



## A CONVEXIDADE $P_3$ PARA GRAFOS NÃO DIRECIONADOS

Carmen Cecilia Centeno

Tese de Doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Jayme Luiz Szwarcfiter  
Mitre Costa Dourado

Rio de Janeiro  
Agosto de 2012

A CONVEXIDADE  $P_3$  PARA GRAFOS NÃO DIRECIONADOS

Carmen Cecilia Centeno

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

---

Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.

---

Prof. Mitre Costa Dourado, D.Sc.

---

Prof. José Augusto Ramos Soares, Ph.D.

---

Prof. Flávio Keidi Miyazawa, D.Sc.

---

Prof. Rommel Melgaço Barbosa, D.Sc.

---

Prof. Márcia Rosana Cerioli, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL

AGOSTO DE 2012

Centeno, Carmen Cecilia

A Convexidade  $P_3$  para Grafos não Direcionados/Carmen Cecilia Centeno. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2012.

XI, 85 p.: il.; 29,7cm.

Orientadores: Jayme Luiz Szwarcfiter

Mitre Costa Dourado

Tese (doutorado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2012.

Referências Bibliográficas: p. 78 – 83.

1. Convexidade  $P_3$ .
2. Problema da Contaminação.
3. 2-Dominação. I. Szwarcfiter, Jayme Luiz *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*Dedico este trabalho à minha  
Família, que tem me apoiado e  
surpreendido em todos os  
momentos da VIDA.*

# Agradecimentos

*"Quando se sonha sozinho é apenas um sonho. Quando se sonha juntos é o começo da realidade"* D. Quixote

Gostaria de agradecer a todos que sonharam junto comigo, sem os quais este não teria se tornado realidade.

Em especial gostaria de agradecer a Dieter Rautenbach e Lucia Penso que carinhosamente me receberam na Alemanha e que muito contribuíram para este trabalho, e os professores Jayme e Mitre, pois mesmo que cada palavra deste trabalho fosse usada para agradecer a inestimável orientação de ambos estas seriam insuficientes para demonstrar o meu apreço por um dia terem me aceitado como orientanda.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

## A CONVEXIDADE $P_3$ PARA GRAFOS NÃO DIRECIONADOS

Carmen Cecilia Centeno

Agosto/2012

Orientadores: Jayme Luiz Szwarcfiter  
Mitre Costa Dourado

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Apresenta-se, nesta tese, um estudo sobre três parâmetros da convexidade  $P_3$ , sendo eles: número de convexidade  $P_3$ , número  $P_3$  e número de envoltória  $P_3$ . Provamos que tais problemas são NP-completos para a classe de grafos gerais. Para as classes de árvores, cografos e certas grades mostramos que os problemas podem ser resolvidos em tempo polinomial. Trabalhamos também com a classe dos cordais, para a qual obtivemos uma redução para os problemas de número  $P_3$  e número de convexidade  $P_3$ , já para o número de envoltória  $P_3$  desenvolvemos um algoritmo de tempo polinomial. Por fim, consideramos a classe de grafos na qual o número  $P_3$  é igual ao número de envoltória  $P_3$ , para esta desenvolvemos um algoritmo de reconhecimento considerando os grafos livres de triângulos.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

## THE $P_3$ CONVEXITY FOR UNDIRECTED GRAPHS

Carmen Cecilia Centeno

August/2012

Advisors: Jayme Luiz Szwarcfiter

Mitre Costa Dourado

Department: Systems Engineering and Computer Science

In this work, we present a study about three convexity  $P_3$  parameters, named:  $P_3$  convexity number,  $P_3$  number and  $P_3$  hull number. We prove that all these problems are NP-complete for graphs in general. For the classes of trees, cographs and certain grid graphs we give polynomial time solution. We have also considered the chordal graphs, for which we describe reductions for the  $P_3$  number and the  $P_3$  convexity number problems, but for the  $P_3$  hull number we developed a polynomial time algorithm. Finally, we consider the class of graphs which has  $P_3$  number equal  $P_3$  hull number, for this class we developed a recognizing algorithm that consider the triangle free graphs.

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>ix</b>
<b>Lista de Tabelas</b>	<b>xi</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
<b>2 Preliminares</b>	<b>4</b>
2.1 Definições e Notação . . . . .	4
2.2 Classes de Grafos . . . . .	6
2.3 Convexidade em Grafos . . . . .	8
<b>3 Convexidade <math>P_3</math></b>	<b>12</b>
3.1 Número de Convexidade $P_3$ . . . . .	14
3.2 Número $P_3$ . . . . .	19
3.3 Número de Envoltória $P_3$ . . . . .	35
<b>4 Classe <math>H</math></b>	<b>49</b>
4.1 Construindo Grafos sem Triângulos da Classe $H$ . . . . .	58
4.2 Reconhecimento de Todos os Grafos Livres de Triângulos em $H$ . . . . .	64
4.3 Subgrafos Induzidos Proibidos . . . . .	67
<b>5 Propostas Futuras</b>	<b>70</b>
5.1 Convexidade de Precessão . . . . .	71
<b>6 Conclusão</b>	<b>75</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>78</b>



# Lista de Figuras

2.1	Cografo $G$ e $\bar{G}$ . . . . .	7
2.2	Grade Completa $3 \times 5$ . . . . .	8
2.3	Conjunto Convexo e Envoltória Convexa . . . . .	10
3.1	Conjunto Gerador da Envoltória $P_3$ . . . . .	14
3.2	Caminho $P$ . . . . .	20
3.3	Execução do Algoritmo 1 na Floresta $F$ . . . . .	23
3.4	Floresta $F$ Durante a Sétima Iteração do Algoritmo . . . . .	24
3.5	Caso 1 Situação a . . . . .	25
3.6	Caso 1 Situação b . . . . .	25
3.7	Caso 2 Situação a . . . . .	26
3.8	Caso 2 Situação b . . . . .	27
3.9	Caso 3 Situação a . . . . .	27
3.10	Caso 3 Situação b . . . . .	28
3.11	Grade $2 \times n$ . . . . .	29
3.12	Grade $2 \times n$ . . . . .	29
3.13	Grade $G$ . . . . .	30
3.14	Conjunto $P_3$ Canônico de uma Grade $3 \times 3$ . . . . .	31
3.15	Grade Lema 2 . . . . .	31
3.16	Grade Teorema 6 . . . . .	32
3.17	Componente $G(x_i)$ . . . . .	37
3.18	Componente $G(C_{j_1})$ . . . . .	37
3.19	Execução do Algoritmo 2 na Floresta $F$ . . . . .	41
3.20	Grafo $G$ e seus Blocos . . . . .	44
3.21	Grafo $G$ . . . . .	46
3.22	Bloco $B$ e Grafo $G'$ . . . . .	46
3.23	Bloco $B$ e Grafo $G'$ . . . . .	47
3.24	Bloco $B$ e Grafo $G'$ . . . . .	47
3.25	Conjunto Gerador da Envoltória de $G$ . . . . .	47
4.1	Componentes Conexas de $G_0$ - Lema 4 . . . . .	51

4.2	Componentes de $G_0$ - Lema 5 . . . . .	52
4.3	Componentes de $G_0$ - Lema 6 . . . . .	53
4.4	Uma componente de $G_0$ - Lema 7 . . . . .	54
4.5	Os Cinco Subgrafos Proibidos $G_1, \dots, G_5$ . . . . .	67
5.1	Grafo Direcionado $G$ . . . . .	72
5.2	Gadget Teorema 16 . . . . .	73

# Lista de Tabelas

3.1	Notações da Convexidade $P_3$ . . . . .	14
6.1	Resultados sobre a Convexidade $P_3$ . . . . .	76

# Capítulo 1

## Introdução

*"A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original."*

Albert Einstein

Imagine-se um grande produtor musical que quer lançar a futura mania nacional. Conhecendo o mercado da música você sabe que a moda agora é fundir dois estilos musicais, como Samba-Rock, Sertanejo-Axé, e assim por diante. Você considera também que uma pessoa pode ser influenciada por dois de seus amigos, ou seja, se alguém nos fala de alguma música uma primeira vez, logo esquecemos mas se ouvimos sobre a mesma música uma segunda vez resolvemos prestar um pouco mais de atenção. Pensando nisso você pede uma pesquisa de como os estados brasileiros influenciam musicalmente um ao outro e que estilo de música é mais popular em cada estado. Com esses dados em mãos você quer descobrir qual estilo será a sensação do futuro.

Questões como esta podem ser respondidas utilizando a teoria dos grafos, representando-se estados brasileiros e estilos musicais por nós/vértices e a relação entre eles por arestas. Neste exemplo em específico podemos trabalhar com a convexidade, ou melhor, a convexidade  $P_3$ .

A idéia de se trabalhar com a convexidade  $P_3$  surgiu de um problema bem prático e conhecido, nomeado como problema da contaminação. Este pergunta quantas células devem estar inicialmente contaminadas em uma grade para que toda ela se contamine. Adiciona-se à pergunta a seguinte regra de contaminação: dada uma célula sã esta se torna contaminada se possuir duas células vizinhas contaminadas.

Mas a idéia da convexidade  $P_3$  não foi tão imediata. Antes de propormos o seu estudo percorremos um longo caminho. Iniciamos nossa pesquisa com um jogo chamado polícia e ladrão, o qual distribui policiais e ladrões em um grafo e diversas perguntas podem ser formuladas à respeito da perseguição. Em seguida estudamos

as alianças em grafos, área esta que faz várias perguntas à respeito das estratégias de alianças. Ainda pesquisando o uso de grafos para responder questões de estratégias nos deparamos com o já mencionado problema da contaminação. Porém, foi quando lemos sobre a convexidade de caminhos de comprimento dois em torneios que relacionamos ambos os problemas e decidimos estudar o que nomeamos de convexidade  $P_3$ .

Quando nomeamos a convexidade  $P_3$  imaginávamos que esta era um conceito relativamente novo no estudo dos grafos não direcionados, mas após reuniões com pesquisadores para o desenvolvimento de novos teoremas percebemos que os parâmetros abordados relativos à convexidade  $P_3$  já haviam sido amplamente estudados, porém com outros nomes. No decorrer desta tese assinalaremos a correspondência com os problemas de 2-Dominação e Conversão Irreversível.

Mesmo com tal descoberta foi possível desenvolver resultados interessantes sobre o assunto. Tais resultados renderam algumas publicações, sendo a primeira delas um trabalho intitulado "On the Convexity of Paths of Length Two in Undirected Graphs"[15], publicado em "Electronic Notes in Discrete Mathematics". Este trabalho contém nosso estudo inicial sobre a convexidade  $P_3$ . Nele demonstramos que tanto o número  $P_3$  quanto o número de convexidade  $P_3$  são problemas NP-Completo. Ainda determinamos através de algoritmos ou de limites o número  $P_3$ , o número de convexidade  $P_3$  e o número de envoltória  $P_3$  para as classes de árvores, algumas grades e cografos. Tais resultados foram apresentados durante exame de qualificação e no DIMAP- Workshop on Algorithmic Graph Theory realizado na Inglaterra.

Este estudo inicial nos deu alguma intuição para algumas perguntas que ainda estavam no ar, como: o problema da envoltória  $P_3$  é NP-Completo? E os grafos cordais? Tais perguntas foram respondidas e deram origem a dois artigos. O primeiro, "Convex Partitions of Graphs Induced by Paths of Order Three"[16], um trabalho conjunto com Simone Dantas e Dieter Rautenbach (e orientadores). Neste provamos que decidir se um conjunto de vértices de um grafo  $G$  pode ser particionado em  $p$  conjuntos convexos  $P_3$  disjuntos e não vazios é NP-completo. Este artigo ainda apresenta um estudo de tal problema para algumas classes de grafos. O segundo "Irreversible Conversion of Graphs"[17], em conjunto com Lucia Draque Penso e Dieter Rautenbach (e orientadores) trata do problema do número de envoltória  $P_3$ . Nele apresentamos que o número de envoltória  $P_3$  é um problema NP-completo para grafos gerais e ainda desenvolvemos um algoritmo para os grafos cordais.

Por fim, durante período na Alemanha trabalhamos com os grafos que possuem o mesmo número  $P_3$  e número de envoltória  $P_3$ . Para tal relação escrevemos um artigo intitulado "Geodetic Number Versus Hull Number in  $P_3$  Convexity"[19]. Este foi recentemente aceito para apresentação no WG 2012 com o título "Immediate versus Eventual Conversion: Comparing Geodetic and Hull Numbers in  $P_3$  Convexity"[18].

Todos os resultados publicados podem ser encontrados a seguir. Neste trabalho descrevemos todo o percurso dos resultados obtidos sobre a convexidade  $P_3$  em grafos não direcionados. Para os grafos não direcionados estudamos três parâmetros em específico, número  $P_3$ , número de convexidade  $P_3$  e número de envoltória  $P_3$ . Antes de discorrermos sobre eles apresentamos no Capítulo Preliminares conceitos da teoria dos grafos utilizados para este estudo. Dividimos este capítulo em três partes. Uma primeira sobre os conceitos básicos da teoria dos grafos. Na segunda parte do capítulo descrevemos as classes de grafos analisadas durante o estudo dos três parâmetros da convexidade em questão. Finalmente na terceira parte, falamos um pouco sobre o histórico da convexidade em grafos, citando alguns tipos de convexidade estudada e como chegamos à denominação da convexidade  $P_3$ .

No Capítulo Convexidade  $P_3$  já se pode ler sobre os resultados obtidos. Dividimos este em três partes, cada uma referente a um dos parâmetros estudados. Em cada parte apresentamos resultados sobre a complexidade do problema para grafos em geral, e solucionamos os problemas para algumas classes de grafos, como árvores, cografos, grafos cordais e certas grades.

O Capítulo Classe  $H$ , relaciona-se a resultados obtidos em um trabalho realizado com o grupo da Universidade de Ulm, durante parte do doutorado realizado na Alemanha. Este consistiu em primeiramente construir grafos que pertencessem a uma classe específica que nomeamos de classe  $H$ . Conseguindo construir tais grafos partimos para o reconhecimento destes. Obtivemos ainda resultados sobre subgrafos induzidos para um conjunto mais restrito da classe  $H$ . Todos estes resultados encontram-se no Capítulo 4.

Terminamos este trabalho com a proposta de pesquisas futuras. Voltamos o nosso interesse para o estudo da convexidade  $P_3$  nos grafos direcionados. Também nomeamos uma nova convexidade, chamada convexidade de precessão, originada da convexidade estudada até o momento.

# Capítulo 2

## Preliminares

*"Tenha em mente que tudo que você aprende na escola é trabalho de muitas gerações. Receba essa herança, honre-a, acrescente a ela e, um dia, fielmente, deposite-a nas mãos de seus filhos."*

Albert Einstein

Como o próprio nome já diz, este capítulo refere-se ao início do nosso estudo. Apresentamos nele uma seção com as definições usuais da teoria de grafos, Seção 2.1. Esta é destinada a leitores que ainda não estão familiarizados com tal teoria. Caso já conheça os termos utilizados na teoria dos grafos aconselhamos que pule a mesma e no caso de alguma dúvida durante a leitura retorne a ela.

Em seguida apresentamos uma seção com as classes de grafos não tão triviais que são estudadas, Seção 2.2. Recomendamos a leitura desta pois nela definimos notações que serão utilizadas nas provas de certos teoremas. Apesar de tais notações serem lembradas sempre que usadas, nesta seção apresentamos as mesmas de forma clara e exemplificada quando necessário.

E finalmente terminamos o capítulo com uma seção sobre a convexidade em grafos, Seção 2.3. Nela apresentamos um resumo do estudo bibliográfico feito previamente ao desenvolvimento deste trabalho.

### 2.1 Definições e Notação

Um grafo  $G$  é uma dupla ordenada  $(V(G), E(G))$ , onde  $V(G)$  é um conjunto finito não vazio, cujos elementos são denominados *vértices*, e  $E(G)$  é um conjunto de subconjuntos de  $V(G)$  com cardinalidade dois, os elementos de  $E(G)$  são denominados *arestas*. Denota-se a aresta que liga o vértice  $u$  ao vértice  $v$  por  $uv$ . Se existir a aresta  $uv$ , dizemos que o vértice  $u$  é *adjacente* ao vértice  $v$  e que a aresta  $uv$  é incidente a  $u$  e a  $v$ . Os pares de vértices que formam cada aresta são chamados

*extremidades* ou *extremos* da aresta. Um grafo é definido como *trivial* se possuir apenas um vértice.

O complemento de um grafo  $G$ , denotado por  $\overline{G}$ , possui o mesmo conjunto de vértices de  $G$ , e o conjunto de arestas complementares de  $G$ , ou seja, se a aresta  $uv$  existir em  $G$ , os vértice  $u$  e  $v$  não são adjacentes em  $\overline{G}$ , porém, se os vértices  $u$  e  $v$  não são adjacentes em  $G$ , a aresta  $uv$  pertence ao complemento de  $G$ .

Um *vértice universal* é aquele que é adjacente a todos os demais vértices do grafo a que ele pertence. Uma *clique* é um subconjunto de vértices de um grafo  $G$ , tal que cada dois vértices do subconjunto são adjacentes.

Um *laço* é uma aresta onde os extremos são iguais. Múltiplas arestas são arestas que possuem o mesmo par de extremos. Um *grafo simples* é um grafo que não possui laços ou múltiplas arestas.

O número de vértices de um grafo  $G$  é dito ser a *ordem* de  $G$ . Para simplificar a notação adota-se  $|V(G)| = n$  e  $|E(G)| = m$ . O número de vértices adjacentes a um vértice  $v$  é o *grau* de  $v$ .

Um *caminho* é um grafo não vazio  $P$  onde  $V(P) = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ ,  $E(P) = \{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{k-1}x_k\}$ . Um caminho com  $n$  vértices é denotado por  $P_n$ . O número de arestas de um caminho é o seu *comprimento*. O caminho de menor comprimento entre dois vértices é chamado de *geodésica*.

Um *conjunto independente* em um grafo é um conjunto de vértices que tomados dois a dois são não adjacentes. O conjunto independente será maximal se a ele não puder adicionar vértices; será máximo se for o maior maximal possível.

A *vizinhança* de um vértice  $v$ , denotado por  $N_G(v)$ , ou simplesmente por  $N(v)$  caso não haja ambiguidade, é o conjunto de todos os vértices adjacentes a  $v$  no grafo  $G$ . A vizinhança de um conjunto  $T$  de vértices no grafo  $G$ , denotado por  $N_G(T)$ , é o conjunto de vértices de  $G$  adjacentes a algum vértice de  $T$ . É denotado por  $N[v]$  o conjunto  $N(v) \cup \{v\}$ . Um vértice  $v$  é dito ser *vizinho* de  $u$  se  $v$  pertence a vizinhança de  $u$ .

Um *grafo completo* é um grafo onde os vértices são dois a dois adjacentes; o grafo completo com  $n$  vértices é denotado por  $K_n$ .

Um grafo  $G$  é *bipartido* se  $V(G)$  é a união de dois conjuntos independentes disjuntos  $(U, W)$  chamados *conjuntos de partição* de  $G$ . Um *grafo bipartido completo* é um grafo bipartido tal que dois vértices serão adjacentes se e somente se estiverem em conjuntos de partição diferentes.

Um *ciclo* é um caminho  $P$  onde  $V(P) = \{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ , com  $k \geq 3$ , onde  $x_0, \dots, x_{k-1}$  são vértices distintos e  $x_0 = x_k$ . Um ciclo de  $n$  vértices distintos é denotado por  $C_n$ .

Um *subgrafo* de um grafo  $G$  é um grafo  $H$  tal que  $V(H) \subseteq V(G)$  e  $E(H) \subseteq E(G)$ , denotado por  $H \subseteq G$ . Um *subgrafo gerador* é aquele obtido pela remoção de uma



ou mais arestas de um grafo, dizemos então que este novo grafo obtido é gerador do primeiro.

Um grafo  $G$  é *conexo* se para todo par de vértices,  $\{u, v\}$  de  $G$  existir um caminho  $uv$  e desconexo caso contrário. Os *componentes* de um grafo  $G$  desconexo são seus subgrafos conexos maximais. Um *vértice de corte*,  $x$ , é um vértice de um grafo conexo  $G$  tal que  $G - \{x\}$  possui mais de um componente. Um *conjunto de corte*,  $S$ , é um conjunto de vértices tal que  $G - S$  possui mais de um componente. Um grafo  $G$  é  $k$ -conexo se o tamanho mínimo de um conjunto de corte,  $S$ , for pelo menos  $k$  ou  $G - S$  possuir apenas um vértice.

Se  $G$  e  $G'$  são tais que  $G'$  é subgrafo de  $G$  e  $G'$  contém todas as arestas  $xy \in E(G)$  com  $x, y \in V(G')$  então  $G'$  é um *subgrafo induzido* de  $G$ , denotado por  $G[V']$ . O grafo  $G - \{v\}$ , é obtido do grafo  $G$  pela remoção de um vértice  $v$ , ou seja, é o subgrafo induzido pelo conjunto  $V(G) - \{v\}$ . Analogamente, o grafo  $G - H$ , é obtido do grafo  $G$  pela remoção de um subgrafo  $H$ , ou seja, é o subgrafo induzido pelo conjunto  $V(G) - V(H)$ .

Sejam  $u$  e  $v$  dois vértices de um grafo conexo  $G$ , a *distância*,  $d(u, v)$  de  $u$  até  $v$  é o comprimento (número de arestas) do menor caminho de  $u$  até  $v$  em  $G$ .

Um *grafo direcionado*  $G$  é um par  $(V, E)$ , onde  $V$  é um conjunto finito de elementos chamados vértices e  $E$  é um conjunto de pares ordenados de vértices, chamados arestas. Seja  $(uv)$  uma aresta direcionada partindo de  $u$  e chegando em  $v$ ,  $u$  é dito ser um *predecessor direto* de  $v$  e  $v$  um *sucessor direto* de  $u$ . Se um caminho composto por um ou mais arcos sucessivos leva de  $u$  para  $v$ , então  $v$  é um *sucessor* de  $u$  e  $u$  um *predecessor* de  $v$ .

Uma das diferenças entre um grafo direcionado simples e um grafo orientado é que se  $x$  e  $y$  são vértices, um grafo direcionado simples permite tanto  $(xy)$  quanto  $(yx)$  como arestas, enquanto apenas uma é permitida em um grafo orientado.

O *grau de entrada* de um vértice  $v$ ,  $d^-(v)$ , é o número de predecessores diretos de  $v$ , enquanto que o *grau de saída* do mesmo,  $d^+(v)$ , é o número de sucessores diretos de  $v$ . O conjunto de predecessores diretos de  $v$  em  $G$  será denotado por  $N_G^-(v)$ , caso não haja ambiguidade,  $G$  será omitido.

Um vértice com  $d^-(v) = 0$  é chamado *fonte*, e um vértice com  $d^+(v) = 0$  é chamado *sumidouro*. Um grafo direcionado é acíclico se não possui ciclos direcionados. Todo grafo direcionado acíclico possui pelo menos uma fonte e um sumidouro.

## 2.2 Classes de Grafos

Algumas classes de grafos aparecerão continuamente no decorrer deste trabalho, são elas: árvores, grades, cografos, grafos cordais, entre outras. Caso o leitor não

esteja familiarizado com alguma dessas classes definimos a seguir cada uma delas, bem como conceitos referentes à classe.

Um grafo sem ciclos é chamado *floresta*. Uma floresta conexa é chamada *árvore*. Os vértices de grau 1 de uma árvore são denominados *folhas*.

Um *cografo* é um grafo  $G$  que não possui  $P_4$  induzido. Seja  $G$  um cografo conexo, denote por  $u$  o número de vértices universais em  $G$ , ou seja vértices adjacentes a todos os vértices de  $G$  exceto a ele próprio. Considere agora  $\overline{G}$ , denote por  $\overline{G}_1, \dots, \overline{G}_u, \dots, \overline{G}_t$  as componentes conexas de  $\overline{G}$  e por  $G_1, \dots, G_u, \dots, G_t$  os subgrafos de  $G$  induzidos pelos conjuntos de vértices das respectivas componentes conexas de  $\overline{G}$ , onde  $|V(G_i)| \geq 2$  quando  $i > u$ . As seguintes considerações podem ser feitas: as componentes  $\overline{G}_1, \dots, \overline{G}_u$  são vértices isolados em  $\overline{G}$ ; e as componentes  $G_1, \dots, G_u$  são vértices universais em  $G$ ; e em  $G$  os vértices de uma componente  $G_{u+i}, i > 0$  são adjacentes a todos os demais vértices de  $G - G_{u+i}$  (Figura 2.1).

Para a demonstração dos teoremas seguintes, usaremos de forma implícita uma importante propriedade dos cografos:  $G$  é conexo se e somente se  $\overline{G}$  é desconexo.

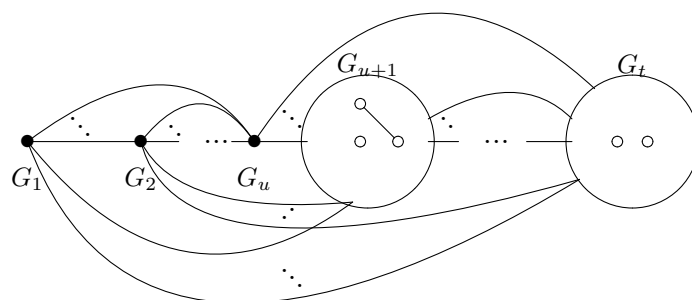
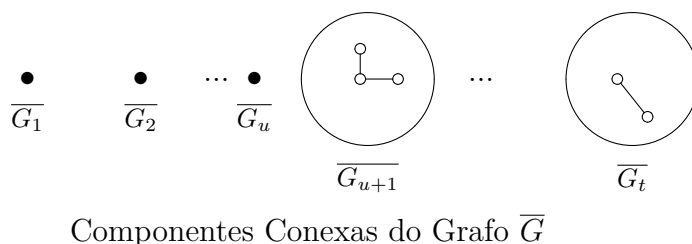


Figura 2.1: Cografo  $G$  e  $\overline{G}$

Um *grafo cordal* é um grafo  $G$  onde todo ciclo de tamanho quatro ou maior possui uma corda, ou seja, uma aresta adjacente a dois vértices não vizinhos no ciclo. Um grafo é *bipartido cordal* se é bipartido e cada um dos seus ciclos de comprimento maior ou igual a seis possui uma corda.

A *grade completa*  $p \times q$  é o grafo definido assim: o conjunto de vértices possui um vértice para cada elemento do produto cartesiano  $\{1, 2, \dots, p\} \times \{1, 2, \dots, q\}$  e dois vértices  $(i, j)$  e  $(i_0, j_0)$  de  $V$  são adjacentes se  $i = i_0$  e  $|j - j_0| = 1$  ou se  $j = j_0$  e  $|i - i_0| = 1$ . Na Figura 2.2 vemos uma grade completa  $3 \times 5$ .

Seja  $G$  uma grade completa  $m \times n$ , com  $n \geq m$ . Uma subgrade  $m \times 1$  de  $G$  é chamada de *coluna*. As colunas de  $G$  podem ser numeradas de  $1, \dots, n$ , da esquerda para direita. A coluna  $n$  é chamada *última coluna* de  $G$ .

