

LOCALIZAÇÃO CONTÍNUA DE *HUBS* COM ATRIBUIÇÃO MÚLTIPLA VIA
SUAVIZAÇÃO HIPERBÓLICA

Claudio Joaquim Martagão Gesteira Neto

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE
SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof. Adilson Elias Xavier, D.Sc.

Prof. Claudio Esperança, Ph.D.

Prof. Reinaldo Morabito Neto, D.Sc.

Prof. Nelio Domingues Pizzolato, Ph.D.

RIO DE JANEIRO – RJ, BRASIL

MARÇO DE 2012

CLAUDIO JOAQUIM MARTAGÃO
GESTEIRA NETO,

Localização Contínua de *Hubs* com
Atribuição Múltipla via Suavização
Hiperbólica [Rio de Janeiro] 2012

IX, 28 p. 29,7cm (COPPE/UFRJ,
M.Sc., Engenharia de Sistemas e
Computação, 2012)

Dissertação – Universidade Federal do
Rio de Janeiro, COPPE

1. Hub Location
2. Multiple Allocation
3. Min-Sum-Min Problems
4. Hyperbolic Smoothing
5. Localização de Hubs
6. Alocações Múltiplas
7. Problemas Min-Sum-Min
8. Suavização Hiperbólica

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Agradecimentos

Agradeço a todos os que me apoiaram nesse trabalho, em especial ao Professor Adilson Elias Xavier, amigo de longa data, que concebeu a técnica de Suavização Hiperbólica e a tem aplicado com grande sucesso em diversos contextos. O Prof. Xavier forneceu todos os subsídios essenciais para a confecção desta tese, que não seria possível sem sua participação ativa.

Sou grato também ao professor Henrique Pacca L. Luna, da Universidade Federal de Alagoas, que deu contribuições importantes, sobretudo quanto à contextualização do problema abordado. E aos professores Ricardo Camargo, Gilberto Miranda e Geraldo Robson Mateus, da Universidade Federal de Minas Gerais, que colaboraram com discussões úteis e comentários construtivos.

Agradeço ainda ao ex-aluno da Coppe Jurair R. de Paula Junior, M.Sc. pela colaboração na formatação deste texto.

Finalmente, meus agradecimentos aos professores Claudio Esperança, Reinaldo Morabito e Nelio Pizzolato, por terem aceitado participar da Banca de Defesa da Tese.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

LOCALIZAÇÃO CONTÍNUA DE *HUBS* COM ATRIBUIÇÃO MÚLTIPLA VIA SUAVIZAÇÃO HIPERBÓLICA

Claudio Joaquim Martagão Gesteira Neto

Março/2012

Orientador: Adilson Elias Xavier

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

As redes *hub – and – spoke* (HS) são um conceito importante para o projeto de sistemas de transporte e telecomunicações. Nelas, o tráfego se origina em cada um de diversos locais distribuídos no espaço, com destino a todos os demais. Os fluxos são feitos através de ligações chamadas de *spokes*, que os concentram num conjunto de pontos (*hubs*), que são interconectados entre si por ligações especiais, de baixo custo unitário e grande capacidade. O problema em estudo é o de localizar um determinado número p de hubs, correspondendo a p -medianas, escolhidos no espaço plano contínuo e que formem, junto com os *spokes*, a rede HS mais barata. É atribuído tráfego a cada *hub*, considerando as demandas entre cada par de locais e os respectivos custos de transporte, e se permite que cada ponto receba e envie fluxos por mais de um *hub*. Ao especificar o problema, chega-se a uma formulação *min – sum – min* fortemente não-diferenciável. O método proposto supera esse problema com a técnica de suavização hiperbólica, que é capaz de resolver eficientemente instâncias grandes de problemas de agrupamento (*clusters*). A solução é obtida resolvendo-se uma sequência de subproblemas diferenciáveis de otimização sem restrições, de baixa dimensão. Mostra-se que o método é consistente através de uma série de experimentos com até mil pontos.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

CONTINUOUS HUB LOCATION WITH MULTIPLE ASSIGNMENT
THROUGH THE HYPERBOLIC SMOOTHING APPROACH

Claudio Joaquim Martagão Gesteira Neto

March/2012

Advisor: Adilson Elias Xavier

Department: Systems Engineering and Computer Science

Hub-and-spoke (HS) networks are an important concept in the design of transportation and telecommunications systems. In those systems, items originate in each one of several locations distributed in bi-dimensional space (spokes) and are destined to all the other locations. The traffic flows through links called spokes to a set of points (hubs), which are interconnected through special links with low unit cost and high capacity. The problem under study is the location of a certain number p of hubs, corresponding to p -medians, chosen in flat continuous space and making up, along with the spokes, the cheaper HS network. Traffic is assigned to each hub, considering the demands between each pair of locations and the respective transportation costs, and allowing each point to receive and send flows through more than one hub. The problem specification corresponds to a strongly non-differentiable *min – sum – min* formulation. The proposed method overcomes this difficulty with the hyperbolic smoothing strategy, which has been proven able to solve quite efficiently large instances of clustering problems. The solution is obtained by solving a sequence of low-dimensional differentiable optimization subproblems without constraints. The consistency of the method is shown through a set of computational experiments with up to one thousand points.

Sumário

Lista de Figuras	viii
Lista de Tabelas	ix
1 Introdução e Revisão da Literatura	1
2 Especificação das p -Medianas através de uma Modelagem tipo Contínua	5
3 Metodologia - Suavizando o Problema das p -Medianas	8
4 Resultados Computacionais	17
5 Conclusões	26
Referências Bibliográficas	29

Lista de Figuras

2.1	Uma conexão entre o ponto j e o ponto l	6
2.2	O conjunto de p^2 conexões entre o ponto j e o ponto l	6
3.1	Parcelas do somatório em (3.4)	10
3.2	Parcelas originais e suavizadas do somatório em (3.4)	11
4.1	Cidades Alemãs, $p = 4$, para diversos valores de α	22
4.2	Cidades Alemãs, $p = 4$ - Trajetória dos hubs com a variação de α	24

Lista de Tabelas

4.1	Resultados da instância das Cidades Alemãs ($\alpha = 0,5$)	19
4.2	Resultados da instância das Cidades Alemãs, com α variável ($p = 4$)	20
4.3	Cidades Alemãs: alocações múltiplas como uma função de α ($p=4$) .	20
4.4	Resultados da instância AP200 ($\alpha = 0,5$)	21
4.5	Resultados da instância rd400 do TSPLIB ($\alpha = 0,5$)	23
4.6	Resultados da instância d657 do TSPLIB ($\alpha = 0,5$)	23
4.7	Resultados da instância dsj1000 do TSPLIB ($\alpha = 0,5$)	23

Capítulo 1

Introdução e Revisão da Literatura

A organização hierárquica dos sistemas de transporte e de telecomunicações pode ser encontrada em várias aplicações no mundo real, tais como na localização de estações de correio e de centros de comutação e no transporte rodoviário de cargas, e desempenha um papel importante em pesquisa operacional e em modelos de ciência da administração. O objetivo da maioria destes modelos é a minimização de custos, e, através de níveis otimizados de concentrações do tráfego nos trechos mais eficientes destas redes, consegue-se economias de escala resultantes da agregação dos diversos fluxos. As principais diferenças entre os diversos modelos referem-se ao nível hierárquico do projeto de rede, que tanto pode ser formado por redes centrais do tipo backbone (espinha dorsal) ou por redes de acesso local (O’KELLY e MILLER, 1994; KLINCEWICZ, 1998; LUNA, 2006).

Este estudo se concentra nos problemas em que o acesso local e as redes centrais são projetadas em conjunto, e em que a decisão sobre a localização dos hubs é uma parte fundamental do problema. A adoção de uma arquitetura *hub – and – spoke* proporciona uma simplificação suficiente, em ambos os níveis de rede, para permitir uma visão integrada do problema de projeto dessas redes. A rede central é uma rede totalmente interligada, onde cada hub está ligado a cada um dos outros hubs. Os spokes e o grafo completo da rede central impõem um diâmetro três, o que significa

que qualquer demanda pode ser atendida por um máximo de três ligações entre a origem e o destino das mercadorias.

