) pertence ao modelo em exame e cada C_i ($i \in [1,n]$) não pertence a este modelo. Por exemplo, considere o programa em lógica composto por uma única regra:

$$A \leftarrow \textbf{not}(C).$$

Este programa possui dois modelos mínimais de Herbrand: $\{A\}$ e $\{C\}$. O modelo $\{C\}$ não é suportado pois C não é nem um fato do programa nem a cabeça de uma regra que satisfaça a condição desejada. Por outro lado, o modelo $\{A\}$ é suportado pois existe uma regra que tem A como cabeça e tal que $C \notin \{A\}$. Formalmente, os modelos suportados são definidos da seguinte maneira:

Definição 5.2.3 (Apt et. al. [3])

Seja $\mathbf{P}$ um programa em lógica e $M \subseteq B_H$. Dizemos que M é um ***modelo suportado*** de $\mathbf{P}$, se M é um modelo de $\mathbf{P}$ tal que para cada $A \in M$, existe uma cláusula $A \leftarrow B_1, \ldots, B_m$, $\mathbf{not}(C_1), \ldots, \mathbf{not}(C_n) \in$ *ground*($\mathbf{P}$) tal que $B_i \in M$, para todo $i \in [1,m]$ e $C_j \notin M$, para todo $j \in [1,n]$. ■

As classes dos programas ***estratificados*** (*stratified logic programs*) e ***localmente estratificados*** (*locally stratified programs*) possuem propriedades semelhantes aos programas Horn. A idéia por trás da estratificação é a de "não permitir recurssão 'através da negação'" (Apt et. al. [3], Przymusinski [57]). Formalmente, estas classes de programa são definidas por :

Definição 5.2.4 (Marek e Truszczynski [45])

Um programa $\mathbf{P}$ é ***localmente estratificado*** se existe uma função *rank* atribuindo a cada elemento da base de Herbrand B_H, um numeral ordinal tal que para toda cláusula $A \leftarrow B_1, \ldots, B_m$, $\mathbf{not}(C_1), \ldots, \mathbf{not}(C_n)$, de *ground*($\mathbf{P}$), *rank*($B_i$) $\leq$ *rank*(A) para todo $i \leq m$ e *rank*(C_j) < *rank*(A), para todo $j \leq n$.

Um programa $\mathbf{P}$ é ***estratificado*** se existe uma função *rank* atribuindo a cada símbolo de predicado de $\mathcal{L}$, um numeral ordinal tal que para toda cláusula $A(x) \leftarrow B_1(y_1), \ldots, B_m(y_m)$, $\mathbf{not}(C_1(z_1)), \ldots, \mathbf{not}(C_n(z_n))$, de $\mathbf{P}$, *rank*(B_i) $\leq$ *rank*(A) para todo $i \leq m$ e *rank*(C_j) < *rank*(A), para todo $j \leq n$. ■

A partir da definição acima é fácil verificar a relação entre programas localmente estratificados e estratificados :

Teorema 5.2.5 (Marek e Truszczynski [45])

Seja $\mathbf{P}$ um programa em lógica estratificado. Então, $\mathbf{P}$ é localmente estratificado.■

Estes tipos de programa se relacionam com os programas Horn através do seguinte teorema :

Teorema 5.2.6 (Marek e Truszczynski [45])

Seja $\mathbf{P}$ um programa Horn. Então, $\mathbf{P}$ é estratificado e localmente estratificado. ■

Os modelos de programas em lógica localmente estratificados são chamados de ***modelo perfeitos***. Para construí-los, precisamos da seguinte definição :

Definição 5.2.5 (Marek e Truszczynski [45])

Seja α um ordinal, uma função *rank* : $B_H \rightarrow \{\xi \,/\, \xi < \alpha\}$, e $\mathbb{P}$ um programa em lógica. Defina :

$$\mathbf{B}_\xi = \{A \in B_H \,/\, rank(A) = \xi\} \quad e \quad \mathbf{P}_\xi = \{\mathbb{C} \in ground(\mathbb{P}) \,/\, rank(head(\mathbb{C})) = \xi\},$$

onde *head*($\mathbb{C}$) representa a cabeça da cláusula $\mathbb{C}$.

Os conjuntos $\mathbf{B}_\xi$ e $\mathbf{P}_\xi$ são chamados de ***estratos*** (strata). ■

Assim, os conjuntos $\mathbf{B}_\xi$ formam uma partição da base de Herbrand B_H em subconjuntos não-vazios disjuntos e os conjuntos $\mathbf{P}_\xi$ formam uma partição de $\mathbb{P}$ em subconjuntos disjuntos, possivelmente vazios.

Definição 5.2.6 (Marek e Truszczynski [45])

Seja $\mathbb{P}$ um programa localmente estratificado e seja *rank* sua função de estratificação local com contra-domínio $\{\xi \,/\, \xi < \alpha\}$.

1. Para todo ordinal ξ, $0 \leq \xi \leq \alpha$, definimos M_ξ como o menor modelo de Herbrand do programa $\{A \leftarrow / A \in M_{<\xi}\} \cup Q_\xi$, onde Q_ξ representa o reduto de $\mathbf{P}_\xi$ com respeito ao conjunto de fórmulas atômicas básicas $M_{<\xi} = \cup_{\eta<\xi} M_\eta$.
2. O conjunto $M = \cup_{\xi<\alpha} M_\xi$ é chamado uma ***estrutura perfeita*** para o programa $\mathbb{P}$. ■

Teorema 5.2.7 (Marek e Truszczynski [45])

Seja $\mathbb{P}$ um programa em lógica localmente estratificado. Seja *rank* sua função de estratificação local com contra-domínio $\{\xi \,/\, \xi < \alpha\}$ e M uma estrutura perfeita correspondente para $\mathbb{P}$. Então :

1. M é um modelo estável para $\mathbb{P}$.
2. M é um modelo mínimal de Herbrand para $\mathbb{P}$. ■

Como todo programa estratificado é localmente estratificado, tem-se :

Corolário 5.2.1 (Marek e Truszczynski [45])

Seja $\mathbb{P}$ um programa em lógica estratificado. Seja *rank* sua função de estratificação e M uma estrutura perfeita correspondente para $\mathbb{P}$. Então :

1. M é um modelo estável para $\mathbb{P}$.
2. M é um modelo mínimal de Herbrand para $\mathbb{P}$. ■

Assim, a estrutura perfeita M é chamada de ***modelo perfeito*** para o programa em lógica $\mathbb{P}$.

Teorema 5.2.8 (Marek e Truszczynski [45])

Seja **P** um programa em lógica localmente estratificado. Então seu modelo perfeito é único. Além disso, **P** possui um único modelo estável que coincide com o modelo perfeito de **P**. ■

Exemplo 5.2.2 (Marek e Truszczynski [45])

Considere o programa **P** composto por :

$$B \leftarrow \qquad C \leftarrow A \qquad A \leftarrow B,\mathbf{not}(D).$$

Considere a função *rank* definida da seguinte forma : *rank*(B) = *rank*(D) = 0 e *rank*(A) = *rank*(C) = 1. Os estratos $\mathbf{B}_\xi$ e $\mathbf{P}_\xi$, $0 \leq \xi \leq 1$, deste programa são :

$$\mathbf{B}_0 = \{B,D\} \text{ e } \mathbf{P}_0 = \{B \leftarrow\},$$

$$\mathbf{B}_1 = \{A,C\} \text{ e } \mathbf{P}_1 = \{ C \leftarrow A \,;\, A \leftarrow B,\mathbf{not}(D)\}.$$

Temos portanto, pela definição 5.2.6, que :

$$M_1 = \{B\}, \text{ onde } Q_1 = \varnothing \text{ ; e}$$

$$M_2 = \{A,B,C\}, \text{ onde } Q_2 = \{C \leftarrow A \,;\, A \leftarrow B\}.$$

Logo, $M = M_1 \cup M_2 = \{B,A,C\}$ é o modelo perfeito para o programa **P**. ■

Uma outra classe de programas em lógica é aquela formada por programas que permitem a utilização da negação clássica. Este tipo de programa é chamado de ***CN-programas*** (***classical negation-programs*** - Marek e Truszczynski [45]). Um ***CN-programa em lógica*** é formado por um conjunto de ***CN-cláusulas***, que são expressões da forma :

$$A \leftarrow B_1, \ldots, B_m, \mathbf{not}(C_1), \ldots, \mathbf{not}(C_n), \ (m, n \geq 0)$$

onde A, B_i e C_i são *literais* da linguagem de primeira-ordem ***L***, ou seja, são fórmulas atômicas de ***L*** ou sua negação.

A classe de modelos dos CN-programas é determinada através do conceito de ***conjuntos de respostas estáveis*** (*stable answer sets*). Seja Lit_H o conjunto formado pelos elementos da base de Herbrand B_H e suas negações. Como no caso de modelos estáveis, aqui também é necessário a definição do ***reduto*** de um CN-programa :

Definição 5.2.7 (Marek e Truszczynski [45])

Seja $M \subseteq \mathit{Lit}_H$.

1. Uma CN-cláusula $A \leftarrow B_1, \ldots, B_m, \mathbf{not}(C_1), \ldots, \mathbf{not}(C_n)$, $(m, n \geq 0)$, onde A, B_i e C_i são literais, é ***irrelevante com respeito a*** M se pelo menos um dos C_i está em M.

2. Seja $\mathbb{P}$ um CN-programa. O ***reduto de*** $\mathbb{P}$ ***com respeito a*** M, representado por $\mathbb{P}^M$, é obtido a partir de *ground*($\mathbb{P}$) pela :

   a) remoção de todas as CN-cláusulas que são irrelevantes com respeito a M.

   b) remoção de cada premissa **not**(C_i) das CN-cláusulas restantes. ■

Observe que diferente dos redutos dos programas em lógica que não permitem a presença da negação clássica, o reduto de um CN-programa **não** é um programa Horn. O reduto de um CN-programa é chamado de ***CN-programa sem o operador "not"*** (**not-free CN-program**). Para caracterizar os conjuntos de respostas estáveis, precisamos da seguinte definição :

Definição 5.2.8 (Marek e Truszczynski [45])

Seja $M \subseteq Lit_H$. Dizemos que M é ***fechado sob uma CN-cláusula básica*** da forma : $A \leftarrow B_1, \ldots, B_m$, quando uma das duas condições é satisfeita :

1. $M = Lit_H$.
2. M é consistente (ou seja, não contém um par de literais contraditórios de Lit_H) e sempre que para todo $i \in [1,m]$, $B_i \in M$, então $A \in M$.

Dizemos que o conjunto M é **fechado sob um CN-programa** $\mathbb{P}$, que não contenha nenhuma ocorrência de **not**, se M é fechado sob toda CN-cláusula de *ground*($\mathbb{P}$). ■

Os conjuntos de respostas estáveis são caracterizados da seguinte forma :

Teorema 5.2.9 (Marek e Truszczynski [45])

Seja $\mathbb{P}$ um CN-programa. Um subconjunto M de Lit_H é um ***conjunto de resposta estável*** para $\mathbb{P}$ se, e somente se, M é o menor conjunto fechado sob o reduto $\mathbb{P}^M$. ■

Para finalizar esta seção, apresentamos a seguir os programas em lógica clausais.

Definição 5.2.9 (Marek e Truszczynski [45])

Um ***programa em lógica clausal*** (ou CL-programa) é formado por um conjunto de cláusulas da forma :

$$A \leftarrow B_1, \ldots, B_m, \textbf{not}(C_1), \ldots, \textbf{not}(C_n), \ (m, n \geq 0)$$

onde A, B_i e C_i são cláusulas da linguagem de primeira-ordem $\mathcal{L}$, ou seja, são disjunções de fórmulas atômicas e suas negações. ■

III. Programação em Lógica e Sistemas de Esferas

Uma segunda maneira de interpretar um programa em lógica é a chamada ***procedural***, onde as cláusula são vistas como regras de inferência ou defaults (Bidoit e Froidevaux [5], Marek e Truszczynski [45]). Neste caso, uma cláusula da forma :

$$A \leftarrow B_1, \ldots, B_m, \mathbf{not}(C_1), \ldots, \mathbf{not}(C_n)$$

poderia ser interpretada da seguinte maneira : "se todas as premissas $B_1, \ldots, B_m$, podem ser provadas e nenhuma premissa $C_1, \ldots, C_n$ pode ser provada, então A deve ser concluído."

Como vimos anteriormente, do ponto de vista de um sistema de esferas, podemos interpretar "$\neg C_i$ é consistente" como "$\neg C_i$ expande" um certo conjunto de sentenças. Logo, podemos interpretar que uma premissa C_i "não poder ser provada" como "$\neg C_i$ é consistente com", ou, "$\neg C_i$ expande" um dado conjunto de sentenças.

Para ilustrar como utilizamos sistemas de esferas para caracterizar modelos de programas em lógica, considere que os conjuntos $[A\leftarrow]$, $[A\leftarrow B_i]$ e $[\mathbf{not}(C_i)]$ representam, respectivamente, a classe de modelos dos seguintes conjuntos de sentenças $\{A\}$, $\{B_i \rightarrow A\}$ e $\{\neg C_i\}$ (i.e., $[A\leftarrow] = [A]$, $[A \leftarrow B_i] = [B_i \rightarrow A]$ e $[\mathbf{not}(C_j)] = [\neg C_j]$), onde A, B_i e C_j são fórmulas atômicas básicas.

Voltando ao Exemplo 5.2.1

Vimos acima que o programa $\mathcal{P}$ formado por :

$$A \leftarrow \qquad\qquad B \leftarrow$$

$$C \leftarrow A, \mathbf{not}(D) \qquad\qquad D \leftarrow B, \mathbf{not}(C)$$

possui dois modelos estáveis : $M = \{A,B,C\}$, $N = \{A,B,D\}$. Portanto, desejamos construir dois sistemas de esferas, cada um centrado numa classe de modelos que satisfaz os mesmos conjuntos de fórmulas atômicas básicas que cada modelo estável de $\mathcal{P}$ também satisfaz. Para isto, divida as cláusulas do programa em dois conjuntos : um formado somente pelas cláusulas de Horn, correspondendo ao conjunto de fatos do programa $\mathcal{P}$, e outro formado somente por cláusulas não-Horn. Logo, obtemos : $P_o = \{A \leftarrow, B \leftarrow\}$ e $NHC = \{C \leftarrow A, \mathbf{not}(D), D \leftarrow B, \mathbf{not}(C)\}$.

Podemos construir um sistema de esferas para este programa começando pela esfera $[P_o] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B,\neg C,D\}, \{A,B,C,\neg D\}, \{A,B,\neg C,\neg D\}\}$ que corresponde a classe de modelos dos fatos estabelecidos em $\mathcal{P}$. Então, considere a cláusula C $\leftarrow$ A, **not**(D). Se considerarmos esta cláusula como uma regra de inferência, para provar C temos que verificar se A pode ser provado a partir de P_o e se D não pode ser provado a partir de P_o.

Note que "*A pode ser provado a partir de P_o*" significa, em termos de esferas, que temos que verificar se $[P_o]$ está contido em [A] ($[P_o] \subseteq [A]$), o que obviamente é o caso. Por outro lado, "*D não pode ser provado a partir de P_o*" significa que existe pelo menos um modelo em $[P_o]$ que não satisfaz D (i.e., $[P_o] \cap [\neg D] \neq \varnothing$), ou em termos de esferas, que $\neg$D ***expande*** o conjunto P_o (de fato, $[P_o] \cap [\neg D] = \{\{A,B,C,\neg D\}, \{A,B,\neg C,\neg D\}\} \neq \varnothing$). Como tais condições são satisfeitas, podemos provar C e, conseqüentemente, podemos construir a seguinte esfera correspondente a classe de modelos na qual A, B e C são verdadeiros : $[P_1] = [P_o] \cap [C] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B,C,\neg D\}\}$.

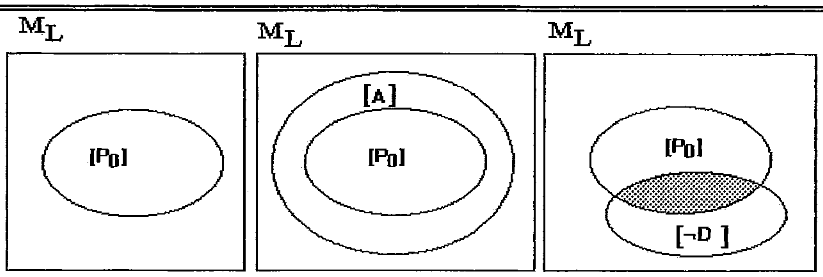


Fig. 5.3.1 : Condições satisfeitas.

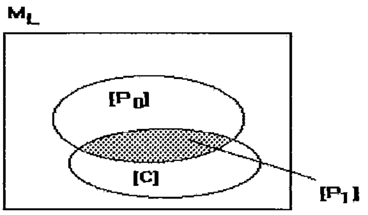


Fig. 5.3.2 : Expansão de $[P_o]$: $[P_1] = [P_o] \cap [C] \neq \varnothing$.

Considerando a classe de modelos $[P_1]$ construída acima e a cláusula D $\leftarrow$ B, **not**(C), temos que verificar se as seguintes condições são satisfeitas : (a) $[P_1] \subseteq [A]$; e (b) $[P_1] \cap [\neg C] \neq \varnothing$. Note que $[P_1] \cap [\neg C] = \varnothing$ viola (b), e isto significa em termos de esferas que $\neg$C ***revê*** o conjunto P_1. Logo, D não pertence a classe de modelos de $\mathcal{P}$ na qual estamos interessados.

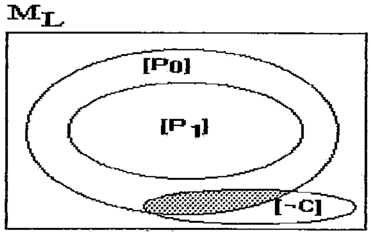


Fig. 5.3.3 : Revisão de $[P_1]$: $[P_1] \cap [\neg C] = \varnothing$.

Note que $M = \{A,B,C\}$ corresponde ao conjunto de fórmulas atômicas básicas satisfeitas pela classe de modelos $[P_1]$. Para construir um sistema de esferas correspondente N temos que começar com a cláusula D ← B, **not**(C) ao invés de C ← A, **not**(D).■

A seguir, apresentaremos formalmente como construir sistemas de esferas para caracterizar programas em lógica. A caracterização semântica dos programas segue o seguinte padrão : dado um programa em lógica, construímos (segundo certas condições) sistemas de esferas a partir de seqüência de cláusulas que não são de Horn. Então, o conjunto de todas as seqüências que geram tais sistemas é parcialmente ordenado (através da relação prefixo) e entre as seqüências maximais com respeito a tal ordem parcial, selecionamos aquelas em que estamos interessados. Logo, o centro de cada sistema selecionado corresponderá a classe de modelo do programa dado. Por outro lado, dada uma classe de modelos de um programa em lógica, podemos construir um sistema de esferas que está centrado em tal classe.

Dado um programa em lógica $\mathbb{P}$, com cláusulas da forma A ← B_1 ,..., B_m, **not**(C_1), ..., **not**(C_n) (onde m, n ≥ 0), e M um modelo (estável, suportado, perfeito ou conjunto de resposta estável) de $\mathbb{P}$, defina $\mathcal{CLAUS}$ como sendo o conjunto formado por todas as cláusulas $\mathbb{C}$ de *ground*($\mathbb{P}$), que não são cláusulas de Horn, tais que *head*($\mathbb{C}$) ∈ M. (i.e., $\mathcal{CLAUS} = \{\mathbb{C} \in ground(\mathbb{P})$ / $\mathbb{C}$ = A ← B_1 ,..., B_m, **not**(C_1), ..., **not**(C_n), n ≠ 0 e A ∈ $M\}$).

Definição 5.3.1

Seja $\mathbb{C}$ = A $\leftarrow$ B_1 ,..., B_m, **not**(C_1), ..., ..., **not**(C_n), onde m $\geq$ 0 e n > 0, uma cláusula básica e [K] uma classe de modelos. Dizemos que $\mathbb{C}$ ***é aplicável a*** **[K]** se, e somente se:

- [K] $\subseteq$ [B_l], $\forall$l $\in$ [1,m] e

- [K] $\cap$ [$\neg C_h$] $\neq \emptyset$, $\forall$h $\in$ [1,n] ($\mathbb{C}$ ***satisfaz o teste de consistência com respeito a*** [K]).■

Definição 5.3.2

Seja $\mathbb{P}$ um programa em lógica, P_o = {A $\leftarrow$ B_1 ,..., B_m $\in$ *ground*($\mathbb{P}$) e m $\geq$ 0} e $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ = $<c_1$, c_2,...> uma seqüência (possivelmente infinita) de cláusulas em *ground*($\mathbb{P}$) tal que c_ς = A_ς $\leftarrow$ $B_{\varsigma 1}$,..., $B_{\varsigma m}$, **not**($C_{\varsigma 1}$), ..., **not**($C_{\varsigma n}$), onde m $\geq$ 0 e n > 0, ou seja, c_ς $\in$ *ground*($\mathbb{P}$) \ P_o, para todo $\varsigma \in$ I.

O sistema de esferas **S** definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é o conjunto {M_L, [P_o],..., [P_k],...}, onde [P_o] é a classe de modelos do conjunto P_o e, para cada $\varsigma \in$ I :

$$[P_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \cap [A_\varsigma] \text{ se } c_\varsigma \text{ é aplicável a } \bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma].$$

O sistema de esferas **S** definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ está centrado em [$\mathcal{P}$] = $\bigcap_{\varsigma \in I} [P_\varsigma]$.■

Definição 5.3.3

Seja $\mathbb{P}$ um programa em lógica e $\zeta_\mathbb{P}$ o conjunto de todas as seqüência de cláusulas básicas $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ que definem sistemas de esferas como na definição 5.3.2. O conjunto $\zeta_\mathbb{P}$ pode ser parcialmente ordenado por $\leq_\mathbb{P}$ definida como: $<\mathcal{C}'>$ $\leq_\mathbb{P}$ $<\mathcal{C}''>$ se $<\mathcal{C}'>$ é prefixo de $<\mathcal{C}''>$.

Dizemos que $<\mathcal{C}>$ $\in \zeta_\mathbb{P}$ é uma seqüência maximal com respeito a $\leq_\mathbb{P}$ de cláusulas em *ground*($\mathbb{P}$) se não existe nenhuma seqüência $<\mathcal{C}'>$ $\in \zeta_\mathbb{P}$ tal que $<\mathcal{C}>$ $\leq_\mathbb{P}$ $<\mathcal{C}'>$. ■

Teorema 5.3.1

Seja $\mathbb{P}$ um programa em lógica e P_o = {A $\leftarrow$ B_1 ,..., B_m $\in$ *ground*($\mathbb{P}$) e m $\geq$ 0}.

Seja $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal com respeito a $\leq_\mathbb{P}$ de cláusulas em *ground*($\mathbb{P}$) \ P_o que define o sistema de esferas **S** (como na definição 5.3.2). Se, para cada $\varsigma \in$ I, $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \neq \emptyset$ e c_ς satisfaz o teste de consistência com respeito a [$\mathcal{P}$] então M = {a $\in$ B_H: $\forall N \in$ [$\mathcal{P}$], $N \models$ a} é um ***modelo estável*** de $\mathbb{P}$.■

Teorema 5.3.2

Seja $\mathcal{P}$ um programa em lógica, M um modelo estável de $\mathcal{P}$, $P_o = \{A \leftarrow B_1, ..., B_m \in ground(\mathcal{P})$ e $m \geq 0\}$ e $\mathcal{CLAUS}$ o conjunto de cláusulas básicas obtido a partir de M. As cláusulas em $\mathcal{CLAUS}$ podem ser colocados em uma seqüência (possivelmente infinita) $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que para o sistema de esferas **S** definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 5.3.2) temos que, para todo $\varsigma \in I$, $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \neq \emptyset$, c_ς satisfaz o teste de consistência com respeito a $[\mathcal{P}]$ e, para todo $a \in M$, temos que $N \models a$, $\forall N \in [\mathcal{P}]$, onde $[\mathcal{P}]$ é o centro do sistema **S**. ■

Voltando ao Exemplo 5.2.1

Considere o programa $\mathcal{P}$:

$A \leftarrow$ $\qquad$ $C \leftarrow A$, **not**(D)

$B \leftarrow$ $\qquad$ $D \leftarrow B$, **not**(C)

Temos : $P_o = \{A \leftarrow, B \leftarrow\}$. Considere a seqüência de cláusulas < $C \leftarrow A$, **not**(D) ; $D \leftarrow B$, **not**(C) >. Ela não gera um sistemas de esferas como na definição 5.3.2 uma vez que :

- $[P_o] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B,C,\neg D\}, \{A,B,\neg C,D\}, \{A,B,\neg C,\neg D\}\}$;

  $[P_1] = [P_o] \cap [C] = \{\{A,B,C,D\},\{A,B,C,\neg D\}\}$ pois $[P_o] \subseteq [A]$ e

  $[P_o] \cap [\neg D] \neq \emptyset$;

- No entanto, não podemos construir $[P_2]$ já que $[P_1] \cap [\neg C] = \emptyset$.

Também a seqüência <$D \leftarrow B$, **not**(C) ; $C \leftarrow A$, **not**(D)> não gera um sistema de esferas como desejamos.

Se considerarmos a seqüência formada por uma única cláusula, <$C \leftarrow A$, **not**(D)> ou <$D \leftarrow B$, **not**(C)>, podemos construir um sistema de esferas como na definição 5.3.2, obtendo os modelos estáveis deste programa. Considere, então, a seqüência <$D \leftarrow B$, **not**(C)> :

- $[P_o] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B,C,\neg D\}, \{A,B,\neg C,D\}, \{A,B,\neg C,\neg D\}\}$;
- $[P_1] = [P_o] \cap [D] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B, \neg C, D\}\}$já que $[P_o] \subseteq [B]$ e

  $[P_o] \cap [\neg C] \neq \emptyset$;

obtendo-se o sistema de esferas $\mathbf{S} = \{M_L, [P_o], [P_1]\}$ centrado em $[P_1]$ de acordo com a definição 5.3.2 e, pelo teorema 5.3.1, $M = \{A,B,D\}$ é um modelo estável para o programa $\mathcal{P}$. ■

Da mesma maneira, os modelos suportados de um programa $\mathbf{P}$ podem ser determinados através de sistemas de esferas uma vez que, como Marek e Truszczynski [45] demonstraram, eles estão relacionados com a classe de modelos das extensões fracas de uma teoria default (W,Δ). Portanto, podemos definir os modelos suportados através de sistemas de esferas da seguinte maneira :

Definição 5.3.4

Seja $\mathbb{C} = A \leftarrow B_1, \ldots, B_m, \mathbf{not}(C_1), \ldots, \ldots, \mathbf{not}(C_n)$, onde $m \geq 0$ e $n > 0$, uma cláusula básica e [K] uma classe de modelos. Dizemos que $\mathbb{C}$ ***é aplicável a* [K]** se, e somente se,

- $[K] \cap [B_l] \neq \emptyset, \forall l \in [1,m]$ e

- $[K] \cap [\neg C_h] \neq \emptyset, \forall h \in [1,n]$ ($\mathbb{C}$ ***satisfaz o teste de consistência com respeito a*** [K]).■

Observe que o fato de todo modelo estável ser suportado mas nem todo modelo suportado ser estável está refletido no sistema de esferas que definem cada um destes modelos através das condições : $\forall l \in [1,m], \bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \subseteq [B_{\varsigma l}]$ (para modelos estáveis) e $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \cap [B_{\varsigma l}] \neq \emptyset$ (para modelos suportados).

Definição 5.3.5

Seja $\mathbf{P}$ um programa em lógica, $P_o = \{A \leftarrow B_1, \ldots, B_m \in ground(\mathbf{P})$ e $m \geq 0\}$ e $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) de cláusulas em $ground(\mathbf{P})$ tal que $c_\varsigma = A_\varsigma \leftarrow B_{\varsigma 1}, \ldots, B_{\varsigma m}, \mathbf{not}(C_{\varsigma 1}), \ldots, \mathbf{not}(C_{\varsigma n})$, onde $m \geq 0$ e $n > 0$, ou seja, $c_\varsigma \in ground(\mathbf{P}) \setminus P_o$, para todo $\varsigma \in I$.

O sistema de esferas S definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é o conjunto $\{M_L,[P_o],\ldots,[P_k],\ldots\}$, onde $[P_o]$ é a classe de modelos do conjunto P_o e, para cada $\varsigma \in I$, $[P_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \cap [A_\varsigma]$ se c_ς é aplicável a $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma]$.

O sistema de esferas S definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ está centrado em $[\mathcal{P}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [P_i]$.■

Teorema 5.3.3

Seja $\mathbf{P}$ um programa em lógica e $P_o = \{A \leftarrow B_1, \ldots, B_m \in ground(\mathbf{P})$ e $m \geq 0\}$.

Seja $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal de cláusulas em $ground(\mathbf{P}) \setminus P_o$ que define o sistema de esferas S (como na definição 5.3.5). Se, para todo

$\varsigma \in I$, $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \neq \emptyset$, $[\mathcal{P}] \subseteq [A_\varsigma]$ e c_ς satisfaz o teste de consistência com respeito a $[\mathcal{P}]$, então $M = \{a \in B_H: \forall N \in [\mathcal{P}], N \models a\}$ é um ***modelo suportado*** de $\mathbf{P}$. ■

Teorema 5.3.4

Seja $\mathbf{P}$ um programa em lógica, M um modelo suportado de $\mathbf{P}$, $P_o = \{A \leftarrow B_1, \ldots, B_m \in$ *ground*($\mathbf{P}$) e m $\geq 0\}$ e $\mathcal{CLAUS}$ o conjunto de cláusulas básicas obtido a partir de M. As cláusulas em $\mathcal{CLAUS}$ podem ser colocadas em uma seqüência (possivelmente infinita) $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que para o sistema de esferas **S** definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 5.3.5) temos que, para todo $\varsigma \in I$, $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \neq \emptyset$, $[\mathcal{P}] \subseteq [A_\varsigma]$ e c_ς satisfaz o teste de consistência com respeito a $[\mathcal{P}]$ e, para todo $a \in M$ temos que $N \models a$, $\forall N \in [\mathcal{P}]$, onde $[\mathcal{P}]$ é o centro do sistema **S**. ■

Voltando ao Exemplo 5.2.1

No programa $\mathbf{P}$:

A ←	C ← A, **not**(D)
B ←	D ← B, **not**(C)

Considerando a seqüência formada por uma única cláusula, <C ← A, **not**(D)> ou <D ← B, **not**(C)>, podemos construir um sistema de esferas como na definição 5.3.4, obtendo os modelos suportáveis (que são exatamente os modelos estáveis) deste programa. Considere então a seqüência <D ← B, **not**(C)>. Então :

- $[P_o] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B,C,\neg D\}, \{A,B,\neg C,D\}, \{A,B,\neg C,\neg D\}\}$;
- $[P_1] = [P_o] \cap [D] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B, \neg C, D\}\}$ uma vez que $[P_o] \cap [B] \neq \emptyset$ e $[P_o] \cap [\neg C] \neq \emptyset$.

Assim, obtemos o sistema de esferas $\mathbf{S} = \{M_L, [P_o], [P_1]\}$ centrado em $[P_1]$ de acordo com a definição 5.3.4 e, pelo teorema 5.3.3, $\boldsymbol{M} = \{A,B,D\}$ é um modelo suportado para o programa $\mathbf{P}$. ■

Os programas em lógica localmente estratificados (e, conseqüentemente, os programas estratificados) também podem ter seus modelos caracterizados através do sistema de esferas da seguinte maneira :

Definição 5.3.6

Seja $\mathbf{P}$ um programa localmente estratificado e *rank* sua função de estratificação local com contra-domínio $\{\xi / \xi < \alpha\}$, e $\mathbf{P}_\xi = \{\mathbb{C} \in$ *ground*($\mathbf{P}$) / *rank*(*head*($\mathbb{C}$)) $= \xi\}$.

Seja $<\mathcal{C}_{P\xi}> = <c_1, c_2, ...>$ uma seqüência de cláusulas em $\mathbf{P}_\xi$ e $<\mathcal{C}_P>$ a seqüência obtida pela concatenação de $<\mathcal{C}_{P0}>,<\mathcal{C}_{P1}>,...,<\mathcal{C}_{P\xi}>$, para todo $\xi < \alpha$.

Um sistema de esferas **S** definido por $<\mathcal{C}_P>$ é o conjunto $\{M_L, [P_o], [P_1],...\}$ onde, para cada $\varsigma \in I$:

- $[P_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \cap [A_\varsigma]$ se c_ς é aplicável (segundo a definição 5.3.1)

a $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma]$. ■

Teorema 5.3.5

Seja $\mathbb{P}$ um programa localmente estratificado, *rank* sua função de estratificação local com contra-domínio $\{\xi / \xi < \alpha\}$, e $\mathbf{P}_\xi = \{\mathbb{C} \in ground(\mathbb{P}) / rank(head(\mathbb{C})) = \xi\}$.

Seja $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência maximal de cláusulas em *ground*($\mathbb{P}$) que define o sistema de esferas **S** (como na definição 5.3.6). Se, para cada $\varsigma \in I$, $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \neq \emptyset$ e c_ς satisfaz o teste de consistência com respeito a $[\mathcal{P}]$ então $M = \{a \in B_H : \forall N \in [\mathcal{P}], N \models a\}$ é um ***modelo perfeito*** de $\mathbb{P}$.■

Teorema 5.3.6

Seja $\mathbb{P}$ um programa localmente estratificado, *rank* sua função de estratificação local com contra-domínio $\{\xi / \xi < \alpha\}$, e $\mathbf{P}_\xi = \{\mathbb{C} \in ground(\mathbb{P}) / rank(head(\mathbb{C})) = \xi\}$.

Seja M um modelo perfeito de $\mathbb{P}$, e $\mathcal{CLAUS}$ o conjunto de cláusulas básicas obtido a partir de M. As cláusulas em $\mathcal{CLAUS}$ podem ser colocados em uma seqüência $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que para o sistema de esferas **S** definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 5.3.6) temos que, para todo $\varsigma \in I$: $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \neq \emptyset$, c_ς satisfaz o teste de consistência com respeito a $[\mathcal{P}]$ e para todo $a \in M$ temos que $N \models a$, $\forall N \in [\mathcal{P}]$, onde $[\mathcal{P}]$ é a esfera mais interna do sistema **S**.■

Exemplo 5.3.3 (Marek e Truszczynski [45])

Seja $\mathbb{P}$ o programa em lógica localmente estratificado formado por :

$$B \leftarrow \qquad D \leftarrow A \qquad A \leftarrow B,\mathbf{not}(C).$$

Considere a função *rank* definida da seguinte forma : *rank*(B) = *rank*(C) = 0 e *rank*(A) = *rank*(D) = 1. O estrato $\mathbf{P}_\xi$, $0 \leq \xi \leq 1$, é definido por :

$$\mathbf{P}_0 = \{B \leftarrow\},$$
$$\mathbf{P}_1 = \{ D \leftarrow A ; A \leftarrow B,\mathbf{not}(C)\}.$$

Considere a seqüência maximal de cláusulas $<\mathcal{C}_P> = <B \leftarrow ; D \leftarrow A; A \leftarrow B,$**not**$(C)>$, obtida pela concatenação de $<\mathcal{C}_{P0}> = <B \leftarrow>$ com $<\mathcal{C}_{P1}> = <D \leftarrow A ; A \leftarrow B,$**not**$(C)>$. Não podemos construir um sistema de esferas como desejado pois teríamos :

- $[P_o] = M_L \cap [B] = \{\{A,B,C,D\}, \{\neg A,B,C,D\}, \{A,B,\neg C,D\}, \{A,B,C,\neg D\}, \{\neg A,B,\neg C,D\}, \{\neg A,B,C,\neg D\}, \{A,B,\neg C,\neg D\}, \{\neg A,B,\neg C,\neg D\}\}$;
- Não poderíamos construir $[P_1] = [P_o] \cap [D]$ uma vez que $[P_0] \subseteq [A]$ não é verdadeiro.

Observe que a seqüência $<\mathcal{C}'_P> = <B \leftarrow; A \leftarrow B,$**not**$(C) ; D \leftarrow A >$, obtida pela concatenação de $<\mathcal{C}_{P0}> = <B \leftarrow>$ com $<\mathcal{C}'_{P1}> = <A \leftarrow B,$**not**$(C); D \leftarrow A >$, gera um sistema de esferas $\mathbf{S'} = \{M_L,[P'_o] ,[P'_1] ,[P'_2]\}$, como desejado pois :

- $[P'_o] = M_L \cap [B] = \{\{A,B,C,D\}, \{\neg A,B,C,D\}, \{A,B,\neg C,D\}, \{A,B,C,\neg D\}, \{\neg A,B,\neg C,D\}, \{\neg A,B,C,\neg D\}, \{A,B,\neg C,\neg D\}, \{\neg A,B,\neg C,\neg D\}\}$;
- $[P'_1] = [P'_o] \cap [A] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B,\neg C,D\}, \{A,B,C,\neg D\}, \{A,B,\neg C,\neg D\}\}$, uma vez que $[P'_0] \subseteq [B]$ e $[P'_0] \cap [\neg C] = \{\{A,B,\neg C,D\}, \{\neg A,B,\neg C,D\}, \{A,B,\neg C,\neg D\}, \{\neg A,B,\neg C,\neg D\}\} \neq \varnothing$;
- $[P'_2] = [P'_1] \cap [D] = \{\{A,B,C,D\}, \{A,B,\neg C,D\}\} \neq \varnothing$, uma vez que $[P'_1] \subseteq [A]$.

Logo, $M = \{a \in B_H : \forall N \in [P'_2], N \models a\} = \{A,B,D\}$ é um modelo perfeito de $\mathbf{P}$. ■

Terminaremos esta seção, apresentando a caracterização para CN-programas e CL-programas. Comparando com a caracterização utilizada para modelos estáveis, veremos que a principal diferença está no fato de que agora não é feita a separação entre cláusulas que são de Horn e aquelas que não são.

Definição 5.3.7

Seja $\mathbf{P}$ um CN-programa e $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <c_1 , c_2,...>$ uma seqüência (possivelmente infinita) de CN-cláusulas em *ground*($\mathbf{P}$), onde $c_\varsigma = A_\varsigma \leftarrow B_{\varsigma 1} ,..., B_{\varsigma m}$, **not**$(C_{\varsigma 1})$, ..., **not**$(C_{\varsigma n})$.

O sistema de esferas **S** definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é o conjunto $\{[P_o],...,[P_k],...\}$, onde $[P_o] = M_L$ e, para cada $\varsigma \in I$, $[P_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \cap [A_\varsigma]$ se c_ς é aplicável (segundo a definição 5.3.1) a $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma]$.

O sistema de esferas **S** definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ está centrado em $[\mathcal{P}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [P_\varsigma]$. ■

Teorema 5.3.7

Seja $\mathbb{P}$ um CN-programa e $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal de CN-cláusulas em *ground*($\mathbb{P}$) que define o sistema de esferas **S** (como na definição 5.3.7). Se, para cada $\varsigma \in I$, $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \neq \emptyset$ e c_ς satisfaz o teste de consistência com respeito a $[\mathcal{P}]$ então $M = \{a \in Lit_H : \forall N \in [\mathcal{P}], N \models a\}$ é um ***conjunto de resposta estável*** de $\mathbb{P}$.■

Teorema 5.3.8

Seja $\mathbb{P}$ um CN-programa, M um conjunto de resposta estável de $\mathbb{P}$, e $\mathcal{CLAUS}$ o conjunto de cláusulas básicas obtido a partir de M. As CN-cláusulas em $\mathcal{CLAUS}$ podem ser colocadas em uma seqüência (possivelmente infinita) $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que para o sistema de esferas **S** definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 5.3.7) temos que, para todo $\varsigma \in I$, $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \neq \emptyset$, c_ς satisfaz o teste de consistência com respeito a $[\mathcal{P}]$ e para todo $a \in M$ temos que $N \models a$, $\forall N \in [\mathcal{P}]$, onde $[\mathcal{P}]$ é o centro do sistema **S**. ■

A classe de modelo de um CL-programa em lógica (programa clausal) pode ser caracterizada substituindo-se ***literais*** por ***disjunção de literais*** na definição 5.3.7, e nos teoremas 5.3.7 e 5.3.8.

Definição 5.3.8

Seja $\mathbb{P}$ um CL-programa e $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <c_1, c_2,...>$ uma seqüência de CL-cláusulas em *ground*($\mathbb{P}$), onde $c_\varsigma = A_\varsigma \leftarrow B_{\varsigma 1},..., B_{\varsigma m}, \mathbf{not}(C_{\varsigma 1}), ..., \mathbf{not}(C_{\varsigma n})$. O sistema de esferas **S** definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é o conjunto $\{[P_o],...,[P_k],...\}$, onde $[P_o] = M_L$ e, para cada $\varsigma \in I$, $[P_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \cap [A_\varsigma]$ se c_ς é aplicável (segundo a definição 5.3.1) a $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma]$.

O sistema de esferas **S** definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ está centrado em $[\mathcal{P}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [P_\varsigma]$.■

Seja $Clause_H$ a coleção de todas as cláusulas básicas da linguagem $\mathcal{L}$, ou seja, disjunções de literais básicos de $\mathcal{L}$.

Teorema 5.3.9

Seja $\mathbf{P}$ um CL-programa, e $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal de CL-cláusulas em *ground*($\mathbf{P}$) que define o sistema de esferas S (como na definição 5.3.8). Se, para cada $\varsigma \in I$, $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \neq \varnothing$ e c_ς satisfaz o teste de consistência com respeito a $[\mathcal{P}]$ então $M = \{a \in Clause_H : \forall N \in [\mathcal{P}], N \models a\}$ é um ***conjunto de resposta estável*** de $\mathbf{P}$.■

Teorema 5.3.10

Seja $\mathbf{P}$ um CL-programa, M um conjunto de resposta estável de $\mathbf{P}$, e $\mathcal{CLAUS}$ o conjunto de cláusulas básicas obtido a partir de M. As CL-cláusulas em $\mathcal{CLAUS}$ podem ser colocadas em uma seqüência (possivelmente infinita) $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que para o sistema de esferas S definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 5.3.8) temos que, para todo $\varsigma \in I$, $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \neq \varnothing$; c_ς satisfaz o teste de consistência com respeito a $[\mathcal{P}]$ e para todo $a \in M$ temos que $N \models a$, $\forall N \in [\mathcal{P}]$, onde $[\mathcal{P}]$ é o centro do sistema S. ■

IV. Conclusão

Neste capítulo, utilizamos o conceito de sistema de esferas de Grove [30] para caracterizar os modelos de vários tipos de programas em lógica. Isso foi possível graças ao ambiente semântico definido no capítulo anterior para lógica default e a relação desta com programação em lógica.

Note que diferentemente da interpretação declarativa, o operador **not** não é interpretado como sendo a negação clássica. Ele é tratado como sendo a *incapacidade* de provar C_i, ou, do ponto de vista de uma *interpretação default*, **not**(C_i) significa que "$\neg C_i$ é consistente", ou, do ponto de vista de um sistema de esferas, **not**(C_i) significa que "C_i não faz parte do nosso conjunto de crenças". Da mesma maneira como aconteceu nas lógicas default, a definição deste ambiente também simplifica a definição semântica dos programas em lógica.

As demonstrações dos teoremas deste capítulo estão no apêndice D e foram feitas a partir da tradução de programas em lógica para teorias default ; daí a semelhança entre a apresentação dos teoremas deste capítulo e os do capítulo 4.

CAPÍTULO 6

Revisão de Crenças através de Teorias Default

1. Introdução

Até agora, utilizamos as noções de expansão e revisão para criar um ambiente semântico no qual as lógicas default puderam ser caracterizadas. Isto nos permitiu estabelecer um elo entre as várias lógicas default existentes e o processo de revisão de crenças, mais especificamente, através do modelo de esferas de Grove. Como conseqüência da definição deste ambiente semântico e da relação existente entre lógica default e programas em lógica, foi possível definir um ambiente semântico baseado em esferas no qual a classe de modelos de um dado programa em lógica pode ser determinada.

Neste capítulo, procuraremos estreitar o elo entre lógicas default e o processo de revisão de crenças. A idéia central é mostrar que podemos utilizar teorias default (clássicas e não clássicas) como uma forma de representação de processos de revisão. Nosso ponto de partida será mostrar que, podemos caracterizar a classe de modelos de uma base de crenças revista (ver Nebel [52] e seção 3.4) utilizando teorias default supernormais. Dessa forma, queremos mostrar que o processo de revisão de uma base de crenças e o processo de construção da extensão de uma teoria default, possuem uma definição semântica comum : ambos os processos representam a expansão consistente de um certo conjunto inicial.

Assim, o processo de revisão de bases de crenças pode ser representado através de teorias default supernormais (priorizadas ou não), onde cada extensão de uma teoria default corresponde a uma *possível revisão* do conjunto (base de crenças) original. Conseqüentemente, tal como acontece na lógica default (existência de extensões "não-intuitivas" (Yale Shooting Problem [32])), no processo de revisão poderemos identificar a existência de revisões "não-intuitivas".

A utilização de outras teorias default que não as supernormais, bem como a utilização de outros tipos de lógica default que não a clássica, nos permitirá introduzir outros tipos de condições sobre a revisão que está sendo feita. Portanto, poderemos considerar as lógicas default como uma forma de modelagem de processos de revisão, que abrange as duas principais abordagens existentes (ver Gärdenfors [26]) : a *fundamentalista* (foundations approach), na qual um agente acredita somente em crenças que tenham alguma justificativa satisfatória (que corresponderá às teorias default não-supernormais clássicas e não-clássicas), e a *coerente* (coherence approach), na qual um agente acredita em crenças que sejam logicamente coerentes com suas outras crenças (que corresponderá às teorias default supernormais).

Finalizaremos este capítulo mostrando que é possível representar operadores de revisão de conjuntos de crenças que satisfaçam o Princípio da Irrelevância Sintática de Dalal (seção 3.5 e [17]), através de teorias default supernormais.

II. Revisão em Bases de Crenças via Lógica Default

No capítulo 3 (seção 3.4), apresentamos o modelo proposto por Nebel [52] no qual os estados epistêmicos são representados por conjuntos finitos de proposições, chamados de *bases de crenças*. Este tipo de representação nos permite distinguir dentro de um conjunto de crenças aquelas que surgem apenas como conseqüência de outras crenças, consideradas mais básicas. Assim, o processo de revisão é efetuado sobre este conjunto finito de crença.

Nesta seção, vamos examinar a relação existente entre este tipo de representação e teorias default supernormais, de um ponto de vista semântico, ou mais especificamente, através do ambiente semântico baseado em esferas para lógicas default. Esta relação vai nos permitir caracterizar semanticamente o processo de revisão de uma base de crenças através da noção de *expansão*, sem a necessidade da utilização da noção de *contração*. Além disso, veremos que esta ligação semântica permitirá ampliar a relação existente entre lógicas default e revisão de crenças.

Em [52], Nebel mostrou que, no caso proposicional, *teorias default ranqueadas* possuem o mesmo poder de expressão que o operador de revisão $\otimes$ para bases de crenças priorizadas. Uma *teoria default ranqueada* (Nebel [52]) é um par (W,Ξ), onde W é um conjunto finito de sentenças proposicionais representando os fatos e Ξ é uma seqüência finita $<\Lambda_1, \Lambda_2,...,\Lambda_n>$ de conjuntos finitos de sentenças proposicionais, onde as sentenças pertencentes a Λ_i possuem prioridade maior do que as pertencentes a Λ_{i+1}, para $1 \leq i < n$.

Uma *extensão* de uma teoria default ranqueada (W,Ξ) ou, como chamaremos, uma *R-extensão*, é um conjunto $E = Cn((\bigcup_{i=1}^{n} Ri) \cup W)$ tal que para todo $i \in [1,n]$:

1. $R_i \subseteq \Lambda_i$,
2. R_i é um subconjunto maximal de Λ_i tal que $(\bigcup_{j=1}^{i} Rj) \cup W$ é consistente.

Uma sentença ϕ é *fortemente provada* em (W,Ξ), denotada por $(W,\Xi) \mid\!\sim_F \phi$, se, e somente se, para qualquer R-extensão E de (W,Ξ), $\phi \in E$.

Formalmente, a relação entre o operador de revisão e teorias default ranqueadas é estabelecida pelo seguinte resultado :

Teorema 6.2.1 (Nebel [52])

Seja (W,Ξ) uma teoria default ranqueada, onde $\Xi = <\Lambda_1, \Lambda_2,..., \Lambda_n>$. Seja $C = \bigcup_{i=1}^{n} \Lambda_i$ a base de crenças priorizada com graus de relevância epistêmica $\Lambda_1, \Lambda_2,..., \Lambda_n$. Então para todo ϕ : $(W,\Xi) \mid\!\sim_F \phi$ se, e somente se, $\phi \in (C \otimes W)$. ■

Vamos examinar esta relação do ponto de vista semântico. Considere que desejamos rever uma base de crenças simples B_K (onde não existe prioridade entre as sentenças que formam este conjunto) por uma sentença α. Nebel (ver seção 3.3) formalizou este processo utilizando as noções de *contração* e *expansão* da seguinte maneira : a partir da base de crenças B_K, foi construído o conjunto $(B_K \downarrow \neg\alpha)$ composto por todos os subconjuntos maximais de B_K que não implicam $\neg\alpha$. Isso significa que cada conjunto em $(B_K \downarrow \neg\alpha)$ corresponde a uma maneira distinta de *contrair* a base de crenças B_K por $\neg\alpha$. A *revisão simples* $B_K \oplus \alpha$ foi então definida como sendo a *expansão* do conjunto formado pela interseção dos conjuntos de conseqüências lógicas de cada elemento de $(B_K \downarrow \neg\alpha)$ pela sentença α.

Pelo teorema 6.2.1, podemos expressar esta revisão simples através da teoria default ranqueada (W,Ξ) onde $W = \{\alpha\}$ e $\Xi = <\Lambda_1> = <B_K>$. É fácil verificar que a teoria default ranqueada (W,Ξ) corresponde a uma teoria (W,B_K) no sistema de Poole para raciocínio default (seção 2.7) e esta, por sua vez, corresponde a uma teoria default clássica supernormal (seção 2.2) (W_0,Δ), onde $W_0 = W$ e $(:\beta/\beta) \in \Delta$ se, e somente se, $\beta \in B_K$.

Considere então esta teoria default clássica supernormal (W_0,Δ). Para cada extensão E da teoria (W_0,Δ), seja $GD(E,(W_0,\Delta)) = \{:\beta_1/\beta_1, :\beta_2/\beta_2,..., :\beta_n/\beta_n\}$ o conjunto de defaults geradores de E. Note que, para cada extensão E, o conjunto $CONS(GD(E,(W_0,\Delta))) = \{\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\}$ é um subconjunto maximal do conjunto $CONS(\Delta) = B_K$ que não implica $\neg\alpha$ pois, caso contrário, se $\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\}$ não fosse maximal ou se $\{\beta_1,\beta_2,...,\beta_n\}$ implicasse $\neg\alpha$, $E = Cn(W_0 \cup \{\beta_1, \beta_2,..., \beta_n\})$ não poderia ser uma extensão de (W_0,Δ)[1]. Assim, dada uma extensão E, $CONS(GD(E,(W_0,\Delta))) \in (B_K \downarrow \neg\alpha)$. Por outro lado, se $\lambda \in (B_K \downarrow \neg\alpha)$, então $E' = Cn(W \cup \lambda)$ é uma extensão onde $CONS(GD(E',(W_0,\Delta))) = \lambda$.

Agora consideremos $B_K \oplus \alpha$, semanticamente, através do modelo de esferas. Seja $E = Cn(W_0 \cup \{\beta_1, \beta_2,..., \beta_n\})$ uma extensão de (W_0,Δ). Pelo teorema 4.2.6, podemos colocar o conjunto $GD(E,(W_0,\Delta)) = \{:\beta_1/\beta_1, :\beta_2/\beta_2,..., :\beta_n/\beta_n\}$ numa seqüência $<d_i>_{i \in [1,n]}$ tal que ela define um sistema de esferas $S = \{M_L,[W_0],...,[W_n]\}$ como na definição 4.2.6 onde, para todo $i \in [1,n]$, $[W_i] \neq \emptyset$ e $[W_n]$ é a classe de todos os modelos da extensão E. Lembre que, pela semântica de esferas para lógica default clássica, a extensão E é obtida pela *expansão do conjunto* W_0 *por* $\{\delta_1,\delta_2,...,\delta_n\}$ (ver seção 4.2). Então, a cada conjunto $\lambda \in (B_K \downarrow \neg\alpha)$ podemos associar um sistema de esferas que está centrado na classe de modelos de alguma extensão (gerada por $<d_i>_{i \in [1,n]}$ e tal que $\lambda = CONS(\{d \mid d$ faz parte da seqüência $<d_i>_{i \in [1,n]}\}))$ de (W_0,Δ). Com isso, a classe de modelos de $B_K \oplus \alpha$ *pode ser caracterizada pela união de todas as classes de modelos de todas as extensões da teoria* (W_0,Δ) *correspondente*.

Esta caracterização dos modelos de $B_K \oplus \alpha$ através da semântica de esferas para teorias default supernormais implica na *não utilização do conceito de contração*. Rever uma base de crenças B_K pela sentença α *é* interpretado como sendo *a interseção dos conjuntos de conseqüências de todos os conjuntos maximais consistentes que podem ser obtidos pela expansão do conjunto* $\{\alpha\}$ *por sentenças de* B_K.

[1] Estamos supondo que $W_0 = \{\alpha\}$ é consistente.

Exemplo 6.2.1 (Reiter [58])

Considere a base de crenças B_K formada pelas sentenças $\{F \rightarrow P\ ,\ C \rightarrow \neg P\}$ e suponha que desejamos revê-la pela sentença $(F \wedge C)$. Temos que : $B_K \downarrow (\neg F \vee \neg C) = \{\{F \rightarrow P\},\{C \rightarrow \neg P\}\}$ e $B_K \oplus (F \wedge C) = (Cn(\{F \rightarrow P\}) \cap Cn(\{C \rightarrow \neg P\}))^+_{(F \wedge C)} = Cn(F \wedge C)$.

Podemos expressar este processo de revisão através da teoria default supernormal (W_0,Δ), onde $W_0 = \{F \wedge C\}$, $\Delta = \{ : F \rightarrow P\ /\ F \rightarrow P,\ :C \rightarrow \neg P\ /\ C \rightarrow \neg P\ \}$. Esta teoria possui duas extensões : $E_1 = Cn(\{F, C, F \rightarrow P\})$ e $E_2 = Cn(\{F,C, C \rightarrow \neg P\})$.

Utilizando a semântica de esferas, temos que :

- A classe de modelos da extensão E_1 é obtida pela construção de um sistema de esferas **S** utilizando-se a seqüência de defaults $< : F \rightarrow P\ /\ F \rightarrow P>$. Isto significa que *expandimos* o conjunto W_0 pela sentença $F \rightarrow P$, e o sistema **S** estará centrado em $[E_1] = \{\{F,C,P\}\}$.
- Da mesma forma, a classe de modelos da extensão E_2 é obtida pela construção de um sistema de esferas **S'** utilizando-se a seqüência de defaults $<:C \rightarrow \neg P\ /\ C \rightarrow \neg P>$. Isto significa que *expandimos* o conjunto W_0 pela sentença $C \rightarrow \neg P$ e $[E_2] = \{\{F,C,\neg P\}\}$ será o centro do sistema **S'**.

Portanto, a união das classes de modelos das extensões da teoria (W_0,Δ) será composta por $\{\{F,C,P\}, \{F,C,\neg P\}\}$, que corresponde a classe de modelos da revisão $B_K \oplus (F \wedge C)$.

Note que a seqüência de defaults $<: F \rightarrow P\ /\ F \rightarrow P,\ :C \rightarrow \neg P\ /\ C \rightarrow \neg P >$ (e também $<: C \rightarrow \neg P\ /\ C \rightarrow \neg P,\ : F \rightarrow P\ /\ F \rightarrow P >$) não gera um sistema de esferas que seja centrado na classe de modelos [E] de nenhuma extensão de (W_0,Δ). Isto porque as sentenças $F \rightarrow P$ e $C \rightarrow \neg P$ junto com a sentença $(F \wedge C)$ geram inconsistência, e o que queremos é expandir, consistentemente, o conjunto $\{(F \wedge C)\}$.■

Podemos generalizar esta interpretação para o operador de revisão $\otimes$ de bases de crenças priorizadas utilizando a semântica de esferas definida para teorias default supernormais priorizadas (seção 4.2). Desta forma, para determinar a classe de modelos da revisão priorizada de uma base de crenças, utilizamos o seguinte teorema :

Teorema 6.2.2

Seja $C = \bigcup_{i=1}^{n} \|\chi_i\|$ uma base de crenças priorizada com graus de relevância epistêmica $\|\chi_1\|, \|\chi_2\|, \ldots, \|\chi_n\|$ e α uma sentença qualquer. A classe de modelos da revisão da base de crenças priorizada C pela sentença α ($[C \otimes \alpha]$) é igual a união das classes de modelos de todas as extensões da teoria default supernormal fechada priorizada $(W_0, \Delta_1, \ldots, \Delta_n)$, onde $W_0 = \{\alpha\}$ e $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ são conjuntos de defaults supernormais fechados tais que para todo $i \in [1,n]$, $\beta \in \|\chi_i\|$ se, e somente se, $:\beta/\beta \in \Delta_i$.■

Exemplo 6.2.2 (Nebel [52])

Considere uma base de crenças priorizada $C = \|\chi_1\| \cup \|\chi_2\| \cup \|\chi_3\|$, onde :

$$\|\chi_1\| = \{(A \wedge B) \rightarrow D\}$$

$$\|\chi_2\| = \{B\}$$

$$\|\chi_3\| = \{A\}$$

A revisão da base C pela sentença $\neg D$, representada por ($C \otimes \neg D$), é igual a $Cn(\{(A \wedge B) \rightarrow D, B\} \cup \{\neg D\})$.