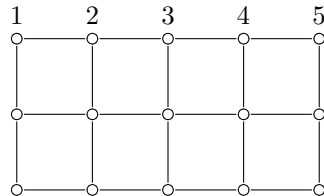


Figura 2.2: Grade Completa  $3 \times 5$

Um *hipergrafo*  $\mathcal{H}$  é um par ordenado  $(V(\mathcal{H}), E(\mathcal{H}))$  onde  $V(\mathcal{H})$  é um conjunto finito de vértices, exatamente como em um grafo, e  $E(\mathcal{H})$  é um conjunto de subconjuntos de vértices. Cada subconjunto de vértices é denominado hiperaresta.

## 2.3 Convexidade em Grafos

Neste seção falaremos um pouco sobre convexidade em grafos, abordando de forma resumida os diversos tipos de convexidade, ou pelo menos alguns dos mais conhecidos. A intenção deste é recordar o passado (o que já foi feito) para elaborarmos o presente (resultados deste trabalho) e planejarmos o futuro (trabalhos propostos). Caso o leitor tenha vivenciado os dois primeiros tempos (passado e presente) talvez deseje pular esta seção, mas como recordar é viver nós o convidamos para a leitura desta.

Antes de irmos para a convexidade em grafos vamos definir a convexidade de uma forma mais geral. A convexidade sobre um conjunto finito  $X$  é uma família  $\mathcal{C}$  de subconjuntos de  $X$  tal que: o conjunto vazio e o conjunto  $X$  pertencem a  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{C}$  é fechado sobre intersecção. O par  $(X, \mathcal{C})$  é chamado *espaço de convexidade (estrutura convexa)* e os subconjuntos de  $\mathcal{C}$  são chamados *conjuntos convexos*. O menor conjunto convexo contendo um conjunto  $A \subseteq X$  é chamado de *envoltória convexa* de  $A$ .

Uma convexidade bastante conhecida é baseada na seguinte definição. Seja  $(X, d)$  um espaço métrico. Um ponto  $x \in X$  está *geodeticamente* entre dois pontos  $a, b \in X$  se  $d(a, x) + d(b, x) = d(a, b)$ . Um conjunto  $C \subseteq X$  é *geodeticamente convexo*

desde que cada ponto entre dois nós de  $C$  esteja em  $C$ . Esta convexidade sobre  $X$  é conhecida como *convexidade geodética* de  $(X, d)$ .

Um outro exemplo é a convexidade de intervalo. Esta é definida a partir de um conjunto  $V$  e um inteiro  $k$ . Denote por  $\binom{V}{k}$  o conjunto de todos os subconjuntos contendo  $k$  elementos de  $V$ , e por  $2^V$  o conjunto de todos os subconjuntos de  $V$ . Podemos então dizer que um espaço de convexidade finito  $(V, \mathcal{C})$  é uma convexidade de intervalo se existir uma função de intervalo  $I : \binom{V}{k} \rightarrow 2^V$  tal que um subconjunto  $C$  de  $V$  pertence a  $\mathcal{C}$  se e somente se  $I(\{x, y\}) \subseteq C$  para todo par distinto de elementos de  $C$ .

O conceito de convexidade acima pode ser estendido naturalmente como uma estrutura abstrata para um conjunto de vértices de um grafo. Uma analogia de convexidade em grafos pode ser definida considerando que o conjunto  $\mathcal{C}$  é formado de subconjuntos de  $V(G)$ .

Algumas das convexidades trabalhadas em grafos estão contidas na convexidade de intervalo. Entre elas podemos citar a convexidade geodética, a convexidade monofônica, a convexidade  $P_3$  entre outras. Todas estas convexidades são definidas através de um conjunto  $\mathcal{P}$  de caminhos em grafos. Neste caso, um subconjunto  $C \in V(G)$  é convexo precisamente quando  $C$  contém todos os vértices pertencentes aos caminhos de  $\mathcal{P}$  cujos vértices extremos estão também em  $C$ . Quando  $\mathcal{P}$  é o conjunto de todos os caminhos mínimos em  $G$  então  $\mathcal{C}$  é uma *convexidade geodética*. Quando  $\mathcal{P}$  é a coleção de todos os caminhos induzidos de  $G$ , então  $\mathcal{C}$  é uma *convexidade monofônica*. E no nosso caso, quando  $\mathcal{P}$  é o conjunto de todos os caminhos de comprimento dois entre dois vértices, então  $\mathcal{C}$  é uma *convexidade  $P_3$* .

Para a convexidade de caminhos a função intervalo pode ser definida da seguinte forma: um *intervalo fechado* para os vértices  $u, v$  denotado por  $I[u, v]$ , consiste de  $u, v$  e todos os vértices  $w$  que pertencem a um caminho  $u, v$  em  $\mathcal{P}$ , onde  $\mathcal{P}$  é um conjunto de caminhos de  $G$ . Desta forma,  $I[S]$  é a união de todos  $I[u, v]$  para  $u, v \in S$ . Três parâmetros da convexidade podem ser definidos a partir da função intervalo. São eles: o número de convexidade, o número convexo e número de envoltória.

O definição dos três parâmetros segue da seguinte forma: um conjunto  $S$  de vértices de um grafo conexo  $G$  é um *conjunto convexo* se  $I[S] = S$ . No grafo  $G$  da Figura 2.3, seja  $P$  o conjunto das geodésicas de  $G$ ,  $S_1 = \{u, v, w\}$  e  $S_2 = \{u, v, w, x\}$ . Como  $I[S_1] = S_2 \neq S_1$  e  $I[S_2] = S_2$ , então  $S_1$  não é um conjunto convexo de  $G$ , mas  $S_2$  é.

O *número de convexidade* é a cardinalidade do maior conjunto convexo próprio de  $G$ . Já o *número convexo* é a cardinalidade do menor conjunto  $S \subset G$  tal que  $I[S] = V(G)$ .

Para um conjunto  $S$  de vértices em um grafo conexo  $G$ , seja  $I^0[S] = S, I^1[S] = I[S]$  e  $I^k[S] = I[I^{k-1}[S]]$  para  $k \geq 2$ . A partir de algum termo  $p$ , a seqüência será

constante; quando  $I^p[S] = I^{p+1}[S]$  obtém-se uma *envoltória convexa* de  $S$  denotada por  $H[S]$ . Um *conjunto da envoltória* é um conjunto  $S$  tal que  $H[S] = V(G)$ . O *número de envoltória* é a cardinalidade do menor conjunto da envoltória.

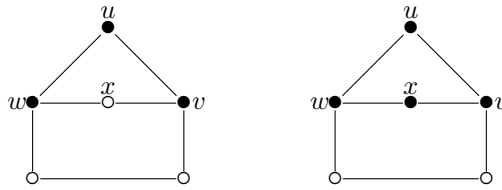


Figura 2.3: Conjunto Convexo e Envoltória Convexa

Uma das primeiras discussões sobre convexidade em grafos se deu nos anos 70, com artigos de Moon [57], de Erdős, Fried, Hajnal e Milner [38], e de Varlet [69], todos eles relacionados à convexidade em torneios. Em 1981, Harary e Neiminen [52], voltam sua atenção à convexidade geodética, a qual é definida em função do menor caminho entre dois vértices. Ainda nos anos 80 algumas publicações sobre convexidade geodética foram feitas. Em 1982, Nieminen [60] usa a envoltória convexa para caracterizar árvores e grafos completos. Em 1983, Batten [7] caracteriza todos os grafos que possuem subgrafos geodésicos e formula um algoritmo para se construir tais grafos. Um subgrafo geodésico de um grafo é um subgrafo  $H$  tal que o menor caminho entre dois vértices de  $H$  pertence a  $H$ . Em 1985, Everett e Seidman [39], caracterizam grafos que possuem valores particulares do número de envoltória geodética, bem como formulam limites superior e inferior para tal parâmetro para os grafos conexos em geral. Após estes e outros artigos relacionados ao tema Buckley e Harary [12], em 1990, publicam um livro sobre distância em grafos onde um capítulo inteiro é dedicado à convexidade geodética. Outro extenso material sobre o assunto surge em 1993 [30], quando Van de Vel publica um livro sobre estruturas convexas.

O estudo da convexidade geodética tem um novo impulso a partir do ano 2000, quando Chartrand, Harary, Zhang, entre outros voltam a publicar sobre tal convexidade [22]. Entre 2002 e 2003 o grupo publica sobre características do número geodético em grafos gerais e o número de envoltória em grafos direcionados [24–27]. Ainda neste período podemos achar publicações que discutem a complexidade do problema. Atici [2], em 2002, demonstra que achar o número geodético é NP-Difícil para grafo gerais. Já Gimbel [47], em 2003, prova que o número de convexidade geodética é um problema NP-Completo para grafos gerais.

A partir de 2006, um grupo de pesquisadores da UFRJ (Universidade Federal do Rio de Janeiro) volta sua atenção à convexidade. O grupo escreve sobre a complexidade do número geodético e número de convexidade geodética para classes de grafos cordais, bipartidos e cografos e ainda descrevem um método simples para decidir se

o número de convexidade geodética é igual a  $k$ , entre outros resultados [31]. Sobre o número de envoltória geodética, o grupo determina que decidir se esta é menor ou igual a  $k$  é NP-Completo para grafos gerais porém este problema é resolvido em tempo polinomial em grafos de intervalo unitário, cografos e grafos split [33]. Mais recentemente, em 2010, o grupo publicou sobre os limites do número de envoltória geodética usando ordem, diâmetro e cintura de um grafo [34].

O grupo acima citado trabalhou ainda com a convexidade monofônica [32]. Na convexidade monofônica o conjunto  $P$  de caminhos é definido pelos caminhos induzidos de um grafo (caminhos que não possuem arestas entre dois vértices não consecutivos). A convexidade monofônica foi introduzida em Oklahoma, 1982 [54]. Ela foi estudada por Duchet, Farber e Jamison [37, 40]. Um grupo da Universitat Politècnica de Catalunya - Espanha deu especial atenção a tal convexidade mostrando várias propriedades destas em grafos [13, 50, 51]. Atualmente sabe-se que o número de convexidade monofônica e o número monofônico é um problema NP-Completo para grafos em geral e que o número da envoltória monofônica pode ser encontrado em tempo polinomial para grafos gerais [32].

Outros tipos de convexidade podem ser encontrados em diversos trabalhos, como em [11, 20, 21]. Mas uma das diversas convexidades que nos chamou a atenção foi a convexidade de caminho de comprimento dois que é estudada em torneios (grafos completos direcionados). Um dos primeiros estudos feitos sobre convexidade em torneios foi em 1972, por Erdős, Fried, Hajnal e Milner [38] e em seguida, em 1976, Varlet publica artigo sobre convexidade em torneios [69]. A partir dos anos 90, especificamente, a convexidade de caminhos de comprimento dois em torneios passa a ser estudada. Haglin e Wolf publicam sobre subconjuntos convexos em torneios em tal convexidade [49]. Em 2006, Parker, Westhoff e Wolf voltam a escrever sobre a convexidade de caminho de comprimento dois, dessa vez, em torneios bipartidos e torneios multipartidos [61, 62]. Foi a convexidade de caminho de comprimento dois em torneios juntamente com o problema da contaminação apresentado por Bollobás [10] e Balogh e Pete [5] que culminaram na convexidade  $P_3$ . Convexidade esta a que se refere este estudo. Falaremos sobre ela mais detalhadamente na próxima seção. E tendo chegado ao tópico do presente trabalho encerramos esta seção sobre a convexidade em grafos.

# Capítulo 3

## Convexidade $P_3$

*"Fazer é fácil, pensar é difícil: fazer como se pensa ainda é mais difícil."*

Goethe

Quando aplicada a caminhos de comprimento dois a convexidade é definida como *convexidade  $P_3$* . Apesar de reconhecermos a deficiência de tal nomenclatura, insistimos em mantê-la devido, apesar de precoce, sua ampla utilização. Para a convexidade  $P_3$  estão sendo estudados diversos parâmetros, como: número de convexidade  $P_3$ , número  $P_3$ , número de envoltória  $P_3$ , número de Radon, número de Carathéodory. Aqui nos restringimos aos três primeiros parâmetros.

Antes de começarmos, vamos entender melhor o que são: número de convexidade  $P_3$ , número  $P_3$ , número de envoltória  $P_3$ . Para definirmos tais parâmetros em termos de convexidade é preciso entendermos o que é um intervalo. Mesmo que o leitor já esteja familiarizado a tais conceitos, o encorajamos a dar uma olhadela na lista apresentada ao final desta seção, onde encontra-se um resumo das notações e definições utilizadas no decorrer deste trabalho.

O *intervalo  $P_3$*  entre dois vértices  $u$  e  $v$ ,  $I_{P_3}[u, v]$ , consiste de  $u, v$  e todos os vértices dos caminhos de comprimento dois entre o par de vértices  $u, v$ . Sendo assim, o intervalo  $P_3$  de um conjunto de vértices  $S$ ,  $I_{P_3}[S]$ , é a união de todos  $I_{P_3}[u, v]$  para  $u, v \in S$ . Antes de continuarmos, vamos visualizar este conceito na Figura 3.1. Seja nosso  $S = \{x, z, y\}$ ,  $I_{P_3}[S] = I_{P_3}[x, z] \cup I_{P_3}[z, y] \cup I_{P_3}[x, y]$ , então  $I_{P_3}[S] = \{x, z, u, w\} \cup \{z, y, u, w\} \cup \{x, y, u, w, k\}$ ,  $I_{P_3}[S] = \{x, z, y, u, w, k\}$ . Em outras palavras, o intervalo  $P_3$  de um conjunto  $S$  é: todos os vértices de  $S$  mais todos os vértices que possuem dois vizinhos em  $S$ . Para um vértice que possui dois vizinhos em  $S$  é dito que o vértice está satisfeito, ou que o conjunto  $S$  satisfaz o vértice.

Utilizaremos a operação intervalo  $P_3$  para definir os três parâmetros estudados. Note que dado um conjunto  $S$  de vértices, ao aplicarmos a operação intervalo  $P_3$  a

este conjunto, podemos ou não adicionar vértices a este. Por exemplo, se escolhermos na Figura 3.1, os vértices  $\{s, t, x\}$  sendo  $S$ , o  $I_{p_3}[S]$  será o próprio conjunto  $S$ , pois todos os vértices que estão em um caminho de comprimento dois entre os vértices de  $S$  já pertencem a  $S$ . Quando isso ocorre dizemos que  $S$  é um *conjunto  $P_3$  convexo*.

Formalizando, um conjunto  $S$  de vértices de um grafo conexo  $G$  é um *conjunto  $P_3$  convexo* se  $I_{p_3}[S] = S$ . Utilizando este conceito definimos o primeiro parâmetro estudado. O *número de convexidade  $P_3$* , denotado por  $c_{p_3}(G)$ , é a cardinalidade do maior conjunto  $P_3$  convexo de  $G$  propriamente contido em  $V(G)$ . Ou seja,  $S$  é o maior conjunto próprio de vértices de  $G$  tal que os vértices que não pertencem a  $S$  também não pertencem a nenhum caminho de comprimento dois entre os vértices de  $S$ . Na Figura 3.1  $S = \{u, z, w, x, y, k, t\}$  é o maior conjunto  $P_3$  convexo próprio, logo  $c_{p_3}(G) = 7$ .

Ainda utilizando a operação intervalo  $P_3$ , podemos definir o segundo parâmetro estudado, *número  $P_3$* . Como vimos anteriormente, a operação intervalo  $P_3$  em um conjunto  $S$  pode adicionar vértices a  $S$ . Quando o resultado desta adição é igual a todos os vértices de  $G$ , dizemos que  $S$  é um *conjunto  $P_3$* . Resumindo, um conjunto  $S$  de vértices de um grafo conexo  $G$  é chamado *conjunto  $P_3$  de  $G$*  se  $I_{p_3}[S] = V(G)$ . Um conjunto  $P_3$  de cardinalidade mínima é um *conjunto  $P_3$  mínimo*. A cardinalidade de um conjunto  $P_3$  mínimo é chamada de *número  $P_3$* , denotado por  $n_{p_3}(G)$ . Na Figura 3.1 um possível conjunto  $P_3$  mínimo é  $S = \{s, t, u, w, k\}$ , o que faz com que  $n_{p_3}(G) = 5$ .

Considere agora que a operação intervalo  $P_3$  será aplicada sucessivas vezes,  $I_{p_3}^*[S]$ ; ou seja, dado um conjunto  $S$  achamos  $I_{p_3}[S]$ , em seguida,  $I_{p_3}[I_{p_3}[S]]$ , e mais uma vez,  $I_{p_3}[I_{p_3}[I_{p_3}[S]]]$ , continuamos esta operação até que não seja possível adicionar mais vértices ao conjunto. Isto acontece porque obtivemos um conjunto  $P_3$  convexo, este conjunto é chamado de *envoltória  $P_3$  convexa* de  $S$ . Definimos então a *envoltória  $P_3$  convexa*,  $H_{p_3}[S]$ , como sendo o menor conjunto  $P_3$  convexo contendo  $S$ .

Quando  $H_{p_3}[S] = V(G)$ , temos uma *envoltória  $P_3$* . Chamaremos o conjunto de vértices  $S$  de *conjunto da envoltória  $P_3$* . O *número de envoltória  $P_3$*  é a cardinalidade do conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo, e será denotado por  $h_{p_3}(G)$ .

No grafo  $G$  da Figura 3.1, seja  $S = \{s, t, y\}$ . Vamos aplicar, enquanto possível, a operação intervalo  $P_3$  em  $S$ . Temos:  $I_{p_3}[\{s, t, y\}] = \{s, t, y, x\}$ ,  $I_{p_3}[I_{p_3}[\{s, t, y\}]] = \{s, t, y, x, k, w, u\}$ ,  $I_{p_3}[I_{p_3}[I_{p_3}[\{s, t, y\}]]] = V(G)$ . Então  $H_{p_3}[S] = V(G)$ , logo  $S$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ . Note que  $S$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo, pois como os vértices  $s$  e  $t$  possuem grau 1 são obrigatórios no conjunto. Porém  $H[\{s, t\}] \neq V(G)$ , então precisamos adicionar mais um vértice. Quando adicionamos o vértice  $y$  obtemos um conjunto da envoltória  $P_3$ , sendo este mínimo, então concluímos que  $h_{p_3}(G) = 3$ .

Como este trabalho trata da convexidade  $P_3$ , caso não haja ambiguidade, o



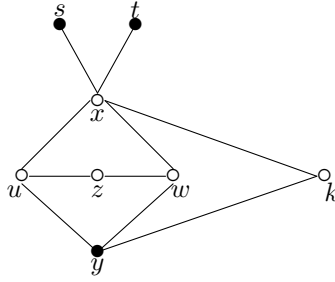


Figura 3.1: Conjunto Gerador da Envoltória  $P_3$

subscrito  $p_3$  será retirado da notação. Para a melhor utilização deste capítulo e para futuras consultas no decorrer da leitura, resumimos abaixo, em uma tabela, todas as notações e definições aqui apresentadas.

Tabela 3.1: Notações da Convexidade  $P_3$

$I[S]$	Intervalo $P_3$ de $S$	$S$ mais todos os vértices de $G$ que possuem 2 ou mais vizinhos em $S$
	Conjunto $P_3$ Convexo	conjunto $S$ tal que $I[S] = S$
$c(G)$	Número de Convexidade $P_3$	maior Conjunto $P_3$ Convexo próprio
	Conjunto $P_3$	conjunto $S$ tal que $I[S] = V(G)$
$n(G)$	Número $P_3$	cardinalidade de um Conjunto $P_3$ mínimo
$I^*[S]$		sucessivas aplicações da operação intervalo
$H[S]$	Envoltória $P_3$ Convexa	menor Conjunto $P_3$ Convexo contendo $S$
	Envoltória $P_3$	quando $H[S] = V(G)$
$S$	Conjunto da Envoltória $P_3$	conjunto $S$ inicial do qual se obtém $H[S] = V(G)$
$h(G)$	Número de Envoltória $P_3$	cardinalidade do Conjunto da Envoltória mínimo

### 3.1 Número de Convexidade $P_3$

O problema do número de convexidade  $P_3$ ,  $c_{p_3}(G)$  ou apenas  $c(G)$ , consiste em achar a cardinalidade do maior conjunto  $P_3$  convexo próprio, ou seja, um conjunto  $S$  tal que todos os vértices de  $G - S$  não pertença a nenhum caminho de comprimento dois entre os vértices de  $S$ . Em outras palavras, um conjunto  $P_3$  convexo  $S$  é um conjunto de vértices de  $G$  onde todo vértice que não pertence a  $S$  não possui dois ou mais vizinhos em  $S$ .

Exemplificando o problema temos que se  $G$  é um grafo completo o número de convexidade  $P_3$  de  $G$ ,  $c(G) = 1$ , pois, como em um grafo completo  $G$  qualquer vértice de  $G$  é adjacente a todos os demais vértices, ao se escolher um conjunto  $S$  com dois vértices  $\{x, y\}$ , temos que todos os vértices que não pertencem a  $S$  são vizinhos de  $x$  e de  $y$ . Já um caminho com  $n$  vértices possui um conjunto  $P_3$  convexo próprio de tamanho máximo igual a  $n - 1$ , pois basta retirar uma de suas extremidades (vértices de grau 1). Em um ciclo com  $n$  vértices o número de convexidade  $P_3$  é igual a  $n - 2$ . Basta retirar dois vértices adjacentes do ciclo que o conjunto de vértices restantes será um conjunto  $P_3$  convexo, pois os vértices retirados possuem cada um apenas um vizinho em  $S$ .

Outro bom exemplo são as árvores. Sabemos que as folhas de uma árvore possuem grau 1, o que significa que uma folha nunca poderá ter dois vizinhos em um conjunto  $P_3$  convexo. Logo o número de convexidade  $P_3$  de uma árvore  $T$ ,  $c(T) = n - 1$ , pois basta retirar uma folha de  $T$  para se obter um conjunto  $P_3$  convexo máximo.

Uma outra classe de grafos para a qual o número de convexidade  $P_3$  pode ser definido de forma direta é a classe das grades completas. O número de convexidade  $P_3$  de uma grade completa  $G$  de tamanho  $m \times n$ ,  $n \geq m$  é  $c(G) = (n - 1)m$ . Sendo que os  $m$  vértices que não pertencem ao conjunto  $P_3$  convexo  $S$  são os vértices da primeira ou da última coluna.

Já não tão intuitivo, o número de convexidade  $P_3$  para cografos é dado pelo Teorema 1. Relembrando algumas notações vistas no capítulo 2.2 para um cografo  $G$ :  $u$  é o número de vértices universais em  $G$ ,  $t$  é o número de componentes conexas em  $\overline{G}$ . Consideramos como componentes do grafo  $G$ , os subgrafos induzidos de  $G$  formados pelos vértices das respectivas componentes conexas encontradas em  $\overline{G}$  (Figura 2.1). Uma componente  $G_k$  em  $G$  pode possuir diversas componentes conexas e até mesmo vértices isolados, denotaremos por  $i(G_k)$  o número de vértices isolados do subgrafo induzido  $G_k$  e por  $x(G_k)$  a cardinalidade da menor componente conexa de  $G_k$ .

No Teorema 1 consideramos primeiramente que  $G$  possui apenas duas componentes, e neste caso dividimos em dois subcasos: existe um vértice universal e não existe vértice universal. Finalmente consideramos os casos em que  $G$  possui mais do que duas componentes.

**Teorema 1.** [15] *Seja  $G$  um cografo, então*

$$c(G) = \begin{cases} n - x(G_2), & \text{se } u = 1 \text{ e } t = 2; \text{ senão,} \\ 2, & \text{se } u = 0, t = 2, i(G_1) \neq 0 \text{ e } i(G_2) \neq 0; \text{ senão,} \\ 1. & \end{cases}$$

**Prova.** Considerando  $u = 1$  e  $t = 2$ . Se  $x(G_2)$  for um vértice isolado basta retirar este vértice do conjunto  $P_3$  convexo, pois o único vizinho deste vértice isolado no conjunto  $P_3$  convexo será o vértice universal. Caso  $G_2$  não tenha um vértice isolado sabemos que todo conjunto contendo um vértice de cada componente conexa de  $G_2$  não pode ser um conjunto  $P_3$  convexo,  $S$ . Na primeira aplicação da operação intervalo o vértice universal é adicionado a  $S$ . Subsequentemente, os demais vértices serão adicionados a  $S$  pois possuem como vizinhos o vértice universal e algum outro vértice de seu componente que pertence a  $S$  ou foi adicionado a  $S$  em uma operação intervalo anterior. Sendo assim, devemos remover de  $V(G)$  os vértices de uma componente conexa de  $G_2$ , e assim os vértices desta componente nunca pertencerão a  $S$  pois o único vizinho que terão no conjunto  $P_3$  convexo será o vértice universal. Consequentemente,  $c(G) = n - x(G_2)$ .

Considerando  $u = 0$ ,  $t = 2$  e que cada componente,  $G_1$ ,  $G_2$ , tenha pelo menos um vértice isolado. Sabe-se que dois vértices de uma  $G_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , não podem ser um conjunto  $P_3$  convexo, pois todos os vértices de  $G_1$  são adjacentes a todos os vértices de  $G_2$ . Considere que o conjunto  $P_3$  convexo  $S$  possui dois vértices de  $G_1$ , ao aplicarmos a operação intervalo pela primeira vez todos os vértices de  $G_2$  são adicionados a  $S$  e ao aplicarmos a operação intervalo pela segunda vez todos os demais vértices de  $G_1$  são adicionados a  $S$ . Porém o conjunto formado por um vértice isolado de cada  $G_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , é um conjunto  $P_3$  convexo, pois um vértice isolado em cada componente não adiciona vértices ao conjunto  $P_3$  após a operação intervalo. Neste caso  $c(G) = 2$ .

Finalmente,  $c(G) = 1$  em todos os outros casos. Como vimos anteriormente o conjunto  $P_3$  convexo  $S$  não pode conter dois vértices de uma componente  $G_i$ . Em grafos com duas componentes, um conjunto  $S$  formado por um vértice de cada componente, sendo que pelo menos um dos vértices não seja um vértice isolado, não é um conjunto  $P_3$  convexo. Seja  $x$  o vértice que pertence a  $S$  e  $G_1$  e que não é isolado. Então pelo menos um vértice de  $G_1$  será adicionados a  $S$  durante a primeira operação intervalo. Consequentemente os vértices da componente  $G_2$  serão adicionados a  $S$  na segunda operação intervalo e finalmente todos os demais vértices de  $G$  serão adicionados a  $S$  na terceira operação intervalo. Em grafos com mais de duas componentes,  $S$  também não pode conter dois vértices, mesmo estes sendo vértices isolados pertencentes a componentes distintas. Neste caso, ao aplicarmos a operação intervalo nestes dois vértices certamente todos os vértices de um terceiro componente será adicionado a  $S$ , e consequentemente após a aplicação da operação intervalo uma segunda vez todos demais vértices de  $G$  serão adicionados a  $S$ . Concluímos então que  $c(G) = 1$ . ■

Apesar do número de convexidade  $P_3$  sair de maneira tão direta para as classes

de grafos completos, caminhos, ciclos, árvores, grades e cografos este problema é NP-Completo para os grafos em geral. Uma redução pode ser vista no Teorema 2, onde o problema da COBERTURA EXATA POR 3-CONJUNTOS é transformado no problema do NÚMERO DE CONVEXIDADE  $P_3$ . A seguir ambos os problemas são definidos.