Em particular, são considerados problemas determinísticos em que os locais dos hubs são escolhidos dentro de uma região *contínua* plana. Este foi o caso do artigo seminal de O'KELLY (1986) sobre a localização de instalações hub que interagem umas com as outras. Algumas importantes contribuições posteriores foram apresentadas por AYKIN (1988) e AYKIN e BROWN (1992). No entanto, desde aqueles estudos iniciais, e através dos inúmeros trabalhos subsequentes, as rotinas computacionais para resolver problemas de hubs de localização contínua não progrediram suficientemente.

A literatura sobre sistemas *hub – and – spoke* tem apenas um quarto de século, mas os problemas de localização *min – sum* originaram-se no século XVII, quando Fermat propôs a questão de, dados três pontos num plano, encontrar um ponto mediano no mesmo tal que a soma das distâncias de cada um dos pontos até o ponto mediano seja minimizada. Alfred Weber, há um século, apresentou o mesmo problema, acrescentando também um peso em cada ponto para considerar as diferentes demandas dos diversos pontos. O problema de Fermat-Weber (uma das várias denominações dadas ao mesmo problema por WESOLOWSKY (1993)), localiza instalações (medianas) em posições *contínuas* no plano euclideano. A ideia por trás do problema foi introduzida no espaço de grafos por HAKIMI (1964), que definiu a mediana absoluta como o ponto de um grafo que minimiza a soma das distâncias ponderadas entre esse ponto e os vértices do grafo. Ele permitiu que este ponto ficasse em qualquer lugar ao longo das bordas do gráfico, mas provou que a mediana absoluta ótima está sempre localizada num nó do grafo, proporcionando assim uma representação discreta de um problema contínuo, limitado às bordas do grafo. Seguindo o trabalho de Hakimi, GOLDMAN (1969) propôs algoritmos para a localização de um hub único numa rede.

A literatura discreta de hub-and-spoke é baseada no trabalho pioneiro de O'KELLY (1987), introduzindo um programa quadrático no espaço dos inteiros para a localização das instalações hub. Outras formulações alternativas de programação linear inteira para problemas de localização discreta de hubs foram feitas por CAMPBELL

(1994), ERNST e KRISHNAMOORTHY (1996, 1998), O'KELLY et al.(1996) e HAMACHER et al. (2004). De fato, uma grande parte da literatura sobre hub-and-spoke, assim como os desenvolvimentos computacionais relacionados à mesma, tem seguido uma abordagem *discreta* para a localização dos hubs, selecionando um subconjunto dos nós existentes para exercerem o papel de hubs. CAMPBELL et al. (2002), registraram que “para cada um dos problemas discretos clássicos fundamentais de localização de instalações (problema da p -mediana, problema das instalações não-capacitado, problema do p -centro e problema de cobertura), problemas de localização análoga de hubs foram formulados e estudados: problema de hub p -mediana, problema dos hubs não-capacitado, problema do centro p -hub e problema de cobertura de hubs.” Uma pesquisa do estado da arte recente da literatura científica sobre a localização de hubs é fornecida por ALUMUR e KARA (2008), que apresentam uma discussão ampla e completa deste tema. As metodologias de resolução para formulações discretas de hubs têm sido melhoradas continuamente. Usando a decomposição de Benders, CONTRERAS et al. (2010) encontraram soluções exatas para o problema de locação de hubs não-capacitado de alocação múltipla, para instâncias com até quinhentos pontos.

A ideia deste trabalho é voltar para as formulações HS *contínuas* originais, mostrando que as manipulações da técnica de suavização hiperbólica são capazes de abordar problemas maiores do que aqueles da ordem de magnitude alcançada pelas abordagens *discretas*. Em certo sentido, o processo pelo qual isto é alcançado é uma extensão de um esquema de suavização hiperbólica, uma adaptação do método de penalização hiperbólica originalmente introduzido por XAVIER (1982). Foi provado recentemente que a aplicação da técnica de suavização hiperbólica é bastante eficiente para a solução de grandes instâncias de problemas de clustering (XAVIER, 2010; XAVIER e XAVIER, 2011). A motivação para resolver versões de grande escala de problemas hub-and-spoke contínuos decorre, dentre outras utilizações no mundo real, de aplicações na área de correios e de logística de transporte rodoviário, transporte aéreo, redes de petróleo off-shore e várias aplicações de telecomunicações.

Este trabalho está organizado da seguinte maneira: A especificação do problema contínuo de hub-and-spoke tipo p -medianas é apresentada no próximo capítulo. A

metodologia de suavização hiperbólica é descrita no capítulo 3. Os resultados computacionais ilustrativos são apresentados no capítulo 4, e algumas conclusões são expostas no capítulo final.

Capítulo 2

Especificação das p -Medianas através de uma Modelagem tipo Contínua

O problema contínuo das p -medianas consiste em localizar um determinado número p de pontos (no caso, polos ou hubs) numa região plana, de forma a minimizar uma função de custo de transporte específica. Para formular este problema, procede-se da forma descrita a seguir. Consideremos que $S = \{s_1, \dots, s_m\}$, onde $s_i \in \mathbb{R}^2$, denote um conjunto de m pontos de origem-destino numa região plana, que em muitas aplicações práticas na área de transportes correspondem a diferentes cidades. Seja w_{jl} a demanda entre dois pontos específicos j e l . Sejam os p hubs representados por $x_i, i = 1, \dots, p$, onde cada $x_i \in \mathbb{R}^2$. O conjunto desses hubs é representado por $X \in \mathbb{R}^{2p}$, e a suposição é de que cada par de hubs é conectado diretamente pela rota mais curta entre os mesmos.

Pode-se observar que, no problema hub-and-spoke em consideração, as conexões entre cada par de pontos j e l retratadas pela Figura 2.1 têm sempre três partes: a partir do ponto de origem j a um primeiro hub a , de a para um segundo hub b e de b para o ponto de destino l . A alocação múltipla é permitida, o que significa que qualquer ponto pode ser servido por mais de um hub. O primeiro e o segundo hubs podem ser coincidentes (isto é, $a = b$), o que significa que um hub único seria usado



Figura 2.1: Uma conexão entre o ponto j e o ponto l

para conectar o ponto de origem j e o ponto de destino l . A Figura 2.2 mostra as p^2 conexões possíveis entre dois pontos, já que os hubs a e b podem ser o mesmo.

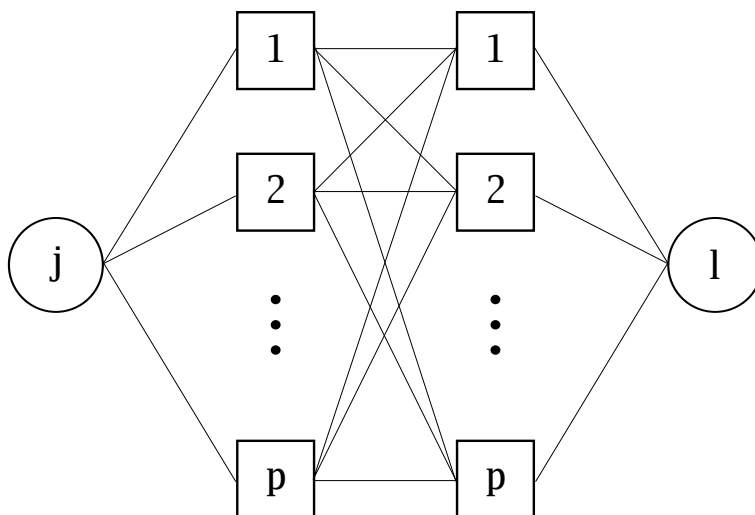


Figura 2.2: O conjunto de p^2 conexões entre o ponto j e o ponto l

O custo unitário associado a uma conexão geral (j, a, b, l) é igual à distância ponderada obtida pela soma de três distâncias euclidianas, com um fator de redução para a segunda parte, entre hubs:

$$z_{jabl} = \|s_j - x_a\|_2 + \alpha \|x_a - x_b\|_2 + \|x_b - s_l\|_2, \quad (2.1)$$

onde α é o fator de redução: $0 \leq \alpha \leq 1$.

O custo unitário do ponto de origem j ao ponto de destino l é escolhido como o valor mínimo para todas as conexões:

$$z_{jl} = \min_{a,b=1,\dots,p} z_{jabl}, \quad (2.2)$$

ou

$$z_{jl} = \min_{a,b=1,\dots,p} \{ \|s_j - x_a\|_2 + \alpha \|x_a - x_b\|_2 + \|x_b - s_l\|_2 \}. \quad (2.3)$$

Para $\alpha = 0$, as conexões com valores mínimos serão aquelas mais próximas, o que leva às soluções do problema de Fermat-Weber.