A teoria default supernormal fechada priorizada que expressa a revisão acima é $(W_0, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3)$, onde $W_0 = \{\neg D\}$ e $\Delta_1 = \{:(A \wedge B) \rightarrow D / (A \wedge B) \rightarrow D\}$, $\Delta_2 = \{:B/B\}$, $\Delta_3 = \{:A/A\}$. Considerando a seqüência de defaults $<:(A \wedge B) \rightarrow D / (A \wedge B) \rightarrow D \,;\, :B/B>$, podemos construir o sistema de esferas $\mathbf{S} = \{M_L, [W_0], [W_1], [W_2]\}$ da seguinte maneira :

- como $[W_0] \cap [(A \wedge B) \rightarrow D] = \{\{\neg A, B, \neg D\}, \{A, \neg B, \neg D\}, \{\neg A, \neg B, \neg D\}\} \neq \emptyset$, temos que : $[W_1] = [W_0] \cap [(A \wedge B) \rightarrow D]$;
- como $[W_1] \cap [B] = \{\{\neg A, B, \neg D\}\} \neq \emptyset$, temos : $[W_2] = [W_1] \cap [B] = \{\{\neg A, B, \neg D\}\}$.

Como esta teoria default supernormal fechada priorizada possui apenas uma PDL-extensão $E = Cn(W_0 \cup \{(A \wedge B) \rightarrow D, B\})$, a classe de modelos da revisão da base priorizada C pela sentença $\neg D$, representada por ($C \otimes \neg D$), é $[W_2] = \{\{\neg A, B, \neg D\}\}$.■

O teorema 6.2.2 nos permite caracterizar semanticamente o processo de revisão (operadores $\otimes$ e $\oplus$) de uma base de crenças (priorizada ou não) por uma sentença através da utilização dos conceitos de expansão e revisão, tal como fizemos para caracterizar as extensões de teorias default supernormais. Ou seja, o processo de construção de uma extensão na lógica default e o processo de revisão de uma base de crenças são análogos : *em ambos os casos, partimos de um conjunto inicial e procuramos expandi-lo consistentemente.*

Observe que o conjunto de conseqüências lógicas da revisão $B_K \oplus \alpha$ corresponde ao conjunto de conseqüências ***céticas*** (ver seção 2.4 e Nebel [52]) da teoria default $(\{\alpha\},\Delta_{B_K})$, onde Δ_{B_K} é tal que $:\beta/\beta \in \Delta_{B_K}$ se, e somente se, $\beta \in B_K$. Uma vez que nossa intenção é utilizar teorias default na representação de processos de revisão de bases de crenças, podemos definir, via teoria default, um outro operador de revisão no qual *cada extensão de uma teoria default supernormal é vista como uma possível maneira de se rever uma base de crenças por uma certa sentença.* Conseqüentemente, assim como na lógica default temos o problema da geração de *extensões não-intuitivas* ou *anômalas* (Problema do Tiro - Yale Shooting Problem [32]), no caso da revisão de bases de crenças podemos identificar o *problema da geração de revisões não-intuitiva,* ou seja, a revisão de uma certa base de crenças por uma sentença pode gerar um conjunto não-intuitivo ou anômalo de crenças.

Continuação do exemplo 6.2.1

Suponha que estamos em uma cidade onde nunca se sabe de antemão quando um dia é feriado, ou seja, só sabemos que um certo dia é feriado quando, no próprio dia, ao acordarmos, somos informados deste fato. Além disso, suponha que, como não sabemos quando surgirá outro feriado pela frente, sempre que um dia for feriado, aproveitaremos para ir à praia. Podemos representar essa crença através da seguinte base B_K : $\{F \to P\}$, onde $F \to P$ significa que "se for feriado então irei à praia".

Num certo dia, ao acordar, ouvimos no rádio a notícia de que aquele dia é feriado. Com esta nova informação (F), somos obrigados a rever nossas crenças (B_K). Considere que esta revisão seja representada através da teoria default supernormal $(W,\Delta) = (\{F\},\{: F \to P / F \to P\})$.

A teoria default (W,Δ) possui uma única extensão $E = Cn(W \cup \{F \to P\})$. Observe que, sendo um feriado, podemos ir à praia, fato que está refletido na extensão. Como esta teoria possui uma única extensão, o conjunto de conseqüências céticas de (W,Δ) corresponde ao conjunto de conseqüências de E, e assim, esta teoria default representa a revisão $B_K \oplus F$.

Agora, suponha que entre as nossas crenças iniciais acrescentássemos o fato de que em dia de chuva não vamos à praia ($C \rightarrow \neg P$). Assim, nossas crenças agora são representadas através da seguinte base B'_K : $\{F \rightarrow P, C \rightarrow \neg P\}$.

No dia em que acordarmos e ouvirmos no rádio que aquele dia é feriado e está chovendo ($F \wedge C$), intuitivamente, somos levados a acreditar que, embora seja feriado, não iremos à praia ($\neg P$).

Representando o processo de revisão (da base B'_K por ($F \wedge C$)) através de uma teoria default supernormal, obtemos : $(W',\Delta') = (\{F \wedge C\},\{: F \rightarrow P/ F \rightarrow P ; : C \rightarrow \neg P/ C \rightarrow \neg P\})$. Esta teoria possui duas extensões :

$$E_1 = Cn(W \cup \{F \rightarrow P\}), \text{ e}$$

$$E_2 = Cn(W \cup \{C \rightarrow \neg P\})$$

Considerar o conjunto de conseqüência céticas da teoria default (W',Δ') (ou seja, fazendo a revisão acima através do operador $\oplus$) não parece ser o mais indicado pois não nos permite concluir se iremos ou não à praia.

Por outro lado, se considerarmos cada extensão da teoria acima como uma ***possível maneira de rever a base de crenças*** $\mathbf{B'_K}$ ***pela sentença*** **($F \wedge C$)**, podemos entender que a extensão E_1 não corresponde a nossa intuição, uma vez que podemos concluir, a partir de E_1, que iremos à praia (P) apesar de ser um dia chuvoso (C). Assim, podemos considerar a extensão E_1 como sendo uma ***revisão não-intuitiva da base de crenças*** $\mathbf{B'_K}$ ***pela sentença*** **($F \wedge C$)**, sendo portanto necessário eliminar esta extensão.

Do ponto de vista da lógica default clássica, extensões não-intuitivas podem ser eliminadas se alguns defaults tiverem prioridade maior que outros. No exemplo acima, podemos eliminar a extensão E_1 se dermos ao default ($: C \rightarrow \neg P/ C \rightarrow \neg P$) prioridade maior do que ao default ($: F \rightarrow P/ F \rightarrow P$). Uma maneira de fazê-lo é expressar o processo de revisão através da seguinte teoria default supernormal priorizada $(W', \Delta'_1, \Delta'_2) = (\{F \wedge C\},\{ : C \rightarrow \neg P/ C \rightarrow \neg P\},\{: F \rightarrow P/ F \rightarrow P\})$. Esta teoria default possui uma única PDL-extensão :

$$E = E_2 = Cn(W \cup \{C \rightarrow \neg P\}).$$

Observe que a teoria default priorizada acima representa a revisão $\mathcal{C} \otimes (F \wedge C)$, onde $\mathcal{C} = ||\chi_1|| \cup ||\chi_2||$ é uma base de crenças priorizada tal que : $||\chi_1|| = \{C \rightarrow \neg P\}$ e $||\chi_2||$

$= \{F \to P\}$. Nesta base de crenças, estamos considerando que a crença $(C \to \neg P)$ tem maior prioridade que a crença $(F \to P)$.

Uma alternativa a esta formalização utilizada em lógica default, é a de representar prioridade entre defaults através de *defaults semi-normais*. No nosso exemplo, podemos substituir o default normal $(: F \to P / F \to P)$ pelo default semi-normal $(: F \to P \wedge \neg C / F \to P)$ na teoria (W', Δ'), obtendo :

$$(W', \Delta'') = (\{F \wedge C\}, \{: F \to P \wedge \neg C / F \to P, : C \to \neg P / C \to \neg P\}).$$

A teoria default (W', Δ'') possui uma única extensão $E = E_2 = Cn(W \cup \{C \to \neg P\})$, igual a que obtivemos através da teoria default priorizada $(W', \Delta'_1, \Delta'_2)$. Desta forma, podemos dizer que a teoria default (W', Δ'') também nos permite expressar a revisão $C \otimes (F \wedge C)$. ■

Comparando as teorias default $(W', \Delta'_1, \Delta'_2)$ e (W', Δ''), utilizadas para representar a revisão $C \otimes (F \wedge C)$, podemos fazer algumas considerações. Inicialmente, observe que W' representa as crenças que revêem a base de crenças, que no primeiro caso é formada por $CONS(\Delta'_1 \cup \Delta'_2) = B'_K$, enquanto no segundo é formada por $CONS(\Delta'') = B'_K$. É importante ter este fato em mente : ***a base de crenças que está sendo revista é formada pelo conjunto de conseqüentes dos default da teoria em questão.***

Considerando apenas a representação através de teorias default supernormais, seria natural imaginar que a classe de modelos de uma base de crenças B_K (priorizada ou não) pudesse ser associada a classe de modelos da teoria default supernormal $(\emptyset, \Delta_1, ..., \Delta_n)$. De fato, isto é possível se B_K for consistente, pois teremos uma única extensão $E = Cn(CONS(\Delta))$ e $B_K = CONS(\Delta)$.

Caso a base de crenças B_K seja inconsistente, a teoria default supernormal $(\emptyset, \Delta_1, ..., \Delta_n)$ associada a B_K possuirá ou múltiplas PDL-extensões (cada uma das quais representando um subconjunto maximal consistente da base B_K) ou uma única PDL-extensão, onde existirá pelo menos um default d, em algum dos conjuntos $\Delta_1, ..., \Delta_n$, que não pertence ao conjunto de defaults geradores da PDL-extensão.

Por exemplo, considere a base de crenças $B_K = \{A, \neg A\}$. Se considerarmos que $\{A\}$ tem maior prioridade que $\{\neg A\}$ ($B_K = \|\chi_1\| \cup \|\chi_2\|$, onde $\|\chi_1\| = \{A\}$ e $\|\chi_2\| = \{\neg A\}$), a teoria default supernormal priorizada $(\emptyset, \{:A/A\}, \{:\neg A/\neg A\})$ teria uma única

PDL-extensão $E = Cn(\{A\})$ e $\{: \neg A/ \neg A\} \notin GD(E, (\emptyset,\{:A/A\},\{:\neg A/\neg A\})) = \{:A/A\}$. Igualmente, caso $\{A\}$ e $\{\neg A\}$ possuíssem a mesma prioridade, a teoria default $(\emptyset,\{:A/A ; :\neg A/\neg A\})$ teria duas extensões : $E_1 = Cn(\{A\}) \neq Cn(B_K)$ e $E_2 = Cn(\{\neg A\}) \neq Cn(B_K)$. Logo, uma base B_K será inconsistente se a teoria default supernormal (priorizada ou não) associada a tal base possuir múltiplas extensões.

Formalmente :

Definição 6.2.1

Seja $C = \bigcup_{i=1}^{n} \|\chi_i\|$ uma base de crenças priorizada com graus de relevância epistêmica $\|\chi_1\|, \|\chi_2\|,..., \|\chi_n\|$. A ***teoria default supernormal fechada priorizada associada a C*** é definida por $(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n)$, onde $W_0 = \emptyset$ e $\Delta_1,...,\Delta_n$ são conjuntos de defaults supernormais fechados tais que para todo $i \in [1,n]$, $\beta \in \|\chi_i\|$ se, e somente se, $:\beta/\beta \in \Delta_i$.■

Logo, em um processo de revisão, uma teoria default da forma $(\emptyset, \Delta_1, ..., \Delta_n)$ representa um (ou uma coleção de) estado(s) epistêmico(s).

Teorema 6.2.3

Seja $C = \bigcup_{i=1}^{n} \|\chi_i\|$ uma base de crenças priorizada com graus de relevância epistêmica $\|\chi_1\|, \|\chi_2\|,..., \|\chi_n\|$ e $(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n)$ a teoria default supernormal fechada priorizada associada a C, onde $W_0 = \emptyset$. A base de crenças C é consistente se, e somente se, a teoria default $(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n)$ possui uma única extensão E e $GD(E,(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n)) = \Delta_1 \cup ... \cup \Delta_n$. ■

Corolário 6.2.1

Seja $C = \bigcup_{i=1}^{n} \|\chi_i\|$ uma base de crenças priorizada consistente com graus de relevância epistêmica $\|\chi_1\|, \|\chi_2\|,..., \|\chi_n\|$, e $(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n)$ a teoria default supernormal fechada priorizada associada a C, onde $W_0 = \emptyset$.

A classe de modelos da extensão da teoria default supernormal fechada priorizada $(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n)$ é igual a classe de modelos da base de crenças priorizada C. ■

A situação no caso de teorias default não-supernormais é mais complexa e distinta do caso anterior. No exemplo 6.2.1, note que apesar da teoria default $(\emptyset,\Delta'')$ possuir uma única extensão $E = Cn(CONS(\Delta''))$ e $CONS(\Delta'') = B'_K$, não é possível estender o resultado apresentado no teorema 6.2.3 para este tipo de teoria uma vez que podemos ter uma base de crenças *C* consistente e uma teoria default não-supernormal associada a ela tal que ou ela possui múltiplas extensões (veja o exemplo 6.2.3 abaixo) ou ela possui uma única extensão sem que o seu conjunto de defaults geradores seja igual ao conjunto de defaults da teoria. (veja exemplo 6.2.4 abaixo).

Portanto, embora possamos identificar o conjunto CONS(Δ) correspondente a uma teoria default não-supernormal ($\emptyset$,Δ) com uma uma base de crenças B_K, não é possível identificar a classe de modelos da base de crenças B_K a partir de ($\emptyset$,Δ).

O que ocorre é que as teorias defaults não-supernormais ($\emptyset$,Δ) nos permitem diferenciar dois tipos de crenças que podem ser encontradas na base de crenças CONS(Δ) : aquelas justificadas pela presença e/ou ausência de outras crenças, e aquelas que não são justificadas por outras crenças. Do ponto de vista de uma teoria default não-supernormal ($\emptyset$,Δ), as primeiras são representadas por defaults não-supernormais onde o conseqüente do defaults (crença) pertencerá a base de crenças revista se seu pré-requisito for satisfeito (justificado pela presença de outra crença) e a negação de sua justificativa não pertencer a base de crenças (justificado pela ausência de uma crença); enquanto as outras poderiam ser representadas por defaults supernormais. Assim, os conseqüentes dos defaults geradores de cada extensão de ($\emptyset$,Δ) formam uma base de crenças que atende às condições impostas pelos pré-requisitos e pelas justificativas dos defaults em Δ. Portanto, também neste caso, uma teoria default da forma ($\emptyset$,Δ) está representando um (ou uma coleção de) estado(s) epistêmico(s).

Exemplo 6.2.3

Considere a base de crenças *C* formada por $\{\neg A, B\}$. Suponha que qualquer revisão desta base deve levar em conta a seguinte restrição : qualquer que seja a revisão feita em *C*, não desejamos que $\neg A$ e B permaneçam juntos na base revista.

A base de crenças *C* mais a restrição imposta acima pode ser representada por $(\emptyset,\{:A/B\ ;\ :\neg B/\neg A\})$ que é uma teoria default não-supernormal associada a *C*. Esta teoria possui duas extensões : $E_1 = Cn(\{\neg A\})$ e $E_2 = Cn(\{B\})$. O conjunto de conseqüentes dos defaults geradores de cada uma dessas extensões (resp.,$\{\neg A\}$ e $\{B\}$) representam as bases de crenças que podem ser obtidas a partir de $(\emptyset,\{:A/B\ ;\ :\neg B/\neg A\})$ e que atendem a condição imposta através das justificativas dos defaults desta teoria. ■

No momento em que se impõem condições sobre sentenças da base de crenças *C*, através dos pré-requisitos e das justificativas dos defaults, estamos na verdade definindo uma coleção de base de crenças obtidas a partir de *C* e que satisfazem tais condições.

Exemplo 6.2.4

Considere a teoria default $(\emptyset,\Delta)$, onde $\Delta = \{:A/A \,;\, A:\neg B \wedge C/C \,;\, :\neg C/\neg C\}$. Esta teoria default possui duas extensões : $E_1 = Cn(\{A,C\})$ e $E_2 = Cn(\{A,\neg C\})$. Observe que CONS(Δ) é inconsistente. Assim, pelas condições expressas no pré-requisito e nas justificativas dos defaults, esta teoria default poderia representar as seguintes bases de crenças : $CONS(GD(E_1,(\emptyset,\Delta))) = \{A,C\}$ e $CONS(GD(E_2,(\emptyset,\Delta))) = \{A,\neg C\}$. Note que na extensão E_1, C só faz parte de nossas crenças pois acreditamos em A e não acreditamos em B.■

Assim, devemos considerar teorias default não-supernormais como uma maneira de representar possíveis estados epistêmicos que podem ser obtidos a partir da base de crenças B_K = CONS(Δ) e que satisfaçam as condições impostas pelos pré-requisitos e justificativas dos defaults em Δ. Observe que isto pode nos levar a duas situações : uma teoria default não-supernormal $(\emptyset,\Delta)$ pode não ter nenhuma extensão, ou seja, não existe nenhum subconjunto $\mathcal{B} \subseteq B_K$ = CONS(Δ) que satisfaça as condições impostas nos pré-requisitos e justificativas de Δ ; ou possuir várias extensões, cada uma delas correspondendo a um subconjunto $\mathcal{B}' \subseteq B_K$ = CONS(Δ) que satisfaz as condições impostas nos pré-requisitos e justificativas de Δ.

Vamos voltar para a análise do exemplo 6.2.1. Note que enquanto as teorias default supernormais priorizadas podem representar o operador de revisão $\otimes$ (teorema 6.2.2), o mesmo pode não ocorrer quando utilizamos teorias default não-supernormais. No exemplo acima, se fizéssemos a revisão da base de crenças por C ao invés de $(F \wedge C)$, teríamos a teoria default supernormal priorizada $(\{C\}, \Delta'_1, \Delta'_2)$ representando a revisão $\mathcal{C} \otimes C$, e que possui uma única PDL-extensão $E_1 = Cn(C, C \rightarrow \neg P, F \rightarrow P\}$, enquanto que a teoria default $(\{C\},\Delta'')$ possui uma única extensão $E_2 = Cn(C, C \rightarrow \neg P) \neq E_1$. Vemos portanto que a teoria default $(\{C\},\Delta'')$ não preserva a sentença $F \rightarrow P$ na base revista e, por isso, não podemos considerá-la como uma representação de $\mathcal{C} \otimes C$.

No caso da teoria default $(W', \Delta'_1, \Delta'_2)$, é fácil ver a correspondência existente entre tal teoria e o processo de revisão que ela representa, uma vez que a prioridade entre os defaults está explicitamente estabelecida. Observe que esta forma de representação se enquadra dentro da abordagem *coerente* pois a única condição imposta para que uma certa crença permaneça no conjunto revisto é que ela seja consistente com a crença que está revendo o conjunto inicial.

No segundo caso, a prioridade entre os defaults está embutida na parte não-normal, que funciona como uma condição extra no processo de revisão da base de crenças. Ou seja, o conjunto que está sofrendo revisão é formado pelos conseqüentes dos defaults em Δ" e os pré-requisitos e as justificativas de cada um dos defaults funcionam como condições que devem ser satisfeitas no processo de revisão. No caso do default semi-normal acima, isto significa que a sentença (F → P) permanecerá na base de crenças revista não somente se ela for consistente com a sentença que está revendo a base original, mas também se a sentença C não pertencer a base de crenças obtida depois da revisão, ou seja, C não pode pertencer a extensão. A permanência de uma certa crença no conjunto revisto depende de uma justificativa, o que corresponde a formalização de um processo de revisão através da abordagem *fundamentalista*.

Isto sugere que outros tipos de teorias default, além das supernormais, podem ser utilizadas na representação de processos de revisão, dependendo do tipo de abordagem (coerente ou fundamentalista) no qual estejamos interessados. Desta forma, a lógica default clássica se apresenta como uma maneira de representação de processos de revisão tanto do ponto de vista da abordagem fundamentalista (teorias default não-supernormais) quanto da abordagem coerente (teorias default supernormais).

Se por um lado, teorias default supernormais (priorizadas ou não) são bem comportadas no sentido de que possuem importantes propriedades como, por exemplo, a garantia da existência de extensões (ou, do ponto de vista do processo de revisão, a garantia da existência de um "conjunto de crenças revisto"), cumulatividade e a consistência entre as justificativas dos defaults aplicados, o mesmo não ocorre quando utilizamos teorias default não-supernormais clássicas.

As soluções encontradas para os problemas apresentados pela lógica default clássica (capítulo 2) passavam pela modificação do critério de aplicabilidade dos defaults. As modificações propostas permitiram a definição de diferentes lógicas defaults, com diferentes propriedades, e que podiam solucionar certos problemas apresentados pela lógica default clássica.

Uma vez que estamos utilizando lógica default clássica para representar bases de crenças e revisões nestas bases e, eventualmente, obtemos resultados não desejados devido a utilização deste formalismo, um passo natural é o de utilizar outros critérios de aplicação de defaults, associados a outras lógicas default, quando estamos utilizando a representação default de processos de revisão.

Exemplo 6.2.5

Considere uma base de crenças B_K formada por {B,C}. Suponha que desejamos representar B_K , via teoria default, levando em conta a seguinte restrição : B (resp., C) pertencerá a base de crenças quando a crença $\neg$A (resp., A) não fizer parte de nossas crenças. Podemos representar esta situação através da teoria default ($\emptyset$,{:A/B ; :$\neg$A/C}). Esta teoria possui uma extensão clássica : E = Cn({B,C}).

Apesar de pertencerem a mesma extensão, o conjunto de justificativas dessas crenças é inconsistentes ({A, $\neg$A}), o que pode ser indesejado. Se, ao invés da lógica default clássica, utilizarmos a lógica default restrita, obteremos duas extensões restritas : uma contendo B (e justificada por A) e outra contendo C (e justificada por $\neg$A). ■

Assim, teorias de lógicas defaults não-clássicas podem ser utilizadas como uma maneira de definir processos de revisão, onde o critério de aplicabilidade de um default está diretamente ligado as funções de seleção para processos de revisão, ou seja, diferentes critérios de aplicação de defaults geram resultados diferentes na revisão de uma base de crenças.

II.a. Especialização e Composição de Especificações

Nesta subseção, vamos utilizar as idéias apresentadas acima, para examinar o processo de obtenção de uma *especialização* a partir de uma dada *especificação básica.* Os conceitos que definiremos a seguir foram apresentados em [53].

Uma ***especificação*** é definida ([53]) como uma *apresentação de teoria* ($\aleph$,$\Im$) onde $\aleph$ é uma assinatura e $\Im$ é um conjunto finito de axiomas. Esta apresentação pode ou não ser obtida a partir de outras apresentações ou especificações pré-definidas. O processo de *reutilização de especificações* ([53]) pode ser visto como o resultado da obtenção de especificações a partir de um conjunto de especificações pré-definidas, chamadas de *especificações básicas* ([53]). Podemos construir uma nova especificação através de uma das seguintes maneiras :

1. por ***especialização*** de uma especificação básica ;

2. por ***composição*** de especificações básicas distintas ;

A proposta desta subseção é apresentar como teorias default podem ser utilizadas para formalizar estes tipos de reutilização de especificações. Assim, ao invés de considerar uma especificação representada através de um conjunto finito de axiomas $\Im$, representaremos as especificações através de teorias default supernormais $(\emptyset,\Delta)$. Então, dada uma especificação $\Sigma = (\aleph,\Im)$, definimos uma teoria default supernormal $T = (\emptyset,\Delta)$, onde $(:\beta/\beta) \in \Delta$ se, e somente se, $\beta \in \Im$. Neste caso, dizemos que T é a *teoria default supernormal associada a* Σ (snd(Σ)). Caso $\Sigma = (\aleph,\Im)$ seja consistente então snd(Σ) possui uma única extensão E com Δ sendo o conjunto de defaults geradores de E. Neste caso, dizemos que Σ é uma *especificação básica.*

Definição 6.2.2

A *apresentação default de uma especificação* $\Sigma = (\aleph,\Im)$ é definida como sendo o par $(\aleph,\text{snd}(\Sigma))$.■

Dada uma teoria default supernormal $T = (W,\Delta)$ com W e CONS(Δ) na assinatura $\aleph$, então cada extensão E de T define uma especificação $(\aleph, W \cup \text{CONS}(\text{GD}(E,T)))$. Se T possui mais de uma extensão, por exemplo $E_1,\ldots,E_n$, dizemos que T é a ***apresentação default da coleção de especificações*** (c.e.d.) $(\aleph,S_1,\ldots,S_n)$ onde $S_i = \text{Cn}(W \cup \text{CONS}(\text{GD}(E_i,T)))$.

II.a.1. Especialização de Especificações

Uma especialização de uma especificação básica $\Sigma = (\aleph,\Im)$ é uma especificação $(\aleph',\Im')$ onde $\aleph'$ é uma extensão de $\aleph$ e $\Im'$ é obtida a partir de $\Im$ pelo acréscimo e/ou remoção e/ou substituição de alguns axiomas. Em termos de revisão de crenças, uma ***especialização*** de uma especificação básica representa a *expansão* ou a *revisão* do seu conjunto de axiomas.

Definição 6.2.3

Dado um conjunto finito de sentenças $\mathbfit{W}$ e a assinatura $\aleph'$, o conjunto de todas as possíveis especializações de $\Sigma = (\aleph,\Im)$ que inclui as sentenças de $\mathbfit{W}$ é chamado de ***especialização coletiva de*** Σ (na assinatura $\aleph \cup \aleph'$). ■

O processo de especialização de uma especificação básica Σ pode ser [53] : ***monotônico***, quando novos fatos (consistentes com o conjunto de axiomas) são acrescentados a uma especificação básica ; ou ***não-monotônico***, quando os novos fatos são inconsistentes com o conjunto de axiomas, acarretando que alguns dos fatos da especificação básica devem ser removidos de modo que a consistência do conjunto seja preservada.

Seja Σ uma especificação básica com $(\emptyset,\Delta) = \mathrm{snd}(\Sigma)$ e $E = Cn(CONS(\Delta))$ a extensão desta teoria. Como vimos antes, podemos construir um sistema de esferas **S** centrado em [E].

Suponha que desejamos construir uma especialização Σ' de Σ pelo acréscimo de um conjunto não-vazio de sentenças $\mathcal{W}$ à especificação básica. Utilizando o sistema de esferas **S**, podemos observar que :

- Se $[\mathcal{W}]$ intercepta o centro do sistema **S** (i.e., a esfera [E]), isso significa que estamos ***expandindo*** a extensão E com $\mathcal{W}$. Neste caso, temos uma ***especialização monotônica*** de Σ. O conjunto formado pelos conseqüentes dos defaults geradores de E é consistente com $\mathcal{W}$;
- Caso contrário, teremos uma ***revisão*** da extensão E. Como em qualquer processo de revisão, queremos preservar tanto quanto possível da especificação básica Σ. Neste caso, temos uma ***especialização não-monotônica*** de Σ, e somente alguns dos conseqüentes dos defaults geradores serão consistentes com $\mathcal{W}$.

Uma teoria default torna-se portanto uma forma compacta de descrever especializações coletivas. Podemos tratar ambas as especializações de maneira uniforme usando a notação default :

Definição 6.2.4

Seja $(\aleph,(\emptyset,\Delta))$ uma apresentação default da especificação básica Σ, E a única extensão de $\mathrm{snd}(\Sigma)$ e $\mathcal{W}$ um conjunto não-vazio de sentenças na assinatura $\aleph'$. Dizemos que $\Sigma' = (\aleph \cup \aleph',(\mathcal{W},\Delta))$ é a ***apresentação default coletivas das especializações de*** Σ ***com respeito a*** $\mathcal{W}$.

Σ' é uma ***especialização monotônica de*** Σ quando a única extensão de $(\mathcal{W},\Delta)$, E' tal que $GD(E,(\emptyset,\Delta)) = GD(E',(\mathcal{W},\Delta))$.

Σ' é uma ***especialização (coletiva) não-monotônica de*** Σ quando para cada extensão E' de $(\mathcal{W},\Delta)$, $GD(E,(\emptyset,\Delta)) \neq GD(E',(\mathcal{W},\Delta))$. ■

É fácil ver, comparando as extensões E e E', respectivamente, das teorias default $(\emptyset,\Delta)$ e $(\mathcal{W},\Delta)$, que em uma especialização monotônica, ambas as teorias terão somente uma extensão com o mesmo conjunto de defaults geradores $(GD(E,(\emptyset,\Delta)) = GD(E',(\mathbf{W},\Delta)))$, como esperado. Do ponto de vista do sistema de esferas, isso significa que o centro do sistema [E] é interceptado por $[\mathbf{W}]$.

Por outro lado, em uma especialização não-monotônica, como podemos ter mais de uma extensão, todas as extensões de $(\mathbf{W},\Delta)$ serão geradas por conjuntos de defaults diferentes de $GD(E,(\emptyset,\Delta))$. Logo, podemos considerar cada extensão de $(\mathbf{W},\Delta)$ como uma possível especialização de $(\emptyset,\Delta)$ com respeito a $\mathbf{W}$.

Exemplo 6.2.5

Seja Σ_1 a especificação básica utilzada para definir operações de crédito e débito, formada pelas sentenças :

$$S(x,s) \wedge C_T(y,s) \rightarrow S(x+y,cred(s)),$$

$$S(x,s) \wedge D_T(y,s) \rightarrow S(x-y,deb(s)),$$

$$D_T(x,s) \rightarrow D_T(x,cred(s)),$$

$$C_T(x,s) \rightarrow C_T(x,deb(s)),$$

onde $S(x,s)$ representa o saldo em um determinado instante s ; $C_T(x,s)$ e $D_T(x,s)$ representam, respectivamente, o total de créditos e o total de débitos, no valor x, em um estado s ; e cred(s) e deb(s) representam estados resultantes, resp., das operações de crédito e débito. As sentenças acima indicam o saldo resultante após uma operação de crédito e/ou débito e que as operações de crédito (resp., débito) não afetam os débitos (resp., créditos) existentes.

Esta especificação pode ser representa pela $snd(\Sigma_1) = (\emptyset,\Delta_1)$, onde :

$$\begin{aligned}\Delta_1 = \{ \; & : (S(x,s) \wedge C_T(y,s) \rightarrow S(x+y,cred(s))) \,/\, (S(x,s) \wedge C_T(y,s) \rightarrow S(x+y,cred(s))) \; ; \\ & : (S(x,s) \wedge D_T(y,s) \rightarrow S(x-y,deb(s))) \,/\, (S(x,s) \wedge D_T(y,s) \rightarrow S(x-y,deb(s))) \; ; \\ & : D_T(x,s) \rightarrow D_T(x,cred(s)) \,/\, D_T(x,s) \rightarrow D_T(x,cred(s)) \; ; \\ & : C_T(x,s) \rightarrow C_T(x,deb(s)) \,/\, C_T(x,s) \rightarrow C_T(x,deb(s)) \; \}.\end{aligned}$$

Podemos utilizar esta especificação básica para, por exemplo, especificar um orçamento doméstico, através de um processo de especialização monotônica de Σ_1. Considere o conjunto $\mathbf{W} = \{S(10,s_0), D_T(5,s_0), C_T(20,s_0)\}$. A especialização Σ' de Σ_1, é representada pela $snd(\Sigma') = (\mathbf{W},\Delta_1)$, que possui uma única extensão formada por $\mathbf{W}$ e todas as instâncias básicas válidas dos defaults de Δ_1.

Observe que na especialização acima podemos terminar com um saldo negativo, uma vez que não nos preocupamos em impedir a operação de débito quando ela resultar em um saldo negativo. Suponha que desejamos utilizar a especificação acima para definir operação de crédito e débito em uma conta corrente. Sabemos que em uma conta corrente, não é permitido ter saldo negativo, e os cheques sem fundo não são descontados. Vamos fazer uma especialização de Σ_1 que satisfaça à esta condição.

Suponha que temos um saldo de 10 ($S(10,s_0)$) e pretendemos fazer uma opearção de débito no valor de 15 ($D_T(15,s_0)$). Para evitar que terminemos com saldo negativo, incluiremos em nosso conjunto a fórmula $\forall x,s\ (S(x,s) \rightarrow (x \geq 0))$. Então devemos considerar o conjunto $\mathcal{W}'' = \{S(10, s_0), D_T(15,s_0), \forall x,s\ (S(x,s) \rightarrow (x \geq 0))\}$, obtendo a especialização Σ'' de Σ_1, que é representada pela $snd(\Sigma'') = (\mathcal{W}'',\Delta_1)$. Note que o default $(: S(10,s_0) \wedge D_T(15,s_0) \rightarrow S(-5,deb(s_0)) \,/\, S(10,s_0) \wedge D_T(15,s_0) \rightarrow S(-5,deb(s_0)))$ não poderá ser aplicado, e portanto a operação de débito não será efetuada. Neste caso, temos uma especialização não-monotônica, uma vez que $GD(E,(\emptyset,\Delta)) \neq GD(E',(\mathcal{W},\Delta))$. ■

Note que a utilização de teorias default supernormais na representação de especificações básicas simplifica a formalização de ambos os tipos de especialização, sem afetar o significado das próprias especificações básica. Note que podemos considerar este tipo de revisão na categoria da ***abordagem coerente*** : o que um agente acredita é logicamente coerente com suas outras crenças, independentemente de como ele as infere.

II.a.2. Composição de Especificações Básicas

Especificações básicas distintas podem ser compostas de duas formas. No primeiro caso, consideramos as especificações básicas como se fossem igualmente relevantes :

Definição 6.2.5

Considere $(\emptyset,\Delta_1)$, $(\emptyset,\Delta_2)$, ..., $(\emptyset,\Delta_n)$, respectivamente, $snd(\Sigma_1)$, $snd(\Sigma_2)$ ..., $snd(\Sigma_n)$.

Seja $T = (\emptyset,\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots \cup \Delta_n)$ a teoria default obtida a partir de $(\emptyset,\Delta_1)$, $(\emptyset,\Delta_2)$, ..., $(\emptyset,\Delta_n)$. A ***apresentação default coletiva da composição de*** $\Sigma_1,\Sigma_2, \ldots, \Sigma_n$ denotada por $(\Sigma_1\ \&\ \Sigma_2\ \&\ \ldots\ \&\ \Sigma_n)$, é a apresentação default $(\aleph,T)$, onde $\aleph = \cup\, \aleph_i$. ■

Note que se CONS($\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup ... \cup \Delta_n$) é consistente, T possui uma única extensão E que pode ser vista como a composição de Σ_1, Σ_2, ..., Σ_n. Caso contrário, podemos considerar cada extensão de ($\emptyset$,$\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup ... \cup \Delta_n$) como uma forma de unir consistentemente as especificações Σ_1, Σ_2, ..., Σ_n.

Um outro tipo de composição, chamada *composição priorizada*, nos permite atribuir prioridades entre as especificações básicas que estamos compondo, com a intenção de preservar tanto quanto possível as especificações básicas com maior prioridade. A composição priorizada de especificações básicas é representada através de teorias default priorizadas :

Definição 6.2.6

Considere ($\emptyset$,Δ_1), ($\emptyset$,Δ_2), ..., ($\emptyset$,Δ_n), respectivamente, snd(Σ_1), snd(Σ_2) ..., snd(Σ_n).

Seja T = ($\emptyset$, Δ_1, Δ_2, ... , Δ_n) a teoria default obtida a partir de ($\emptyset$,Δ_1), ($\emptyset$,Δ_2), ..., ($\emptyset$,Δ_n). A ***apresentação default coletiva da composição priorizada de*** Σ_1,Σ_2, ..., Σ_n denotada por **($\Sigma_1 < \Sigma_2 < ... < \Sigma_n$)**, é a apresentação default ($\aleph$,T), onde $\aleph = \cup \aleph_i$.. ■

Podemos usar, simultaneamente, os dois tipos de composição descrito acima a fim de definir uma nova especificação :

Definição 6.2.7

Considere ($\emptyset$,Δ_1), ($\emptyset$,Δ_2), ..., ($\emptyset$,Δ_n), respectivamente, snd(Σ_1), snd(Σ_2) ..., snd(Σ_n).

Seja T = ($\emptyset$,Δ'_1, Δ'_2, ... , Δ'_m), m $\leq$ n, onde para cada j $\in$ [1,m], ou $\Delta'_j = \Delta_i$ (i $\in$ [1,n]) ou $\Delta'_j = \Delta_i \cup \Delta_k \cup ... \cup \Delta_l$ (i,k,...,l $\in$ [1,n]). A ***apresentação default coletiva da composição mista de*** Σ_1,Σ_2, ..., Σ_n (cm(Σ_1, Σ_2, ..., Σ_n)) denotada por **($\Sigma'_1 < \Sigma'_2 < ... < \Sigma'_n$)**, é a apresentação default ($\aleph$,T), onde $\aleph = \cup \aleph_i$.. ■

A definição de especializações monotônicas e não-monotônicas da composição de especificações básicas pode ser feita de forma semelhante a subseção anterior. A principal diferença neste caso é que como podemos ter mais de uma extensão, temos que levar isto em consideração na definição destes tipos de especializações.

Definição 6.2.8

Seja $(\aleph,(\emptyset,\Delta_1,\ldots,\Delta_n))$ uma cm$(\Sigma_1,\Sigma_2,\ldots,\Sigma_n)$. Seja $\mathcal{W}$ um conjunto não-vazio de sentenças na assinatura $\aleph'$. Dizemos que $\Sigma' = (\aleph \cup \aleph', (\mathcal{W},\Delta_1,\ldots,\Delta_n))$ é uma ***apresentação default coletiva da especialização de*** cm$(\Sigma_1,\Sigma_2,\ldots,\Sigma_n)$ ***com respeito a*** $\mathcal{W}$.

Σ' é uma ***especialização monotônica de*** cm$(\Sigma_1,\Sigma_2,\ldots,\Sigma_n)$ quando para toda (PDL-) extensão E de $(\emptyset,\Delta_1,\ldots,\Delta_n)$, existe uma (PDL-) extensão E' de $(\mathcal{W},\Delta_1,\ldots,\Delta_n)$ tal que $GD(E,(\emptyset,\Delta_1,\ldots,\Delta_n)) = GD(E',(\mathcal{W},\Delta_1,\ldots,\Delta_n))$.

Σ' é uma ***especialização não-monotônica de*** cm$(\Sigma_1,\Sigma_2,\ldots,\Sigma_n)$ quando existe (PDL-) extensão E de $(\emptyset,\Delta_1,\ldots,\Delta_n)$, tal que para toda (PDL-) extensão E' de $(\mathcal{W},\Delta_1,\ldots,\Delta_n)$, $GD(E,(\emptyset,\Delta_1,\ldots,\Delta_n)) \neq GD(E',(\mathcal{W},\Delta_1,\ldots,\Delta_n))$. ■

A composição priorizada foi usada para dar diferentes prioridades as especificações básicas quando elas são compostas. Na lógica default, podemos estabelecer prioridades entre defaults explicitamente como foi feito acima ou implicitamente, através de defaults não-normais.

Continuação do Exemplo 6.2.5

Observe que a especificação Σ_1 permite operações de crédito e débito com valores negativos. Por exemplo, considerando o conjunto $\mathcal{W} = \{S(5,s_0)\ ,\ D_T(-5,s_0)\}$, a especialização Σ de Σ_1, representada pela snd(Σ") = $(\mathcal{W},\Delta_1)$, possui uma única extensão formada por $\mathcal{W}$ e todas as instâncias básicas válidas dos default de Δ_1.

Suponha que desejamos então uma especificação na qual apenas operações de crédito e débito com valores positivos sejam permitidas. Inicialmente, observe que a especificação básica Σ_2, representada pela teoria default $(\emptyset,\Delta_2) = (\emptyset,\{: S(5,s_0) / S(5,s_0)\ ;\ : D_T(-5,s_0) / D_T(-5,s_0)\})$, possui uma única extensão $E' = Cn(\mathcal{W})$.

A composição $(\Sigma_2 < \Sigma_1)$, representada pela teoria default priorizada $(\emptyset,\Delta_2 < \Delta_1)$, possui uma única PDL-extensão igual a extensão E de $(\mathcal{W},\Delta_1)$. A especialização Σ da composição $(\Sigma_2 < \Sigma_1)$ em que estamos interessados pode ser obtida se considerarmos o conjunto $\mathcal{W}' = \{\forall x,s\ (C_T(x,s) \vee D_T(x,s) \rightarrow (x \geq 0))\}$, no qual apenas operações com valores positivos são permitidas. A especialização (não-monotônica) Σ é representada por $(\mathcal{W}',\Delta_2 < \Delta_1)$, que possui uma única extensão que não contém $D_T(-5,s_0)$, impedindo a operação de débito com valores negativos. Neste caso, poderíamos também ter obtido o mesmo resultado com a composição ($\Sigma_1 \cup \Sigma_2$).

Observe que a especialização por $\mathcal{W}$, de qualquer tipo de composição de Σ_1 com a especificação básica Σ' (obtida a partir de $\mathcal{W}$' e representada pela snd(Σ_2) = $(\emptyset,\Delta_2)$ = $(\emptyset,\{ : C_T(x,s) \vee D_T(x,s) \rightarrow (x \geq 0)/ C_T(x,s) \vee D_T(x,s) \rightarrow (x \geq 0) \})$), não nos permitiria bloquear a operação em questão, uma vez que o fato $D_T(-5,s_0) \in \mathcal{W}$ impede a aplicação do default $(: C_T(-5,s_0) \vee D_T(-5,s_0) \rightarrow (-5 \geq 0)/ C_T(-5,s_0) \vee D_T(-5,s_0) \rightarrow (-5 \geq 0))$. ■

II.a.3. Especificação Restrita

Considere a especialização básica Σ representada pela teoria default $(\emptyset,\{:A/A;\ :B/B\})$), que possui uma única extensão E = Cn({A,B}). Suponha que queremos representar Σ de modo que toda especialização Σ' de Σ, não tenha simultaneamente A e B. Isto significa que desejamos impor algumas restrições no processo de especialização.

Isto pode ser representado através da teoria default $(\emptyset,\{:\neg B/A\ ;\ :\neg A/B\})$. Neste caso, quando um dos defaults é aplicado, o outro é automaticamente bloqueado. Note que $(\emptyset,\{:\neg B/A\ ;\ :\neg A/B\})$ possui duas extensões : E_1 = Cn({A}) e E_2 = Cn({B}), onde o conjunto de conseqüentes de defaults geradores de cada extensão (resp.,{A} e {B}) representa subconjuntos maximais de CONS(Δ) que satisfazem as condições desejadas.

Dada uma especificação básica Σ, uma especialização restrita Σ' de Σ é uma especialização onde alguns dos axiomas de Σ são preservados sob certas circunstâncias. Isto pode ser formalizado através de teorias default não-normais.

Definição 6.2.9

Seja $\Sigma = (\aleph,\Im)$ uma especificação básica com snd(Σ) = $(\emptyset,\Delta)$ e R um conjunto de sentenças chamado de *restrições de* Σ. A ***apresentação default coletiva da especialização restrita de*** Σ (crs(Σ)) é $(\aleph,(\emptyset,\Delta'))$, onde para cada d $\in \Delta'$, se d é um default não-supernormal, então CONS(d) $\in$ CONS(Δ) e JUST(d), PRER(d) $\in$ R; caso contrário, d $\in \Delta$.■

Este tipo de especialização corresponde a abordagem fundamentalista, no qual as crenças de um agente são divididas em dois tipos : algumas crenças são justificadas por outras crenças (defaults não-supernormais) e algumas não são justificadas (defaults supernormais).

Neste caso, embora CONS(Δ') seja consistente (CONS(Δ') = CONS(Δ)) não podemos mais garantir que (∅,Δ') terá extensão, muito menos uma única extensão.

Como antes, podemos definir uma especialização restrita de uma especificação básica Σ da seguinte forma :

Definição 6.2.10

Seja (ℵ,(∅,Δ')) uma crs(Σ) e $\mathcal{W}$ ≠ ∅ um conjunto de sentenças na assinatura ℵ'. Dizemos que Σ' = (ℵ ∪ ℵ',($\mathcal{W}$,Δ')) é uma ***apresentação default coletiva da especialização de*** crs(Σ) ***com respeito ao conjunto de sentenças*** $\mathcal{W}$.

Σ' é uma ***especialização monotônica*** crs(Σ) quando para cada extensão E de (∅,Δ'), existe uma extensão E' de ($\mathcal{W}$,Δ') tal que GD(E,(∅,Δ')) = GD(E,($\mathcal{W}$,Δ')). Dizemos que Σ' é uma ***especialização restrita monotônica*** de Σ.

Σ' é uma ***especialização não-monotônica*** crs(Σ) quando existe uma extensão E de (∅,Δ'), tal que para todo E' de ($\mathcal{W}$,Δ'), GD(E,(∅,Δ')) ≠ GD(E,($\mathcal{W}$,Δ')). Dizemos que Σ' é uma ***especialização restrita não-monotônica*** de Σ.■

Alguns problemas da lógica default clássica com respeito a teorias default não-supernormais podem ser solucionados se mudarmos a lógica default que está sendo utilizada. Podemos considerar, por exemplo, a lógica default restrita de Schaub [62], que leva em conta as justificativas dos defaults já aplicados na construção de uma extensão.

Logo, considerando nas definições acima teorias de outras lógicas default, definiremos novos tipos de especificações e especializações, que terão propriedades distintas da lógica default clássica.

Exemplo 6.2.6

Suponha que desejamos fazer uma especificação para conta corrente na qual aos clientes comuns não é permitido que eles tenham saldo negativo enquanto aos clientes especiais é permitido que eles tenham saldo negativo até um determinado limite, digamos 100. Podemos apresentar esta especificação através da teoria default (∅,Δ), onde Δ é formado por $\{(: E(x) / S(y,s) \rightarrow y \geq -100), (: \neg E(x) / S(y,s) \rightarrow y \geq 0)\}$.

Observe que se considerarmos a lógica default restrita, obtemos duas extensões : uma na qual supomos que o cliente é especial e a outra na qual o cliente é comum. As especializações desta especificação permitem a manutenção de ambas as extensões quando não se sabe o status do cliente e a conseqüente eliminação de uma delas quando este status for conhecido. ■

III. Operador de Revisão $°\Delta$ via Teoria Default

No capítulo 3, vimos que pela definição de revisão de uma base de crenças, duas bases diferentes que possuam o mesmo significado podem gerar conjuntos revistos distintos. Desta forma, alguns autores ([17],[20],[33]) argumentam que o processo de revisão deve ser feito no nível de modelos, como no caso da seção 3.4, onde conjuntos de crenças são representados por conjuntos de modelos que satisfazem uma certa base e a revisão nada mais é do que uma seleção, dentre esses modelos, daqueles que satisfazem a nova sentença e que diferem minimamente dos modelos da base inicial.

O objetivo desta é mostrar que mesmo este tipo de revisão, onde a representação sintática não é relevante, pode ser expressa através de teorias default supernormais. Para isso, primeiramente definiremos semanticamente um operador de revisão que satisfaça o *Princípio de Irrelevância Sintática* de Dalal [17]. Em seguida, mostraremos como podemos definir sintaticamente através de teorias default supernormais um operador de revisão que reflita esta mudança mínima nos modelos.

Seja $\Lambda = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ o conjunto finito de todas as letras proposicionais em uma linguagem L. Dada uma fórmula fnc μ, defina l_μ como o número total de literais em μ e d_μ o número total de componentes da fnc μ. Para as fnc μ e ν, diz-se que μ é mais simples que ν se, e somente se, $l_\mu \leq l_\nu$ e $d_\mu \leq d_\nu$ e, pelo menos, uma destas desigualdades é estrita.

Dada uma fórmula Γ, considere $fnc_m(\Gamma)$ uma fórmula na forma normal conjuntiva mínima equivalente a Γ [2], ou seja :

$$fnc_m(\Gamma) = (\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \dots \wedge \Phi_m),$$

onde, para todo $i \in [1,m]$, $\Phi_i \equiv \bigvee_{j=1}^{Ki} \phi_{ij}$, sendo que, para todo $j \in [1,k_i]$, cada ϕ_{ij} ou é α_j ou $\neg\alpha_j$, e l_Γ e d_Γ são mínimos entre as formas normais conjuntivas equivalentes a Γ.

[2] Alguns métodos que podem ser utilizados para obter as fnc mínimas como, por exemplo, os mapas de Karnaugh e o método de Quine-McCluskey podem ser encontrados em [49].

Uma base de conhecimento K pode ser representada por $\Gamma \equiv \bigwedge_{\varphi \in K} \varphi$. Seja $fnc_m(\Gamma)$ uma fórmula na forma normal conjuntiva mínima equivalente a Γ. Diremos que $fnc_m(\Gamma)$ é uma representação mínima de K.

Seja M_L o conjunto de todos os mundos possíveis que podem ser descritos numa linguagem proposicional (finita) L e Λ o conjunto finito de todas as letras proposicionais em L. Considere uma *base de conhecimento* K e o subconjunto [K] de M_L. Supondo que $fnc_m(\Gamma) = (\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \ldots \wedge \Phi_m)$ é uma representação mínima de K, podemos representar [K] como : $[K] = \bigcap_{i=1}^{m} [\Phi_i]$.

Primeiramente, vamos construir um operador de revisão segundo a noção de mudança mínima (seção 3.5). Para isto, é necessário definir a noção de "diferença" sobre o qual nosso operador de revisão estará baseado. Como vimos acima, dada uma classe de modelos [K], podemos escrevê-la da forma : $[K] = [fnc_m(\Gamma)] = \bigcap_{i=1}^{m} [\Phi_i]$. Vamos definir o conjunto de componentes básicos de [K], da seguinte maneira :

Definição 6.3.1

Seja L uma linguagem proposicional, K uma base de conhecimento e $fnc_m(\Gamma)$ uma representação mínima de K. O ***conjunto de componentes básicos de* [K]**, é definido por $CB([K]) = \{[\Phi_1], [\Phi_2], \ldots, [\Phi_m]\}$, onde para todo $i \in [1,m]$, Φ_i é uma disjunção de literais que faz parte da $fnc_m(\Gamma)$. ■

Exemplo 6.3.1

Seja L uma linguagem proposicional e $\Lambda = \{A,B,C\}$. Seja K uma base de conhecimento tal que $[K] = \{\{A,B,C\}, \{\neg A,B,C\}, \{A,\neg B,C\}\}$.

Esta base pode ser representada, por exemplo, pela fnd $\Gamma \equiv (A \wedge B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C)$, ou pela sua $fnc_m(\Gamma) \equiv (A \vee B) \wedge C$.

Então, o conjunto de componentes básicos CB([K]) será formado por $\{[A \vee B], [C]\}$ ■

Considere que I é uma atribuição de valores a letras sentenciais em Λ. Podemos representar I pela conjunção $(\mu_1 \wedge \mu_2 \wedge \ldots \wedge \mu_n)$, onde : $\mu_i = \alpha_i$ se, e somente se, $I(\alpha_i) = T$ e $\mu_i = \neg\alpha_i$ se, e somente se, $I(\alpha_i) = F$, para todo $\alpha_i \in \Lambda$. Definiremos a "diferença" entre duas interpretações I e J como sendo o número de componentes básicos de I que não são satisfeitos por J.

Definição 6.3.2

Considere duas interpretações, I e J, e seja CB(I) o conjunto de componentes básicos de I. A *diferença* entre I e J, representada por *Dif*(I,J), é definida por *Dif*(I,J) = *Dif*(($[\Phi_1] \cap [\Phi_2] \cap \ldots \cap [\Phi_k]$), J) = n, onde n é o número de componentes básicos de CB(I) tais que $[\Phi_i] \cap J = \varnothing$.■

Conseqüentemente, podemos definir a diferença entre os modelos de uma base de conhecimento K, que pode ser representada através do conjunto de componentes básicos CB([K]) = $\{[\Phi_1], [\Phi_2], \ldots, [\Phi_k]\}$, e uma interpretação J como : *Dif*([K],J) = *Dif*(($[\Phi_1] \cap [\Phi_2] \cap \ldots \cap [\Phi_k]$), J) = n, onde n é o número de componentes básicos de CB([K]) tais que $[\Phi_i] \cap J = \varnothing$.

Dada a base de conhecimento K, defina uma pré-ordem total $\leq_K$ como sendo I $\leq_K$ J se, e somente se, *Dif*([K],I) $\leq$ *Dif*([K],J). Isto é uma *atribuição confiável* (*faithful* - capítulo 3) uma vez que se considerarmos uma representação Γ de K tal que $\text{fnc}_m(\Gamma) \equiv \Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge \ldots \wedge \Phi_n$, então $[K] = [\Phi_1] \cap [\Phi_2] \cap \ldots \cap [\Phi_n]$ e CB([K]) = $\{[\Phi_1], [\Phi_2], \ldots, [\Phi_n]\}$, temos :

1. Se I, J $\in$ [K] então I, J $\in [\Phi_1] \cap [\Phi_2] \cap \ldots \cap [\Phi_n]$. Logo, I, J $\in [\Phi_i]$ para todo i $\in$ [1,n] e, conseqüentemente, *Dif*([K],I) = *Dif*([K],J) = 0. Então não temos I $<_K$ J nem J $<_K$ I ;
2. Se I $\in$ [K] e J $\notin$ [K], então *Dif*([K],I) = 0 e *Dif*([K],J) > 0 uma vez que J $\notin [\Phi_1] \cap [\Phi_2] \cap \ldots \cap [\Phi_n]$, ou seja, J não pertence a pelo menos um $[\Phi_i]$ para algum i $\in$ [1,n]. Portanto, I $<_K$ J.
3. Se K $\equiv$ K' então [K] = [K']. Além disso, existe um conjunto CB([K]) = $\{[\Phi_1], [\Phi_2], \ldots, [\Phi_n]\}$, tal que $[K] = [K'] = [\Phi_1] \cap [\Phi_2] \cap \ldots \cap [\Phi_n]$. Portanto, $\leq_K = \leq_{K'}$.

Assim, definindo Min(M,$\leq_K$) = {I / I é minimal em M com respeito a $\leq_K$}, o operador de revisão $\circ_\Delta$ será definido da seguinte maneira :

Definição 6.3.3

Dada uma base de conhecimento K e uma sentença α, o operador de revisão $°_\Delta$ é definido como sendo :

$$[K°_\Delta \alpha] = Min([\alpha],\leq_K) \blacksquare$$

Assim, os modelos da revisão $K°_\Delta\ \alpha$ serão os modelos de α que preservam o maior número de componentes básicos de K.

Como conseqüência do teorema 3.4.1 (seção 3.4), o operador de revisão $°_\Delta$ definido acima satisfaz as condições (R1)-(R6).

Continuação do exemplo 6.3.1

Vimos que para a base de conhecimento K tal que [K] = $\{\{A,B,C\}, \{\neg A,B,C\},\{A,\neg B,C\}\}$, um conjunto de componentes básicos de [K] é formado por $\{[A \vee B], [C]\}$ e $[K] = [A \vee B] \cap [C]$.

Se quisermos rever K pela sentença $(\neg A \wedge \neg B)$, cujos modelos são $\{\neg A,\neg B,C\}$ e $\{\neg A,\neg B,\neg C\}$, teremos :

$Dif([K],\{(\neg A,\neg B,C)\}) = 1$ (já que $\{(\neg A,\neg B,C)\} \cap ([A \vee B]) = \emptyset$ e $\{(\neg A,\neg B,\neg C)\} \cap ([C]) \neq \emptyset$)), e

$Dif([K],\{(\neg A,\neg B,\neg C)\}) = 2$ (já que $\{(\neg A,\neg B,\neg C)\} \cap ([A \vee B]) = \emptyset$ e $\{(\neg A,\neg B,\neg C)\} \cap ([C]) = \emptyset$).

Então : $[K°_\Delta (\neg A \wedge \neg B)] = Min((\neg A \wedge \neg B),\leq_K) = \{(\neg A,\neg B,C)\}.\blacksquare$

Exemplo 6.3.2

Seja L = {A,B} uma linguagem proposicional, e K uma base de conhecimento tal que [K] = {(A,B)}. O conjunto de componentes básicos de [K] é {[A],[B]} e $[K] = [A] \cap [B]$.

- O modelo da revisão da base de conhecimento K pela sentença A, cujos modelos são (A,B) e $(A,\neg B)$ será {(A,B)} uma vez que :

  $Dif([K],\{(A,B)\}) = 0$ (pois $\{(A,B)\} \subset [A]$ e $\{(A,B)\} \subset [B]$) e

  $Dif([K],\{(A,\neg B)\}) = 1$ (pois $\{(A,\neg B)\} \cap [B] = \emptyset$ e $\{(A,\neg B)\} \cap [A] \neq \emptyset$)

  Então : $[K \circ_\Delta A] = Min([A],\leq_K) = \{(A,B)\} = [K]$.

- Suponha agora que queremos rever a base de conhecimento K pela sentença $\neg A$. Os modelos de $\neg A$ são $(\neg A,B)$ e $(\neg A,\neg B)$. Como :

$Dif([K],\{(\neg A,B)\}) = 1$ (pois $\{(\neg A,B)\} \cap [A] = \emptyset$ e $\{(\neg A,B)\} \cap [B] \neq \emptyset$), e

$Dif([K],\{(\neg A,\neg B)\}) = 2$ (pois $\{(\neg A,\neg B)\} \cap [A] = \{(\neg A,\neg B)\} \cap [B] = \emptyset$),

temos que : $[K^{\circ\Delta} \neg A] = Min([\neg A],\leq_K) = \{(\neg A,B)\}$.