**Problema 1. COBERTURA EXATA POR 3-CONJUNTOS**

INSTÂNCIA: *Conjunto  $X$ ,  $|X| = 3q$  e uma coleção  $C$  de subconjuntos de  $X$  de 3 elementos.*

PERGUNTA: *Existe uma subcoleção  $C^*$  de  $C$  tal que cada elemento de  $X$  está contido em exatamente um subconjunto de  $C^*$ ? Em outras palavras, a coleção  $C$  possui uma cobertura exata para  $X$ ?*

**Problema 2. NÚMERO DE CONVEXIDADE  $P_3$**

INSTÂNCIA: *Um grafo  $G$  e um número natural  $k$ .*

PERGUNTA:  *$G$  possui um conjunto  $P_3$  convexo próprio com pelo menos  $k$  vértices?*

**Teorema 2.** [15] *O problema NÚMERO DE CONVEXIDADE  $P_3$  é NP-completo.*

**Prova.** O problema NÚMERO DE CONVEXIDADE  $P_3$  pertence a NP, pois dado um certificado, um subconjunto de vértices de  $G$ , é possível responder em tempo polinomial se este subconjunto possui o tamanho apropriado e se  $I[S] = S$ .

Seja  $X = \{x_1, \dots, x_{3q}\}$  um conjunto qualquer e  $C$  uma coleção de subconjuntos,  $\mathcal{C}_i$ , de 3 elementos de  $X$ ,  $|C| \geq q$ . Seja  $G$  o grafo construído da seguinte forma:  $V(G) = W \cup U$ , onde  $W$  contém um vértice  $w_j$  para cada  $x_j \in X$ , e  $U$  contém um vértice  $u_i$  para cada subconjunto  $\mathcal{C}_i \in C$ .  $E(G)$  contém as arestas  $w_j u_i$  se  $x_j \in \mathcal{C}_i$ . Finalmente, adicione todas as arestas necessárias para fazer de  $W$  um conjunto completo. A seguir será mostrado que  $C$  contém uma cobertura exata para  $X$  se e somente se  $c(G) \geq q$ .

Suponha que  $C' = \{\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_q\} \subset C$  é uma cobertura exata de  $X$ . Então  $U' = \{u_1, \dots, u_q\}$  é um conjunto  $P_3$  convexo próprio de  $G$ .

Considere que  $G$  contém um conjunto  $P_3$  convexo próprio  $U'$ . Primeiramente, provamos que  $U' \cap W = \emptyset$ .

Como  $W$  é um conjunto completo, dois vértices de  $W$ ,  $w_1, w_2$ , não podem pertencer a um conjunto  $P_3$  convexo  $S$ , pois sabemos que existe pelo menos mais um vértice em  $W$  que é adjacente a  $w_1$  e  $w_2$ . Então  $U'$  contém no máximo um vértice de  $W$ . Suponha que  $w_t$  é o único vértice de  $W$  em  $U'$ . Seja  $u_i$  outro vértice de  $U'$ . Como  $u_i$  possui três vizinhos em  $W$ ,  $u_i$  é adjacente a um  $w_r \in W$ ,  $r \neq t$ , o que implica que  $w_r$ , possui dois vizinhos em  $U'$  contradizendo que  $U'$  é um conjunto  $P_3$  convexo. Consequentemente,  $W \cap U' = \emptyset$ .

Suponha  $|U'| > q$ . Então existe um par de vértices  $u_i, u_j \in U'$ , tal que  $\mathcal{C}_i \cap \mathcal{C}_j \neq \emptyset$ . Logo  $u_i, u_j$  são adjacentes a um  $w_x \in W$ , ou seja  $U'$  não é um conjunto  $P_3$  convexo,

contradição. Logo,  $|U'| = q$  é o maior conjunto  $P_3$  convexo próprio de  $G$ , e os subconjuntos  $\mathcal{C}_i$  associados a  $U'$  formam uma cobertura exata de  $X$  de tamanho  $q$ .

■

Observe que o grafo gerado na redução do Teorema 2 é um grafo split, ou seja é um grafo onde os seus vértices podem ser particionados em uma clique e um conjunto independente. Com isso o Teorema 3 pode ser formulado de forma imediata. Porém para um melhor aprofundamento no assunto e como exercício para a mente iremos apresentar uma redução para o NÚMERO DE CONVEXIDADE  $P_3$  para grafos split. A seguir é apresentado o problema utilizado na redução, este faz uso de hipergrafo, para uma definição de hipergrafo volte à seção 2.2. O problema do EMPARELHAMENTO 3-DIMENSIONAL pode ser encontrado em [46], problema SP1.

**Problema 3.** EMPARELHAMENTO 3-DIMENSIONAL

INSTÂNCIA: *Um hipergrafo  $\mathcal{H} = (X, \mathcal{E})$  onde  $X$  possui uma partição  $X_1 \cup X_2 \cup X_3$  tal que toda hiperaresta em  $\mathcal{E}$  contém exatamente um vértice de cada  $X_i$  para  $1 \leq i \leq 3$ .*

PERGUNTA:  *$\mathcal{H}$  possui um emparelhamento perfeito? Em outras palavras, existe um conjunto  $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{H}$  de hiperarestas tal que todo vértice  $u \in X$  está contido em exatamente uma das hiperarestas em  $\mathcal{M}$ ?*

**Teorema 3.** [16] *O problema NÚMERO DE CONVEXIDADE  $P_3$  é NP-completo para grafos split*

**Prova.** O problema NÚMERO DE CONVEXIDADE  $P_3$  pertence a NP, pois dado um certificado, um subconjunto de vértices de  $G$ , é possível responder em tempo polinomial se este subconjunto possui o tamanho apropriado e se  $I[S] = S$ .

Seja  $(X, \mathcal{E})$  uma instância do EMPARELHAMENTO 3-DIMENSIONAL. Claramente, podemos assumir que  $|X| \equiv 0 \pmod{3}$  e que  $|X| > 3$ . Vamos construir  $G$  da seguinte maneira: seja  $V(G) = X \cup \mathcal{E}$ , tal que  $X$  é uma clique em  $G$  e  $\mathcal{E}$  é um conjunto independente em  $G$ . Se  $x \in X$  e  $r \in \mathcal{E}$  então existe a aresta  $xr$  em  $G$  se e somente se  $x \in r$ . Seja  $k = \frac{|X|}{3}$ . Note que a construção de  $(G, k)$  é limitada polinomialmente em termos de  $\mathcal{H}$ , e  $\mathcal{H}$  possui um emparelhamento perfeito se e somente se  $G$  possui um conjunto convexo  $P_3$ ,  $C$ , com  $k \leq |C| < V(G)$ .

Se  $\mathcal{M}$  é um emparelhamento perfeito de  $\mathcal{H}$ , então  $\mathcal{M}$  é um conjunto convexo  $P_3$  de  $G$  de ordem  $k$ , pois cada  $x \in X$  terá apenas um vizinho no conjunto independente  $\mathcal{E}$ .

Agora, considere  $U$  um conjunto convexo  $P_3$  de  $G$  com  $k \leq |U| < V(G)$ . Se  $U$  contém dois elementos de  $X$ , então pela construção do grafo  $G$ ,  $I[U] = V(G)$ , o que é uma contradição. Se  $U$  contém um vértice de  $X$  e um vértice de  $\mathcal{E}$ , então pela construção do grafo  $G$ ,  $I[U]$  possui dois vértices em  $X$  e conseqüentemente

$I^*[U] = V(G)$ , o que é uma contradição. Como  $k \geq 2$ , então  $U \subseteq \mathcal{E}$ . Como nenhum vértice de  $X$  está contido em duas hiperarestas em  $U$  (caso contrário  $U$  não seria um conjunto convexo  $P_3$ ), temos que  $|U| \leq \frac{|X|}{3} = k$ . Logo  $|U| = k$  e  $U$  é um emparelhamento perfeito de  $\mathcal{H}$ . ■

Resumindo o estudo do número de convexidade  $P_3$ , vimos que a cardinalidade do maior conjunto  $P_3$  convexo próprio pode ser facilmente determinado para as classes de grafos: completo, caminho, ciclo, árvores, grades e cografos. Porém este problema é NP-completo para os grafos em geral e até mesmo para grafos split. Seguimos com o estudo do segundo parâmetro antes definido, número  $P_3$ . Focamos na determinação do número  $P_3$  para as mesmas classes de grafos nesta seção estudadas.

## 3.2 Número $P_3$

Antes de discorrermos sobre o assunto vale refrescar na memória a definição de número  $P_3$ , para isso devemos relembrar o conceito de intervalo  $P_3$ . O intervalo  $P_3$  entre dois vértices  $u$  e  $v$ ,  $I[u, v]$ , consiste de  $u, v$  e todos os vértices dos caminhos de comprimento dois entre o par de vértices  $u, v$ . Sendo assim, o intervalo  $P_3$  de um conjunto de vértices  $S$ ,  $I[S]$ , é a união de todos  $I[u, v]$  para  $u, v \in S$ . Um conjunto  $S$  de vértices de um grafo conexo  $G$  é chamado conjunto  $P_3$  de  $G$  se  $I[S] = V(G)$ . Um conjunto  $P_3$  de cardinalidade mínima é um conjunto  $P_3$  mínimo. A cardinalidade de um conjunto  $P_3$  mínimo é chamada de número  $P_3$ , denotado por  $n(G)$ .

Ao ler esta definição logo se pensa: "Conheço este problema de algum lugar!". Na verdade o problema do número  $P_3$  nada mais é que o bem conhecido problema de 2-Dominação. Ou seja, todo vértice de  $G$  que não pertence ao subconjunto de vértices  $S$  deve ter pelo menos dois vizinhos em  $S$ . Este problema foi amplamente estudado e muito se sabe sobre sua relação com o conjunto independente, grau mínimo e ordem de  $G$ . Sobre tal relação pode-se ler nos artigos [9, 14, 28, 41, 45, 66, 70], entre outros.

Apesar de parecer irrelevante devido a todo material existente sobre 2-Dominação, apresentaremos a seguir o nosso estudo sobre o número  $P_3$ . Considere este uma preparação para o próximo capítulo. Mostramos primeiramente uma prova quase infantil de que o problema de número  $P_3$  é NP-Completo. Em seguida, construímos um algoritmo linear e simplificado para a obtenção do conjunto  $P_3$  convexo mínimo em uma árvore. Este algoritmo foi utilizado como idéia inicial para a elaboração do algoritmo que acha um conjunto da envoltória  $P_3$  em árvores, o qual se encontra no próximo capítulo. E finalmente, terminamos o estudo com a definição do número  $P_3$  em grades e cografos.

Vamos começar o nosso estudo exemplificando o número  $P_3$  em algumas classes de grafos elementares. Na classe dos grafos completos o  $n(G) = 2$ , pois todos

os demais vértices de  $G$  são adjacentes a estes dois vértices. Em um caminho  $P$ ,  $n(P) = \left\lceil \frac{(n+1)}{2} \right\rceil$ . Como se pode ver na Figura 3.2 o caminho  $G$  alterna vértice contido no conjunto  $P_3$  e vértice não contido no conjunto  $P_3$ , sendo que o último e primeiro vértice devem estar contidos no conjunto  $P_3$ . Dessa forma se  $n$  for ímpar então  $n(P) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$  e se  $n$  for par  $n(P) = \frac{n}{2} + 1$ , logo  $n(P) = \left\lceil \frac{(n+1)}{2} \right\rceil$ . Para ciclos, a idéia é a mesma. O ciclo  $C$  alterna vértice contido no conjunto  $P_3$  e vértice não contido no conjunto  $P_3$ , o que o diferencia do caminho é que se  $n$  for par então  $n(C) = \frac{n}{2}$ . Logo,  $n(C) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

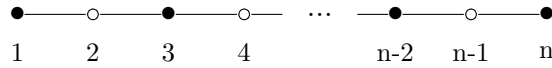


Figura 3.2: Caminho  $P$

Tendo o problema do número  $P_3$  bem esclarecido vamos apresentar a seguir uma prova de que este é NP-completo para grafos gerais e até mesmo para grafos cordais. Quase que como uma brincadeira transformamos o problema de CONJUNTO DOMINANTE para o problema de CONJUNTO  $P_3$ . Para acharmos o número  $P_3$ , basta resolvermos o problema do conjunto  $P_3$  para  $k = 1, \dots, n$ . Continuamos com a definição dos dois problemas.

**Problema 4.** CONJUNTO DOMINANTE

INSTÂNCIA: Grafo  $G = (V(G), E(G))$ , inteiro positivo  $k \leq n$

PERGUNTA: Existe um conjunto dominante de tamanho  $k$  ou menor em  $G$ , isto é, existe um subconjunto  $V' \subseteq V(G)$ , tal que  $|V'| \leq k$  e todo  $u \in V(G) - V'$  possui pelo menos um vértice adjacente  $v \in V'$ ?

**Problema 5.** CONJUNTO  $P_3$

INSTÂNCIA: Grafo  $G = (V(G), E(G))$ , inteiro positivo  $k \leq n$

PERGUNTA: Existe um conjunto  $P_3$  de tamanho  $k$  ou menor em  $G$ , isto é, existe um subconjunto  $V' \subseteq V(G)$ , tal que  $|V'| \leq k$  e todo  $u \in V(G) - V'$  possui pelo menos dois vizinhos em  $V'$ ?

**Teorema 4.** [15] O problema de CONJUNTO  $P_3$  é NP-completo.

**Prova.** O problema CONJUNTO  $P_3$  pertence a NP, pois dado um certificado, um subconjunto de vértices de  $G$ , é possível responder em tempo polinomial se este subconjunto possui o tamanho apropriado e se todo vértice que não pertence a este subconjunto possui dois vizinhos no mesmo.

A prova segue com a transformação do problema CONJUNTO DOMINANTE para o problema CONJUNTO  $P_3$ . Seja  $G = (V(G), E(G))$  e um inteiro positivo  $k \leq n$ , uma instância arbitrária de CONJUNTO DOMINANTE. Seja  $G' = (V(G'), E(G'))$

uma instância de CONJUNTO  $P_3$  construída da seguinte forma: para todo vértice  $v \in V(G)$  adicionar um novo vértice adjacente a  $v$ . Então  $G'$  possui um conjunto  $P_3$  de tamanho  $k + n$  ou menor se e somente se  $G$  possui um conjunto dominante de tamanho  $k$  ou menor.

Suponha  $S = \{x_1, \dots, x_k\}$  um conjunto dominante em  $G$  e  $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$  os  $n$  vértices acrescentados em  $G'$ . Obtém-se um conjunto  $P_3$  de  $G'$ , nomeado  $U$ , fazendo  $U = S \cup Z$ . Como todo  $z \in Z$  possui grau um, estes devem pertencer ao conjunto  $P_3$ . Logo, cada vértice de  $G$  ganha um vizinho em  $U$ . Claramente todo  $v \in G - S$  possui pelo menos um vizinho em  $S$ . Conclui-se, então que  $U$  é um conjunto  $P_3$  com cardinalidade  $n + k$ .

Suponha  $S'$  um conjunto  $P_3$  de  $G'$  de tamanho  $n + k$ . Como todo vértice de grau um deve pertencer ao conjunto  $P_3$ , então os  $n$  vértices adicionados a  $G$  pertencem a  $S'$ . Como ainda é necessário garantir que os vértices de  $G'$  possuam dois vizinhos no conjunto  $P_3$ , fica claro que todo vértice  $x \in G' - S'$  possui pelo menos um vizinho em  $S' - Z$  e neste caso  $S' - Z$  é um conjunto dominante de tamanho  $k$  em  $G' - Z = G$ .

■

**Corolário 1.** [15] *O problema de CONJUNTO  $P_3$  permanece NP-completo para grafos cordais e grafos bipartidos cordais.*

**Prova.** O problema de CONJUNTO DOMINANTE permanece NP-completo para grafos cordais [8] e para grafos bipartidos cordais [58]. Além disso, considerando a demonstração do Teorema 4, o grafo  $G'$  permanece cordal ou bipartido cordal caso  $G$  assim o seja. ■

Continuando com o assunto mostramos a seguir um algoritmo que acha um conjunto  $P_3$  mínimo em uma floresta  $F$ . De forma bem simples, o algoritmo atribui rótulos com valor 0 para todo vértice do grafo, estes rótulos indicam quantos vizinhos um vértice possui no conjunto  $P_3$  e são incrementados a medida que um vizinho do vértice entra no conjunto  $P_3$ . Dados os rótulos o algoritmo percorre a árvore retirando vértice, cada vértice retirado é analisado segundo o rótulo e grau e é decidido se este fará parte ou não do conjunto  $P_3$ .

Antes de irmos ao algoritmo, vale lembrar que o problema de 2-Dominação já foi estudado tendo-se em conta as árvores. No artigo "Independence and 2-domination in trees"[9], Blidia, Chellali e Favaron apresentam um limite para  $n(T)$ , onde  $T$  é uma árvore conexa, sendo ele:  $(n + l + 2)/3 \leq n(T) \leq (n + l)/2$ , onde  $n$  é número de vértices da árvore e  $l$  é o seu número de folhas. O limite superior é mostrado através da obtenção de todas as folhas de  $T$ , e com uma partição do grafo bipartido  $T'$ , o qual é igual a  $T$  menos suas folhas. Os autores ainda constroem uma classe



de árvores que é derivada de um  $P_2$  adicionando-se repetitivamente ou uma estrela  $K_{1,p}$  ou um  $P_2$ . Para tal classe eles provam que  $n(T) = (n + l)/2$ .

Apesar dos resultados obtidos por Blidia, Chellali e Favaron acreditamos que o algoritmo desenvolvido ainda seja interessante. Pois além de melhorar o entendimento do conceito de número  $P_3$  ele devolve conjuntos  $P_3$  mínimos e com uma leve modificação tal algoritmo poderia gerar todos os conjuntos  $P_3$  mínimos. Mas isto é uma outra história para um outro por do sol, a qual deixamos para a imaginação do leitor. Seguimos então com a apresentação do algoritmo para a determinação do número  $P_3$  em uma floresta.

**ALGORITMO 1: Determinação do  $n(F)$**

- *Passo Inicial:* definir o conjunto  $S := \emptyset$  e os rótulos  $\ell(v) := 0$ , para todo  $v \in V(F)$ .
- *Passo Geral:* se  $V(F) = \emptyset$  então terminar algoritmo e devolver o conjunto  $S$  que é um conjunto  $P_3$  mínimo de  $F$ ; senão:
  1. escolher um vértice *apropriado*  $v \in V(F)$ ;
  2. adicionar  $v$  em  $S$ ;
  3. fazer  $\ell(w) := \ell(w) + 1$ , para todo  $w \in N(v)$
  4. remover  $v$  de  $F$
  5. repetidamente, remover todo vértice isolado  $v \in V(F)$  que tenha  $\ell(v) > 1$  e toda folha  $u \in V(F)$  que tenha  $\ell(u) > 1$ , até que toda folha  $u \in V(F)$  tenha  $\ell(u) \leq 1$  e não exista  $v$  isolado com  $\ell(v) > 1$ .
  6. repetir o passo geral.

*Escolha do vértice apropriado  $v \in V(F)$ :* Se  $F$  possui um vértice  $v$  que é vértice isolado ou uma folha com rótulo 0 escolha  $v$ ; senão, escolha o vizinho de uma folha de  $F$ .

Um exemplo da execução do algoritmo pode ser visto na Figura 3.3, nela vértices pretos representam vértices que pertencem a  $S$ . Um vértice  $v$  é representado por  $v_i$  onde  $i$  representa o rótulo de  $v$ . Na Figura 3.3 (a) pode-se ver a árvore  $F$  entrada e os vértices com os rótulos inicializados. O algoritmo inicialmente adiciona uma a uma todas as folhas de  $F$  em  $S$ , pois estas satisfazem a primeira escolha de um vértice apropriado. Na Figura 3.3 (b) pode-se ver  $F$  após a sexta iteração do algoritmo, depois que as folhas foram adicionadas a  $S$  e retiradas da árvore. Note que apesar dos vértices  $b$  e  $c$  já estarem satisfeitos, estes não são excluídos por não serem folhas e neste caso poderão auxiliar na satisfação de algum outro vértice. Durante as duas

iterações seguintes o algoritmo escolhe os vértices  $b$  e  $c$ , pois estes caem na segunda opção de um vértice apropriado. Os vértices  $b$  e  $c$  são adicionados em  $S$ , e retirados de  $F$ , juntamente os vértices  $d$  e  $g$  são removidos de  $F$  por se tornarem vértices isolados com rótulo 2. O mesmo acontece com o vértice  $a$  que se torna um vértice isolado com rótulo 2. Ao final da execução do algoritmo  $S = \{j, e, f, k, h, i, b, c\}$ .

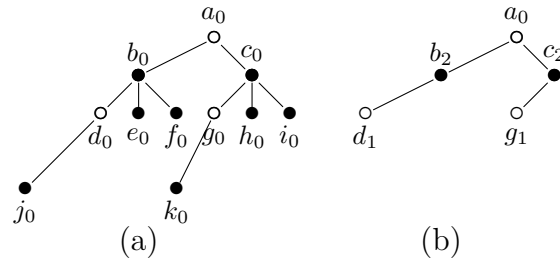


Figura 3.3: Execução do Algoritmo 1 na Floresta  $F$

A seguir, o Teorema 5 demonstra que o algoritmo de determinação do  $n(F)$  é correto. Primeiramente é provado que  $S$  é um conjunto  $P_3$  de  $F$ . Em seguida é demonstrado que  $S$  é conjunto  $P_3$  mínimo da seguinte forma: é definido  $S_{min}$  como um conjunto  $P_3$  mínimo qualquer e  $S_i$  o conjunto de vértices de  $S$  adicionados durante as iterações  $1, \dots, i$ . Por indução é provado que  $S_i \subseteq S_{min}$ . Esta prova é dividida em três casos, segundo a escolha apropriada do vértice  $v$  feita pelo algoritmo. Caso 1:  $v$  é vértice isolado. Caso 2:  $v$  é folha com  $\ell(v) = 0$ . Caso 3:  $v$  é vizinho de folha. Cada caso é passível de duas situações particulares, para as quais é demonstrada que é possível uma troca de vértices entre conjuntos ou que a situação não ocorre.

**Teorema 5.** [15] *O conjunto  $S$  construído pelo algoritmo de determinação do  $n(F)$  é um conjunto  $P_3$  mínimo da árvore  $F$ .*

**Prova.**  $S$  é um conjunto  $P_3$  de  $F$ , pois todo vértice  $v$  da floresta original ou pertence a  $S$  ou é excluído de  $F$  com rótulo  $\ell(v) \geq 2$ , o que significa que ele possui dois ou mais vizinhos em  $S$ .

O conjunto  $S$  é mínimo! Seja  $F_i$  a subfloresta de  $F$  considerada pelo algoritmo no início da iteração  $i$ ; e  $\overline{F}_i = F - F_i$ , ou seja,  $\overline{F}_i$  é a subfloresta de vértices já considerados pelo algoritmo. A Figura 3.4 mostra uma árvore inicial  $F$ ; a floresta que será considerada pelo algoritmo na sétima iteração; e a floresta que já foi considerada até a sétima iteração. Os números subscritos na Figura 3.4 mostram o rótulo do vértice considerado na iteração corrente ( $f_1 = \ell(f) = 1$ ). Os vértices pretos de  $F$  são os vértices que pertencem a  $S$ . Denote por  $S_i$  o subconjunto de vértices adicionados em  $S$  nas iterações  $1, \dots, i$ , logo  $|S_i| = i$ . Na Figura 3.4 o algoritmo escolhe o vértice  $j$  para adicionar a  $S_7$ ,  $S_7 = \{c, g, k, h, d, a, j\}$ .

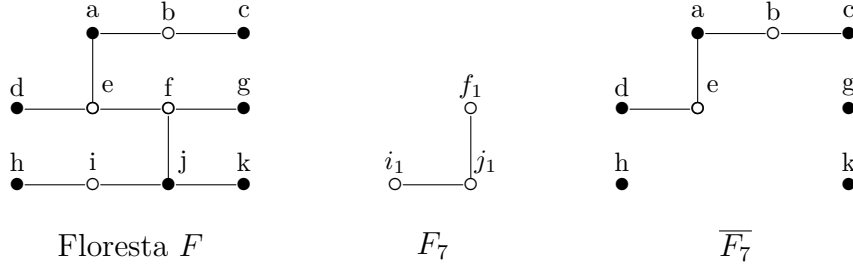


Figura 3.4: Floresta  $F$  Durante a Sétima Iteração do Algoritmo

A seguir é demonstrado que existe um conjunto  $P_3$  mínimo, denotado por  $S_{min}$ , tal que  $S_i \subseteq S_{min}$ .

Para  $i = 1$ ;  $S_i \subseteq S_{min}$  é verdade, pois na primeira iteração o algoritmo escolhe uma folha de  $F_1 = F$  e sabe-se que toda folha de  $F$  pertence a um conjunto  $P_3$  mínimo de  $F$ .

Para  $i > 1$ ; pela hipótese de indução,  $S_{i-1} \subseteq S_{min}$  é verdade para algum  $S_{min}$ . Seja  $v$  o vértice adicionado em  $S$  na iteração  $i$ . Se  $v \in S_{min}$  nada é preciso provar. Se  $v \notin S_{min}$ , de acordo com o algoritmo três casos devem ser analisados:

**Caso 1:**  $v$  é um vértice isolado de  $F_i$ .

Neste caso as seguintes considerações podem ser feitas:

- $\ell(v) < 2$ , caso contrário,  $v$  teria sido excluído da floresta  $F_i$ ;
- $S_{min}$  possui um par de vértices  $v_1$  e  $v_2$ , ambos adjacentes a  $v$ , pois  $v \notin S_{min}$ ;
- $v_1, v_2 \in \overline{F_i}$ , pois  $v$  é vértice isolado o que significa que  $v_1$  e  $v_2$  já foram considerados pelo algoritmo e excluídos em algum momento.

Neste caso duas situações são possíveis:

**Situação a:**  $v_1, v_2 \notin S_{i-1}$  (Figura 3.5).

**Situação b:**  $v_1 \in S_{i-1}$  e  $v_2 \notin S_{i-1}$  (Figura 3.6).

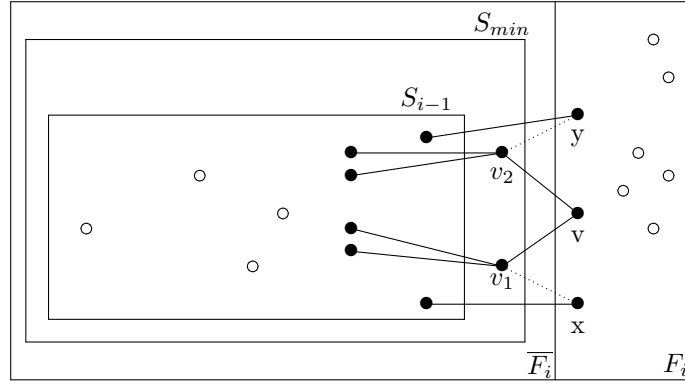


Figura 3.5: Caso 1 Situação a

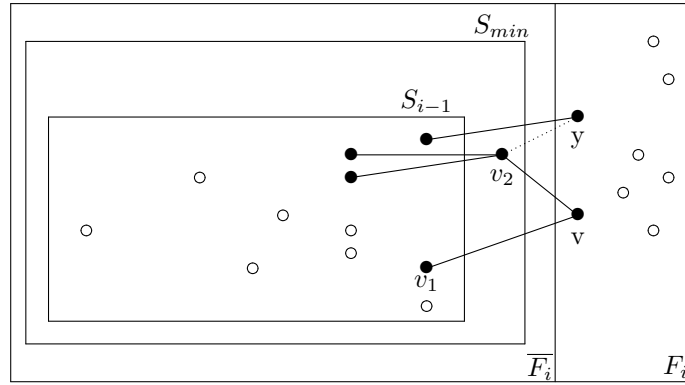


Figura 3.6: Caso 1 Situação b

Sabe-se que todos os vértices em  $\overline{F}_i$  são satisfeitos por  $S_{i-1}$ . Se  $v_1, v_2 \notin S_{i-1}$ , eles não são necessários para satisfazer nenhum vértice em  $\overline{F}_i$ . Como  $v_1$  e  $v_2$  foram excluídos pelo algoritmo por terem rótulo maior ou igual a dois e por serem folhas, então  $v_1$  e  $v_2$  só podem contribuir para o rótulo de  $v$  considerando-se os vértices que estão em  $F_i$ , caso contrário não seriam folhas. Logo  $S' = \{S_{min} - \{v_1, v_2\}\} \cup \{v\}$  é conjunto  $P_3$ , contradição.