Capítulo 3

Metodologia - Suavizando o Problema das p -Medianas

Nesta formulação, o problema dos hubs visto como p -medianas corresponde a minimizar o custo total entre todos os pares de cidades, considerando o valor do custo unitário, dado para todas as conexões:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} && \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m w_{jl} z_{jl} && (3.1) \\ \text{sujeito a} &&& z_{jl} = \min_{a,b=1,\dots,p} z_{jabl}, && j, l = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Logo, este problema hub-and-spoke tem uma estrutura chamada *min – sum – min*, com as características de ser não-diferenciável e não-convexa, e tendo uma infinidade de mínimos locais. Uma série de transformações serão realizadas a fim de se chegar a uma formulação contínua. Primeiro, considerando a sua definição, cada z_{jl} deve necessariamente satisfazer o seguinte conjunto de desigualdades:

$$z_{jl} - z_{jabl} \leq 0, \quad a, b = 1, \dots, p. \quad (3.2)$$

Concentrando a atenção nessas desigualdades, é feito um relaxamento, substituindo as restrições de igualdade originais do problema (3.1) pelas desigualdades

acima, obtendo-se o seguinte problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m w_{jl} z_{jl} & (3.3) \\ \text{sujeito a} \quad & z_{jl} - z_{jabl} \leq 0, \quad a, b = 1, \dots, p; \quad j, l = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

As variáveis z_{jl} , na equação (2.3) devem ser não-negativas, uma vez que elas são iguais à soma de normas euclidianas e $\alpha \geq 0$. No entanto, na última formulação, as variáveis z_{jl} não estão mais sujeitas a limites inferiores, e poderão decrescer indefinidamente, assim como a função objetivo, que não terá mínimo. Assim, a fim de obter a equivalência desejada com o problema original, deve-se modificar o problema (3.3) para criar um limite inferior adequado para as variáveis z_{jl} . Fazemos isso através de alguns passos. Primeiramente, é introduzida a função auxiliar $\psi(y)$ que denota $\max\{0, y\}$. Observ-se que, a partir do conjunto de desigualdades em (3.3), segue-se que, para qualquer j, l, a e b , teremos $\psi(z_{jl} - z_{jabl}) = 0$. De forma mais condensada:

$$\sum_{a=1}^p \sum_{b=1}^p \psi(z_{jl} - z_{jabl}) = 0, \quad j, l = 1, \dots, m. \quad (3.4)$$

Para um par fixo de pontos diferentes j e l , admitindo que as p^2 distâncias ponderadas z_{jabl} formem uma sequência estritamente crescente denotada por $d_1 < d_2 < \dots < d_{p^2}$, a Figura 3.1 ilustra as três primeiras parcelas do somatório (3.4) como função de z_{jl} .

Usando (3.4) no lugar do conjunto de restrições de desigualdade em (3.3), obtém-se um problema equivalente, mantendo ainda a propriedade indesejável de que z_{jl} , $j, l = 1, \dots, m$ ainda não tem um limite inferior. Considerando, no entanto, que a função-objetivo do problema (3.3) irá forçar para baixo cada z_{jl} , $j, l = 1, \dots, m$, pode se pensar em limitar por baixo essas últimas variáveis, através da inclusão de uma perturbação $\varepsilon > 0$ em (3.4). Assim, chega-se ao seguinte problema modificado:

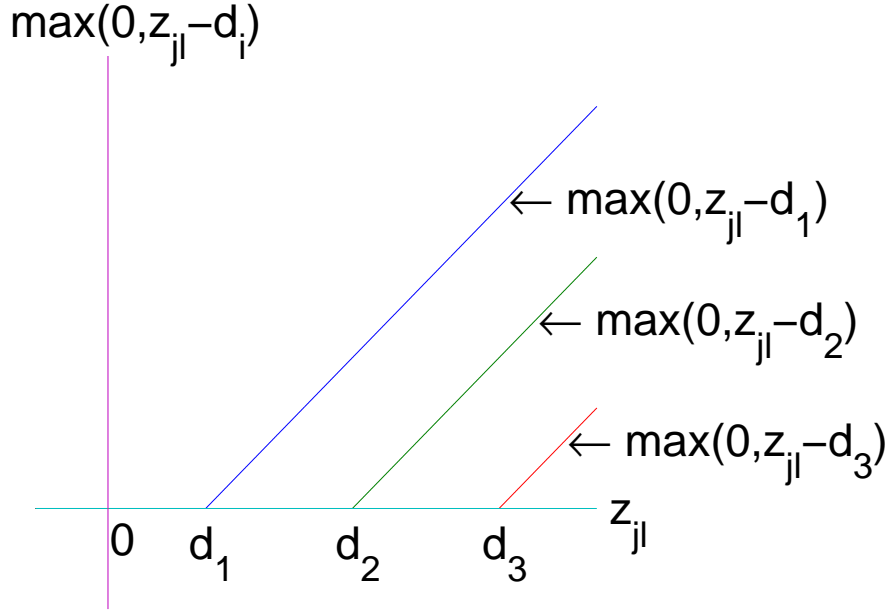


Figura 3.1: Parcelas do somatório em (3.4)

$$\begin{aligned}
 & \text{minimizar} \quad \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m w_{jl} z_{jl} & (3.5) \\
 & \text{sujeito a} \quad \sum_{a=1}^p \sum_{b=1}^p \psi(z_{jl} - z_{jabl}) \geq \varepsilon, \quad j, l = 1, \dots, m.
 \end{aligned}$$

Uma vez que o conjunto viável do problema (3.1) é o limite do de (3.5) quando $\varepsilon \rightarrow 0_+$, é possível considerar a resolução de (3.1) através da solução de uma sequência de problemas como (3.5), com uma sequência decrescente de valores de ε , se aproximando de zero. Entretanto, a definição da função ψ faz com que o problema tenha uma estrutura não-diferenciável extremamente rígida, o que torna sua solução computacional muito difícil. Em vista disso, o método numérico que é adotado para resolver o problema tem uma abordagem de suavização. A partir dessa perspectiva, se define a função:

$$\phi(y, \tau) = \left(y + \sqrt{y^2 + \tau^2} \right) / 2, \quad (3.6)$$

para $y \in \mathbb{R}$ e $\tau > 0$.

A função ϕ tem as seguintes propriedades:

(a) $\phi(y, \tau) > \psi(y), \quad \forall \tau > 0;$

(b) $\lim_{\tau \rightarrow 0} \phi(y, \tau) = \psi(y);$

(c) $\phi(y, \tau)$ é uma função convexa crescente C^∞ da variável y .

Portanto, a função ϕ constitui uma aproximação suavizada da função ψ . Adotando as mesmas premissas usadas na Figura 2.1, as três primeiras parcelas do somatório na equação (3.4) e suas aproximações suavizadas correspondentes, dadas por (3.6), são representadas pelas curvas na Figura 3.2.

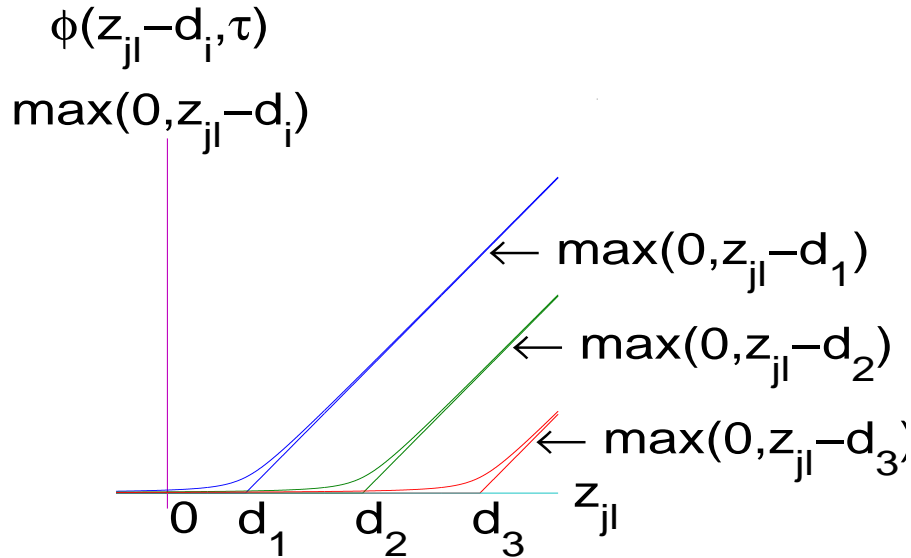


Figura 3.2: Parcelas originais e suavizadas do somatório em (3.4)

Usando a função ϕ no lugar da função ψ em (3.5), chega-se ao problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m w_{jl} z_{jl} & (3.7) \\ & \text{sujeito a} \quad \sum_{a=1}^p \sum_{b=1}^p \phi(z_{jl} - z_{jabl}, \tau) \geq \varepsilon, \quad j, l = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Para obter um problema diferenciável, é necessário ainda suavizar as distâncias ponderadas z_{jabl} . Para este fim, define-se a função

$$\theta(u, v, \gamma) = \sqrt{(v^1 - u^1)^2 + (v^2 - u^2)^2 + \gamma^2}, \quad (3.8)$$

onde $u, v \in \mathbb{R}^2$ e $\gamma > 0$.