- Se quisermos rever K por $\{\neg A \wedge \neg B\}$, e como o único modelo desta sentença é $(\neg A,\neg B)$, temos :

  $Dif([K],\{(\neg A,\neg B)\}) = 2$ (pois $\{(\neg A,\neg B)\} \cap [A] = \emptyset$ e $\{(\neg A,\neg B)\} \cap [B] = \emptyset$)

  e $[K^{\circ\Delta} (\neg A \wedge \neg B)] = Min([(\neg A \wedge \neg B)],\leq_K) = \{(\neg A,\neg B)\}$.■

Exemplo 6.3.3

Considere a base de conhecimento K tal que $[K] = \{(A,B), (A,\neg B), (\neg A,B)\}$. O conjunto de componentes básicos de [K] é formado por um único componente $\{[A \vee B]\}$ e $[K] = [A \vee B]$. Note que :

- Revendo K pela sentença A (cujos modelos são (A,B) e $(A,\neg B)$), temos :

  $Dif([K],\{(A,B)\}) = 0$ (pois $\{(A,B)\} \cap ([A \vee B]) \neq \emptyset$)

  $Dif([K],\{(A,\neg B)\}) = 0$ (pois $\{(A,\neg B)\} \cap ([A \vee B]) \neq \emptyset$)

  e, conseqüentemente, $[K^{\circ\Delta} A] = Min([A],\leq_K) = \{(A,B), (A,\neg B)\}$.

- Revendo K pela sentença $\neg A$ (cujos modelos são $(\neg A,B)$ e $(\neg A,\neg B)$), temos :

  $Dif([K],\{(\neg A,B)\}) = 0$ (pois $\{(\neg A,B)\} \cap ([A \vee B]) \neq \emptyset$)

  $Dif([K],\{(\neg A,\neg B)\}) = 1$ (pois $\{(\neg A,\neg B)\} \cap ([A \vee B]) = \emptyset$)

  e, conseqüentemente, $[K^{\circ\Delta} \neg A] = Min([\neg A],\leq_K) = \{(\neg A,B)\}$.■

Exemplo 6.3.4

Considere a base de conhecimento K tal que $[K] = \{(A,B), (\neg A,\neg B)\}$. O conjunto de componentes básicos de [K] é formado por $\{([\neg A \vee B]), ([A \vee \neg B])\}$ e $[K] = [\neg A \vee B] \cap [A \vee \neg B]$. Se quisermos rever K pela sentença $(\neg A \wedge B)$, cujo único modelo é $\{(\neg A,B)\}$, teremos :

$Dif([K],\{(\neg A,B)\}) = 1$ (pois $\{(\neg A,B)\} \cap ([A \vee \neg B]) = \emptyset$), e

$[K^{\circ\Delta} (\neg A \wedge B)] = Min([\neg A \wedge B],\leq_K) = \{(\neg A,B)\}$.

Se quisermos rever K pela sentença $(A \leftrightarrow \neg B)$, cujos modelos são $(\neg A,B)$ e $(A,\neg B)$, teremos :

$Dif([K],\{(\neg A,B)\}) = 1$ (pois $\{(\neg A,B)\} \cap ([A \vee \neg B]) = \emptyset$), e

$Dif([K],\{(A,\neg B)\}) = 1$ (pois $\{(A,\neg B)\} \cap ([\neg A \vee B]) = \emptyset$).

Então : $[K^{\circ\Delta}(A \leftrightarrow \neg B)] = Min([A \leftrightarrow \neg B], \leq_K) = \{(\neg A,B), (A,\neg B)\}$.■

A caracterização sintática do operador $^\circ\Delta$ através da lógica default clássica é feita de maneira natural se observarmos a construção do operador $^\circ\Delta$. Dada uma base de conhecimento K pela sentença α, definiremos a revisão de K por α através da lógica default clássica da seguinte maneira :

Definição 6.3.4

Seja K uma base de conhecimento representada pela fórmula Γ. Seja $fnc_m(\Gamma)$ uma fnc mínima equivalente a Γ. A *revisão da base de conhecimento* K *pela sentença* α, denotada por ♦, é definida através da teoria default supernormal :

$$K^{\blacklozenge}\alpha = \bigcap_{i=1}^{n} Cn(E_i)$$

onde E_i é uma extensão da teoria default (W,Δ_K), com $W = \{\alpha\}$ e $\Delta_K = \{: \Phi_1 / \Phi_1, : \Phi_2 / \Phi_2, \ldots, : \Phi_k / \Phi_k\}$ sendo o conjunto de defaults supernormais tais que $(: \Phi_i / \Phi_i) \in \Delta_K$ se, e somente se, Φ_i é faz parte da conjunção $fnc_m(\Gamma)$, para todo $i \in [1,k]$.■

Exemplo 6.3.5

Considere a base de conhecimento K formada pelas sentenças $\{C, C \rightarrow A \vee B\}$. Ela pode ser vista como a fnc mínima $C \wedge (A \vee B)$. Se queremos rever K pela sentença $(\neg A \wedge \neg B)$, teremos : $K^{\blacklozenge}(\neg A \wedge \neg B) = Cn(\{\neg A \wedge \neg B, C\})$, uma vez que :

$$(W,\Delta_K) = (\{(\neg A \wedge \neg B)\}, \{ :C / C \ , \ :(A \vee B) / (A \vee B)\})$$

possui uma única extensão : $E_1 = Cn(\{\neg A \wedge \neg B, C\})$, cujo modelo é $\{(\neg A,\neg B,C)\}$.■

Exemplo 6.3.6

Seja K uma base de conhecimento formada pela sentença A e B, i.e., $K = \{A,B\}$, representada pela fnc mínima $(A \wedge B)$. Logo, se quisermos rever K pelas seguintes sentenças :

- A, teremos $K^{\blacklozenge}A = Cn(A,B) = E$ que é a única extensão de $(W, \Delta_K) = (\{A\}, \{:A / A \ ; \ :B / B\})$.
- $\neg A$, teremos $K^{\blacklozenge}\neg A = Cn(\neg A,B) = E'$ que é a única extensão de $(W', \Delta_K) = (\{\neg A\} , \{:A / A \ ; :B / B\})$.
- $\neg A \wedge \neg B$, teremos $K^{\blacklozenge}(\neg A \wedge \neg B) = Cn(\neg A,\neg B) = E''$ que também é a única extensão de $(W, \Delta_K) = (\{\neg A \wedge \neg B\} , \{:A / A \ ; :B / B\})$.■

Exemplo 6.3.7

Considere a base de conhecimento K formada pela sentença $A \leftrightarrow B$, i.e., $K = \{A \leftrightarrow B\}$com uma representação na fnc mínima $(\neg A \vee B) \wedge (A \vee \neg B)$. Se queremos rever K pelas seguintes sentenças :

- $(A \leftrightarrow \neg B)$, teremos :

  $K^{\bullet}(A \leftrightarrow \neg B) = Cn(A \leftrightarrow \neg B, \neg A \vee B) \cap Cn(A \leftrightarrow \neg B, A \vee \neg B) = Cn(E_1) \cap Cn(E_2)$, onde são extensões da teoria $(W, \Delta_K) = (\{A \leftrightarrow \neg B\}$, $:\neg A \vee B/ \neg A \vee B$; $:A \vee \neg B/ A \vee \neg B\})$, cujos modelos são, respectivamente, $\{(\neg A,B)\}$ e $\{(A,\neg B)\}$.■

Comparando os exemplo desta seção e a construção dos operadores de revisão, podemos ver que em ambos os casos se revemos uma base de conhecimento K pela sentença α, obtemos o mesmo conjunto de modelos independente do operador utilizado ($°\Delta$ ou $^{\bullet}$). De fato, a caracterização semântica das extensões para teorias default supernormais apresentada no capítulo 4 nos permite estabelecer uma conexão entre os modelos obtidos através do operador de revisão $°\Delta$ e os modelos obtidos a partir do operador de revisão $^{\bullet}$ definido através de teorias default supernormais. Formalmente esta conexão fica estabelecida pelo seguinte resultado :

Teorema 6.3.1

Seja K uma base de conhecimento, α uma sentença, $°\Delta$ o operador de revisão definido na definição 6.3.3, e seja $^{\bullet}$ o operador de revisão definido na definição 6.3.4. Se revemos a base de conhecimento K pela sentença α, então :

$$M \in [K \circ_{\Delta} \alpha] \text{ se, e somente se, } M \in [K^{\bullet}\alpha]. \blacksquare$$

IV. Conclusão

Neste capítulo procuramos estreitar a relação existente entre lógica default e revisão de crenças. Argumentamos que não só teorias default supernormais da lógica default clássica podem ser utilizada como uma forma de representação de estados epistêmicos e de processos de revisão de bases de crenças, mas também teorias default não-supernormais da lógica default clássica e não-clássica podem ser utilizadas para esta finalidade.

Neste caso, as teorias default não-supernormais devem ser vistas como uma forma de representação de estados epistêmicos e de processos de revisão segundo a abordagem fundamentalista e, os diferentes critérios de aplicabilidade de um default associados a cada uma das lógicas defaults não-clássicas, devem ser vistos como condições que devem ser satisfeitas no processo de revisão em questão.

Em qualquer tipo de teoria ou lógica default, vemos cada extensão ou como um(a coleção de) estado(s) epistêmico(s) (caso $W = \emptyset$) ou como um(a coleção de) possível(is) estado(s) epistêmico(s) (caso $W \neq \emptyset$) que pode(m) ser alcançado(s) após a revisão de uma certa base de crenças. Desta forma, ***o critério de aplicabilidade de um default funciona, de certa maneira, como uma função de seleção embutida no processo de construção de uma base revista***.

É interessante notar que a visão de uma teoria default da perspectiva de revisão de crenças é algo que aparece de maneira natural e implícita nos exemplos utilizados no estudo das várias lógicas default. Em geral, constrói-se uma extensão de uma dada teoria default e, em seguida, acrescenta-se um novo fato ao conjunto W desta teoria (tal conjunto e o novo fato são consistentes). Diante desta nova informação, nosso interesse se concentra na verificação de quais defaults não podem mais ser utilizados, ou seja, estamos fazendo uma "revisão" dos defaults que podemos aplicar. Portanto, uma teoria default (W,Δ) pode ser vista como a revisão da base de crenças formada pelo conjunto de conseqüentes dos default em Δ pelo conjunto W.

Mostramos também que podemos utilizar teorias default supernormais clássicas para representar processos de revisão de conjuntos de crenças, respeitando o princípio de irrelevância sintática de Dalal [17]. Isto faz com que a lógica default possa ser vista como uma forma de representação de processos de revisão de bases de crenças, que abrange as abordagens coerentes e fundamentalistas, assim como o processo de revisão de conjuntos de crenças.

CAPÍTULO 7

Conclusões e Trabalhos Futuros

Neste trabalho, procuramos estabelecer relacionamento entre as áreas de revisão de crenças, lógicas não-monotônicas e programação em lógica. Vimos que a união destas áreas do conhecimento pode trazer benefícios para elas.

Por um lado, as lógicas não-monotônicas, em particular a lógica default clássica e seus refinamentos, encontram dentro do escopo de revisão de crenças, uma forma simples de caracterização semântica de suas extensões, fortemente relacionada a sua definição sintática. Isto pode ser verificado (capítulos 2 e 4) a partir das definições sintática e semântica destas lógicas : as mudanças feitas, em especial, no critério de aplicabilidade dos defaults de uma lógica para outra, do ponto de vista sintático, são claramente refletidas na semântica de esferas. Como conseqüência, pudemos também estabelecer uma relação semântica entre programação em lógica e revisão de crenças.

A revisão de crenças ganha pelo fato de podermos utilizar teorias default, clássicas ou não, na representação de estados epistêmicos e no processo de revisão de crenças, tanto do ponto de vista de bases como conjuntos de crenças. Isto devido a semelhança existente entre a construção de um conjunto revisto e de uma extensão de uma teoria default. Particularmente, as teorias defaults não-supernormais se apresentam com destaque uma vez que elas formalizam um tipo de abordagem (fundamentalista) que tem sido negligenciada. No contexto de revisão de crenças, podemos interpretar uma teoria default (W,Δ) como a revisão do conjunto de conseqüentes dos defaults em Δ pelo conjunto W.

Desta forma, as principais contribuições deste trabalho são :

- Estabelecer uma relação entre revisão de crenças e os diversos tipos de lógicas default, pela definição de um ambiente semântico para estas lógicas baseado na relação entre os conceitos de *consistência/ inconsistência* (presentes na lógica default) e *expansão/ revisão* (presentes na revisão de crenças), através da utilização do modelo de esferas de Grove para revisão de crenças ;

- Permitir que os modelos de vários tipos de programas em lógica fossem caracterizados semanticamente utilizando-se a relação estabelecida anteriormente entre os conceitos de *consistência/ inconsistência* e *expansão/ revisão.* Desta forma, foi possível estabelecer, do ponto de vista semântico, uma conexão entre três importantes área de conhecimento dentro da inteligência artificial : lógica default, programação em lógica e revisão de crenças ;

- Mostrar que o processo de construção de uma extensão de uma teoria default pode ser visto da mesma maneira que o processo de revisão de uma base de crenças, ou seja, como a expansão consistente de um certo conjunto inicial ;

- Utilizar lógica default como ferramenta de representação de estados epistêmicos e de processos de revisão, abrangendo tantos bases de crenças (abordagens fundamentalista e coerente), bem como conjuntos de crenças.

Algumas direções naturais que podem ser seguidas a partir deste trabalho seriam :

- o estudo de uma possível relação entre a semântica de esferas definida para programas em lógica com a noção de revisão de programas e atualização de banco de dados proposta em [47] e [48] ;

- o estudo de que tipo de relacionamento podemos estabelecer entre o processo de revisão de bases de crenças que utilizam teorias default supernormal e não-supernormal além daquela sugerida (embutir prioridades nos defaults), e que tipo de restrições poderíamos estar interessados em embutir nos defaults, ou que elas significariam, no caso de querermos utilizar teorias default não-supernormais para modelar processos de revisão de conjuntos de crenças ;

- o estudo de como podemos formalizar a revisão de teorias default.

Apêndice A :

Prova dos Teoremas do Capítulo 2

Seção 2

Teorema 2.2.5

Se (W,Δ) é uma teoria default fechada, então um conjunto E de sentenças é uma extensão fraca de (W,Δ) se, e somente se, $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, onde :

$E_0 = W$; e para $i \geq 0$:

$E_{i+1} = Th(E_i) \cup \{C \mid (A : B_1, \dots ,B_k / C) \in \Delta$, onde $A \in E$ e $\neg B_1 \notin E, \dots, \neg B_k \notin E\}$. ■

Prova :

Inicialmente, observe que $\bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$ possui as seguintes propriedades :

(1) $W \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$

(2) $Th(\bigcup_{i=0}^{\infty} Ei) = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$

(3) Se $(A : B_1, \dots ,B_k / C) \in \Delta$, onde $A \in E$ e $\neg B_1 \notin E, \dots, \neg B_k \notin E$, então $C \in \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$.

Como $\Gamma_f(E)$ é o menor conjunto que satisfaz as condições da definição 2.2.4, temos que : $\Gamma_f(E) \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$.

($\Rightarrow$) Para mostrar que $\bigcup_{i=0}^{\infty} Ei \subseteq E$, temos que provar indutivamente que $E_i \subseteq E$ para todo $i \geq 0$.

Como $E = \Gamma_f(E)$, $W = E_0 \subseteq E$. Vamos assumir que $E_i \subseteq E$, e considere $C \in E_{i+1}$.

Se $C \in Th(E_i)$ então, como $E_i \subseteq E$, temos $C \in Th(E) = E$.

Caso contrário, existe um default $(A : B_1, \dots ,B_k / C) \in \Delta$, onde $A \in E$ e $\neg B_1 \notin E, \dots, \neg B_k \notin E$. Então $C \in \Gamma_f(E)$, pela definição 2.2.4 - ítem 3, ou seja, $C \in E$.

Logo, $\bigcup_{i=0}^{\infty} Ei \subseteq E$. Como $\Gamma_f(E) \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$ e $E = \Gamma_f(E)$, temos $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$.

($\Leftarrow$) Para mostrar que $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei \subseteq \Gamma_f(E)$, temos que provar indutivamente que $E_i \subseteq \Gamma_f(E)$ para todo $i \geq 0$.

Obviamente, $W = E_0 \subseteq \Gamma_f(E)$. Suponha que $E_i \subseteq \Gamma_f(E)$ e considere $C \in E_{i+1}$.

Se $C \in Th(E_i)$ então, como $E_i \subseteq \Gamma_f(E)$, temos $C \in Th(\Gamma_f(E)) = \Gamma_f(E)$.

Caso contrário, existe um default $(A : B_1, \ldots, B_k / C) \in \Delta$, onde $A \in E$ e $\neg B_1 \notin E, \ldots, \neg B_k \notin E$. Então, como $E_i \subseteq \Gamma_f(E)$, $A \in \Gamma_f(E)$, donde $C \in \Gamma_f(E)$, pela definição 2.2.4 - item 3.

Logo, $E_{i+1} \subseteq \Gamma_f(E)$. ♦

Seção 5

Teorema 2.5.3

Seja E uma CDL_F-extensão de uma teoria default assertiva (W,Δ). Temos :

$$E = Th_S(W \cup \{<C : \{J_1, \ldots, J_k, B, C\}> \mid A : B / C \in GD^E_{\Delta f}, <A : \{J_1, \ldots, J_k\}> \in E\}). \blacksquare$$

Prova :

Para mostrar que $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei \subseteq Th_S(W \cup \{<C : \{J_1, \ldots, J_k, B, C\}> \mid A : B / C \in GD^E_{\Delta f}, <A : \{J_1, \ldots, J_k\}> \in E\}) = X$, devemos provar por indução, utilizando o teorema 2.5.2, que para todo $i \geq 0 : E_i \subseteq X$.

Obviamente, $E_0 = W \subseteq X$.

Suponha que $E_i \subseteq X$ e seja $\vartheta \in E_{i+1}$. Se $\vartheta \in Th_S(E_i)$ então como $Th_S(E_i) \subseteq X$, $\vartheta \in X$.

Caso contrário, ϑ é igual a $A : B / C \in \Delta$, onde :

ou $(<A : \{J_1,\ldots,J_k\}> \in E_i$ e $Form(E) \cup Supp(E) \cup \{B,C\} \not\vdash \bot)$

ou $(<A : \{J_1,\ldots,J_k\}> \in E$ e $Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot$ e $Form(E) \cup \{B,C\} \not\vdash \bot$ e $Form(W) \cup Supp(E) \cup \{C\} \vdash \bot)$.

Como $<A : \{J_1,\ldots,J_k\}> \in E_i$, $<A: \{J_1,\ldots,J_k\}> \in E$, e portanto, $A: B / C \in GD^E_{\Delta}$.

Logo : $\vartheta \in \{<C : \{J_1, \ldots, J_k, B, C\}> \mid A : B / C \in GD^E_{\Delta}, <A : \{J_1,\ldots,J_k\}> \in E\} \subseteq X$.

Temos que mostrar agora que $X \subseteq E$. Como $Th_S(E) = E$, basta mostrar que :

$W \cup \{<C : \{J_1, ..., J_k, B, C\}> \mid A : B / C \in GD^E_\Delta, <A : \{J_1, ..., J_k\}> \in E\} \subseteq E.$

Obviamente, $W \subseteq E$. Temos que provar que :

$\Phi = \{<C : \{J_1, ..., J_k, B, C\}> \mid A : B / C \in GD^E_\Delta, <A : \{J_1, ..., J_k\}> \in E\} \subseteq E$

Se $\vartheta \in \Phi$ então existe um default $A : B / C \in \Delta$ tal que :

ou $(<A : \{J_1,...,J_k\}> \in E$ e $Form(E) \cup Supp(E) \cup \{B,C\} \not\vdash \bot)$

ou $(<A : \{J_1,...,J_k\}> \in E$ e $Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot$ e $Form(E) \cup \{B,C\} \not\vdash \bot$ e

$Form(W) \cup Supp(E) \cup \{C\} \vdash \bot)$.

Como, pelo teorema 2.5.2, $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, então $<A : \{J_1,...,J_k\}> \in E_i$ para algum i,

o que significa que $\vartheta \in E_{i+1} \subseteq E$. ♦

Seção 6

Proposição 2.6.1

Um conjunto de afirmativas E é uma PCDL-extensão semi-normal de uma teoria default afirmativa (W,Δ) se, e somente se,

$E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$ onde :

$E_0 = W$; e para $i \geq 0$:

$E_{i+1} = Th_{Sa}(E_i) \cup \{<C : \{\beta_1,...,\beta_n, C\} : \{\chi_1,..., \chi_n, B\}> \mid A : (C \mid B) / C \in \Delta$, onde

$((<A : \{\beta_1,...,\beta_n\}: \{\chi_1,..., \chi_n\}> \in E_i$ e

$Form(E) \cup Supp(E) \cup \{B,C\} \not\vdash \bot)$

ou

$(<A : \{\beta_1,...,\beta_n\}: \{\chi_1,..., \chi_n\}> \in E$ e $Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot$ e

$Form(E) \cup \{B\} \not\vdash \bot$ e $Form(W) \cup \{C\} \not\vdash \bot$ e

$Form(W) \cup Just(E) \cup \{C\} \vdash \bot))\}$. ■

Prova :

Inicialmente, observe que $\bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$ possui as seguintes propriedades :

(1) $W \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$,

(2) $Th_{Sa}(\bigcup_{i=0}^{\infty} Ei) = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$,

(3) Para qualquer $A : (C \mid B) / C \in \Delta$,

se $((\langle A:\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}:\{\chi_1,\ldots,\chi_n\}\rangle \in \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$ e $Form(E) \cup Supp(E) \cup \{B,C\} \not\vdash \bot)$

ou

$(\langle A : \{\beta_1,\ldots,\beta_n\}: \{\chi_1,\ldots,\chi_n\}\rangle \in E$ e

$Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot$ e $Form(E) \cup \{B\} \not\vdash \bot$ e

$Form(W) \cup \{C\} \not\vdash \bot$ e $Form(W) \cup Just(E) \cup \{C\} \vdash \bot))$

então $\langle C : \{\beta_1,\ldots,\beta_n, C\} : \{\chi_1,\ldots,\chi_n, B\}\rangle \in \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$.

Como $\Gamma_Z(E)$ é o menor conjunto que satisfaz as condições da definição 2.6.4, temos que : $\Gamma_Z(E) \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$.

$(\Rightarrow)$ Para mostrar que $\bigcup_{i=0}^{\infty} Ei \subseteq E$, temos que provar indutivamente que $E_i \subseteq E$ para todo $i \geq 0$.

Como $E = \Gamma_Z(E)$, $W = E_0 \subseteq E$. Vamos assumir que $E_i \subseteq E$, e considere $\vartheta \in E_{i+1}$.

Se $\vartheta \in Th_{Sa}(E_i)$ então, como $E_i \subseteq E$, temos $\vartheta \in Th_{Sa}(E) = E$.

Caso contrário, existe um default $A : (C \mid B) / C \in \Delta$, onde $C = Form(\vartheta)$, $\{\beta_1,\ldots,\beta_n,C\} = Cons(\vartheta)$ e $\{\chi_1,\ldots,\chi_n,B\} = Just(\vartheta)$ e

ou

$(\langle A:\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}:\{\chi_1,\ldots,\chi_n\}\rangle \in E_i$ e $Form(E) \cup Supp(E) \cup \{B,C\} \not\vdash \bot)$ (*)

ou

$(\langle A : \{\beta_1,\ldots,\beta_n\}: \{\chi_1,\ldots,\chi_n\}\rangle \in E$ e $Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot$ e $Form(E) \cup \{B\} \not\vdash \bot$ e $Form(W) \cup \{C\} \not\vdash \bot$ e $Form(W) \cup Just(E) \cup \{C\} \vdash \bot))$ (**)

No caso (*), como $E_i \subseteq E$, $\langle A:\{\beta_1,\ldots,\beta_n\}:\{\chi_1,\ldots,\chi_n\}\rangle \in E = \Gamma_Z(E)$, e pela definição 2.6.4, $\langle C : \{\beta_1,\ldots,\beta_n, C\} : \{\chi_1,\ldots,\chi_n, B\}\rangle \in \Gamma_Z(E) = E$.

No caso (**), direto da definição 2.6.4, temos $\langle C : \{\beta_1,\ldots,\beta_n, C\} : \{\chi_1,\ldots,\chi_n, B\}\rangle \in \Gamma_Z(E) = E$.

Logo, $\bigcup_{i=0}^{\infty} Ei \subseteq E$. Como $\Gamma_Z(E) \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$ e $E = \Gamma_Z(E)$, temos $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$.

($\Leftarrow$) Para mostrar que $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei \subseteq \Gamma_Z(E)$, temos que provar indutivamente que $E_i \subseteq \Gamma_Z(E)$ para todo $i \geq 0$.

Obviamente, $W = E_0 \subseteq \Gamma_Z(E)$. Suponha que $E_i \subseteq \Gamma_Z(E)$ e considere $\vartheta \in E_{i+1}$.

Se $\vartheta \in Th_{Sa}(E_i)$ então, como $E_i \subseteq \Gamma_Z(E)$, temos $\vartheta \in Th_{Sa}(\Gamma_Z(E)) = \Gamma_Z(E)$.

Caso contrário, existe um default $A : (C \mid B) / C \in \Delta$, onde $C = Form(\vartheta)$, $\{\beta_1,...,\beta_n,C\} = Cons(\vartheta)$, $\{\chi_1,..., \chi_n,B\} = Just(\vartheta)$, $Supp(\vartheta) = Just(\vartheta) \cup Cons(\vartheta)$ e

ou

$(<A:\{\beta_1,...,\beta_n\}:\{\chi_1,..., \chi_n\}> \in E_i$ e $Form(E) \cup Supp(E) \cup \{B,C\} \nvdash \bot)$ (♁)

ou

$(<A : \{\beta_1,...,\beta_n\}: \{\chi_1,..., \chi_n\}> \in E$ e $Form(E) \cup Supp(E) \nvdash \bot$ e $Form(E) \cup \{B\} \nvdash \bot$ e $Form(W) \cup \{C\} \nvdash \bot$ e $Form(W) \cup Just(E) \cup \{C\} \vdash \bot))$ (♁♁)

No caso (♁), como $E_i \subseteq \Gamma_Z(E)$, $<A:\{\beta_1,...,\beta_n\}:\{\chi_1,..., \chi_n\}> \in \Gamma_Z(E)$, e pela definição 2.6.4, $<C : \{\beta_1,...,\beta_n, C\} : \{\chi_1,..., \chi_n, B\}> \in \Gamma_Z(E)$.

No caso (♁♁), diretamente da definição 2.6.4, temos $<C : \{\beta_1,...,\beta_n, C\} : \{\chi_1,..., \chi_n, B\}> \in \Gamma_Z(E)$.

Logo, $E_{i+1} \subseteq \Gamma_Z(E)$. ♦

Teorema 2.6.1

Seja E uma $PCDL_F$-extensão de uma teoria default afirmativa (W,Δ). Temos :

$E = Th_{Sa}(W \cup \{<C : \{\beta_1,...,\beta_n, C\} : \{\chi_1,..., \chi_n, B\}> \mid A : (C \mid B) / C \in GD^E{}_{\Delta Z}$,

$<A : \{\beta_1,...,\beta_n\}: \{\chi_1,..., \chi_n\}> \in E\})$. ■

Prova :

Para mostrar que $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei \subseteq Th_{Sa}(W \cup \{<C : \{\beta_1,...,\beta_n, C\} : \{\chi_1,..., \chi_n, B\}> \mid A : (C \mid B) / C \in GD^E{}_{\Delta Z}, <A : \{\beta_1,...,\beta_n\}: \{\chi_1,..., \chi_n\}> \in E\}) = X$, devemos provar por indução, utilizando a proposição 2.6.1, que para todo $i \geq 0 : E_i \subseteq X$.

Obviamente, $E_0 = W \subseteq X$.

Suponha que $E_i \subseteq X$ e seja $\vartheta \in E_{i+1}$. Se $\vartheta \in Th_{Sa}(E_i)$ então como $Th_{Sa}(E_i) \subseteq X$, $\vartheta \in X$.

Caso contrário, ϑ é igual a $A : (C \mid B) / C \in \Delta$, onde :

ou ($<A : \{\beta_1,...,\beta_n\}: \{\chi_1,..., \chi_n\}> \in E_i$ e $Form(E) \cup Supp(E) \cup \{B,C\} \nvdash \perp$)

ou ($<A : \{\beta_1,...,\beta_n\}: \{\chi_1,..., \chi_n\}> \in E$ e $Form(E) \cup Supp(E) \nvdash \perp$ e

$Form(E) \cup \{B\} \nvdash \perp$ e $Form(W) \cup \{C\} \nvdash \perp$ e

$Form(W) \cup Just(E) \cup \{C\} \vdash \perp$).

Como $<A : \{\beta_1,...,\beta_n\}: \{\chi_1,..., \chi_n\}> \in E_i$, $<A : \{\beta_1,...,\beta_n\}: \{\chi_1,..., \chi_n\}> \in E$, e portanto, $A : (C \mid B) / C \in GD^E_{\Delta z}$. Logo : $\vartheta \in \{<C : \{\beta_1,...,\beta_n, C\} : \{\chi_1,..., \chi_n, B\}> \mid A : (C \mid B) / C \in GD^E_{\Delta z}, <A : \{\beta_1,...,\beta_n\}: \{\chi_1,..., \chi_n\}> \in E\} \subseteq X$.

Temos que mostrar agora que $X \subseteq E$. Como $Th_{Sa}(E) = E$, basta mostrar que :

$W \cup \{<C : \{\beta_1,...,\beta_n, C\} : \{\chi_1,..., \chi_n, B\}> \mid A : (C \mid B) / C \in GD^E_{\Delta}, <A : \{\beta_1,...,\beta_n\}: \{\chi_1,..., \chi_n\}> \in E\} \subseteq E$.

Obviamente, $W \subseteq E$. Temos que provar que :

$\Phi = \{<C : \{\beta_1,...,\beta_n, C\} : \{\chi_1,..., \chi_n, B\}> \mid A : (C \mid B) / C \in GD^E_{\Delta z}, <A : \{\beta_1,...,\beta_n\}: \{\chi_1,..., \chi_n\}> \in E\} \subseteq E$.

Se $\vartheta \in \Phi$ então existe um default $A : (C \mid B) / C \in \Delta$ tal que :

ou ($<A : \{\beta_1,...,\beta_n\}: \{\chi_1,..., \chi_n\}> \in E$ e $Form(E) \cup Supp(E) \cup \{B,C\} \nvdash \perp$)

ou ($<A : \{\beta_1,...,\beta_n\}: \{\chi_1,..., \chi_n\}> \in E$ e $Form(E) \cup Supp(E) \nvdash \perp$ e

$Form(E) \cup \{B\} \nvdash \perp$ e $Form(W) \cup \{C\} \nvdash \perp$ e

$Form(W) \cup Just(E) \cup \{C\} \vdash \perp$).

Como, pela proposição 2.6.1, $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, então $<A : \{\beta_1,...,\beta_n\}: \{\chi_1,..., \chi_n\}> \in E_i$ para algum i, o que significa que $\vartheta \in E_{i+1} \subseteq E$. ♦

Apêndice B :

Prova dos Teoremas do Capítulo 3

Seção 3

Teorema 3.3.3

Seja K um conjunto de crenças e A uma sentença. Seja S um sistema de esferas centrado em [K]. A revisão K^*_A é uma *expansão* (i.e., $K^*_A = K^+_A$) quando [K] é a menor esfera que [A] intercepta no sistema S. ■

Prova :

Suponha que [A] intercepta alguma esfera no sistema S. A condição S4 da definição 3.3.1 diz que existe uma menor esfera em S interceptando [A]. Suponha que [K] é esta menor esfera. Isso significa que $C(A) \subseteq [K]$.

Se $C(A) = [K]$ então temos $\neg A \notin K$ pois A pertence a todos os mundos em [K]. Portanto $K^*_A = K^+_A$ pelos postulados (K*3) e (K*4).

No caso em que $C(A) \subset [K]$, observe que se $\neg A \in K$, temos $[K] \subseteq [\neg A]$. Então para todo $M \in [K]$, $M \models \neg A$. Mas isto contradiz o fato que $K \cup \{A\}$ é consistente quando $C(A) \subset [K]$. Portanto, $\neg A \notin K$ e $K^*_A = K^+_A$. ■

Apêndice C :

Prova dos Teoremas do Capítulo 4

Seção 2

Teorema 4.2.1

Seja (W_0,Δ) uma teoria default normal. Então, qualquer sistema de esferas **S** construído a partir de (W_0,Δ), segundo a definição 4.2.2, satisfaz a condição de consistência. ■

Prova :

Seja (W_0,Δ) uma teoria default normal e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, ..., d_n, ...>$ uma seqüência (possivelmente infinita) de defaults em Δ tal que $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / B_\varsigma$. Seja **S** o sistema de esferas definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ segundo a definição 4.2.2.

Suponha que **S** não satisfaz a condição de consistência. Então, existe uma esfera $[W_\varsigma]$ do sistema **S**, tal que $[W_\varsigma] = \emptyset$. Pela construção de **S**, sabemos que existe um default $d_\varsigma = (A_\varsigma : B_\varsigma / B_\varsigma)$ que é aplicável a $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma]$ e, conseqüentemente, a esfera $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [B_\varsigma]$.

Logo, $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [B_\varsigma] = \emptyset$. Isto contradiz a definição de aplicabilidade do default $d_\varsigma = (A_\varsigma : B_\varsigma / B_\varsigma)$ a classe de modelos $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma]$ $(\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [B_\varsigma] \neq \emptyset)$.◆

Os teoremas 4.2.2 e 4.2.3 (para teorias defaults normais) são casos especiais dos teoremas 4.2.5 e 4.2.6 (ver demonstração abaixo).

Teorema 4.2.4

Seja **S** o sistema de esferas definido (segundo a definição 4.2.6) por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ e centrado em $[\mathscr{W}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma]$. Se **S** satisfaz a condição de estabilidade então **S** satisfaz a condição de consistência.■

Prova :

Seja (W_0,Δ) uma teoria default e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, ..., d_n, ...>$ uma seqüência (possivelmente infinita) de defaults em Δ tal que $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma$. Seja **S** o sistema de esferas definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ segundo a definição 4.2.6, que satisfaz a condição de estabilidade : $[\mathcal{W}] \cap [B_\varsigma] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma] \cap [B_\varsigma] \neq \emptyset$, para todo $\varsigma \in I$.

Suponha que **S** não satisfaz a condição de consistência. Então, existe uma esfera $[W_\delta]$ do sistema **S**, tal que $[W_\delta] = \emptyset$. Logo, $\bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma] = \emptyset$ e, conseqüentemente, $\bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma] \cap [B_\gamma] = \emptyset$, para todo $\gamma \in I$, o que contradiz a condição de estabilidade.●

Para demonstrar o teorema 4.2.5, utilizaremos a caracterização semântica de extensões na lógica default clássica apresentada por Etherington [24].

Definição C.2.1 (Etherington [24])

Seja $\delta = A : B / C$ e Π uma classe de interpretações de primeira-ordem.

A ordem $\geq_\delta$ em 2^Π é definida por : para todo $\Pi_1, \Pi_2 \in 2^\Pi$ temos que $\Pi_1 \geq_\delta \Pi_2$ se, e somente se,

1. $\forall m \in \Pi_2, m \models A$,
2. $\exists\, m \in \Pi_2, m \models B$,
3. $\Pi_1 = \{ m \in \Pi_2 \mid m \models C\}$.■

Definição C.2.2 (Etherington [24])

Seja Δ um conjunto de regras default e Π uma classe de interpretações de primeira-ordem. A ordem $\geq_\Delta$ em 2^Π é definida por : para todo $\Pi_1, \Pi_2 \in 2^\Pi$ temos que $\Pi_1 \geq_\Delta \Pi_2$ se, e somente se,

1. $\exists\delta \in \Delta,\ \Pi_1 \geq_\delta \Pi_2$, ou
2. $\exists\Pi_3 \in 2^\Pi, \Pi_1 \geq_\Delta \Pi_3$ e $\Pi_3 \geq_\Delta \Pi_2$.[1] ■

[1] $\Pi_1 \geq_\Delta \Pi_2$ significa que existe Π_3 tal que $\Pi_1 \geq_\Delta \Pi_3 \geq_\delta \Pi_2$ para algum $\delta \in \Delta$.

Definição C.2.3 (Etherington [24])

Seja (W,Δ) uma teoria default e Π uma classe $\geq_\Delta$-maximal de interpretações de primeira-ordem em $2^{[W]}$. Dizemos que Π é ***estável*** para (W,Δ) se, e somente se, existe um conjunto $\Delta' \subseteq \Delta$ tal que :

1. $\Pi \geq_{\Delta'} [W]$,
2. $\forall\delta = A : B / C \in \Delta'$, $\exists\, m \in \Pi$ tal que $m \models B$.■

Teorema C.2.1 (Etherington [24])

Seja (W,Δ) uma teoria default. Se E é uma extensão de (W,Δ), então [E] é estável para (W,Δ). ■

Teorema C.2.2 (Etherington [24])

Seja (W,Δ) uma teoria default. Se Π é estável para (W,Δ), então $\{\alpha \mid \Pi \models \alpha\}$ é uma extensão de (W,Δ). ■

Teorema 4.2.5

Seja (W_0,Δ) uma teoria default e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal com respeito a $\leq_R$ de defaults em Δ que define o sistema de esferas **S** (como na definição 4.2.6). Se **S** satisfaz a condição de estabilidade, então **S** provê uma extensão E de (W_0,Δ).■

Prova :

Considere a teoria default (W_0,Δ) e uma seqüência (possivelmente infinita) maximal de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, \ldots, d_n, \ldots>$, da forma $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma$, em Δ que define o sistema de esferas **S**, como na definição 4.2.6, centrado em $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma]$ e tal que **S** satisfaz a condição de estabilidade (para todo $\varsigma \in I$, $[\mathcal{W}] \cap [B_\varsigma] \neq \emptyset$).

Temos que mostrar que $[\mathcal{W}]$ é um elemento $\geq_\Delta$-maximal em $2^{[W_0]}$ e, além disso, é estável para (W_0,Δ).

Suponha que exista uma classe de modelos $[W] \in 2^{[W_0]}$ tal que $[W] \geq_\Delta [\mathcal{W}]$. Logo, pela definição C.2.2 :

1. $\exists\delta \in \Delta$, $[W] \geq_\delta [\mathcal{W}]$, ou

2. $\exists\, [W'] \in 2^{[W_0]}$, tal que $[W] \geq_\Delta [W']$ e $[W'] \geq_\Delta [\mathcal{W}]$.

Considere o primeiro caso. Suponha que δ é o default A : B / C e que δ não pertence a seqüência maximal de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, \ldots, d_n, \ldots>$. Pela definição C.2.1, temos :

1. $\forall\, m \in [\mathcal{W}]$, $m \models A$, que significa que $[\mathcal{W}] \subseteq [A]$;
2. $\exists\, m \in [\mathcal{W}]$, $m \models B$, que significa que $[\mathcal{W}] \cap [B] \neq \emptyset$;
3. $[W] = \{\, m \in [\mathcal{W}] \mid m \models C\}$, que significa que poderíamos definir :

   $[W] = [\mathcal{W}] \cap [C] \neq \emptyset$;

Então a seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ não é maximal, o que é uma contradição. Logo, a primeira parte da disjunção na definição C.2.2 não é satisfeita e como conseqüência deste fato, a segunda parte da disjunção não pode ser satisfeita.

Falta mostrar que $[\mathcal{W}]$ é estável para (W_0,Δ). Defina Δ' como sendo o conjunto de defaults d que fazem parte da seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$. Obviamente, $\Delta' \subseteq \Delta$ e, pela primeira parte desta demonstração, o ítem (1) da definição C.2.3 é satisfeito. Note que, por hipótese, o sistema **S** satisfaz a condição de estabilidade e portanto, para cada $\varsigma \in I$, $[\mathcal{W}] \cap [B_\varsigma] \neq \emptyset$, onde B_ς é a justificativa de algum default de Δ'. Ou seja, para todo default $(A : B / C) \in \Delta'$, $\exists\, m \in [\mathcal{W}]$ tal que $m \models B$, o que satisfaz o ítem (2) da definição C.2.3. ◆

Teorema 4.2.6

Seja (W_0,Δ) uma teoria default, $E = Th(W_0 \cup CONS\ (GD(E,(W_0,\Delta))))$ uma extensão de (W_0,Δ), sendo $GD(E,(W_0,\Delta))$ o conjunto de defaults geradores de E, e $\mathcal{M}$ a classe de todos os modelos de E. Os defaults em $GD(E,(W_0,\Delta))$ podem ser colocados em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que o sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 4.2.6) provê E. ■

Prova :

Considere a extensão E de uma teoria default (W_0,Δ), $\mathcal{N}$ a classe de todos os modelos de W_0 e $\mathcal{M}$ a classe de todos os modelos de E. Devemos construir o sistema de esferas **S** (como na definição 4.2.6) que provê E.

Pelo teorema 2.2.1 (capítulo 2), podemos caracterizar a extensão E como sendo o conjunto $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, onde :

$E_0 = W_0$, e para $i \geq 0$

$E_{i+1} = Th(E_i) \cup \{C \text{ tal que } A : B / C \in \Delta, \text{ onde } E_i \vdash A \text{ e } \neg B \notin E\}$ (*).

O sistema de esferas $\mathbf{S} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbf{S_i}$, onde cada sistema de esferas $\mathbf{S_i}$ está centrado em $[E_i]$ e é construído da seguinte forma :

- $\mathbf{S_0} = \{M_L, [W_0]\}$, onde $[W_0] = [E_0]$;

Por indução, vamos construir os sistemas de esferas $\mathbf{S_i}$, para todo $i \in [1,\infty)$:

- **Base** : Considere o conjunto (possivelmente infinito) de defaults $\Lambda_1 \subseteq GD(E,(W_0,\Delta))$ tal que $CONSEQ(\Lambda_1) = \{C \text{ tal que } A : B / C \in \Delta, \text{ onde } E_0 \vdash A$ e $\neg B \notin E\}$, ou seja, Λ_1 é o conjunto de defaults geradores de E cujos conseqüentes são utilizados para construir o conjunto E_1 ($CONSEQ(\Lambda_1)$ é igual ao lado direito da união (*)). Note que cada $d = A : B / C \in \Lambda_1$ satisfaz as condições $E_0 \vdash A$ e $\neg B \notin E$, independentemente dos outros defaults e, portanto, os defaults de Λ_1 podem ser aplicados em qualquer ordem.

  Logo, seja $\{A^1{}_1: B^1{}_1/C^1{}_1 ; A^1{}_2: B^1{}_2/ C^1{}_2; ...; A^1{}_\xi: B^1{}_\xi/C^1{}_\xi ; ...\}$ uma enumeração qualquer dos defaults do conjunto Λ_1. Utilizando esta enumeração, vamos construir o sistema de esferas $\mathbf{S_1} = \{M_L,[W^1{}_0], \ldots , [W^1{}_n],...\}$ centrado em $\bigcap_{\xi \in I} [W^1{}_\xi] = [E_1]$, tal que :

  $$[W^1{}_0] = [W_0] = [E_0] \text{ e, para cada } \xi \in I :$$

  $$[W^1{}_\xi] = \bigcap_{\gamma<\xi} [W^1{}_\gamma] \cap [C^1{}_\xi].$$

  \- **Base** : Considere o default $(A^1{}_1: B^1{}_1/C^1{}_1)$ e a classe de modelos $[W^1{}_0]$.

  Temos : $E_0 \models A^1{}_1$, ou seja, $[W^1{}_0] = [W_0] = [E_0] \subseteq [A^1{}_1]$.

  Além disso, $\neg B^1{}_1 \notin E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, ou seja, $\neg B^1{}_1 \notin E_j$, para todo $j \in [0,\infty)$. Então $[E_j] \cap [B^1{}_1] \neq \varnothing$, $j \in [0,\infty)$, e em particular, $[E_0] \cap [B^1{}_1] = [W^1{}_0] \cap [B^1{}_1] \neq \varnothing$.

- **Passo de Indução :** Suponha que as esferas $[W^1_\gamma]$ ($\gamma < \xi$) já tenham sido obtidas com as propriedades desejadas. Considere o default (A^1_ξ: B^1_ξ/C^1_ξ) e a classe de modelos $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma]$.

Observe que : $E_0 \models A^1_\xi$, ou seja, $[E_0] \subseteq [A^1_\xi]$.

Como $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma] \subseteq [E_0]$, temos : $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma] \subseteq [A^1_\xi]$.

Além disso, $\neg B^1_\xi \notin E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, ou seja, $\neg B^1_\xi \notin E_j$, para todo $j \in [0,\infty)$.

Então $[E_j] \cap [B^1_\xi] \neq \emptyset$, $j \in [0,\infty)$, e em particular, $[E_1] \cap [B^1_\xi] \neq \emptyset$.

Como $[E_1] \subseteq \bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma]$, temos : $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma] \cap [B^1_\xi] \neq \emptyset$.

Logo, o default (A^1_ξ: B^1_ξ/C^1_ξ) é aplicável a $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma]$, e portanto, podemos construir a esfera $[W^1_\xi] = \bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma] \cap [C^1_\xi]$.

- **Passo de Indução :** Suponha que os sistemas de esferas S_1, S_2, ..., S_i centrados, respectivamente, em $[E_1]$, $[E_2]$, ..., $[E_i]$, foram construídos segundo alguma enumeração, respectivamente, dos conjuntos de defaults Λ_1, Λ_2,..., Λ_i. Vamos construir o sistema de esferas S_{i+1}.

Para isto, considere o conjunto (possivelmente infinito) de defaults $\Lambda_{i+1} \subseteq GD(E,(W_0,\Delta))$ tal que $CONSEQ(\Lambda_{i+1}) = \{C$ tal que $A : B / C \in \Delta$, onde $E_i \vdash A$ e $\neg B \notin E\}$, ou seja, Λ_{i+1} é o conjunto de defaults cujos conseqüentes são utilizados para construir o conjunto E_{i+1} ($CONSEQ(\Lambda_{i+1})$ é igual ao lado direito da união (*)). Note que cada $d = A : B / C \in \Lambda_{i+1}$ satisfaz as condições $E_i \vdash A$ e $\neg B \notin E$, independentemente dos outros defaults e, portanto, os defaults de Λ_{i+1} podem ser aplicados em qualquer ordem.

Logo, seja $\{A^{i+1}_1: B^{i+1}_1/C^1_1 ;\ A^{i+1}_2: B^{i+1}_2/ C^{i+1}_2; ...; A^{i+1}_\xi: B^{i+1}_\xi/C^{i+1}_\xi ; ...\}$ uma enumeração qualquer dos defaults do conjunto Λ_{i+1}. Utilizando esta enumeração, vamos construir o sistema de esferas $S_{i+1} = \{M_L,[W^{i+1}_0], \dots, [W^{i+1}_n],\dots\}$ centrado em $\bigcap_{\xi\in I} [W^{i+1}_\xi] = [E_{i+1}]$, tal que :

$$[W^{i+1}_0] = [E_i] \text{ e, para cada } \xi \in I :$$

$$[W^{i+1}{}_{\xi}] = \bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_{\gamma}] \cap [C^{i+1}{}_{\xi}].$$

- Base : Considere o default $(A^{i+1}{}_1 : B^{i+1}{}_1/C^{i+1}{}_1)$ e a classe de modelos $[W^{i+1}{}_0]$.

Temos : $E_i \models A^{i+1}{}_1$, ou seja, $[W^{i+1}{}_0] = [E_i] \subseteq [A^{i+1}{}_1]$.

Além disso, $\neg B^{i+1}{}_1 \notin E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, ou seja, $\neg B^{i+1}{}_1 \notin E_j$, para todo $j \in [0,\infty)$.

Então $[E_j] \cap [B^{i+1}{}_1] \neq \varnothing$, $j \in [0,\infty)$, e em particular, $[E_i] \cap [B^{i+1}{}_1] \neq \varnothing$.

Logo, o default $(A^{i+1}{}_1 : B^{i+1}{}_1/C^{i+1}{}_1)$ é aplicável a $[W^{i+1}{}_0]$, e portanto, podemos construir a esfera $[W^{i+1}{}_1] = [W^{i+1}{}_0] \cap [C^{i+1}{}_1]$.

- Passo de Indução : Suponha que as esferas $[W^{i+1}{}_{\gamma}]$ $(\gamma < \xi)$ já tenham sido obtidas com as propriedades desejadas. Considere o default $(A^{i+1}{}_{\xi} : B^{i+1}{}_{\xi}/C^{i+1}{}_{\xi})$ e a classe de modelos $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_{\gamma}]$.

Observe que : $E_i \models A^{i+1}{}_{\xi}$, ou seja, $[E_i] \subseteq [A^{i+1}{}_{\xi}]$.

Como $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_{\gamma}] \subseteq [E_i]$, temos : $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_{\gamma}] \subseteq [A^{i+1}{}_{\xi}]$.

Além disso, $\neg B^{i+1}{}_{\xi} \notin E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, ou seja, $\neg B^{i+1}{}_{\xi} \notin E_j$, para todo $j \in [0,\infty)$.

Então $[E_j] \cap [B^{i+1}{}_{\xi}] \neq \varnothing$, $j \in [0,\infty)$, e em particular, $[E_{i+1}] \cap [B^{i+1}{}_{\xi}] \neq \varnothing$.

Como $[E_{i+1}] \subseteq \bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_{\gamma}]$, temos : $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^{1}{}_{\gamma}] \cap [B^{i+1}{}_{\xi}] \neq \varnothing$.

Logo, o default $(A^{i+1}{}_{\xi} : B^{i+1}{}_{\xi}/C^{i+1}{}_{\xi})$ é aplicável a $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_{\gamma}]$, e portanto, podemos construir a esfera $[W^{i+1}{}_{\xi}] = \bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_{\gamma}] \cap [C^{i+1}{}_{\xi}]$.

Logo, os defaults do conjunto $GD(E,(W_0,\Delta))$ podem ser colocado em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_{\varsigma}>_{\varsigma \in I} = <\Lambda_1, \Lambda_2,..., \Lambda_n, ...>$ que define um sistema de esferas $S = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i = \{M_L, [E_0], [W^1{}_1],..., [W^1{}_i],..., [E_1], [W^2{}_1],..., [W^2{}_j],..., [E_2], ..., [E_n], [W^{n+1}{}_1],..., [W^{n+1}{}_k], [E_{n+1}],...\}$ centrado em $[E] = M$, onde cada conjunto Λ_i é uma enumeração qualquer de defaults utilizados na construção do sistema de esferas S_i. Além disso, como para todo default $A : B / C$ pertencente a seqüência $<d_{\varsigma}>_{\varsigma \in I}$, $\neg B \notin E$, temos que $[E] \cap [B] \neq \varnothing$, e portanto a condição de estabilidade é satisfeita e conseqüentemente, pelo teorema 4.2.4, a condição de consistência também é satisfeita. Logo, o sistema de esferas **S** provê a extensão E. ◆

Teorema 4.2.7

Seja S o sistema de esferas definido (segundo a definição 4.2.11) por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ e centrado em $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma]$. Se S satisfaz a condição de estabilidade então S satisfaz a condição de consistência.■

Prova :

Seja (W_0,Δ) uma teoria default e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, ..., d_n, ...>$ uma seqüência (possivelmente infinita) de defaults em Δ tal que $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma$. Seja S o sistema de esferas definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ segundo a definição 4.2.11, que satisfaz a condição de estabilidade : $[\mathcal{W}] \cap [B_\varsigma] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma] \cap [B_\varsigma] \neq \emptyset$, para todo $\varsigma \in I$.

Suponha que S não satisfaz a condição de consistência. Então, existe uma esfera $[W_\delta]$ do sistema S, tal que $[W_\delta] = \emptyset$. Logo, $\bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma] = \emptyset$ e, conseqüentemente, $\bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma] \cap [B_\gamma] = \emptyset$, para todo $\gamma \in I$, o que contradiz a condição de estabilidade.◆

Teorema 4.2.8

Seja (W_0,Δ) uma teoria default e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal com respeito a $\leq_{Rf}$ de defaults em Δ que define o sistema de esferas S (como na definição 4.2.11). Se S satisfaz as condições dos pré-requisitos e de estabilidade, então S provê fracamente uma extensão fraca E de (W_0,Δ).■

Prova :

Seja $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma]$ o centro de um sistemas de esferas $S = \{M_L,[W_0], ..., [W_n], ...\}$ obtido a partir de uma seqüência (possivelmente infinita) de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, ..., d_n,...>$ da forma $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma$, segundo a definição 4.2.11, e que satisfaz as condições :

- dos pré-requisitos : $[\mathcal{W}] \subseteq [A_\varsigma]$, para todo $\varsigma \in I$;
- de estabilidade : $[\mathcal{W}] \cap [B_\varsigma] \neq \emptyset$, para todo $\varsigma \in I$.

Seja $W'_i = \{\iota \text{ tal que } [W_i] \subseteq [\iota]\}$ o conjunto de sentenças válidas na esfera $[W_i]$, para todo $i \in I$. Seja, $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} W'i$.

Defina :

$E_0 = W_0$, e para $i \geq 0$

$E_{i+1} = Th(E_i) \cup \{C$ tal que $A : B / C \in \Delta$, onde $A \in E$ e $\neg B \notin E\}$.

Pelo teorema 2.2.5 (capítulo 2), basta mostrar que $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, para concluir que E é uma extensão fraca de (W_0,Δ).

Caso 1 : $\bigcup_{i=0}^{\infty} Ei \subseteq E$

Por indução, temos :

- **Base:** Por definição, temos que $[W_0] = [E_0]$. Como $[E] = [\mathcal{W}] \subseteq [W_0]$, temos, para todo $\mu \in W_0$, que $[\mathcal{W}] \models \mu$. Logo, $\mu \in E$.

- **Passo de indução :** Seja $E_i \subseteq E$. Considere $C \in E_{i+1}$.

Se $C \in Th(E_i)$ então $C \in E$ (pelo passo de indução e por E ser fechado sob conseqüência lógica).

Caso contrário, existe um default $d = A{:}B/C \in \Delta$ tal que $A \in E$ e $\neg B \notin E$. Assim, $[\mathcal{W}] = [E] \subseteq [A]$ e $[E] \cap [B] = [\mathcal{W}] \cap [B] \neq \varnothing$.

Se $d \in \langle d_\varsigma \rangle_{\varsigma \in I}$ então $[E] \subseteq [C]$, e portanto, $C \in E$. Caso contrário, podemos considerar a seqüência de defaults $\langle\langle d_\varsigma \rangle_{\varsigma \in I}, d\rangle$ que define um sistema de esferas segundo a definição 4.2.11 e que tem como prefixo a seqüência $\langle d_\varsigma \rangle_{\varsigma \in I}$, o que contradiz a maximalidade desta seqüência.

Logo, $E_{i+1} \subseteq E$.

Caso 2 : $E \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$

- **Base :** $W'_0 \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, uma vez que $[W'_0] = [W_0]$ e $E_0 = W_0$.

- **Passo de indução :** Suponha que, para todo $j < \varsigma$, $W'_j \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$. Pela construção do sistema de esferas S (definição 4.2.11) sabemos que existe um default A_ς: $B_\varsigma / C_\varsigma$ tal que $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$, com $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [A_\varsigma] \neq \varnothing$ e $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [B_\varsigma] \neq \varnothing$.

Por hipótese, como $[\mathcal{W}] \subseteq [A_\varsigma]$, então $A_\varsigma \in \bigcup_{i=0}^{\infty} W'i = E$. Além disso, $[\mathcal{W}] \cap [B_\varsigma] \neq \varnothing$, e portanto, $\neg B_\varsigma \notin \bigcup_{i=0}^{\infty} W'i = E$. Então $C_\varsigma \in E_j$, para algum $j < \varsigma$. Logo, $C_\varsigma \in \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$. ●

Teorema 4.2.9

Seja (W_0,Δ) uma teoria default, $E = Th(W_0 \cup CONS(GD(E,(W_0,\Delta))))$ uma extensão fraca de (W_0,Δ), sendo $GD(E,(W_0,\Delta))$ o conjunto de defaults geradores de E, e M a classe de todos os modelos de E. Os defaults em $GD(E,(W_0,\Delta))$ podem ser colocados em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que o sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 4.2.11) provê fracamente E. ■

Prova :

Considere a extensão fraca E de uma teoria default fechada (W_0,Δ), N a classe de todos os modelos de W_0 e M a classe de todos os modelos de E. Devemos construir o sistema de esferas (como na definição 4.2.11) que provê E.

Pelo teorema 2.2.5 (capítulo 2), podemos caracterizar a extensão fraca E como sendo o conjunto $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, onde :

$E_0 = W_0$, e para $i \geq 0$

$E_{i+1} = Th(E_i) \cup \{C \text{ tal que } A : B / C \in \Delta, \text{ onde } A \in E \text{ e } \neg B \notin E\}$ (*).

O sistema de esferas $\mathbf{S} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbf{S}_i$, onde cada sistema de esferas $\mathbf{S}_i$ está centrado em $[E_i]$ e é construído da seguinte forma :

- $\mathbf{S_0} = \{M_L, [W_0]\}$, onde $[W_0] = [E_0]$;

Por indução, vamos construir os sistemas de esferas $\mathbf{S_i}$, para todo $i \in [1,\infty)$:

- **Base** : Considere o conjunto (possivelmente infinito) de defaults $\Lambda_1 \subseteq GD(E,(W_0,\Delta))$ tal que $CONSEQ(\Lambda_1) = \{C \text{ tal que } A : B / C \in \Delta, \text{ onde } A \in E \text{ e } \neg B \notin E\}$, ou seja, Λ_1 é o conjunto de defaults geradores de E cujos conseqüentes são utilizados para construir o conjunto E_1 ($CONSEQ(\Lambda_1)$ é igual ao lado direito da união (*)). Note que cada $d = A : B / C \in \Lambda_1$ satisfaz as condições $A \in E$ e $\neg B \notin E$, independentemente dos outros defaults e, portanto, os defaults de Λ_1 podem ser aplicados em qualquer ordem.