Considere então que  $v_1 \in S_{i-1}$  e  $v_2 \notin S_{i-1}$ . Como  $v_2 \notin S_{i-1}$ ,  $v_2$  foi excluído por ser folha e  $\ell(v_2) \geq 2$ . Considerando os vértices de  $F_i$ ,  $v_2$  é adjacente somente a  $v$ . Como  $v_2$  não é necessário para satisfazer os vértices de  $\overline{F}_i$ , então  $S' = \{S_{min} - \{v_2\}\} \cup \{v\}$  é um conjunto  $P_3$  mínimo e  $S_i \subseteq S'$ .

**Caso 2:**  $v$  é folha de  $F_i$  e  $\ell(v) = 0$ .

Neste caso a seguinte consideração pode ser feita:  $S_{min}$  possui um par de vértices  $v_1$  e  $v_2$ , ambos adjacentes a  $v$ , pois  $v \notin S_{min}$ ;

Duas situações são possíveis:

**Situação a:**  $v_1, v_2 \in \overline{F_i}$  e como  $v$  é folha, existe  $v_3 \in F_i$ . Pelo fato de  $\ell(v) = 0$   $v_1, v_2 \notin S_{i-1}$ , Figura 3.7.

**Situação b:**  $v_1 \in \overline{F_i}, v_2 \in F_i$ . Como  $\ell(v) = 0, v_1 \notin S_{i-1}$ , Figura 3.8.

Para o Caso 2 considere a Situação a, similar ao Caso 1, ou seja  $v_1$  e  $v_2$  já foram considerados pelo algoritmo e não contribuem para a satisfação de vértices em  $\overline{F_i}$ , logo eles devem contribuir para a satisfação de  $v$  e pelo menos mais um vértice de  $F_i$ . Como no caso anterior,  $v_1$  e  $v_2$  foram excluídos pelo fato de possuírem rótulo maior ou igual a dois e serem folhas, o que implica que contribuem somente para o rótulo de  $v$  dos vértices em  $F_i$ . Logo esta situação não é possível, caso contrário ter-se-ia uma contradição,  $|S| < |S_{min}|$ .

Então considere a Situação b do Caso 2. Nesta situação pode-se trocar  $v_1$  por  $v$  pois  $v_1$  contribui somente para a satisfação de  $v$  dos vértices que estão em  $F_i$  e os vértices em  $\overline{F_i}$  são satisfeitos por  $S_{i-1}$ , isso se dá pelo fato de  $v_1$  ter sido excluído por ser folha e  $\ell(v_1) \geq 2$ . Sendo assim, trocando-se  $v_1$  por  $v$  obtém-se  $S_i \subseteq S_{min}$ .

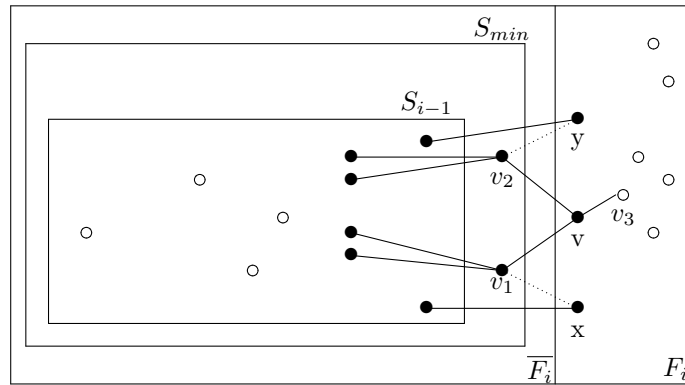


Figura 3.7: Caso 2 Situação a

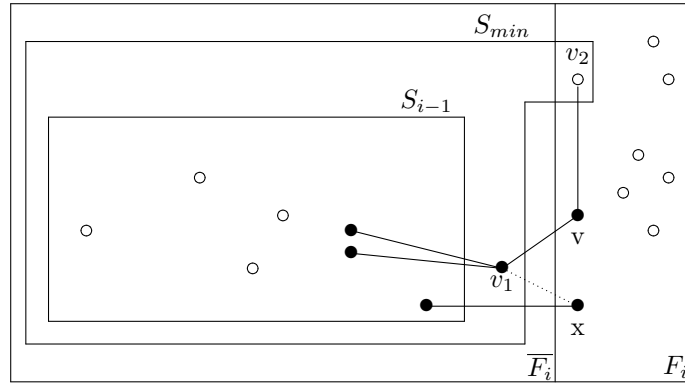


Figura 3.8: Caso 2 Situação b

**Caso 3:**  $v$  é vizinho de uma folha  $w$  de  $F_i$ .

Sobre  $w$  pode-se afirmar que  $\ell(w) = 1$ , ou seja  $w$  é adjacente a um vértice  $w_1 \in S_{i-1}$ ;

Neste caso duas situações são possíveis:

**Situação a:**  $w \notin S_{min}$ , Figura 3.9.

**Situação b:**  $w \in S_{min}$ , Figura 3.10.

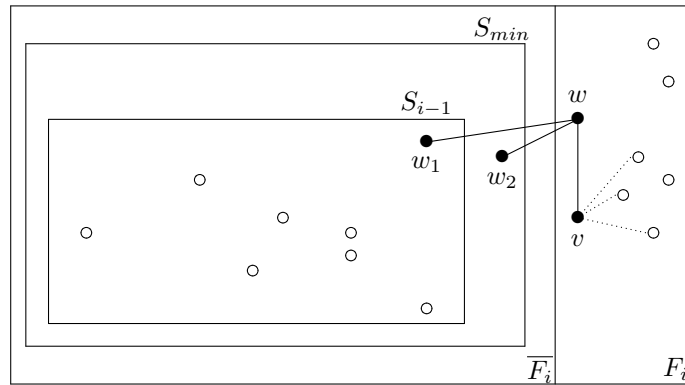


Figura 3.9: Caso 3 Situação a

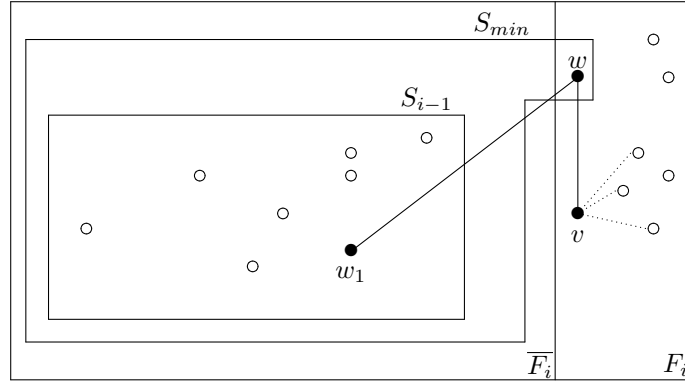


Figura 3.10: Caso 3 Situação b

Considere que  $w \notin S_{min}$ , como  $v \notin S_{min}$ ,  $w$  deve ser adjacente a um vértice  $w_2$  onde  $w_2 \in S_{min}$ ,  $w_2 \notin S_{i-1}$  e  $w_2 \in \overline{F_i}$ . Como  $w_2$  contribui apenas para satisfação de  $w$  em  $F_i$  (similar aos casos anteriores) pode-se trocar  $w_2$  por  $v$  e obter  $S_i \subseteq S_{min}$ .

Agora considere que  $w \in S_{min}$ . Como  $w$  é folha em  $F_i$  sabe-se que  $w$  contribui apenas para satisfação de  $v$  dos vértices em  $F_i$ ;  $w \notin S_{i-1}$ , logo  $w$  não é necessário para satisfazer os vértices de  $\overline{F_i}$ . Logo, pode-se trocar  $w \in S_{min}$  por  $v \notin S_{min}$  e obter  $S_i \subseteq S_{min}$ . ■

A conclusão de que o algoritmo para se determinar  $n(F)$  possui tempo  $O(|V(F)|)$  é direta.

Após a simples mas extensiva explicação do algoritmo para se achar um conjunto  $P_3$  mínimo em uma árvore, passemos às grades. Iniciamos nossa análise com as grades de tamanho  $1 \times n$ , depois  $2 \times n$  e terminamos com as grades de tamanho  $3 \times n$ .

Primeiramente, seja  $G$  uma grade de tamanho  $1 \times n$ , esta nada mais é que um caminho. E já sabemos que em um caminho  $n(G) = \lceil \frac{(n+1)}{2} \rceil$ . Vamos aumentar  $G$  um pouquinho. Agora considere  $G$  uma grade de tamanho  $2 \times n$  então  $n(G) = n$ . Note na Figura 3.11 que se existir coluna  $i$  que não possui vértices no conjunto  $P_3$ , então suas colunas vizinhas,  $i - 1$  e  $i + 1$ , deverão ter ambos os vértices no conjunto  $P_3$ . Uma melhor configuração para o conjunto  $P_3$  pode ser obtida alternando-se os vértices nas linhas e colunas, Figura 3.12. Através de análise de casos é visto que esta é a melhor configuração para o conjunto  $P_3$  de uma grade  $G$  de tamanho  $2 \times n$ , logo  $n(G) = n$ .

Agora ao que interessa. Seja  $G$  uma grade de tamanho  $3 \times n$ . Antes de determinarmos o número  $P_3$  de  $G$ , definimos no Lema 1 certas propriedades do conjunto  $P_3$  em  $G$ . Com base nestas propriedades concluímos que se  $G$  é uma grade  $3 \times 3$  então  $n(G) = 4$  e definimos exatamente os vértices do conjunto  $P_3$  mínimo  $S$  para

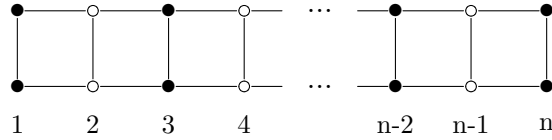


Figura 3.11: Grade  $2 \times n$

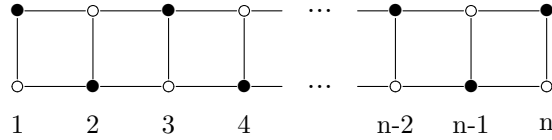


Figura 3.12: Grade  $2 \times n$

$G$ . Utilizando este conjunto  $S$  provamos no Lema 2 que  $n(G) = 4\frac{n}{3}$  para grades  $3 \times n$ , onde  $n$  é múltiplo de 3. E por fim, no Teorema 6 determinamos o número  $P_3$  de grades  $3 \times n$ , para um  $n$  qualquer.

**Lema 1.** [15] *Seja  $S$  um conjunto  $P_3$  de uma grade  $G$  de tamanho  $3 \times n$ , onde  $n = 3k + r$ ,  $r < 3$ . O conjunto  $S$  possui as seguintes propriedades:*

1. *A última coluna possui pelo menos um vértice em  $S$ ;*
2. *As últimas duas colunas possuem pelo menos três vértices em  $S$ ;*
3. *As últimas três colunas possuem pelo menos quatro vértices em  $S$ ; e*
4. *Duas colunas adjacentes possuem pelo menos dois vértices em  $S$ .*

**Prova.** As propriedades 1, 2 e 4 podem ser deduzidas por simples análise de casos, sendo que a propriedade 3 é consequência de 1 e 2.

Considere o grafo apresentado na Figura 3.13: os vértices  $x_n$  e  $z_n$  da última coluna ou devem ser satisfeitos pelos seus dois vizinhos ou devem pertencer a  $S$ . Três combinações são possíveis: os vizinhos dos dois vértices pertencem a  $S$  (Figura 3.13 (a)); os dois vértices ( $x_n$  e  $z_n$ ) pertencem a  $S$  (Figura 3.13 (b)); um dentre os dois vértices e os vizinhos do outro pertencem a  $S$  (Figura 3.13 (c)). Logo a última coluna possui pelo menos um vértice em  $S$  e 1 é verdade.

Observe na Figura 3.13 (b) que se  $x_n$  e  $z_n$  pertencem a  $S$  os vértices da coluna  $n - 1$  não são totalmente satisfeitos. Como  $y_{n-1}$  é adjacente a somente um vértice da coluna  $n - 2$  então será necessário pelo menos mais um vértice da coluna  $n - 1$  ou  $n$  para satisfazer  $y_{n-1}$ . Logo 2 é verdade.

Ainda pela Figura 3.13, para satisfazer a coluna  $n - 2$  será necessário pelo menos mais um vértice das três últimas colunas, pois cada vértice da coluna  $n - 2$  possui somente um vizinho que não pertence às três últimas colunas. Logo 3 é verdade.



Considere as colunas  $i - 1, i, i + 1$  e  $i + 2$  (Figura 3.13). Mesmo que todos os vértices das colunas  $i - 1$  e  $i + 2$  pertençam a  $S$  os vértices das colunas  $i$  e  $i + 1$  não serão satisfeitos. A adição de um vértice da coluna  $i$  ou  $i + 1$  não forma um conjunto  $P_3$ , mas dois vértices são suficientes (p.e.  $y_i$  e  $y_{i+1}$ ). Logo 4 é verdade. ■

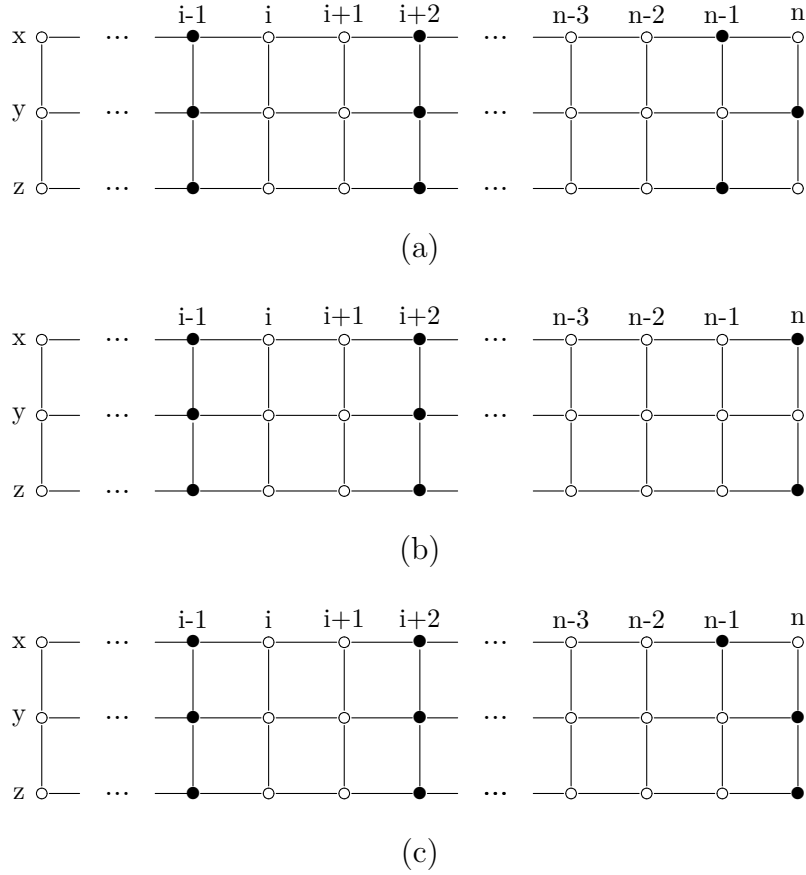


Figura 3.13: Grade  $G$

Seja  $G$  uma grade  $3 \times n$ ,  $n \pmod{3} = 0$ . A grade  $G$  pode ser particionada em  $\frac{n}{3}$  subgrades  $G_1, \dots, G_{\frac{n}{3}}$  de tamanho  $3 \times 3$ , onde cada  $G_i$  começa na coluna  $3i - 2$ ,  $i = 1, \dots, \frac{n}{3}$ . Uma subgrade  $G_i$  qualquer é chamada de *subgrade quadrada*.

Pode-se afirmar que para uma grade  $3 \times 3$  existe exatamente um conjunto  $P_3$  mínimo, aqui nomeado de *conjunto  $P_3$  canônico*. Este contém quatro vértices e é mostrado na Figura 3.14. No Lema 2 iremos mostrar que  $n(G) = \frac{4n}{3}$ , já que aplicando o conjunto  $P_3$  canônico em cada subgrade quadrada obtém-se um conjunto  $P_3$  mínimo de  $G$ .

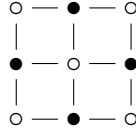


Figura 3.14: Conjunto  $P_3$  Canônico de uma Grade  $3 \times 3$

**Lema 2.** [15] *Seja  $G$  uma grade  $3 \times n$ , onde  $n \pmod 3 = 0$ . Então  $n(G) = 4(\frac{n}{3})$ .*

**Prova.** A prova consiste em mostrar que existe um conjunto  $P_3$  mínimo de  $G$ , tal que cada subgrade quadrada  $G_i$  de  $G$  possui exatamente quatro vértices em  $S$ .

Seja  $S$  um conjunto  $P_3$  mínimo de  $G$  e  $S_i = S \cap V(G_i)$ , ou seja,  $S_i$  é o subconjunto de vértices de  $G_i$  contido em  $S$ .

A seguir é provado por indução que  $|S_i| \geq 4$  para todo  $i$ .

Para  $i = 1$ ,  $|S_i| \geq 4$ , consequência do Lema 1.

Para  $i > 1$ , considere que  $G_i$  é a primeira subgrade quadrada de  $G$  que possui menos de quatro vértices em  $S$ , ou seja,  $|S_i| < 4$ . Para satisfazer a coluna  $3i - 1$  será necessário no mínimo dois vértices (Figura 3.15), que não são suficientes para satisfazer os demais vértices de  $G_i$ . Porém, se os três vértices da coluna  $3i - 1$  pertencem a  $S$ , todos os vértices de  $G_i$  podem ser satisfeitos. Logo, se  $|S_i| < 4$ , então  $|S_i| = 3$ .

Como a única forma de satisfazer  $G_i$  com três vértices é utilizando os vértices da coluna  $3i - 1$  isso implica que  $|S_{i-1}| \geq 5$ , de  $S_{i-1}$  são utilizados os três vértices da coluna  $3(i - 1)$ , que são necessários para satisfazer  $G_i$ , e pelo menos dois vértices das colunas adjacentes  $3(i - 1) - 2$  e  $3(i - 1) - 1$  (Lema 1 (4)). Neste caso é possível trocar  $S_1, \dots, S_i$  por  $i$  cópias do conjunto  $P_3$  canônico para cada  $G_i$ , obtendo assim um novo subconjunto  $S$ . Esta substituição pode ser repetida até  $i = \frac{n}{3}$ . O novo  $S$  obtido é um conjunto  $P_3$  mínimo de  $G$ . Logo, cada uma das subgrades  $G_1, \dots, G_i$  contribui com exatamente quatro vértices e  $n(G) = 4(\frac{n}{3})$ . ■

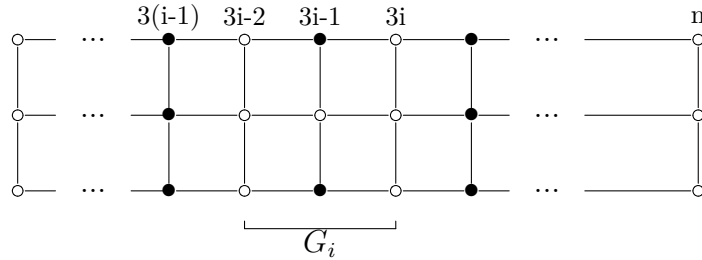


Figura 3.15: Grade Lema 2

**Teorema 6.** *Seja  $G$  uma grade  $3 \times n$ ,  $n > 2$  e  $r = n \bmod 3$ . Então*

$$n(G) = \begin{cases} 4\left(\frac{n}{3}\right) & \text{se } r=0; \text{ sen\~{a}o} \\ 4\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + r + 1. & \end{cases}$$

**Prova.**

Se  $r = 0$ , provado pelo Lema 2.

Se  $r = 2$ , Lema 1 Afirmação 2 e Lema 2. Seja  $S$  um conjunto  $P_3$  mínimo. Pelo Lema 1 Afirmação 2 sabe-se que as duas últimas colunas possuem pelo menos 3 vértices em  $S$ . Suponha que  $n(G) < 4\left(\frac{n}{3}\right) + 3$ , então deve existir uma subgrade quadrada  $G_i$  com menos 4 vértices em  $S$ . Como visto no Lema 2, se  $G_i$  possui 3 vértices em  $S$  então  $G_{i-1}$  possui pelo menos 5 vértices em  $S$ , logo para satisfazer os vértices das  $\frac{n-2}{3}$  subgrades quadradas são necessários pelo menos  $4\left(\frac{n-2}{3}\right)$  vértices, como demonstrado no Lema 2.

Se  $r = 1$ , considere que a última coluna de  $G$  possui apenas um vértice  $v$  pertencente a um conjunto  $P_3$  mínimo  $S$  de  $G$ . Para satisfazer todos os vértices da coluna  $n$ ,  $v$  deve ser o vértice da linha 2. Seja  $G'$  a grade obtida de  $G$  menos a última coluna de  $G$ . Denote por  $G_k$  a última subgrade quadrada da grade  $G'$ ,  $k = \frac{n-1}{3}$ . Seja  $S_k = S \cap V(G_k)$ . Examinando todas as possibilidades para  $S_k$ , conclui-se que  $|S_k| > 4$ .  $S_k$  deve ter pelo menos 2 vértices da coluna  $3k$ , que são necessários para satisfazer a última coluna, Figura 3.16. Para satisfazer as colunas  $3k-2$  e  $3k-1$  são necessários pelo menos 3 vértices. Logo, se a última coluna possui apenas um vértice em  $S$  então  $|S_k| > 4$ , o que implica que  $n(G) > 4k + 1$ . Por outro lado, um conjunto  $P_3$   $S'$  de  $G$  pode ser obtido utilizando-se o conjunto  $P_3$  canônico em cada subgrade quadrada de  $G'$ , e adicionando-se a  $S'$  dois vértices da última coluna de  $G$  (vértices da linha 1 e linha 3). Logo  $n(G) \leq 4\frac{n-1}{3} + 2$ , implicando que  $n(G) = 4\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + 2$ . ■

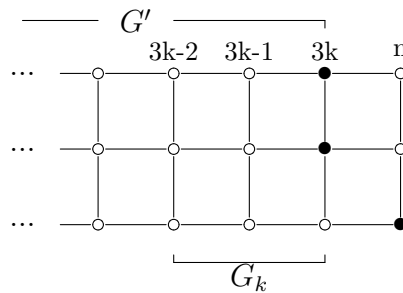


Figura 3.16: Grade Teorema 6

Para fechar o tópic, determinamos o número  $P_3$  para classe dos cografos. Relembrando algumas notações:  $u$  é o número de vértices universais,  $G_i$  é um subgrafo

induzido de  $G$  obtido através dos vértices da componente conexa  $\overline{G}_i$  de  $\overline{G}$ , e  $t$  é o número de componentes conexas em  $\overline{G}$ . Denote por  $\eta(G)$  o número de componentes conexas de  $G$  e  $D(G)$  o conjunto dominante mínimo de  $G$ .

**Teorema 7.** [15] *Seja  $G$  um cografo, então:*

$$n(G) = \begin{cases} 2, & \text{se } u \geq 2 \text{ ou } |V(G_i)| = 2, \text{ para algum } i; \text{ senão,} \\ 3, & \text{se } t \geq 3; \text{ senão} \\ \min \{n(G_2), 1 + |D(G_2)|\}, & \text{se } u = 1 \text{ e } t = 2; \text{ senão} \\ \min_{1 \leq i \leq 2} \{4, n(G_i), 1 + |D(G_i)|\}. & \end{cases}$$

**Prova.** Se  $G$  é um cografo com dois ou mais vértices universais, então existe um conjunto  $P_3$  mínimo de  $G$  formado por exatamente dois vértices universais, logo  $n(G) = 2$ , se  $u \geq 2$ .

Se  $G$  é um cografo que possui uma componente  $G_i$  qualquer com exatamente dois vértices, estes dois vértices formam um conjunto  $P_3$  mínimo, então  $n(G) = 2$ , se existir  $|V(G_i)| = 2$ .

Se  $G$  é um cografo com um ou nenhum vértice universal e cujas componentes  $G_i$  possuam mais de dois vértices vale dividir  $G$  em dois casos para análise:

Caso 1:  $G$  possui três ou mais componentes ( $t \geq 3$ ).

Sabe-se que  $G$  possui no máximo um vértice universal. Como as componentes  $G_i$  possuem  $|V(G_i)| \geq 3$  e  $\eta(G_i) \geq 2$  (com exceção de  $G_1$  se existir vértice universal) pode-se afirmar que dois vértices não formam um conjunto  $P_3$ , pois existirá componente  $G_i$  que não será satisfeita.

Sendo assim, se  $t \geq 3$ ,  $u \leq 1$  e  $|V(G_i)| \geq 3$  serão necessários pelo menos três vértices para formar um conjunto  $P_3$ . Dadas três componentes distintas quaisquer,  $G_i, G_k, G_j$ , o conjunto que contém um vértice de cada uma dessas componentes é um conjunto  $P_3$  mínimo, pois garantidamente  $G_i, G_k, G_j$  satisfazem os vértices de  $G - \{G_i \cup G_k \cup G_j\}$  e cada duas componentes satisfaz a terceira. Logo  $n(G) = 3$  se  $t \geq 3$ ,  $u \leq 1$  e  $|V(G_i)| \geq 3$ .

Caso 2:  $G$  possui exatamente duas componentes,  $G_1$  e  $G_2$ .

Neste caso divide-se o grafo em dois subcasos:

Subcaso 2.1:  $G_1$  é vértice universal.

Como  $|V(G_2)| \geq 3$  e  $\eta(G_2) \geq 2$  pode-se afirmar que dois vértices não formam um conjunto  $P_3$  de  $G$ , ou seja  $n(G) \geq 3$ .

Seja  $S$  um conjunto dominante mínimo de  $G_2$ , isso implica que se  $v \in G_2$  ele possui pelo menos um vizinho em  $S$ . Se todo  $v \in G_2$  possuir mais de um vizinho em  $S$  então  $S$  é um conjunto  $P_3$  de  $G_2$ . Como  $|V(G_1)| = 1$  e  $n(G) \geq 3$  então  $n(G_2) \geq 2$ . Logo os vértices de  $S$  satisfazem  $G_1$  e  $S$  é um conjunto  $P_3$  de  $G$ . Como  $S$  é conjunto dominante mínimo, logo  $S$  é um conjunto  $P_3$  mínimo de  $G$  e  $n(G) = n(G_2)$ .