A função θ tem as seguintes propriedades:

$$(a) \lim_{\gamma \rightarrow 0} \theta(u, v, \gamma) = \|v - u\|_2;$$

(b) θ é uma função C^∞ .

Usando a função θ no lugar das distâncias euclidianas, obtém-se o seguinte problema, completamente diferenciável:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m w_{jl} z_{jl} & (3.9) \\ \text{sujeito a} \quad & \sum_{a=1}^p \sum_{b=1}^p \phi(z_{jl} - (\theta(s_j, x_a, \gamma) + \\ & \alpha \theta(x_a, x_b, \gamma) + \theta(x_b, s_l, \gamma)), \tau) \geq \varepsilon, \quad j, l = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

Agora, as propriedades das funções ϕ e θ permitem buscar uma solução para o problema (3.5) através da resolução de uma sequência de subproblemas como o problema (3.9), produzida através da diminuição dos parâmetros $\gamma \rightarrow 0$, $\tau \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

O processo de minimização da função objetivo vai trabalhar no sentido de reduzir ao máximo os valores de z_{jl} , $j, l = 1, \dots, m$. Por outro lado, dado qualquer conjunto de hubs x_i , $i = 1, \dots, p$, devido à propriedade (c) da função de suavização

hiperbólica ϕ , as restrições do problema (3.9) são funções monotonicamente crescentes de z_{jl} . Conseqüentemente, essas restrições estarão certamente ativas e o problema (3.9) acabará por ser equivalente ao problema:

$$\begin{aligned} & \text{minimizar} \quad \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m w_{jl} z_{jl} & (3.10) \\ \text{sujeito a} \quad & h_{jl}(z_{jl}, x) = \sum_{a=1}^p \sum_{b=1}^p \phi(z_{jl} - (\theta(s_j, x_a, \gamma) + \\ & \alpha \theta(x_a, x_b, \gamma) + \theta(x_b, s_l, \gamma)), \tau) - \varepsilon = 0, \quad j, l = 1, \dots, m. \end{aligned}$$

A dimensão do espaço de domínio das variáveis do problema (3.10) é $(2p+m^2)$. Uma vez que, em geral, é grande o valor do parâmetro m , a cardinalidade do conjunto S das cidades ou pontos s_j , o problema (3.10) tem um grande número de variáveis. No entanto, ele tem uma estrutura separável, porque cada variável z_{jl} aparece apenas em uma restrição de igualdade. Portanto, como a derivada parcial de $h_{jl}(z_{jl}, x)$ com respeito a z_{jl} , $j, l = 1, \dots, m$ não é igual a zero, é possível usar o Teorema da Função Implícita para calcular cada componente z_{jl} , $j, l = 1, \dots, m$ como uma função das variáveis de alocação de hubs x_i , $i = 1, \dots, p$. Desta maneira, se obtém o problema sem restrições:

$$\text{minimizar} \quad f(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m w_{jl} z_{jl}(x) \quad (3.11)$$

onde cada $z_{jl}(x)$ resulta do cálculo de um zero de cada equação

$$\begin{aligned} h_{jl}(z_{jl}, x) = \sum_{a=1}^p \sum_{b=1}^p \phi(z_{jl} - (\theta(s_j, x_a, \gamma) + \\ \alpha \theta(x_a, x_b, \gamma) + \theta(x_b, s_l, \gamma)), \tau) - \varepsilon = 0, \quad j, l = 1, \dots, m. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Devido à propriedade (c) da função de suavização hiperbólica, cada termo ϕ acima é estritamente crescente com a variável z_{jl} e, portanto, a equação tem um único zero.

Novamente, devido ao Teorema da Função Implícita, as funções $z_{jl}(x)$ têm todas as derivadas com relação às variáveis x_i , $i = 1, \dots, p$, e, portanto, é possível calcular o gradiente da função objetivo do problema(3.11),

$$\nabla f(x) = \sum_{j=1}^m \sum_{l=1}^m w_{jl} \nabla z_{jl}(x), \quad (3.13)$$

onde

$$\nabla z_{jl}(x) = - \nabla h_{jl}(z_{jl}, x) / \frac{\partial h_{jl}(z_{jl}, x)}{\partial z_{jl}}, \quad (3.14)$$

enquanto $\nabla h_{jl}(z_{jl}, x)$ e $\partial h_{jl}(z_{jl}, x)/\partial z_{jl}$ podem ser obtidas diretamente a partir das equações (3.6), (3.8) e (3.12). Em primeiro lugar, usando (3.12), obtêm-se as seguintes expressões:

$$\frac{\partial h_{jl}(z_{jl}, x)}{\partial z_{jl}} = \sum_{a=1}^p \sum_{b=1}^p \phi'(z_{jl} - (\theta(s_j, x_a, \gamma) + \alpha \theta(x_a, x_b, \gamma) + \theta(x_b, s_l, \gamma)), \tau) \quad (3.15)$$

e

$$\nabla h_{jl}(z_{jl}, x) = \sum_{a=1}^p \sum_{b=1}^p \phi'(z_{jl} - (\theta(s_j, x_a, \gamma) + \alpha \theta(x_a, x_b, \gamma) + \theta(x_b, s_l, \gamma)), \tau) (\nabla \theta(s_j, x_a, \gamma) + \alpha \nabla \theta(x_a, x_b, \gamma) + \nabla \theta(x_b, s_l, \gamma)). \quad (3.16)$$

Em seguida, usando (3.6), obtém-se

$$\phi'(y, \tau) = \left(1 + y / \sqrt{y^2 + \tau^2}\right) / 2. \quad (3.17)$$

E utilizando (3.8), chega-se finalmente a:

$$\nabla\theta(s_j, x_a, \gamma) = \frac{1}{(\sum_{q=1}^2 (x_a^q - s_j^q)^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}} (0, \dots, 0, x_a^1 - s_j^1, x_a^2 - s_j^2, 0, \dots, 0)^T \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \nabla\theta(x_a, x_b, \gamma) &= \frac{1}{(\sum_{q=1}^2 (x_b^q - x_a^q)^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}} \\ &(0, \dots, 0, -(x_b^1 - x_a^1), -(x_b^2 - x_a^2), 0, \dots, 0, x_b^1 - x_a^1, x_b^2 - x_a^2, 0, \dots, 0)^T \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$\nabla\theta(x_b, s_l, \gamma) = \frac{1}{(\sum_{q=1}^2 (s_l^q - x_b^q)^2 + \tau^2)^{\frac{1}{2}}} (0, \dots, 0, s_l^1 - x_b^1, s_l^2 - x_b^2, 0, \dots, 0)^T \quad (3.20)$$

A abordagem acima emprega a mesma ideia básica de ABADIE e CARPENTIER (1969) para o desenvolvimento do algoritmo geral de gradiente reduzido, destinado à solução do problema de programação não-linear geral sujeito a restrições de igualdade.

Dessa maneira, é fácil resolver o problema (3.11) utilizando qualquer método baseado em informações das derivadas de primeira ordem. Finalmente, deve-se enfatizar que o problema (3.11) está definido num espaço que tem $2p$ dimensões, e por isso é um problema pequeno, pois o número de hubs, p , é em geral pequeno nas aplicações do mundo real.

A solução do problema original de hub-and-spoke visto como p -medianas pode assim ser obtida usando o algoritmo de Suavização Hiperbólica Hub-and-Spoke (SHHS), descrito a seguir de forma simplificada.