  Logo, seja $\{A^1_1: B^1_1/C^1_1 ; A^1_2: B^1_2/ C^1_2; ...; A^1_\xi: B^1_\xi/C^1_\xi ; ...\}$ uma enumeração qualquer dos defaults do conjunto Λ_1. Utilizando esta enumeração, vamos construir o

sistema de esferas $S_1 = \{M_L, [W^1_0], \ldots, [W^1_n], \ldots\}$ centrado em $\bigcap_{\xi \in I} [W^1_\xi] = [E_1]$, tal que :

$$[W^1_0] = [W_0] = [E_0] \text{ e, para cada } \xi \in I:$$

$$[W^1_\xi] = \bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma] \cap [C^1_\xi].$$

- **Base :** Considere o default $(A^1_1 : B^1_1/C^1_1)$ e a classe de modelos $[W^1_0]$.

Temos : $E_0 \subseteq E$, ou seja, $[E] \subseteq [E_0] = [W^1_0]$. Como $A^1_1 \in E$, então $[W^1_0] \cap [A^1_1] = [E_0] \cap [A^1_1] \neq \varnothing$.

Além disso, $\neg B^1_1 \notin E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, ou seja, $\neg B^1_1 \notin E_j$, para todo $j \in [0,\infty)$.

Então $[E_j] \cap [B^1_1] \neq \varnothing$, $j \in [0,\infty)$, e em particular, $[E_0] \cap [B^1_1] =$ $= [W^1_0] \cap [B^1_1] \neq \varnothing$.

Logo, o default $(A^1_1 : B^1_1/C^1_1)$ é aplicável a $[W^1_0]$ (definição 4.2.10), e portanto, podemos construir a esfera $[W^1_1] = [W^1_0] \cap [C^1_1]$.

- **Passo de Indução :** Suponha que as esferas $[W^1_\gamma]$ $(\gamma < \xi)$ já tenham sido obtidas com as propriedades desejadas. Considere o default $(A^1_\xi : B^1_\xi/C^1_\xi)$ e a classe de modelos $\bigcap_{\gamma<\xi}[W^1_\gamma]$.

Temos : $[E] \subseteq \bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma]$. Como $A^1_\xi \in E$, então $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma] \cap [A^1_\xi] \neq \varnothing$.

Além disso, $\neg B^1_\xi \notin E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, ou seja, $\neg B^1_\xi \notin E_j$, para todo $j \in [0,\infty)$.

Então $[E_j] \cap [B^1_\xi] \neq \varnothing$, $j \in [0,\infty)$, e em particular, $[E_1] \cap [B^1_\xi] \neq \varnothing$.

Como $[E_1] \subseteq \bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma]$, temos : $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma] \cap [B^1_\xi] \neq \varnothing$.

Logo, o default $(A^1_\xi : B^1_\xi/C^1_\xi)$ é aplicável a $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma]$ (definição 4.2.10), e portanto, podemos construir a esfera $[W^1_\xi] = \bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma] \cap [C^1_\xi]$.

- **Passo de Indução :** Suponha que os sistemas de esferas $S_1, S_2, \ldots, S_i$ centrados, respectivamente, em $[E_1], [E_2], \ldots, [E_i]$, foram construídos segundo alguma enumeração, respectivamente, dos conjuntos de defaults $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_i$. Vamos construir o sistema de esferas S_{i+1}.

Para isto, considere o conjunto (possivelmente infinito) de defaults $\Lambda_{i+1} \subseteq GD(E,(W_0,\Delta))$ tal que $CONSEQ(\Lambda_{i+1}) = \{C$ tal que $A : B / C \in \Delta$, onde $A \in E$ e $\neg B \notin E\}$, ou seja, Λ_{i+1} é o conjunto de defaults cujos conseqüentes são utilizados para construir o conjunto E_{i+1} ($CONSEQ(\Lambda_{i+1})$ é igual ao lado direito da união (*)). Note que cada $d = A : B / C \in \Lambda_{i+1}$ satisfaz as condições $A \in E$ e $\neg B \notin E$, independentemente dos outros defaults e, portanto, os defaults de Λ_{i+1} podem ser aplicados em qualquer ordem.

Logo, seja $\{A^{i+1}_1 : B^{i+1}_1/C^1_1 \ ; \ A^{i+1}_2 : B^{i+1}_2/ C^{i+1}_2; \ldots; A^{i+1}_\xi : B^{i+1}_\xi/C^{i+1}_\xi \ ; \ldots\}$ uma enumeração qualquer dos defaults do conjunto Λ_{i+1}. Utilizando esta enumeração, vamos construir o sistema de esferas $S_{i+1} = \{M_L,[W^{i+1}_0], \ldots , [W^{i+1}_n],\ldots\}$ centrado em $\bigcap_{\xi \in I} [W^{i+1}_\xi] = [E_{i+1}]$, tal que :

$$[W^{i+1}_0] = [E_i] \text{ e, para cada } \xi \in I :$$

$$[W^{i+1}_\xi] = \bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}_\gamma] \cap [C^{i+1}_\xi].$$

- Base : Considere o default $(A^{i+1}_1 : B^{i+1}_1/C^{i+1}_1)$ e a classe de modelos $[W^{i+1}_0]$.

Temos : $E_i \subseteq E$, ou seja, $[E] \subseteq [E_i] = [W^{i+1}_0]$.

Como $A^{i+1}_1 \in E$, então $[W^{i+1}_0] \cap [A^{i+1}_1] = [E_i] \cap [A^{i+1}_1] \neq \emptyset$.

Além disso, $\neg B^{i+1}_1 \notin E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, ou seja, $\neg B^{i+1}_1 \notin E_j$, para todo $j \in [0,\infty)$.

Então $[E_j] \cap [B^{i+1}_1] \neq \emptyset$, $j \in [0,\infty)$, e em particular, $[E_i] \cap [B^{i+1}_1] \neq \emptyset$.

Logo, o default $(A^{i+1}_1 : B^{i+1}_1/C^{i+1}_1)$ é aplicável a $[W^{i+1}_0]$, e portanto, podemos construir a esfera $[W^{i+1}_1] = [W^{i+1}_0] \cap [C^{i+1}_1]$.

- Passo de Indução : Suponha que as esferas $[W^{i+1}_\gamma]$ ($\gamma < \xi$) já tenham sido obtidas com as propriedades desejadas. Considere o default $(A^{i+1}_\xi : B^{i+1}_\xi/C^{i+1}_\xi)$ e a classe de modelos $\bigcap_{\gamma<\xi}[W^{i+1}_\gamma]$.

Temos : $[E] \subseteq \bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}_\gamma]$.

Como $A^{i+1}_\xi \in E$, então : $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}_\gamma] \cap [A^{i+1}_\xi] \neq \emptyset$.

Além disso, $\neg B^{i+1}_\xi \notin E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, ou seja, $\neg B^{i+1}_\xi \notin E_j$, para todo $j \in [0,\infty)$.

Então $[E_j] \cap [B^{i+1}{}_\xi] \neq \emptyset$, $j \in [0,\infty)$, e em particular, $[E_{i+1}] \cap [B^{i+1}{}_\xi] \neq \emptyset$.

Como $[E_{i+1}] \subseteq \bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_\gamma]$, temos : $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^1{}_\gamma] \cap [B^{i+1}{}_\xi] \neq \emptyset$.

Logo, o default $(A^{i+1}{}_\xi\text{: } B^{i+1}{}_\xi/C^{i+1}{}_\xi)$ é aplicável a $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_\gamma]$, e portanto, podemos construir a esfera $[W^{i+1}{}_\xi] = \bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_\gamma] \cap [C^{i+1}{}_\xi]$.

Logo, os defaults do conjunto $GD(E,(W_0,\Delta))$ podem ser colocado em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <\Lambda_1, \Lambda_2,..., \Lambda_n, ...>$ que define um sistema de esferas $S = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i = \{M_L, [E_0], [W^1{}_1],..., [W^1{}_i],..., [E_1], [W^2{}_1],..., [W^2{}_j],..., [E_2], ..., [E_n], [W^{n+1}{}_1],..., [W^{n+1}{}_k], [E_{n+1}],...\}$ centrado em $[E] = M$, onde cada conjunto Λ_i é uma enumeração qualquer de defaults utilizados na construção do sistema de esferas S_i. Além disso, para todo default $A : B /C$ pertencente a seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, $A \in E$ e $\neg B \notin E$. Ou seja, temos, respectivamente, que $[E] \subseteq [A]$ e $[E] \cap [B] \neq \emptyset$, e portanto as condições dos pré requisitos e de estabilidade são satisfeitas. Logo, o sistema de esferas S provê a extensão E.◆

Teorema 4.2.10

Seja $(W_0, \Delta_1,..., \Delta_m)$ uma teoria default supernormal priorizada. Então, qualquer sistema de esferas **S** construído a partir de $(W_0, \Delta_1,..., \Delta_m)$, segundo a definição 4.2.15, satisfaz a condição de consistência. ■

Prova :

Seja $(W_0, \Delta_1,..., \Delta_m)$ uma teoria default supernormal priorizada e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, ..., d_n, ...>$ uma seqüência (possivelmente infinita) de defaults em Δ tal que $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / B_\varsigma$. Seja **S** o sistema de esferas definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ segundo a definição 4.2.15.

Suponha que **S** não satisfaz a condição de consistência. Então, existe uma esfera $[W_\varsigma]$ do sistema **S**, tal que $[W_\varsigma] = \emptyset$. Pela construção de **S**, sabemos que existe um default $d_\varsigma = (A_\varsigma : B_\varsigma / B_\varsigma)$ que é aplicável a $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma]$ e, conseqüentemente, a esfera $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [B_\varsigma]$.

Logo, $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [B_\varsigma] = \varnothing$. Isto contradiz a definição de aplicabilidade do default $d_\varsigma = (A_\varsigma : B_\varsigma / B_\varsigma)$ a classe de modelos $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma]$ ($\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [B_\varsigma] \neq \varnothing$).♦

Teorema 4.2.11

Seja $(W_0, \Delta_1,..., \Delta_n)$ uma teoria default supernormal priorizada e $<d_\Delta>_{\xi \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal com respeito a $\leq_{PDL}$ de defaults que define o sistema de esferas S como na definição 4.2.15. Então S provê uma PDL-extensão E de $(W_0, \Delta_1,..., \Delta_n)$. ■

Prova :

Considere o sistema de esferas S construído, como na definição 4.2.15, a partir da seqüência de defaults (possivelmente infinita) maximal com relação a $\leq_{PDL}$: $<d_\Delta>_{\xi \in I} = <<d'_{\Delta 1\varsigma}>_{\varsigma \in I}, <d'_{\Delta 2\varsigma}>_{\varsigma \in I}, ..., <d'_{\Delta n\varsigma}>_{\varsigma \in I}>$. Logo, por definição da relação $\leq_{PDL}$, a seqüência $<d'_{\Delta i\varsigma}>_{\varsigma \in I}$, para todo $i \in [1,n]$, é maximal com relação a $\leq_N$.

Para provar que o sistema S provê uma PDL-extensão E de $(W_0, \Delta_1,..., \Delta_n)$, temos que mostrar, por indução, que, a partir das seqüências $<d'_{\Delta 1\varsigma}>_{\varsigma \in I}$, $<d'_{\Delta 2\varsigma}>_{\varsigma \in I}$, ..., $<d'_{\Delta n\varsigma}>_{\varsigma \in I}$, podemos construir sistemas de esferas S_i ($i \in [1,n]$) que provêm conjuntos $E_1,..., E_n$ tais que E_i é uma extensão de (E_{i-1}, Δ_i), para todo $1 \leq i \leq n$, sendo $E_0 = W_0$ e $E = E_n$.

- Base :

Considere a teoria default (W_0, Δ_1) e a seqüência de defaults $<d'_{\Delta 1\varsigma}>_{\varsigma \in I}$. Pelo teorema 4.2.2, sabemos que o sistema de esferas S_1 definido por esta seqüência provê uma extensão E_1 de (W_0, Δ_1).

- Passo de indução :

Seja S_i o sistema de esferas definido pela seqüência de defaults $<d'_{\Delta i\varsigma}>_{\varsigma \in I}$, que provê uma extensão E_i da teoria default (E_{i-1}, Δ_i).

Considere a teoria default (E_i, Δ_{i+1}) e a seqüência de defaults $<d'_{\Delta i+1\varsigma}>_{\varsigma \in I}$. Pelo teorema 4.2.2, sabemos que o sistema de esferas S_{i+1} definido por esta seqüência provê uma extensão E_{i+1} de (E_i, Δ_{i+1}).

Teorema 4.2.12

Seja $(W_0, \Delta_1,..., \Delta_n)$ uma teoria default supernormal priorizada e $E = Th(W_0 \cup CONS(GD(E,(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n))))$ uma PDL-extensão de $(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n)$, sendo $GD(E, (W_0,\Delta_1,...,\Delta_n))$ o conjunto de defaults geradores de E com respeito a $(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n)$, e $\mathcal{M}$ a classe de todos os modelos de E. Os defaults em $GD(E,(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n))$ podem ser colocados em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\Delta>_{\xi \in I}$ tal que o sistema de esferas **S** definido por $<d_\Delta>_{\xi \in I}$ (como na definição 4.2.15) provê E. ■

Prova :

Novamente vamos utilizar a definição 2.2.5. Como E é uma PDL-extensão de $(W_0, \Delta_1,..., \Delta_n)$ então existem conjuntos $E_1,..., E_n$ tais que E_i é uma extensão de (E_{i-1}, Δ_i), para todo $1 \leq i \leq n$, onde $E_0 = W_0$ e $E = E_n$. Podemos garantir a existência destes conjuntos uma vez que estamos nos restringindo a teorias default supernormais.

É fácil verificar que, pelas definições 4.2.2 e 4.2.3 e os teoremas 2.2.3 e 4.2.2, para cada $i \in [1,n]$, $E_i = Th(E_{i-1} \cup CONS(GD(E_i,(E_{i-1}, \Delta_i))))$, onde $GD(E_i,(E_{i-1}, \Delta_i))$ é o conjunto dos defaults geradores de E_i com respeito a (E_{i-1}, Δ_i).

Pelo teorema 4.2.3, cada conjunto $GD(E_i,(E_{i-1}, \Delta_i))$ pode ser colocado em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_{\Delta i}> = <d_{1i}, d_{2i}, ..., d_{mi},...>$ maximal (com respeito a $\leq_N$) de defaults em Δ_i tais que d_{ji} representa o default $(:B_{ji} /B_{ji})$, e que define o sistema de esferas $\mathbf{S}_i$, $i \in [1,n]$, onde :

$$\mathbf{S}_i = \{ M_L,[W_{1,i}],..., [W_{m,i}],...\} \text{ centrado em } [E_i] = \bigcap_{\gamma \in I} [W_{\gamma,i}], \text{ onde}$$

$$[W_{1,i}] = [E_{i-1}], \text{ para todo } i \in [1,n].$$

Note que $GD(E,(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n))$ é formado pela união dos $GD(E_i,(E_{i-1}, \Delta_i))$, para todo $i \in [1,n]$. Portanto, basta considerar a concatenação das seqüências $<d_{\Delta i}>$, $i \in [1,n]$, para obter uma seqüência de defaults $<d_i>$ que define o sistema de esferas $\mathbf{S} = \bigcup_{i=1}^{n} \mathbf{S}_i$, centrado em $\bigcap_{\gamma \in I} [W_\gamma] = [E_n]$, como na definição 4.2.15. ◆

Seção 3

Definição C.3.1

Seja (W_0,Δ) uma teoria default e Ξ_L o conjunto de todas as seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, \dots, d_n, \dots>$ que definem sistemas de esferas como na definição 4.3.2. O conjunto Ξ_L pode ser parcialmente ordenado por $\leq_L$ definido como : $<d'> \leq_L <d''>$ se $<d'>$ é prefixo de $<d''>$.

Dizemos que $<d> \in \Xi_L$ é uma seqüência maximal com respeito a $\leq_L$ de defaults em Δ se não existe nenhuma seqüência $<d'> \in \Xi_L$ tal que $<d> \leq_L <d'>$. ■

Teorema 4.3.1

Seja **S** o sistema de esferas definido (segundo a definição 4.3.2) por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ e centrado em $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma]$. Então **S** satisfaz a condição de consistência.■

Prova :

Seja (W_0,Δ) uma teoria default e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, \dots, d_n, \dots>$ uma seqüência (possivelmente infinita) de defaults em Δ tal que $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma$. Seja **S** o sistema de esferas definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ segundo a definição 4.3.2.

Suponha que **S** não satisfaz a condição de consistência. Então, existe uma esfera $[W_\varsigma]$ do sistema **S**, tal que $[W_\varsigma] = \varnothing$. Pela construção de **S**, sabemos que $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$ para algum default $d_\varsigma = (A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma)$ que é L-aplicável a $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma]$ e $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma]$ satisfaz o teste de consistência com relação a $(B_\gamma \wedge C_\varsigma)$ para todo $\gamma < \varsigma$.

Como : $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [C_\varsigma] = \varnothing$, então $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [B_\gamma \wedge C_\varsigma] = \varnothing$, para todo $\gamma < \varsigma$. Logo, $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma]$ não satisfaz o teste de consistência com relação a $(B_\gamma \wedge C_\varsigma)$, o que é uma contradição.◆

Teorema 4.3.2

Seja (W_0,Δ) uma teoria default e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal com respeito a $\leq_L$ de defaults em Δ que define o sistema de esferas **S** (como na definição 4.3.2). Então **S** provê uma *m*-extensão E de (W_0,Δ).■

Prova :

Seja $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma]$ o centro do sistema de esferas S obtido a partir de uma seqüência (possivelmente infinita) de defaults $\langle d_\varsigma \rangle_{\varsigma \in I} = \langle d_1, \ldots, d_n, \ldots \rangle$, segundo a definição 4.3.2. Seja $W'_i = \{\iota$ tal que $[W_i] \subseteq [\iota]\}$ o conjunto de sentenças válidas na esfera $[W_i]$ e F'_i o conjunto das justificativas de todos os defaults utilizados na construção da esfera $[W_i]$, para todo $i \in I$. Seja $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} W'i$ e $F = \bigcup_{i=0}^{\infty} F'i$.

Defina :

$E_0 = W_0$ e $F_0 = \{\ \}$; e para $i \geq 0$:

$E_{i+1} = Th(E_i) \cup \{C \mid (A : B / C) \in \Delta, E_i \vdash A$, e

para cada $X \in F \cup \{B\}, E \cup \{C\} \nvdash \neg X\}$

$F_{i+1} = F_i \cup \{B \mid (A : B / C) \in \Delta, E_i \vdash A$, e

para cada $X \in F \cup \{B\}, E \cup \{C\} \nvdash \neg X\}$.

Pelo teorema 2.3.1, basta mostrar que $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$ e $F = \bigcup_{i=0}^{\infty} Fi$, para concluir que E é uma *m*-extensão de (W_0, Δ).

Caso 1 : $\bigcup_{i=0}^{\infty} Ei \subseteq E$ e $\bigcup_{i=0}^{\infty} Fi \subseteq F$

Por indução, temos :

- **Base :** Por definição, $[W_0] = [E_0]$. Como $[E] = [\mathcal{W}] \subseteq [W_0]$, temos, para todo $\mu \in W_0$, que $[\mathcal{W}] \models \mu$. Logo, $\mu \in E$. Obviamente, $\varnothing = F_0 \subseteq F$.

- **Passo de indução :** Suponha que $E_i \subseteq E$ e $F_i \subseteq F$.

Considere $C \in E_{i+1}$.

Se $C \in Th(E_i)$ então $C \in E$ (pelo passo de indução e por E ser fechado sob conseqüência lógica).

Caso contrário, existe um default $d = A{:}B/C \in \Delta$ tal que :

(a) $E_i \vdash A$;

(b) Para cada $X' \in F \cup \{B\}, E \cup \{C\} \nvdash \neg X'$.

Pelo ítem (a) e pela hipótese de indução : $[\mathcal{W}] = [E] \subseteq [E_i] \subseteq [A]$.

Pelo ítem (b) : para todo $X' \in F \cup \{B\}$: $[E] \cap [C \wedge X'] \neq \varnothing$.

Se $d \in \langle d_\varsigma \rangle_{\varsigma \in I}$ então $[E] \subseteq [C]$, e portanto, $C \in E$. Caso contrário, podemos construir a seqüência de defaults $\langle\langle d_\varsigma \rangle_{\varsigma \in I}, d\rangle$ que define um sistema de esferas segundo a definição 4.3.2 e que tem como prefixo a seqüência $\langle d_\varsigma \rangle_{\varsigma \in I}$, o que contradiz a maximalidade desta seqüência.

Logo, $E_{i+1} \subseteq E$.

Considere $B \in F_{i+1}$. Obviamente, se $B \in F_i$ então $B \in F$.

Caso contrário, existe um default $d = A{:}B/C \in \Delta$ tal que :

(a) $E_i \vdash A$;

(b) Para cada $X' \in F \cup \{B\}$, $E \cup \{C\} \nvdash \neg X'$.

Como vimos acima, tais condições indicam que podemos ter um dos seguintes caso :

- $d \in \langle d_\varsigma \rangle_{\varsigma \in I}$: ou seja, $d = d_\kappa$, para algum $\kappa \in I$. Isto significa que d_κ foi utilizado na construção da esfera $[W_\kappa]$ do sistema S. Conseqüentemente, sua justificativa (B) pertence ao conjunto F'_κ das justificativas de todos os defaults utilizados na construção de $[W_\kappa]$. Como, por definição, $B \in F'_\kappa \subseteq F$, temos que $F_{i+1} \subseteq F$.

- caso contrário, podemos construir a seqüência de defaults $\langle\langle d_\varsigma \rangle_{\varsigma \in I}, d\rangle$ que, como vimos, contradiz o fato de que $\langle d_\varsigma \rangle_{\varsigma \in I}$ é maximal.

Logo, $F_{i+1} \subseteq F$.

Caso 2 : $E \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$ e $F \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Fi$

- **Base :** $W'_0 \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, uma vez que $[W'_0] = [W_0]$ e $E_0 = W_0$.

Além disso, $F'_0 = \varnothing \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Fi$.

- **Passo de indução :** Suponha que, para todo $\gamma < \varsigma$, $W'_\gamma \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$ e $F'_\gamma \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Fi$. Temos que mostrar que $W'_\varsigma \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$ e $F'_\varsigma \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Fi$.

Pela construção do sistema de esferas S (definição 4.3.2) sabemos que existe um default $A_\varsigma{:}\ B_\varsigma/\ C_\varsigma$ tal que $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$, com $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \subseteq [A_\varsigma]$ e $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [C_\varsigma \wedge B_\gamma] \neq \varnothing$, para todo $\gamma \leq \varsigma$. Conseqüentemente, $W'_\varsigma = \bigcup_{\gamma<\varsigma} W'_\gamma \cup \{C_\varsigma\}$.

Por hipótese, como $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \subseteq [A_\varsigma]$, temos que $A_\varsigma \in \bigcup_{\gamma<\varsigma} W'_\gamma \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$. Então, existe um conjunto E_j que é o menor (sob inclusão) conjunto entre $E_0, E_1, \ldots, E_i, \ldots$ que satisfaz a condição : $\bigcup_{\gamma<\varsigma} W'_\gamma \subseteq E_j$. Logo, $E_j \vdash A_\varsigma$.

Além disso, para todo $\gamma \leq \varsigma$, $[\mathcal{W}] \cap [B_\gamma] \neq \emptyset$. Portanto, para todo $\gamma \leq \varsigma$, $\neg B_\gamma \notin \bigcup_{i=0}^{\infty} W'i = E$. Logo, $E \cup \{C_\varsigma\} \not\vdash \neg X$, para todo $X \in F \cup \{B_\varsigma\}$.

Então $C_\varsigma \in E_{j+1}$, e conseqüentemente, $C_\varsigma \in \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$.

Considere $B_\varsigma \in F'_\varsigma$. Então existe um default $d = (A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma)$ utilizado na construção da esfera $[W_\varsigma]$. Se d também foi utilizado na construção da esfera $[W_\gamma]$, para algum $\gamma < \varsigma$, então $B_\varsigma \in F'_\gamma \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Fi$. Caso contrário, sabemos que o default $d = (A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma)$ é utilizado na construção da esfera $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$, com $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \subseteq [A_\varsigma]$ e $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [C_\varsigma \wedge B_\gamma] \neq \emptyset$, para todo $\gamma \leq \varsigma$. Conseqüentemente, $W'_\varsigma = \bigcup_{\gamma<\varsigma} W'_\gamma \cup \{C_\varsigma\}$.

Como vimos acima, existe um conjunto E_j que é o menor (sob inclusão) conjunto entre $E_0, E_1, \ldots, E_i, \ldots$ que satisfaz as condições :

- $\bigcup_{\gamma<\varsigma} W'_\gamma \subseteq E_j$, e portanto, $E_j \vdash A_\varsigma$; e

- para todo $\gamma \leq \varsigma$, $[\mathcal{W}] \cap [B_\gamma] \neq \emptyset$, ou seja, $\neg B_\gamma \notin \bigcup_{i=0}^{\infty} W'i = E$.

Logo, $E \cup \{C_\varsigma\} \not\vdash \neg X$, para todo $X \in F \cup \{B_\varsigma\}$.

Então $B_\varsigma \in F_{j+1}$, e conseqüentemente, $B_\varsigma \in \bigcup_{i=0}^{\infty} Fi$.◆

Teorema 4.3.3

Seja (W_0,Δ) uma teoria default, $E = Th(W_0 \cup CONS(GD^F(E,(W_0,\Delta))))$ uma *m*-extensão de (W_0,Δ) com respeito a F, onde F é o conjunto de justificativas que dão suporte a E e $GD^F(E,(W_0,\Delta))$ é o conjunto de defaults geradores de E, e *M* a classe de todos os modelos de E. Os defaults em $GD^F(E,(W_0,\Delta))$ podem ser colocados em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que o sistema de esferas **S** definido por (como na definição 4.3.2) provê E. ■

seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que o sistema de esferas **S** definido por (como na definição 4.3.2) provê E. ■

Prova :

Considere a *m*-extensão E, com respeito a F, de uma teoria default fechada (W_0,Δ), N a classe de todos os modelos de W_0 e M a classe de todos os modelos de E. Devemos construir o sistema de esferas **S** (como na definição 4.3.2) que provê E.

Pelo teorema 2.3.1 (capítulo 2), podemos caracterizar uma *m*-extensão E de (W_0,Δ) com respeito a F através dos conjuntos $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$ e $F = \bigcup_{i=0}^{\infty} Fi$, onde :

$E_0 = W_0$ e $F_0 = \{\ \}$, e para $i \geq 0$

$E_{i+1} = Th(E_i) \cup \{C$ tal que $A : B / C \in \Delta, E_i \vdash A$ e

para cada $X \in F \cup \{B\}, E \cup \{C\} \nvdash \neg X\}$ (*);

$F_{i+1} = F_i \cup \{B$ tal que $A : B / C \in \Delta, E_i \vdash A$ e para cada $X \in F \cup \{B\}$,

$E \cup \{C\} \nvdash \neg X\}$;

Observe que $F = JUST(GD^F(E,(W_0,\Delta)))$

O sistema de esferas $\mathbf{S} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbf{S}_i$, onde cada sistema de esferas $\mathbf{S}_i$ está centrado em $[E_i]$ e é construído da seguinte forma :

- $\mathbf{S}_0 = \{M_L, [W_0]\}$, onde $[W_0] = [E_0]$;

Por indução, vamos construir os sistemas de esferas $\mathbf{S}_i$, para todo $i \in [1,\infty)$:

- **Base :** Considere o conjunto (possivelmente infinito) de defaults $\Lambda_1 \subseteq GD^F(E,(W_0,\Delta))$ tal que $CONSEQ(\Lambda_1) = \{C$ tal que $A : B / C \in \Delta$, onde $E_0 \vdash A$ e para cada $X \in F \cup \{B\}, E \cup \{C\} \nvdash \neg X\}$, ou seja, Λ_1 é o conjunto de defaults geradores de E cujos conseqüentes são utilizados para construir o conjunto E_1 ($CONSEQ(\Lambda_1)$ é igual ao lado direito da união (*)). Note que cada $d = A : B / C \in \Lambda_1$ satisfaz as condições : (a) $E_0 \vdash A$ e (b) para cada $X \in F \cup \{B\}, E \cup \{C\} \nvdash \neg X$, independentemente dos outros defaults e, portanto, os defaults de Λ_1 podem ser aplicados em qualquer ordem.

  Logo, seja $\{A^1_1: B^1_1/C^1_1 ; A^1_2: B^1_2/ C^1_2; ...; A^1_\xi: B^1_\xi/C^1_\xi ; ...\}$ uma enumeração qualquer dos defaults do conjunto Λ_1. Utilizando esta enumeração, vamos construir o

sistema de esferas $S_1 = \{M_L, [W^1_0], \ldots, [W^1_n], \ldots\}$ centrado em $\bigcap_{\xi \in I} [W^1_\xi] = [E_1]$, tal que :

$$[W^1_0] = [W_0] = [E_0] \text{ e, para cada } \xi \in I:$$

$$[W^1_\xi] = \bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma] \cap [C^1_\xi]\,;$$

e os conjuntos F^1_ξ ($\xi \in I$) formados pelas justificativas dos defaults utilizados na construção de cada esfera $[W^1_\xi]$, para $\xi \in I$. Defina $F^1_0 = F_0 = \varnothing$.

- **Base :** Considere o default $(A^1_1: B^1_1/C^1_1)$ e a classe de modelos $[W^1_0]$.

Temos : $E_0 \models A^1_1$, ou seja, $[W^1_0] = [W_0] = [E_0] \subseteq [A^1_1]$.

Além disso, para cada $X \in F^1_0 \cup \{B^1_1\} \subseteq F \cup \{B^1_1\}$, $E \cup \{C^1_1\} \not\models \neg X$, o que significa que para todo $X \in F^1_0 \cup \{B^1_1\}$, existe $m \in [E]$ tal que $m \models (C^1_1 \wedge X)$.

Como $[E] \subseteq [E_0] = [W^1_0]$, temos que $[W^1_0] \cap [B^1_1 \wedge C^1_1] \neq \varnothing$.

Logo, o default $(A^1_1: B^1_1/C^1_1)$ é L-aplicável a $[W^1_0]$.

Obviamente, $[W^1_0]$ satisfaz ao teste de consistência com relação a $(Z \wedge C^1_1)$, para todo $Z \in F^1_0 = \varnothing$, uma vez que $[W^1_0] \cap [B^1_1 \wedge C^1_1] \neq \varnothing$, e portanto, $[W^1_0] \cap [C^1_1] \neq \varnothing$.

Assim, podemos construir a esfera $[W^1_1] = [W^1_0] \cap [C^1_1]$ e o conjunto $F^1_1 = F^1_0 \cup \{B^1_1\} = \{B^1_1\}$.

- **Passo de Indução :** Considere o default $(A^1_\xi: B^1_\xi/C^1_\xi)$, a classe de modelos $\bigcap_{\gamma<\xi}[W^1_\gamma]$ e $\bigcup_{\gamma<\xi} F^1_\gamma$ o conjunto formado pela união dos conjuntos de todas as justificativas de defaults utilizados na construção das esferas $[W^1_\gamma]$, para todo $\gamma < \xi$.

Temos : $E_0 \models A^1_\xi$, ou seja, $[E_0] \subseteq [A^1_\xi]$. Como $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma] \subseteq [E_0]$, temos : $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma] \subseteq [A^1_\xi]$.

Além disso, para cada $X \in \bigcup_{\gamma<\xi} F^1_\gamma \cup \{B^1_\xi\} \subseteq F \cup \{B^1_\xi\}$, $E \cup \{C^1_\xi\} \not\models \neg X$, o que significa que para todo $X \in \bigcup_{\gamma<\xi} F^1_\gamma \cup \{B^1_\xi\}$, existe $m \in [E]$ tal que $m \models (C^1_\xi \wedge X)$. Como $[E] \subseteq \bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma]$, temos que $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma] \cap [B^1_\xi \wedge C^1_\xi] \neq \varnothing$.

Logo, o default $(A^1_\xi: B^1_\xi/C^1_\xi)$ é L-aplicável a $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma]$.

Obviamente, $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^1{}_\gamma]$ satisfaz ao teste de consistência com relação a $(Z \wedge C^1{}_\xi)$, para todo $Z \in \bigcup_{\gamma<\xi} F^1{}_\gamma \subseteq F$, uma vez que $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^1{}_\gamma] \cap [B \wedge C^1{}_\xi] \neq \varnothing$ para todo $B \in F$.

- **Passo de Indução :** Suponha que os sistemas de esferas S_1, S_2, ..., S_i centrados, respectivamente, em $[E_1]$, $[E_2]$, ..., $[E_i]$, foram construídos segundo alguma enumeração, respectivamente, dos conjuntos de defaults Λ_1, Λ_2,..., Λ_i. Vamos construir o sistema de esferas S_{i+1}.

Para isto, considere o conjunto (possivelmente infinito) de defaults $\Lambda_{i+1} \subseteq GD(E,(W_0,\Delta))$ tal que $CONSEQ(\Lambda_{i+1}) = \{C$ tal que $A : B / C \in \Delta$, onde $E_i \vdash A$ e e para cada $X \in F \cup \{B\}$, $E \cup \{C\} \nvdash \neg X\}$, ou seja, Λ_{i+1} é o conjunto de defaults geradores cujos conseqüentes são utilizados para construir o conjunto E_{i+1} ($CONSEQ(\Lambda_{i+1})$ é igual ao lado direito da união (*)). Note que cada $d = A : B / C \in \Lambda_{i+1}$ satisfaz as condições : (a) $E_i \vdash A$ e (b) para cada $X \in F \cup \{B\}$, $E \cup \{C\} \nvdash \neg X$, independentemente dos outros defaults e, portanto, os defaults de Λ_{i+1} podem ser aplicados em qualquer ordem.

Logo, seja $\{A^{i+1}{}_1: B^{i+1}{}_1/C^1{}_1 ;\ A^{i+1}{}_2: B^{i+1}{}_2/ C^{i+1}{}_2; ...; A^{i+1}{}_\xi: B^{i+1}{}_\xi/C^{i+1}{}_\xi ; ...\}$ uma enumeração qualquer dos defaults do conjunto Λ_{i+1}. Utilizando esta enumeração, vamos construir o sistema de esferas $S_{i+1} = \{M_L,[W^{i+1}{}_0], \dots , [W^{i+1}{}_n],\dots\}$ centrado em $\bigcap_{\xi\in I} [W^{i+1}{}_\xi] = [E_{i+1}]$, tal que :

$$[W^{i+1}{}_0] = [E_i] \text{ e, para cada } \xi \in I :$$

$$[W^{i+1}{}_\xi] = \bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_\gamma] \cap [C^{i+1}{}_\xi] ;$$

e os conjuntos $F^{i+1}{}_\xi$ ($\xi \in I$) formados pelas justificativas dos defaults utilizados na construção da esfera $[W^{i+1}{}_\xi]$, para $\xi \in I$. Defina $F^{i+1}{}_0 = F_i$.

- **Base :** Considere o default $(A^{i+1}{}_1: B^{i+1}{}_1/C^{i+1}{}_1)$ e a classe de modelos $[W^{i+1}{}_0]$.

Temos : $E_i \models A^{i+1}{}_1$, ou seja, $[W^{i+1}{}_0] = [E_i] \subseteq [A^{i+1}{}_1]$.

Além disso, para cada $X \in F^{i+1}{}_0 \cup \{B^{i+1}{}_1\} \subseteq F \cup \{B^{i+1}{}_1\}$, $E \cup \{C^{i+1}{}_1\} \not\models \neg X$, o que significa que para todo $X \in F^{i+1}{}_0 \cup \{B^{i+1}{}_1\}$, existe $m \in [E]$ tal que $m \models (C^{i+1}{}_1 \wedge X)$. Como $[E] \subseteq [E_0] = [W^{i+1}{}_0]$, temos que $[W^{i+1}{}_0] \cap [B^{i+1}{}_1 \wedge C^{i+1}{}_1] \neq \emptyset$.

Logo, o default $(A^{i+1}{}_1: B^{i+1}{}_1/C^{i+1}{}_1)$ é L-aplicável a $[W^{i+1}{}_0]$.

Obviamente, $[W^{i+1}{}_0]$ satisfaz ao teste de consistência com relação a $(Z \wedge C^{i+1}{}_1)$, para todo $Z \in F^{i+1}{}_0 = F_i \subseteq F$, uma vez que $[W^{i+1}{}_0] \cap [B \wedge C^{i+1}{}_1] \neq \emptyset$, para todo $B \in F$.

Assim, podemos construir a esfera $[W^{i+1}{}_1] = [W^{i+1}{}_0] \cap [C^{i+1}{}_1]$ e o conjunto $F^{i+1}{}_1 = F^{i+1}{}_0 \cup \{B^{i+1}{}_1\} = F_i \cup \{B^{i+1}{}_1\}$.

- Passo de Indução : Considere o default $(A^{i+1}{}_\xi: B^{i+1}{}_\xi/C^{i+1}{}_\xi)$, a classe de modelos $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_\gamma]$ e $\bigcup_{\gamma<\xi} F^{i+1}{}_\gamma$ o conjunto formado pela união dos conjuntos de todas as justificativas de defaults utilizados na construção das esferas $[W^{i+1}{}_\gamma]$, para todo $\gamma < \xi$.

Temos : $E_i \models A^{i+1}{}_\xi$, ou seja, $[E_i] \subseteq [A^{i+1}{}_\xi]$. Como $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_\gamma] \subseteq [E_i]$, temos : $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_\gamma] \subseteq [A^{i+1}{}_\xi]$.

Além disso, para cada $X \in \bigcup_{\gamma<\xi} F^{i+1}{}_\gamma \cup \{B^{i+1}{}_\xi\} \subseteq F \cup \{B^{i+1}{}_\xi\}$, $E \cup \{C^{i+1}{}_\xi\} \not\models \neg X$, o que significa que para todo $X \in \bigcup_{\gamma<\xi} F^{i+1}{}_\gamma \cup \{B^{i+1}{}_\xi\}$, existe $m \in [E]$ tal que $m \models (C^{i+1}{}_\xi \wedge X)$.

Como $[E] \subseteq \bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_\gamma]$, temos que $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_\gamma] \cap [B^{i+1}{}_\xi \wedge C^{i+1}{}_\xi] \neq \emptyset$.

Logo, o default $(A^{i+1}{}_\xi: B^{i+1}{}_\xi/C^{i+1}{}_\xi)$ é L-aplicável a $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_\gamma]$.

Obviamente, $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_\gamma]$ satisfaz ao teste de consistência com relação a $(Z \wedge C^1{}_\xi)$, para todo $Z \in \bigcup_{\gamma<\xi} F^{i+1}{}_\gamma \subseteq F$, uma vez que $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_\gamma] \cap [B \wedge C^{i+1}{}_\xi] \neq \emptyset$, para todo $B \in F$.

Logo, os defaults do conjunto $GD^F(E,(W_0,\Delta))$ podem ser colocado em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n, \ldots>$ que define um sistema de esferas $S = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i = \{M_L, [E_0], [W^1{}_1], \ldots, [W^1{}_i], \ldots, [E_1], [W^2{}_1], \ldots, [W^2{}_j], \ldots, [E_2], \ldots, [E_n], [W^{n+1}{}_1], \ldots, [W^{n+1}{}_k], [E_{n+1}], \ldots\}$ centrado em $[E] = M$, onde cada conjunto

Λ_i é uma enumeração qualquer de defaults utilizados na construção do sistema de esferas S_i. Logo, o sistema de esferas **S** provê a extensão E. ◆

Seção 4

Teorema 4.4.1

Seja **S** o sistema de esferas definido (segundo a definição 4.4.2) por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ e centrado em $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma]$. Então **S** sempre satisfaz a condição : para todo $\varsigma \in I$, $[W_\varsigma] \cap [J_\varsigma] \neq \emptyset$, onde $J_\varsigma = \{JUST(d_\gamma) / \gamma \leq \varsigma\}$.■

Prova :

Seja (W_0,Δ) uma teoria default e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, d_2, ...>$ uma seqüência (possivelmente infinita) de defaults em Δ tal que $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma$. Seja **S** o sistema de esferas definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ segundo a definição 4.4.2.

Suponha, por absurdo, que existe $\xi \in I$ tal que $[W_\xi] \cap [J_\xi] = \emptyset$, onde $J_\xi = \{JUST(d_\gamma) / \gamma \leq \xi\}$. Pela definição do sistema de esferas **S**, $[W_\xi] = \bigcap_{\gamma<\xi}[W_\gamma] \cap [C_\xi]$, onde o default $d_\xi = A_\xi : B_\xi / C_\xi$ é S-aplicável a $\bigcap_{\gamma<\xi}[W_\gamma]$ com respeito a $(\bigcap_{\gamma<\xi} [W_\gamma] \cap [J'_\xi])$, onde $J'_\xi = \{JUST(d_\gamma) / \gamma < \xi\}$.

Pela segunda condição de aplicabilidade (definição 4.4.1), temos que :

$$\emptyset \neq (\bigcap_{\gamma<\xi} [W_\gamma] \cap [J'_\xi]) \cap [B_\xi \wedge C_\xi] =$$

$$(\bigcap_{\gamma<\xi} [W_\gamma] \cap [C_\xi]) \cap ([J'_\xi] \cap [B_\xi]) =$$

$[W_\xi] \cap [J_\xi] = \emptyset$, o que é uma contradição. ◆

Para demonstrarmos o teorema 4.4.2, utilizaremos os seguintes conceitos definidos por Schaub [62] para caracterizar a classe de modelos das extensões restritivas:

Definição C.4.1 (Schaub [62])

Seja $\delta = A : B / C$ e Π uma classe de interpretações de primeira-ordem.

A ordem $\geq_\delta$ em $2^\Pi x 2^\Pi$ é definida por : para todo (Π_1,Π_1') , $(\Pi_2,\Pi_2') \in 2^\Pi x 2^\Pi$ temos $(\Pi_1,\Pi_1') \geq_\delta (\Pi_2,\Pi_2')$ se, e somente se,

1. $\forall \pi \in \Pi_2,\ \pi \models A$,

2. $\exists \pi \in \Pi_2'$, $\pi \models B \wedge C$,
3. $\Pi_1 = \{ \pi \in \Pi_2 \mid \pi \models C\}$,
4. $\Pi_1' = \{ \pi \in \Pi_2' \mid \pi \models B \wedge C\}$.■

Definição C.4.2 (Schaub [62])

Seja Δ um conjunto de regras default e Π uma classe de interpretações de primeira-ordem. A ordem $\geq_\Delta$ em $2^\Pi x 2^\Pi$ é definida por : para todo (Π_1,Π_1') , $(\Pi_2,\Pi_2') \in 2^\Pi x 2^\Pi$ temos $(\Pi_1,\Pi_1') \geq_\Delta (\Pi_2,\Pi_2')$ se, e somente se,

1. $\exists \delta \in \Delta$, $(\Pi_1,\Pi_1') \geq_\delta (\Pi_2,\Pi_2')$, ou
2. $\exists (\Pi_3,\Pi_3') \in 2^\Pi x 2^\Pi$, $(\Pi_1,\Pi_1') \geq_\Delta (\Pi_3,\Pi_3')$ e $(\Pi_3,\Pi_3') \geq_\Delta (\Pi_2,\Pi_2')$.■

Teorema C.4.1 (Schaub [62])

Seja (W,Δ) uma teoria default. Seja (Π,Π') um par de classes de interpretações de primeira-ordem e E,Θ conjuntos de fórmulas fechados sob conseqüência lógica tais que $\Pi = \{ \pi \mid \pi \models E\}$ e $\Pi' = \{ \pi \mid \pi \models \Theta\}$. Então, (E,Θ) é uma extensão restrita de (W,Δ) se, e somente se, (Π,Π') é um elemento $\geq_\Delta$-maximal acima de (Π_W,Π_W), onde $\Pi_W = \{\pi \mid \pi \models W\}$. ■

Definição C.4.3

Seja (W_0,Δ) uma teoria default e Ξ_S o conjunto de todas as seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ que definem sistemas de esferas como na definição 4.4.2. O conjunto Ξ_S pode ser parcialmente ordenado por $\leq_S$ definido como : $<d'> \leq_S <d''>$ se $<d'>$ é prefixo de $<d''>$.

Dizemos que $<d> \in \Xi_S$ é uma seqüência maximal com respeito a $\leq_S$ de defaults em Δ se não existe nenhuma seqüência $<d'> \in \Xi_S$ tal que $<d> \leq_S <d'>$. ■

Teorema 4.4.2

Seja (W_0,Δ) uma teoria default e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal com respeito a $\leq_S$ de defaults em Δ que define o sistema de esferas **S** (como na definição 4.4.2). Então **S** provê uma extensão restrita (E,Θ) de (W_0,Δ). ■

Prova :

Considere a teoria default (W_0,Δ) e uma seqüência (possivelmente infinita) maximal de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, d_2,...>$, da forma $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma$, em Δ que define o sistema de esferas **S** como na definição 4.4.2, centrado em $[\mathcal{W}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma]$.

Temos que mostrar que $([\mathcal{W}],[\mathcal{W}] \cap [\mathcal{J}])$, onde $\mathcal{J} = \{JUST(d) / d$ faz parte da seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} \}$, é um elemento $\geq_\Delta$-maximal acima de (Π_{W_0}, Π_{W_0}), onde $\Pi_{W_0} = \{ \pi \mid \pi \models W_0\}$.

Suponha que exista um modelo focado (Π,Π') tal que $(\Pi,\Pi') \geq_\Delta ([\mathcal{W}],[\mathcal{W}] \cap [\mathcal{J}])$. Logo, pela definição C.4.2 :

1. $\exists\delta \in \Delta$, $(\Pi,\Pi') \geq_\delta ([\mathcal{W}],[\mathcal{W}] \cap [\mathcal{J}])$, ou
2. $\exists(\Pi_1,\Pi_1') \in 2^\Pi x 2^\Pi$, $(\Pi,\Pi') \geq_\Delta (\Pi_1,\Pi_1')$ e $(\Pi_1,\Pi_1') \geq_\Delta ([\mathcal{W}],[\mathcal{W}] \cap [\mathcal{J}])$.

Considere o primeiro caso. Suponha que δ é o default $A : B / C$ e que δ não pertence a seqüência maximal de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, \dots, d_n,...>$. Pela definição C.4.1, temos :

1. $\forall\pi \in [\mathcal{W}]$, $\pi \models A$, que significa que $[\mathcal{W}] \subseteq [A]$;
2. $\exists\pi \in [\mathcal{W}] \cap [\mathcal{J}]$, $\pi \models B \wedge C$, que significa que $[\mathcal{W}] \cap [\mathcal{J}] \cap [B \wedge C] \neq \varnothing$;
3. $\Pi = \{ \pi \in [\mathcal{W}] \mid \pi \models C\}$, que significa que poderíamos definir $\Pi = [\mathcal{W}] \cap [C] \neq \varnothing$;
4. $\Pi' = \{ \pi \in [\mathcal{W}] \cap [\mathcal{J}] \mid \pi \models B \wedge C\}$, que significa que poderíamos definir $\Pi' = [\mathcal{W}] \cap [\mathcal{J}] \cap [B \wedge C] \neq \varnothing$.

Então a seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, d_2,...>$ não é maximal, o que é uma contradição. Logo, a primeira parte da disjunção na definição C.4.2 não é satisfeita e como conseqüência deste fato, a segunda parte da disjunção não pode ser satisfeita. ◆

Teorema 4.4.3

Seja (W_0,Δ) uma teoria default, (E,Θ) uma extensão restrita de (W_0,Δ), sendo $GD^{(E,\Theta)}{}_\Delta$ o conjunto de defaults geradores, e (M,N) o par formado pela classe de todos modelos de E e Θ, respectivamente. Os defaults em $GD^{(E,\Theta)}{}_\Delta$ podem ser colocados em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que o sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 4.4.2) provê (E,Θ).■

Prova :

Considere (E,Θ) uma extensão restrita de (W_0,Δ) e (M,N) a classe de todos os modelos de (E,Θ). Devemos construir o sistema de esferas **S** (como na definição 4.4.2) que provê (E,Θ).

Pelo teorema 2.4.1 (capítulo 2), podemos caracterizar a extensão restrita (E,Θ) como sendo o par de conjuntos $(E,\Theta) = (\bigcup_{i=0}^{\infty} Ei, \bigcup_{i=0}^{\infty} \Theta i)$, onde :

$E_0 = W_0$ e $\Theta_0 = W_0$; e para $i \geq 0$

$E_{i+1} = Th(E_i) \cup \{C \mid A : B / C \in \Delta,\ A \in E_i, \Theta \cup \{B\} \cup \{C\} \not\vdash \bot\}$ (*)

$\Theta_{i+1} = Th(\Theta_i) \cup \{B \wedge C \mid A : B / C \in \Delta,\ A \in E_i, \Theta \cup \{B\} \cup \{C\} \not\vdash \bot\}$.

O sistema de esferas $\mathbf{S} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbf{S}_i$, onde cada sistema de esferas $\mathbf{S}_i$ está centrado em $[E_i]$, é construído da seguinte forma :

- $\mathbf{S_0} = \{M_L, [W_0]\}$, onde $[W_0] = [E_0]$;

  Por indução, vamos construir os sistemas de esferas $\mathbf{S}_i$, para todo $i \in [1,\infty)$:

- **Base :** Considere o conjunto (possivelmente infinito) de defaults $\Lambda_1 \subseteq GD^{(E,\Theta)}{}_\Delta$ tal que $CONSEQ(\Lambda_1) = \{C \mid A : B / C \in \Delta,\ A \in E_0, \Theta \cup \{B\} \cup \{C\} \not\vdash \bot\}$, ou seja, Λ_1 é o conjunto de defaults geradores de E cujos conseqüentes são utilizados para construir o conjunto E_1 ($CONSEQ(\Lambda_1)$ é igual ao lado direito da união (*)). Note que cada $d = A:B /C \in \Lambda_1$ satisfaz as condições $A \in E_0$ e $\Theta \cup \{B\} \cup \{C\} \not\vdash \bot\}$, independentemente dos outros defaults e, portanto, os defaults de Λ_1 podem ser aplicados em qualquer ordem.

  Logo, seja $\{A^1{}_1: B^1{}_1/C^1{}_1 ; A^1{}_2: B^1{}_2/ C^1{}_2; ...; A^1{}_\xi: B^1{}_\xi/C^1{}_\xi ; ...\}$ uma enumeração qualquer dos defaults do conjunto Λ_1. Utilizando esta enumeração, vamos construir o

sistema de esferas $S_1 = \{M_L, [W^1_0], \ldots, [W^1_n], \ldots\}$ centrado em $\bigcap_{\xi \in I} [W^1_\xi] = [E_1]$, tal que :

$$[W^1_0] = [W_0] = [E_0] \text{ e, para cada } \xi \in I:$$

$$[W^1_\xi] = \bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma] \cap [C^1_\xi].$$

- **Base :** Considere o default $(A^1_1 : B^1_1/C^1_1)$ e as classes de modelos $[W^1_0]$ e $([W^1_0] \cap [J^1_1])$, onde $J^1_1 = \varnothing$. Logo, $[W^1_0] \cap [J^1_1] = [W^1_0]$.

Uma vez que $A^1_1 \in E_0$, $E_0 \models A^1_1$, ou seja, $[W^1_0] = [W_0] = [E_0] \subseteq [A^1_1]$.

Além disso, como $\Theta \cup \{B^1_1\} \cup \{C^1_1\} \not\vdash \bot$ e $[\Theta] \subseteq [W^1_0]$, temos :

$[W^1_0] \cap [B^1_1 \wedge C^1_1] \neq \varnothing$.

Logo, o default $(A^1_1 : B^1_1/C^1_1)$ é S-aplicável a $[W^1_0]$ com respeito a $[W^1_0]$ (= $[W^1_0] \cap [J^1_1]$), e portanto, podemos construir a esfera $[W^1_1] = [W^1_0] \cap [C^1_1]$.

- **Passo de Indução :** Considere o default $(A^1_\xi : B^1_\xi/C^1_\xi)$, e as classes de modelos $\bigcap_{\gamma<\xi}[W^1_\gamma]$ e $(\bigcap_{\gamma<\xi}[W^1_\gamma] \cap [J^1_\xi])$, onde $J^1_\xi = \{JUST(d_\gamma) / d_\gamma \in \Lambda_1 \text{ e } \gamma < \xi\}$.

Observe que : $E_0 \models A^1_\xi$, ou seja, $[E_0] \subseteq [A^1_\xi]$.

Como $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma] \subseteq [E_0]$, temos : $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma] \subseteq [A^1_\xi]$.

Além disso, como $\Theta \cup \{B^1_\xi\} \cup \{C^1_\xi\} \not\vdash \bot$ e $[\Theta] \subseteq (\bigcap_{\gamma<\xi}[W^1_\gamma] \cap [J^1_\xi])$, temos:

$(\bigcap_{\gamma<\xi}[W^1_\gamma] \cap [J^1_\xi]) \cap [B^1_\xi \wedge C^1_\xi] \neq \varnothing$.

Logo, o default $(A^1_\xi : B^1_\xi/C^1_\xi)$ é S-aplicável a $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma]$ com respeito a $(\bigcap_{\gamma<\xi}[W^1_\gamma] \cap [J^1_\xi])$, e portanto, podemos construir a esfera $[W^1_\xi] = \bigcap_{\gamma<\xi} [W^1_\gamma] \cap [C^1_\xi]$.

- **Passo de Indução :** Suponha que os sistemas de esferas S_1, S_2, ..., S_i centrados, respectivamente, em $[E_1]$, $[E_2]$, ..., $[E_i]$, foram construídos segundo alguma enumeração, respectivamente, dos conjuntos de defaults Λ_1, Λ_2,..., Λ_i. Vamos construir o sistema de esferas S_{i+1}.

Para isto, considere o conjunto (possivelmente infinito) de defaults $\Lambda_{i+1} \subseteq GD^{(E,\Theta)}{}_{\Delta}$ tal que CONSEQ(Λ_{i+1}) = { C | A : B / C $\in \Delta$, A $\in E_i$, $\Theta \cup \{B\} \cup \{C\} \not\vdash \bot$}, ou seja, Λ_{i+1} é o conjunto de defaults cujos conseqüentes são utilizados para construir o conjunto E_{i+1} (CONSEQ(Λ_{i+1}) é igual ao lado direito da união (*)). Note que cada d = A : B / C $\in \Lambda_{i+1}$ satisfaz as condições A $\in E_i$ e $\Theta \cup \{B\} \cup \{C\} \not\vdash \bot$, independentemente dos outros defaults e, portanto, os defaults de Λ_{i+1} podem ser aplicados em qualquer ordem.

Logo, seja $\{A^{i+1}{}_1: B^{i+1}{}_1/C^1{}_1$; $A^{i+1}{}_2: B^{i+1}{}_2/ C^{i+1}{}_2$; ...; $A^{i+1}{}_\xi: B^{i+1}{}_\xi/C^{i+1}{}_\xi$; ...} uma enumeração qualquer dos defaults do conjunto Λ_{i+1}. Utilizando esta enumeração, vamos construir o sistema de esferas S_{i+1} = $\{M_L,[W^{i+1}{}_0], \ldots , [W^{i+1}{}_n],\ldots\}$ centrado em $\bigcap_{\xi \in I} [W^{i+1}{}_\xi] = [E_{i+1}]$, tal que :

$[W^{i+1}{}_0] = [E_i]$ e, para cada $\xi \in I$:

$[W^{i+1}{}_\xi] = \bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_\gamma] \cap [C^{i+1}{}_\xi]$.

- **Base :** Considere o default ($A^{i+1}{}_1:B^{i+1}{}_1/C^{i+1}{}_1$), e as classes de modelos $[W^{i+1}{}_0]$ e $([W^{i+1}{}_0] \cap [J^{i+1}{}_1])$, onde $J^{i+1}{}_1$ = {JUST(d) / d $\in \Lambda_j$, para todo j $\in$ [1,i]}.

Uma vez que $A^{i+1}{}_1 \in E_i$, $E_i \models A^{i+1}{}_1$, ou seja, $[W^{i+1}{}_0] = [E_i] \subseteq [A^{i+1}{}_1]$.

Além disso, como $\Theta \cup \{B^{i+1}{}_1\} \cup \{C^{i+1}{}_1\} \not\vdash \bot$ e $[\Theta] \subseteq ([W^{i+1}{}_0] \cap [J^{i+1}{}_1])$, temos: $([W^{i+1}{}_0] \cap [J^{i+1}{}_1]) \cap [B^{i+1}{}_1 \wedge C^{i+1}{}_1] \neq \emptyset$.

Logo, o default ($A^{i+1}{}_1: B^{i+1}{}_1/C^{i+1}{}_1$) é S-aplicável a $[W^{i+1}{}_0]$ com respeito a $([W^{i+1}{}_0] \cap [J^{i+1}{}_1])$, e portanto, podemos construir a esfera $[W^{i+1}{}_1] = [W^{i+1}{}_0] \cap [C^{i+1}{}_1]$.

- **Passo de Indução :** Considere o default ($A^{i+1}{}_\xi:B^{i+1}{}_\xi/C^{i+1}{}_\xi$), e as classes de modelos $\bigcap_{\gamma<\xi}[W^{i+1}{}_\gamma]$ e $(\bigcap_{\gamma<\xi}[W^{i+1}{}_\gamma] \cap [J^{i+1}{}_\xi])$, onde $J^{i+1}{}_\xi$ = {JUST(d) / d $\in \Lambda_j$, para todo j $\in$ [1,i]} $\cup$ {JUST(d_γ) / $d_\gamma \in \Lambda_{i+1}$ e $\gamma < \xi$}.

Observe que : $E_i \models A^{i+1}{}_\xi$, ou seja, $[E_i] \subseteq [A^{i+1}{}_\xi]$.

Como $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_\gamma] \subseteq [E_i]$, temos : $\bigcap_{\gamma<\xi} [W^{i+1}{}_\gamma] \subseteq [A^{i+1}{}_\xi]$.