Agora suponha que exista pelo menos um vértice  $v \in G_2$  o qual possua somente um vizinho em  $S$ . Sendo assim,  $D(G_2)$  não é conjunto  $P_3$  de  $G_2$ . Como  $S$  é conjunto dominante mínimo então  $S \cup G_1$  é um conjunto  $P_3$  mínimo de  $G$  e  $n(G) = 1 + |D(G_2)|$ .

Seja  $S$  um conjunto  $P_3$  mínimo de  $G$  e  $v$  o vértice universal de  $G_1$ . Se  $v \notin S$  então  $S$  possui apenas vértices de  $G_2$ , logo  $S$  é conjunto  $P_3$  mínimo de  $G_2$ . Se  $v \in S$ ,  $v$  contribui com um vértice para a formação dos caminhos  $P_3$ . Como  $S$  é conjunto  $P_3$ , os vértices de  $G_2$  devem possuir pelo menos um vizinho em  $S - \{v\}$  ou pertencer a  $S$ , ou seja,  $S - \{v\} = D(G_2)$ . Como  $S$  é conjunto  $P_3$  mínimo, o conjunto dominante de  $G_2$  também é mínimo.

Subcaso 2.2:  $G$  não possui vértice universal.

Como  $|V(G_i)| \geq 3$  e  $\eta(G_i) \geq 2$  pode-se afirmar que dois vértices não formam um conjunto  $P_3$  de  $G$ , ou seja  $n(G) \geq 3$ .

Claramente quatro vértices formam um conjunto  $P_3$ . Dois vértices de  $G_1$  satisfazem os vértices de  $G_2$  e vice-versa. Porém se  $G_1$  ou  $G_2$  possuir um conjunto  $P_3$  de tamanho três, estes vértices formariam um conjunto  $P_3$  mínimo de  $G$ . Considere ainda o seguinte caso: seja  $S$  um conjunto dominante mínimo de  $G_1$ . Sem perda de generalidade seja  $|D(G_1)| \geq 2$ , pois  $\eta(G_1) \geq 2$ . Considere que  $|D(G_1)| = 2$ , então  $S$  satisfaz  $G_2$ . Porém  $S$  não satisfaz  $G_1$  pois  $\eta(G_1) \geq 2$  e  $|V(G_1)| \geq 3$ , ou seja,  $G_1$  possui vértices com apenas um vizinho em  $S$ . Logo  $S \cup v, v \in G_2$  forma um conjunto  $P_3$  mínimo de  $G$  e  $n(G) = 3$ .

Agora, seja  $S$  um conjunto  $P_3$  mínimo de  $G$ . Sabe-se que cardinalidade de  $S$  é no máximo 4, pois dois vértices de  $G_1$  e dois  $G_2$  formam um conjunto  $P_3$ . Logo  $2 \leq n_2(G) \leq 4$ . Como  $\eta(G_i) \geq 2$  e  $|V(G_i)| \geq 3$  então  $n(G) > 2$ .

Se  $n(G) = 3$  e  $\{v \in G_i | v \in S\}$  então  $S$  é um conjunto  $P_3$  de  $G_i$ . Como  $\eta(G_i) \geq 2$  e  $|V(G_i)| \geq 3$ ,  $S$  é conjunto  $P_3$  mínimo de  $G_i$ , logo  $n(G_i) = n(G)$ .

Se  $n(G) = 3$  e, sem perda de generalidade,  $x \in G_1$ , e  $y, z \in G_2$ .  $G_1$  é satisfeito por  $y$  e  $z$ . Como  $G_1$  possui apenas um vértice em  $S$  então  $y$  e  $z$  devem dominar  $G_2$ . Como  $\eta(G_2) \geq 2$ ,  $\{y, z\}$  é conjunto dominante mínimo e  $n(G) = 1 + |D(G_i)|$ . ■

Resumindo! Sabendo que o problema do NÚMERO  $P_3$  corresponde ao problema de 2-DOMINAÇÃO, muito aprendemos sobre seus limites. Apesar de tal correspondência, como exercício mental, reduzimos o problema do CONJUNTO DOMINANTE para o CONJUNTO  $P_3$  e assim apresentamos uma prova de que o número  $P_3$  é um problema NP-completo para grafos gerais e até mesmo cordais. Mesmo tendo encontrado limites para o conjunto 2-Dominante em árvores [9], decidimos manter nosso algoritmo de determinação do número  $P_3$  em árvores neste trabalho, pois de forma simples ele encontra um conjunto  $P_3$  em uma floresta. Foi com ele, que tivemos uma primeira solução para encontrar um conjunto da envoltória  $P_3$  em uma árvore. Este será apresentado na próxima seção. Para as classes de grades e cografos consegui-

mos determinar o número  $P_3$ . Na seção que se segue falaremos do terceiro tópico estudado, envoltória convexa  $P_3$ . Trabalhamos este problema nas classes de grades, cografos e cordais.

### 3.3 Número de Envoltória $P_3$

Foi com o problema da ENVOLTÓRIA CONVEXA  $P_3$  que este estudo teve início. Na verdade, o interesse em um problema particular, citado no livro *Coffee Time in Memphis*, de Bollobás [10], aplicado aos conceitos de convexidade, fez surgir a convexidade  $P_3$ . Para quem ainda não conhece a história, o problema aqui citado é o problema da contaminação. Ou seja, dado uma grade completa onde inicialmente algumas células estão contaminadas, e sabendo que uma célula sã se torna doente se duas de suas células vizinhas estão contaminadas; pergunta-se: quantas células, no mínimo, devem estar inicialmente contaminadas para que a grade se torne doente por completa.

O problema da contaminação é estudado com diversos nomes, dentre eles: "bootstrap percolation"[1, 4, 6, 67, 68] e conversão irreversível de grafos [17]. Ao relacionarmos a conversão irreversível de grafos à convexidade  $P_3$ , limitamos o seu parâmetro de conversão para 2. O problema de conversão irreversível interessa a uma variedade de áreas distintas como áreas de influências sociais [44, 55, 65], redes neurais [48], estratégias de marketing [35, 55] e especialmente computação distribuída [42, 43, 53, 56, 59, 64]. Um estudo sobre tal assunto pode ser encontrado no artigo "Irreversible conversion of graphs"[17]. Alguns dos resultados que se encontram em tal artigo podem ser encontrados nesta seção, porém iremos limitá-los ao problema da envoltória convexa  $P_3$ . Sendo assim vamos voltar ao conceito de envoltória  $P_3$ .

Lembrando o tópico anterior, para descobriremos se um conjunto  $S$  é um conjunto  $P_3$ , aplicamos a operação intervalo em  $S$  uma única vez, se esta resultar em todos os vértices de  $G$  então  $S$  é um conjunto  $P_3$ . Se relaxarmos um pouco as regras, e ao invés de uma única vez, pudermos aplicar a operação intervalo  $S$  enquanto for possível adicionar vértices em  $S$ , este passa de conjunto  $P_3$  para conjunto da envoltória  $P_3$ . É claro que todo conjunto  $P_3$  é um conjunto da envoltória  $P_3$ , mas o problema é que queremos o conjunto da envoltória  $P_3$  de cardinalidade mínima. Este problema é conhecido como problema do Número de Envoltória  $P_3$ , denotado por  $h(G)$ . Para uma definição mais detalhada, exemplo e nomenclatura volte ao início do Capítulo 3.

Como mencionado anteriormente, o problema do NÚMERO DE ENVOLTÓRIA  $P_3$  de uma grade  $G$  de tamanho  $m \times n$  equivale ao problema de CONTAMINAÇÃO em uma grade retangular dado por Bollobás, que gentilmente nos oferece a seguinte

solução:  $h(G) = \left\lceil \frac{(n+m)}{2} \right\rceil$  [5, 10]. Além disso, após estudarmos o número  $P_3$ , fica fácil visualizarmos que o conjunto da envoltória  $P_3$  mínima é igual ao conjunto  $P_3$  mínimo para as classes elementares dos grafos completos, caminhos e ciclos. Relembrando: em um grafo completo  $G$ ,  $h(G) = n(G) = 2$ ; em um caminho  $P$ ,  $h(P) = n(P) = \left\lceil \frac{(n+1)}{2} \right\rceil$  e em um ciclo  $C$ ,  $h(C) = n(C) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$ .

O número de envoltória  $P_3$  também pode ser definida de maneira bem direta para a classe dos cografos, onde,  $u$  é o número de vértices universais,  $G_i$  é um subgrafo induzido de  $G$  obtido através dos vértices da componente conexa  $\overline{G}_i$  de  $\overline{G}$ ,  $t$  é o número de componentes conexas em  $\overline{G}$  e  $\eta(G)$  o número de componentes conexas de  $G$ . O Teorema 8 define o número de envoltória  $P_3$  de um cografo  $G$ .

**Teorema 8.** [15] *Seja  $G$  um cografo, então:*

$$h(G) = \begin{cases} \eta(G_2), & \text{se } u = 1 \text{ e } t = 2; \text{ senão,} \\ 2. & \end{cases}$$

**Prova.** Dois vértices de uma componente  $G_i$  geram  $G - G_i$ , que conseqüentemente vão gerar  $G_i$ . Porém, se  $u = 1$  e  $t = 2$ , tem-se que dois vértices de  $G_2$  geram  $G_1$ , mas  $G_1$  não gera todo  $G_2$ , caso  $\eta(G_2) > 2$ . Seja  $G_2$  formada pelas componentes conexas  $C_1, \dots, C_j$ . Como  $C_i$  é componente conexa, cada vértice de  $C_i \cup v$ ,  $v \in G_1$ , forma um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G_1 \cup G_i$ . Como  $\eta(G_2) \geq 2$ , um vértice de cada  $C_i$  forma um conjunto da envoltória  $P_3$  mínima de  $G$ . ■

Dado os parágrafos anteriores, o problema do número de envoltória  $P_3$  parece simples e promissor, porém este é NP-Completo para grafos em geral. A seguir apresentamos uma redução do problema. Também desenvolvemos um algoritmo para a determinação do número de envoltória  $P_3$  para a classe de árvores e outro para os grafos cordais. Visto que árvores é uma subclasse dos grafos cordais, o primeiro algoritmo parece ficar jogado às traças. Mas dando a ele seu devido valor, o descrevemos aqui por ter sido o primeiro que desenvolvemos e sendo assim por fazer parte do nosso processo de estudo do número de envoltória  $P_3$ . Ele também é um algoritmo de fácil entendimento e de simples implementação, o que aumenta nossa apreciação pelo seu desenvolvimento.

Para provar que o problema do NÚMERO DE ENVOLTÓRIA  $P_3$  é NP-completo fazemos uma redução do problema da SATISFABILIDADE (SAT). Dada uma instância de SAT com  $n$  variáveis e  $m$  cláusulas, construímos um grafo  $G$  e especificamos um inteiro  $c$  tal que a construção de  $G$  é polinomial em  $n$  e  $m$  e o conjunto de cláusulas é satisfeito se e somente se  $h(G) \leq c$ . A seguir definimos os dois problemas utilizados e mostramos a prova.

Considere uma expressão booleana escrita somente com operadores E( $\wedge$ ), OU ( $\vee$ ), NÃO ( $\neg$ ), variáveis  $(x_1, x_2, \dots, x_i)$  e parêntesis. Uma *literal* corresponde a uma

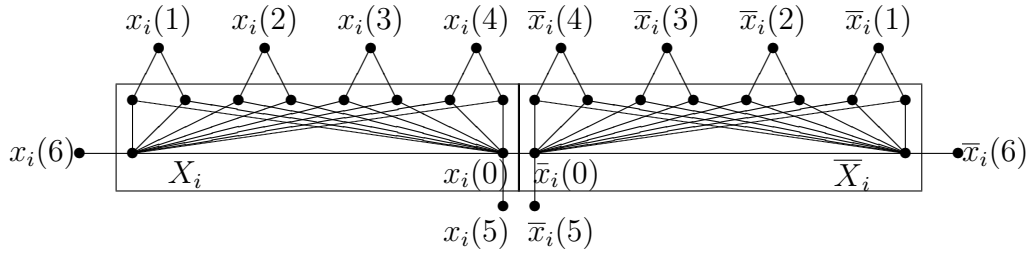


Figura 3.17: Componente  $G(x_i)$ .

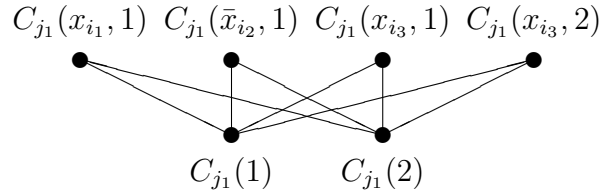


Figura 3.18: Componente  $G(C_{j_1})$

variável ou sua negação; uma *cláusula* ao conjunto de literais unidas pelo símbolo de disjunção (OU). As *fórmulas*, portanto, serão uma conjunção (E) de cláusulas.

**Problema 6. SATISFABILIDADE (SAT)**

INSTÂNCIA: *Uma expressão booleana/fórmula  $\mathcal{C}$  na forma normal conjuntiva.*

PERGUNTA: *Existe uma atribuição de valores verdade para as variáveis de  $\mathcal{C}$  que satisfaça  $\mathcal{C}$ , ou seja, que torne a fórmula avaliada verdadeira?*

**Problema 7. NÚMERO DE ENVOLTÓRIA  $P_3$**

INSTÂNCIA: *Um grafo  $G$  e um número natural  $k$ .*

PERGUNTA:  *$G$  possui um conjunto da envoltória  $P_3$  com no máximo  $k$  vértices?*

**Teorema 9.** [17] *O problema NÚMERO DE ENVOLTÓRIA  $P_3$  é NP-completo.*

**Prova.** O problema NÚMERO DE ENVOLTÓRIA  $P_3$  pertence a NP, pois dado um certificado, um subconjunto de vértices de  $G$ , é possível responder em tempo polinomial se este subconjunto possui o tamanho apropriado e se  $H[S] = V(G)$ .

Nesta prova iremos reduzir o problema SAT no problema do NÚMERO DE ENVOLTÓRIA  $P_3$ . Seja  $\mathcal{C}$  uma instância de SAT que usa as variáveis booleanas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e que consiste nas cláusulas  $C_1, C_2, \dots, C_m$  tal que para todo  $1 \leq i \leq n$ , no máximo 3 cláusulas de  $\mathcal{C}$  contém  $x_i$  ou  $\bar{x}_i$ , e para todo  $1 \leq j \leq m$ , a cláusula  $C_j$  contém no máximo 3 literais. Saiba que mesmo com tal restrições para as instâncias o problema SAT continua NP-completo ([LO1] em [46]). Ainda podemos considerar que para todo  $1 \leq i \leq n$ , alguma cláusula de  $\mathcal{C}$  contém  $x_i$  e que alguma cláusula de



$\mathcal{C}$  contém  $\bar{x}_i$ . Consequentemente, para todo  $1 \leq i \leq n$ , cada uma das duas literais  $x_i$  e  $\bar{x}_i$  está contida em exatamente 1 ou 2 das cláusulas de  $\mathcal{C}$ .

Dada uma instância de SAT construímos um grafo  $G$  da seguinte forma: para todo  $1 \leq i \leq n$ , adicionamos em  $G$  um componente  $G(x_i)$  mostrado na Figura 3.17. O conjunto de vértices de  $G(x_i)$  é a união disjunta de dois conjuntos  $X_i$  e  $\bar{X}_i$ , cada um deles contendo 10 vértices e um conjunto  $\{x_i(j) \mid 0 \leq j \leq 6\} \cup \{\bar{x}_i(j) \mid 0 \leq j \leq 6\}$  de 14 vértices. Os dois subgrafos induzidos por  $X_i$  e  $\bar{X}_i$  são obtidos a partir do grafo bipartido completo  $K_{2,8}$  adicionando-se uma aresta entre os dois vértices de grau 8. Em  $X_i$  e  $\bar{X}_i$  dois vértices especiais são especificados,  $x_i(0)$  e  $\bar{x}_i(0)$ , como mostrado na Figura 3.17. As arestas restantes podem ser vistas na Figura 3.17. Ainda, para todo  $1 \leq j \leq m$ , adicionamos em  $G$  um componente  $G(C_j)$ , o qual é um grafo bipartido completo com as seguintes partições: a primeira partição de  $G(C_j)$  é formada pelos vértices  $C_j(1)$  e  $C_j(2)$ . A outra partição contém os seguintes vértices:

- para toda literal  $x$  que ocorre em  $C_j$  e está contida em apenas uma cláusula de  $\mathcal{C}$ , criar os vértices  $C_j(x, 1)$  e  $C_j(x, 2)$  no componente  $G(C_j)$  e adicionar em  $G$  as seis arestas

$$x(1)C_j(1), x(2)C_j(1), x(3)C_j(2), x(4)C_j(2), x(5)C_j(x, 1), x(5)C_j(x, 2).$$

- para toda literal  $x$  que ocorre em  $C_j$  e está contida em exatamente duas cláusulas de  $\mathcal{C}$ , criar o vértice  $C_j(x, 1)$  no componente  $G(C_j)$  e adicionar em  $G$  as cinco arestas

$$x(1)C_j(1), x(2)C_j(1), x(3)C_j(2), x(4)C_j(2), x(5)C_j(x, 1).$$

Um exemplo do componente  $G(C_j)$  pode ser visto na Figura 3.18, onde  $C_{j_1} = x_{i_1} \vee \bar{x}_{i_2} \vee x_{i_3}$  com  $x_{i_1}$ ,  $\bar{x}_{i_2}$  aparecendo em exatamente duas cláusulas de  $\mathcal{C}$  e  $x_{i_3}$  aparecendo em exatamente uma cláusula de  $\mathcal{C}$ .

Dada a descrição de  $G$  vamos provar que  $\mathcal{C}$  é satisfazível se e somente se  $h(G) \leq 3n$ .

Seja  $\mathcal{C}$  satisfazível pela atribuição de valores verdades às literais em  $\mathcal{A}$ . Considere que o conjunto  $S_1$  contenha todos os vértices de  $G$  que possuam grau 1 (neste caso  $x_i(6)$  e  $\bar{x}_i(6)$ ). Ainda, para toda literal  $x$  que seja verdadeira em  $\mathcal{A}$ , coloque em  $S_1$  o vértice  $x(0)$ . Note que  $S_1$  possui exatamente  $3n$  vértices. Então se para algum  $1 \leq i \leq n$ ,  $x_i$  é verdadeiro em  $\mathcal{A}$ , significa que  $\{x_i(0), x_i(6)\} \in S_1$  o que implica que  $X_i \cup \{x_i(1), x_i(2), x_i(3), x_i(4)\} \in H[S_1]$ . Similarmente, se para algum  $1 \leq i \leq n$ ,  $x_i$  é falso em  $\mathcal{A}$ , então  $\{\bar{x}_i(0), \bar{x}_i(6)\} \in S_1$  o que implica que  $\bar{X}_i \cup \{\bar{x}_i(1), \bar{x}_i(2), \bar{x}_i(3), \bar{x}_i(4)\} \in H[S_1]$ . Como para todo  $1 \leq j \leq m$ ,  $C_j$  deve conter uma literal verdadeira, temos que  $V(C_j) \in H[S_1]$ . Ainda, como para todo

$1 \leq i \leq n$ ,  $x_i(5)$  e  $\bar{x}_i(5)$  possui exatamente dois vizinhos que pertencem a algum componente  $C_j$ , temos que  $x_i(5), \bar{x}_i(5) \in H[S_1]$ . Finalmente, como para todo  $1 \leq i \leq n$ ,  $\{x_i(5), \bar{x}_i(5), x_i(6), \bar{x}_i(6)\} \in H[S_1]$  e  $\{x_i(0), \bar{x}_i(0)\} \cap S_1 \neq \emptyset$  adicionamos o resto dos vértices de  $G$  em  $H[S_1]$ , ou seja,  $H[S_1] = V(G)$  e  $|S_1| \leq 3n$ .

Agora considere que  $S_1$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  tal que  $|S_1| \leq 3n$ . Com certeza  $S_1$  contém todos os  $2n$  vértices de grau 1 de  $G$ ,  $\{x_i(6), \bar{x}_i(6)\}$ . Como para todo  $1 \leq i \leq n$ , todo vértice em  $X_i \cup \bar{X}_i$  possui no máximo um vizinho em  $V(G) \setminus (X_i \cup \bar{X}_i)$ , então pela definição de Número de Envoltória  $P_3$   $S_1 \cap (X_i \cup \bar{X}_i) \neq \emptyset$ . Com isso obtemos um conjunto  $S_1$  com  $3n$  vértices, sendo eles os  $2n$  vértices de grau 1 e exatamente um vértice de  $X_i \cup \bar{X}_i$  para todo  $1 \leq i \leq n$ . Sendo assim definimos uma atribuição de valores verdade  $\mathcal{A}$  onde  $x_i$  é verdadeiro se e somente se  $S_1$  contém um vértice de  $X_i$  para  $1 \leq i \leq n$ .

Para provar que  $\mathcal{A}$  é uma atribuição de valores verdade válida, utilizaremos da contradição. Considere que a cláusula  $C_j$  para algum  $1 \leq j \leq m$  não é satisfeita por  $\mathcal{A}$ . Seja

$$X = V(C_j) \cup \bigcup_{x_i \text{ em } C_j} (\{x_i(j) \mid 1 \leq j \leq 5\} \cup X_i) \cup \bigcup_{\bar{x}_i \text{ em } C_j} (\{\bar{x}_i(j) \mid 1 \leq j \leq 5\} \cup \bar{X}_i).$$

Note que pela construção de  $X$ , todo vértice de  $X$  possui no máximo um vizinho em  $V(G) \setminus X$ . Sabemos que pela definição de número de envoltória  $P_3$ , se  $U \subseteq V(G)$  tal que  $|N_G(v) \setminus U| < 2$  para todo  $v \in U$ , então o conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$  intersecta  $U$ . Sendo assim, como  $X \cap S_1 = \emptyset$ , temos uma contradição, logo  $\mathcal{A}$  é uma atribuição de valores verdade válida. ■

No tópico número  $P_3$  desenvolvemos um algoritmo que determina um conjunto  $P_3$  mínimo em árvores. Este atribui rótulos com valor 0 para todo vértice do grafo, estes rótulos indicam quantos vizinhos um vértice possui no conjunto  $P_3$ . Estes rótulos são incrementados a medida que um vizinho do vértice entra no conjunto  $P_3$ . Dados os rótulos o algoritmo percorre a árvore retirando vértice, cada vértice retirado é analisado segundo o rótulo e grau sendo assim decidido se este fará parte ou não do conjunto  $P_3$ . Sabendo que a diferença entre um conjunto  $P_3$  e um conjunto da envoltória  $P_3$  é o número de vezes que a operação intervalo pode ser aplicada, alguém poderia pensar que uma leve modificação no algoritmo para o número  $P_3$  (ALGORITMO 1) resolveria o problema do número de envoltória  $P_3$ . Foi exatamente isso o que fizemos! Quando, no ALGORITMO 1 o rótulo de um vértice passa a ter valor maior ou igual a dois, a única coisa que pode acontecer a este vértice é ser excluído da árvore sem fazer parte do conjunto  $P_3$  mínimo. Já no algoritmo para a determinação do número de envoltória  $P_3$  (ALGORITMO 2), quando o rótulo de um vértice passa a ter valor maior ou igual a dois, este além de poder ser excluído de  $F$

sem fazer parte do conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo, ele também vai contribuir para aumentar o rótulo de seus vizinhos. Este processo acontece enquanto for possível aumentar o valor dos rótulos, como se fosse o processo de contaminação do grafo.

No ALGORITMO 2 usamos a definição de folha própria. Uma *folha própria* é uma folha que não é vértice isolado. A seguir é descrito o algoritmo que acha um conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo de uma floresta  $F$ . Note a similaridade com o ALGORITMO 1. No Passo Inicial definimos adicionalmente o conjunto  $S'$  este será utilizado para controlar o processo de contaminação do grafo, que é tratado no item 5 do Passo Geral. Também no Passo Geral, o item 1 foi adicionado, pois uma folha própria com vizinho  $v$  e com rótulo 1 será gerada por  $v$ , logo não fará parte do conjunto  $S$ . Note também que a escolha do vértice apropriado pode ser reduzida para dois casos apenas.

Antes de descrevermos o algoritmo vale mencionar que Dreyer e Roberts, apresenta em [36] um algoritmo que resolve o problema da contaminação para árvores dado um inteiro  $k$  de vizinhos. Este algoritmo pode ser visto em [17], onde é mostrado um contra-exemplo para o caso em que  $k=2$ , o que corresponde exatamente ao nosso problema do número de envoltória  $P_3$ . Sendo assim, insistimos mais uma vez em apresentar o nosso algoritmo para determinação do número de envoltória  $P_3$ .

### ALGORITMO 2: Determinação do $h(F)$

- *Passo Inicial:* definir o conjunto  $S := S' := \emptyset$  e os rótulos  $\ell(v) := 0$ , para todo  $v \in V(F)$ .
- *Passo Geral:* se  $V(F) = \emptyset$  então finalizar o algoritmo e devolver  $S$  que é um conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo de  $F$ ; senão:
  1. Iterativamente, enquanto  $F$  possuir alguma folha própria  $v$  com rótulo 1, remover  $v$  de  $F$ ;
  2. iterativamente, enquanto  $F$  possuir vértice isolado  $v$  com  $\ell(v) \geq 2$ , remover  $v$  de  $F$ ;
  3. escolher um vértice apropriado  $v \in V(F)$ , tal que  $v$  seja isolado ou  $v$  seja uma folha com rótulo 0;
  4. incluir  $v$  em  $S$  e em  $S'$ ;
  5. iterativamente efetuar as seguintes operações, enquanto  $S' \neq \emptyset$ :
    - (a) selecionar  $v' \in S'$ ;
    - (b) remover  $v'$  de  $S'$  e de  $F$ ;

- (c) para todo  $w \in N_F(v')$  incrementar  $\ell(w)$  de 1 e se  $\ell(w)$  atingir o valor 2 então incluir  $w$  em  $S'$ .

6. repetir o passo geral.

Um exemplo da execução do algoritmo pode ser visto na Figura 3.19, onde vértices pretos representam vértices que pertencem a  $S$ . Um vértice  $v$  é representado por  $v_i$  onde  $i$  representa o rótulo de  $v$ . Na Figura 3.19 (a) pode-se ver a árvore  $F$  de entrada e os vértices que pertencem a  $S$ . Suponha que nas primeiras iterações o algoritmo considera todas as folhas de  $F$ , colocando-as em  $S$ ,  $S = \{b, d, f, m, n, p, q, r\}$ . Ao inserir uma folha  $v$  em  $S$  o vizinho de  $v$  recebe rótulo 1 e vira folha em  $F$ , conseqüentemente este é removido de  $F$ . Obtém-se então a floresta da Figura 3.19 (b). O algoritmo recomeça uma nova iteração, escolhendo como vértice apropriado  $g$ . Com a inclusão de  $g$  em  $S$  obtém-se a floresta da Figura 3.19 (c). Finalmente o algoritmo escolhe  $j$  como vértice apropriado e finaliza execução.