Algoritmo SHHS Simplificado

Passo de Inicialização: Escolha de valores iniciais: $x^0, \gamma^1, \tau^1, \varepsilon^1$.

Escolha de valores: $0 < \rho_1 < 1, 0 < \rho_2 < 1, 0 < \rho_3 < 1$; faça $k = 1$.

Passo Principal: Repita até que uma regra de parada seja atingida

Resolva o problema (3.11) com $\gamma = \gamma^k, \tau = \tau^k$ e $\varepsilon = \varepsilon^k$, começando no ponto inicial x^{k-1} e seja x^k a solução obtida.

faça $\gamma^{k+1} = \rho_1 \gamma^k, \tau^{k+1} = \rho_2 \tau^k, \varepsilon^{k+1} = \rho_3 \varepsilon^k, k := k + 1.$ ■

Assim como em outros métodos de suavização, a solução para o problema de hubs p -medianas é obtida, em teoria, através da solução de uma sequência infinita de problemas de otimização. No algoritmo SHHS, cada problema que é minimizado é sem restrições e de dimensão reduzida.

Observe-se que o algoritmo faz com que τ e γ se aproximem de zero, fazendo com que as restrições dos subproblemas que ele resolve, dadas como em (3.9), tendam àquelas de (3.5). Além disso, o algoritmo faz com que ε se aproxime de zero, de tal forma que, num movimento simultâneo, o problema (3.5) gradualmente se aproxima do problema (3.1).

Capítulo 4

Resultados Computacionais

Os experimentos numéricos foram realizados num PC Intel Celeron com uma CPU de 2,7GHz e RAM de 512MB. Os programas foram codificados com o Compaq Visual Fortran, Versão 6.1. As rotinas de minimização foram feitas através de um algoritmo Quasi-Newton, utilizando a fórmula de atualização BFGS da Biblioteca Harwell, disponível em <http://www.hs1.rl.ac.uk/>.

Os resultados computacionais apresentados a seguir foram obtidos a partir de uma primeira implementação do algoritmo, sem qualquer procedimento de poda especial e onde os hubs iniciais de partida $x_i^0, i = 1, \dots, p$ foram dispostos, de uma forma muito simples, em torno do centro de gravidade do conjunto de cidades, fazendo perturbações aleatórias proporcionais ao desvio padrão deste conjunto, segundo as fórmulas: $\bar{s} = \sum_{j=1}^m s_j / m$, $\sigma = (\sum_{j=1}^m \|s_j - \bar{s}\|_2^2 / m)^{1/2}$, $x_i = \bar{s} + a \sigma$, onde os componentes do vetor a são variáveis aleatórias uniformes no intervalo $[-0,5, +0,5]$.

O valor de τ^1 foi tomado como $1/100$ do desvio padrão. As seguintes escolhas foram feitas para os outros parâmetros:

$$\varepsilon^1 = 4\tau^1, \quad \gamma^1 = \tau^1/100, \quad \rho_1 = 1/4, \quad \rho_2 = 1/4 \text{ e } \rho_3 = 1/4.$$

Para ilustrar o desempenho do algoritmo proposto, são mostrados abaixo os resultados obtidos através da utilização de cinco problemas de teste padrões da literatura. A ideia aqui é usar exemplos que podem ser facilmente reproduzidos para possíveis comparações. As instâncias usadas são os seguintes problemas:

- Cidades Alemãs (German Towns), que usa as duas coordenadas cartesianas de 59 cidades, originalmente apresentado por SPÄTH (1980);

- AP200, que é um dos maiores conjuntos padrão de dados de localização de hubs, apresentado originalmente por ERNST e KRISHNAMOORTHY (1996) e reproduzido na OR Library (biblioteca de pesquisa operacional) - (BEASLEY, 1990), disponível através do site:

<http://people.brunel.ac.uk/~mastjjb/jeb/orlib/phubinfo.html>

- rd400, d657 and dsj1000, que são instâncias que usam dados originais para o problema do caixeiro viajante apresentado por REINELT (1991) e conhecido como TSPLIB. O complemento numérico do nome de cada instância corresponde ao seu número de cidades. Os três conjuntos de dados estão no site:

<http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/TSPLIB95/>

Para os experimentos computacionais, considerou-se uma matriz de demanda simétrica, $w_{jl} = w_{lj}$ para $j, l = 1, \dots, m$ quando $j \neq l$, e com os elementos da diagonal iguais a zero, $w_{jj} = 0$ para $j = 1, \dots, m$. Para a instância AP200, considerou-se os dados de demanda originais reproduzidos por BEASLEY (1990), mas tendo o valor do elemento w_{jl} como a soma dos elementos originais w_{jl} e w_{lj} . Para os casos restantes, é suposta uma demanda fixa unitária $w_{jl} = 1$, $j, l = 1, \dots, m$ quando $j \neq l$, para todos os pares de cidades de origem e destino. Assim, o problema (3.11) assume a seguinte formulação, mais simplificada:

$$\text{minimizar } f(x) = \sum_{j=1}^{m-1} \sum_{l=j+1}^m w_{jl} z_{jl}(x). \quad (4.1)$$

Os resultados computacionais obtidos são apresentados nas tabelas 4.1 a 4.7. Como o problema (4.1) é um problema de otimização global, usou-se uma estratégia multi-partida com $T = 10$ tentativas diferentes de pontos de partida, escolhidos aleatoriamente para cada instância. Para as tabelas 4.1 e 4.4 a 4.7, o parâmetro de desconto foi definido como $\alpha = 0,5$. A primeira coluna apresenta o número especificado de hubs (p). A segunda coluna apresenta o melhor valor da função objetivo (f_{SHHS}). As três colunas seguintes apresentam o número de ocorrências

da melhor solução ($Ocorr$), o erro percentual médio das T soluções (E_{Med}) em relação à melhor solução obtida (f_{SHHS}) e o tempo médio de CPU em segundos (T_{Med}). Definindo f^t como o melhor valor da função objetivo obtido a partir da tentativa de ponto de partida t , o erro percentual E_{Med} observado em todas as T tentativas é calculado pela expressão:

$$E_{Med} = \frac{100 \sum_{t=1}^T (f^t - f_{SHHS})}{T f_{SHHS}}. \quad (4.2)$$

O esforço necessário para a resolução de (4.1) depende, em primeiro lugar, da dimensão do problema, igual a $2p$. No entanto, cada avaliação da função objetivo envolve o cálculo de $m(m-1)/2$ distâncias. Uma a uma, cada distância z_{jl} é obtida através do cálculo de um zero da equação (3.12), que tem p^2 termos. Assim, a avaliação da complexidade da função resultante é $O(m^2p^2)$. Se for admitido que o número de iterações feitas na etapa principal do algoritmo SHHS é proporcional à dimensão do espaço de domínio da variável, a complexidade da resolução do problema todo seria $O(m^2p^3)$.

A Tabela 4.1 apresenta os resultados computacionais obtidos para a instância das cidades alemãs, com 59 cidades. Para os casos de p menores, as ocorrências da melhor solução, dada pela coluna $Ocorr$ são relativamente mais comuns. Os erros médios apresentados pelas 10 soluções, dados pela coluna E_{Med} , têm valores baixos, que indicam um desempenho consistente do algoritmo.

p	f_{SHHS}	$Ocorr$	E_{Med}	T_{Med}
2	171285	10	0,00	0,53
3	154629	6	0,01	2,48
4	139158	9	0,75	8,47
5	131453	4	2,03	18,23
6	126496	1	0,68	39,30
7	122636	2	0,73	76,28
8	119239	1	0,81	149,52
9	116583	1	1,25	246,99
10	113962	1	1,39	383,56

Tabela 4.1: Resultados da instância das Cidades Alemãs ($\alpha = 0,5$)

α	f_{SHHS}	$Ocorr$	E_{Med}	T_{Med}
0,000	87574	9	0,01	4,72
0,125	102437	10	0,00	7,67
0,250	116102	8	1,83	7,19
0,375	128364	7	2,10	5,72
0,500	139158	9	0,75	8,47
0,625	148391	10	0,00	9,90
0,750	156190	5	0,64	9,39
0,875	161837	7	0,07	7,20
1,000	164388	8	0,28	9,94

Tabela 4.2: Resultados da instância das Cidades Alemãs, com α variável ($p = 4$)

A Tabela 4.2 mostra os resultados de nove soluções da instância das Cidades Alemãs associadas a diferentes valores do fator de redução α , a saber $\alpha = 0; 0,125; 0,25; 0,375; 0,5; 0,625; 0,75; 0,875; e 1$. Note-se que, para todos os casos, o número de hubs foi fixado em $p = 4$. As colunas $Ocorr$ e E_{Med} mostram a consistência do algoritmo. A coluna T_{Med} mostra um ligeiro aumento do tempo de CPU quando o valor do parâmetro de desconto α aumenta. A Figura 4.1 ilustra graficamente os resultados correspondentes. Estes números mostram o fenômeno do aumento expressivo no número de ligações entre cidades e hubs quando o fator α aumenta.