Além disso, como $\Theta \cup \{B^{i+1}_\xi\} \cup \{C^{i+1}_\xi\} \nvdash \bot$ e $[\Theta] \subseteq (\bigcap_{\gamma<\xi}[W^{i+1}_\gamma] \cap [J^{i+1}_\xi])$, temos : $(\bigcap_{\gamma<\xi}[W^{i+1}_\gamma] \cap [J^{i+1}_\xi]) \cap [B^{i+1}_\xi \wedge C^{i+1}_\xi] \neq \emptyset$.

Logo, o default $(A^{i+1}_\xi : B^{i+1}_\xi / C^{i+1}_\xi)$ é S-aplicável a $\bigcap_{\gamma<\xi}[W^{i+1}_\gamma]$ com respeito a $(\bigcap_{\gamma<\xi}[W^{i+1}_\gamma] \cap [J^{i+1}_\xi])$, e portanto, podemos construir a esfera $[W^{i+1}_\xi] = \bigcap_{\gamma<\xi}[W^{i+1}_\gamma] \cap [C^{i+1}_\xi]$.

Logo, os defaults do conjunto $GD^{(E,\Theta)}_\Delta$ podem ser colocado em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_n, ...>$ que define um sistema de esferas $\mathbf{S} = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i = \{M_L, [E_0], [W^1_1], ..., [W^1_i], ..., [E_1], [W^2_1], ..., [W^2_j], ..., [E_2], ..., [E_n], [W^{n+1}_1], ..., [W^{n+1}_k], [E_{n+1}], ...\}$ centrado em $[E] = M$, onde cada conjunto Λ_i é uma enumeração qualquer de defaults utilizados na construção do sistema de esferas $\mathbf{S_i}$. Logo, o sistema de esferas **S** provê a extensão restrita (E,Θ). ◆

Seção 5

Teorema 4.5.1

Seja **S** o sistema de esferas definido (segundo a definição 4.5.2) por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, cujo centro é $[Form(\mathcal{W})] = \bigcap_{\varsigma \in I}[Form(W_\varsigma)]$. Então **S** sempre satisfaz a condição: para todo $\varsigma \in I$, $([Form(W_\varsigma)]) \cap ([Supp(W_\varsigma)]) \neq \emptyset$.■

Prova :

Seja (W_0,Δ) uma teoria default assertiva e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, d_2, ...>$ uma seqüência (possivelmente infinita) de defaults em Δ tal que $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma$. Seja **S** o sistema de esferas definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ segundo a definição 4.5.2.

Suponha, por absurdo, que existe $\xi \in I$ tal que $[Form(W_\xi)] \cap [Supp(W_\xi)] = \emptyset$. Pela definição do sistema de esferas **S**, a esfera $[Form(W_\xi)] = \bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W_\gamma)] \cap [C_\xi]$, onde o default $d_\xi = A_\xi : B_\xi / C_\xi$ é B-aplicável a $\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W_\gamma)]$ com respeito a $\bigcap_{\gamma<\xi}[Supp(W_\gamma)]$.

Pela segunda condição de aplicabilidade (definição 4.5.1), temos que :

$$\bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Form}(W_\gamma)] \cap \bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Supp}(W_\gamma)] \cap [B_\xi \wedge C_\xi] =$$

$\bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Form}(W_\gamma)] \cap [\mathrm{Supp}(W_\xi)] \neq \varnothing$, o que é uma contradição, uma vez que, por hipótese :

$$[\mathrm{Form}(W_\xi)] \cap [\mathrm{Supp}(W_\xi)] =$$

$$\bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Form}(W_\gamma)] \cap [C_\xi] \cap [\mathrm{Supp}(W_\xi)] =$$

$$\bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Form}(W_\gamma)] \cap [\mathrm{Supp}(W_\xi)] = \varnothing \; ([\mathrm{Supp}(W_\xi)] \subseteq [C_\xi]). \; \blacklozenge$$

Na demonstração do teorema 4.5.2, utilizaremos o seguinte resultado :

Teorema C.5.1 (Schaub [62])

Seja (W_0,Δ) uma teoria default assertiva e (Π,Π') um par de classes de modelos.

Se E é uma extensão assertiva de (W_0,Δ) então $([\mathrm{Form}(E)],[\mathrm{Form}(E)] \cap [\mathrm{Supp}(E)])$ é um elemento $\geq_\Delta$-maximal acima de (Π_{W0},Π_{W0}').

Se (Π,Π') é um elemento $\geq_\Delta$-maximal acima de (Π_{W0},Π_{W0}') então existe uma extensão assertiva E de (W_0,Δ) tal que $\Pi = \{\pi \mid \pi \models \mathrm{Form}(E)\}$ e $\Pi' = \{\pi \mid \pi \models \mathrm{Form}(E) \cup \mathrm{Supp}(E)\}$. ■

Definição C.5.1

Seja (W_0,Δ) uma teoria default assertiva e Ξ_B o conjunto de todas as seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ que definem sistemas de esferas como na definição 4.5.2. O conjunto Ξ_B pode ser parcialmente ordenado por $\leq_B$ definido como : $<d'> \leq_B <d''>$ se $<d'>$ é prefixo de $<d''>$.

Dizemos que $<d> \in \Xi_B$ é uma seqüência maximal com respeito a $\leq_B$ de defaults em Δ se não existe nenhuma seqüência $<d'> \in \Xi_B$ tal que $<d> \leq_B <d'>$. ■

Teorema 4.5.2

Seja (W_0,Δ) uma teoria default assertiva e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, d_2,...>$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal de defaults com respeito a $\leq_B$ em Δ que define o sistema de esferas S (como na definição 4.5.2). Então **S** provê (Form(E), Form(E) $\cup$ Supp(E)), onde E é uma CDL-extensão de (W_0,Δ).■

Prova :

Seja (W_0,Δ) uma teoria default assertiva e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, d_2,...>$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal de defaults com respeito a $\leq_B$ em Δ que define o sistema de esferas S como na definição 4.5.2, cujo centro é $[Form(\mathcal{W})] = \bigcap_{\varsigma \in I} [Form(W_\varsigma)]$. Seja $[Supp(\mathcal{W})] = \bigcap_{\varsigma \in I} [Supp(W_\varsigma)]$, onde $Supp(W_\varsigma) = Supp(W_0) \cup \{JUST(d_\xi) / \xi \leq \varsigma\} \cup \{CONS(d_\xi) / \xi \leq \varsigma \}$.

Suponha que o par $([Form(\mathcal{W})], [Form(\mathcal{W})] \cap [Supp(\mathcal{W})])$ não é a classe de modelos de nenhuma extension assertiva E de (W_0,Δ).

Então, pelo teorema C.5.1, existe um modelo focado (Π,Π') tal que $(\Pi,\Pi') \geq_\Delta ([Form(\mathcal{W})], [Form(\mathcal{W})] \cap [Supp(\mathcal{W})])$. Portanto, pela definição C.4.2 :

1. $\exists\delta \in \Delta$, $(\Pi,\Pi') \geq_\delta ([Form(\mathcal{W})], [Form(\mathcal{W})] \cap [Supp(\mathcal{W})])$, ou
2. $\exists(\Pi_1,\Pi_1') \in 2^\Pi x 2^\Pi$, $(\Pi,\Pi') \geq_\Delta (\Pi_1,\Pi_1')$ e $(\Pi_1,\Pi_1') \geq_\Delta ([Form(\mathcal{W})], [Form(\mathcal{W})] \cap [Supp(\mathcal{W})])$

No primeiro caso, suponha que δ é o default A : B / C e que δ não pertence a seqüência maximal de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, d_2,...>$. Pela definição C.4.1, temos :

1. $\forall\pi \in [Form(\mathcal{W})]$, $\pi \models A$, que significa que $[Form(\mathcal{W})] \subseteq [A]$;
2. $\exists\pi \in [Form(\mathcal{W})] \cap [Supp(\mathcal{W})]$, $\pi \models B \wedge C$, que significa que $[Form(\mathcal{W})] \cap [Supp(\mathcal{W})] \cap [B \wedge C] \neq \emptyset$;
3. $\Pi = \{\pi \in [Form(\mathcal{W})] \mid \pi \models C\}$, que significa que podemos definir $\Pi = [Form(\mathcal{W})] \cap [C] \neq \emptyset$;
4. $\Pi' = \{ \pi \in [Form(\mathcal{W})] \cap [Supp(\mathcal{W})] \mid \pi \models B \wedge C\}$, que significa que podemos definir $\Pi' = [Form(\mathcal{W})] \cap [Supp(\mathcal{W})] \cap [B \wedge C] \neq \emptyset$.

Então a seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, d_2,...>$ não é maximal, o que é uma contradição. Logo, a primeira parte da disjunção da definição C.5.2 não é satisfeita e como conseqüência deste fato, a segunda parte da disjunção não pode ser satisfeita. ◆

Teorema 4.5.3

Seja (W_0,Δ) uma teoria default assertiva, E uma CDL-extensão de (W_0,Δ), com GD^E_Δ sendo o conjunto de defaults geradores, e *M* e *N* as classes de todos os modelos, respectivamente, das fórmulas e dos suportes de E.. Os defaults em $GD^{E}{}_{\Delta}$ podem ser colocados em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_{\varsigma}>_{\varsigma \in I}$ tal que define o sistema de esferas **S** definido por $<d_{\varsigma}>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 4.5.2) provê (Form(E), Form(E) $\cup$ Supp(E)).■

Prova :

Considere a CDL-extensão E da teoria default assertiva (W_0,Δ) e *M* e *N* as classes de todos os modelos, respectivamente, das fórmulas assertivas e dos suportes de E. Devemos construir o sistema de esferas **S** (como na definição 4.5.2) que provê E.

Pela proposição 2.5.1 (capítulo 2), podemos caracterizar a CDL-extensão E como sendo o conjunto $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$ onde :

$E_0 = W_0$;

e para $i \geq 0$

$$E_{i+1} = Th_S(E_i) \cup \{<C : \{J_1, ..., J_k, B, C\}> \text{ tal que } A : B / C \in \Delta,$$
$$<A : \{J_1, ..., J_k\}> \in E_i \text{, e}$$
$$\{B, C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot\} \; (*).$$

O sistema de esferas $\mathbf{S} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbf{S_i}$, onde cada sistema de esferas $\mathbf{S_i}$ está centrado em $[Form(E_i)]$, é construído da seguinte forma :

- $\mathbf{S_0} = \{M_L, [Form(W_0)]\}$, onde $[Form(W_0)] = [Form(E_0)]$;

  Por indução, vamos construir os sistemas de esferas $\mathbf{S_i}$, para todo $i \in [1,\infty)$:

- **Base :** Considere o conjunto (possivelmente infinito) de defaults $\Lambda_1 \subseteq GD^{E}{}_{\Delta}$ tal que $ASSER(\Lambda_1) = \{<C : \{J_1, ..., J_k, B, C\}>$ tal que $A : B / C \in \Delta$, $<A : \{J_1, ..., J_k\}> \in E_0$, e $\{B, C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot\}$, ou seja, Λ_1 é o conjunto de defaults geradores de E cujos pré-requisitos, justificativas e conseqüentes são utilizados para construir o conjunto de assertivas E_1 ($ASSER(\Lambda_1)$ é igual ao lado direito da união (*)). Note que cada $d = A{:}B / C \in \Lambda_1$ satisfaz as condições $<A : \{J_1, ..., J_k\}> \in E_0$ e $\{B,C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot$, independentemente dos outros defaults e, portanto, os defaults de Λ_1 podem ser aplicados em qualquer ordem.

Logo, seja $\{A^1{}_1: B^1{}_1/C^1{}_1 ; A^1{}_2: B^1{}_2/ C^1{}_2; ...; A^1{}_\xi: B^1{}_\xi/C^1{}_\xi ; ...\}$ uma enumeração qualquer dos defaults do conjunto Λ_1.

Defina :

$$\mathrm{Form}(W^1{}_0) = \{\alpha / <\alpha:\beta> \in W_0\} \text{ e } \mathrm{Supp}(W^1{}_0) = \{\beta / <\alpha:\beta> \in W_0\}.$$

Utilizando a enumeração de defaults acima, vamos construir o sistema de esferas $\mathbf{S}_1 = \{M_L, [\mathrm{Form}(W^1{}_0)], ..., [\mathrm{Form}(W^1{}_n)], ...\}$ centrado em $\bigcap_{\xi\in I} [\mathrm{Form}(W^1{}_\xi)] = [\mathrm{Form}(E_1)]$, tal que :

$$[\mathrm{Form}(W^1{}_0)] = [\mathrm{Form}(W_0)] = [\mathrm{Form}(E_0)] \text{ e, para cada } \xi \in I :$$

$$[\mathrm{Form}(W^1{}_\xi)] = \bigcap_{\gamma<\xi} [\mathrm{Form}(W^1{}_\gamma)] \cap [C^1{}_\xi].$$

- **Base :** Considere o default $(A^1{}_1: B^1{}_1/C^1{}_1)$ e as classes de modelos $[\mathrm{Form}(W^1{}_0)]$ e $[\mathrm{Supp}(W^1{}_0)]$.

Como $<A^1{}_1 : \{J_1, ..., J_k\}> \in E_0$, então $A^1{}_1 \in \mathrm{Form}(E_0)$.

Logo, $[\mathrm{Form}(W^1{}_0)] = [\mathrm{Form}(W_0)] = [\mathrm{Form}(E_0)] \subseteq [A^1{}_1]$.

Como $\{B^1{}_1, C^1{}_1\} \cup \mathrm{Form}(E) \cup \mathrm{Supp}(E) \not\vdash \bot$, e $[\mathrm{Form}(E)] \subseteq [\mathrm{Form}(W^1{}_0)]$ e $[\mathrm{Supp}(E)] \subseteq [\mathrm{Supp}(W^1{}_0)]$, temos :

$$[\mathrm{Form}(W^1{}_0)] \cap [\mathrm{Supp}(W^1{}_0)] \cap [B^1{}_1 \wedge C^1{}_1] \neq \varnothing.$$

Logo, o default $(A^1{}_1: B^1{}_1/C^1{}_1)$ é B-aplicável a $[\mathrm{Form}(W^1{}_0)]$ com respeito a $[\mathrm{Supp}(W^1{}_0)]$, e portanto, podemos construir a esfera $[\mathrm{Form}(W^1{}_1)] = [\mathrm{Form}(W^1{}_0)] \cap [C^1{}_1]$.

- **Passo de Indução :** Considere o default $(A^1{}_\xi:B^1{}_\xi/C^1{}_\xi)$, e as classes de modelos $\bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Form}(W^1{}_\gamma)]$ e $\bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Supp}(W^1{}_\gamma)]$, onde $\mathrm{Supp}(W^1{}_\gamma) = \mathrm{Supp}(W^1{}_0) \cup \{\mathrm{JUST}(d_\sigma) / \sigma \leq \gamma\} \cup \{\mathrm{CONS}(d_\sigma) / \sigma \leq \gamma\}$.

Como $<A^1{}_\xi : \{J_1, ..., J_k\}> \in E_0$, então :

- $A^1{}_\xi \in \mathrm{Form}(E_0)$, ou seja, $[\mathrm{Form}(W^1{}_0)] = [\mathrm{Form}(E_0)] \subseteq [A^1{}_\xi]$.

Como $\bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Form}(W^1{}_\gamma)] \subseteq [\mathrm{Form}(E_0)]$, então $\bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Form}(W^1{}_\gamma)] \subseteq [A^1{}_\xi]$.

- Temos $\{B^1{}_\xi, C^1{}_\xi\} \cup \mathrm{Form}(E) \cup \mathrm{Supp}(E) \not\vdash \bot$, e como : $[\mathrm{Form}(E)] \subseteq \bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Form}(W^1{}_\gamma)]$ e $[\mathrm{Supp}(E)] \subseteq \bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Supp}(W^1{}_\gamma)]$, então :

$$\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^1_\gamma)] \cap \bigcap_{\gamma<\xi}[Supp(W^1_\gamma)] \cap [B^1_\xi \wedge C^1_\xi] \neq \emptyset.$$

Logo, o default $(A^1_\xi{:}B^1_\xi/C^1_\xi)$ é B-aplicável a $\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^1_\gamma)]$ com respeito a $\bigcap_{\gamma<\xi}[Supp(W^1_\gamma)]$, e portanto, podemos construir a esfera $[Form(W^1_\xi)] = \bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^1_\gamma)] \cap [C^1_\xi]$.

- **Passo de Indução :** Suponha que os sistemas de esferas S_1, S_2, ..., S_i centrados, respectivamente, em $[Form(E_1)]$, $[Form(E_2)]$, ..., $[Form(E_i)]$, foram construídos segundo alguma enumeração, respectivamente, dos conjuntos de defaults Λ_1, Λ_2,..., Λ_i. Vamos construir o sistema de esferas S_{i+1}.

Para isto, considere o conjunto (possivelmente infinito) de defaults $\Lambda_{i+1} \subseteq GD^E_\Delta$ tal que $ASSER(\Lambda_{i+1}) = \{<C : \{J_1, ..., J_k, B, C\}> \text{ tal que } A : B / C \in \Delta, <A : \{J_1, ..., J_k\}> \in E_i, \text{ e } \{B, C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot\}$, ou seja, Λ_{i+1} é o conjunto de defaults geradores de E cujos pré-requisitos, justificativas e conseqüentes são utilizados para construir o conjunto E_{i+1} ($ASSER(\Lambda_{i+1})$ é igual ao lado direito da união (*)). Note que cada $d = A{:}B /C \in \Lambda_{i+1}$ satisfaz as condições $<A : \{J_1, ..., J_k\}> \in E_i$ e $\{B,C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot$, independentemente dos outros defaults e, portanto, os defaults de Λ_{i+1} podem ser aplicados em qualquer ordem.

Logo, seja $\{A^{i+1}{}_1{:}\ B^{i+1}{}_1/C^1{}_1\ ;\ A^{i+1}{}_2{:}\ B^{i+1}{}_2/\ C^{i+1}{}_2; ...; A^{i+1}{}_\xi{:}\ B^{i+1}{}_\xi/C^{i+1}{}_\xi\ ; ...\}$ uma enumeração qualquer dos defaults do conjunto Λ_{i+1}.

Defina :

$$Form(W^{i+1}{}_0) = \{\alpha \,/\, <\alpha{:}\beta> \in E_i\},\ Supp(W^{i+1}{}_0) = \{\beta \,/\, <\alpha{:}\beta> \in E_i\};\ \text{e}$$

Utilizando a enumeração de defaults acima, vamos construir o sistema de esferas $S_{i+1} = \{M_L, [Form(W^{i+1}{}_0)], ..., [Form(W^{i+1}{}_n)], ...\}$ centrado em $\bigcap_{\xi\in I}[Form(W^{i+1}{}_\xi)] = [Form(E_{i+1})]$, tal que :

$$[Form(W^{i+1}{}_0)] = [Form(E_i)] \text{ e, para cada } \xi \in I :$$

$$[Form(W^{i+1}{}_\xi)] = \bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^{i+1}{}_\gamma)] \cap [C^{i+1}{}_\xi].$$

- **Base :** Considere o default $(A^{i+1}{}_1{:}\ B^{i+1}{}_1/C^{i+1}{}_1)$ e as classes de modelos $[Form(W^{i+1}{}_0)]$ e $[Supp(W^{i+1}{}_0)]$.

Como $<A^{i+1}{}_1 : \{J_1, ..., J_k\}> \in E_i$, então $A^{i+1}{}_1 \in Form(E_i)$.

Logo, $[Form(W^{i+1}{}_0)] = [Form(E_i)] \subseteq [A^{i+1}{}_1]$.

Como $\{B^{i+1}{}_1, C^{i+1}{}_1\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \perp$, e $[Form(E)] \subseteq [Form(W^{i+1}{}_0)]$ e $[Supp(E)] \subseteq [Supp(W^{i+1}{}_0)]$, temos :

$$[Form(W^{i+1}{}_0)] \cap [Supp(W^{i+1}{}_0)] \cap [B^{i+1}{}_1 \wedge C^{i+1}{}_1] \neq \emptyset.$$

Logo, o default $(A^{i+1}{}_1: B^{i+1}{}_1/C^{i+1}{}_1)$ é B-aplicável a $[Form(W^{i+1}{}_0)]$ com respeito a $[Supp(W^{i+1}{}_0)]$, e portanto, podemos construir a esfera $[Form(W^{i+1}{}_1)] = [Form(W^{i+1}{}_0)] \cap [C^{i+1}{}_1]$.

- **Passo de Indução :** Considere o default $(A^{i+1}{}_\xi:B^{i+1}{}_\xi/C^{i+1}{}_\xi)$, e as classes de modelos $\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^{i+1}{}_\gamma)]$ e $\bigcap_{\gamma<\xi}[Supp(W^{i+1}{}_\gamma)]$, onde $Supp(W^{i+1}{}_\gamma) = Supp(W^{i+1}{}_0) \cup \{JUST(d_\sigma) / \sigma \leq \gamma\} \cup \{CONS(d_\sigma) / \sigma \leq \gamma\}$.

Como $<A^{i+1}{}_\xi : \{J_1, ..., J_k\}> \in E_i$, então :

- $A^{i+1}{}_\xi \in Form(E_i)$, ou seja, $[Form(W^{i+1}{}_0)] = [Form(E_i)] \subseteq [A^{i+1}{}_\xi]$.

Como $\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^{i+1}{}_\gamma)] \subseteq [Form(E_i)]$, então $\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^{i+1}{}_\gamma)] \subseteq [A^{i+1}{}_\xi]$.

- Temos $\{B^{i+1}{}_\xi, C^{i+1}{}_\xi\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \perp$, e como : $[Form(E)] \subseteq \bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^{i+1}{}_\gamma)]$ e $[Supp(E)] \subseteq \bigcap_{\gamma<\xi}[Supp(W^{i+1}{}_\gamma)]$, então :

$$\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^{i+1}{}_\gamma)] \cap \bigcap_{\gamma<\xi}[Supp(W^{i+1}{}_\gamma)] \cap [B^{i+1}{}_\xi \wedge C^{i+1}{}_\xi] \neq \emptyset.$$

Logo, o default $(A^{i+1}{}_\xi:B^{i+1}{}_\xi/C^{i+1}{}_\xi)$ é B-aplicável a $\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^{i+1}{}_\gamma)]$ com respeito a $\bigcap_{\gamma<\xi}[Supp(W^{i+1}{}_\gamma)]$, e portanto, podemos construir a esfera $[Form(W^{i+1}{}_\xi)] = \bigcap_{\gamma<\xi} [Form(W^{i+1}{}_\gamma)] \cap [C^{i+1}{}_\xi]$.

Logo, os defaults do conjunto $GD^E{}_\Delta$ podem ser colocado em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <\Lambda_1, \Lambda_2,..., \Lambda_n, ...>$ que define o sistema de esferas S $= \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i = \{M_L, [Form(E_0)], [Form(W^1{}_1)],... , [Form(W^1{}_i)],..., [Form(E_1)], [Form(W^2{}_1)],... , [Form(W^2{}_j)],..., [Form(E_2)], ..., [Form(E_n)], [Form(W^{n+1}{}_1)],... , [Form(W^{n+1}{}_k)], [Form(E_{n+1})],...\}$ centrado em $[Form(E)] = M$, onde cada conjunto Λ_i é uma enumeração qualquer de defaults utilizados na construção do sistema de esferas S_i. Logo, o sistema de esferas S provê (Form(E), Form(E) $\cup$ Supp(E)). ◆

Definição C.5.2

Seja (W_0,Δ) uma teoria default assertiva e Ξ_{Bf} o conjunto de todas as seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ que definem sistemas de esferas como na definição 4.5.2. O conjunto Ξ_{Bf} pode ser parcialmente ordenado por $\leq_{Bf}$ definido como : <d'> $\leq_{Bf}$ <d''> se <d'> é prefixo de <d''>.

Dizemos que <d> $\in \Xi_{Bf}$ é uma seqüência maximal com respeito a $\leq_{Bf}$ de defaults em Δ se não existe nenhuma seqüência <d'> $\in \Xi_{Bf}$ tal que <d> $\leq_{Bf}$ <d'>. ■

Teorema 4.5.4

Seja (W_0,Δ) uma teoria default assertiva e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal de defaults com respeito a $\leq_{Bf}$ em Δ que define o sistema de esferas S (como na definição 4.5.5) centrado em $[Form(\mathscr{W})]$. Se S satisfaz a condição $[Form(\mathscr{W})] \cap [Supp(\mathscr{W})] \neq \emptyset$, então S provê (Form(E), Form(E) $\cup$ Supp(E)), onde E é uma CDL_F-extensão de (W_0,Δ).■

Prova :

Seja $[Form(\mathscr{W})] = \bigcap_{\varsigma \in I}[Form(W_\varsigma)]$ o centro do sistema de esferas S obtido a partir de uma seqüência (possivelmente infinita) maximal de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, d_2,...>$, segundo a definição 4.5.5. Seja $W'_i = \{\iota$ tal que $[Form(W_i)] \subseteq [Form(\iota)]\}$ o conjunto de assertivas cujas fórmulas são válidas na esfera $[Form(W_i)]$. Obviamente, $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} W'_i$.

Defina :

$E_0 = W_0$; e para $i \geq 0$

$E_{i+1} = Th_S(E_i) \cup$ {<C : {J_1, ..., J_k, B, C}> tal que A : B / C $\in \Delta$,

(<A : {J_1, ..., J_k}> $\in E_i$, e

{B, C} $\cup$ Form(E) $\cup$ Supp(E) $\not\vdash \bot$)

ou

$(\langle A : \{J_1, ..., J_k\}\rangle \in E$,

Form(E) $\cup$ Supp(E) $\not\vdash \bot$,

$\{B, C\} \cup$ Form(E) $\not\vdash \bot$ e

$\{C\} \cup$ Form(E) $\cup$ Supp(E) $\vdash \bot)\}$.

Pela teorema 2.5.2 (capítulo 2), basta mostrar que $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, para concluir que E é uma CDL_F-extensão de (W_0,Δ).

Caso 1 : $\bigcup_{i=0}^{\infty} Ei \subseteq E$

Por indução, temos :

- **Base :** Por definição, $[Form(W_0)] = [Form(E_0)]$. Como [Form(E)] = $[Form(\mathscr{W})] \subseteq [Form(W_0)]$, temos para todo $\mu \in E_0$, $[Form(E_0)] \subseteq [Form(\mu)]$. Logo, $\mu \in E$.

- **Passo de indução :** Seja $E_i \subseteq E$. Considere $\langle C,Supp(C)\rangle \in E_{i+1}$.

  - Se $\langle C,Supp(C)\rangle \in Th_S(E_i)$ então $\langle C,Supp(C)\rangle \in E$.

  - Caso contrário, existe um default $A{:}B/C \in \Delta$ tal que :

    $(\langle A : \{J_1, ..., J_k\}\rangle \in E_i$, e $\{B, C\} \cup$ Form(E) $\cup$ Supp(E) $\not\vdash \bot)$

    ou

    $(\langle A : \{J_1, ..., J_k\}\rangle \in E$, Form(E) $\cup$ Supp(E) $\not\vdash \bot$,

    $\{B,C\} \cup$ Form(E) $\not\vdash \bot$ e $\{C\} \cup$ Form(E) $\cup$ Supp(E) $\vdash \bot)\}$ (*).

  Suponha que a primeira parte da disjunção (*) seja verdadeira.

  Como $\langle A : \{J_1, ..., J_k\}\rangle \in E_i \subseteq E$, temos que : $[Form(\mathscr{W})] = [Form(E)] \subseteq [Form(E_i)] \subseteq [Form(A)]$. Além disso, como $\{B, C\} \cup$ Form(E) $\cup$ Supp(E) $\not\vdash \bot$, então $[Form(E)] \cap [Supp(E)] \cap [B \wedge C] \neq \emptyset$. Logo, $[Form(E_i)] \cap [Supp(E_i)] \cap [B \wedge C] \neq \emptyset$, uma vez que $[Form(E)] \subseteq [Form(E_i)]$ e $[Supp(E)] \subseteq [Supp(E_i)]$.

  Se $d \in \langle d_\varsigma\rangle_{\varsigma \in I}$ então $[Form(E_i)] \subseteq [C]$ e $[Supp(E)] \subseteq [Supp(C)]$, e portanto $\langle C,Supp(C)\rangle \in E$.

  Caso contrário, podemos construir a seqüência de defaults $\langle\langle d_\varsigma\rangle_{\varsigma \in I},d\rangle$ que define um sistema de esferas segundo a definição 4.5.5, e que tem como prefixo a seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, o que contradiz a maximalidade desta seqüência.

Suponha que a segunda parte da disjunção (*) seja verdadeira. Neste caso, as seguintes condições seriam satisfeitas :

(a) $[Form(E)] \cap [A] \neq \varnothing$,

(b) $[Form(E)] \cap [Supp(E)] \neq \varnothing$,

(c) $[Form(E)] \cap [B \wedge C] \neq \varnothing$, e

(d) $[Form(E)] \cap [Supp(E)] \cap [C] = \varnothing$.

Se $d \in <d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ então $[Form(E)] \subseteq [C]$ e este fato, junto com o ítem (d), implica que $[Form(E)] \cap [Supp(E)] = \varnothing$, o que contradiz a hipótese $[Form(\mathcal{W})] \cap [Supp(\mathcal{W})] \neq \varnothing$.

Caso contrário, podemos construir a seqüência de defaults $<<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}, d>$ que define um sistema de esferas segundo a definição 4.5.5, e que tem como prefixo a seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, o que contradiz a maximalidade desta seqüência.

Logo, $E_{i+1} \subseteq E$.

Caso 2 : $E \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$

Devemos mostrar, por indução, que $W'_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$.

- Base : $W'_0 \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, uma vez que $[Form(W'_0)] = [Form(W_0)]$ e $E_0 = W_0$.

- Passo de indução : Suponha que, para todo $\gamma < \varsigma$, $W'_\gamma \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$. Temos que mostrar que $W'_\varsigma \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$.

Pela construção do sistema de esferas S (definição 4.5.5), sabemos que existe um default $A_\varsigma:B_\varsigma/C_\varsigma$ tal que $[Form(W_\varsigma)] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [Form(W_\gamma)] \cap [C_\varsigma]$, onde :

(a) $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [Form(W_\gamma)] \subseteq [A_\varsigma]$, e

(b) $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [Form(W_\gamma)] \cap \bigcap_{\gamma<\varsigma} [Supp(W_\gamma)] \cap [B_\varsigma \wedge C_\varsigma] \neq \varnothing$

ou

(c) $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [Form(W_\gamma)] \cap [A_\varsigma] \neq \varnothing$, e

(d) $\bigcap_{\gamma<\varsigma}$ [Form(W_γ)] $\cap$ $\bigcap_{\gamma<\varsigma}$ [Supp(W_γ)] $\neq \emptyset$, e

(e) $\bigcap_{\gamma<\varsigma}$ [Form(W_γ)] $\cap$ [$B_\varsigma \wedge C_\varsigma$] $\neq \emptyset$, e

(f) $\bigcap_{\gamma<\varsigma}$ [Form(W_γ)] $\cap$ $\bigcap_{\gamma<\varsigma}$ [Supp(W_γ)] $\cap$ [C_ς] $= \emptyset$.

Observe que se a segunda parte desta disjunção for satisfeita, o ítem (d) contradiz a hipótese [Form($\mathcal{W}$)] $\cap$ [Supp($\mathcal{W}$)] $\neq \emptyset$. Então, considere a primeira parte da disjunção seja verdadeira. Então, como $\bigcap_{\gamma<\varsigma}$ [Form(W_γ)] $\subseteq$ [A_ς], temos $<A_\varsigma$,Supp(A_ς)$>$ $\in$ $\bigcup_{\gamma<\varsigma} W'_\gamma \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$. Logo, existe um conjunto E_j que é o menor (sob inclusão) conjunto entre E_0, E_1,... que satisfaz a condição : $\bigcup_{\gamma<\varsigma} W'_\gamma \subseteq E_j$, e assim, $<A_\varsigma$,Supp(A_ς)$>$ $\in E_j$.

Além disso, o ítem (b) junto com a hipótese [Form($\mathcal{W}$)] $\cap$ [Supp($\mathcal{W}$)] $\neq \emptyset$, temos que : Form(E) $\cup$ Supp(E) $\cup$ $\{B_\varsigma,C_\varsigma\}$ $\not\vdash \perp$. Então $<C_\varsigma$,Supp(C_ς)$>$ $\in E_{j+1}$ e, conseqüentemente, $<C_\varsigma$,Supp(C_ς)$>$ $\in \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$. ◆

Teorema 4.5.5

Seja (W_0,Δ) uma teoria default assertiva, E uma CDL_F-extensão de (W_0,Δ), com $GD^E_{\Delta f}$ sendo o conjunto de defaults geradores, e *M* e *N* as classes de todos os modelos, respectivamente, das fórmulas e dos suportes de E. Os defaults em $GD^E_{\Delta f}$ podem ser colocados em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que o sistema de esferas **S** definido por $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 4.5.5) provê (Form(E), Form(E) $\cup$ Supp(E)).■

Prova :

Considere a CDL_F-extensão E da teoria default assertiva (W_0,Δ) e *M* e *N* as classes de todos os modelos, respectivamente, das fórmulas assertivas e dos suportes de E. Devemos construir o sistema de esferas **S** (como na definição 4.5.5) que provê E.

Pela teorema 2.5.2 (capítulo 2), podemos caracterizar a CDL_F-extensão E como sendo o conjunto $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$ onde :

$E_0 = W_0$;

e para $i \geq 0$

$E_{i+1} = Th_S(E_i) \cup \{<C : \{J_1, ..., J_k, B, C\}>$ tal que $A : B / C \in \Delta$,

$(<A : \{J_1, ..., J_k\}> \in E_i$, e

$\{B, C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \nvdash \bot)$

ou

$(<A : \{J_1, ..., J_k\}> \in E$, $Form(E) \cup Supp(E) \nvdash \bot$,

$\{B, C\} \cup Form(E) \nvdash \bot$ e

$\{C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \vdash \bot)\}$ (*).

Observe que as condições que aparecem na primeira parte da disjunção acima ($<A : \{J_1, ..., J_k\}> \in E_i$, e $\{B, C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \nvdash \bot$) são as mesmas utilizadas na construção das CDL-extensões (ver teoremas 2.5.1, 4.5.2 e 4.5.3).

Além disso, estas condições não podem ser satisfeitas simultaneamente com $Form(E) \cup Supp(E) \nvdash \bot$ e $\{C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \vdash \bot$, que aparecem na segunda parte da disjunção. Portanto, os defaults utilizados na construção do conjunto E_i, satisfazem somente uma das partes da disjunção.

O sistema de esferas $\mathbf{S} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbf{S_i}$, onde cada sistema de esferas $\mathbf{S_i}$ está centrado em $[Form(E_i)]$, é construído da seguinte forma :

- $\mathbf{S_0} = \{M_L, [Form(W_0)]\}$, onde $[Form(W_0)] = [Form(E_0)]$;

  Por indução, vamos construir os sistemas de esferas $\mathbf{S_i}$, para todo $i \in [1,\infty)$:

- **Base :** Considere o conjunto (possivelmente infinito) de defaults $\Lambda_1 \subseteq GD^E{}_{\Delta f}$ tal que :

  $ASSER(\Lambda_1) = \{<C : \{J_1, ..., J_k, B, C\}>$ tal que $A : B / C \in \Delta$,

  $(<A : \{J_1, ..., J_k\}> \in E_0$, e

  $\{B, C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \nvdash \bot)$

  ou

  $(<A : \{J_1, ..., J_k\}> \in E$, $Form(E) \cup Supp(E) \nvdash \bot$,

  $\{B, C\} \cup Form(E) \nvdash \bot$ e $\{C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \vdash \bot)\}$,

  ou seja, Λ_1 é o conjunto de defaults geradores de E cujos pré-requisitos, justificativas e conseqüentes são utilizados para construir o conjunto de assertivas E_1 ($ASSER(\Lambda_1)$

é igual ao lado direito da união (*)). Note que cada d = A:B /C $\in \Lambda_1$ satisfaz as condições acima independentemente dos outros defaults e, portanto, os defaults de Λ_1 podem ser aplicados em qualquer ordem.

Logo, seja $\{A^1{}_1: B^1{}_1/C^1{}_1 ; A^1{}_2: B^1{}_2/ C^1{}_2; ...; A^1{}_\xi: B^1{}_\xi/C^1{}_\xi ; ...\}$ uma enumeração qualquer dos defaults do conjunto Λ_1.

Defina :

$$Form(W^1{}_0) = \{\alpha / <\alpha:\beta> \in W_0\} \text{ e } Supp(W^1{}_0) = \{\beta / <\alpha:\beta> \in W_0\}.$$

Utilizando a enumeração de defaults acima, vamos construir o sistema de esferas S_1 = $\{M_L, [Form(W^1{}_0)], ..., [Form(W^1{}_n)], ...\}$ centrado em $\bigcap_{\xi \in I} [Form(W^1{}_\xi)]$ = $[Form(E_1)]$, tal que :

$$[Form(W^1{}_0)] = [Form(W_0)] = [Form(E_0)] \text{ e, para cada } \xi \in I :$$

$$[Form(W^1{}_\xi)] = \bigcap_{\gamma<\xi} [Form(W^1{}_\gamma)] \cap [C^1{}_\xi].$$

- **Base :** Considere o default $(A^1{}_1: B^1{}_1/C^1{}_1)$ e as classes de modelos $[Form(W^1{}_0)]$ e $[Supp(W^1{}_0)]$.

Caso a primeira parte da disjunção seja satisfeita, como vimos na demonstração do teorema 4.5.3, o default $(A^1{}_1: B^1{}_1/C^1{}_1)$ é B_f-aplicável, segundo a definição 4.5.1, a $[Form(W^1{}_0)]$ com respeito a $[Supp(W^1{}_0)]$, uma vez que as condições (a) e (b) desta definição são satisfeitas. Como tais condições são equivalentes as condições (a) e (b) da definição 4.5.4, temos que o default $(A^1{}_1: B^1{}_1/C^1{}_1)$ é B_f-aplicável, segundo a definição 4.5.4, a $[Form(W^1{}_0)]$ com respeito a $[Supp(W^1{}_0)]$.

Caso a segunda parte da disjunção seja satisfeita, temos que :

por (d) : $[Form(W^1{}_0)] \cap [Supp(W^1{}_0)] \neq \emptyset$, e

por (f) : $[Form(W^1{}_0)] \cap [Supp(W^1{}_0)] \cap [C^1{}_1] = \emptyset$.

Como $[Form(W^1{}_0)] = [Form(E_0)] \supseteq [Form(E)]$ e $[Supp(W^1{}_0)] = [Supp(E_0)] \supseteq [Supp(E)]$, então : $[Form(E)] \cap [Supp(E)] \cap [C^1{}_1] = \emptyset$.

Uma vez que $<C^1{}_1 : \{J_1, ..., J_k, B^1{}_1, C^1{}_1\}> \in E_1 \subseteq E$, então devemos ter que $[Form(E)] \cap [Supp(E)] = \emptyset$. Portanto, este sistema **S** não provê E, e este conjunto não é uma CDL_F-extensão.

- **Passo de Indução :** Considere o default $(A^1_\xi:B^1_\xi/C^1_\xi)$, e as classes de modelos $\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^1_\gamma)]$ e $\bigcap_{\gamma<\xi}[Supp(W^1_\gamma)]$, onde $Supp(W^1_\gamma) = Supp(W^1_0) \cup \{JUST(d_\sigma) / \sigma \leq \gamma\} \cup \{CONS(d_\sigma) / \sigma \leq \gamma\}$.

Caso a primeira parte da disjunção seja satisfeita, como vimos na demonstração do teorema 4.5.3, o default $(A^1_\xi:B^1_\xi/C^1_\xi)$ é B_f-aplicável, segundo a definição 4.5.1, a $\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^1_\gamma)]$ com respeito a $\bigcap_{\gamma<\xi}[Supp(W^1_\gamma)]$, uma vez que as condições (a) e (b) desta definição são satisfeitas. Como tais condições são equivalentes as condições (a) e (b) da definição 4.5.4, temos que o default $(A^1_\xi:B^1_\xi/C^1_\xi)$ é B_f-aplicável, segundo a definição 4.5.4, a $\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^1_\gamma)]$ com respeito a $\bigcap_{\gamma<\xi}[Supp(W^1_\gamma)]$.

Caso a segunda parte da disjunção seja satisfeita, temos que :

por (d) : $(\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^1_\gamma)]) \cap (\bigcap_{\gamma<\xi}[Supp(W^1_\gamma)]) \neq \emptyset$, e

por (f) : $(\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^1_\gamma)]) \cap (\bigcap_{\gamma<\xi}[Supp(W^1_\gamma)]) \cap [C^1_\xi] = \emptyset$.

Como $\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^1_\gamma)] \supseteq [Form(E_1)] \supseteq [Form(E)]$ e $\bigcap_{\gamma<\xi}[Supp(W^1_\gamma)] \supseteq [Supp(E_1)] \supseteq [Supp(E)]$, então : $[Form(E)] \cap [Supp(E)] \cap [C^1_\xi] = \emptyset$.

Uma vez que $<C^1_\xi : \{J_1, ..., J_k, B^1_\xi, C^1_\xi\}> \in E_1 \subseteq E$, então devemos ter que $[Form(E)] \cap [Supp(E)] = \emptyset$. Portanto, este sistema **S** não provê E, e este conjunto não é uma CDL_F-extensão.

- **Passo de Indução :** Suponha que os sistemas de esferas $S_1, S_2, ..., S_i$ centrados, respectivamente, em $[Form(E_1)], [Form(E_2)], ..., [Form(E_i)]$, foram construídos segundo alguma enumeração, respectivamente, dos conjuntos de defaults $\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_i$. Vamos construir o sistema de esferas S_{i+1}.

Para isto, considere o conjunto (possivelmente infinito) de defaults $\Lambda_{i+1} \subseteq GD^E{}_{\Delta f}$ tal que :

$ASSER(\Lambda_{i+1}) = \{<C : \{J_1, ..., J_k, B, C\}>$ tal que $A : B / C \in \Delta$,

$(<A : \{J_1, ..., J_k\}> \in E_i$, e

$\{B, C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot)$

ou

$(<A : \{J_1, ..., J_k\}> \in E$, $Form(E) \cup Supp(E) \nvdash \bot$,

$\{B, C\} \cup Form(E) \nvdash \bot$ e $\{C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \vdash \bot)\}$,

ou seja, Λ_{i+1} é o conjunto de defaults geradores de E cujos pré-requisitos, justificativas e conseqüentes são utilizados para construir o conjunto E_{i+1} ($ASSER(\Lambda_{i+1})$ é igual ao lado direito da união (*)). Note que cada $d = A{:}B\ /C \in \Lambda_{i+1}$ satisfaz as condições acima independentemente dos outros defaults e, portanto, os defaults de Λ_{i+1} podem ser aplicados em qualquer ordem.

Logo, seja $\{A^{i+1}{}_1{:}\ B^{i+1}{}_1/C^1{}_1\ ;\ A^{i+1}{}_2{:}\ B^{i+1}{}_2/\ C^{i+1}{}_2;\ ...;\ A^{i+1}{}_\xi{:}\ B^{i+1}{}_\xi/C^{i+1}{}_\xi\ ;\ ...\}$ uma enumeração qualquer dos defaults do conjunto Λ_{i+1}.

Defina :

$Form(W^{i+1}{}_0) = \{\alpha\ /\ <\alpha{:}\beta> \in E_i\}$, $Supp(W^{i+1}{}_0) = \{\beta\ /\ <\alpha{:}\beta> \in E_i\}$; e

Utilizando a enumeração de defaults acima, vamos construir o sistema de esferas $S_{i+1} = \{M_L, [Form(W^{i+1}{}_0)], ..., [Form(W^{i+1}{}_n)], ...\}$ centrado em $\bigcap_{\xi \in I} [Form(W^{i+1}{}_\xi)] = [Form(E_{i+1})]$, tal que :

$[Form(W^{i+1}{}_0)] = [Form(E_i)]$ e, para cada $\xi \in I$:

$[Form(W^{i+1}{}_\xi)] = \bigcap_{\gamma<\xi} [Form(W^{i+1}{}_\gamma)] \cap [C^{i+1}{}_\xi]$.

- **Base** : Considere o default $(A^{i+1}{}_1{:}\ B^{i+1}{}_1/C^{i+1}{}_1)$ e as classes de modelos $[Form(W^{i+1}{}_0)]$ e $[Supp(W^{i+1}{}_0)]$.

Caso a primeira parte da disjunção seja satisfeita, como vimos na demonstração do teorema 4.5.3, o default $(A^{i+1}{}_1{:}\ B^{i+1}{}_1/C^{i+1}{}_1)$ é B_f-aplicável, segundo a definição 4.5.1, a $[Form(W^{i+1}{}_0)]$ com respeito a $[Supp(W^{i+1}{}_0)]$, uma vez que as condições (a) e (b) desta definição são satisfeitas. Como tais condições são equivalentes as condições (a) e (b) da definição 4.5.4, temos que o default $(A^{i+1}{}_1{:}\ B^{i+1}{}_1/C^{i+1}{}_1)$ é B_f-aplicável, segundo a definição 4.5.4, a $[Form(W^{i+1}{}_0)]$ com respeito a $[Supp(W^{i+1}{}_0)]$.

Caso a segunda parte da disjunção seja satisfeita, temos que :

por (d) : $[Form(W^{i+1}{}_0)] \cap [Supp(W^{i+1}{}_0)] \neq \emptyset$, e

por (f) : $[Form(W^{i+1}{}_0)] \cap [Supp(W^{i+1}{}_0)] \cap [C^{i+1}{}_1] = \emptyset$.

Como $[Form(W^{i+1}{}_0)] = [Form(E_i)] \supseteq [Form(E)]$ e $[Supp(W^{i+1}{}_0)] = [Supp(E_i)] \supseteq [Supp(E)]$, então : $[Form(E)] \cap [Supp(E)] \cap [C^{i+1}{}_1] = \varnothing$.

Uma vez que $<C^{i+1}{}_1 : \{J_1, ..., J_k, B^{i+1}{}_1, C^{i+1}{}_1\}> \in E_{i+1} \subseteq E$, então devemos ter que $[Form(E)] \cap [Supp(E)] = \varnothing$. Portanto, este sistema **S** não provê E, e este conjunto não é uma CDL_F-extensão.

- **Passo de Indução :** Considere o default $(A^{i+1}{}_\xi{:}B^{i+1}{}_\xi/C^{i+1}{}_\xi)$, e as classes de modelos $\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^{i+1}{}_\gamma)]$ e $\bigcap_{\gamma<\xi}[Supp(W^{i+1}{}_\gamma)]$, onde $Supp(W^{i+1}{}_\gamma) = Supp(W^{i+1}{}_0) \cup \{JUST(d_\sigma) / \sigma \leq \gamma\} \cup \{CONS(d_\sigma) / \sigma \leq \gamma\}$.

Caso a primeira parte da disjunção seja satisfeita, como vimos na demonstração do teorema 4.5.3, o default $(A^{i+1}{}_\xi{:}B^{i+1}{}_\xi/C^{i+1}{}_\xi)$ é B_f-aplicável, segundo a definição 4.5.1, a $\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^{i+1}{}_\gamma)]$ com respeito a $\bigcap_{\gamma<\xi}[Supp(W^{i+1}{}_\gamma)]$, uma vez que as condições (a) e (b) desta definição são satisfeitas. Como tais condições são equivalentes as condições (a) e (b) da definição 4.5.4, temos que o default $(A^{i+1}{}_\xi{:}B^{i+1}{}_\xi/C^{i+1}{}_\xi)$ é B_f-aplicável, segundo a definição 4.5.4, a $\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^{i+1}{}_\gamma)]$ com respeito a $\bigcap_{\gamma<\xi}[Supp(W^{i+1}{}_\gamma)]$.

Caso a segunda parte da disjunção seja satisfeita, temos que :

por (d) : $(\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^{i+1}{}_\gamma)]) \cap (\bigcap_{\gamma<\xi}[Supp(W^{i+1}{}_\gamma)]) \neq \varnothing$, e

por (f) : $(\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^{i+1}{}_\gamma)]) \cap (\bigcap_{\gamma<\xi}[Supp(W^{i+1}{}_\gamma)]) \cap [C^{i+1}{}_\xi] = \varnothing$.

Como $\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^{i+1}{}_\gamma)] \supseteq [Form(E_1)] \supseteq [Form(E)]$ e $\bigcap_{\gamma<\xi}[Supp(W^{i+1}{}_\gamma)] \supseteq [Supp(E_1)] \supseteq [Supp(E)]$, então : $[Form(E)] \cap [Supp(E)] \cap [C^{i+1}{}_\xi] = \varnothing$.

Uma vez que $<C^{i+1}{}_\xi : \{J_1, ..., J_k, B^{i+1}{}_\xi, C^{i+1}{}_\xi\}> \in E_{i+1} \subseteq E$, então devemos ter que $[Form(E)] \cap [Supp(E)] = \varnothing$. Portanto, este sistema **S** não provê E, e este conjunto não é uma CDL_F-extensão.

Logo, os defaults do conjunto $GD^E{}_{\Delta f}$ podem ser colocado em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_n, ...>$ que define um sistema de esferas

$S = \bigcup_{i=0}^{\infty} S_i = \{M_L, [Form(E_0)], [Form(W^1{}_1)], \ldots, [Form(W^1{}_i)], \ldots, [Form(E_1)], [Form(W^2{}_1)], \ldots, [Form(W^2{}_j)], \ldots, [Form(E_2)], \ldots, [Form(E_n)], [Form(W^{n+1}{}_1)], \ldots, [Form(W^{n+1}{}_k)], [Form(E_{n+1})], \ldots\}$ centrado em $[Form(E)] = \mathcal{M}$, onde cada conjunto Λ_i é uma enumeração qualquer de defaults utilizados na construção do sistema de esferas S_i. Portanto, o sistema de esferas S provê a CDL_r-extensão E. ◆

Seção 6

Definição 4.6.2

Seja (W_0,Δ) uma teoria default afirmativa e ξ_Z o conjunto de todas as seqüências de defaults $<d_i>$ que definem sistemas de esferas como na definição 4.6.1. O conjunto ξ_Z pode ser parcialmente ordenados por $\leq_Z$ definida como : $<d_1> \leq_Z <d_2>$ se $<d_1>$ é o prefixo de $<d_2>$.

Dizemos que $<d_i> \in \xi_Z$ é uma seqüência maximal (com respeito a $\leq_Z$) de defaults em Δ se não existe nenhuma seqüência $<d_j> \in \xi_Z$ tal que $<d_i> \leq_Z <d_j>$.■

Teorema 4.6.1

Seja (W_0,Δ) uma teoria default afirmativa e $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal com respeito a $\leq_Z$ de defaults em Δ que define o sistema de esferas S (como na definição 4.6.2). Se S satisfaz a condição $[Form(E)] \cap [Supp(E)] \neq \emptyset$, então S provê (Form(E), Cons(E), Just(E)), onde E é uma PCDL-extensão semi-normal E de (W_0,Δ). ■

Prova :

Seja $[Form(\mathcal{W})] = \bigcap_{\varsigma \in I}[Form(W_\varsigma)]$ o centro do sistema de esferas S obtido a partir de uma seqüência (possivelmente infinita) maximal de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, d_2, \ldots>$, segundo a definição 4.6.2. Seja $W'_i = \{\iota$ tal que $[Form(W_i)] \subseteq [Form(\iota)]\}$ o conjunto de afirmativas cujas fórmulas são válidas na esfera $[Form(W_i)]$. Obviamente, E $= \bigcup_{i=0}^{\infty} W'_i$.

Defina :

$E_0 = W_0$; e para $i \geq 0$

$E_{i+1} = Th_{Sa}(E_i) \cup \{<C : \{\beta_1, ..., \beta_k, C\} : \{\chi_1, ..., \chi_n, B\}>$ tal que

$A : (C| B) / C \in \Delta$, onde

$(<A : \{\beta_1, ..., \beta_k\} : \{\chi_1, ..., \chi_n\}> \in E_i$, e

$\{B, C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot)$

ou

$(<A : \{\beta_1, ..., \beta_k\} : \{\chi_1, ..., \chi_n\}> \in E$,

$Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot$,

$\{B\} \cup Form(E) \not\vdash \bot$,

$\{C\} \cup Form(W_0) \not\vdash \bot$, e

$\{C\} \cup Form(W_0) \cup Just(E) \vdash \bot)\}$.

Pela proposição 2.6.1 (capítulo 2), basta mostrar que $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, para concluir que E é uma PCDL-extensão semi-normal de (W_0,Δ).

Caso 1 : $\bigcup_{i=0}^{\infty} Ei \subseteq E$

Por indução, temos :

- **Base :** Por definição, $[Form(W_0)] = [Form(E_0)]$. Como $[Form(E)] = [Form(\mathcal{W})] \subseteq [Form(W_0)]$, temos para todo $\mu \in E_0$, $[Form(E_0)] \subseteq [Form(\mu)]$. Logo, $\mu \in E$.

- **Passo de indução :** Seja $E_i \subseteq E$. Considere $<C : Cons(C) : Just(C)> \in E_{i+1}$.

  - Se $<C : Cons(C) : Just(C)> \in Th_{Sa}(E_i)$ então $<C : Cons(C) : Just(C)> \in E$.

  - Caso contrário, existe um default $A:C \mid B/C \in \Delta$ tal que :

    $<A : \{\beta_1, ..., \beta_k\} : \{\chi_1, ..., \chi_n\}> \in E_i$, e

    $\{B, C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot)$

    ou

    $<A : \{\beta_1, ..., \beta_k\} : \{\chi_1, ..., \chi_n\}> \in E$,

    $Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot$,

    $\{B\} \cup Form(E) \not\vdash \bot$,

$\{C\} \cup Form(W_0) \nvdash \bot$, e

$\{C\} \cup Form(W_0) \cup Just(E) \vdash \bot$.

Suponha que a primeira parte da disjunção acima seja verdadeira.

Como $<A : \{\beta_1, ..., \beta_k\} : \{\chi_1, ..., \chi_n\}> \in E_i \subseteq E$, temos que : $[Form(\mathcal{W})] = [Form(E)] \subseteq [Form(E_i)] \subseteq [Form(A)]$.

Além disso, como $\{B, C\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \nvdash \bot$,

então $[Form(E)] \cap [Supp(E)] \cap [B \wedge C] \neq \emptyset$. Logo,

$[Form(E_i)] \cap [Supp(E_i)] \cap [B \wedge C] \neq \emptyset$, uma vez que $[Form(E)] \subseteq [Form(E_i)]$ e $[Supp(E)] \subseteq [Supp(E_i)]$.

Se $d \in <d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ então $[Form(E_i)] \subseteq [C]$, $[Cons(E)] \subseteq [Cons(C)]$ e $[Just(E)] \subseteq [Just(C)]$, e portanto $<C : Cons(C) : Just(C)> \in E$.

Caso contrário, podemos construir a seqüência de defaults $<<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}, d>$ que define um sistema de esferas segundo a definição 4.6.2, e que tem como prefixo a seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, o que contradiz a maximalidade desta seqüência.

Suponha que a segunda parte da disjunção acima seja verdadeira. Neste caso, as seguintes condições seriam satisfeitas :

(a) $[Form(E)] \subseteq [A]$,

(b) $[Form(E)] \cap [Supp(E)] \neq \emptyset$,

(c) $[Form(E)] \cap [B] \neq \emptyset$, e

(d) $[Form(W_0)] \cap [C] \neq \emptyset$, e

(e) $[Form(W_0)] \cap [Just(E)] \cap [C] = \emptyset$.

Se $d \in <d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ então $[Form(E)] \subseteq [C]$ e este fato, junto com o ítem (d) e (e), implica que $[Just(E)] \cap [C] = \emptyset$. Como $[Supp(E)] \subseteq [Just(E)]$, temos que $[Supp(E)] \cap [C] = \emptyset$. Logo, $[Supp(E)] \subseteq [\neg C]$ e conseqüentemente, $[Form(E)] \cap [Supp(E)] = \emptyset$, o que contradiz a hipótese $[Form(\mathcal{W})] \cap [Supp(\mathcal{W})] \neq \emptyset$.

Caso contrário, podemos construir a seqüência de defaults $<<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}, d>$ que define um sistema de esferas segundo a definição 4.6.2, e que tem como prefixo a seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, o que contradiz a maximalidade desta como prefixo a seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, o que contradiz a maximalidade desta seqüência.

Logo, $E_{i+1} \subseteq E$.

Caso 2 : $E \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$

Devemos mostrar, por indução, que $W'_i \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$.

- **Base :** $W'_0 \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$, uma vez que $[Form(W'_0)] = [Form(W_0)]$ e $E_0 = W_0$.

- **Passo de indução :** Suponha que, para todo $\gamma < \varsigma$, $W'_\gamma \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$. Temos que mostrar que $W'_\varsigma \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$.

Pela construção do sistema de esferas **S** (definição 4.6.2), sabemos que existe um default A_ς: $(C_\varsigma \mid B_\varsigma) \mid C_\varsigma$ tal que $[Form(W_\varsigma)] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [Form(W_\gamma)] \cap [C_\varsigma]$, onde :

(a) $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [Form(W_\gamma)] \subseteq [A_\varsigma]$, e

(b) $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [Form(W_\gamma)] \cap \bigcap_{\gamma<\varsigma} [Supp(W_\gamma)] \cap [B_\varsigma \wedge C_\varsigma] \neq \varnothing$

ou

(c) $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [Form(W_\gamma)] \cap [A_\varsigma] \neq \varnothing$, e

(d) $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [Form(W_\gamma)] \cap \bigcap_{\gamma<\varsigma} [Supp(W_\gamma)] \neq \varnothing$, e

(e) $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [Form(W_\gamma)] \cap [B_\varsigma] \neq \varnothing$, e

(f) $[Form(W_0)] \cap [C_\varsigma] \neq \varnothing$, e

(g) $[Form(W_0)] \cap \bigcap_{\gamma<\varsigma} [Just(W_\gamma)] \cap [C_\varsigma] = \varnothing$.