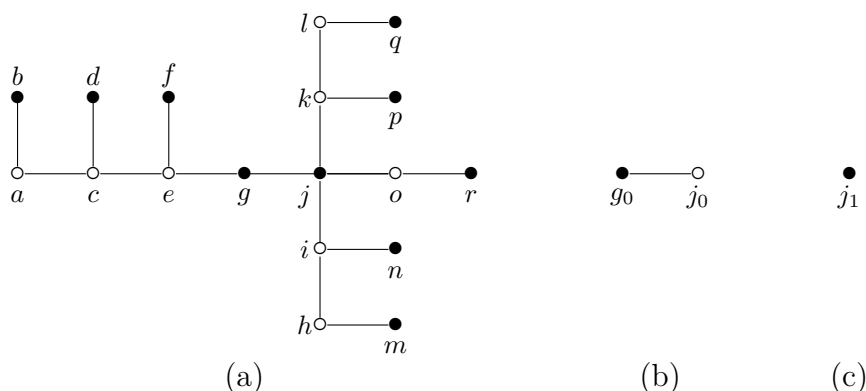


Figura 3.19: Execução do Algoritmo 2 na Floresta  $F$ .

A seguir, o Teorema 10 demonstra que o algoritmo de determinação do  $h(F)$  é correto. Primeiramente é provado que  $S$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $F$ . Em seguida é demonstrado que  $S$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo da seguinte forma: é definido  $S_{min}$  como um conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo qualquer e  $S_i$  o conjunto de vértices de  $S$  adicionados durante as iterações  $1, \dots, i$  e por indução é demonstrado que  $S_i \subseteq S_{min}$ . Esta prova é dividida em dois casos segundo a escolha do vértice  $v$  feita pelo algoritmo. Caso 1:  $v$  é vértice isolado. Caso 2:  $v$  é folha com  $\ell(v) = 0$ .

**Teorema 10.** [15] *O conjunto  $S$  construído pelo algoritmo de determinação do  $h(F)$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo da árvore  $F$ .*

**Prova.**  $S$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $F$  ! Para todo vértice  $v$  da floresta original, ou  $v$  pertence a  $S$  ou é excluído de  $F$  devido a um dos dois motivos: (1)  $\ell(v) \geq 2$ , o que significa que  $v$  possui dois vizinhos em  $H[S]$ ; (2)  $v$  é uma folha

própria com rótulo 1; neste caso  $v$  possui um vizinho  $w$  em  $F$  e  $v$  é excluído de  $F$ . A remoção de vértices é interrompida quando todas as folhas próprias de rótulo 1 são excluídas. O algoritmo segue com a escolha de um vértice apropriado  $v'$  que é incluído em  $S$ . Consequentemente, os vértices do caminho que começa em  $v'$  e que foram excluídos por serem folhas próprias com rótulo 1 serão incluídos em  $H[S]$ . Logo  $S$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $F$ .

O conjunto  $S$  é mínimo! Seja  $F_i$  uma subfloresta de  $F$  considerada pelo algoritmo no início da iteração  $i$ ; e  $\overline{F}_i = F - F_i$ , ou seja,  $\overline{F}_i$  é a subfloresta de vértices já considerados pelo algoritmo (idem ALGORITMO 1). Denote por  $S_i$  o subconjunto de vértices adicionados a  $S$  nas iterações  $1, \dots, i$ , logo  $|S_i| = i$ .

A seguir é demonstrado que existe um conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo, denotada por  $S_{min}$ , tal que  $S_i \subseteq S_{min}$ . Vale ressaltar que todos os vértices de  $F_i$ , ou possuem rótulo 1 ou possuem rótulo 0.

Para  $i = 1$ ;  $S_i \subseteq S_{min}$  é verdade, pois na primeira iteração o algoritmo escolhe uma folha de  $F_1 = F$  e sabe-se que toda folha de  $F$  pertence a um conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo de  $F$ .

Para  $i > 1$ ; pela hipótese de indução,  $S_{i-1} \subseteq S_{min}$  é verdade para algum  $S_{min}$ . Seja  $v$  o vértice adicionado em  $S$  na iteração  $i$ ,  $l(v) < 2$  antes da iteração  $i$ . Se  $v \in S_{min}$  nada é preciso provar. Se  $v \notin S_{min}$ , de acordo com o algoritmo dois casos devem ser analisados:

Primeiro, considere  $v$  um vértice isolado. Como  $v \notin S_{min}$ , mas  $v \in H[S_{min}]$ ,  $v$  possui pelo menos dois vizinhos  $v_1, v_2 \in F$ . Claramente,  $v_1, v_2 \in \overline{F}_i$ . Como rótulo de  $v$  é 0 ou 1, pode-se afirmar que pelo menos um dos vértices  $v_1, v_2$  foi excluído por ser uma folha própria com rótulo 1, sem perda de generalidade, considere esse vértice sendo  $v_1$ , logo  $v_1 \notin S_i$ . Se  $v_1 \in S_{min}$ , então  $v_1$  pode ser trocado por  $v$ , pois  $v_1$  gera  $v$  e  $v$  gera  $v_1$ . Se  $v_1 \notin S_{min}$ , então  $v_1$  é gerado por um par de vértices  $x_1, x_2 \in S_{min}$ . Como  $l(v_1) = 1$ , então  $x_1$  ou  $x_2$  pertence a  $S_i$ , sem perda de generalidade, considere  $x_1 \in S_i$ . Como  $v_1$  foi excluído por ser folha, então  $x_2 \in V(\overline{F}_i)$ . Sabe-se também que  $x_2 \in S_{min}$  e  $x_2 \notin S_i$ , logo  $x_2$  foi excluído por ser folha própria com rótulo 1. Neste caso  $x_2$  gera somente os vértices do caminho  $x_2v$ , então pode-se trocar  $x_2$  por  $v$  e obter  $S_i \subseteq S_{min}$ .

Na segunda escolha,  $v$  é uma folha própria de rótulo 0. Como  $v \notin S_{min}$ , mas  $v \in H[S_{min}]$  então  $v$  é adjacente a pelo menos um vértice  $v_1 \in \overline{F}_i$  e que foi excluído por ser folha própria com rótulo 1; e neste caso podem ser feitas as mesmas considerações do caso anterior. Consequentemente  $S$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo de  $F$ . ■

A conclusão de que o algoritmo para se determinar  $h(F)$  possui tempo  $O(|V(F)|)$  é direta.

Já tendo o valor do número de envoltória  $P_3$  para grade e depois de resolvido o problema para cografos e desenvolvido um algoritmo para árvores nos perguntamos: e os grafos cordais? A propriedade de que grafos cordais não possuem ciclos de tamanho quatro ou maior sem cordas, nos dá um grafo repleto de triângulos, o que nos levou a visualizar que bastaria dois vértices no seu conjunto da envoltória  $P_3$ . Porém um problema surgiu: os grafos com vértices de corte. Tais vértices impediam a progressão da envoltória  $P_3$ . Com isso dividimos nossa classe em duas: os grafos cordais 2-conexos e os grafos cordais 1-conexo. Então, primeiramente mostramos na Proposição 1 que o número de envoltória  $P_3$  em um grafo cordal 2-conexo é igual a 2.

**Proposição 1.** [17] *Seja  $G$  um grafo cordal 2-conexo, então  $h(G) = 2$ .*

**Prova.** Seja  $x$  e  $y$  dois vértices distintos a uma distância menor ou igual a 2 e  $U = H[\{x, y\}]$ . Claramente,  $U$  contém todos os vértices dos menores caminhos entre  $x$  e  $y$ , e  $G[U]$  é conexo. Considere que  $U \neq V[G]$ , então existe pelo menos um vértice  $v \in V(G) \setminus U$ . Como  $G$  é 2-conexo,  $v$  pertence a um caminho  $P : v_1, v_2, \dots, v_l$  onde  $v_1, v_l \in U$  e  $v_2, \dots, v_{l-1} \in V(G) \setminus U$ . Como  $G$  é um grafo cordal então pelo menos  $v_2$  ou  $v_{l-1}$  é adjacente a  $v_l$  ou  $v_1$  (respectivamente), o que implica que pelo menos um  $v_2$  ou  $v_{l-1}$  pertence a  $U$ , contradição. ■

Sabendo que o número de envoltória  $P_3$  para grafos cordais 2-conexo é igual a 2, tentamos nos aproveitar do fato para resolver o problema para grafos cordais que não são 2-conexo. Sendo assim desenvolvemos um algoritmo que divide um grafo cordal 1-conexo em diversos blocos, que por sua vez são dois conexos. O princípio desta redução é demonstrado no Lema 3, porém antes de irmos a ele será necessário o entendimento de algumas definições, as quais são apresentadas a seguir.

Dado um grafo  $G$  que não é 2-conexo, este possui vértices de corte, ou seja, vértices que quando retirados (juntamente com suas arestas incidentes) dividem o grafo em duas ou mais componentes. Um bloco de um grafo  $G$  é um subgrafo maximal 2-conexo de  $G$ . Na Figura 3.20 temos um grafo cordal  $G$  e todos os blocos possíveis de  $G$ . Um bloco final de  $G$  é um bloco de  $G$  que possui no máximo um vértice de corte de  $G$ . Na Figura 3.20 os blocos formados pelos vértices  $\{a, b, e, f\}$  e  $\{d, h, i\}$  são blocos final.

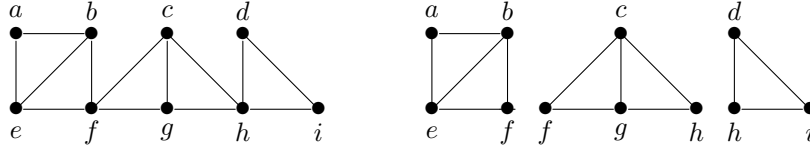


Figura 3.20: Grafo  $G$  e seus Blocos

Entendido o conceito de bloco final vamos ao Lema 3. Nele apresentamos um princípio para redução do grafo cordal  $G$ . Trabalhamos com o conceito de blocos e que a união do conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo de cada bloco resulta no conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo de  $G$ . No lema utilizamos uma função  $\ell$  para os vértices, que possui idéia similar aos rótulos utilizados nos algoritmos para árvores, ou seja, servem como uma orientação para sabermos o número de vizinhos que um determinado vértice no grafo considerado ainda precisa para ser gerado. Vamos ao lema!

**Lema 3.** [17] *Seja  $G$  um grafo que não é 2-conexo e  $\forall v \in V(G)$  seja  $\ell(v) = 2$ . Seja  $B$  um bloco final de  $G$  e  $u$  o único vértice de corte que pertence a  $B$ . Faça  $G' = G - (V(B) \setminus \{u\})$  e  $C$  o conjunto formado por todos os conjuntos da envoltória  $P_3$  mínimo,  $S_i[B]$ , possíveis.*

- i. Se não existir um  $S_i[B]$  em  $C$  contendo  $u$  então  $S[G] = S[G'] \cup S_i[B]$ , para um  $i$  qualquer, e*

$$\ell'(v) = \begin{cases} 0, v = u, \\ \ell(v), v \in V(G') \setminus \{u\}. \end{cases}$$

*onde  $\ell' : V(G') \rightarrow Z$ .*

- ii. Se existir  $S_i[B]$  em  $C$  contendo  $u$  então escolher  $S_i[B]$  tal que  $S_i[B] \setminus \{u\}$  satisfaça o maior número possível de vizinhos de  $u$  em  $B$ . Denote por  $d_B$  este número de vizinhos satisfeitos. Então  $S[G] = S[G'] \cup \{S_i[B] \setminus \{u\}\}$ , e*

$$\ell''(v) = \begin{cases} \ell(v) - d_B, v = u, \\ \ell(v), v \in V(G') \setminus \{u\}. \end{cases}$$

*onde  $\ell'' : V(G') \rightarrow Z$ .*

**Prova.**

(i) Seja  $S[G]$ , um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ . Sabemos que  $(S[G] \cap V(B)) \cup \{u\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $B$ ,  $S[B]$ . Pela hipótese (i)  $S[G]$  contém pelo

menos  $k$  vértices em  $V(B) \setminus \{u\}$ , onde  $k = |S[B]|$ . Como  $S[G] \setminus (V(B) \setminus \{u\})$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G'$  obtemos que  $|S[G]| \geq |S[G']| + k$ .

Se  $S[G']$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G'$  e  $S[B]$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $B$ , então  $S[G'] \cup S[B]$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ ,  $S[G]$ , ou seja,  $|S[G]| \leq |S[G']| + |S[B]|$

(ii) Seja  $S[G]$  um conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo de  $G$ , e denote por  $c_B$  a cardinalidade do conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo de  $B$ . Como  $(S[G] \cap V(B)) \cup \{u\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $B$ , então  $S[G]$  contém pelo menos  $c_B - 1$  vértices em  $V(B) \setminus \{u\}$ . Se  $S[G]$  contém pelo menos  $c_B$  vértices em  $V(B) \setminus \{u\}$ , então  $(S[G] \setminus (V(B) \setminus \{u\})) \cup \{u\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G'$  de ordem no máximo  $|S[G]| - (c_B - 1)$ . Se  $S[G]$  contém exatamente  $c_B - 1$  vértices em  $V(B) \setminus \{u\}$ , então  $(S[G] \cap (V(B) \setminus \{u\})) \cup \{u\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $B$ ,  $S[B]$ , tal que  $u \in S[B]$  e  $|S[B]| = c_B$ . Pela definição de  $d_B$ ,  $S[B] \setminus \{u\}$  converte o máximo de vizinhos,  $d_B$ , de  $u$  em  $B$ . Seja  $C = S[G] \setminus (V(B) \setminus \{u\})$ , se  $u \in C$  então  $C$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G'$ . Se  $u \notin C$ , então as definições de  $d_B$  e  $\ell''$  implica que  $C$  também é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G'$ , neste caso. Note que a ordem de  $C$  é no máximo  $|S[G]| - (c_B - 1)$ . Concluindo, obtemos que  $|S[G]| \geq |S[G']| + (c_B - 1)$ .

Se  $C'$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G'$ , então, pela escolha de  $S[B]$  e da definição de  $d_B$ ,  $C' \cup (S[B] \setminus \{u\})$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ . Isto implica que  $|S[G]| \leq |S[G']| + (c_B - 1)$  o que completa a prova de *ii*. ■

### ALGORITMO 3: Determinação do $h(G)$

- *Entrada:* Grafo Cordal Conexo  $G$ .
- *Passo Inicial:* se  $G$  for 2-conexo retornar  $S = \{x, y\}$  tal que a distância entre  $x$  e  $y$  seja menor ou igual a 2; senão definir o conjunto  $S := \emptyset$  e os rótulos  $\ell(v) := 2$ , para todo  $v \in V(G)$ .
- *Passo Geral:* se  $V(G) = \emptyset$  então terminar o algoritmo e devolver o conjunto  $S$  que é um conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo de  $G$ ; senão:
  1. determinar  $B$ ,  $u$ ,  $G'$  e  $C$ ;
  2. se não existir um subconjunto  $C_i$  em  $C$  contendo  $u$  escolher um  $C_i$  qualquer. Fazer  $S = S + C_i$  e  $\ell(u) := 0$ , senão:
    - (a) achar todos os subconjuntos  $C_i$  de  $C$  que contenham  $u$ , e escolher dentre eles o subconjunto  $C_i$  que possui o maior número  $d$  de vizinhos de  $u$  em  $B$  no  $H[C_i - \{u\}]$ ,
    - (b)  $S = S + \{C_i \setminus \{u\}\}$  e  $\ell(u) := \ell(u) - d$
  3.  $G = G'$ ;



4. repetir o passo geral.

*Determinação de  $B, u, G'$  e  $C$ :*  $B$  é um bloco final,  $u$  é o vértice de corte,  $G' = G - (V(B) - \{u\})$  e  $C$  é o conjunto de todos os conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo de  $B$ .

A seguir um exemplo do algoritmo aplicado ao grafo  $G$  da Figura 3.21, nesta figura ainda encontra-se os possíveis blocos de  $G$ . Os vértices negros  $u_1, u_2, u_3$  e  $u_4$  são vértices de corte de  $G$ . Todo vértice  $v$  de  $G$  possui  $\ell(v) = 2$ , quando diferente de 2, o valor de  $\ell(v)$  virá sobre-escrito ao nome do vértice, por exemplo,  $b^i$ .

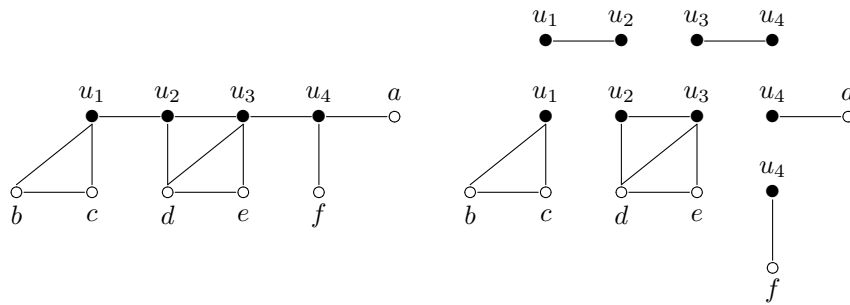


Figura 3.21: Grafo  $G$

Inicialmente, seja o bloco final  $B$  aquele que contém o vértice de corte  $u_1$ . O bloco final  $B$  e o seu  $G'$  correspondente são mostrados na Figura 3.22. Como qualquer dois vértices satisfazem  $B$ , vamos escolher  $S[B] = \{u_1, b\}$ . Logo  $S[G] = S[G'] \cup \{b\}$  e  $f(u_1) = 2 - 1$ .

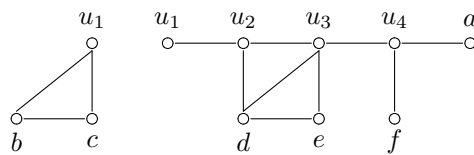


Figura 3.22: Bloco  $B$  e Grafo  $G'$

A seguir, escolhemos como bloco final  $B$  o bloco que contém os vértices  $u_1$  e  $u_2$ , note que  $u_1$  deixou de ser vértice de corte em  $G'$  (Figura 3.22). O bloco final  $B$  e o seu  $G'$  correspondente são mostrados na Figura 3.23. Como o vértice  $u_1$  precisa de somente mais um vizinho na envoltória, o conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo de  $B$  é  $S[B] = \{u_2\}$ . Note que  $u_2$  é um vértice de corte em  $G'$  (Figura 3.22), então ao aplicarmos a redução ele não entrará no conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ . Logo  $S[G]$  continua a mesma  $S[G] = S[G'] \cup \{b\}$ .

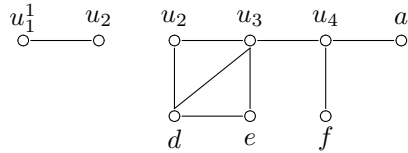


Figura 3.23: Bloco  $B$  e Grafo  $G'$

Agora, o novo bloco final  $B$  é o que contém o vértice de corte  $u_3$  (referente a  $G'$  da Figura 3.23). O bloco final  $B$  e o seu  $G'$  correspondente são mostrados na Figura 3.24. Para satisfazer  $B$  basta qualquer dois vértices de  $B$ , escolhemos  $S[B] = \{d, u_3\}$ , note que nossa escolha deve conter o vértice de corte. Logo  $S[G] = S[G'] \cup \{b\} \cup \{d\}$  e  $f(u_3) = 2 - 1$ .

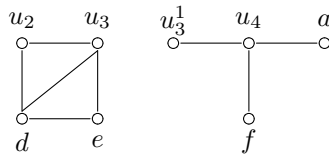


Figura 3.24: Bloco  $B$  e Grafo  $G'$

Finalmente, terminamos com o nosso  $G'$  sendo um bloco final  $B$ , mostrado na Figura 3.24. Lembrando que  $\ell(u_3) = 1$ ,  $S[B] = \{a, f\}$ . Logo  $S[G] = \{b\} \cup \{d\} \cup \{a, f\}$ , ou seja,  $S[G] = \{b, d, a, f\}$  e  $h[G] = 4$ . Na Figura 3.25 mostramos o conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo do grafo  $G$  inicial. Os vértices que pertencem ao conjunto estão em preto.

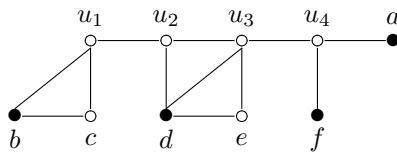


Figura 3.25: Conjunto Gerador da Envoltória de  $G$

**Teorema 11.** [17] *O conjunto  $S$  construído pelo algoritmo de determinação do  $h(G)$  (algoritmo 3) é um conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo dado um grafo cordal  $G$*

**Prova.** Dada pelo Lema 3 ■

**Proposição 2.** [17] *O algoritmo para se determinar  $h(G)$ , onde  $G$  é um grafo cordal, possui tempo quadrático.*

**Prova.** Dada a Proposição 1, temos que o algoritmo trabalha com no máximo um número quadrático de conjuntos de dois vértices. ■

É com o número de envoltória  $P_3$  que finalizamos o capítulo sobre a convexidade  $P_3$ . Vimos nesta última seção que o número de envoltória  $P_3$  para grades  $m \times n$  é dado por Bollobás, quando da solução de seu problema proposto da contaminação. Apresentamos então uma determinação do número de envoltória  $P_3$  para cografos. Em seguida mostramos que tal problema é NP-completo para grafos gerais. Continuamos a seção com um algoritmo para o número de envoltória  $P_3$  para árvores e grafos cordais. Apesar da primeira ser uma subclasse da segunda, mantivemos a apresentação do algoritmo como um exercício de fixação, pois este é derivado do algoritmo para número  $P_3$  em árvores. Outro motivo é que enquanto o algoritmo para árvores possui tempo linear o algoritmo para grafos cordais possui tempo quadrático.

Após a descrição dos três parâmetros estudados nas classes de grafos cordais, árvores, cografos e grades terminamos este capítulo e deixamos no ar a seguinte pergunta. Existe alguma propriedade em um grafo  $G$  que torne o número  $P_3$  de  $G$  igual ao número de envoltória  $P_3$  de  $G$ ? Este problema será trabalhado no capítulo que se segue.

# Capítulo 4

## Classe $H$

*"A potência intelectual de um homem se mede pela dose de humor que ele é capaz de usar."*

Friedrich Nietzsche

Como o número  $P_3$  e o número de convexidade  $P_3$  são NP-completos para os grafos cordais poderíamos continuar estudando tais problemas em outras classes de grafos na tentativa de achar classes mais elaboradas para a qual a definição dos dois parâmetros seja polinomial. Porém uma pergunta nos intrigava. Existe alguma classe de grafo para a qual o número  $P_3$  seja igual ao número de envoltória  $P_3$ ? Em busca de tal resposta resolvemos construir nossa classe de grafos os quais possuem tal igualdade, nomeamos esta classe de classe  $H$ . Todos os resultados obtidos para a classe  $H$  e aqui mostrados podem ser encontrados no artigo "Immediate versus Eventual Conversion: Comparing Geodetic and Hull Numbers in  $P_3$  Convexity"[18].

A idéia para se construir tal classe, partiu de um algoritmo simples, o qual iniciava um grafo com vários vértices isolados. Tais vértices fariam parte do conjunto  $P_3$ , e no decorrer do texto são identificados como um conjunto de vértice  $W$  (branco). Em seguida criava-se caminhos de comprimento dois entre tais vértices, ou seja, adiciona-se vértices os quais são adjacentes a exatamente dois vértices em  $W$ . Estes vértices adicionados farão parte de um conjunto  $B$  (preto). Ao final desta construção temos um grafo preto e branco com uma ou mais componentes conexas as quais são grafos bipartidos com as partições  $B$  e  $W$ . Nomeamos este grafo inicial de grafo  $G_0$ .

Partimos então para a análise de como adicionar arestas aos grafos  $G_0$ . Com tal análise percebemos a recorrência de certas restrições que ocorriam para a adição de novas arestas. Com base em tais restrições identificamos formas de unir tais componentes conexas e formar grafos conexas que ainda estejam na classe  $H$ . Percebemos que os triângulos se tornavam um problema na nossa estrutura então para um primeiro estudo resolvemos tirar os triângulos do nosso grafo. A seguir mostramos

várias das propriedades identificadas na classe  $H$  e com base em tais propriedades desenvolvemos o algoritmo para geração de grafos sem triângulos da classe  $H$ .

Formalizando os parágrafos anteriores temos as seguintes definições. Seja  $W$  um conjunto  $P_3$  mínimo de  $G$  e  $B = V(G) \setminus W$ . Por definição todo vértice em  $B$  tem pelo menos dois vizinhos em  $W$ . Logo,  $G$  possui um subgrafo gerador bipartido  $G_0$  com bipartição  $V(G_0) = W \cup B$  tal que todo vértice em  $B$  possui grau exatamente 2 em  $G_0$ . Seja  $E_1$  o conjunto de arestas em  $E(G) \setminus E(G_0)$  que pertencem a uma mesma componente conexa de  $G_0$ . Seja  $E_2$  o conjunto de arestas em  $E(G) \setminus E(G_0)$  que pertencem a diferentes componentes conexas de  $G_0$ . Note que, pela construção,  $W$  é um conjunto  $P_3$  de  $G_0$ . Como  $|W| = n(G) = h(G) \leq h(G_0) \leq n(G_0) \leq |W|$ , obtemos que  $h(G_0) = n(G_0) = |W|$ , ou seja,  $W$  é um conjunto  $P_3$  mínimo de  $G_0$  bem como um conjunto da envoltória  $P_3$  mínimo de  $G_0$ . Logo, se  $C$  é uma componente conexa de  $G_0$ , então  $W \cap V(C)$  é um conjunto  $P_3$  mínimo de  $C$  bem como um conjunto da envoltória  $P_3$  mínima de  $C$ .

Os lemas de 4 a 12 detalham algumas propriedades estruturais dos grafos da classe  $H$ . Para facilitar a compreensão dos lemas a seguir, vale pensar que cada componente conexa de  $G_0$  corresponderia a um vértice em  $W$ , pois como citado anteriormente  $W \cap V(C)$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $C$ .