α	1 aloc	2 alocs	3 alocs	4 alocs	Arcos de Acesso
0,000	59	0	0	0	59
0,125	53	6	0	0	65
0,250	51	7	1	0	68
0,375	44	14	0	1	76
0,500	39	17	1	2	84
0,625	35	19	1	4	92
0,750	26	24	1	8	109
0,875	12	28	6	13	138
1,000	1	0	5	53	228

Tabela 4.3: Cidades Alemãs: alocações múltiplas como uma função de α ($p=4$)

A Tabela 4.3 mostra o comportamento das atribuições múltiplas das 59 Cidades Alemãs segundo a variação do parâmetro de desconto. A primeira coluna mostra o valor de α , as quatro colunas seguintes mostram o número de cidades, respectivamente, com 1, 2, 3 e 4 alocações, e a última coluna mostra o número total de

arcos de acesso. Para $\alpha = 0$ o problema torna-se equivalente à soma das distâncias mínimas do problema de agrupamento (*clustering*), que é o problema de localização de Fermat-Weber (WESOLOWSKY, 1993), cuja solução é caracterizada por uma única alocação para cada cidade.

Quando α é pequeno, as economias de escala na utilização de ligações inter-hub inibe as alocações múltiplas. É interessante notar que, entre as 59 cidades, para $\alpha = 0,25$, apenas oito são servidas por mais de um hub, com uma única cidade estando ligada a três hubs. Para $\alpha = 0,5$, vinte das 59 cidades são atendidos pela alocação múltipla de hubs, com duas dessas cidades estando ligadas a todos os quatro hubs. No outro extremo, para $\alpha = 1$, não há economia de escala, e nenhuma das interligações entre hubs é usada, já que não vale a pena. Neste caso, quase todas as cidades são servidas por todos os hubs e um único hub é usado por qualquer par de cidades origem-destino.

Apesar da alta sensibilidade à variação do parâmetro α do número de alocações associado a cada cidade, como mostrado pela Figura 4.1 e resumido na Tabela 4.3, a localização dos hubs sofre apenas pequenos deslocamentos, como ilustrado pela Figura 4.2. Nos experimentos das Cidades Alemãs, denotando por $x_i^*(\alpha), i = 1, \dots, 4$ a localização ótima dos hubs para o problema (4.1) para diferentes valores do parâmetro α , os deslocamentos entre os locais dos hubs associados a $\alpha = 0$ e $\alpha = 1$, definido por $|x_i^*(1) - x_i^*(0)|, i = 1, \dots, 4$, assumem as proporções de 23,9%, 10,9%, 5,7% e 5,7% em relação ao desvio padrão σ .

p	f_{SHHS}	$Ocorr$	E_{Med}	T_{Med}
2	74900	10	0,00	13,19
3	68593	1	1,06	47,85
4	63239	7	1,47	196,16
5	60742	2	0,45	453,52
6	58469	3	0,32	949,79
7	56547	1	0,61	1910,85
8	54659	1	0,56	3336,10

Tabela 4.4: Resultados da instância AP200 ($\alpha = 0,5$)

A Tabela 4.4 apresenta os resultados computacionais obtidos para a instância AP200 (de 200 cidades), um dos maiores conjuntos padrão de dados sobre a local-

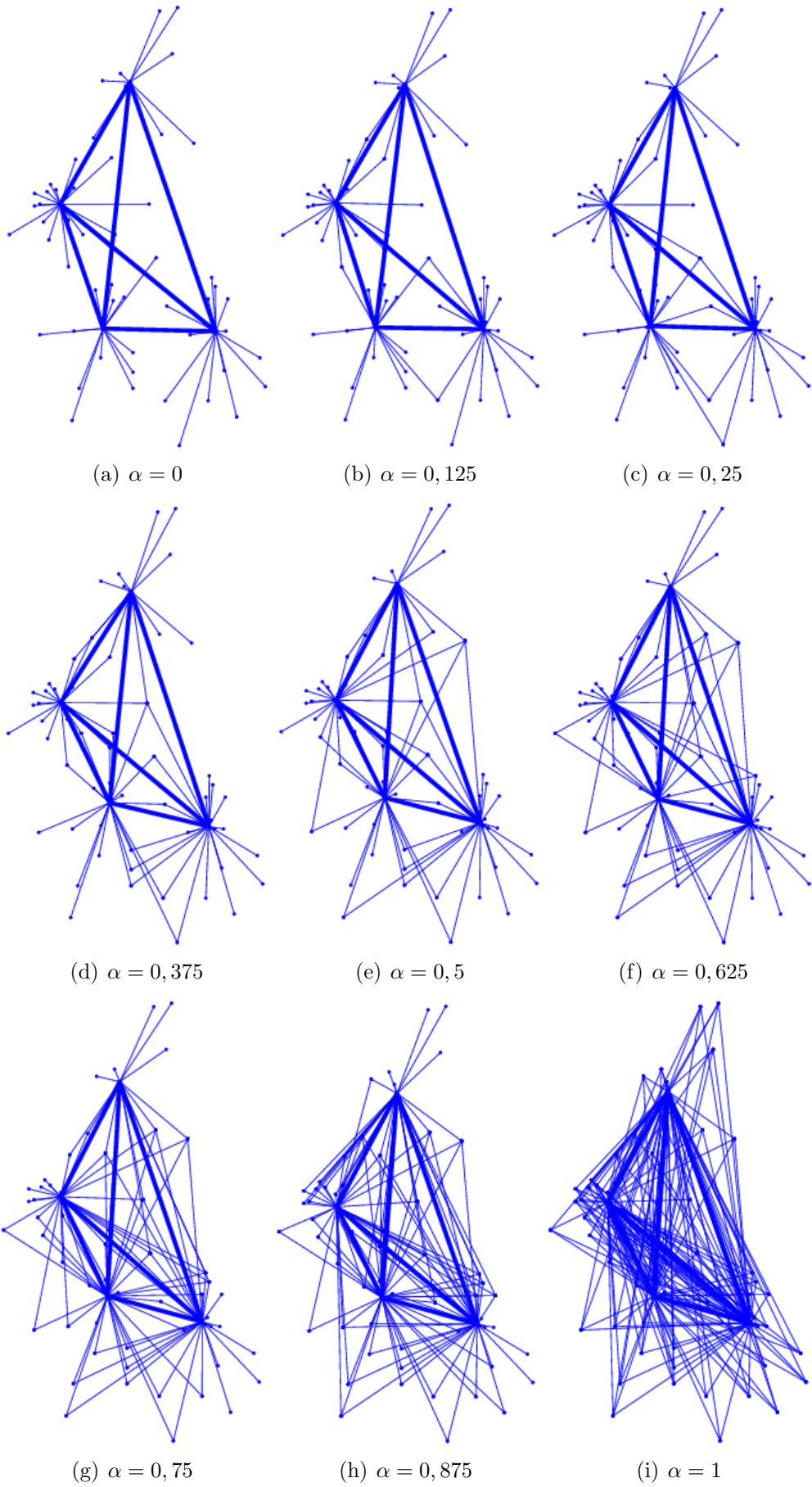


Figura 4.1: Cidades Alemãs, $p = 4$, para diversos valores de α

p	f_{SHHS}	$Ocorr$	E_{Med}	T_{Med}
2	0,535053E8	9	0,18	33,65
3	0,470813E8	10	0,00	111,54
4	0,434243E8	10	0,00	290,82
5	0,412475E8	1	0,50	750,83
6	0,395146E8	2	0,37	1236,87

Tabela 4.5: Resultados da instância rd400 do TSPLIB ($\alpha = 0,5$)

p	f_{SHHS}	$Ocorr$	E_{Med}	T_{Med}
2	0,349046E9	10	0,00	95,66
3	0,314874E9	10	0,00	326,54
4	0,291443E9	5	0,28	882,16
5	0,273784E9	9	0,10	2132,17
6	0,260834E8	10	0,00	3875,53