Observe que se a segunda parte desta disjunção for satisfeita, o ítem (g) contradiz a hipótese $[Form(\mathcal{W})] \cap [Supp(\mathcal{W})] \neq \varnothing$. Então, considere a primeira parte da disjunção seja verdadeira. Então, como $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [Form(W_\gamma)] \subseteq [A_\varsigma]$, temos $<A_\varsigma : Cons(A_\varsigma) : Just(A_\varsigma)> \in \bigcup_{\gamma<\varsigma} W'_\gamma \subseteq \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$. Logo, existe um conjunto E_j que é o menor (sob inclusão) conjunto entre $E_0, E_1, \ldots$ que satisfaz a condição : $\bigcup_{\gamma<\varsigma} W'_\gamma \subseteq E_j$, e assim, $<A_\varsigma : Cons(A_\varsigma) : Just(A_\varsigma)> \in E_j$.

Além disso, o ítem (b) junto com a hipótese [Form($\mathcal{W}$)] $\cap$ [Supp($\mathcal{W}$)] $\neq \emptyset$, nos dá que : Form(E) $\cup$ Supp(E) $\cup$ $\{B_ç, C_ç\}$ $\not\vdash \bot$. Então $<C_ç$: Cons($C_ç$) : Just($C_ç$)$> \in E_{j+1}$ e, conseqüentemente, $<C_ç$: Cons($C_ç$) : Just($C_ç$)$> \in \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$. ●

Teorema 4.6.2

Seja (W_0,Δ) uma teoria default afirmativa, E uma PCDL-extensão semi-normal de (W_0,Δ), com $GD^E{}_{\Delta Z}$ sendo o conjunto de defaults geradores, e (M,N,O) a tripla formada pelas classes de todos os modelos de Form(E), Cons(E) e Just(E). Os defaults em $GD^E{}_{\Delta Z}$ podem ser colocados em uma seqüência (possivelmente infinita) $<d_ç>_{ç \in I}$ tal que o sistema de esferas **S** definido por $<d_ç>_{ç \in I}$ (como na definição 4.6.2) provê E.■

Prova :

Considere a PCDL-extensão semi-normal E da teoria default afirmativa (W_0,Δ) e *M*, *N* e *O* as classes de todos os modelos, respectivamente, das fórmulas, justificativas e conseqüentes de E. Devemos construir o sistema de esferas **S** (como na definição 4.6.2) que provê E.

Pela proposição 2.6.1 (capítulo 2), podemos caracterizar a PCDL-extensão semi-normal E como sendo o conjunto $E = \bigcup_{i=0}^{\infty} Ei$ onde :

$E_0 = W_0$; e para $i \geq 0$

$E_{i+1} = Th_{Sa}(E_i) \cup \{<C : \{\beta_1, ..., \beta_k, C\} : \{\chi_1, ..., \chi_n, B\}>$ tal que $A : (C| B) / C \in \Delta$, onde

(a) $(<A : \{\beta_1, ..., \beta_k\} : \{\chi_1, ..., \chi_n\}> \in E_i$, e

(b) $\{B, C\} \cup$ Form(E) $\cup$ Supp(E) $\not\vdash \bot$)

ou

(c) $(<A : \{\beta_1, ..., \beta_k\} : \{\chi_1, ..., \chi_n\}> \in E$,

(d) Form(E) $\cup$ Supp(E) $\not\vdash \bot$,

(e) $\{B\} \cup$ Form(E) $\not\vdash \bot$,

(f) $\{C\} \cup$ Form(W_0) $\not\vdash \bot$, e

(g) $\{C\} \cup$ Form(W_0) $\cup$ Just(E) $\vdash \bot$)$\}$ (*).

Observe que as condições que aparecem na primeira parte da disjunção acima não podem ser satisfeitas simultaneamente com Form(E) $\cup$ Supp(E) $\not\vdash \bot$ e $\{C\} \cup$ Form(W_0) $\cup$ Just(E) $\vdash \bot$, que aparecem na segunda parte da disjunção. Portanto, os defaults utilizados na construção do conjunto E_i, satisfazem somente uma das partes da disjunção.

O sistema de esferas $\mathbf{S} = \bigcup_{i=0}^{\infty} \mathbf{S}_i$, onde cada sistema de esferas $\mathbf{S}_i$ está centrado em $[\text{Form}(E_i)]$, é construído da seguinte forma :

- $\mathbf{S}_0 = \{M_L, [\text{Form}(W_0)]\}$, onde $[\text{Form}(W_0)] = [\text{Form}(E_0)]$;

Por indução, vamos construir os sistemas de esferas $\mathbf{S}_i$, para todo $i \in [1,\infty)$:

- **Base :** Considere o conjunto (possivelmente infinito) de defaults $\Lambda_1 \subseteq GD^E{}_{\Delta Z}$ tal que :

$$\begin{aligned}
\text{AFIRM}(\Lambda_1) = \{<C : \{\beta_1, ..., \beta_k, C\} : \{\chi_1, ..., \chi_n, B\}> \text{ tal que } & A : (C \mid B) / C \in \Delta, \\
& (<A : \{\beta_1, ..., \beta_k\} : \{\chi_1, ..., \chi_n\}> \in E_0 \text{ , e} \\
& \{B, C\} \cup \text{Form}(E) \cup \text{Supp}(E) \not\vdash \bot) \\
& \text{ou} \\
& (<A : \{\beta_1, ..., \beta_k\} : \{\chi_1, ..., \chi_n\}> \in E \text{ ,} \\
& \text{Form}(E) \cup \text{Supp}(E) \not\vdash \bot, \{B\} \cup \text{Form}(E) \not\vdash \bot, \\
& \{C\} \cup \text{Form}(W_0) \not\vdash \bot \text{ , e} \\
& \{C\} \cup \text{Form}(W_0) \cup \text{Just}(E) \vdash \bot)\}.
\end{aligned}$$

ou seja, Λ_1 é o conjunto de defaults geradores de E cujos pré-requisitos, justificativas e conseqüentes são utilizados para construir o conjunto de afirmativas E_1 (AFIRM(Λ_1) é igual ao lado direito da união (*)). Note que cada d = A:(C|B)/C $\in \Lambda_1$ satisfaz as condições acima independentemente dos outros defaults e, portanto, os defaults de Λ_1 podem ser aplicados em qualquer ordem.

Logo, seja $\{A^1{}_1: (C^1{}_1 \mid B^1{}_1) / C^1{}_1 \text{ ; } A^1{}_2: (C^1{}_2 \mid B^1{}_2) / C^1{}_2 \text{; ...; } A^1{}_\xi: (C^1{}_\xi \mid B^1{}_\xi) / C^1{}_\xi \text{ ; } ...\}$ uma enumeração qualquer dos defaults do conjunto Λ_1.

Defina : $\text{Form}(W^1{}_0) = \{\alpha \mid <\alpha:\beta:\gamma> \in W_0\}$,

$\text{Cons}(W^1{}_0) = \{\beta \mid \{\alpha \mid <\alpha:\beta:\gamma> \in W_0\}$,

$Just(W^1_0) = \{\gamma \,/\, <\alpha:\beta:\gamma> \in W_0\}$, e

$Supp(W^1_0) = Cons(W^1_0) \cup Just(W^1_0)$.

Utilizando a enumeração de defaults acima, vamos construir o sistema de esferas $\mathbf{S_1}$ = $\{M_L, [Form(W^1_0)], ..., [Form(W^1_n)], ...\}$ centrado em $\bigcap_{\xi \in I}[Form(W^1_\xi)]$ = $[Form(E_1)]$, tal que :

$[Form(W^1_0)] = [Form(W_0)] = [Form(E_0)]$ e, para cada $\xi \in I$:

$[Form(W^1_\xi)] = \bigcap_{\gamma<\xi} [Form(W^1_\gamma)] \cap [C^1_\xi]$.

- **Base** : Considere o default $(A^1_1: (C^1_1 \mid B^1_1)/C^1_1)$ e as classes de modelos $[Form(W^1_0)]$, $[Just(W^1_0)]$ e $[Supp(W^1_0)]$.

Caso a primeira parte da disjunção seja satisfeita, temos que :

Como $<A^1_1 \{\beta_1, ..., \beta_k\} : \{\chi_1, ..., \chi_n\}> \in E_0$, então $A^1_1 \in Form(E_0)$.

Logo, $[Form(W^1_0)] = [Form(W_0)] = [Form(E_0)] \subseteq [A^1_1]$.

Como $\{B^1_1, C^1_1\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot$, e

$[Form(E)] \subseteq [Form(W^1_0)]$ e $[Supp(E)] \subseteq [Supp(W^1_0)]$, temos :

$[Form(W^1_0)] \cap [Supp(W^1_0)] \cap [B^1_1 \wedge C^1_1] \neq \emptyset$.

Logo, o default $(A^1_1: (C^1_1|B^1_1)/ C^1_1)$ é Z-aplicável a $[Form(W^1_0)]$ com respeito a $[Supp(W^1_0)]$, e portanto, podemos construir a esfera $[Form(W^1_1)] = [Form(W^1_0)] \cap [C^1_1]$.

Caso a segunda parte da disjunção seja satisfeita, temos que :

por (f) : $[Form(W^1_0)] \cap [C^1_1] \neq \emptyset$, e

por (g) : $[Form(W^1_0)] \cap [Just(W^1_0)] \cap [C^1_1] = \emptyset$.

Como $[Form(W^1_0)] = [Form(E_0)] \supseteq [Form(E)]$ e $[Just(W^1_0)] \supseteq [Supp(W^1_0)] = [Supp(E_0)] \supseteq [Supp(E)]$, então : $[Form(E)] \cap [Supp(E)] \cap [C^1_1] = \emptyset$.

Uma vez que $<C^1_1 : \{\beta_1, ..., \beta_k, C^1_1\} : \{\chi_1, ..., \chi_n, B^1_1\}> \in E_1 \subseteq E$, então devemos ter que $[Form(E)] \cap [Supp(E)] = \emptyset$. Portanto, este sistema **S** não provê E, e este conjunto não é uma PCDL-extensão.

- Passo de Indução : Considere o default $(A^1_\xi: (C^1_\xi \mid B^1_\xi)/C^1_\xi)$, e as classes de modelos $\bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Form}(W^1_\gamma)]$, $\bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Just}(W^1_\gamma)]$ e $\bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Supp}(W^1_\gamma)]$, onde $\mathrm{Supp}(W^1_\gamma) = \mathrm{Just}(W^1_\gamma) \cup \mathrm{Cons}(W^1_\gamma)$.

Caso a primeira parte da disjunção seja satisfeita, temos que :

Como $<A^1_\xi \{\beta_1, ..., \beta_k\} : \{\chi_1, ..., \chi_n\}> \in E_0$, então $A^1_\xi \in \mathrm{Form}(E_0)$.

Logo, $\bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Form}(W^1_\gamma)] \subseteq [\mathrm{Form}(W^1_0)] = [\mathrm{Form}(W_0)] =$

$[\mathrm{Form}(E_0)] \subseteq [A^1_\xi]$.

Como $\{B^1_\xi, C^1_\xi\} \cup \mathrm{Form}(E) \cup \mathrm{Supp}(E) \not\vdash \perp$, e $[\mathrm{Form}(E)] \subseteq \bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Form}(W^1_\gamma)]$ e $[\mathrm{Supp}(E)] \subseteq \bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Supp}(W^1_\gamma)]$, então :

$\bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Form}(W^1_\gamma)] \cap \bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Supp}(W^1_\gamma)] \cap [B^1_\xi \wedge C^1_\xi] \neq \varnothing$.

Logo, o default $(A^1_\xi: (C^1_\xi \mid B^1_\xi)/C^1_\xi)$ é Z-aplicável a $\bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Form}(W^1_\gamma)]$ com respeito a $\bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Supp}(W^1_\gamma)]$, e portanto, podemos construir a esfera $[\mathrm{Form}(W^1_\xi)] = \bigcap_{\gamma<\xi} [\mathrm{Form}(W^1_\gamma)] \cap [C^1_\xi]$.

Caso a segunda parte da disjunção seja satisfeita, temos que :

por (f) : $[\mathrm{Form}(W^1_0)] \cap [C^1_\xi] \neq \varnothing$, e

por (g) : $[\mathrm{Form}(W^1_0)] \cap (\bigcap_{\gamma<\xi} [\mathrm{Just}(W^1_\gamma)]) \cap [C^1_\xi] = \varnothing$.

Como $[\mathrm{Form}(W^1_0)] = [\mathrm{Form}(E_0)] \supseteq [\mathrm{Form}(E)]$ e $\bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Just}(W^1_\gamma)] \supseteq \bigcap_{\gamma<\xi}[\mathrm{Supp}(W^1_\gamma)] \supseteq [\mathrm{Supp}(E)]$, então : $[\mathrm{Form}(E)] \cap [\mathrm{Supp}(E)] \cap [C^1_\xi] = \varnothing$.

Uma vez que $<C^1_\xi : \{\beta_1, ..., \beta_k, C^1_\xi\} : \{\chi_1, ..., \chi_n, B^1_\xi\}> \in E_1 \subseteq E$, então devemos ter que $[\mathrm{Form}(E)] \cap [\mathrm{Supp}(E)] = \varnothing$. Portanto, este sistema **S** não provê E, e este conjunto não é uma PCDL-extensão.

- **Passo de Indução :** Suponha que os sistemas de esferas S_1, S_2, ..., S_i centrados, respectivamente, em $[\mathrm{Form}(E_1)]$, $[\mathrm{Form}(E_2)]$, ..., $[\mathrm{Form}(E_i)]$, foram construídos segundo alguma enumeração, respectivamente, dos conjuntos de defaults Λ_1, Λ_2,..., Λ_i. Vamos construir o sistema de esferas S_{i+1}.

Para isto, considere o conjunto (possivelmente infinito) de defaults $\Lambda_{i+1} \subseteq GD^E{}_{\Delta Z}$ tal que :

$$\text{AFIRM}(\Lambda_{i+1}) = \{<C : \{\beta_1, ..., \beta_k, C\} : \{\chi_1, ..., \chi_n, B\}> \text{ tal que } A : (C \mid B) / C \in \Delta,$$

$$(<A : \{\beta_1, ..., \beta_k\} : \{\chi_1, ..., \chi_n\}> \in E_i, \text{ e}$$

$$\{B, C\} \cup \text{Form}(E) \cup \text{Supp}(E) \not\vdash \bot)$$

ou

$$(<A : \{\beta_1, ..., \beta_k\} : \{\chi_1, ..., \chi_n\}> \in E,$$

$$\text{Form}(E) \cup \text{Supp}(E) \not\vdash \bot, \{B\} \cup \text{Form}(E) \not\vdash \bot,$$

$$\{C\} \cup \text{Form}(W_0) \not\vdash \bot, \text{ e}$$

$$\{C\} \cup \text{Form}(W_0) \cup \text{Just}(E) \vdash \bot)\}.$$

ou seja, Λ_{i+1} é o conjunto de defaults geradores de E cujos pré-requisitos, justificativas e conseqüentes são utilizados para construir o conjunto de afirmativas E_{i+1} ($\text{AFIRM}(\Lambda_{i+1})$ é igual ao lado direito da união (*)). Note que cada d = $A{:}(C|B)/C \in \Lambda_{i+1}$ satisfaz as condições acima independentemente dos outros defaults e, portanto, os defaults de Λ_{i+1} podem ser aplicados em qualquer ordem.

Logo, seja $\{A^{i+1}{}_1{:}\ (C^{i+1}{}_1 \mid B^{i+1}{}_1) / C^{i+1}{}_1\ ;\ A^{i+1}{}_2{:}\ (C^{i+1}{}_2 \mid B^{i+1}{}_2) / C^{i+1}{}_2;\ ...;\ A^{i+1}{}_\xi{:}\ (C^{i+1}{}_\xi \mid B^{i+1}{}_\xi) / C^{i+1}{}_\xi\ ;\ ...\}$ uma enumeração qualquer dos defaults do conjunto Λ_1.

Defina : $\text{Form}(W^{i+1}{}_0) = \{\alpha \,/\, <\alpha{:}\beta{:}\gamma> \in E_i\}$,

$\text{Cons}(W^{i+1}{}_0) = \{\beta \,/\, \{\alpha \,/\, <\alpha{:}\beta{:}\gamma> \in E_i\}$,

$\text{Just}(W^{i+1}{}_0) = \{\gamma \,/\, <\alpha{:}\beta{:}\gamma> \in E_i\}$, e

$\text{Supp}(W^{i+1}{}_0) = \text{Cons}(W^{i+1}{}_0) \cup \text{Just}(W^{i+1}{}_0)$.

Utilizando a enumeração de defaults acima, vamos construir o sistema de esferas $S_{i+1} = \{M_L, [\text{Form}(W^1{}_0)], [\text{Form}(W^{i+1}{}_0)], ..., [\text{Form}(W^{i+1}{}_n)], ...\}$ centrado em $\bigcap_{\xi \in I}[\text{Form}(W^{i+1}{}_\xi)] = [\text{Form}(E_{i+1})]$, tal que :

$$[\text{Form}(W^1{}_0)] = [\text{Form}(W_0)] = [\text{Form}(E_0)],$$

$$[\text{Form}(W^{i+1}{}_0)] = [\text{Form}(E_i)] \text{ e, para cada } \xi \in I :$$

$$[\text{Form}(W^{i+1}{}_\xi)] = \bigcap_{\gamma<\xi} [\text{Form}(W^{i+1}{}_\gamma)] \cap [C^{i+1}{}_\xi].$$

- **Base :** Considere o default $(A^{i+1}_1: (C^{i+1}_1 \mid B^{i+1}_1)/C^{i+1}_1)$ e as classes de modelos $[Form(W^{i+1}_0)]$, $[Just(W^{i+1}_0)]$ e $[Supp(W^{i+1}_0)]$.

Caso a primeira parte da disjunção seja satisfeita, temos que :

Como $<A^{i+1}_1 \{\beta_1, ..., \beta_k\} : \{\chi_1, ..., \chi_n\}> \in E_i$, então $A^{i+1}_1 \in Form(E_i)$.

Logo, $[Form(W^{i+1}_0)] \subseteq [A^{i+1}_1]$.

Como $\{B^{i+1}_1, C^{i+1}_1\} \cup Form(E) \cup Supp(E) \not\vdash \bot$, e

$[Form(E)] \subseteq [Form(W^{i+1}_0)]$ e $[Supp(E)] \subseteq [Supp(W^{i+1}_0)]$, temos :

$[Form(W^{i+1}_0)] \cap [Supp(W^{i+1}_0)] \cap [B^{i+1}_1 \wedge C^{i+1}_1] \neq \emptyset$.

Logo, o default $(A^{i+1}_1: (C^{i+1}_1|B^{i+1}_1)/ C^{i+1}_1)$ é Z-aplicável a $[Form(W^{i+1}_0)]$ com respeito a $[Supp(W^{i+1}_0)]$, e portanto, podemos construir a esfera $[Form(W^{i+1}_1)] = [Form(W^{i+1}_0)] \cap [C^{i+1}_1]$.

Caso a segunda parte da disjunção seja satisfeita, temos que :

por (f) : $[Form(W^1_0)] \cap [C^{i+1}_1] \neq \emptyset$, e

por (g) : $[Form(W^1_0)] \cap [Just(W^{i+1}_0)] \cap [C^{i+1}_1] = \emptyset$.

Como $[Form(W^1_0)] \supseteq [Form(E)]$ e $[Just(W^{i+1}_0)] \supseteq [Supp(W^{i+1}_0)] \supseteq [Supp(E)]$, então : $[Form(E)] \cap [Supp(E)] \cap [C^{i+1}_1] = \emptyset$.

Uma vez que $<C^{i+1}_1 : \{\beta_1, ..., \beta_k, C^{i+1}_1\} : \{\chi_1, ..., \chi_n, B^{i+1}_1\}> \in E_{i+1} \subseteq E$, então devemos ter que $[Form(E)] \cap [Supp(E)] = \emptyset$. Portanto, este sistema **S** não provê E, e este conjunto não é uma PCDL-extensão.

- **Passo de Indução :** Considere o default $(A^{i+1}_\xi: (C^{i+1}_\xi \mid B^{i+1}_\xi)/C^{i+1}_\xi)$, e as classes de modelos $\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^{i+1}_\gamma)]$, $\bigcap_{\gamma<\xi}[Just(W^{i+1}_\gamma)]$ e $\bigcap_{\gamma<\xi}[Supp(W^{i+1}_\gamma)]$, onde $Supp(W^{i+1}_\gamma) = Just(W^{i+1}_\gamma) \cup Cons(W^{i+1}_\gamma)$.

Caso a primeira parte da disjunção seja satisfeita, temos que :

Como $<A^{i+1}_\xi \{\beta_1, ..., \beta_k\} : \{\chi_1, ..., \chi_n\}> \in E_i$, então $A^{i+1}_\xi \in Form(E_i)$.

Logo, $\bigcap_{\gamma<\xi}[Form(W^{i+1}_\gamma)] \subseteq [Form(W^{i+1}_0)] = [Form(E_i)] \subseteq [A^{i+1}_\xi]$.

Como $\{B^{i+1}{}_{\xi}, C^{i+1}{}_{\xi}\} \cup \text{Form}(E) \cup \text{Supp}(E) \not\vdash \bot$, e $[\text{Form}(E)] \subseteq \bigcap_{\gamma<\xi}[\text{Form}(W^{i+1}{}_{\gamma})]$ e $[\text{Supp}(E)] \subseteq \bigcap_{\gamma<\xi}[\text{Supp}(W^{i+1}{}_{\gamma})]$, então :

$$\bigcap_{\gamma<\xi}[\text{Form}(W^{i+1}{}_{\gamma})] \cap \bigcap_{\gamma<\xi}[\text{Supp}(W^{i+1}{}_{\gamma})] \cap [B^{i+1}{}_{\xi} \wedge C^{i+1}{}_{\xi}] \neq \emptyset.$$

Logo, o default $(A^{i+1}{}_{\xi}: (C^{i+1}{}_{\xi} \mid B^{i+1}{}_{\xi})/C^{i+1}{}_{\xi})$ é Z-aplicável a $\bigcap_{\gamma<\xi}[\text{Form}(W^{i+1}{}_{\gamma})]$ com respeito a $\bigcap_{\gamma<\xi}[\text{Supp}(W^{i+1}{}_{\gamma})]$, e portanto, podemos construir a esfera $[\text{Form}(W^{i+1}{}_{\xi})] = \bigcap_{\gamma<\xi} [\text{Form}(W^{i+1}{}_{\gamma})] \cap [C^{i+1}{}_{\xi}]$.

Caso a segunda parte da disjunção seja satisfeita, temos que :

por (f) : $[\text{Form}(W^1{}_0)] \cap [C^{i+1}{}_{\xi}] \neq \emptyset$, e

por (g) : $[\text{Form}(W^1{}_0)] \cap (\bigcap_{\gamma<\xi} [\text{Just}(W^{i+1}{}_{\gamma})]) \cap [C^{i+1}{}_{\xi}] = \emptyset$.

Como $[\text{Form}(W^1{}_0)] = [\text{Form}(E_0)] \supseteq [\text{Form}(E)]$ e $\bigcap_{\gamma<\xi}[\text{Just}(W^{i+1}{}_{\gamma})] \supseteq \bigcap_{\gamma<\xi}[\text{Supp}(W^{i+1}{}_{\gamma})] \supseteq [\text{Supp}(E)]$, então : $[\text{Form}(E)] \cap [\text{Supp}(E)] \cap [C^{i+1}{}_{\xi}] = \emptyset$.

Uma vez que $\langle C^{i+1}{}_{\xi} : \{\beta_1, ..., \beta_k, C^{i+1}{}_{\xi}\} : \{\chi_1, ..., \chi_n, B^{i+1}{}_{\xi}\}\rangle \in E_{i+1} \subseteq E$, então devemos ter que $[\text{Form}(E)] \cap [\text{Supp}(E)] = \emptyset$. Portanto, este sistema **S** não provê E, e este conjunto não é uma PCDL-extensão. ◆

Seção 7

Para determinar a classe de modelos de uma extensão no sistema de Poole, podemos utilizar a caracterização definida por Dix's [19] através da lógica default de Reiter. Dix utilizou o seguinte mapeamento definido por Brewka [14] : $(F,\Delta,\mathcal{C}) \Rightarrow (W, \mathit{\Delta})$ com $W = F$ e $\mathit{\Delta} = \{(: K \wedge d \,/\, d) \,/\, d \in \Delta\}$, onde K é a conjunção de todos os elementos de $\mathcal{C}$, para provar o seguinte teorema :

Teorema C.7.1 (Dix [19])

Via $(F,\Delta,\mathcal{C}) \Rightarrow (W,\mathit{\Delta})$, as extensões de Poole de $(F,\Delta,\mathcal{C})$ são exatamente as mesmas extensões de teoria default clássica $(W,\mathit{\Delta})$.■

Definição 4.7.2

Seja $(F_0,\Delta,\mathcal{C})$ um tripla onde F_0 é um conjunto de fatos, Δ é um conjunto de hipóteses possíveis, e $\mathcal{C}$ é um conjunto de restrições. Seja Ξ_P o conjunto de todas as seqüências de hipóteses possíveis $<h_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ que definem sistemas de esferas como na definição 4.7.1. O conjunto Ξ_P pode ser parcialmente ordenado por $\leq_P$ definido como: $<h_1> \leq_P <h_2>$ se $<h_1>$ é o prefixo de $<h_2>$.

Dizemos que $<h_i> \in \Xi_P$ é uma seqüência maximal de hipóteses possíveis (com relação a $\leq_P$) em Δ se não existe nenhuma seqüência $<h_j> \in \Xi_P$ tal que $<h_i> \leq_P <h_j>$.■

Teorema 4.7.1

Seja (F_0,Δ,C) uma tripla, onde F_0 é um conjunto de fatos, Δ é um conjunto de hipóteses possíveis, e C é um conjunto de restrições. Então, qualquer sistema de esferas **S** construído a partir de (F_0,Δ,C), segundo a definição 4.7.2, satisfaz a condição de consistência. ■

Prova :

Considere (F_0,Δ,C) e $<h_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <h_1, ..., h_n, ...>$ uma seqüência (possivelmente infinita) de hipóteses possíveis em Δ. Seja **S** o sistema de esferas definido por $<h_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ segundo a definição 4.7.2.

Suponha que **S** não satisfaz a condição de consistência. Então, existe uma esfera $[F_\varsigma]$ do sistema **S**, tal que $[F_\varsigma] = \emptyset$. Pela construção de **S**, sabemos que existe uma hipótese h_ς que é P-aplicável a $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [F_\gamma]$ com respeito a $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[F_\gamma] \cap [C]$ e, conseqüentemente, a esfera $[F_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [F_\gamma] \cap [h_\varsigma]$.

Logo, $[F_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [F_\gamma] \cap [h_\varsigma] = \emptyset$. Isto contradiz a definição de aplicabilidade da hipótese possível h_ς a classe de modelos $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [F_\gamma]$ ($\bigcap_{\gamma<\varsigma}[F_\gamma] \cap [C] \cap [h_\varsigma] \neq \emptyset$).◆

Teorema 4.7.2

Seja (F_0,Δ,C) uma tripla onde F_0 é o conjunto de fatos, Δ é o conjunto de possíveis hipóteses, e C é um conjunto de restrições. Seja $<h_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal com respeito a $\leq_P$ de hipóteses possíveis em Δ que define o sistema de esferas **S** (como na definição 4.7.2). Então **S** provê uma extensão E de (F_0,Δ,C).■

Prova :

Dada uma tripla $(F_0,\Delta,\mathcal{C})$ no sistema de Poole, pelo teorema C.7.1 podemos construir uma teoria default clássica $(F_0,\varDelta)$ (via $(F_0,\Delta,\mathcal{C}) \Rightarrow (F_0,\varDelta)$) tal que as extensões de $(F_0,\Delta,\mathcal{C})$ são exatamente as extensões associadas a teoria default $(F_0,\varDelta)$, onde os defaults em $\varDelta$ são da forma $d'_j = (: K \wedge d_j/d_j)$, com K sendo a conjunção de todos os elementos de $\mathcal{C}$.

Tome $<h_1, h_2,...>$ como sendo uma seqüência maximal de hipóteses possíveis em Δ que define (definição 4.7.2) um sistema de esferas S centrado em $[\mathcal{F}] = \bigcap_{\varsigma \in I} [F_\varsigma]$ como o conjunto $\{M_L, [F_0], [F_1],...\}$tal que, para cada $\varsigma \in I$: $[F_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [F_\gamma] \cap [h_\varsigma]$.

Podemos transformar (via $\Rightarrow$) o conjunto $\{h_1, h_2,...\}$ no conjunto de defaults $\{d_1, d_2,...\}$ tal que $d_\varsigma = (: K \wedge h_\varsigma / h_\varsigma)$ para todo $\varsigma \in I$, onde K é a conjunção de todos os elementos de $\mathcal{C}$. Note que a partir deste conjunto de defaults podemos construir uma seqüência maximal defaults $<d'_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d'_1, d'_2,...>$ que define um sistema de esferas S' (igual a S) centrado em $[\mathcal{F}]$ como na definição 4.2.6 já que $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [F_\gamma] \cap [\mathcal{C}] \cap [h_\varsigma] \neq \varnothing$ é equivalente a $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [F_\gamma] \cap [K \wedge h_j] \neq \varnothing$. Logo, pelo teorema 4.2.5, $[\mathcal{F}]$ é a classe de modelos de uma extensão E de $(F_0,\varDelta)$ e, pelo teorema C.7.1, $[\mathcal{F}]$ é a classe de modelos de uma extensão E de $(F_0,\Delta,\mathcal{C})$.

Então S provê uma extensão E de $(F_0,\Delta,\mathcal{C})$. ◆

Teorema 4.7.3

Seja $(F_0,\Delta,\mathcal{C})$ uma tripla onde F_0 é o conjunto de fatos, Δ é o conjunto de possíveis hipóteses, e $\mathcal{C}$ é um conjunto de restrições. Seja $E = F_0 \cup \{h_1, ..., h_n,...\}$ uma extensão de $(F_0,\Delta,\mathcal{C})$, e $\mathcal{M}$ a classe de todos os modelos de E. O conjunto $\{h_1, ..., h_n,...\}$ pode ser colocado numa seqüência (possivelmente infinita) $<h_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que o sistema de esferas S definido por $<h_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 4.7.2) provê E. ■

Prova :

Dada a tripla $(F_0,\Delta,\mathcal{C})$ no sistema de Poole, pelo teorema C.7.1 podemos construir uma teoria default $(F_0,\varDelta)$ (via $(F_0,\Delta,\mathcal{C}) \Rightarrow (F_0,\varDelta)$) tal que as extensões de

(F_0,Δ,C) são exatamente as extensões da teoria default (F_0,Δ), onde os defaults em Δ são da forma $d'_j = (: K \wedge h_j/h_j)$.

Pelo teorema 4.2.6, se E é uma extensão da teoria default (F_0,Δ), então existirá uma seqüência maximal $<d'_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d'_1, d'_2,...>$ que define o sistema de esferas **S** como na definição 4.2.6, i.e. :

$S = \{M_L, [F_0], [F_1],...\}$, onde $[E] = \bigcap_{\varsigma \in I}[F_\varsigma]$ é o centro do sistema S, e para cada $\varsigma \in I$: $[F_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [F_\gamma] \cap [h_\varsigma]$ e $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [F_\gamma] \cap [K \wedge h_j] \neq \emptyset$.

Pelo teorema C.7.1, a extensão E de (F_0,Δ) é uma extensão de (F_0,Δ,C). Logo, a partir da seqüência $<d'_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d'_1, d'_2,...>$ podemos construir a seqüência $<h_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <h'_1, h'_2,...>$ onde para todo $\varsigma \in I$, h'_ς é o conseqüente do default $d'_\varsigma = (: K \wedge h_\varsigma/h_\varsigma)$. Esta seqüência define um sistema de esferas **S'** (igual a S) como na definição 4.7.2 uma vez que :

- $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [F_\gamma] \cap [K \wedge h_\varsigma] \neq \emptyset$ é equivalente a $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [F_\gamma] \cap [C] \cap [h'_\varsigma] \neq \emptyset$; e
- $[F_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [F_\gamma] \cap [h'_\varsigma]$.

e portanto $[\mathcal{F}] = [E] = M$. ◆

Seção 8

Teorema 4.8.4 (Lógicas default clássica e justificada)

Seja (W,Δ) uma teoria default, E uma de suas extensões (resp., uma *m*-extensão) e S um sistema de esferas centrado em [E] construido segundo a definição 4.2.6 (resp., definição 4.3.2). Seja $\mathfrak{M}$ a classe de todos os K-modelos. Então, existe uma seqüência $<\mathfrak{M}_i>_{i\in I}$ de subclasses não-vazias de $\mathfrak{M}$, obtida a partir de S, e tal que $\mathfrak{M}' = \cap_{i\in I} \mathfrak{M}_i$ é uma classe $>_\Delta$-maximal (resp., $\succ_\Delta$-maximal) não-vazia acima de $\mathfrak{M}$.■

Prova:

Lógica Default Clássica

Seja E uma extensão da teoria default (W,Δ) e $\mathbf{S} = \{M_L,[W_0], [W_1], ...\}$ um sistema de esferas onde $[W_0] = [W]$ e $[E] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma]$, gerado a partir da seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, d_2, ...>$, onde $d_\xi = A_\xi : B_\xi / C_\xi$, e tal que para todo $\xi \in I$, $[E] \cap [B_\xi] = \bigcap_{\varsigma \in I} [W_\varsigma] \cap [B_\xi] \neq \emptyset$ (a condição de estabilidade é satisfeita).

Seja $\mathfrak{M}$ a classe de todos os K-modelos $m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}>$, onde $\Omega = M_L$. A partir da seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, d_2, ...>$, podemos construir a seguinte ordenação dos K-modelos em $\mathfrak{M}$:

- Como $[W_0] \neq \emptyset$ (pela construção de S), para qualquer mundo $\omega_0 \in [W_0]$, temos que $\omega_0 \models W$. Logo, podemos construir uma classe $\mathfrak{M}'$ de K-modelos $m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}> \in \mathfrak{M}$, tais que $m \models W$, ou seja, $\mathfrak{M}' = \{m \in \mathfrak{M} / m \models W\} \neq \emptyset$.

  Considere então o seguinte conjunto de K-modelos $\mathfrak{M}_0 = \{m \in \mathfrak{M}' / m \models W \wedge \Box W\}$. Obviamente, $\mathfrak{M}_0 \subseteq \mathfrak{M}'$. Temos que mostrar que $\mathfrak{M}_0 \neq \emptyset$.

  Seja $\omega_0 \in [W_0]$, e defina R de modo que $(\omega_0, \omega) \in R$ se, e somente se, $\omega \models W_0$. Logo, $<\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}>$ é um K-modelo em $\mathfrak{M}_0$, e portanto, $\mathfrak{M}_0 \neq \emptyset$.

  Vamos agora construir os conjuntos $\mathfrak{M}_i$, para $i \in I$, utilizando o sistema de esferas S. Vamos fazer tal construção indutivamente :

- **Base :** Construção de $\mathfrak{M}_1 = \{m \in \mathfrak{M}_0 / m \models C_1 \wedge \Box C_1 \wedge \Diamond B_1\}$. Como $[W_1] = [W_0] \cap [C_1] \neq \emptyset$ (pela construção de S), podemos escolher um mundo $\omega_0 \in [W_1]$, o que representa que $\omega_0 \models W \wedge C_1$. Logo, podemos definir um conjunto de K-modelos $\mathfrak{M}_1' = \{m \in \mathfrak{M}_0 / m \models C_1\} \neq \emptyset$.

  Considere o conjunto de K-modelos $\mathfrak{M}_1 = \{m \in \mathfrak{M}_1' / m \models C_1 \wedge \Box C_1 \wedge \Diamond B_1\}$. Como $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_1'$, temos que mostrar que $\mathfrak{M}_1 \neq \emptyset$.

  Seja $\omega' \in [W_1]$. Observe que como $[E] \cap [B_i] \neq \emptyset$, para todo $i \in I$ e $[E] \subseteq [W_1]$, temos $[W_1] \cap [B_1] \neq \emptyset$. Então, considere $\omega'' \in [W_1] \cap [B_1]$.

  Considere o K-modelo $m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}>$ onde a relação R é definida por $\{(\omega_0,\omega'), (\omega_0,\omega'')\}$.Então, m é um K-modelo em $\mathfrak{M}_1$ e portanto, $\mathfrak{M}_1 \neq \emptyset$.

- **Passo de Indução :** Suponha que temos $\bigcap_{\gamma<\varsigma} \mathfrak{M}_\gamma$ e vamos construir $\mathfrak{M}_\varsigma$. Note que para todo $m \in \bigcap_{\gamma<\varsigma} \mathfrak{M}_\gamma$, $m \models C_\gamma \wedge \Box C_\gamma \wedge \Diamond B_\gamma$, onde $d_\gamma = A_\gamma : B_\gamma / C_\gamma$, para $\gamma < \varsigma$.

Como $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [C_\varsigma] \neq \varnothing$ (pela construção de S), podemos escolher um mundo $\omega_0 \in [W_\varsigma]$, o que representa que $\omega_0 \models W \wedge (\bigwedge_{\gamma\leq\varsigma} C_\gamma)$. Logo, podemos definir o conjunto de K-modelos $\mathfrak{M}_\varsigma' = \{m \in \bigcap_{\gamma<\varsigma} \mathfrak{M}_\gamma \ / \ m \models C_\varsigma\} \neq \varnothing$.

Considere o conjunto de K-modelos $\mathfrak{M}_\varsigma = \{m \in \mathfrak{M}_\varsigma' \ / \ m \models C_\varsigma \wedge \Box C_\varsigma \wedge \Diamond B_\varsigma\}$.

Como $\mathfrak{M}_\varsigma \subseteq \mathfrak{M}_\varsigma'$, temos que mostrar que $\mathfrak{M}_\varsigma \neq \varnothing$.

Seja $\omega' \in [W_\varsigma]$. Observe que como $[E] \cap [B_i] \neq \varnothing$, para todo $i \in I$ e $[E] \subseteq [W_\varsigma]$, temos $[W_\varsigma] \cap [B_\varsigma] \neq \varnothing$. Então, considere $\omega'' \in [W_\varsigma] \cap [B_\varsigma]$.

Considere o K-modelo $m = \langle\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}\rangle$ onde a relação R é definida por $\{(\omega_0,\omega'), (\omega_0,\omega'')\}$.Então, m é um K-modelo em $\mathfrak{M}_\varsigma$ e portanto, $\mathfrak{M}_\varsigma \neq \varnothing$.

Agora, temos que mostrar que, para todo $i \in I$:

1. $\mathfrak{M}_i \models A_{i+1}$
2. $\mathfrak{M}_i \not\models \Box\neg B_{i+1}$

A segunda condição já foi provada acima. Para provar a primeira, note que pela construção do sistema de esferas S, sabemos que para todo $i \in I$ a seguinte condição é satisfeita : $[W_i] \subseteq [A_{i+1}]$. Sabemos que para qualquer $\omega_0 \in [W_i]$, $\omega_0 \models A_{i+1}$. Logo, para todo $m = \langle\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}\rangle \in \mathfrak{M}_i$, $m \models A_{i+1}$, ou seja, $\mathfrak{M}_i \models A_{i+1}$.

Observe que $\mathfrak{M} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{M}_i$ é uma classe $>_\Delta$-maximal não-vazia acima de $\mathfrak{M}$, uma vez que a seqüência de defaults utilizada na construção do sistema de esferas S, e conseqüentemente nas subclasse $\mathfrak{M}_i$, é maximal.

Lógica Default Justificada

Seja E uma m-extensão da teoria default (W,Δ) e $S = \{M_L,[W_0], [W_1], ...\}$ um sistema de esferas onde $[W_0] = [W]$ e $[E] = \bigcap_{\varsigma\in I} [W_\varsigma]$, gerado a partir da seqüência de defaults $\langle d_\varsigma\rangle_{\varsigma\in I} = \langle d_1, d_2, ...\rangle$, onde $d_\xi = A_\xi : B_\xi / C_\xi$, e tal que para todo $\xi \in I$, $[W_\xi] \cap [B_j] \neq \varnothing$, para cada $j \leq \xi$.

Seja $\mathfrak{M}$ a classe de todos os K-modelos $m = \langle\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}\rangle$, onde $\Omega = M_L$. A partir da seqüência de defaults $\langle d_\varsigma\rangle_{\varsigma\in I} = \langle d_1, d_2, ...\rangle$, podemos construir a seguinte ordenação dos K-modelos em $\mathfrak{M}$:

- $\mathfrak{M}_0 = \{m \in \mathfrak{M}' \,/\, m \models W \wedge \Box W\} \neq \emptyset$: Análogo ao caso acima (lógica default clássica).

Vamos agora construir os conjuntos $\mathfrak{M}_i$, para $i \in I$, utilizando o sistema de esferas S. Vamos fazer tal construção indutivamente :

- **Base :** Construção de $\mathfrak{M}_1 = \{m \in \mathfrak{M}_0 \,/\, m \models C_1 \wedge \Box C_1 \wedge \Diamond B_1\}$. Como $[W_1] = [W_0] \cap [C_1] \neq \emptyset$ (pela construção de S), podemos escolher um mundo $\omega_0 \in [W_1]$, o que representa que $\omega_0 \models W \wedge C_1$. Logo, podemos definir um conjunto de K-modelos $\mathfrak{M}_1' = \{m \in \mathfrak{M}_0 \,/\, m \models C_1\} \neq \emptyset$.

Considere o conjunto de K-modelos $\mathfrak{M}_1 = \{m \in \mathfrak{M}_1' \,/\, m \models C_1 \wedge \Box C_1 \wedge \Diamond B_1\}$. Como $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_1'$, temos que mostrar que $\mathfrak{M}_1 \neq \emptyset$.

Seja $\omega' \in [W_1]$. Observe que como para todo $\xi \in I$, $[W_\xi] \cap [B_j] \neq \emptyset$, para cada $j \leq \xi$, temos $[W_1] \cap [B_1] \neq \emptyset$. Então, considere $\omega'' \in [W_1] \cap [B_1]$.
Considere o K-modelo $m = \langle \omega_0, \Omega, R, \mathcal{P} \rangle$ onde a relação R é definida por $\{(\omega_0,\omega'), (\omega_0,\omega'')\}$.Então, m é um K-modelo em $\mathfrak{M}_1$ e portanto, $\mathfrak{M}_1 \neq \emptyset$.

- **Passo de Indução :** Suponha que temos $\bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma$ e vamos construir $\mathfrak{M}_\varsigma$. Note que para todo $m \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma$, $m \models C_\gamma \wedge \Box C_\gamma \wedge \Diamond B_\gamma$, onde $d_\gamma = A_\gamma : B_\gamma / C_\gamma$, para $\gamma < \varsigma$.

Como $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [C_\varsigma] \neq \emptyset$ (pela construção de S), podemos escolher um mundo $\omega_0 \in [W_\varsigma]$, o que representa que $\omega_0 \models W \wedge (\bigwedge_{\gamma\leq\varsigma} C_\gamma)$. Logo, podemos definir o conjunto de K-modelos $\mathfrak{M}_\varsigma' = \{m \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma \,/\, m \models C_\varsigma\} \neq \emptyset$.

Considere o conjunto de K-modelos $\mathfrak{M}_\varsigma = \{m \in \mathfrak{M}_\varsigma' \,/\, m \models C_\varsigma \wedge \Box C_\varsigma \wedge \Diamond B_\varsigma\}$. Como $\mathfrak{M}_\varsigma \subseteq \mathfrak{M}_\varsigma'$, temos que mostrar que $\mathfrak{M}_\varsigma \neq \emptyset$.

Seja $\omega' \in [W_\varsigma]$. Observe que como para todo $\xi \in I$, $[W_\xi] \cap [B_j] \neq \emptyset$, para cada $j \leq \xi$, temos que $[W_\varsigma] \cap [B_\varsigma] \neq \emptyset$. Então, considere $\omega'' \in [W_\varsigma] \cap [B_\varsigma]$.
Considere o K-modelo $m = \langle \omega_0, \Omega, R, \mathcal{P} \rangle$ onde a relação R é definida por $\{(\omega_0,\omega'), (\omega_0,\omega'')\}$. Então, m é um K-modelo em $\mathfrak{M}_\varsigma$ e portanto, $\mathfrak{M}_\varsigma \neq \emptyset$.

A demonstração de que, para todo $i \in I$:

1. $\mathfrak{M}_i \models A_{i+1}$

2. $\mathcal{M}_i \not\models \Box\neg B_{i+1} \vee \Diamond\neg C_{i+1}$

é análoga a prova anterior.

Observe que $\mathcal{M} = \bigcap_{i\in I} \mathcal{M}_i$ é uma classe $>_\Delta$-maximal não-vazia acima de $\mathcal{M}$, uma vez que a seqüência de defaults utilizada na construção do sistema de esferas **S**, e conseqüentemente nas subclasse $\mathcal{M}_i$, é maximal. ◆

Teorema 4.8.5 (Lógicas default clássica e justificada)

Seja (W,Δ) uma teoria default, E uma de suas extensões (resp., *m*-extensões) e $\mathcal{M}'$ uma classe $>_\Delta$-maximal (resp., $>_\Delta$-maximal) não-vazia acima de $\mathcal{M}_W$ tal que $\mathcal{M}' = \{m \,/\, m \models E \wedge \Box E \wedge \Diamond C_E\}$ (resp., $\mathcal{M}' = \{m \,/\, m \models E \wedge \Box E \wedge \Diamond C_{(E,J)}\}$). Então, existe um sistema de esferas **S** = $\{M_L,[W_0], [W_1],...\}$ centrado em $\bigcap_{\varsigma\in I} [W_\varsigma] = [E]$, definido como na definição 4.2.6 (resp., definição 4.3.2), e tal que **S** satisfaz a condição de estabilidade (resp., a condição de consistência). ■

Prova :

Lógica Default Clássica

Seja E uma extensão da teoria default (W,Δ), $\mathcal{M}$ a classe de todos os K-modelos $m = \langle\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}\rangle$, onde $\Omega = M_L$, e $\mathcal{M}'$ uma classe $>_\Delta$-maximal não-vazia acima de $\mathcal{M}_W$ tal que $\mathcal{M}' = \{m \,/\, m \models E \wedge \Box E \wedge \Diamond C_E\}$. Então existe uma seqüência de defaults $\langle d_\varsigma\rangle_{\varsigma\in I} = \langle d_1, d_2, ...\rangle$ que define uma seqüência de classes não-vazias de K-modelos $\langle\mathcal{M}_\varsigma\rangle_{\varsigma\in I}$ tal que $\mathcal{M}_\varsigma >_{d_\varsigma} \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathcal{M}_\gamma$ para todo $\varsigma \in I$, e $\mathcal{M}' = \bigcap_{\varsigma\in I} \mathcal{M}_\varsigma$, onde :

$$\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_W = \{m \in \mathcal{M} \,/\, m \models W \wedge \Box W\}, \text{ e}$$

$$\mathcal{M}_\varsigma = \{m \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathcal{M}_\gamma \,/\, m \models C_\varsigma \wedge \Box C_\varsigma \wedge \Diamond B_\varsigma\}, \text{ onde } d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma \,/\, C_\varsigma.$$

Para todo $\varsigma \in I$, defina $[W_\varsigma] = \{\omega \,/\, \omega = \omega_0$ ou $(\omega_0,\omega) \in R$, para algum $m = \langle\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}\rangle \in \mathcal{M}_\varsigma\}$. Vamos mostrar que os conjuntos $[W_\varsigma]$ formam um sistema de esferas como na definição 4.2.6.

- Considere a primeira esfera do nosso sistema $M_L = \Omega$.

Cosidere $\mathfrak{M}_0 = \{m \in \mathfrak{M} \,/\, m \models W \wedge \Box W\} \neq \emptyset$. Logo, por definição, $[W_0] = \{\omega \,/\, \omega = \omega_0$ ou $(\omega_0,\omega) \in R$, para algum $m = \langle\omega_0,\Omega,R,\mathcal{I}\rangle \in \mathfrak{M}_0\}$. Devemos mostrar que $[W_0] = [W]$.

Note que, para todo $\omega_0 \in [W]$, $\langle\omega_0,\Omega,\{(\omega_0,\omega_0)\},\mathcal{I}\rangle$ é um K-modelo pertencente a $\mathfrak{M}_0$. Logo, $[W] \subseteq [W_0]$. Além disso, por definição, se $\omega_0 \in [W_0]$, $\omega_0 \models W$. Logo, $[W_0] = [W]$.

Para construir o resto do sistema de esferas, utilizando a seqüência de defaults $\langle d_\varsigma\rangle_{\varsigma \in I} = \langle d_1, d_2, \ldots\rangle$, faremos o seguinte processo de indução :

- **Base :**

Considere a classe $\mathfrak{M}_1 = \{m \in \mathfrak{M}_0 \,/\, m \models C_1 \wedge \Box C_1 \wedge \Diamond B_1\} \neq \emptyset$, onde $d_1 = A_1 : B_1 / C_1$. Logo, por definição, $[W_1] = \{\omega \,/\, \omega = \omega_0$ ou $(\omega_0,\omega) \in R$, para algum $m = \langle\omega_0,\Omega,R,\mathcal{I}\rangle \in \mathfrak{M}_1\}$. Devemos mostrar que $[W_1] = [W_0] \cap [C_1]$.

Se $\omega \in [W_1]$, então :

(a) $\omega = \omega_0$ de algum $m = \langle\omega_0,\Omega,R,\mathcal{I}\rangle \in \mathfrak{M}_1$, ou seja, $\omega_0 \models C_1 \wedge \Box C_1 \wedge \Diamond B_1$, e portanto, $\omega \models C_1$ e $\omega \models W$; ou

(b) $(\omega_0,\omega) \in R$, para algum $m = \langle\omega_0,\Omega,R,\mathcal{I}\rangle \in \mathfrak{M}_1$. Neste caso, $\omega \models C_1$ e $\omega_0 \models \Box C_1$.

Como $m \in \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_0$, $\omega_0 \models W \wedge \Box W$, ou seja, $\omega \models W$.

Assim, $\omega \models C_1$ e $\omega \models W$ e portanto, $\omega \in [W_0] \cap [C_1]$.

Logo, para todo $\omega \in [W_1]$, $\omega \in [W_0] \cap [C_1]$.

Se $\omega \in [W_0] \cap [C_1]$, devemos mostrar que existe $m \in \mathfrak{M}_1$ tal que ω é o mundo corrente de m ou $(\omega_0,\omega) \in R$, onde ω_0 é o mundo corrente de m. Como $\mathfrak{M}_1 \neq \emptyset$, tome $m_1 = \langle\omega_0,\Omega,R,\mathcal{I}\rangle \in \mathfrak{M}_1$. Por definição, $\omega_0 \models C_1 \wedge \Box C_1 \wedge \Diamond B_1$, ou seja, existe ω_1 tal que $(\omega_0,\omega_1) \in R$ e $\omega_1 \models C_1 \wedge B_1$.

Defina $R' = \{(\omega,\omega_1)\}$ e $\mathcal{I}'$ como sendo : $\mathcal{I}'_\omega = \omega$ e $\mathcal{I}'_{\omega'} = \mathcal{I}_{\omega'}$, para todo $\omega' \in \Omega - \{\omega\}$. Então $\langle\omega,\Omega,R',\mathcal{I}'\rangle \in \mathfrak{M}_1$. Logo, $\omega \in [W_1]$.

Portanto, $[W_1] = [W_0] \cap [C_1]$.

Sabemos que $\mathcal{M}_1 >_{d1} \mathcal{M}_0$ e assim temos :

(a) $\mathcal{M}_0 \models A_1$ e (b) $\mathcal{M}_0 \not\models \Box\neg B_1$.

De (a) : $\forall\, m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{P}> \in \mathcal{M}_0$, $\omega_0 \models A_1$. Então $[W_0] \subseteq [A_1]$.

De (b) : $\exists\, m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{P}> \in \mathcal{M}_0$, $\omega_0 \models \Diamond B_1$, ou seja, existe ω tal que $(\omega_0,\omega) \in R$, onde $\omega \models B_1$. Como $\omega \in [W_0]$, temos $[W_0] \cap [B_1] \neq \emptyset$.

- **Passo de Indução :**

Suponha que tenhamos construído as esferas $[W_\gamma]$, para todo $\gamma < \varsigma$, do nosso sistema. Vamos mostrar que a esfera $[W_\varsigma]$, construída segundo a definição acima satisfaz as condições da definição 4.2.6.

Considere a classe $\mathcal{M}_\varsigma = \{m \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathcal{M}_\gamma \,/\, m \models C_\varsigma \wedge \Box C_\varsigma \wedge \Diamond B_\varsigma\} \neq \emptyset$, onde $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma$. Logo, por definição, $[W_\varsigma] = \{\omega \,/\, \omega = \omega_0$ ou $(\omega_0,\omega) \in R$, para algum $m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{P}> \in \mathcal{M}_\varsigma\}$. Devemos mostrar que $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$.

Se $\omega \in [W_\varsigma]$, então :

(a) $\omega = \omega_0$ de algum $m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{P}> \in \mathcal{M}_\varsigma$, ou seja, $\omega_0 \models C_\varsigma \wedge \Box C_\varsigma \wedge \Diamond B_\varsigma$, e portanto, $\omega \models C_\varsigma$ e $\omega \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma]$; ou

(b) $(\omega_0,\omega) \in R$, para algum $m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{P}> \in \mathcal{M}_\varsigma$. Neste caso, $\omega \models C_\varsigma$ e $\omega_0 \models \Box C_\varsigma$.

Como $m \in \mathcal{M}_\varsigma \subseteq \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathcal{M}_\gamma$, então $\omega_0 \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma]$ e $\omega \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma]$.

Portanto, $\omega \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$.

Logo, $[W_\varsigma] \subseteq \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$.

Se $\omega \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$, devemos mostrar que existe $m \in \mathcal{M}_\varsigma$ tal que ω é o mundo corrente de m ou $(\omega_0,\omega) \in R$, onde ω_0 é o mundo corrente de m. Como $\mathcal{M}_\varsigma \neq \emptyset$, tome $m_\varsigma = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{P}> \in \mathcal{M}_\varsigma$. Por definição, $\omega_0 \models C_\varsigma \wedge \Box C_\varsigma \wedge \Diamond B_\varsigma$, ou seja, existe ω_ς tal que $(\omega_0,\omega_\varsigma) \in R$ e $\omega_\varsigma \models C_\varsigma \wedge B_\varsigma$.

Defina R' = $\{(\omega,\omega_\varsigma)\}$ e ϑ' como sendo : $\vartheta'_\omega = \omega$ e $\vartheta'_{\omega'} = \vartheta_{\omega'}$, para todo $\omega' \in \Omega - \{\omega\}$. Então $<\omega,\Omega,R',\vartheta'> \in \mathfrak{M}_\varsigma$. Logo, $\omega \in [W_\varsigma]$.

Portanto, $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$.

Sabemos que $\mathfrak{M}_\varsigma >_{d_\varsigma} \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma$ e assim temos :

$$\text{(a)}\ \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma \models A_\varsigma \quad \text{e} \quad \text{(b)}\ \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma \not\models \Box\neg B_\varsigma.$$

De (a) : $\forall\, m = <\omega_0,\Omega,R,\vartheta> \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma$, $\omega_0 \models A_\varsigma$. Então $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \subseteq [A_\varsigma]$.

De (b) : $\exists\, m = <\omega_0,\Omega,R,\vartheta> \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma$, $\omega_0 \models \Diamond B_\varsigma$, ou seja, existe ω tal que $(\omega_0,\omega) \in R$, onde $\omega \models B_\varsigma$. Como $\omega \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma]$, temos $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [B_\varsigma] \neq \emptyset$.

Logo, podemos construir um sistema de esferas **S** = $\{M_L,[W_0],[W_1],...\}$ centrado em $\bigcap_{\varsigma\in I}[W_\varsigma]$ e definido pela seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma\in I} = <d_1, d_2, ...>$, segundo a definição 4.2.6. Como $\mathfrak{M}'$ é uma classe $>_\Delta$-maximal não-vazia acima de $\mathfrak{M}_W$, a seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma\in I}$ é uma seqüência maximal que gera o sistema de esferas como desejado.

Falta mostrar apenas que a condição de estabilidade é satisfeita. Sabemos que : $\mathfrak{M}' = \{m\ /\ m \models E \wedge \Box E \wedge \Diamond C_E\} = \bigcap_{\varsigma\in I}\mathfrak{M}_\varsigma$. Logo, $[E] = \bigcap_{\varsigma\in I}[W_\varsigma] = \{\omega\ /\ \omega = \omega_0$ ou $(\omega_0,\omega) \in R$, para algum $m = <\omega_0,\Omega,R,\vartheta> \in \mathfrak{M}'\}$.

Observe que, para todo $m = <\omega_0,\Omega,R,\vartheta> \in \mathfrak{M}'$, $m \models \Diamond C_E$, ou seja, $\omega_0 \models \Diamond C_E$, e portanto, existe ω tal que $(\omega_0,\omega) \in R$ e $\omega \models C_E$, onde C_E é o conjunto formado pelas justificativas dos defaults da seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma\in I}$.

Como $\omega \in [E]$, isto significa que para todo $B \in C_E$, $[E] \cap [B] \neq \emptyset$, satisfazendo a condição de estabilidade.

Lógica Default Justificada

Seja E uma *m*-extensão da teoria default (W,Δ), $\mathfrak{M}$ a classe de todos os K-modelos $m = <\omega_0,\Omega,R,\vartheta>$, onde $\Omega = M_L$, e $\mathfrak{M}'$ uma classe $>_\Delta$-maximal não-vazia acima de $\mathfrak{M}_W$ tal que $\mathfrak{M}' = \{m\ /\ m \models E \wedge \Box E \wedge \Diamond C_{(E,J)}\}$. Então existe uma seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, d_2, ...>$ que define uma seqüência de classes não-vazias de K-modelos $<\mathfrak{M}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que $\mathfrak{M}_\varsigma >_{d_\varsigma} \bigcap_{\gamma<\varsigma} \mathfrak{M}_\gamma$ para todo $\varsigma \in I$, e $\mathfrak{M}' = \bigcap_{\varsigma \in I} \mathfrak{M}_\varsigma$, onde :

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_W = \{m \in \mathfrak{M} \,/\, m \models W \wedge \Box W\}, \text{ e}$$

$$\mathfrak{M}_\varsigma = \{m \in \bigcap_{\gamma<\varsigma} \mathfrak{M}_\gamma \,/\, m \models C_\varsigma \wedge \Box C_\varsigma \wedge \Diamond B_\varsigma\}, \text{ onde } d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma.$$

Para todo $\varsigma \in I$, defina $[W_\varsigma] = \{\omega \,/\, \omega = \omega_0$ ou $(\omega_0,\omega) \in R$, para algum $m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}> \in \mathfrak{M}_\varsigma\}$. Vamos mostrar que os conjuntos $[W_\varsigma]$ formam um sistema de esferas como na definição 4.3.2.