No Lemma 4 consideramos o grafo  $G_0$  com suas diversas componentes conexas que são grafos bipartidos com bipartições  $W$  e  $B$ , onde vértices em  $B$  possuem grau exatamente dois. Descrevemos como estas componentes conexas podem ser conectadas entre si. Seja uma aresta de ligação aquela que é incidente a vértices de duas componentes conexas diferentes, ou seja arestas em  $E_2$ . Chame de vértice de ligação aquele ao qual uma aresta de ligação é incidente. Em Lemma 4, mostramos que cada componente conexa de  $G_0$  possui no máximo um único vértice de ligação  $u$  e que, se tal tal vértice de ligação  $u$  une a componente conexa  $C_i$  a duas ou mais componentes conexas então  $u$  não pode pertencer ao conjunto  $P_3$  e ainda  $u$  deve ser um vértice de corte em  $C_i$ . A Figura 4.1 mostra dois exemplos de ligação entre as componentes conexas de  $G_0$

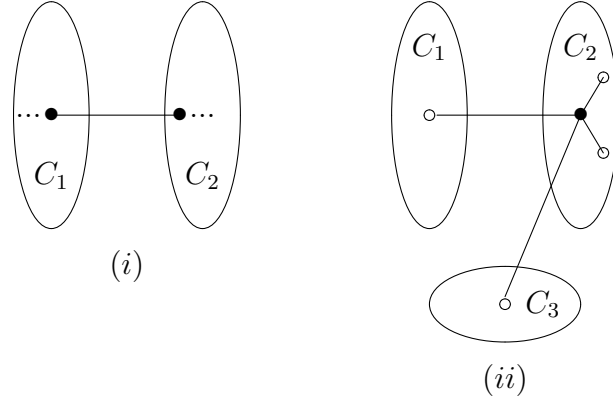


Figura 4.1: Componentes Conexas de  $G_0$  - Lema 4

**Lema 4.** *Seja  $C$  uma componente conexa de  $G_0$ .*

(i.) *No máximo um vértice em  $C$  é incidente a arestas em  $E_2$*

(ii.) *Se existe um vértice  $u$  em  $C$  incidente a pelo menos duas arestas de  $E_2$ , então  $u$  pertence a  $B$  e é um vértice de corte em  $C$ .*

**Prova.**

Para provar (i.) consideramos três casos diferentes:

Caso 1:

Existem dois vértices  $w, w' \in V(C) \cap W$  incidentes com arestas em  $E_2$ . Seja  $P : w_1 b_1 \dots w_{l-1} b_{l-1} w_l$  o menor caminho em  $C$  entre  $w = w_1$  e  $w' = w_l$ . Então o conjunto  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_l\}) \cup \{b_1, \dots, b_{l-1}\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$ , o que é uma contradição.

Caso 2:

Existe um vértice  $w \in V(C) \cap W$  e um vértice  $b \in V(C) \cap B$  que são incidentes com arestas em  $E_2$ . Seja  $P : w_1 b_1 \dots w_l b_l$  o menor caminho em  $C$  entre  $w = w_1$  e  $b = b_l$ . Lembre que  $b$  possui um vizinho em  $G_0$  que não pertence a  $P$ . Logo o conjunto  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_l\}) \cup \{b_1, \dots, b_{l-1}\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$ , o que é uma contradição.

Caso 3:

Existem dois vértices  $b, b' \in V(C) \cap B$  incidentes com arestas em  $E_2$ . Seja  $P : b_1 w_1 \dots b_{l-1} w_{l-1} b_l$  o menor caminho em  $C$  entre  $b = b_1$  e  $b' = b_l$ . Lembre que ambos  $b, b'$  possuem vizinhos em  $G_0$  que não pertence a  $P$ . Logo o conjunto  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_{l-1}\}) \cup \{b_2, \dots, b_{l-1}\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$ , o que é uma contradição.

(ii.) Se um vértice  $w \in V(C) \cap W$  é incidente a pelo menos duas arestas em  $E_2$ , então  $W \setminus \{w\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , que é uma contradição. Se

um vértice  $b \in V(C) \cap B$  é incidente a pelo menos duas arestas em  $E_2$ , mas não é um vértice de corte em  $C$ , então, considere que  $P : w_1 b_1 \dots w_{l-1} b_{l-1} w_l$  seja o menor caminho em  $C$  entre os dois vizinhos de  $b$  em  $G_0$ ,  $w_1$  e  $w_l$ , tal que  $b \notin P$ . O conjunto  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_l\}) \cup \{b_1, \dots, b_{l-1}\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição. ■

Os lemas seguintes vão tratar das arestas que podem ocorrer em uma componente conexa de  $G_0$ . Durante o nosso estudo dividimos  $G$  em três casos, sendo eles:  $G$  possui somente uma componente conexa em  $G_0$ ,  $G$  possui duas componentes conexas em  $G_0$  e  $G$  possui mais do que duas componentes conexas em  $G_0$ . No primeiro caso, identificamos duas formas para se adicionar arestas. Uma é adicionar somente uma aresta qualquer em  $G_0$  e a outra é escolher um conjunto de vértices em  $B$  que possuam o mesmo par de vizinhos,  $w, w'$ , em  $W$ , podendo-se assim adicionar qualquer número de arestas entre  $w, w'$  e os seus vizinhos em  $B$ .

Percebemos também que para grafos com mais de uma componente conexa em  $G_0$ , as únicas arestas extras permitidas seriam as de ligação das componentes conexas (arestas em  $E_2$ ). Porém durante o estudo vimos que a ocorrência de arestas do tipo  $bb'$ , onde  $b, b'$  pertencem a  $B$ , poderiam existir em  $G$  independentemente do número de componentes, porém tais arestas tinham uma particularidade, elas deveriam formar um triângulo.

A seguir o Lema 5 mostra que se o grafo  $G_0$  possui mais de uma componente conexa, então as componentes conexas de  $G_0$  não podem possuir arestas do tipo  $ww'$ , onde  $w, w' \in W$  e ambos os vértices pertencem a mesma componente conexa de  $G_0$ . Na Figura 4.2 podemos visualizar um exemplo para o Lema 5, onde arestas pontilhadas são os tipos de arestas proibidas.

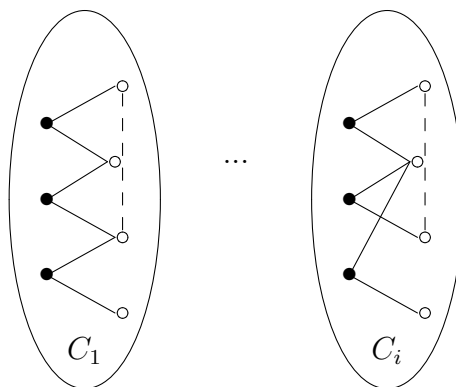


Figura 4.2: Componentes de  $G_0$  - Lema 5

**Lema 5.** Se  $G_0$  é um grafo desconexo, então nenhum par de vértices em  $W$  que pertencem a uma mesma componente conexa de  $G_0$  podem ser adjacentes.

**Prova.**

Seja  $ww'$  uma aresta de  $G$  onde  $w$  e  $w'$  pertencem a  $W$  e a uma mesma componente conexa  $C$  de  $G_0$ . Como  $G$  é conexo, existe uma aresta  $uv$  em  $E_2$  tal que  $u \in V(C)$  e  $v \in V(G) \setminus V(C)$ .

Primeiramente, vamos assumir que  $u \in W$ . Seja  $P : w_1b_1 \dots w_{l-1}b_{l-1}w_l$  o menor caminho em  $C$  entre  $u = w_1$  e um vértice  $w_l \in \{w, w'\}$ . Note que  $l = 1$  é possível. Então o conjunto  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_l\}) \cup \{b_1, \dots, b_{l-1}\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição.

Agora vamos assumir que  $u \in B$ . Seja  $P : b_1w_1 \dots b_lw_l$  o menor caminho em  $C$  entre  $u = b_1$  e um vértice  $w_l \in \{w, w'\}$ . Note que  $l = 1$  é possível. Lembre que  $b_1$  possui um vizinho em  $G_0$  que não pertence ao caminho  $P$ . Então o conjunto  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_l\}) \cup \{b_2, \dots, b_l\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição. ■

O Lema 6 mostra que se o grafo  $G_0$  possui mais de uma componente conexa, então as componentes conexas de  $G_0$  não podem possuir arestas do tipo  $wb$ , onde  $w \in W$ ,  $b \in B$  e ambos os vértices pertencem a mesma componente conexa de  $G_0$ . Na Figura 4.3 podemos visualizar um exemplo para o Lema 6, onde arestas pontilhadas são os tipos de arestas proibidas.

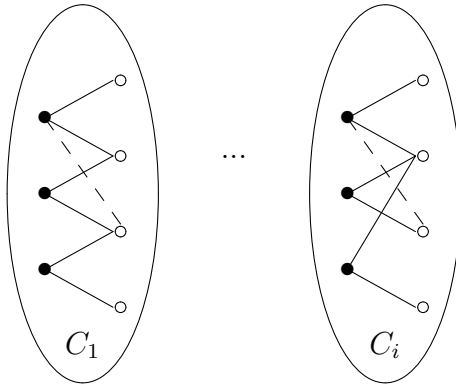


Figura 4.3: Componentes de  $G_0$  - Lema 6

**Lema 6.** Se  $G_0$  é um grafo desconexo e  $C$  é uma componente conexa de  $G_0$ , então  $\nexists wb \in E(G) \setminus E(G_0)$  tal que  $w \in V(C) \cap W$  e  $b \in V(C) \cap B$ .

**Prova.**

Seja  $wb$  uma aresta em  $G$  onde  $w \in W$  e  $b \in B$  e ambos pertencem a uma mesma componente conexa  $C$  de  $G_0$ . Como  $G$  é conexo, existe uma aresta  $uv \in E_2$  com  $u \in V(C)$  e  $v \in V(G) \setminus V(C)$ .

Primeiramente, vamos assumir que  $u \in W$ . Seja  $P$  o menor caminho em  $C$  entre  $u$  e um vértice  $u' \in \{w, b\}$ . Se  $u' = w$ , seja  $P : w_1b_1 \dots b_{l-1}w_l$  onde  $u = w_1$  e  $w = w_l$ .



Note que  $l = 1$  é possível. Neste caso o conjunto  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_l\}) \cup \{b_1, \dots, b_{l-1}\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição. Se  $u' = b$ , seja  $P : w_1 b_1 \dots b_{l-1} w_l b_l$  onde  $u = w_1$  e  $b = b_l$ . Note que  $l = 1$  é possível. Lembre que  $b$  possui um vizinho em  $G_0$  que não pertence a  $P$ . Neste caso, o conjunto  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_l\}) \cup \{b_1, \dots, b_{l-1}\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição.

Agora vamos assumir que  $u = b$ . Seja  $P : b_1 w_1 \dots b_l w_l$  o menor caminho em  $C$  entre  $b = b_1$  e  $w = w_l$ . Note que a aresta  $bw$  não pertence a  $C$ , logo  $l \geq 2$ . Além disso,  $b$  possui um vizinho em  $G_0$  que não pertence a  $P$ . Então o conjunto  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_l\}) \cup \{b_2, \dots, b_l\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição.

Finalmente vamos assumir que  $u \in B \setminus \{b\}$ . Seja  $P$  o menor caminho em  $C$  entre  $u$  e um vértice  $u' \in \{w, b\}$ . Se  $u' = w$ , seja  $P : b_1 w_1 \dots b_l w_l$  onde  $u = b_1$  e  $w = w_l$ . Note que  $l = 1$  é possível. Lembre que  $u$  possui um vizinho em  $G_0$  que não pertence a  $P$ . Neste caso, o conjunto  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_l\}) \cup \{b_2, \dots, b_l\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição. Se  $u' = b$ , seja  $P : b_1 w_1 \dots w_{l-1} b_l$  onde  $u = b_1$  e  $b = b_l$ . Neste caso o conjunto  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_{l-1}\}) \cup \{b_2, \dots, b_{l-1}\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição. ■

O Lema 7 trata das arestas do tipo  $bb'$  onde  $b, b'$  pertencem a  $B$ . Como falamos anteriormente, em grafos com mais de uma componente conexa em  $G_0$  não poderíamos adicionar arestas às componentes de  $G_0$  a não ser que tais arestas fossem do tipo  $bb'$  onde  $b, b'$  pertencem a  $B$  e formem triângulos. Pelo Lema 7  $b, b'$  e  $w_l$  formam um triângulo. Ainda, se  $G' = G \setminus \{w_l\}$  então arestas em  $E_2$  não serão incidentes aos vértices das componentes conexas em  $G'$  às quais  $b, b'$  pertencem. Uma componente conexa de  $G_0$  que atende ao Lema 7 pode ser vista na Figura 4.4, nela arestas pontilhadas são arestas proibidas.

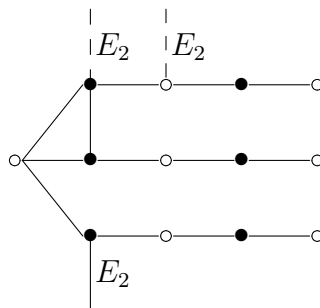


Figura 4.4: Uma componente de  $G_0$  - Lema 7

**Lema 7.** *Seja  $G_0$  um grafo desconexo e seja  $b$  e  $b'$  dois vértices de  $B$  que pertencem a mesma componente conexa  $C$  de  $G_0$  satisfazendo  $bb' \in E_1$*

(i) Tanto  $b$  como  $b'$  não são incidentes a uma aresta em  $E_2$

(ii) Se existe um vértice  $w \in V(C) \cap W$  incidente a uma aresta em  $E_2$  e  $P : w_1 b_1, \dots, w_l b_l$ , um caminho em  $C$  entre  $w = w_1$  e um vértice  $b_l \in \{b, b'\}$ , então  $w_l$  é adjacente a ambos  $b$  e  $b'$ , e todo caminho em  $C$  entre  $b$  e  $b'$  contém  $w_l$ .

(iii) Se existe um vértice  $b'' \in (V(C) \cap B) \setminus \{b, b'\}$  incidente a uma aresta de  $E_2$  e  $P : b_1 w_1, \dots, w_{l-1} b_l$ , um caminho em  $C$  entre  $b'' = b_1$  e um vértice  $b_l \in \{b, b'\}$ , então  $w_{l-1}$  é adjacente a ambos  $b$  e  $b'$ , e todo caminho em  $C$  entre  $b$  e  $b'$  contém  $w_{l-1}$ .

**Prova.**

(i) Seja  $b'$  incidente a uma aresta em  $E_2$ . Se  $b$  e  $b'$  possuem um vizinho comum  $w$  em  $C$ , então  $W \setminus \{w\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição. Então vamos assumir que  $b$  e  $b'$  não possuam um vizinho comum em  $C$ . Seja  $w_1$  um vizinho de  $b$  em  $G_0$  e  $w_l$  um vizinho de  $b'$  em  $G_0$  tal que o caminho  $P : w_1 b_1 \dots w_{l-1} b_{l-1} w_l$  em  $C$  seja o menor possível. Note que ambos  $b$  e  $b'$  possuem vizinhos em  $G_0$  que não pertencem a  $P$ . Logo, o conjunto  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_l\}) \cup \{b_1, \dots, b_{l-1}\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição.

(ii) Seja  $w$  e  $P : w_1 b_1, \dots, w_l b_l$  como descrito em (ii.).

Primeiramente assumimos que  $w_l$  não é adjacente a ambos  $b$  e  $b'$ . Neste caso,  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_l\}) \cup \{b_1, \dots, b_{l-1}\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição. Logo  $w_l$  é adjacente a ambos  $b$  e  $b'$ . Seja  $b_l = b$ . Vamos assumir que  $C$  contém um caminho  $Q : b'_1 w'_1 \dots w'_{k-1} b'_k$  entre  $b = b'_1$  e  $b' = b'_k$  tal que  $Q$  não contém  $w_l$ . Se  $k = 2$ , então  $w'_1$  é um vizinho comum de  $b$  e  $b'$  em  $W$  diferente de  $w_l$ , e  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_l, w'_1\}) \cup \{b_1, \dots, b_l\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição. Então, seja  $k \geq 3$ , o que implica que  $w_l$  é o único vizinho comum de  $b$  e  $b'$  em  $C$ . Se os dois caminhos  $P$  e  $Q$  se intersectam em um vértice em  $W$ , digamos  $w_i = w'_j$ , então  $w_1 b_1 \dots b_{i-1} w_i b'_{j+1} w'_{j+1} w'_{k-1} b'_k$  é um caminho em  $C$  entre  $w$  e um vértice em  $\{b, b'\}$  tal que  $w'_{k-1}$  não é adjacentes a ambos  $b$  e  $b'$ , o que é uma contradição como a anterior. Logo devemos assumir que  $P$  e  $Q$  não se intersectam em um vértice em  $W$ . Agora  $(W \setminus (\{w_1, \dots, w_l\} \cup \{w'_1, \dots, w'_{k-1}\})) \cup \{b_1, \dots, b_l\} \cup \{b'_2, \dots, b'_{k-1}\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição.

(iii) Seja  $b''$  e  $P : b_1 w_1, \dots, w_{l-1} b_l$  como descrito em (iii.).

Se  $b_l$  é adjacente a algum vértice  $w_i$  de  $P$  distinto de  $w_{l-1}$ , então o caminho  $P$  pode ser reduzido para  $P : b_1 w_1, \dots, w_i b_l$ , logo vamos assumir que  $b''$  possui um vizinho em  $G_0$  que não pertence a  $P$ . Primeiramente assumimos que  $w_{l-1}$  não é adjacente a ambos  $b$  e  $b'$ . Neste caso,  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_{l-1}\}) \cup \{b_2, \dots, b_{l-1}\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição. Logo  $w_{l-1}$  é adjacente a ambos  $b$  e

$b'$ . Seja  $b_l = b$ . Vamos assumir que  $C$  contém um caminho  $Q : b'_1 w'_1 \dots w'_{k-1} b'_k$  entre  $b = b'_1$  e  $b' = b'_k$  tal que  $Q$  não contém  $w_{l-1}$ . Se  $k = 2$ , então  $w'_1$  é um vizinho comum de  $b$  e  $b'$  em  $W$  diferente de  $w_l$ , e  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_{l-1}, w'_1\}) \cup \{b_2, \dots, b_l\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição. Então, seja  $k \geq 3$ , o que implica que  $w_{l-1}$  é o único vizinho comum de  $b$  e  $b'$  em  $C$ . Se os dois caminhos  $P$  e  $Q$  se intersectam em um vértice em  $W$ , obtemos uma contradição similar a de *ii.*. Logo devemos assumir que  $P$  e  $Q$  não se intersectam em um vértice em  $W$ . Agora  $(W \setminus (\{w_1, \dots, w_{l-1}\} \cup \{w'_1, \dots, w'_{k-1}\})) \cup \{b_2, \dots, b_l\} \cup \{b'_2, \dots, b'_{k-1}\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição. ■

Lema 8 mostra que se existir uma aresta  $ww'$  então  $G_0$  deve ter somente uma componente conexa e ainda se aresta  $ww'$ , com  $\{w, w'\} \in W$ , existir então não poderá existir nenhuma outra aresta do tipo  $w''w'''$  ou  $w''b$ , com  $\{w''w'''\} \in W$  e  $b \in B$ .

**Lema 8.** *Se  $C$  é uma componente conexa de  $G_0$ , então não há dois vértices  $w$  e  $w'$  em  $C$  que pertencem a  $W$  e duas arestas  $r$  e  $r'$  que pertencem a  $E(G) \setminus E(G_0)$  tal que  $w$  seja incidente a  $r$ ,  $w'$  incidente a  $r'$ , e  $r'$  seja diferente de  $ww'$ .*

**Prova.** Seja  $w, w', r$  e  $r'$  como especificado acima. Seja  $r = wu$  e  $r' = w'u'$ . Note que  $u' \neq w$ .

Se  $G_0$  é desconexo, então Lema 5 e Lema 6 implica que  $u$  e  $u'$  pertencem a componentes conexas de  $G_0$  as quais são diferentes de  $C$ , o que implica a contradição do Lema 4 *i.*. Logo  $G_0$  é conexo.

Seja  $P : w_1 b_1 \dots b_{l-1} w_l$  o menor caminho em  $C$  entre  $w = w_1$  e  $w' = w_l$ . Se  $u = w'$ , então  $W \setminus \{w'\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição. Logo  $u \neq w'$ , ou seja,  $r$  é distinto de  $ww'$ . Se  $uw' \notin E(G_0)$  ou  $u'w \notin E(G_0)$ , então  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_l\}) \cup \{b_1, \dots, b_{l-1}\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição. Logo  $uw', u'w \in E(G_0)$ , o que implica que  $u$  e  $u'$  são vértices distintos e pertencem a  $B$ . Agora  $W \setminus \{w'\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição. ■

Nos lemas de 9 a 12 é mostrado que não pode haver nenhuma combinação de duas arestas distintas em  $G$  que não pertençam a  $G_0$ . Em outras palavras, é possível adicionar somente uma aresta extra em  $G_0$  e continuarmos com grafos  $G$  pertencentes a classe  $H$  livre de triângulos.

**Lema 9.** *Se  $C$  é uma componente conexa de  $G_0$ , então não há duas arestas  $wb$  e  $w'b'$  que pertencem a  $E(G) \setminus E(G_0)$  com  $w \in W \cap V(C)$  e  $b, b' \in B \cap V(C)$*

**Prova.**

Seja as arestas  $wb$  e  $wb'$  como especificado pelo Lema. Então  $W \setminus \{w\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição. ■

**Lema 10.** *Se  $G_0$  é conexo e  $G$  é livre de triângulos, então não há duas arestas  $w w'$  e  $b b'$  em  $G$  com  $w, w' \in W$  e  $b, b' \in B$*

**Prova.** Vamos assumir que as arestas  $w w'$  e  $b b'$  existam. Seja  $P : w_1 b_1 \dots w_l b_l$  o menor caminho em  $G_0$  entre um vértice  $w_1 \in \{w, w'\}$  e um vértice  $b_l \in \{b, b'\}$ . Sem perda de generalidade, vamos assumir que  $w = w_1$  e  $b = b_l$ . Como  $G$  é livre de triângulos,  $b'$  não é adjacente a  $w_l$ . Logo  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_l\}) \cup \{b_1, \dots, b_{l-1}\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição. ■

**Lema 11.** *Se  $G_0$  é conexo e  $G$  é livre de triângulos, então não há duas arestas  $w b$  e  $b' b''$  em  $G$  tal que  $w \in W$  e  $b, b', b'' \in B$ .*

**Prova.** Vamos assumir que  $w b$  e  $b' b''$  existam. Primeiramente, seja  $b = b'$ . Como  $G$  é livre de triângulos,  $w$  não é adjacente a  $b''$ . Seja  $P : w_1 b_1 \dots w_l b_l$  um menor caminho em  $G_0$  entre  $w = w_1$  e um vértice  $b_l \in \{b, b''\}$ . Como  $G$  é livre de triângulos,  $w_l$  possui apenas um vizinho em  $\{b, b''\}$ . Pela escolha de  $P$ , o único vértice em  $\{b, b''\} \setminus \{b_l\}$  não possui vizinhos em  $G_0$  que pertencem a  $P$ . Agora  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_l\}) \cup \{b_1, \dots, b_{l-1}\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição.

Agora, vamos assumir que  $b$  é diferente de  $b'$  e de  $b''$ . Seja  $P$  um menor caminho em  $G_0$  entre um vértice em  $\{w, b\}$  e um vértice em  $\{b', b''\}$ . Se  $P$  for do tipo  $w_1 b_1 \dots w_l b_l$  com  $w_1 = w$ , então  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_l\}) \cup \{b_1, \dots, b_{l-1}\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$ , o que é uma contradição. Se  $P$  for do tipo  $b_1 w_2 \dots w_l b_l$  com  $b_1 = b$ , então  $(W \setminus \{w_2, \dots, w_l\}) \cup \{b_2, \dots, b_{l-1}\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição. ■

**Lema 12.** *Se  $G_0$  é conexo e  $G$  é livre de triângulos, então não há duas arestas distintas  $b b'$  e  $b'' b'''$  em  $G$  tal que  $b, b', b'', b''' \in B$ .*

**Prova.**

Vamos assumir que  $b b'$  e  $b'' b'''$  existam. Primeiramente, vamos considerar que todos os quatro vértices  $b, b', b'', b'''$  são distintos. Se  $P : b_1 w_1 \dots w_{l-1} b_l$  é um menor caminho em  $G_0$  entre um vértice em  $\{b, b'\}$  e um vértice em  $\{b'', b'''\}$ , então  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_{l-1}\}) \cup \{b_2, \dots, b_{l-1}\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição.

Agora vamos considerar que  $b' = b'''$ , ou seja, as duas arestas  $b b'$  e  $b'' b'''$  são incidentes. Seja  $P : b_1 w_1 \dots w_{l-1} b_l$  um menor caminho em  $G_0$  entre  $b = b_1$  e  $b'' = b_l$ .

Como  $G$  é livre de triângulos,  $b'$  não é adjacente a  $w_1$  ou  $w_{l-1}$ . Independente de  $b'$  pertencer a  $P$  ou não, o conjunto  $(W \setminus \{w_1, \dots, w_{l-1}\}) \cup \{b_2, \dots, b_{l-1}\}$  é um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ , o que é uma contradição. ■

As propriedades discutidas até o momento serão utilizadas para provar a correteza do algoritmo que gera os grafos livres de triângulos e que pertencem a classe  $H$ . Tal algoritmo é mostrado na seção seguinte. Só para refrescar a memória, nosso algoritmo constrói primeiramente um grafo  $G_0$ . Baseando-se no número de componentes conexas de  $G_0$  ele efetua uma de quatro operações específicas, que são descritas a seguir. Vamos a elas!!!

## 4.1 Construindo Grafos sem Triângulos da Classe $H$

Para se construir um único grafo sem triângulos da classe  $H$  basta executar os seguintes passos:

- Passo 1: Criar um grafo  $G_0$ .  
Criar vértices em  $W$ . Criar vértices em  $B$ . Para todo vértice em  $B$ , fazê-lo adjacente a exatamente dois vértices em  $W$ .
- Passo 2: Adicionar arestas em  $G_0$ 
  - a. Se  $G_0$  for um grafo conexo então aplicar Operação  $\mathcal{O}_1$  ou Operação  $\mathcal{O}'_1$
  - b. Se  $G_0$  possuir exatamente duas componentes conexas então aplicar Operação  $\mathcal{O}_2$
  - c. Se  $G_0$  possuir mais do que duas componentes conexas então aplicar Operação  $\mathcal{O}_3$
- Definição das operações aplicadas em  $G_0$ :
  - Operação  $\mathcal{O}_1$   
Adicionar uma aresta qualquer em  $G_0$
  - Operação  $\mathcal{O}'_1$   
Selecionar dois vértices  $w_1$  e  $w_2$  em  $W$  e adicionar arestas entre os vértices no conjunto  $\{\{w_1, w_2\} \cup (N_{G_0}(w_1) \cap N_{G_0}(w_2))\}$
  - Operação  $\mathcal{O}_2$   
Adicionar uma aresta incidente a vértices em duas componentes conexas distintas de  $G_0$

– Operação  $\mathcal{O}_3$

Selecionar um subconjunto não vazio  $X$  de vértices em  $B$  tal que todos os vértices em  $X$  sejam vértices de corte em  $G_0$  e dois vértices em  $X$  não pertençam a uma mesma componente conexa de  $G_0$ . Adicione arestas entre os vértices em  $X$  tal que  $X$  induza um subgrafo conexo do grafo resultante. Para toda componente conexa  $C$  de  $G_0$  que não contenha um vértice em  $X$ , adicionar uma aresta arbitrária entre um vértice em  $C$  e um vértice em  $X$ .

Note que as operações  $\mathcal{O}'_1$  e  $\mathcal{O}_3$  podem gerar triângulos, porém iremos considerar que só será adicionada arestas que não formem triângulos. Resolvemos deixar as operações como estão pois estas serão utilizadas para determinarmos futuramente a geração de grafos gerais da classe  $H$ .