Tabela 4.6: Resultados da instância d657 do TSPLIB ($\alpha = 0,5$)

p	f_{SHHS}	$Ocorr$	E_{Med}	T_{Med}
2	0,342083E12	10	0,00	376,66
3	0,285747E12	10	0,00	1296,32
4	0,263992E12	9	0,07	3754,33
5	0,248652E12	4	0,35	8234,88
6	0,240642E12	-	-	17619,41

Tabela 4.7: Resultados da instância dsj1000 do TSPLIB ($\alpha = 0,5$)

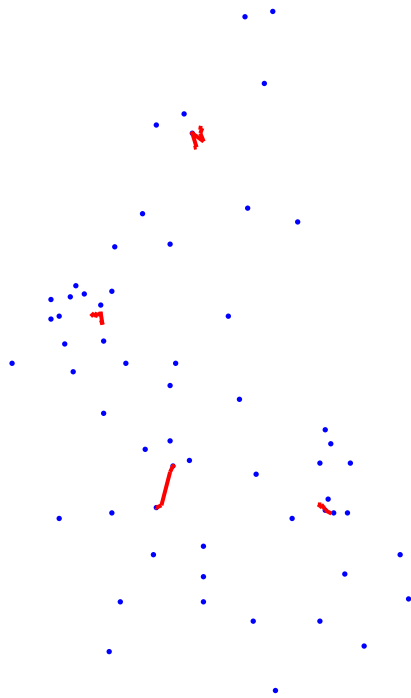


Figura 4.2: Cidades Alemãs, $p = 4$ - Trajetória dos hubs com a variação de α

ização de hubs. O número máximo de hubs testado foi $p = 8$, quando o tempo de CPU chegou a quase uma hora. Os resultados computacionais produzidos pelo algoritmo SHHS na resolução deste caso têm características semelhantes ao da instância das Cidades Alemãs.

As tabelas 4.5, 4.6 e 4.7 apresentam os resultados computacionais para as instâncias rd400, d657 e dsj1000, provenientes do TSPLIB. Para esses casos maiores, um número máximo $p = 6$ de hubs foi considerado. Para o maior caso de todos, dsj1000, quando $p = 6$, apenas um ponto de partida inicial foi processado, porque o tempo de CPU é muito alto neste caso. Este resultado único mostra o efeito do parâmetro m , o número de cidades, sobre a complexidade intrínseca do problema de *hub – and – spoke* tipo p -medianas. Os resultados computacionais produzidos pelo algoritmo SHHS para essas três instâncias têm características semelhantes aos anteriores.

A partir dos resultados apresentados nas tabelas 4.1 a 4.7, vê-se que a primeira implementação do algoritmo SHHS para resolver instâncias grandes de *hub – and –*

spoke contínuo confirma a consistência da metodologia proposta. O número expressivo de ocorrências da melhor solução para casos pequenos ($p \leq 4$) mostra o desempenho consistente do algoritmo. Os baixos valores do erro médio das 10 soluções (E_{Med}) em relação à melhor solução obtida mostram a consistência e a estabilidade numérica do algoritmo. Finalmente, os problemas de hub-and-spoke p -medianas foram convenientemente resolvidos em tempos de CPU adequados, como consequência tanto da dimensão baixa do problema não-linear (3.11), definido num espaço de dimensão $2p$, e do uso de um algoritmo de minimização que se aproveita da propriedade de diferenciabilidade C^∞ .

Capítulo 5

Conclusões

Os sistemas de *hub-and-spoke* (HS) são projetados para explorar as economias de escala atingíveis através do uso compartilhado de ligações de alta eficiência entre os polos de distribuição (hubs). Como alternativa à abordagem discreta padrão, que consiste na seleção de hubs a partir de um subconjunto dos nós existentes, este trabalho explora a possibilidade de localizar os hubs no espaço plano contínuo. Dada a demanda de tráfego entre cada par origem-destino e os respectivos custos de transporte, o problema consiste em encontrar a rede HS mais barata, determinando a localização dos hubs no espaço contínuo e atribuindo fluxos a cada um deles.

Este trabalho propõe um novo método para a solução dos problemas de alocação múltipla contínua de hubs p -medianas. Usando a técnica de suavização hiperbólica, o problema foi inicialmente reformulado, através de uma abordagem de aproximação, como sendo um problema de otimização com restrições completamente diferenciável. Usando o Teorema da Função Implícita, o problema foi novamente reformulado como um problema de otimização sem restrições de baixa dimensão, no espaço euclidiano \mathbb{R}^{2p} . Em seguida, foram apresentados os passos básicos de um algoritmo para resolver o problema original de hub-and-spoke contínuo.

O desempenho consistente do Algoritmo SHHS pode ser atribuído à diferenciabilidade completa da abordagem adotada. Não é possível comentar sobre a eficiência ou a robustez do algoritmo proposto, uma vez que não se conseguiu encontrar na literatura qualquer referência para soluções do problema de localização contínua de hubs para instâncias com tamanhos semelhantes aos apresentados neste trabalho.

Portanto, os resultados conseguidos representam um desafio para trabalho futuro.

Este trabalho teve origem como uma extensão natural de trabalhos anteriores sobre análise de agrupamentos (clustering) feitos pelo Prof. Adilson Xavier e alguns de seus colaboradores. Foi recentemente demonstrado que a aplicação da técnica de suavização hiperbólica é bastante robusta e eficiente na resolução de grandes instâncias dos problemas de agrupamento baseados na minimização da soma dos quadrados (MSSC): XAVIER (2010) e XAVIER e XAVIER (2011). Um desempenho idêntico foi também observado em relação a um problema de cobertura (XAVIER e OLIVEIRA, 2005), que é um problema $min - max - min$. A aplicação do mesmo método para o modelo aqui estudado, que é uma extensão direta do problema MSSC, exhibe um comportamento consistente, também observado nas experiências anteriores acima relacionadas.

Apesar ter sido considerada apenas a formulação especial para uma rede de hubs completamente interligada, deve ser enfatizado que esta abordagem pode ser usada para resolver outros problemas de hub-and-spoke. Para outras topologias de conexões diferentes daquela retratada pela Figura 2.2, apenas algumas adaptações têm de ser feitas. Além disso, espera-se que a metodologia possa ser aplicada a uma ampla gama de problemas $min - sum - min$ e $min - max - min$. Por exemplo, pode ser especialmente interessante aplicar esta abordagem para problemas mais gerais considerados por DEMYANOV (2005) e RUBINOV (2006).

A análise comparativa de desempenho entre a metodologia proposta e outras alternativas, a ser feita através da resolução de grandes instâncias Ceteris Paribus é um tema para trabalhos futuros. Além disso, algumas melhorias podem ser feitas a partir da primeira implementação do algoritmo, tais como o uso de um ponto de partida mais apropriado ou a diminuição do tempo computacional.

Para o caso $\alpha = 0$, a formulação corresponde ao problema de Fermat-Weber. Note-se que a aplicação da metodologia de suavização hiperbólica gera uma formulação contínua do problema de Fermat-Weber, que pode ser resolvida de forma eficiente, como demonstrado por XAVIER e XAVIER (2011). Considerando os pequenos deslocamentos dos locais dos hubs em resposta à variação de α , como

mostra a Figura 4.2, um ponto de partida natural poderia ser determinado pela solução daquele problema.

O cálculo da função objetivo do problema (3.11) exige o cálculo dos zeros de $m(m-1)/2$ equações (3.12), uma equação para cada par de cidades, cada uma com p^2 termos. Esta é a tarefa computacional mais relevante associada ao algoritmo SHHS. No entanto, é possível conceber um forte procedimento de poda, usando um esquema de partição semelhante ao apresentado por XAVIER e XAVIER (2011).

Finalmente, é importante ressaltar que problema de hub-and-spoke de alocação múltipla contínua tipo p -medianas é um problema de otimização global com uma grande quantidade de mínimos locais. Em consequência, o algoritmo SHHS não garante que se atinja a solução ótima global. De qualquer forma, este trabalho mostra como uma primeira implementação do algoritmo proposto é capaz de produzir soluções consistentes para instâncias de grande escala, encontradas em muitas aplicações do mundo real. Acreditamos que esta metodologia pode ser suficientemente adequada para as necessidades de várias aplicações relevantes.