- As esferas M_L e $[W_0]$ são construídas como no caso da lógica default clássica.

Para construir o resto do sistema de esferas, utilizando a seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, d_2, ...>$, faremos o seguinte processo de indução :

- **Base :**

Considere a classe $\mathfrak{M}_1 = \{m \in \mathfrak{M}_0 \,/\, m \models C_1 \wedge \Box C_1 \wedge \Diamond B_1\} \neq \varnothing$, onde $d_1 = A_1 : B_1 / C_1$. Logo, por definição, $[W_1] = \{\omega \,/\, \omega = \omega_0$ ou $(\omega_0,\omega) \in R$, para algum $m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}> \in \mathfrak{M}_1\}$. Devemos mostrar que $[W_1] = [W_0] \cap [C_1]$.

Se $\omega \in [W_1]$, então :

(a) $\omega = \omega_0$ de algum $m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}> \in \mathfrak{M}_1$, ou seja, $\omega_0 \models C_1 \wedge \Box C_1 \wedge \Diamond B_1$, e portanto, $\omega \models C_1$ e $\omega \models W$; ou

(b) $(\omega_0,\omega) \in R$, para algum $m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}> \in \mathfrak{M}_1$. Neste caso, $\omega \models C_1$ e $\omega_0 \models \Box C_1$.

Como $m \in \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_0$, $\omega_0 \models W \wedge \Box W$, ou seja, $\omega \models W$.

Assim, $\omega \models C_1$ e $\omega \models W$ e portanto, $\omega \in [W_0] \cap [C_1]$.

Logo, para todo $\omega \in [W_1]$, $\omega \in [W_0] \cap [C_1]$.

Se $\omega \in [W_0] \cap [C_1]$, devemos mostrar que existe $m \in \mathfrak{M}_1$ tal que ω é o mundo corrente de m ou $(\omega_0,\omega) \in R$, onde ω_0 é o mundo corrente de m. Como $\mathfrak{M}_1 \neq \varnothing$, tome $m_1 = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}> \in \mathfrak{M}_1$. Por definição, $\omega_0 \models C_1 \wedge \Box C_1 \wedge \Diamond B_1$, ou seja, existe ω_1 tal que $(\omega_0,\omega_1) \in R$ e $\omega_1 \models C_1 \wedge B_1$.

Defina R' = {(ω,ω₁)} e $\mathcal{V}'$ como sendo : $\mathcal{V}'_\omega = \omega$ e $\mathcal{V}'_{\omega'} = \mathcal{V}_{\omega'}$, para todo ω' ∈ Ω - {ω}. Então $<\omega,\Omega,R',\mathcal{V}'> \in \mathfrak{M}_1$. Logo, ω ∈ [$W_1$].

Portanto, $[W_1] = [W_0] \cap [C_1]$.

Sabemos que $\mathfrak{M}_1 >_{d1} \mathfrak{M}_0$ e assim temos :

$$\text{(a) } \mathfrak{M}_0 \models A_1 \quad \text{e} \quad \text{(b) } \mathfrak{M}_0 \not\models \Box\neg B_1 \vee \Diamond\neg C_1.$$

De (a) : $\forall\, m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}> \in \mathfrak{M}_0$, $\omega_0 \models A_1$. Então $[W_0] \subseteq [A_1]$.

De (b) : $\exists\, m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}> \in \mathfrak{M}_0$, $\omega_0 \models \Diamond B_1 \wedge \Box C_1$, ou seja, existe ω tal que $(\omega_0,\omega) \in R$, onde $\omega \models B_1$ e para todo ω' tal que $(\omega_0,\omega') \in R$, onde $\omega' \models C_1$. Em particular, temos que para ω = ω', $\omega \models C_1$. Logo, $[W_0] \cap [C_1] \cap [B_1] \neq \varnothing$, uma vez que $\omega \in [W_0]$.

- **Passo de Indução :**

Suponha que tenhamos construído as esferas $[W_\gamma]$, para todo $\gamma < \varsigma$, do nosso sistema. Vamos mostrar que a esfera $[W_\varsigma]$, construída segundo a definição acima satisfaz as condições da definição 4.3.2.

Considere a classe $\mathfrak{M}_\varsigma = \{m \in \bigcap_{\gamma<\varsigma} \mathfrak{M}_\gamma \ / \ m \models C_\varsigma \wedge \Box C_\varsigma \wedge \Diamond B_\varsigma\} \neq \varnothing$, onde $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma$. Logo, por definição, $[W_\varsigma] = \{\omega \ / \ \omega = \omega_0$ ou $(\omega_0,\omega) \in R$, para algum $m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}> \in \mathfrak{M}_\varsigma\}$. Devemos mostrar que $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$.

Se $\omega \in [W_\varsigma]$, então :

(a) $\omega = \omega_0$ de algum $m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}> \in \mathfrak{M}_\varsigma$, ou seja, $\omega_0 \models C_\varsigma \wedge \Box C_\varsigma \wedge \Diamond B_\varsigma$, e portanto, $\omega \models C_\varsigma$ e $\omega \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma]$; ou

(b) $(\omega_0,\omega) \in R$, para algum $m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}> \in \mathfrak{M}_\varsigma$. Neste caso, $\omega \models C_\varsigma$ e $\omega_0 \models \Box C_\varsigma$.

Como $m \in \mathfrak{M}_\varsigma \subseteq \bigcap_{\gamma<\varsigma} \mathfrak{M}_\gamma$, então $\omega_0 \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma]$ e $\omega \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma]$.

Portanto, $\omega \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$.

Logo, $[W_\varsigma] \subseteq \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$.

Se $\omega \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$, devemos mostrar que existe $m \in \mathfrak{M}_\varsigma$ tal que ω é o mundo corrente de m ou $(\omega_0,\omega) \in R$, onde ω_0 é o mundo corrente de m. Como $\mathfrak{M}_\varsigma \neq \varnothing$, tome $m_\varsigma = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{I}> \in \mathfrak{M}_\varsigma$. Por definição, $\omega_0 \models C_\varsigma \wedge \Box C_\varsigma \wedge \Diamond B_\varsigma$, ou seja, existe ω_ς tal que $(\omega_0,\omega_\varsigma) \in R$ e $\omega_\varsigma \models C_\varsigma \wedge B_\varsigma$.

Defina $R' = \{(\omega,\omega_\varsigma)\}$ e $\mathcal{I}'$ como sendo : $\mathcal{I}'_\omega = \omega$ e $\mathcal{I}'_{\omega'} = \mathcal{I}_{\omega'}$, para todo $\omega' \in \Omega - \{\omega\}$. Então $<\omega,\Omega,R',\mathcal{I}'> \in \mathfrak{M}_\varsigma$. Logo, $\omega \in [W_\varsigma]$.

Portanto, $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$.

Sabemos que $\mathfrak{M}_\varsigma >_{d_\varsigma} \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma$ e assim temos :

(a) $\bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma \models A_\varsigma$ e (b) $\bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma \not\models \Box\neg B_\varsigma \vee \Diamond\neg C_\varsigma$.

De (a) : $\forall\, m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{I}> \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma$, $\omega_0 \models A_\varsigma$. Então $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \subseteq [A_\varsigma]$.

De (b) : $\exists\, m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{I}> \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma$, $\omega_0 \models \Diamond B_\varsigma \wedge \Box C_\varsigma$, ou seja, existe ω tal que $(\omega_0,\omega) \in R$, onde $\omega \models B_\varsigma$ e para todo ω' tal que $(\omega_0,\omega') \in R$, onde $\omega' \models C_\varsigma$. Em particular, temos que para $\omega = \omega'$, $\omega \models C_\varsigma$. Logo, $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [C_\varsigma] \cap [B_\varsigma] \neq \varnothing$, uma vez que $\omega \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma]$. Além disso, para todo $\gamma < \varsigma$, $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [C_\varsigma] \cap [B_\gamma] \neq \varnothing$, uma vez que para todo $m \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma]$, $m \models \Diamond B_\gamma$.

Logo, podemos construir um sistema de esferas **S** = $\{M_L,[W_0],[W_1],...\}$ centrado em $\bigcap_{\varsigma\in I}[W_\varsigma]$ e definido pela seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma\in I} = <d_1, d_2, ...>$, segundo a definição 4.3.1. Como $\mathfrak{M}'$ é uma classe $>_\Delta$-maximal não-vazia acima de $\mathfrak{M}_W$, a seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma\in I}$ é uma seqüência maximal que gera o sistema de esferas como desejado. ◆

Teorema 4.8.6 (Lógica default restrita)

Seja (W,Δ) uma teoria default, (E,Θ) uma de suas extensões restritas e **S** um sistema de esferas centrado em $[E]$ construido segundo a definição 4.4.2. Seja $\mathfrak{M}$ a classe de todos os K-modelos. Então, existe uma seqüência $<\mathfrak{M}_i>_{i\in I}$ de subclasses não-vazias de $\mathfrak{M}$, obtida a partir de S, e tal que $\mathfrak{M}' = \cap_{i\in I} \mathfrak{M}_i$ é uma classe $\succ_\Delta$-maximal acima de $\mathfrak{M}$.■

Prova:

Seja (E,Θ) uma extensão da teoria default (W,Δ) e **S** = {M_L,[W_0], [W_1], ...} um sistema de esferas onde [W_0] = [W] e [E] = $\bigcap_{\varsigma\in I}$ [W_ς], gerado a partir da seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma\in I} = <d_1,d_2,...>$, onde $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma$, com J_ς = {JUST(d_γ) / $\gamma < \varsigma$} e tal que [E] ∩ [$\mathcal{J}$] = [Θ] ≠ ∅, onde $\mathcal{J}$ = {JUST(d) / d faz parte da seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma\in I}$ }.

Seja $\mathfrak{M}$ a classe de todos os K-modelos m = $<\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}>$, onde Ω = M_L. A partir da seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma\in I} = <d_1,d_2,...>$, podemos construir a seguinte ordenação dos K-modelos em $\mathfrak{M}$:

- $\mathfrak{M}_0$ = {m ∈ $\mathfrak{M}'$ / m ⊨ W ∧ □W} ≠ ∅ : Análogo ao teorema 4.8.4.

  Vamos agora construir os conjuntos $\mathfrak{M}_i$, para i ∈ I, utilizando o sistema de esferas S. Vamos fazer tal construção indutivamente :

- **Base :** Construção de $\mathfrak{M}_1$ = {m ∈ $\mathfrak{M}_0$ / m ⊨ C_1 ∧ □(C_1 ∧ B_1)}. Como [W_1] = [W_0] ∩ [C_1] ≠ ∅ (pela construção de S), podemos escolher um mundo ω_0 ∈ [W_1], o que representa que ω_0 ⊨ W ∧ C_1. Logo, podemos definir um conjunto de K-modelos $\mathfrak{M}_1'$ = {m ∈ $\mathfrak{M}_0$ / m ⊨ C_1} ≠ ∅.

  Considere o conjunto de K-modelos $\mathfrak{M}_1$ = {m ∈ $\mathfrak{M}_1'$ / m ⊨ C_1 ∧ □(C_1 ∧ B_1)}. Como $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_1'$, temos que mostrar que $\mathfrak{M}_1$ ≠ ∅.

  Observe que como [E] ∩ [$\mathcal{J}$] ≠ ∅, temos [W_0] ∩ [J_0] ∩ [B_1 ∧ C_1] ≠ ∅.

  Seja ω_0 ∈ [W_1], e defina R de modo que (ω_0,ω) ∈ R se, e somente se, ω ∈ [W_0] ∩ [J_0] ∩ [B_1 ∧ C_1]. Logo, *m* = $<\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}>$ é um K-modelo em $\mathfrak{M}_1$ e portanto, $\mathfrak{M}_1$ ≠ ∅.

- **Passo de Indução :** Suponha que temos $\bigcap_{\gamma<\varsigma} \mathfrak{M}_\gamma$ e vamos construir $\mathfrak{M}_\varsigma$. Note que para todo *m* ∈ $\bigcap_{\gamma<\varsigma} \mathfrak{M}_\gamma$, *m* ⊨ C_γ ∧ □(C_γ ∧ B_γ), onde $d_\gamma = A_\gamma : B_\gamma / C_\gamma$, para $\gamma < \varsigma$.

Como $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [C_\varsigma] \neq \emptyset$ (pela construção de S), podemos escolher um mundo $\omega_0 \in [W_\varsigma]$, o que representa que $\omega_0 \models W \wedge (\bigwedge_{\gamma\leq\varsigma} C_\gamma)$. Logo, podemos definir o conjunto de K-modelos $\mathfrak{M}_\varsigma' = \{m \in \bigcap_{\gamma<\varsigma} \mathfrak{M}_\gamma \ / \ m \models C_\varsigma\} \neq \emptyset$.

Considere o conjunto de K-modelos $\mathfrak{M}_\varsigma = \{m \in \mathfrak{M}_\varsigma' \ / \ m \models C_\varsigma \wedge \Box(C_\varsigma \wedge B_\varsigma)\}$.

Como $\mathfrak{M}_\varsigma \subseteq \mathfrak{M}_\varsigma'$, temos que mostrar que $\mathfrak{M}_\varsigma \neq \emptyset$.

Observe que como $[E] \cap [\mathcal{J}] \neq \emptyset$, temos $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [J_\varsigma] \cap [B_\varsigma \wedge C_\varsigma] \neq \emptyset$.

Seja $\omega_0 \in [W_\varsigma]$, e defina R de modo que $(\omega_0,\omega) \in R$ se, e somente se, $\omega \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [J_\varsigma] \cap [B_\varsigma \wedge C_\varsigma]$. Logo, $m = \langle\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}\rangle$ é um K-modelo em $\mathfrak{M}_\varsigma$ e portanto, $\mathfrak{M}_\varsigma \neq \emptyset$.

A demosntração de que, para todo $i \in I$:

1. $\mathfrak{M}_i \models A_{i+1}$
2. $\mathfrak{M}_i \not\models \Box\neg(C_{i+1} \wedge B_{i+1})$

é análoga ao teorema 4.8.4.

Observe que $\mathfrak{M} = \bigcap_{i\in I} \mathfrak{M}_i$ é uma classe $\succ_\Delta$-maximal não-vazia acima de $\mathfrak{M}$, uma vez que a seqüência de defaults utilizada na construção do sistema de esferas S, e conseqüentemente nas subclasse $\mathfrak{M}_i$, é maximal. ●

Teorema 4.8.7 (Lógicas default restrita)

Seja (W,Δ) uma teoria default, (E,Θ) uma de suas extensões restritas e $\mathfrak{M}$ uma classe $\succ_\Delta$-maximal acima de $\mathfrak{M}_W$ tal que $\mathfrak{M} = \{m \ / \ m \models E \wedge \Box\Theta\}$. Então, existe um sistema de esferas $S = \{M_L,[W_0], [W_1],...\}$ centrado em $\bigcap_{\varsigma\in I} [W_\varsigma] = [E]$, definido como na definição 4.4.2 e tal que $(\bigcap_{\varsigma\in I} [W_\varsigma], \bigcap_{\varsigma\in I} [W_\varsigma] \cap [\mathcal{J}]) = ([E],[\Theta])$, onde $\mathcal{J}$ é o conjunto de justificativas dos defaults utilizados na construção de S. ■

Prova :

Seja (E,Θ) uma extensão restrita da teoria default (W,Δ), $\mathfrak{M}$ a classe de todos os K-modelos $m = \langle\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}\rangle$, onde $\Omega = M_L$, e $\mathfrak{M}'$ uma classe $\succ_\Delta$-maximal não-vazia acima de $\mathfrak{M}_W$ tal que $\mathfrak{M}' = \{m \ / \ m \models E \wedge \Box\Theta\}$. Então existe uma seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, d_2, ...>$ que define uma seqüência de classes não-vazias de K-modelos $<\mathfrak{M}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que $\mathfrak{M}_\varsigma \succ_{d_\varsigma} \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma$ para todo $\varsigma \in I$, e $\mathfrak{M}' = \bigcap_{\varsigma\in I} \mathfrak{M}_\varsigma$, onde :

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}_W = \{m \in \mathfrak{M} \ / \ m \models W \wedge \Box W\}, \text{ e}$$

$$\mathfrak{M}_\varsigma = \{m \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma \ / \ m \models C_\varsigma \wedge \Box C_\varsigma \wedge \Box B_\varsigma\}, \text{ onde } d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma \ / \ C_\varsigma.$$

Para todo $\varsigma \in I$, defina $[W_\varsigma] = \{\omega \ / \ \omega = \omega_0$ ou $(\omega_0,\omega) \in R$, para algum $m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}> \in \mathfrak{M}_\varsigma\}$. Vamos mostrar que os conjuntos $[W_\varsigma]$ formam um sistema de esferas como na definição 4.4.2.

- As esferas M_L e $[W_0]$ são construídas como no caso da lógica default clássica e da lógica default justificada (teorema 4.8.5).

Para construir o resto do sistema de esferas, utilizando a seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, d_2, ...>$, faremos o seguinte processo de indução :

- **Base :**

Considere a classe $\mathfrak{M}_1 = \{m \in \mathfrak{M}_0 \ / \ m \models C_1 \wedge \Box C_1 \wedge \Box B_1\} \neq \varnothing$, onde $d_1 = A_1 : B_1 / C_1$. Logo, por definição, $[W_1] = \{\omega \ / \ \omega = \omega_0$ ou $(\omega_0,\omega) \in R$, para algum $m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}> \in \mathfrak{M}_1\}$ e $J_1 = \varnothing$ (conjunto de justificativas de defaults utilizados na construção da esfera $[W_0]$). Devemos mostrar que $[W_1] = [W_0] \cap [C_1]$.

Se $\omega \in [W_1]$, então :

(a) $\omega = \omega_0$ de algum $m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}> \in \mathfrak{M}_1$, ou seja, $\omega_0 \models C_1 \wedge \Box C_1 \wedge \Box B_1$, e portanto, $\omega \models C_1$ e $\omega \models W$; ou

(b) $(\omega_0,\omega) \in R$, para algum $m = <\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}> \in \mathfrak{M}_1$. Neste caso, $\omega \models C_1$ e $\omega_0 \models \Box C_1$.

Como $m \in \mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_0$, $\omega_0 \models W \wedge \Box W$, ou seja, $\omega \models W$.

Assim, $\omega \models C_1$ e $\omega \models W$ e portanto, $\omega \in [W_0] \cap [C_1]$.

Logo, para todo $\omega \in [W_1]$, $\omega \in [W_0] \cap [C_1]$.

Se $\omega \in [W_0] \cap [C_1]$, devemos mostrar que existe $m \in \mathfrak{M}_1$ tal que ω é o mundo corrente de m ou $(\omega_0,\omega) \in R$, onde ω_0 é o mundo corrente de m. Como $\mathfrak{M}_1 \neq \varnothing$, tome

$m_1 = \langle\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}\rangle \in \mathfrak{M}_1$. Por definição, $\omega_0 \models C_1 \wedge \Box C_1 \wedge \Box B_1$, ou seja, para todo ω_1 tal que $(\omega_0,\omega_1) \in R$ e $\omega_1 \models C_1 \wedge B_1$.

Defina $R' = \{(\omega,\omega_1)\}$ e $\mathcal{V}'$ como sendo : $\mathcal{V}'_\omega = \omega$ e $\mathcal{V}'_{\omega'} = \mathcal{V}_{\omega'}$, para todo $\omega' \in \Omega - \{\omega\}$. Então $\langle\omega,\Omega,R',\mathcal{V}'\rangle \in \mathfrak{M}_1$. Logo, $\omega \in [W_1]$.

Portanto, $[W_1] = [W_0] \cap [C_1]$.

Sabemos que $\mathfrak{M}_1 \succ_{d1} \mathfrak{M}_0$ e assim temos :

(a) $\mathfrak{M}_0 \models A_1$ e (b) $\mathfrak{M}_0 \not\models \Box\neg(B_1 \wedge C_1)$.

De (a) : $\forall\, m = \langle\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}\rangle \in \mathfrak{M}_0$, $\omega_0 \models A_1$. Então $[W_0] \subseteq [A_1]$.

De (b) : $\exists\, m = \langle\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}\rangle \in \mathfrak{M}_0$, $\omega_0 \models \Diamond(B_1 \wedge C_1)$, ou seja, existe ω tal que $(\omega_0,\omega) \in R$, onde $\omega \models (B_1 \wedge C_1)$.Como $\omega \in [W_0]$, temos que $[W_0] \cap [J_1] \cap [B_1 \wedge C_1] \neq \varnothing$.

- **Passo de Indução :**

Suponha que tenhamos construído as esferas $[W_\gamma]$, para todo $\gamma < \varsigma$, do nosso sistema. Vamos mostrar que a esfera $[W_\varsigma]$, construída segundo a definição acima satisfaz as condições da definição 4.4.2.

Considere a classe $\mathfrak{M}_\varsigma = \{m \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma \;/\; m \models C_\varsigma \wedge \Box C_\varsigma \wedge \Box B_\varsigma\} \neq \varnothing$, onde $d_\varsigma = A_\varsigma : B_\varsigma / C_\varsigma$. Logo, por definição, $[W_\varsigma] = \{\omega \,/\, \omega = \omega_0$ ou $(\omega_0,\omega) \in R$, para algum $m = \langle\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}\rangle \in \mathfrak{M}_\varsigma\}$ e $J_\varsigma = \{JUST(d_\gamma) \,/\, \gamma < \varsigma\}$ (conjunto de justificativas de defaults utilizados na construção da esfera $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma]$). Devemos mostrar que $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$.

Se $\omega \in [W_\varsigma]$, então :

(a) $\omega = \omega_0$ de algum $m = \langle\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}\rangle \in \mathfrak{M}_\varsigma$, ou seja, $\omega_0 \models C_\varsigma \wedge \Box C_\varsigma \wedge \Box B_\varsigma$, e portanto, $\omega \models C_\varsigma$ e $\omega \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma]$; ou

(b) $(\omega_0,\omega) \in R$, para algum $m = \langle\omega_0,\Omega,R,\mathcal{V}\rangle \in \mathfrak{M}_\varsigma$. Neste caso, $\omega \models C_\varsigma$ e $\omega_0 \models \Box C_\varsigma$.

Como $m \in \mathfrak{M}_\varsigma \subseteq \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma$, então $\omega_0 \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma]$ e $\omega \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma]$.

Portanto, $\omega \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$.

Logo, $[W_\varsigma] \subseteq \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$.

Se $\omega \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$, devemos mostrar que existe $m \in \mathfrak{M}_\varsigma$ tal que ω é o mundo corrente de m ou $(\omega_0,\omega) \in R$, onde ω_0 é o mundo corrente de m. Como $\mathfrak{M}_\varsigma \neq \emptyset$, tome $m_\varsigma = <\omega_0,\Omega,R,\vartheta> \in \mathfrak{M}_\varsigma$. Por definição, $\omega_0 \models C_\varsigma \wedge \Box C_\varsigma \wedge \Box B_\varsigma$, ou seja, para todo ω_ς tal que $(\omega_0,\omega_\varsigma) \in R$ e $\omega_\varsigma \models C_\varsigma \wedge B_\varsigma$.

Defina $R' = \{(\omega,\omega_\varsigma)\}$ e ϑ' como sendo : $\vartheta'_\omega = \omega$ e $\vartheta'_{\omega'} = \vartheta_{\omega'}$, para todo $\omega' \in \Omega - \{\omega\}$. Então $<\omega,\Omega,R',\vartheta'> \in \mathfrak{M}_\varsigma$. Logo, $\omega \in [W_\varsigma]$.

Portanto, $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [C_\varsigma]$.

Sabemos que $\mathfrak{M}_\varsigma \succ_{d_\varsigma} \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma$ e assim temos :

(a) $\bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma \models A_\varsigma$ e (b) $\bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma \not\models \Box\neg(B_\varsigma \wedge C_\varsigma)$.

De (a) : $\forall\, m = <\omega_0,\Omega,R,\vartheta> \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma$, $\omega_0 \models A_\varsigma$. Então $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \subseteq [A_\varsigma]$.

De (b) : $\exists\, m = <\omega_0,\Omega,R,\vartheta> \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}\mathfrak{M}_\gamma$, $\omega_0 \models \Diamond(B_\varsigma \wedge C_\varsigma)$, ou seja, existe ω tal que $(\omega_0,\omega) \in R$, onde $\omega \models B_\varsigma \wedge C_\varsigma$. Como $\omega \in \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma]$, temos que $(\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma]) \cap [J_\varsigma] \cap [B_\varsigma \wedge C_\varsigma] \neq \emptyset$.

Logo, podemos construir um sistema de esferas $\mathbf{S} = \{M_L,[W_0],[W_1],...\}$ centrado em $\bigcap_{\varsigma\in I} [W_\varsigma]$ e definido pela seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} = <d_1, d_2, ...>$, segundo a definição 4.4.2. Como $\mathfrak{M}'$ é uma classe $\succ_\Delta$-maximal não-vazia acima de $\mathfrak{M}_W$, a seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é uma seqüência maximal que gera o sistema de esferas como desejado. ◆

Apêndice D

Provas dos Teoremas do Capítulo 5

Para demostrar os teoremas do capítulo 5, utilizaremos a relação existente entre a classe de modelos de um dado programa em lógica com a classe de modelos da teoria default obtidas a partir deste programa. Para definir a interpretação de um programa em lógica dentro do ambiente da lógica default, um dado programa deve ser traduzido para uma teoria default. Marek e Truszczynski [45] sugeriram três formas de fazê-lo :

a) Como as cláusulas são interpretadas aqui como regras de inferência, elas podem ser traduzidas diretamente em regras default. Assim, dada uma cláusula da forma

$$A \leftarrow B_1 , \dots , B_m , \mathbf{not}(C_1), \dots, \mathbf{not}(C_n),$$

ela deve ser traduzida para a regra default :

$$(B_1 \wedge \dots \wedge B_m : \neg C_1, \dots, \neg C_n / A) ;$$

b) Na segunda forma de tradução, as cláusulas também são diretamente traduzidas para regras default, sendo que, ao invés de traduzir a parte positiva do corpo de cada cláusula como o pré-requisito do default, ela é traduzida como antecedente da implicação no conseqüente do default. Ou seja, dada uma cláusula da forma

$$A \leftarrow B_1 , \dots , B_m , \mathbf{not}(C_1), \dots, \mathbf{not}(C_n),$$

ela é traduzida para a regra default :

$$(: \neg C_1, \dots, \neg C_n / B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow A) ;$$

c) Na terceira forma, as cláusulas de Horn que compõem um certo programa são traduzidas como implicações enquanto os outros tipos de cláusulas são traduzidos como no ítem (a) acima. Então, se C é uma cláusula da forma :

$$A \leftarrow B_1 , \dots , B_m,$$

ela é traduzida como :

$$B_1 \wedge \dots \wedge B_m \rightarrow A ;$$

caso contrário, ela é traduzida como em (a).

Formalmente :

Definição D.3.1 (Marek e Truszczynski [45])

Seja $\mathbf{P}$ um programa em lógica. Para $i \in [1,3]$, defina $TC_i(\mathbf{P}) = (W_i(\mathbf{P}),\Delta_i(\mathbf{P}))$ como sendo a teoria default correspondente a $\mathbf{P}$,onde :

I. $W_1(\mathbf{P}) = \emptyset$ e $\Delta_1(\mathbf{P}) = \{(B_1 \wedge ... \wedge B_m : \neg C_1, ..., \neg C_n / A)$ tal que $A \leftarrow B_1, ..., B_m,$ $\mathbf{not}(C_1), ..., \mathbf{not}(C_n) \in \mathbf{P}\}$;

II. $W_2(\mathbf{P}) = \emptyset$ e $\Delta_2(\mathbf{P}) = \{(: \neg C_1, ..., \neg C_n / B_1 \wedge ... \wedge B_m \rightarrow A)$ tal que $A \leftarrow B_1, ...,$ $B_m, \mathbf{not}(C_1), ..., \mathbf{not}(C_n) \in \mathbf{P}\}$;

III. $W_3(\mathbf{P}) = \{B_1 \wedge ... \wedge B_m \rightarrow A$ tal que $A \leftarrow B_1, ..., B_m \in \mathbf{P}\}$ e $\Delta_3(\mathbf{P}) = \{(B_1 \wedge ... \wedge B_m$ $: \neg C_1, ..., \neg C_n / A)$ tal que $A \leftarrow B_1, ..., B_m, \mathbf{not}(C_1), ..., \mathbf{not}(C_n) \in \mathbf{P}$, onde $n \neq 0\}$.■

Como foi mostrado em [45], tais interpretações são equivalentes uma vez que todas refletem propriedades dos modelos estáveis para programas em lógica. Portanto, sem perda de generalidade, vamos nos fixar na tradução $TC_3(\mathbf{P}) = (W_3(\mathbf{P}),\Delta_3(\mathbf{P}))$.

Como conseqüência do estabelecido no capítulo 4 e da definição D.3.1, podemos caracterizar os modelos de um programa em lógica através de um sistema de esferas. A tradução será utilizada na demonstração dos teoremas deste capítulo.

Para demonstrar os teoremas 5.3.1 e 5.3.2 abaixo, utilizaremos os seguintes resultados :

Teorema D.3.1 (Marek e Truszczynski [45])

Seja $\mathbf{P}$ um programa em lógica.Um conjunto $M \subseteq B_H$ é um modelo estável de $\mathbf{P}$ se, e somente se, existe uma extensão E de $TR_3(\mathbf{P})$ tal que $M = E \cap B_H$.■

Lema D.3.1

Seja $\mathbf{P}$ um programa em lógica, $P_o = \{A \leftarrow B_1 ,..., B_m \in$ *ground*$(\mathbf{P})$ e $m \geq 0\}$, e $TR_3(\mathbf{P}) = (W_3(\mathbf{P}),\Delta_3(\mathbf{P}))$ como sendo a teoria default correspondente a $\mathbf{P}$.

A seqüência de cláusulas $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, onde para todo $\varsigma \in I$, $c_\varsigma \in$ *ground*$(\mathbf{P}) \setminus P_o$, define um sistema de esferas S como na definição 5.3.2 se, e somente se, a seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ em $\Delta_3(\mathbf{P})$, correspondente a $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, define um sistema de esferas S' como na definição 4.2.6. Os sistemas de esferas S e S' são iguais. ■

Prova :

($\Rightarrow$) Seja $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência de cláusulas, onde para todo $\varsigma \in I$, $c_\varsigma \in ground(\mathbf{P}) \setminus P_o$; e seja **S** o sistema de esferas definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, onde para cada $\varsigma \in I$, $[P_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \cap [A]$ se $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \subseteq [B_l]$, $\forall l \in [1,m]$ e $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \cap [\neg C_h] \neq \varnothing$, $\forall h \in [1,n]$.

Pela definição D.3.1, a cada cláusula $\mathbf{C} = A \leftarrow B_1 ,..., B_m$, **not**$(C_1)$, ..., **not**$(C_n) \in ground(\mathbf{P})\setminus P_o$, existe um default $d = (B_1 ,..., B_m : \neg C_1, ..., \neg C_n/A) \in \Delta_3(\mathbf{P})$. Logo, a cada seqüência $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, existe uma seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ correspondente a $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$.

A seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ define um sistema de esferas **S'**, igual ao sistema de esferas **S** gerado por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, uma vez que, por indução :

- **Base de Indução :** $W_o = W_3(\mathbf{P})$. Logo : $[W_o] = [W_3(\mathbf{P})] = [P_o]$
- **Passo de Indução :** Suponha que $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma]$.

Seja $d_\varsigma = (B_{\varsigma,1} ,..., B_{\varsigma,m} : \neg C_{\varsigma,1}, ..., \neg C_{\varsigma,n}/A_\varsigma) \in <d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, como :

- $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \subseteq [B_{\varsigma,l}]$, $\forall l \in [1,m]$, e portanto :

$\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \subseteq [B_{\varsigma,l}]$, $\forall l \in [1,m]$, e

- $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \cap [\neg C_{\varsigma,h}] \neq \varnothing$, $\forall h \in [1,n]$, e portanto :

$\bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [\neg C_{\varsigma,h}] \neq \varnothing$, $\forall h \in [1,n]$;

então : $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [W_\gamma] \cap [A_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \cap [A_\varsigma] = [P_\varsigma]$.

($\Leftarrow$) Análogo a primeira parte.◆

Como conseqüência do lema acima, obtemos :

Corolário D.3.1

Seja $\mathbf{P}$ um programa em lógica, $\zeta_{\mathbf{P}}$ o conjunto de todas as seqüências de cláusulas básicas $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ que definem sistemas de esferas como na definição 5.3.2, e a relação de ordem parcial $\leq_{\mathbf{P}}$ (definição 5.3.3).

Seja $TR_3(\mathbf{P}) = (W_3(\mathbf{P}),\Delta_3(\mathbf{P}))$ a teoria default correspondente a $\mathbf{P}$, obtida segundo a definição D.3.1 acima, Ξ_R o conjunto de todas as seqüências de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ que definem sistemas de esferas como na definição 4.2.6, e a relação de ordem parcial $\leq_R$ (definição 4.2.9).

A seqüência $<\mathscr{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I} \in \zeta_P$ é maximal com respeito a $\leq_P$ se, e somente se, a seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} \in \Xi_R$ é maximal com respeito a $\leq_R$. ■

Prova :

($\Rightarrow$) Seja $<\mathscr{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I} \in \zeta_P$ uma seqüência maximal com respeito a $\leq_P$. Seja $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} \in \Xi_R$ a seqüência de defaults correspondente a $<\mathscr{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, ou seja, obtida segundo a definição D.3.1. Suponha que $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ não é maximal com respeito a $\leq_R$. Então, existe uma seqüência de default $<d> \in \Xi_R$ tal que $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} \leq_R <d>$ e $<d>$ define o sistema de esferas S'.

Pelo lema D.3.1, existe uma seqüência de cláusulas $<\mathscr{C}> \in \zeta_P$ correspondente a $<d>$ que define o mesmo sistema de esferas S'. Obviamente, $<\mathscr{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é o prefixo de $<\mathscr{C}>$, e portanto, $<\mathscr{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I} \leq_P <\mathscr{C}>$, o que contradiz a hipótese de que $<\mathscr{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é maximal entre as seqüências de cláusulas que definem sistemas de esferas .

($\Leftarrow$) Análogo a primeira parte. ◆

Teorema 5.3.1

Seja $\mathbf{P}$ um programa em lógica e $P_o = \{A \leftarrow B_1 ,..., B_m \in ground(\mathbf{P})$ e $m \geq 0\}$.

Seja $<\mathscr{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal com respeito a $\leq_P$ de cláusulas em $ground(\mathbf{P}) \setminus P_o$ que define o sistema de esferas **S** (como na definição 5.3.2). Se, para cada $\varsigma \in I$, $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \neq \varnothing$ e c_ς satisfaz o teste de consistência com respeito a $[\mathcal{P}]$ então $M = \{a \in B_H : \forall N \in [\mathcal{P}], N \models a\}$ é um ***modelo estável*** de $\mathbf{P}$. ■

Prova :

Dado o programa $\mathbf{P}$, seja $TR_3(\mathbf{P}) = (W_3(\mathbf{P}),\Delta_3(\mathbf{P}))$ a teoria default correspondente a $\mathbf{P}$. Como conseqüência do lema D.3.1 e do corolário D.3.1, a partir da seqüência maximal $<\mathscr{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ podemos construir o sistema de esferas **S** gerado pela seqüência maximal de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ para $TR_3(\mathbf{P})$. Pela definição 4.2.6 e pelo teorema 4.2.5, se para todo $\varsigma \in I$, $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \neq \varnothing$ e $\bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] \cap [\neg C_h] = \bigcap_{\varsigma \in I} [P_\varsigma] \cap [\neg C_h] \neq \varnothing$ para todo $\neg C_h$ (resp., $\mathbf{not}(C_h)$) que aparece como justificativa em algum default de

$<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (resp., em alguma cláusula de $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$), então $\bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] = \bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma]$ é a classe de modelos de uma extensão de $TR_3(\mathbf{P})$.

Pelo teorema D.3.1, $M = \bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma] \cap B_H$ é um modelo estável de $\mathbf{P}$. ●

Teorema 5.3.2

Seja $\mathbf{P}$ um programa em lógica, M um modelo estável de $\mathbf{P}$, $P_o = \{A \leftarrow B_1, \ldots, B_m \in$ *ground*$(\mathbf{P})$ e $m \geq 0\}$ e *CLAUS* o conjunto de cláusulas básicas obtido a partir de M. As cláusulas em *CLAUS* podem ser colocados em uma seqüência (possivelmente infinita) $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que para o sistema de esferas S definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 5.3.2) temos que, para todo $\varsigma \in I$, $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \neq \emptyset$, c_ς satisfaz o teste de consistência com respeito a $[\mathcal{P}]$ e, para todo $a \in M$, temos que $N \models a$, $\forall N \in [\mathcal{P}]$, onde $[\mathcal{P}]$ é o centro do sistema S. ■

Prova :

Dado o programa $\mathbf{P}$, seja $TR_3(\mathbf{P}) = (W_3(\mathbf{P}),\Delta_3(\mathbf{P}))$ a teoria default correspondente a $\mathbf{P}$, obtida segundo a definição D.3.1. Então, como M é um modelo estável de $\mathbf{P}$, pelo teorema D.3.1, existe uma extensão E de $TR_3(\mathbf{P})$ tal que $M = E \cap B_H$. Conseqüentemente, o conjunto de cláusulas *CLAUS* correponde ao conjunto de defaults geradores de E (GD(E, $(W_3(\mathbf{P}),\Delta_3(\mathbf{P}))$)).

Pelo teorema 4.2.6, os defaults geradores de E (GD(E, $(W_3(\mathbf{P}),\Delta_3(\mathbf{P}))$)) podem ser colocados em uma seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ de maneira que ela define um sistema de esferas S como na definição 4.2.6 tal que para todo $\varsigma \in I$: $[W_\varsigma] \neq \emptyset$, $\bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] \cap [\neg C_h] \neq \emptyset$, para todo $\neg C_h$ que é a justificativa de algum default em GD(E, $(W_3(\mathbf{P}),\Delta_3(\mathbf{P}))$), e $M = \bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] \cap B_H$.

Sabemos (conseqüência do lema D.3.1 e do corolário D.3.1) que existe uma seqüência de cláusulas $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ em *CLAUS* correspondente a $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, que gera um sistema de esferas igual a S,e que atende a definição 5.3.2. Portanto, para todo $\varsigma \in I$: $[P_\varsigma] \neq \emptyset$, $\bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma] \cap [\neg C_h] \neq \emptyset$, para todo **not**$(C_h)$ que aparece em alguma cláusula de $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, e para todo $a \in M$ temos que $N \models a$, $\forall N \in \bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma]$. ●

Para demonstrar os teoremas 5.3.3 e 5.3.4, referentes a caracterização da classe de modelos suportados de um programa em lógica, utilizaremos os seguintes resultados, semelhantes aos obtidos acima :

Definição D.3.2

Seja $\mathbf{P}$ um programa em lógica e $\zeta^{S}_{\mathbf{P}}$ o conjunto de todas as seqüência de cláusulas básicas $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ que definem sistemas de esferas como na definição 5.3.5. O conjunto $\zeta^{S}_{\mathbf{P}}$ pode ser parcialmente ordenado por $\leq^{S}_{\mathbf{P}}$ definida como: $<\mathcal{C}_1> \leq^{S}_{\mathbf{P}} <\mathcal{C}_2>$ se $<\mathcal{C}_1>$ é o prefixo de $<\mathcal{C}_2>$.

Dizemos que $<\mathcal{C}_i> \in \zeta^{S}_{\mathbf{P}}$ é uma seqüência maximal (com respeito a $\leq^{S}_{\mathbf{P}}$) de cláusulas em $\mathbf{P}$ se não existe seqüência $<\mathcal{C}_j> \in \zeta^{S}_{\mathbf{P}}$ tal que $<\mathcal{C}_i> \leq^{S}_{\mathbf{P}} <\mathcal{C}_j>$. ■

Teorema D.3.2 (Marek e Truszczynski [45])

Seja $\mathbf{P}$ um programa em lógica.Um conjunto $M \subseteq B_H$ é um modelo suportado de $\mathbf{P}$ se, e somente se, existe uma extensão fraca E de $TR_3(\mathbf{P})$ tal que $M = E \cap B_H$. ■

Lema D.3.2

Seja $\mathbf{P}$ um programa em lógica, $P_o = \{A \leftarrow B_1, \ldots, B_m \in$ *ground*$(\mathbf{P})$ e $m \geq 0\}$, e $TR_3(\mathbf{P}) = (W_3(\mathbf{P}), \Delta_3(\mathbf{P}))$ como sendo a teoria default correspondente a $\mathbf{P}$, obtida segundo a definição D.3.1.

A seqüência de cláusulas $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, onde para todo $\varsigma \in I$, $c_\varsigma \in$ *ground*$(\mathbf{P}) \setminus P_o$, define um sistema de esferas **S** como na definição 5.3.5 se, e somente se, a seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ em $\Delta_3(\mathbf{P})$, correspondente a $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, define um sistema de esferas **S'** como na definição 4.2.11. Os sistemas de esferas **S** e **S'** são iguais. ■

Prova :

A demonstração deste lema é semelhante ao lema D.3.1 :

($\Rightarrow$) Seja $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência de cláusulas, onde para todo $\varsigma \in I$, $c_\varsigma \in$ *ground*$(\mathbf{P}) \setminus P_o$, e seja **S** o sistema de esferas definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, onde para todo

$\varsigma \in I$, $[P_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \cap [A]$ se $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \cap [B_l] \neq \emptyset$, $\forall l \in [1,m]$ e $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \cap [\neg C_h] \neq \emptyset$, $\forall h \in [1,n]$.

Pela definição D.3.1, a cada cláusula $\mathbb{C} = A \leftarrow B_1, \ldots, B_m$, **not**$(C_1)$, ..., **not**$(C_n) \in$ *ground*($\mathbb{P}$)\$P_o$, existe um default $d = (Q_1, \ldots, Q_m : \neg C_1, \ldots, \neg C_n / A) \in \Delta_3(\mathbb{P})$. Logo, a cada seqüência $<\mathscr{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, existe uma seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ correspondente a $<\mathscr{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$.

A seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ define o sistema de esferas S', igual ao sistema de esferas S gerado por $<\mathscr{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, uma vez que, por indução :

- **Base de Indução :** $W_o = W_3(\mathbb{P})$. Logo : $[W_o] = [W_3(\mathbb{P})] = [P_o]$
- **Passo de Indução :** Suponha que $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma]$.

Seja $d_\varsigma = (B_{\varsigma,1}, \ldots, B_{\varsigma,m} : \neg C_{\varsigma,1}, \ldots, \neg C_{\varsigma,n} / A_\varsigma) \in <d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$. Como :

- $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \cap [B_{\varsigma,l}] \neq \emptyset$, $\forall l \in [1,m]$, temos :

$\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [B_{\varsigma,l}] \neq \emptyset$, $\forall l \in [1,m]$, e

- $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \cap [\neg C_{\varsigma,h}] \neq \emptyset$, $\forall h \in [1,n]$, temos :

$\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [\neg C_{\varsigma,h}] \neq \emptyset$, $\forall h \in [1,n]$;

então : $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [A_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \cap [A_\varsigma] = [P_\varsigma]$.

($\Leftarrow$) Análogo a primeira parte. ●

Como conseqüência do lema anterior, obtemos :

Corolário D.3.2

Seja $\mathbb{P}$ um programa em lógica, $\zeta^S_{\mathbb{P}}$ o conjunto de todas as seqüências de cláusulas básicas $<\mathscr{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ que definem sistemas de esferas como na definição 5.3.5, e a relação de ordem parcial $\leq^S_{\mathbb{P}}$ (definição D.3.2).

Seja $TR_3(\mathbb{P}) = (W_3(\mathbb{P}), \Delta_3(\mathbb{P}))$ a teoria default correspondente a $\mathbb{P}$, obtida segundo a definição D.3.1, Ξ_{Rf} o conjunto de todas as seqüências de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ que definem sistemas de esferas como na definição 4.2.11, e a relação de ordem parcial $\leq_{Rf}$ (definição 4.2.14).

A seqüência $<\mathscr{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I} \in \zeta^S_{\mathbb{P}}$ é maximal com respeito a $\leq^S_{\mathbb{P}}$ se, e somente se, a seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} \in \Xi_{Rf}$ é maximal com respeito a $\leq_{Rf}$. ■

Prova :

($\Rightarrow$) Seja $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I} \in \zeta^S_P$ uma seqüência maximal com respeito a $\leq^S_P$. Seja $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} \in \Xi_{Rf}$ a seqüência de defaults correspondente a $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, ou seja, obtida segundo a definição D.3.1. Suponha que $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ não é maximal com respeito a $\leq_{Rf}$. Então, existe uma seqüência de default $<d> \in \Xi_{Rf}$ tal que $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} \leq_{Rf} <d>$ e $<d>$ define o sistema de esferas **S'**.

Pelo lema D.3.2, existe uma seqüência de cláusulas $<\mathcal{C}> \in \zeta^S_P$ correspondente a $<d>$ que define o mesmo sistema de esferas **S'**. Obviamente, $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é o prefixo de $<\mathcal{C}>$, e portanto, $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I} \leq^S_P <\mathcal{C}>$, o que contradiz a hipótese de que $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é maximal entre as seqüências de cláusulas que definem sistemas de esferas.

($\Leftarrow$) Análogo a primeira parte. ◆

Teorema 5.3.3

Seja P um programa em lógica e $P_o = \{A \leftarrow B_1, ..., B_m \in ground(P) \text{ e } m \geq 0\}$.

Seja $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal de cláusulas em *ground*(P) \ P_o que define o sistema de esferas **S** (como na definição 5.3.5). Se, para todo $\varsigma \in I$, $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \neq \emptyset$, $[\mathcal{P}] \subseteq [A_\varsigma]$ e c_ς satisfaz o teste de consistência com respeito a $[\mathcal{P}]$, então $M = \{a \in B_H\colon \forall N \in [\mathcal{P}], N \models a\}$ é um ***modelo suportado*** de P.■

Prova :

Dado o programa P, seja $TR_3(P) = (W_3(P), \Delta_3(P))$ a teoria default correspondente a P. Como conseqüência do lema D.3.2 e do corolário D.3.2, a partir da seqüência maximal $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ podemos construir um sistema de esferas **S** gerado pela seqüência maximal de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ para $TR_3(P)$, igual ao sistema gerado por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ para *ground*(P). Pelo teorema 4.2.8, se para todo $\varsigma \in I$, $[W_\varsigma] = [P_\varsigma] \neq \emptyset$, $\bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] = [\mathcal{P}] \subseteq [B_l]$, para todo B_l que é pré-requisito de algum default em $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ e $\bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] \cap [\neg C_h] = [\mathcal{P}] \cap [\neg C_h] \neq \emptyset$ para todo $\neg C_h$ (resp., **not**(C_h)) que aparece como justificativa em algum default de $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (resp., em alguma cláusula de $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$), então $\bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] = [\mathcal{P}]$ é a classe de modelos de uma extensão de $TR_3(P)$.

Pelo teorema D.3.2, $M = [\mathcal{P}] \cap B_H$ é um modelo suportado de $\mathbf{P}$. ◆

Teorema 5.3.4

Seja $\mathbf{P}$ um programa em lógica, M um modelo suportado de $\mathbf{P}$, $P_o = \{A \leftarrow B_1, ..., B_m \in ground(\mathbf{P})$ e $m \geq 0\}$ e $\mathcal{CLAUS}$ o conjunto de cláusulas básicas obtido a partir de M. As cláusulas em $\mathcal{CLAUS}$ podem ser colocadas em uma seqüência (possivelmente infinita) $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que para o sistema de esferas **S** definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 5.3.5) temos que, para todo $\varsigma \in I$, $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \neq \emptyset$, $[\mathcal{P}] \subseteq [A_\varsigma]$ e c_ς satisfaz o teste de consistência com respeito a $[\mathcal{P}]$ e, para todo $a \in M$ temos que $N \models a$, $\forall N \in [\mathcal{P}]$, onde $[\mathcal{P}]$ é o centro do sistema **S**. ■

Prova :

Dado o programa $\mathbf{P}$, seja $TR_3(\mathbf{P}) = (W_3(\mathbf{P}), \Delta_3(\mathbf{P}))$ a teoria default correspondente a $\mathbf{P}$, obtida segundo a definição D.3.1. Então, como M é um modelo suportado de $\mathbf{P}$, pelo teorema D.3.2, existe uma extensão fraca E de $TR_3(\mathbf{P})$ tal que $M = E \cap B_H$. Conseqüentemente, o conjunto de cláusulas $\mathcal{CLAUS}$ correponde ao conjunto de defaults geradores de E $(GD(E, (W_3(\mathbf{P}), \Delta_3(\mathbf{P}))))$.

Pelo teorema 4.2.9, os defaults geradores de E $(GD(E, (W_3(\mathbf{P}), \Delta_3(\mathbf{P}))))$ podem ser colocados em uma seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ de maneira que ela define um sistema de esferas **S** como na definição 4.2.11 tal que para todo $\varsigma \in I$: $[W_\varsigma] \neq \emptyset$, $\bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] \subseteq [B_l]$, para todo B_l que é o pré-requisito de algum default em $GD(E, (W_3(\mathbf{P}), \Delta_3(\mathbf{P})))$, $\bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] \cap [\neg C_h] \neq \emptyset$, para todo $\neg C_h$ que é a justificativa de algum default em $GD(E, (W_3(\mathbf{P}), \Delta_3(\mathbf{P})))$, e $M = \bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] \cap B_H$.

Sabemos (conseqüência do lema D.3.2 e do corolário D.3.2) que existe uma seqüência de cláusulas $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ em $\mathcal{CLAUS}$ correspondente a $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, que gera um sistema de esferas igual a **S**, e que atende a definição 5.3.5. Portanto, para todo $\varsigma \in I$: $[P_\varsigma] \neq \emptyset$, $\bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma] \subseteq [B_l]$ e $\bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma] \cap [\neg C_h] \neq \emptyset$, para todo B_l e **not**(C_h) que aparecem em alguma cláusula de $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, e para todo $a \in M$ temos que $N \models a$, $\forall N \in \bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma]$. ●

No caso de programas localmente estratificados, vamos utilizar a tradução $TR_1(\mathbf{P})$ de um programa $\mathbf{P}$ para a teoria default $(W_1(\mathbf{P}),\Delta_1(\mathbf{P}))$ (definição D.3.1), onde :

$W_1(\mathbf{P}) = \varnothing$ e

$\Delta_1(\mathbf{P}) = \{(B_1 \wedge ... \wedge B_m : \neg C_1, ..., \neg C_n / A)$ tal que

$A \leftarrow B_1, ..., B_m, \mathbf{not}(C_1), ..., \mathbf{not}(C_n) \in \mathbf{P}\}$;

Temos agora que definir a noção de estratificação para teorias default :

Definição D.3.3 (Bidoit e Froidevaux [5])

Uma teoria default fechada $TR_1(\mathbf{P}) = (W_1(\mathbf{P}),\Delta_1(\mathbf{P}))$ associada a um programa $\mathbf{P}$ é **localmente estratificada** quando existe uma função *rank* atribuindo a cada elemento da base de Herbrand B_H, um número ordinal tal que :

- para todo default $(B_1 \wedge ... \wedge B_m : \neg C_1, ..., \neg C_n / A) \in \Delta_1(\mathbf{P})$, *rank*$(B_i) \leq$ *rank*(A), para todo $i \in [1,m]$, e *rank*$(C_j) <$ *rank*(A), para todo $j \in [1,n]$. ■

Definição D.3.4

Seja $\mathbf{P}$ um programa localmente estratificado e $TR_1(\mathbf{P}) = (W_1(\mathbf{P}),\Delta_1(\mathbf{P}))$ a teoria default correspondente ao programa $\mathbf{P}$. Os estratos da teoria default $TR_1(\mathbf{P})$ são definidos pelos conjuntos Δ_ξ, onde :

- $\Delta_\xi = \{d \mid d = (B_1 \wedge ... \wedge B_m : \neg C_1, ..., \neg C_n / A) \in \Delta_1(\mathbf{P})$ e *rank*(CONS(d)) =

  = *rank*(A) = $\xi\}$.■

Conseqüentemente, temos :

Teorema D.3.3

Seja $TR_1(\mathbf{P}) = (W_1(\mathbf{P}),\Delta_1(\mathbf{P}))$ a teoria default correspondente a um programa $\mathbf{P}$. A teoria $TR_1(\mathbf{P}) = (W_1(\mathbf{P}),\Delta_1(\mathbf{P}))$ é localmente estratificada se, e somente se, $\mathbf{P}$ é localmente estratificado. Além disso, uma cláusula *c* pertence ao estrato $\mathbf{P}_\xi$ se, e somente se, o default *d* correspondente a *c* pertence ao estrato Δ_ξ. ■

Prova :

Seja **P** um programa localmente estratificado e $TR_1(\mathbf{P}) = (W_1(\mathbf{P}),\Delta_1(\mathbf{P}))$ a teoria default correspondente a um programa **P**.

($\Rightarrow$) Se $TR_1(\mathbf{P}) = (W_1(\mathbf{P}),\Delta_1(\mathbf{P}))$ é localmente estratificada então existe uma função *rank* atribuindo a cada elemento da base de Herbrand B_H, um número ordinal tal que :

- para todo default $(B_1 \wedge ... \wedge B_m : \neg C_1, ..., \neg C_n / A) \in \Delta_1(\mathbf{P})$, $rank(B_i) \leq rank(A)$, para todo $i \in [1,m]$, e $rank(C_j) < rank(A)$, para todo $j \in [1,n]$.

Como cada default da forma $(B_1 \wedge ... \wedge B_m : \neg C_1, ..., \neg C_n / A) \in \Delta_1(\mathbf{P})$ corresponde a cláusula $A \leftarrow B_1 , ... , B_m$, **not**(C_1), ..., **not**$(C_n) \in \mathbf{P}$, então existe uma função *rank* atribuindo a cada elemento da base de Herbrand B_H, um número ordinal tal que :

- para toda cláusula $A \leftarrow B_1 , ... , B_m$, **not**(C_1), ..., **not**$(C_n) \in \mathbf{P}$, $rank(B_i) \leq rank(A)$, para todo $i \in [1,m]$, e $rank(C_j) < rank(A)$, para todo $j \in [1,n]$.

Logo, **P** é um programa localmente estratificado. Conseqüentemente, a todo default $d \in \Delta_\xi$, existe uma cláusula c, obtida pela tradução do default d para a cláusula c, tal que $c \in \mathbf{P}_\xi$.

($\Leftarrow$) Análogo ao ítem anterior. ◆

Teorema D.3.4 (Bidoit e Froidevaux [5])

Seja **P** um programa localmente estratificado.Um conjunto $M \subseteq B_H$ é um modelo perfeito de **P** se, e somente se, E é uma extensão de $TR_1(\mathbf{P})$ tal que $M = E \cap B_H$. ■

Definição D.3.5

Seja **P** um programa localmente estratificado e $\zeta^{le}{}_{\mathbf{P}}$ o conjunto de todas as seqüência de cláusulas básicas $<\mathcal{C}_i>$ que definem sistemas de esferas como na definição 5.3.5. O conjunto $\zeta^{le}{}_{\mathbf{P}}$ pode ser parcialmente ordenado por $\leq^{le}{}_{\mathbf{P}}$ definida como: $<\mathcal{C}_1> \leq^{le}{}_{\mathbf{P}} <\mathcal{C}_2>$ se $<\mathcal{C}_1>$ é prefixo de $<\mathcal{C}_2>$.

Dizemos que $<\mathcal{C}_i> \in \zeta^{le}{}_{\mathbf{P}}$ é uma seqüência maximal (com respeito a $\leq^{le}{}_{\mathbf{P}}$) de cláusulas em **P** se não existe seqüência $<\mathcal{C}_j> \in \zeta^{le}{}_{\mathbf{P}}$ tal que $<\mathcal{C}_i> \leq^{le}{}_{\mathbf{P}} <\mathcal{C}_j>$. ■

Lema D.3.3

Seja $\mathbb{P}$ um programa localmente estratificado e $TR_I(\mathbb{P}) = (W_I(\mathbb{P}),\Delta_I(\mathbb{P}))$ como sendo a teoria default localmente estratificada correspondente a $\mathbb{P}$.

A seqüência de cláusulas $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, onde para todo $\varsigma \in I$, $c_\varsigma \in$ *ground*($\mathbb{P}$), define um sistema de esferas **S** como na definição 5.3.6 se, e somente se, a seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ em $\Delta_I(\mathbb{P})$, correspondente a $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, define um sistema de esferas **S'** como na definição 4.2.6. Os sistemas de esferas **S** e **S'** são iguais. ■

Prova :

($\Rightarrow$) Seja $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência de cláusulas, onde para todo $\varsigma \in I$, $c_\varsigma \in$ *ground*($\mathbb{P}$). Seja **S** o sistema de esferas definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, onde $[P_0] = M_L$ e para cada $\varsigma \in I$, $[P_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \cap [A]$ se $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \subseteq [B_l]$, $\forall l \in [1,m]$ e $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \cap [\neg C_h] \neq \varnothing$, $\forall h \in [1,n]$.

Pela definição D.3.1, a cada cláusula $\mathbb{C} = A \leftarrow B_1 ,..., B_m$, **not**$(C_1)$, ..., **not**$(C_n) \in$ *ground*($\mathbb{P}$), existe um default $d = (B_1 ,..., B_m : \neg C_1, ..., \neg C_n/A) \in \Delta_I(\mathbb{P})$. Logo, a cada seqüência $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, existe uma seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ correspondente a $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$.

A seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ define um sistema de esferas **S'**, igual ao sistema de esferas **S** gerado por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, uma vez que, por indução :

- **Base de Indução :** $W_I(\mathbb{P}) = \varnothing$. Logo : $[W_I(\mathbb{P})] = M_L = [W_0]$

  Considere o default $d_1 = (B_{1,1} ,..., B_{1,m} : \neg C_{1,1}, ..., \neg C_{1,n}/A_1) \in <d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$. Como :

  - $[P_0] \subseteq [B_{1,l}]$, $\forall l \in [1,m]$, temos : $[W_0] \subseteq [B_{1,l}]$, $\forall l \in [1,m]$, e
  - $[P_0] \cap [\neg C_{1,h}] \neq \varnothing$, $\forall h \in [1,n]$, temos : $[W_0] \cap [\neg C_{1,h}] \neq \varnothing$, $\forall h \in [1,n]$;

  então : $[W_1] = [W_0] \cap [A_1] = [P_0] \cap [A_1] = [P_1]$.

- **Passo de Indução :** Suponha que $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma]$.

  Seja $d_\gamma = (B_{\gamma,1} ,..., B_{\gamma,m} : \neg C_{\gamma,1}, ..., \neg C_{\gamma,n}/A_\gamma) \in <d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, como :

  - $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \subseteq [B_{\gamma,l}]$, $\forall l \in [1,m]$, e portanto : $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \subseteq [B_{\gamma,l}]$, $\forall l \in [1,m]$, e
  - $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \cap [\neg C_{\gamma,h}] \neq \varnothing$, $\forall h \in [1,n]$, e portanto : $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [\neg C_{\gamma,h}] \neq \varnothing$, $\forall h \in [1,n]$;

  então : $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [A_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \cap [A_\varsigma] = [P_\varsigma]$.

($\Leftarrow$) Análogo a primeira parte. ◆

Como conseqüência do lema acima, obtemos :

Corolário D.3.3

Seja $\mathbf{P}$ um programa localmente estratificado, $\zeta^{le}{}_{\mathbf{P}}$ o conjunto de todas as seqüências de cláusulas básicas $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ que definem sistemas de esferas como na definição 5.3.6, e a relação de ordem parcial $\leq^{le}{}_{\mathbf{P}}$ (definição D.3.3).

Seja $TR_1(\mathbf{P}) = (W_1(\mathbf{P}),\Delta_1(\mathbf{P}))$ a teoria default correspondente a $\mathbf{P}$, obtida segundo a definição D.3.1 acima, Ξ_R o conjunto de todas as seqüências de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ que definem sistemas de esferas como na definição 4.2.6, e a relação de ordem parcial $\leq_R$ (definição 4.2.9).

A seqüência $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I} \in \zeta^{le}{}_{\mathbf{P}}$ é maximal com respeito a $\leq^{le}{}_{\mathbf{P}}$ se, e somente se, a seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} \in \Xi_R$ é maximal com respeito a $\leq_R$. ■

Prova :

($\Rightarrow$) Seja $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I} \in \zeta_{\mathbf{P}}$ uma seqüência maximal com respeito a $\leq^{le}{}_{\mathbf{P}}$. Seja $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} \in \Xi_R$ a seqüência de defaults correspondente a $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, ou seja, obtida segundo a definição D.3.1. Suponha que $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ não é maximal com respeito a $\leq_R$. Então, existe uma seqüência de default $<d> \in \Xi_R$ tal que $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} \leq_R <d>$ e $<d>$ define o sistema de esferas **S'**.

Pelo lema D.3.3, existe uma seqüência de cláusulas $<\mathcal{C}> \in \zeta_{\mathbf{P}}$ correspondente a $<d>$ que define o mesmo sistema de esferas **S'**. Obviamente, $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é o prefixo de $<\mathcal{C}>$, e portanto, $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I} \leq^{le}{}_{\mathbf{P}} <\mathcal{C}>$, o que contradiz a hipótese de que $<\mathcal{C}_i>$ é maximal entre as seqüências de cláusulas que definem sistemas de esferas.

($\Leftarrow$) Análogo a primeira parte. ◆

Teorema 5.3.5

Seja $\mathbf{P}$ um programa localmente estratificado, *rank* sua função de estratificação local com contra-domínio $\{\xi / \xi < \alpha\}$, e $\mathbf{P}_\xi = \{\mathbf{C} \in ground(\mathbf{P}) / rank(head(\mathbf{C})) = \xi\}$.

Seja $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência maximal de cláusulas em *ground*(P) que define o sistema de esferas **S** (como na definição 5.3.6). Se, para cada $\varsigma \in I$, $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \neq \varnothing$ e c_ς satisfaz o teste de consistência com respeito a $[\mathcal{P}]$ então $M = \{a \in B_H : \forall N \in [\mathcal{P}], N \models a\}$ é um ***modelo perfeito*** de P.■

Prova :

Dado um programa localmente estratificado **P**, seja $TR_1(\mathbf{P}) = (W_1(\mathbf{P}),\Delta_1(\mathbf{P}))$ a teoria default localmente estratificada correspondente a **P**. Como conseqüência do lema D.3.3 e do corolário D.3.3, a partir da seqüência maximal $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ de cláusulas, podemos construir um sistema de esferas **S** gerado pela seqüência maximal de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ para $TR_1(\mathbf{P})$, igual ao sistema gerado por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ para **P**.

Pelo teorema 4.2.5, se para todo $\varsigma \in I$, $[W_\varsigma] = [P_\varsigma] \neq \varnothing$, $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \subseteq [B_l]$, para todo B_l que é pré-requisito de algum default em $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ e $\bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] \cap [\neg C_h] = \bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma] \cap [\neg C_h] \neq \varnothing$ para todo $\neg C_h$ (resp., **not**(C_h)) que aparece como justificativa em algum default de $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (resp., em alguma cláusula de $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$), então $\bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] = \bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma] = [\mathcal{P}]$ é a classe de modelos de uma extensão de $TR_1(\mathbf{P})$.

Pelo teorema D.3.4, $M = \bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma] \cap B_H$ é um modelo perfeito de P. ●

Teorema 5.3.6

Seja P um programa localmente estratificado, *rank* sua função de estratificação local com contra-domínio $\{\xi / \xi < \alpha\}$, e $\mathbf{P}_\xi = \{\mathbf{C} \in ground(\mathbf{P}) / rank(head(\mathbf{C})) = \xi\}$.

Seja M um modelo perfeito de P, e $\mathcal{CLAUS}$ o conjunto de cláusulas básicas obtido a partir de M. As cláusulas em $\mathcal{CLAUS}$ podem ser colocados em uma seqüência $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que para o sistema de esferas **S** definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 5.3.6) temos que, para todo $\varsigma \in I$: $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \neq \varnothing$, c_ς satisfaz o teste de consistência com respeito a $[\mathcal{P}]$ e para todo $a \in M$ temos que $N \models a$, $\forall N \in [\mathcal{P}]$, onde $[\mathcal{P}]$ é a esfera mais interna do sistema **S**.■

Prova :

Dado o programa $\mathbf{P}$, seja $TR_1(\mathbf{P}) = (W_1(\mathbf{P}),\Delta_1(\mathbf{P}))$ a teoria default correspondente a $\mathbf{P}$, obtida segundo a definição D.3.1. Então, como M é um modelo perfeito de $\mathbf{P}$, pelo teorema D.3.4, existe uma extensão E de $TR_1(\mathbf{P})$ tal que $M = E \cap B_H$. Conseqüentemente, o conjunto de cláusulas $\mathcal{CLAUS}$ correponde ao conjunto de defaults geradores de E (GD(E, $(W_1(\mathbf{P}),\Delta_1(\mathbf{P}))$)).

Pelo teorema 4.2.6, os defaults geradores de E (GD(E, $(W_1(\mathbf{P}),\Delta_1(\mathbf{P}))$)) podem ser colocados em uma seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ de maneira que ela define um sistema de esferas S como na definição 4.2.6 tal que para todo $\varsigma \in I$: $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \neq \emptyset$, $\bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] \subseteq [B_l]$, para todo B_l que é o pré-requisito de algum default em GD(E, $(W_1(\mathbf{P}),\Delta_1(\mathbf{P}))$), $\bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] \cap [\neg C_h] \neq \emptyset$, para todo $\neg C_h$ que é a justificativa de algum default em GD(E, $(W_1(\mathbf{P}),\Delta_1(\mathbf{P}))$), e $M = \bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] \cap B_H$.

Sabemos (conseqüência do lema D.3.3 e do corolário D.3.3) que existe uma seqüência de cláusulas $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ em $\mathcal{CLAUS}$ correspondente a $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, que gera um sistema de esferas igual a S,e que atende a definição 5.3.6. Portanto, para todo $\varsigma \in I$: $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \neq \emptyset$, $\bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma] \cap [\neg C_h] \neq \emptyset$, para todo **not**$(C_h)$ que aparece em alguma cláusula de $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, e para todo $a \in M$ temos que $N \models a$, $\forall N \in \bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma] = [\mathcal{P}]$. ●

No caso dos CN-programas, as tradução apresentadas na definição D.3.1 não são mais equivalentes. A idéia fundamental por trás destas traduções é que as regras default são vistas como regras de inferência. No caso dos programas de Horn (que não utilizam a negação clássica), uma regra de inferência α/γ (correspondente ao default sem justificativa $\alpha : / \gamma$) possui um efeito semelhante ao apresentado pela implicação $\alpha \rightarrow \gamma$: dada a sentença α, podemos derivar γ.

Já para os CN-programas isto não ocorre, uma vez que dada a sentença $\neg\gamma$, podemos derivar $\neg\alpha$ utilizando a implicação mas não podemos fazer o mesmo a partir da regra de inferência. Assim, todas as CN-cláusulas devem ser traduzidas como regras default (ou seja, regras de inferência). Formalmente :

Definição D.3.6 (Marek e Truszczynski [45])

Seja **P** um CN-programa. Defina $TC_{CN}(\mathbf{P}) = (W_{CN}(\mathbf{P}), \Delta_{CN}(\mathbf{P}))$ como sendo a teoria default correspondente a **P**,onde :

1. $W_{CN}(\mathbf{P}) = \varnothing$ e $\Delta_{CN}(\mathbf{P}) = \{(B_1 \wedge \ldots \wedge B_m : \neg C_1, \ldots, \neg C_n / A)$ tal que $A \leftarrow B_1, \ldots, B_m$, **not**$(C_1), \ldots,$ **not**$(C_n) \in$ **P**, onde $A, B_1, \ldots, B_m, C_1, \ldots, C_n$ são literais$\}$.■

Assim, temos que :

Teorema D.3.5 (Marek e Truszczynski [45])

Seja **P** um CN-programa em lógica.Um conjunto $M \subseteq Lit_H$ é um conjunto estável de resposta de **P** se, e somente se, existe uma extensão E de $TC_{CN}(\mathbf{P})$ tal que $M = E \cap Lit_H$.■

Definição D.3.7

Seja **P** um CN-programa e $\zeta^{CN}_{\mathbf{P}}$ o conjunto de todas as seqüência de CN-cláusulas básicas $<\mathcal{C}_i>$ que definem sistemas de esferas como na definição 5.3.6. O conjunto $\zeta^{CN}_{\mathbf{P}}$ pode ser parcialmente ordenado por $\leq^{CN}_{\mathbf{P}}$ definida como: $<\mathcal{C}_1> \leq^{CN}_{\mathbf{P}} <\mathcal{C}_2>$ se $<\mathcal{C}_1>$ é prefixo de $<\mathcal{C}_2>$.

Dizemos que $<\mathcal{C}_i> \in \zeta^{CN}_{\mathbf{P}}$ é uma seqüência maximal (com respeito a $\leq^{CN}_{\mathbf{P}}$) de CN-cláusulas em **P** se não existe seqüência $<\mathcal{C}_j> \in \zeta^{CN}_{\mathbf{P}}$ tal que $<\mathcal{C}_i> \leq^{CN}_{\mathbf{P}} <\mathcal{C}_j>$. ■

Lema D.3.4

Seja **P** um CN-programa em lógica e $TC_{CN}(\mathbf{P}) = (W_{CN}(\mathbf{P}), \Delta_{CN}(\mathbf{P}))$ como sendo a teoria default correspondente a **P**.

A seqüência de CN-cláusulas $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, onde para todo $\varsigma \in I$, $c_\varsigma \in$ *ground*(**P**), define o sistema de esferas **S** como na definição 5.3.7 se, e somente se, a seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ em $\Delta_{CN}(\mathbf{P})$, correspondente a $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, define um sistema de esferas **S'** como na definição 4.2.6. Os sistemas de esferas **S** e **S'** são iguais. ■

Prova :

($\Rightarrow$) Seja $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência de CN-cláusulas, onde para todo $\varsigma \in I$, $c_\varsigma \in ground(\mathbf{P})$. Seja **S** o sistema de esferas definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, onde para cada $\varsigma \in I$, $[P_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \cap [A]$ se $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \subseteq [B_l]$, $\forall l \in [1,m]$ e $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \cap [\neg C_h] \neq \varnothing$, $\forall h \in [1,n]$.

Pela definição D.3.6, a cada cláusula $\mathbf{C} = A \leftarrow B_1,..., B_m,$ **not**$(C_1),...,$ **not**$(C_n) \in$ *ground*($\mathbf{P}$), existe um default $d = (B_1 ,..., B_m : \neg C_1, ..., \neg C_n/A) \in \Delta_{CN}(\mathbf{P})$. Logo, a cada seqüência $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, existe uma seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ correspondente a $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$.

A seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ define um sistema de esferas **S'**, igual ao sistema de esferas **S** gerado por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, uma vez que, por indução :

- **Base de Indução :** $W_o = W_{CN}(\mathbf{P})$. Logo : $[W_o] = [W_{CN}(\mathbf{P})] = [P_o] = M_L$
- **Passo de Indução :** Suponha que $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma]$.

Seja $d_\gamma = (B_{\gamma,1} ,..., B_{\gamma,m} : \neg C_{\gamma,1}, ..., \neg C_{\gamma,n}/A_\gamma) \in <d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, como :

- $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \subseteq [B_{\gamma,l}]$, $\forall l \in [1,m]$, portanto : $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \subseteq [B_{\gamma,l}]$, $\forall l \in [1,m]$, e

- $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \cap [\neg C_{\gamma,h}] \neq \varnothing$, $\forall h \in [1,n]$, portanto :

$\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [\neg C_{\gamma,h}] \neq \varnothing$, $\forall h \in [1,n]$;

então : $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [A_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \cap [A_\varsigma] = [P_\varsigma]$.

($\Leftarrow$) Análogo a primeira parte. ◆

Como conseqüência do lema acima, obtemos :

Corolário D.3.4

Seja $\mathbf{P}$ um CN-programa em lógica, $\zeta^{CN}_{\mathbf{P}}$ o conjunto de todas as seqüências de cláusulas básicas $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ que definem sistemas de esferas como na definição 5.3.7, e a relação de ordem parcial $\leq^{CN}_{\mathbf{P}}$.

Seja $TC_{CN}(\mathbf{P}) = (W_{CN}(\mathbf{P}),\Delta_{CN}(\mathbf{P}))$ a teoria default correspondente a $\mathbf{P}$, obtida segundo a definição D.3.6 acima, e Ξ_R o conjunto de todas as seqüências de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ que definem sistemas de esferas como na definição 4.2.6, e a relação de ordem parcial $\leq_R$.

A seqüência $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I} \in \zeta^{CN}_{P}$ é maximal com respeito a $\leq^{CN}_{P}$ se, e somente se, a seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} \in \Xi_R$ é maximal com respeito a $\leq_R$. ■

Prova :

($\Rightarrow$) Seja $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I} \in \zeta^{CN}_{P}$ uma seqüência maximal com respeito a $\leq^{CN}_{P}$. Seja $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} \in \Xi_R$ a seqüência de defaults correspondente a $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, ou seja, obtida segundo a definição D.3.6. Suponha que $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ não é maximal com respeito a $\leq_R$. Então, existe uma seqüência de default $<d> \in \Xi_R$ tal que $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} \leq_R <d>$ e $<d>$ define o sistema de esferas S'.

Pelo lema D.3.4, existe uma seqüência de cláusulas $<\mathcal{C}> \in \zeta^{CN}_{P}$ correspondente a $<d>$ que define o mesmo sistema de esferas S'. Obviamente, $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é o prefixo de $<\mathcal{C}>$, e portanto, $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I} \leq^{CN}_{P} <\mathcal{C}>$, o que contradiz a hipótese de que $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é maximal entre as seqüências de cláusulas que definem sistemas de esferas.

($\Leftarrow$) Análogo a primeira parte. ◆

Teorema 5.3.7

Seja P um CN-programa e $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal de CN-cláusulas em *ground*(P) que define o sistema de esferas **S** (como na definição 5.3.7). Se, para cada $\varsigma \in I$, $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \neq \emptyset$ e c_ς satisfaz o teste de consistência com respeito a $[\mathcal{P}]$ então $M = \{a \in Lit_H : \forall N \in [\mathcal{P}], N \models a\}$ é um ***conjunto de resposta estável*** de P.■

Prova :

Dado o CN-programa P, seja $TC_{CN}(P) = (W_{CN}(P), \Delta_{CN}(P))$ a teoria default correspondente a P. Como conseqüência do lema D.3.4 e do corolário D.3.4, a partir da seqüência maximal de cláusulas $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ podemos construir um sistema de esferas S gerado pela seqüência maximal de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ para $TC_{CN}(P)$, igual ao sistema gerado por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ para P. Pelo teorema 4.2.5, se para todo $\varsigma \in I$, $[W_\varsigma] = [P_\varsigma] \neq \emptyset$ e $\bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] \cap [\neg C_h] = \bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma] \cap [\neg C_h] \neq \emptyset$ para todo $\neg C_h$ (resp., **not**(C_h)) que aparece como justificativa em algum default de $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (resp., em alguma cláusula de

$<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$), então $\bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] = \bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma]$ é a classe de modelos de uma extensão de $TC_{CN}(\mathbf{P})$.

Pelo teorema D.3.5, $M = \bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma] \cap Lit_H$ é um conjunto de resposta estável de $\mathbf{P}$. ◆

Teorema 5.3.8

Seja $\mathbf{P}$ um CN-programa, M um conjunto de resposta estável de $\mathbf{P}$, e $\mathcal{CLAUS}$ o conjunto de cláusulas básicas obtido a partir de M. As CN-cláusulas em $\mathcal{CLAUS}$ podem ser colocadas em uma seqüência (possivelmente infinita) $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que para o sistema de esferas S definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 5.3.7) temos que, para todo $\varsigma \in I$, $\bigcap_{\gamma < \varsigma}[P_\gamma] \neq \emptyset$, c_ς satisfaz o teste de consistência com respeito a $[\mathcal{P}]$ e para todo $a \in M$ temos que $N \models a$, $\forall N \in [\mathcal{P}]$, onde $[\mathcal{P}]$ é o centro do sistema S. ■

Prova :

Dado um CN-programa $\mathbf{P}$, seja $TC_{CN}(\mathbf{P}) = (W_{CN}(\mathbf{P}),\Delta_{CN}(\mathbf{P}))$ a teoria default correspondente a $\mathbf{P}$. Então, como M é um conjunto de resposta estável de $\mathbf{P}$, pelo teorema D.3.5, existe uma extensão E de $TC_{CN}(\mathbf{P})$ tal que $M = E \cap Lit_H$. Conseqüentemente, o conjunto de cláusulas $\mathcal{CLAUS}$ correponde ao conjunto de defaults geradores de E $(GD(E,(W_{CN}(\mathbf{P}),\Delta_{CN}(\mathbf{P}))))$.

Pelo teorema 4.2.6, os defaults geradores de E $(GD(E,(W_{CN}(\mathbf{P}),\Delta_{CN}(\mathbf{P}))))$ podem ser colocados em uma seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ de maneira que ela define um sistema de esferas S como na definição 4.2.6 tal que para todo $\varsigma \in I$: $[W_\varsigma] \neq \emptyset$, $\bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] \cap [\neg C_h] \neq \emptyset$, para todo $\neg C_h$ que é a justificativa de algum default em $GD(E, (W_{CN}(\mathbf{P}),\Delta_{CN}(\mathbf{P})))$, e $M = \bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] \cap Lit_H$.

Sabemos (conseqüência do lema D.3.4 e do corolário D.3.4) que existe uma seqüência de cláusulas $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ em $\mathcal{CLAUS}$ correspondente a $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, que gera um sistema de esferas igual a S,e que atende a definição 5.3.7. Portanto, para todo $\varsigma \in I$: $[P_\varsigma] \neq \emptyset$, $\bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma] \cap [\neg C_h] \neq \emptyset$, para todo **not**$(C_h)$ que aparece em alguma cláusula de $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, e para todo $a \in M$ temos que $N \models a$, $\forall N \in \bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma]$. ◆

No caso dos CL-programas, utilizaremos a seguinte tradução para lógica default :

Definição D.3.8 (Marek e Truszczynski [45])

Seja $\mathbf{P}$ um CL-programa. Defina $TC_{CL}(\mathbf{P}) = (W_{CL}(\mathbf{P}), \Delta_{CL}(\mathbf{P}))$ como sendo a teoria default correspondente a $\mathbf{P}$,onde :

1. $W_{CL}(\mathbf{P}) = \varnothing$ e $\Delta_{CL}(\mathbf{P}) = \{(B_1 \wedge \ldots \wedge B_m : \neg C_1, \ldots, \neg C_n / A)$ tal que $A \leftarrow B_1, \ldots, B_m$, **not**(C_1), ..., **not**$(C_n) \in \mathbf{P}$, onde $A, B_1, \ldots, B_m, C_1, \ldots, C_n$ são cláusulas (disjunções de literais)}.■

Os CL-programas representam teorias default arbitrárias. Portanto, a caracterização da classe modelos deste tipo de programa é igual a feita para lógica default clássica no capítulo 2. Formalmente :

Teorema D.3.6 (Marek e Truszczynski [45])

Seja $\mathbf{P}$ um CL-programa em lógica. Dizemos que M é um conjunto estável de resposta de $\mathbf{P}$ se, e somente se, existe uma extensão E de $TC_{CL}(\mathbf{P})$ tal que $M = E \cap Clause_H$.■

Definição D.3.9

Seja $\mathbf{P}$ um CL-programa e $\zeta^{CL}_{\mathbf{P}}$ o conjunto de todas as seqüência de CL-cláusulas básicas $<\mathcal{C}_i> = <c_1, \ldots, c_k>$ que definem sistemas de esferas como na definição 5.3.8. O conjunto $\zeta^{CL}_{\mathbf{P}}$ pode ser parcialmente ordenado por $\leq^{CL}_{\mathbf{P}}$ definida como: $<\mathcal{C}_1> \leq^{CL}_{\mathbf{P}} <\mathcal{C}_2>$ se $<\mathcal{C}_1>$ é prefixo de $<\mathcal{C}_2>$.

Dizemos que $<\mathcal{C}_i> \in \zeta^{CL}_{\mathbf{P}}$ é uma seqüência maximal (com respeito a $\leq^{CL}_{\mathbf{P}}$) de CL-cláusulas em $\mathbf{P}$ se não existe seqüência $<\mathcal{C}_j> \in \zeta^{CL}_{\mathbf{P}}$ tal que $<\mathcal{C}_i> \leq^{CL}_{\mathbf{P}} <\mathcal{C}_j>$. ■

Lema D.3.5

Seja $\mathbf{P}$ um CL-programa em lógica e $TC_{CL}(\mathbf{P}) = (W_{CL}(\mathbf{P}), \Delta_{CL}(\mathbf{P}))$ como sendo a teoria default correspondente a $\mathbf{P}$.

A seqüência de CL-cláusulas $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, onde para todo $\varsigma \in I$, $c_\varsigma \in$ *ground*($\mathbb{P}$), define um sistema de esferas **S** como na definição 5.3.8 se, e somente se, a seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ em $\Delta_{CL}(\mathbb{P})$, correspondente a $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, define um sistema de esferas **S'** como na definição 4.2.6. Os sistemas de esferas **S** e **S'** são iguais. ■

Prova :

($\Rightarrow$) Seja $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência de CL-cláusulas, onde para todo $\varsigma \in I$, $c_\varsigma \in$ *ground*($\mathbb{P}$). Seja **S** o sistema de esferas definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, onde para cada $\varsigma \in I$, $[P_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \cap [A]$ se $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \subseteq [B_l]$, $\forall l \in [1,m]$ e $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \cap [\neg C_h] \neq \emptyset$, $\forall h \in [1,n]$.

Pela definição D.3.8, a cada cláusula $\mathbb{C} = A \leftarrow B_1,..., B_m$, **not**$(C_1)$,..., **not**$(C_n) \in$ *ground*($\mathbb{P}$), existe um default $d = (B_1 ,..., B_m : \neg C_1, ..., \neg C_n/A) \in \Delta_{CL}(\mathbb{P})$. Logo, a cada seqüência $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, existe uma seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ correspondente a $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$.

A seqüência de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ define um sistema de esferas **S'**, igual ao sistema de esferas **S** gerado por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, uma vez que, por indução :

- **Base de Indução :** $W_o = W_{CL}(\mathbb{P})$. Logo : $[W_o] = [W_{CL}(\mathbb{P})] = [P_o] = M_L$
- **Passo de Indução :** Suponha que $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma]$.

  Seja $d_\gamma = (B_{\gamma,1} ,..., B_{\gamma,m} : \neg C_{\gamma,1}, ..., \neg C_{\gamma,n}/A_\gamma) \in <d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, como :

  - $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \subseteq [B_{\gamma,l}]$, $\forall l \in [1,m]$, portanto : $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \subseteq [B_{\gamma,l}]$, $\forall l \in [1,m]$, e
  - $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \cap [\neg C_{\gamma,h}] \neq \emptyset$, $\forall h \in [1,n]$, portanto :

    $\bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [\neg C_{\gamma,h}] \neq \emptyset$, $\forall h \in [1,n]$;

  então : $[W_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[W_\gamma] \cap [A_\varsigma] = \bigcap_{\gamma<\varsigma}[P_\gamma] \cap [A_\varsigma] = [P_\varsigma]$.

($\Leftarrow$) Análogo a primeira parte. ◆

Como conseqüência do lema acima, obtemos :

Corolário D.3.5

Seja $\mathbb{P}$ um CL-programa em lógica, $\zeta^{CL}{}_{\mathbb{P}}$ o conjunto de todas as seqüências de cláusulas básicas $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ que definem sistemas de esferas como na definição 5.3.8, e a relação de ordem parcial $\leq^{CL}{}_{\mathbb{P}}$.

Seja $TC_{CL}(P) = (W_{CL}(P),\Delta_{CL}(P))$ a teoria default correspondente a P, obtida segundo a definição D.3.8 acima, e Ξ_R o conjunto de todas as seqüências de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ que definem sistemas de esferas como na definição 4.2.6, e a relação de ordem parcial $\leq_R$.

A seqüência $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I} \in \zeta^{CL}{}_P$ é maximal com respeito a $\leq^{CL}{}_P$ se, e somente se, a seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} \in \Xi_R$ é maximal com respeito a $\leq_R$. ■

Prova :

($\Rightarrow$) Seja $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I} \in \zeta^{CL}{}_P$ uma seqüência maximal com respeito a $\leq^{CL}{}_P$. Seja $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} \in \Xi_R$ a seqüência de defaults correspondente a $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, ou seja, obtida segundo a definição D.3.8. Suponha que $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ não é maximal com respeito a $\leq_R$. Então, existe uma seqüência de default $<d> \in \Xi_R$ tal que $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I} \leq_R <d>$ e $<d>$ define o sistema de esferas S'.

Pelo lema D.3.5, existe uma seqüência de cláusulas $<\mathcal{C}> \in \zeta^{CL}{}_P$ correspondente a $<d>$. Obviamente, $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ é o prefixo de $<\mathcal{C}>$, e portanto, $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I} \leq^{CL}{}_P <\mathcal{C}>$, o que contradiz a hipótese de que $<\mathcal{C}>$ é maximal entre as seqüências de cláusulas que definem sistemas de esferas.

($\Leftarrow$) Análogo a primeira parte. ◆

Teorema 5.3.9

Seja P um CL-programa, e $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ uma seqüência (possivelmente infinita) maximal de CL-cláusulas em *ground*(P) que define o sistema de esferas S (como na definição 5.3.8). Se, para cada $\varsigma \in I$, $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \neq \emptyset$ e c_ς satisfaz o teste de consistência com respeito a $[\mathcal{P}]$ então $M = \{a \in Clause_H : \forall N \in [\mathcal{P}], N \models a\}$ é um ***conjunto de resposta estável*** de P. ■

Prova :

Dado o CL-programa P, seja $TC_{CL}(P) = (W_{CL}(P),\Delta_{CL}(P))$ a teoria default correspondente a P. Como conseqüência do lema D.3.5 e do corolário D.3.5, a partir da seqüência maximal de cláusulas $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ podemos construir um sistema de esferas S gerado pela seqüência maximal de defaults $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ para $TC_{CL}(P)$, igual ao sistema gerado por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ para **P**. Pelo teorema 4.2.5, se para todo $\varsigma \in I$, $[W_\varsigma] = [P_\varsigma] \neq \emptyset$ e $\bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] \cap [\neg C_h] = \bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma] \cap [\neg C_h] \neq \emptyset$ para todo $\neg C_h$ (resp., **not**(C_h)) que aparece como justificativa em algum default de $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (resp., em alguma cláusula de $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$), então $\bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] = \bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma]$ é a classe de modelos de uma extensão de TC_{CL}(**P**).

Pelo teorema D.3.6, $M = \{a \in Clause_H : \forall N \in [\mathcal{P}], N \models a\}$ é um conjunto de resposta estável de **P**, onde $[\mathcal{P}] = \bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma]$.●

Teorema 5.3.10

Seja **P** um CL-programa, M um conjunto de resposta estável de **P**, e $\mathcal{CLAUS}$ o conjunto de cláusulas básicas obtido a partir de M. As CL-cláusulas em $\mathcal{CLAUS}$ podem ser colocadas em uma seqüência (possivelmente infinita) $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ tal que para o sistema de esferas S definido por $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ (como na definição 5.3.8) temos que, para todo $\varsigma \in I$, $\bigcap_{\gamma<\varsigma} [P_\gamma] \neq \emptyset$; c_ς satisfaz o teste de consistência com respeito a $[\mathcal{P}]$ e para todo $a \in M$ temos que $N \models a$, $\forall N \in [\mathcal{P}]$, onde $[\mathcal{P}]$ é o centro do sistema S. ■

Prova :

Dado um CL-programa **P**, seja $TC_{CL}(\mathbf{P}) = (W_{CL}(\mathbf{P}),\Delta_{CL}(\mathbf{P}))$ a teoria default correspondente a **P**. Então, como M é um conjunto de resposta estável de **P**, pelo teorema D.3.6, existe uma extensão E de TC_{CL}(**P**) tal que $M = E \cap Clause_H$. Conseqüentemente, o conjunto de cláusulas $\mathcal{CLAUS}$ correponde ao conjunto de defaults geradores de E $(GD(E,(W_{CL}(\mathbf{P}),\Delta_{CL}(\mathbf{P}))))$.

Pelo teorema 4.2.6, os defaults geradores de E $(GD(E,(W_{CL}(\mathbf{P}),\Delta_{CL}(\mathbf{P}))))$ podem ser colocados em uma seqüência $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ de maneira que ela define um sistema de esferas S como na definição 4.2.6 tal que para todo $\varsigma \in I$: $[W_\varsigma] \neq \emptyset$, $\bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma] \cap [\neg C_h] \neq \emptyset$, para todo $\neg C_h$ que é a justificativa de algum default em $GD(E, (W_{CL}(\mathbf{P}),\Delta_{CL}(\mathbf{P})))$, e $[M] = \bigcap_{\varsigma \in I}[W_\varsigma]$.

Sabemos (conseqüência do lema D.3.5 e do corolário D.3.5) que existe uma seqüência de cláusulas $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$ em $\mathcal{CLAUS}$ correspondente a $<d_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, que gera um sistema de esferas igual a **S**,e que atende a definição 5.3.8. Portanto, para todo $\varsigma \in I$: $[P_\varsigma] \neq \emptyset$, $\bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma] \cap [\neg C_h] \neq \emptyset$, para todo **not**($C_h$) que aparece em alguma cláusula de $<\mathcal{C}_\varsigma>_{\varsigma \in I}$, e para todo $a \in M$ temos que $N \models a$, $\forall N \in \bigcap_{\varsigma \in I}[P_\varsigma]$. ●

Apêndice E :

Prova dos Teoremas do Capítulo 6

Seção 2

Teorema 6.2.2

Seja $C = \bigcup_{i=1}^{n} \|\chi_i\|$ uma base de crenças priorizada com graus de relevância epistêmica $\|\chi_1\|$, $\|\chi_2\|$,..., $\|\chi_n\|$ e α uma sentença qualquer. A classe de modelos da revisão da base de crenças priorizada C pela sentença α ($[C \otimes \alpha]$) é igual a união das classes de modelos de todas as extensões da teoria default supernormal fechada priorizada $(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n)$, onde $W_0 = \{\alpha\}$ e $\Delta_1,...,\Delta_n$ são conjuntos de defaults supernormais fechados tais que para todo $i \in [1,n]$, $\beta \in \|\chi_i\|$ se, e somente se, $:\beta/\beta \in \Delta_i$.■

Prova :

Pelo teorema 6.2.1, para todo ϕ, $\phi \in [C \otimes \alpha]$ se, e somente se, $(\{\alpha\},\Xi) \mid\!\sim_F \phi$, onde (W,Ξ) é uma teoria default ranqueada com $\Xi = <\Lambda_1,...,\Lambda_n>$, sendo cada $\Lambda_i = \|\chi_i\|$.

Considere a teoria default supernormal priorizada $(\{\alpha\},\Delta_1,...,\Delta_n)$, onde $\Delta_1,...,\Delta_n$ são conjuntos de defaults supernormais tais que, para todo $i \in [1,n]$, $\beta \in \Lambda_i$ se, e somente se, $:\beta/\beta \in \Delta_i$. Vamos mostrar que toda extensão E de $(\{\alpha\},\Delta_1,...,\Delta_n)$ é uma R-extensão de (W,Ξ).

Por definição, E é uma extensão de $(\{\alpha\}, \Delta_1,..., \Delta_n)$ se, e somente se, existem conjuntos de fórmulas $E_0,E_1,...,E_n$ tais que : $E_0 = \{\alpha\}$ e

E_1 é uma extensão de (E_0,Δ_1)

E_2 é uma extensão de (E_1,Δ_2)

...

$E = E_n$ é uma extensão de (E_{n-1},Δ_n).

Sabemos que, para cada extensão E_i de (E_{i-1},Δ_i), existe um subconjunto maximal de defaults Δ'_i em Δ_i tais que $E_i = Cn(E_{i-1} \cup CONS(\Delta'_i))$. Logo, cada conjunto $CONS(\Delta'_i) = R_i$ será um subconjunto maximal de $CONS(\Delta_i) = \Lambda_i$ e $E = Cn(\{\alpha\} \cup CONS(\Delta'_1) \cup ... \cup CONS(\Delta'_n)) = Cn(\{\alpha\} \cup R_1 \cup ... \cup R_n)$. Portanto, E será uma R-extensão de (W,Ξ).

Suponha que E é uma R-extensão de (W,Ξ). Por definição, $E = Cn((\bigcup_{i=1}^{n} Ri) \cup \{\alpha\})$ tal que, para todo $i \in [1,n]$:

1. $R_i \subseteq \Lambda_i$,
2. R_i é um subconjunto maximal de Λ_i tal que $(\bigcup_{j=1}^{i} Rj) \cup \{\alpha\}$ é consistente.

Defina os conjuntos de fórmulas $E_1,...,E_n$ tais que :

$$E_1 = Cn(\{\alpha\} \cup R_1),$$

$$E_2 = Cn(E_1 \cup R_2),$$

$$...$$

$$E_n = Cn(E_{n-1} \cup R_n),$$

Note que : $E = Cn(\{\alpha\} \cup R_1 \cup R_2 \cup ... \cup R_n) = Cn(E_1 \cup R_2 \cup ... \cup R_n) = Cn(E_2 \cup R_3 \cup ... \cup R_n) = ... = Cn(E_{n-1} \cup R_n) = E_n$. Além disso, temos que cada E_i é uma extensão de (E_{i-1},Δ_i). Logo, E é uma extensão de $(\{\alpha\}, \Delta_1,..., \Delta_n)$.

Assim, para todo ϕ, $\phi \in (C \otimes \alpha)$ se, e somente se, para toda extensão E de $(\{\alpha\}, \Delta_1,..., \Delta_n)$, $\phi \in E$. Logo, $[(C \otimes \alpha)] = \cup_{i \in [1,k]} [E'_i]$, onde cada E'_i $(i \in [1,k])$ é uma extensão de $(\{\alpha\}, \Delta_1,..., \Delta_n)$.♦

Teorema 6.2.3

Seja $C = \bigcup_{i=1}^{n} \|\chi_i\|$ uma base de crenças priorizada com graus de relevância epistêmica $\|\chi_1\|, \|\chi_2\|,..., \|\chi_n\|$ e $(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n)$ a teoria default supernormal fechada priorizada associada a C. A base de crenças C é consistente se, e somente se, a teoria default $(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n)$ possui uma única extensão E e $GD(E,(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n)) = \Delta_1 \cup ... \cup \Delta_n$. ■

Prova :

($\Leftarrow$) Se E é uma extensão de $(\varnothing,\Delta_1,...,\Delta_n)$ tal que $GD(E,(\varnothing,\Delta_1,...,\Delta_n)) = \Delta_1 \cup ... \cup \Delta_n$, então existem conjuntos de fórmulas $E_0,E_1,...,E_n$ tais que : $E_0 = \varnothing$ e

$E_1 = Cn(CONS(\Delta_1))$ é uma extensão de $(\varnothing,\Delta_1)$

$E_2 = Cn(E_1 \cup CONS(\Delta_2))$ é uma extensão de (E_1,Δ_2)

...

$E = E_n = Cn(E_{n-1} \cup CONS(\Delta_n))$ é uma extensão de (E_{n-1},Δ_n).

Logo, $E = Cn(CONS(\Delta_1) \cup ... \cup CONS(\Delta_n))$. Como E é consistente e, para todo $i \in [1,n]$, $CONS(\Delta_i) = \|\chi_i\|$, temos que $C = \bigcup_{i=1}^{n} \|\chi_i\|$ é consistente.

($\Rightarrow$) Análogo ao caso anterior.♦

Corolário 6.2.1

Seja $C = \bigcup_{i=1}^{n} \|\chi_i\|$ uma base de crenças priorizada consistente com graus de relevância epistêmica $\|\chi_1\|$, $\|\chi_2\|$,..., $\|\chi_n\|$, e $(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n)$ a teoria default supernormal fechada priorizada associada a *C*.

A classe de modelos da extensão da teoria default supernormal fechada priorizada $(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n)$ é igual a classe de modelos da base de crenças priorizada *C*. ■

Prova :

Conseqüência do teorema 6.2.3, uma vez que $(W_0,\Delta_1,...,\Delta_n)$ possui uma única extensão $E = C$, e portanto $[E] = [C]$.♦

Seção 3

Teorema 6.3.1

Seja K uma base de conhecimento, α uma sentença, $\circ_\Delta$ o operador de revisão definido na definição 6.3.3, e $^\blacklozenge$ o operador de revisão definido na definição 6.3.4. Se revemos a base de conhecimento K pela sentença α, então :

$$M \in [K \circ_\Delta \alpha] \text{ se, e somente se, } M \in [K^\blacklozenge \alpha]. \ ■$$

Prova :

Seja K uma base de conhecimento representada pela sentença Γ. Seja $fnc_m(\Gamma) \equiv (\Phi_1 \wedge \Phi_2 \wedge ... \wedge \Phi_n)$ uma fórmula na forma normal conjuntiva mínima equivalente a Γ. Então, temos que :

$$[K] = [\Phi_1] \cap [\Phi_2] \cap ... \cap [\Phi_n]$$

$$CB([K]) = \{[\Phi_1], [\Phi_2], ..., [\Phi_n]\}, \text{ e}$$

$$\Delta_K = \{: \Phi_1/ \Phi_1 , : \Phi_2/ \Phi_2 ,..., : \Phi_n/ \Phi_n\}$$

($\Rightarrow$) Considere um modelo $M \in [K \circ_\Delta \alpha]$. Seja $CBS(M)$ o conjunto de todos os componentes básicos $[\Phi] \in CB([K])$ tais que $[\Phi] \cap \{M\} \neq \varnothing$ (logo, $M \in [\Phi]$, para todo $[\Phi] \in CBS([M]))$ e seja $\Delta_{BK} \subseteq \Delta_K$ o conjunto de defaults tal que $\delta \in \Delta_{BK}$ se, e somente se, $[CONS(\delta)] \in CBS(M)$.

Se $CBS(M) = \emptyset$, então $M \in [K\circ_\Delta\alpha]$ se, e somente se, $M \models \alpha$ e $[K^*\alpha] = \{N / N \models \alpha\}$. Logo, $M \in [K^*\alpha]$.

Caso contrário, considere a teoria default $(\{\alpha\},\Delta_K)$. Coloque os defaults do conjunto $\Delta_{BK} \subseteq \Delta_K$ em uma seqüência qualquer $<d_i>_{i \in I} = \{: \Phi'_1/ \Phi'_1 , : \Phi'_2/ \Phi'_2 ,..., : \Phi'_m/ \Phi'_m\}$. A partir desta seqüência podemos construir um sistema de esferas $S = \{M_L,[W_0],[W_1],...,[W_m]\}$, como na definição 4.2.2, onde $[W_0] = [\alpha]$ e S está centrado na classe de modelos [E] de alguma extensão E de $(\{\alpha\},\Delta_K)$ e tal que $M \in [E]$. Por indução, temos :

- Considere o default $d_1 = (: \Phi'_1/ \Phi'_1)$. Sabemos que $M \in [K\circ_\Delta\alpha]$ e, portanto, $M \in [\alpha]$. Como $\{M\} \cap [\Phi'_1] \neq \emptyset$, temos $[W_0] \cap [\Phi'_1] = [\alpha] \cap [\Phi'_1] \neq \emptyset$, ou seja, o default d_1 é aplicável a $[W_0]$ (definição 4.2.1), e podemos construir a esfera $[W_1] = [W_0] \cap [\Phi'_1]$ (definição 4.2.2) ;
- Suponha que já construímos a esfera $[W_r]$ do sistema S utilizando os default $d_1, d_2,..., d_r$ da seqüência $<d_i>_{i \in I}$. Considere o default $d_{r+1} = (: \Phi'_{r+1}/ \Phi'_{r+1})$. Sabemos que $M \in [K\circ_\Delta\alpha]$ e, portanto, $M \in [\alpha]$. Além disso, como $\{M\} \cap [\Phi'_j] \neq \emptyset$, para todo $j \in [1,r+1]$, temos $M \in [\Phi'_1] \cap [\Phi'_2] \cap ... \cap [\Phi'_r] \cap [\Phi'_{r+1}]$.

  Logo, $M \in [\alpha] \cap [\Phi'_1] \cap [\Phi'_2] \cap ... \cap [\Phi'_r] \cap [\Phi'_{r+1}]$, ou seja, $[\alpha] \cap [\Phi'_1] \cap [\Phi'_2] \cap ... \cap [\Phi'_r] \cap [\Phi'_{r+1}] = [W_r] \cap [\Phi'_{r+1}] \neq \emptyset$, e portanto, o default d_{r+1} é aplicável a $[W_r]$ (definição 4.2.1), e podemos construir a esfera $[W_{r+1}] = [W_r] \cap [\Phi'_{r+1}]$ (definição 4.2.2).

  Logo, M faz parte $\bigcap_{i=0}^{m}[W_i]$, que é o centro do sistema de esferas S.

Falta mostrar que a seqüência $<d_i>_{i \in I}$ é maximal. Suponha, por absurdo, que ela não é. Então, pelo teorema 4.2.2, existe uma seqüência de default $<d'>$ tal que $<d_i>_{i \in I}$ é prefixo de $<d'>$ e $<d'>$ constrói um sistema de esferas (como na definição 4.2.2). Seja d o default em $<d'>$ com menor índice tal que $d \notin <d_i>_{i \in I}$. O default $d \in \Delta_K \backslash \Delta_{BK}$, e devemos ter $\bigcap_{i=0}^{m}[W_i] \cap [\Phi] \neq \emptyset$ para que o default d seja aplicável. Logo, existe um modelo N tal que $N \in \bigcap_{i=0}^{m}[W_i]$ e $N \in [\Phi]$ e, conseqüentemente, $N \in [\Phi']$, para todo $[\Phi']$

$\in$ CBS(M). Assim, $Dif([K],N) < Dif([K],M)$, ou seja, $N <_K M$, contradizendo o fato de M ser minimal em $[\alpha]$ com respeito a $\leq_K$.

Então, $M \in \bigcap_{i=0}^{m}[W_i]$, que é o centro do sistema **S** e, pelo teorema 4.2.2, também é a classe de modelos de alguma extensão E de $(\{\alpha\},\Delta_K)$. Logo, $M \in [K^{\bullet}\alpha]$.

($\Leftarrow$) Considere um modelo $M \in [K^{\bullet}\alpha]$ e suponha, por absurdo, que $M \notin [K\circ_{\Delta}\alpha]$.

Se $M \in [K^{\bullet}\alpha]$, então M pertence a classe de modelos de alguma extensão E de $(\{\alpha\},\Delta_K)$. Pelo teorema 4.2.3, os defaults geradores de E podem ser colocados em uma seqüência $\langle d_i \rangle_{i \in I}$ que define um sistema de esferas **S**, como na definição 4.2.2, que provê E.

Como $M \in [E]$, $\{M\} \cap [\alpha] \neq \emptyset$ e $\{M\} \cap [\Phi'] \neq \emptyset$, para cada $(:\Phi'/\Phi') \in$ GD(E,$(\{\alpha\},\Delta_K)$). Uma vez que $M \notin [K\circ_{\Delta}\alpha]$, deve existir um modelo N que satisfaz, pelo menos, mais um componente básico de [K] além dos que M satisfaz. Ou seja, existe um modelo $N \in [E]$ e um componente básico $[\Phi'']$ de [K] tal que $(:\Phi''/\Phi'') \notin$ GD(E,$(\{\alpha\},\Delta_K)$), $N \in [\Phi'']$ e $M \notin [\Phi'']$. Logo, $[E] \cap [\Phi''] \neq \emptyset$, e portanto o default $(:\Phi''/\Phi'')$ é aplicável a E. O que é um absurdo, uma vez que $\langle d_i \rangle_{i \in I}$ é maximal.

Logo, $M \in [K\circ_{\Delta}\alpha]$. ♦

Referências

[1] Alchourrón, C. E. ; Gärdenfors, P.; and Makinson, D., *On the logic of theory change : partial meet functions for contraction and revision*, Journal of Symbolic Logic 50, pp. 510-530, 1985.

[2] Alchourrón, C. E. and Makinson, D., *On the logic of theory change : contraction functions and their associated revision functions*, Theoria 48, pp. 14-37, 1982.

[3] Apt, K. R., Blair, H. A. e Walker, A., *Towards a theory of declarative knowledge*, in Foudations of Deductive Databases and Logic Programming, Ed. J. Minker, Morgan Kaufmann, pp. 89-148, 1988.

[4] Besnard, P., *An introduction to default logic*, Springer-Verlag, 1989.

[5] N. Bidoit and C. Froidevaux. *General logical databases and programs: default logic semantics and stratification.* Information and Computation 91, 15-54 (1991).

[6] N. Bidoit and C. Froidevaux. *Negation by default and unstratifiable logic programs.* Theoretical Computer Science 78, 85-112 (1991).

[7] Birkhoff, G. and Bartee, T.C., *Modern applied algebra*, New York : McGraw-Hill, 1970.

[8] Boutilier, C., *Unifying default reasoning and belief revision in a modal framework*, Artif. Intell. 68 (1994) , pp. 33-85.

[9] Boutilier, C., *Conditional logics of normality : a modal approach* , Artif. Intell.68 (1994), pp. 87-154.

[10] Brass, S., *Deduction with supernormal defaults,* Nonmonotonic and Inductive Logic - Second International Workshop, 1991, Springer, 1992, 153-174.

[11] Brass, S. , Lipeck, U., *Specifying closed world assumption for logic databases,* MFDBS89-2nd Symposium on Math. Fundamentals of Database Systems, Springer, 1989, 68-84

[12] Brass, S. , Lipeck, U., *Semantics of inheritance in logical object specification,* Deductive and Object-Oriented Databases-DOOD'91, Springer, 1991, 411-430.

[13] Brass, S., Ryan, M. and Lipeck, U. , *Hierarchical defaults in specifications,* Information Systems - Correctness and Reusability, Workshop IS-CORE'91, 1991, 179-201.

[14] Brewka, G., *Nonmonotonic reasoning : logical foundations of commonsense*, Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

[15] Brewka, G., *Cumulative Default Logic : in defense of nonmonotonic inference rules*, Artif. Intell. 50 (1991), pp. 183-205.

[16] Casanova,M. A., Giorno, F.A.C., Furtado, A.L., *Programação em Lógica e a Linguagem PROLOG*, Ed. Edgard Blücher Ltda., 1987.

[17] Dalal, M., *Investigations into a theory of knowledge base revision : Preliminary Report*, in Proc. of AAAI-88, pp. 475-479, 1988.

[18] Delgrande, J. P., Schaub, T. e Jackson, W. K., *Alternative approaches to default logic*, Artif. Intell. 70 (1994), pp. 167-237.

[19] Dix, J. 1992. *Default Theories of Poole-Type and a Method for Constructing Cumulative Versions of Default Logic.* Proceedings of ECAI92, Ed. Bernd Neumann, John Wiley & Sons, pp 289-293.

[20] Doyle, J., *Reason maintenance and belief revision : foundations versus coherence theories*, Belief Revision, Ed. P. Gärdenfors, Cambridge Tracts in theoretical Computer Science 29, pp.29-51, 1992.

[21] Enderton H. B., *A mathematical introduction to logic*, Academic Press, 1973.

[22] Etherington. D. W., *Reasoning with imcomplete information*, Pitman, London, 1988.

[23] Etherington, D.W., *Formalizing non-monotonic reasoning systems*, Artif. Intell.31 (1987), pp.41-85.

[24] Etherington, D.W., *A semantics for default logic*, in Proc. of IJCAI-87, pp. 495-498, 1987.

[25] Gärdenfors, P. e Makinson, D., *Nonmonotonic inference based on expectations*, Artif. Intell. 65 (1994), pp. 197-245.

[26] Gärdenfors, P., *Belief Revision : An Introduction*, Belief Revision, Ed. P. Gärdenfors, Cambridge Tracts in theoretical Computer Science 29, pp.1-28, 1992.

[27] Gärdenfors, P., *Knowledge in flux : modeling the dynamics of epistemic states*, Cambridge, MA, The MIT Press, Bradford Books, 1988.

[28] Gelfond, M. e Lifschitz, V., *The stable semantics for logic programs*, in Proc. of the 5th Inter. Symposium on Logic Programming, pp. 1070-1080, MIT Press, 1988.

[29] Giordano, L. e Martelli, A., *On Cumulative Default Logics*, Artif. Intell. 66 (1994), pp. 161-179.

[30] Grove, A., *Two modellings for theory change*, J. of Philosophical Logic 17 (1988) pp.157-170.

[31] Guerreiro, R. and Casanova, M., *An alternative semantics for default logic*. The Third International Workshop on Nonmonotonic Reasoning, South Lake Tahoe, 1990.

[32] Hanks, S. e McDermott, D., *Nonmonotonic logic and temporal projection*, Artif. Intell. 33 (1988), pp. 379-412.

[33] Katsuno, H. e Mendelzon, A. O., *A unified view of propositional knowledge base updates*, in Proc. of the Eleventh International Joint Conference on Artificial Intelligence, pp. 1413-1419, 1989.

[34] Katsuno, H. e Mendelzon, A. O., *Propositional knowledge base revision and minimal change*, Artif. Intell. 52 (1991) pp. 263- 294.

[35] Kraus, S., Lehmann, D., and Magidor, M., *Nonmonotonic reasoning, preferential models and cumulative logics*, Artif. Intell. 44 (1990) pp. 167- 207.

[36] Lewis, D., *Counterfactuals*, Harvard University Press, Cambridge, Mass.,1973.

[37] Lifschitz, V., *On the declarative semantics of Logic Programs with negation*, in Foudations of Deductive Databases and Logic Programming, Ed. J. Minker, Morgan Kaufmann, pp. 177-192, 1988.

[38] Lifschitz, V., *On open default*. In J. Lloyd, editor, Computational logic. Symposium proceedings, pp. 80-95. ESPRIT Basic Research Series. Berlin: Springer-Verlag, 1990.

[39] Lloyd, J. W., *Foundations of Logic Programming*, Springer-Verlag, New York, 1984.

[40] Lukaszewicz, W., *Non-monotonic reasoning - Formalization of commonsense reasoning*,Ellis Horwood, 1990.

[41] Lukaszewicz, W., *Two results on default logic*, Proc. IJCAI-85, Los Angeles, pp. 59-461.

[42] Makinson, D., *General patterns in non-monotonic reasoning*, in D. Gabbay, C. Hogger e J. Robinson, Handbook of Logic in AI, vol. III (OUP 1994).

[43] Makinson, D., *General theory of cumulative inference, Non-monotonic Reasoning*, Lecture Notes in Artificial Intelligence 346 (Springer, Berlin, 1989).

[44] Makinson, D. and Gärdenfors, P. , *Relations between the logic of theory change and nonmonotonic logic*, The Logic of Theory Change, Lecture Notes in Artificial Intelligence 465 (Springer, Berlin, 1991) pp. 185-205.

[45] Marek, W. and Truszczynski, M., *Nonmonotonic logic - context-dependent reasoning*. Berlin: Springer-Verlag 1993.

[46] Marek, W. and Truszczynski, M., *Stable semantics for logic programs and default theories*. In E. Lusk and R. Overbeek, editors, Proceedings of the North American Conference on Logic Programming, pp. 243-256, Cambridge, MA, MIT Press, 1989.

[47] Marek, W. and Truszczynski, M., *Revision specifications by means of revision program*, in Logics in AI, Proc. of JELIA'94. Lecture Notes in Artificial Intelligence. Springer-Verlag, 1994.

[48] Marek, W. and Truszczynski, M., *Revision programming, database updates and integrity constraints*, in Proc. of the 5th Inter. Conf. on Database Theory - ICDT 95, pp. 368-382, Springer-Verlag, 1995.

[49] Mendelson, E., *Álgebra booleana e circuitos de chaveamento*, Coleção Schaum, Ed. McGraw-Hill, 1977.

[50] Mendelson, E., *Introduction to mathematical logic*, The university series in undergraduate mathematics, Van Nostrand Reinhold Company, 1972.

[51] Morris, P. H., *The anomalous extension problem in default reasoning*, Artif. Intell. 35 (1988) pp. 383-399.

[52] Nebel, B., *Syntax based approaches to belief revision*, Belief Revision, Ed. P. Gärdenfors, Cambridge Tracts in theoretical Computer Science 29, pp.52-88, 1992.

[53] Paredes, C.M.G., *Reutilização de Especificações de Objetos*, Dissertação de mestrado, Univ. Técnica de Lisboa, 1993.

[54] Pequeno, T., *A logic for inconsistent nonmonotonic reasoning*, Technical Report 90/6, Dept. of Computing, Imperial College (London 1990).

[55] Poole, D., *A logical framework for default reasoning*, Artif. Intell. 36 (1988) pp. 27- 47.

[56] Poole, D., *What the lottery paradox tells us about default reasoning*, Proc. First Int. Conf. Principles of knowledge representation and reasoning. Toronto 1989.

[57] Przymusinski, T.C., *On the Declarative Semantics of Deductive Databases and Logic Programs*, in Foudations of Deductive Databases and Logic Programming, Ed. J. Minker, Morgan Kaufmann, pp. 193-216, 1988.

[58] Reiter, R., *A logic for default reasoning*, Artif. Intell. 13 (1980) pp. 81-132.

[59] Risch, *A tableaux-based method for Lukaszewicz' variant of default logic*, submitted paper 1992.

[60] Ryan, M. , *Ordered presentations of theories - default reasoning and belief revision*, Ph. D. Thesis, 1992.

[61] Satoh, K., *Nonmonotonic reasoning by minimal belief revision*, in Proc. of the Intern. Conf. on Fifth Generation Computer System, pp. 455-462, 1988.

[62] Schaub, T.H. , *Considerations on default logic*, Ph.D. Thesis, 1992.

[63] da Silva, J.C.P. e Veloso, S.R. , *A Sphere World Semantics for Default Reasoning*, in the Proceedings of the Third International Conference on Logic Programming and Nonmonotonic Reasoning - Lecture Notes in Computer Science 928 - Springer Verlag 1995 - 175-188.

[64] da Silva, J.C.P. e Veloso, S.R. , *A Sphere Semantics Framework for Default Reasoning*, submetido a publicação.

[65] da Silva, J.C.P. e Veloso, S.R. , *Belief revison view of logic programming*, submetido a publicação.

[66] Zaverucha,G., *On Cumulative Default Logic with Filters*, Working Notes of the Sixth International Workshop on Nom-monotonic Reasoning, Timberline, Oregon, pp. 132-140.

[67] Zaverucha,G., *A Prioritized Contextual Default Logic : Curing Anomalous Extensions with a Simple Abnormality Default Theory*, Proc. of the 18Th German Conf. on Artificial Intelligence (KI-94), LNAI 861, Springer Verlag, 260-271, Saarbrucken, Germany, 1994.