Referências Bibliográficas

ABADIE, J., J. CARPENTIER. 1969. Generalization of the Wolfe Reduced Gradient Method to the Case of Nonlinear Constraints, em *Optimization*, R. Fletcher (editor), Academic Press, Londres, 37-47.

ALUMUR, S., KARA, B.Y. 2008. Network hub location problems: The state of the art. *European Journal of Operational Research* **190** 1-21.

AYKIN, T. 1988. On the Location of Hub Facilities, *Transportation Science* **22** 155-157.

AYKIN, T., G.F. BROWN. 1992. Interacting New Facilities and Location-Allocation Problems, *Transportation Science* **26** 212-222.

BAGIROV, A.M. 2008. Modified Global k-means Algorithm for Minimum Sum-of-Squares Clustering Problems, *Pattern Recognition* **41** No. 10 3192-3199.

BAGIROV, A.M., J. YEARWOOD. 2006. A New Nonsmooth Optimization Algorithm for Minimum Sum-of-Squares Clustering Problems, *European Journal of Operational Research* **170** 578-596

BEASLEY, J.E. 1990. OR-Library: distributing test problems by electronic mail, *Journal of the Operational Research Society* **41** 1069-1072.

CAMARGO, R.S., G. de MIRANDA, H.P.L. LUNA. 2008. Benders Decomposition for the Uncapacitated Multiple Allocation Hub Location Problem, *Computers and Operations Research* **35** 1047-1064.

CAMPBELL, J.F. 1994. Integer Programming Formulations of Discrete Hub Location Problems, *European Journal of Operational Research* **72** 1-19.

- CAMPBELL, J.F., ERNST, A.T., KRISHNAMOORTHY, M. 2002. Hub location problems, in *Facility location: Applications and theory*, Z. Drezner and H. W. Hamacher (editors), 373-407. Springer-Verlag, Berlin.
- CHAVES, A.M.V. 1997. Resolução do Problema Minimax Via Suavização, dissertação de Mestrado - COPPE - UFRJ, Rio de Janeiro.
- CONTRERAS, I., J-F. CORDEAU, G. LAPORTE. 2010. Benders Decomposition for Large-Scale Uncapacitated Hub Location, *Technical Report CIRRELT-2010-26*, Montreal, Canada.
- CUNHA, C.B. , M.R. SILVA. 2007. A Genetic Algorithm for the Problem of Computing a Hub-and-Spoke Network for a LTL Trucking Company in Brazil, *European Journal of Operational Research* **179** 747-758.
- DEMYANOV, A. 2005. On the Solution of Min-Sum-Min Problems, *Journal of Global Optimization* **31** 3 437-453.
- ERNST, A.T., M. KRISHNAMOORTHY. 1996. Efficient Algorithms for the Uncapacitated Single Allocation p -Hub Median Problem, *Location Science* **4** 139-154.
- ERNST, A.T., M. KRISHNAMOORTHY. 1998. Exact and Heuristic Algorithms for the Uncapacitated Multiple Allocation p -Hub Median Problems, *European Journal of Operational Research* **104** 100-112.
- FERREIRA, R.P.M., H.P.L. LUNA. 2003. Discrete Capacity and Flow Assignment Algorithms with Performance Guarantee, *Computer Communications* **26** 1056-1069.
- GAVISH, B. 1991. Topological Design of Telecommunication Networks – Local Access Design Methods, *Annals of Operations Research* **33** 17-71.
- GAVISH, B., K. ALTINKEMER. 1990. Backbone Network Design Tools with Economic Tradeoffs, *ORSA Journal on Computing* **2** 236-245.
- GERLA, M., L. KLEINROCK. 1977. On the Topological Design of Distributed Computer Networks, *IEEE Transactions on Communications* **25** 48-60.
- GOLDMAN, A.J. 1969. Optimal Center Location in Simple Networks, *Transporta-*

tion Science **3** 352-360.

HAKIMI, S.L. 1964. Optimum Location of Switching Centers and the Absolute Centers and Medians of a Graph, *Operations Research* **12** 450-459.

HAMACHER, H.W., M. LABBÉ, S. NICKEL, T. SONNENBORN. 2004. Adapting Polyhedral Properties from Facility to Hub Location Problems , *Discrete Applied Mathematics* **145** 104-116.

KLINCEWICZ, J.G. 1998. Hub Location in Backbone/Tributary Network Design: A Review, *Location Science* **6** 307-335.

KOOPMANS, T.C., M. BECKMANN. 1957. Assignment Problems and the Location of Economic Activities, *Econometrica* **25** 53-76.

LUNA, H.P.L., N. ZIVIANI, R.M.B. CABRAL. 1987. The Telephonic Switching Center Network Problem: Formalization and Computational Experience, *Discrete Applied Mathematics* **18** 199-210.

LUNA, H.P.L. 2006. Network Planning Problems in Telecommunications, em *Handbook of Optimization in Telecommunications*, M.G.C. Rezende and P.M. Pardalos (editors), Springer, New York, 213-240

MANGASARIAN, O.L. 1997. Mathematical Programming in Data Mining, *Data Mining and Knowledge Discovery*, Vol. 1, No. 2, 183-201.

O'KELLY, M.E. 1986. The Location of Interacting Hub Facilities, *Transportation Science* **20** 92-106.

O'KELLY, M.E. 1987. A Quadratic Integer Program for the Location of Interacting Hub Facilities, *European Journal of Operational Research* **32** 393-404.

O'KELLY, M.E., D. BRYAN, D. SKORIN-KAPOV, J. SKORIN-KAPOV. 1996. Hub Network Design with Single and Multiple Allocation: A Computational Study, *Location Science* **4** 125-138.

O'KELLY, M.E., H.J. MILLER. 1994. The Hub Network Design Problem: A Review and Synthesis, *Journal of Transport Geography* **2** 31-40.

- RANDAZZO, C., H.P.L. LUNA. 2001. A Comparison of Optimal Methods for Local Access Uncapacitated Network Design, *Annals Of Operations Research* **106** 263-286.
- REESE, J. 2005. Methods for Solving the p -Median Problem: An Annotated Bibliography, Trinity University, Mathematics Faculty Research, Paper 28. Disponível em http://digitalcommons.trinity.edu/math_faculty/28/
- REINELT, G. 1991. TSP-LIB: A Traveling Salesman Library, *ORSA Journal on Computing*, 376-384.
- RUBINOV, A. 2006. Methods for Global Optimization of Nonsmooth Functions with Applications, *Applied and Computational Mathematics* **5** no. 1, 3-15.
- SANTOS, A.B.A. 1997. Problemas de Programação Não- Diferenciável: Uma Metodologia de Suavização, dissertação de Mestrado - COPPE - UFRJ, Rio de Janeiro.
- SILVA, M.R., C.B. CUNHA. 2009. New Simple and Efficient Heuristics for the Uncapacitated Single Allocation Hub Location Problem, *Computers and Operations Research* **36** No. 12, 3152-3165.
- SOUSA, L.C.F. 2005. Desempenho Computacional do Método de Agrupamento Via Suavização Hiperbólica, dissertação de Mestrado - COPPE - UFRJ, Rio de Janeiro.
- SPÄTH, H. 1980. Cluster Analysis Algorithms for Data Reduction and Classification, Ellis Horwood, Upper Saddle River, NJ.
- WESOLOWSKY, G.O. 1993. The Weber Problem: History and Perspectives, *Location Science* **1**, No. 1, pp. 5-23.
- XAVIER, A.E. 1982. Penalização Hiperbólica: Um Novo Método para Resolução de Problemas de Otimização, dissertação de Mestrado - COPPE - UFRJ, Rio de Janeiro.
- XAVIER, A.E., A.A.F. OLIVEIRA. 2005. Optimal Covering of Plane Domains by Circles Via Hyperbolic Smoothing, *Journal of Global Optimization* **31** 493-504.
- XAVIER, A.E. 2010. The Hyperbolic Smoothing Clustering Method, *Pattern Recognition* **43** 731-737.

XAVIER, A.E., V.L. XAVIER. 2011. Solving the Minimum Sum-of-Squares Clustering Problem by Hyperbolic Smoothing and Partition into Boundary and Gravitational Regions, *Pattern Recognition* **44** 70-77.

XAVIER, V.L. 2011. Resolução do Problema de Agrupamento segundo o Critério de Minização da Soma de Distâncias, dissertação de Mestrado - COPPE - UFRJ, Rio de Janeiro.