Para provarmos que o algoritmo gera todos os grafos livres de triângulos da classe  $H$  considere os seguintes conjuntos de grafos:

- $\mathcal{G}_0$  o conjunto de todos os grafos bipartidos  $G_0$  com a bipartição  $B, W$  tal que  $V(G_0) = B \cup W$  e todo vértice em  $B$  possui grau exatamente 2 (dois),
- $\mathcal{G}_1$  o conjunto de todos os grafos obtidos aplicando-se a operação  $\mathcal{O}_1$  uma única vez a um grafo conexo  $G_0$  de  $\mathcal{G}_0$ ,
- $\mathcal{G}'_1$  o conjunto de todos os grafos obtidos aplicando-se a operação  $\mathcal{O}'_1$  uma única vez a um grafo conexo  $G_0$  de  $\mathcal{G}_0$ ,
- $\mathcal{G}_2$  o conjunto de todos os grafos obtidos aplicando-se a operação  $\mathcal{O}_2$  uma única vez a um grafo  $G_0$  de  $\mathcal{G}_0$  que possui exatamente duas componentes conexas,
- $\mathcal{G}_3$  o conjunto de todos os grafos obtidos aplicando-se a operação  $\mathcal{O}_3$  uma única vez a um grafo  $G_0$  de  $\mathcal{G}_0$  que possui pelo menos três componentes conexas. Note que  $\mathcal{O}_3$  pode ser aplicada somente se  $G_0$  possuir pelo menos um vértice de corte que pertença a  $B$ ,
- Finalmente,  $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}'_1 \cup \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3$

Como a operação  $\mathcal{O}'_1$  permite que não seja adicionada nenhuma aresta, o conjunto  $\mathcal{G}'_1$  contém todos os grafos conexos em  $\mathcal{G}_0$ .

No Teorema 12 utilizaremos os seguintes conceitos: Seja  $U$  um conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$ . Então existe uma orientação acíclica  $D$  de um subgrafo gerador de  $G$  tal que o grau de entrada de  $u$  em  $D$  é 0 para todo  $u$  que pertence a  $U$ . Para todo  $u$  que pertence a  $V(G) \setminus U$  o grau de entrada de  $u$  em  $D$  é 2. Chamaremos  $D$  de prova da envoltória para  $U$  em  $G$ .

Nas provas a seguir vamos denotar por  $N_G(u)$  os vizinhos de  $u$  em  $G$  e  $d_G(u)$  o grau de  $u$  em  $G$ . Para simplificar abreviaremos o termo predecessor direto para somente predecessor.

**Teorema 12.**  $\mathcal{G} \subseteq H$

**Prova.**

Seja  $G$  um grafo em  $\mathcal{G}$  obtido através da aplicação de alguma operação em um grafo  $G_0$  de  $\mathcal{G}_0$ . Seja  $V(G_0) = B \cup W$  uma bipartição fixa de  $G_0$ . Como todo vértice em  $B$  possui dois vizinhos em  $W$ , o conjunto  $W$  é um conjunto  $P_3$  de  $G$ , logo  $n(G) \leq |W|$ . Como citado anteriormente  $h(G) \leq n(G)$ . Logo para concluir a prova basta mostrar que  $h(G) \geq |W|$ . Seja  $U$  o conjunto da envoltória  $P_3$  de  $G$  tal que  $|U| < |W|$ . Seja  $D$  uma prova da envoltória para  $U$  em  $G$ . Considere os quatro casos a seguir:

Caso 1:  $G \in \mathcal{G}_1$

Seja  $W_1 = W \setminus U$  e  $B_0 = B \cap U$ . Note que pela suposição acima,  $|W_1| > |B_0| \geq 0$ . Afirmamos que existe no máximo um vértice  $w \in W_1$  para o qual o conjunto  $N_{G_0}(w)$  contém exatamente um vértice de  $B_0$  e para todo outro vértice  $w' \in W_1$ , o conjunto  $N_{G_0}(w')$  contém pelo menos dois vértices de  $B_0$ . Resumindo, existe um vértice  $w^* \in W_1$  tal que

$$|N_{G_0}(w) \cap B_0| \geq \begin{cases} 1, w = w^*, \\ 2, w \in W_1 \setminus \{w^*\}. \end{cases}$$

Seja  $w$  um vértice de  $W_1$ . Como  $|W_1| > |B_0|$ , podemos assumir que  $N_{G_0}(w)$  contém no máximo um vértice de  $B_0$ . Seja  $x$  e  $y$  dois predecessores de  $w$  em  $D$ . Seja  $r$  uma aresta adicionada pela operação  $\mathcal{O}_1$ .

Se  $x \in W$ , então  $r$  é a aresta  $xw$ . Logo  $y \in B$  e  $d_G(y) = 2$ . Então  $y \in B_0$ , ou seja,  $y \in N_{G_0}(w) \cap B_0$ . Além disso, para todo vértice  $w' \in W_1 \setminus \{w\}$ , seus dois predecessores  $x'$  e  $y'$  em  $D$  pertencem a  $B$  e não são incidentes a  $r$ . Logo  $d_G(x') = d_G(y') = 2$ , e  $x', y' \in B_0$ , ou seja  $x', y' \in N_{G_0}(w) \cap B_0$ . Sendo assim, podemos assumir que  $x$  e  $y$ , ambos, pertencem a  $B$ .

Se  $r$  é a aresta  $wx$ , então como acima, obtemos que  $y \in N_{G_0}(w) \cap B_0$ . Logo  $x$  não pertence a  $B_0$ . Isso implica que as duas arestas de  $G_0$  as quais são incidentes a  $x$  são, em  $D$ , ambas orientadas em direção a  $x$ . Para todos os outros vértices  $w' \in W_1 \setminus \{w\}$ , sabemos que seus dois predecessores em  $D$ ,  $x'$  e  $y'$ , satisfazem  $x', y' \in N_{G_0}(w) \cap B_0$ . Logo, concluímos que  $r$  não pode ser nem  $wx$  nem  $wy$ .

Como  $N_{G_0}$  contém no máximo um elemento de  $B_0$ , podemos assumir que  $r$  é incidente a  $x$  e orientada em  $D$  em direção a  $x$ . Isso implica que  $y \in N_{G_0} \cap B_0$ . E ainda, temos que para todo vértice  $w' \in W_1 \setminus \{w\}$ , seus dois predecessores em  $D$ ,  $x'$

e  $y'$ , pertencem a  $B$  e se eles são incidentes a  $r$  então  $r$  não é orientada, em  $D$ , em direção a eles. Isso implica que  $x'$  e  $y'$  pertencem a  $B_0$ , ou seja,  $x', y' \in N_{G_0}(w') \cap B_0$ .

Com isso mostramos que nossa afirmação inicial (existe no máximo um vértice  $w \in W_1$  para o qual o conjunto  $N_{G_0}(w)$  contém exatamente um vértice de  $B_0$  e para todo outro vértice  $w' \in W_1$ , o conjunto  $N_{G_0}(w')$  contém pelo menos dois vértices de  $B_0$ ) é verdadeira. Seja  $m$  o número de arestas em  $G_0$  entre  $W_1$  e  $B_0$ , pela nossa afirmação temos que  $m \geq 2(|W_1| - 1) + 1$ . Como todo vértice em  $B$  possui grau 2 em  $G_0$  então  $m \leq 2|B_0|$ . Logo  $2(|W_1| - 1) + 1 \leq 2|B_0|$ . Como ambas as cardinalidades são inteiras, obtemos  $|W_1| \leq |B_0|$ , logo  $|U| = |W \cap U| + |B \cap U| \geq |W \cap U| + |W \setminus U| = |W|$ , o que é uma contradição.

Caso 2:  $G \in \mathcal{G}'_1$

Seja  $w_1$  e  $w_2$  dois vértices de  $W$  selecionados pela operação  $\mathcal{O}'_1$  e  $E$  o conjunto de novas arestas adicionadas pela operação  $\mathcal{O}'_1$  entre os vértices em  $\{w_1, w_2\} \cup (N_{G_0}(w_1) \cap N_{G_0}(w_2))$ . Seja  $N = N_{G_0}(w_1) \cap N_{G_0}(w_2)$ ;  $W_1 = W \setminus U$  e  $B_0 = B \cap U$ .

Novamente, afirmamos que existe no máximo um vértice  $w \in W_1$  para o qual o conjunto  $N_{G_0}(w)$  contém exatamente um vértice de  $B_0$  e para todo outro vértice  $w' \in W_1$ , o conjunto  $N_{G_0}(w')$  contém pelo menos dois vértices de  $B_0$ . Seja  $w$  um vértice em  $W_1$ . Como no caso 1, vamos considerar que  $N_{G_0}$  contém no máximo um vértice de  $B_0$ . Seja  $x$  e  $y$  dois predecessores de  $w$  em  $D$ .

Primeiro, vamos considerar que  $x$  pertence a  $W$ . Isto implica que, por simetria, podemos considerar que  $w$  é  $w_1$ ,  $x$  é  $w_2$  e a aresta  $xw_1$  pertence a  $E$  e é orientada em  $D$  em direção a  $w_1$ . Como  $D$  é acíclico, o conjunto  $N$  contém um vértice  $z$  tal que não existe aresta em  $E$  que seja orientada em  $D$  em direção a  $z$ , em outras palavras,  $z$  é uma fonte do grafo direcionado induzido por  $N$  em  $D$ . Isso implica que  $z$  não possui dois predecessores em  $D$ , logo  $z \in N_{G_0}(w) \cap B_0$ . Se  $w_2 \in W_1$ , então  $N$  contém necessariamente dois vértices de  $B_0$ , o que contradiz a afirmação que  $N_{G_0}(w)$  contém no máximo um vértice de  $B_0$ . Logo  $w_2 \notin W_1$ . Agora para todo vértice  $w' \in W_1 \setminus \{w_1\}$ , os dois predecessores de  $w'$  em  $D$ ,  $x'$  e  $y'$ , pertencem a  $B$  e não são incidentes a uma aresta em  $E$ . Então,  $d_G(x') = d_G(y') = 2$ , o que implica que  $x', y' \in N_{G_0}(w') \cap B_0$ .

Agora vamos considerar que  $x$  e  $y$ , ambos, pertencem a  $B$ . Por simetria, considere que alguma aresta em  $N$  é direcionada em  $D$  em direção a  $x$ . Logo  $x \in N$ , o que implica que, por simetria, podemos considerar que  $w$  é  $w_1$ . Se  $z$  é uma fonte do grafo direcionado induzido por  $N$  em  $D$ , então  $z \in N_{G_0}(w) \cap B_0$ . Como  $N_{G_0}(w) \cap B_0$  contém no máximo um vértice,  $z$  é o único vértice em  $N_{G_0}(w) \cap B_0$ . Logo  $w_2 \in U$ . Temos ainda que para todo vértice  $w' \in W_1 \setminus \{w_1\}$ , os dois predecessores de  $w'$  em  $D$ ,  $x'$  e  $y'$ , pertencem a  $B$  e não são incidentes com uma aresta em  $E$ . Logo,  $d_G(x') = d_G(y') = 2$ , o que implica que  $x', y' \in N_{G_0}(w') \cap B_0$ .



Concluimos que nossa afirmação inicial é verdadeira e que duplicando a contagem das arestas entre  $W_1$  e  $B_0$  caímos na mesma contradição do final do Caso 1.

Caso 3:  $G \in \mathcal{G}_2$

Seja  $H_1$  e  $H_2$  duas componentes conexas de  $G_0$ . Seja  $k = 2$ . Para  $i \in [k]$ , seja  $W_1^i = V(H_i) \cap (W \setminus U)$  e  $B_0^i = V(H_i) \cap (B \cap U)$ . Lembre-se que  $G$  é igual a  $G_0$  mais uma única aresta entre um vértice de  $H_1$  e um vértice de  $H_2$ . Os mesmos argumentos do Caso 1 implica que para  $i \in [k]$ , ou  $W_1^i$  é vazio, ou existe um vértice  $w^{i,*}$  em  $W_1^i$  com

$$|N_{G_0}(w) \cap B_0^i| \geq \begin{cases} 1, w = w^{i,*}, \\ 2, w \in W_1^i \setminus \{w^{i,*}\}. \end{cases}$$

Duplicando-se a contagem das arestas entre  $W_1^i$  e  $B_0^i$  nos dá que  $|W_1^i| \leq |B_0^i|$ . Agora

$$\begin{aligned} |U| &\geq \sum_{i \in [k]} (|V(H_i) \cap (W \cap U)| + |V(H_i) \cap (B \cap U)|) \\ &= \sum_{i \in [k]} (|V(H_i) \cap (W \cap U)| + |B_0^i|) \\ &\geq \sum_{i \in [k]} (|V(H_i) \cap (W \cap U)| + |W_1^i|) \\ &= \sum_{i \in [k]} (|V(H_i) \cap (W \cap U)| + |V(H_i) \cap (W \setminus U)|) \\ &= |W|, \end{aligned}$$

o que é uma contradição.

Caso 4:  $G \in \mathcal{G}_3$

Seja  $X$  o conjunto de vértices selecionados pela operação  $\mathcal{O}_3$ . Seja  $H_1, \dots, H_k$  as componentes conexas formadas por  $G$  menos todos os vértices em  $X$ . Por construção, existe exatamente uma aresta entre  $X$  e  $V(H_i)$  para  $i \in [k]$ . Seja  $W_1^i = V(H_i) \cap (W \setminus U)$  e  $B_0^i = V(H_i) \cap (B \cap U)$ , onde  $i \in [k]$ . Os mesmos argumentos do Caso 1 implica que para  $i \in [k]$ , ou  $W_1^i$  é vazio, ou existe um vértice  $w^{i,*}$  em  $W_1^i$  com

$$|N_{G_0}(w) \cap B_0^i| \geq \begin{cases} 1, w = w^{i,*}, \\ 2, w \in W_1^i \setminus \{w^{i,*}\}. \end{cases}$$

Agora utilizando o mesmo argumento do Caso 3 obtemos uma contradição.  $\blacksquare$

Com os lemas de 4 a 12 juntamente com o Teorema 12 formulamos uma caracterização construtiva completa dos grafos sem triângulos da classe  $H$ .

**Corolário 2.** *Seja  $\mathcal{T}$  o conjunto de todos os grafos livres de triângulos, então  $\mathcal{G} \cap \mathcal{T} = H \cap \mathcal{T}$ .*

**Prova.**

O Teorema 12 implica que  $\mathcal{G} \cap \mathcal{T} \subseteq H \cap \mathcal{T}$ . Seja  $G$  um grafo livre de triângulo de  $H$ . Seja  $W$  um conjunto  $P_3$  mínimo de  $G$ , seja  $B = V(G) \setminus W$  e seja  $G_0$  um subgrafo gerador bipartido de  $G$  com bipartição  $V(G_0) = W \cup B$  tal que todo vértice em  $B$  possua grau exatamente 2 em  $G_0$ . Seja  $E_1$  o conjunto de arestas em  $E(G) \setminus E(G_0)$  entre os vértices de uma mesma componente conexa de  $G_0$  e seja  $E_2$  o conjunto de arestas em  $E(G) \setminus E(G_0)$  entre os vértices de componentes conexas distintas de  $G_0$ .

Primeiramente considere  $G_0$  conexo. Neste caso,  $E_1 = E(G) \setminus E(G_0)$ . Para a contradição, considere que  $E_1$  contém duas arestas  $r$  e  $r'$ . Pelos lemas 8 e 9, as arestas  $r$  e  $r'$  não são ambas incidentes com vértices em  $W$ . Podemos considerar então que  $r$  conecta dois vértices de  $B$ . Como  $G$  é livre de triângulos, lemas 10, 11, e 12 implica uma contradição. Logo  $E_1$  contém no máximo uma aresta, o que implica  $G \in \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}'_1$ .

Agora vamos considerar que  $G_0$  é desconexo. Pelos lemas 5 e 6, todos os vértices incidentes com arestas em  $E_1$  pertencem a  $B$ . Para contradição, vamos considerar que  $E_1$  é não vazio. Seja  $bb' \in E_1$ , onde  $b$  e  $b'$  pertencem a alguma componente conexa  $C$  de  $G_0$ . Como  $G$  é conexo mas  $G_0$  é desconexo, algum vértice de  $C$  é incidente com uma aresta  $f$  em  $E_2$ . Pelo Lema 7, a aresta  $f$  não é incidente a  $b$  ou  $b'$ . Ainda pelo Lema 4 (ii) e (iii),  $G$  necessariamente contém um triângulo, o que é uma contradição. Logo  $E_1$  é vazio. Agora, Lema 1 implica imediatamente que  $G \in \mathcal{G}_2 \cup \mathcal{G}_3$ , o que completa a prova. ■

O Corolário 2 implica muitas restrições sobre a estrutura de ciclos de grafos livres de triângulos  $G$  em  $H$ . Seja  $G_0$ , com bipartição  $B \cup W$  o grafo em questão em  $\mathcal{G}$ . Claramente, todos os ciclos de  $G$  que também são ciclos de  $G_0$  são de comprimento par e seus vértices se alternam entre  $B$  e  $W$ . Ainda, no máximo um vértice de  $B$  em tal ciclo pode ter grau maior do que 2 em  $G$ . Se  $G_0$  é conexo, os ciclos de  $G$ , ou são tais ciclos em  $G_0$  ou eles possuem as únicas arestas em  $E(G) \setminus E(G_0)$ . Se  $G_0$  possui duas componentes conexas, então  $G$  é formado de  $G_0$  adicionando-se uma aresta entre as componentes e todos os ciclos de  $G$  também são ciclos de  $G_0$ . Finalmente, se  $G_0$  possui pelo menos três componentes conexas e  $X$  é como descrito em  $\mathcal{O}_3$ , então  $X$  induz um grafo arbitrário conexo livre de triângulos em  $G$ , ou seja, a estrutura do ciclo de  $G[X]$  pode ser bem complicada. Além do mais, todos os ciclos em  $G[X]$  contêm apenas vértices de grau pelo menos 4 em  $G$ . Todos os demais ciclos de  $G$  estão totalmente contidos em uma componente de  $G_0$  e contêm pelo menos um vértice de  $B$  que possui grau 2 em  $G$ .

## 4.2 Reconhecimento de Todos os Grafos Livres de Triângulos em $H$

De acordo com o Corolário 2, a estrutura de grafos livres de triângulos em  $H$  é bem restrita. De fato, não é difícil reconhecer tais grafos em tempo polinomial. Dedicamos esta seção a detalhes do algoritmo para reconhecimento dos grafos livres de triângulo em  $H$ .

Seja  $G$  um grafo conexo livre de triângulos dado como entrada do algoritmo. Pelo Corolário 2, o grafo  $G$  pertence a  $H$  se e somente se  $G$  pertence a  $\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$  ou  $G$  pertence a  $\mathcal{G}_3$ .

**Lema 13.** *Pode ser checado em tempo polinomial se  $G \in \mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$*

**Prova.** Por definição, o grafo  $G$  pertence a  $\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$  se e somente se removendo-se no máximo uma aresta de  $G$  tem-se um grafo em  $\mathcal{G}_0$  com no máximo duas componentes conexas. Como grafos em  $\mathcal{G}_0$  podem claramente ser reconhecidos em tempo linear, basta checar se  $G \in \mathcal{G}_0$ , e para cada aresta  $r$  de  $G$  checar se  $G - r \in \mathcal{G}_0$ . Como os grafos em  $\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$  possuem um número linear de arestas, tudo isso pode ser feito em tempo quadrático. ■

Tendo em vista o Lema 13, vamos considerar agora que  $G$  não pertença a  $\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ . O lema abaixo é uma consequência direta da definição da operação  $\mathcal{O}_3$ .

**Lema 14.** *Se  $G$  pertence a  $\mathcal{G}_3$ , então existe um vértice  $x$  em  $G$  de grau pelo menos 3 e duas arestas  $e_l = xy_l$  e  $e_r = xy_r$  de  $G$  incidentes a  $x$  tal que no grafo  $G'$  formado por  $G$  removendo-se todas as arestas incidentes a  $x$  exceto  $e_l$  e  $e_r$ , a componente conexa  $C(x, e_l, e_r)$  de  $G'$  que contém  $x$  possui as seguintes propriedades:*

- (i.)  $x$  é um vértice de corte de  $C(x, e_l, e_r)$
- (ii.)  $C(x, e_l, e_r)$  possui uma única bipartição com os conjuntos bipartidos  $B_l \cup \{x\} \cup B_r$  e  $W_l \cup W_r$ ;
- (iii.) todo vértice em  $B_l \cup \{x\} \cup B_r$  possui grau 2 em  $C(x, e_l, e_r)$ ;
- (iv.)  $B_l \cup W_l$  e  $B_r \cup W_r$  são conjuntos de vértices das duas componentes conexas de  $C(x, e_l, e_r) - x$  tal que  $y_l \in W_l$  e  $y_r \in W_r$ ;
- (v.) nenhuma das arestas removidas conecta  $x$  a um vértice de  $V(C(x, e_l, e_r)) \setminus \{x\}$ ;
- (vi.)  $W_l$  e  $W_r$  ambos contêm um vértice de grau ímpar.

**Prova.**

Escolha  $x$  como um dos vértices do conjunto não vazio  $X$  dado na definição de  $\mathcal{O}_3$ , e seja  $e_1$  e  $e_2$  as duas arestas de  $G_0$  incidentes a  $x$ . As propriedades (i) a (v) são imediatas. Note que  $C(x, e_l, e_r)$  é uma componente conexa de  $G_0$  que contém  $x$ . Para a propriedade (vi), observe que o número de arestas de  $C(x, e_l, e_r)$  entre  $B_l \cup \{x\}$  e  $W_l$  é exatamente  $2|B_l| + 1$ , ou seja, é um número ímpar, o que implica que nem todos os vértices de  $W_l$  podem ser de grau par. Um argumento similar é aplicado a  $W_r$ . ■

A observação chave para se completar o algoritmo é dada pelo lema a seguir, o qual mostra que as propriedades do Lema 14 caracteriza unicamente os elementos de  $X$ .

**Lema 15.** *Se  $G$  pertence a  $\mathcal{G}_3$  e um vértice  $x$  de  $G$  de grau pelo menos três e duas arestas  $e_l = xy_l$  e  $e_r = xy_r$  de  $G$  incidentes a  $X$  possuem as propriedades de (i) até (vi) do Lema 14, então*

- i.  $G$  é obtido aplicando-se a operação  $\mathcal{O}_3$  em um grafo  $G_0$  de  $\mathcal{G}_0$  com pelo menos três componentes conexas tal que  $x$  pertence ao conjunto  $X$  usado pela operação  $\mathcal{O}_3$  e*
- ii.  $C(x, e_l, e_r)$  definido como no Lema 14 é a componente conexa de  $G_0$  que contém  $x$ .*

**Prova.** Seja  $G$  o grafo obtido pela aplicação da operação  $\mathcal{O}_3$  em um grafo  $G_0$  de  $\mathcal{G}_0$  com pelo menos três componentes conexas e seja  $X$  o conjunto correspondente usado pela operação  $\mathcal{O}_3$ . Seja  $V(G_0) = B \cup W$  a bipartição de  $G_0$ . Claramente, pelo possível aumento de  $X$ , podemos assumir que todo vértice  $b$  em  $B$  que é incidente a uma aresta em  $E(G) \setminus E(G_0)$ , ou pertence a  $X$  ou não é vértice de corte do componente de  $G_0$  ao qual ele pertence.

Seja  $x$  um vértice de  $G$  com grau pelo menos três e  $e_l = xy_l$ ,  $e_r = xy_r$  duas arestas de  $G$  incidentes a  $x$ , que possuam as propriedades de (i.) até (vi.) do Lema 14. Seja  $G'$  o grafo obtido removendo-se de  $G$  todas as arestas incidentes a  $x$  exceto  $e_l$  e  $e_r$ . Seja  $C$  a componente conexa de  $G_0$  que contém  $x$  e  $C(x, e_l, e_r)$  a componente conexa de  $G'$  que contém  $x$ .

Vamos provar que  $x$  pertence a  $X$ , ou seja, (i.) é verdadeiro. Em seguida vamos mostrar que (ii.) é verdade considerando  $G_0$  ou mesmo uma versão levemente modificada de  $G_0$ .

Considere que  $x$  não pertença a  $X$ . Primeiramente, assumimos que  $x \in B \setminus X$ . Como  $x$  possui grau pelo menos três em  $G$  e possui grau dois em  $G_0$ , o vértice  $x$  é incidente com a aresta  $xy$  em  $E(G) \setminus E(G_0)$ . Se  $y \in \{y_l, y_r\}$ , então, pela operação

$\mathcal{O}_3$ , o vértice  $y$  pertence a  $X$ . Se  $C'$  for uma componente conexa de  $G_0$  que contém  $y$ , então um argumento similar ao da prova do Lema 14 implica que  $W \cap V(C')$  contém um vértice de grau ímpar. Logo,  $C(x, e_l, e_r)$  contém um vértice de grau ímpar o qual possui distância par de  $x$ , o que contradiz as propriedades (ii.) e (iii.). Logo  $y \notin \{y_l, y_r\}$ , o que implica que  $C(x, e_l, e_r)$  coincide com  $C$ . Agora  $x$  não é um vértice de corte de  $C$ , contradizendo a propriedade (i.). Logo  $x$  não pode pertencer a  $B \setminus X$ .

Agora vamos considerar que  $x \in W$ . Pela operação  $\mathcal{O}_3$ , o vértice  $x$  pode ser incidente com no máximo uma aresta de  $E(G) \setminus E(G_0)$ . E ainda, se  $x$  é incidente com tal aresta, então nenhum outro vértice em  $C$  é incidente a uma aresta de  $E(G) \setminus E(G_0)$ . Sendo assim, por simetria, podemos considerar que nenhum vértice em  $B_l \cup W_l$ , definido como no Lema 14 é incidente com uma aresta de  $E(G) \setminus E(G_0)$ . Isto implica que  $B_l \cup W_l$  é um subconjunto dos vértices de  $V(C)$ . Como os vértices em  $W_l$  estão todos a uma distância ímpar de  $x$  em  $C(x, e_l, e_r)$ , todos pertencem a  $B \cap V(C)$ . Pela propriedade (v.) todos estes vértices possuem grau dois em  $C(x, e_l, e_r)$ , o que implica uma contradição da propriedade (vi.). Logo  $x$  não pode pertencer a  $W$ . Concluimos então que  $x$  pertence a  $X$ , ou seja, (i.) é verdadeiro.

Vamos continuar com a prova para (ii.). Como apontado anteriormente, provamos que (ii.) vale tanto para  $G_0$  como para uma versão levemente modificada de  $G_0$ . Se (ii.) não for verdadeiro para  $G_0$ , ou seja,  $C(x, e_l, e_r)$  é diferente de  $C$ , então as arestas  $e_l$  e  $e_r$  não correspondem às duas arestas de  $G_0$  que são incidentes a  $x$ , digamos  $e_l = xy_l \notin E(G_0)$ . Segue como anteriormente, que  $y_l$  não pode pertencer a  $X$ . Logo  $y_l$  pertence a  $(B \setminus X) \cup W$ . Se  $y_l \in W$ , então podemos trocar a componente  $C'$  por uma das duas componentes de  $C - x$  em  $G_0$  e (ii.) é verdade para este  $G_0$  modificado. Se  $y_l \in B \setminus X$ , então as propriedades de (i) até (vi.) implicam que  $C'$  é um grafo bipartido dois-regular, ou seja,  $C'$  é um ciclo par. Neste caso, podemos trocar a bipartição de  $C'$  e fazer uma troca similar em  $G_0$  no caso de  $y_l \in W$ . Logo, também neste caso, (ii.) é verdadeiro para este  $G_0$  modificado. ■

A seguir o principal resultado desta seção.

**Teorema 13.** *Dado um grafo livre de triângulos  $G$ , é possível checar em tempo polinomial se  $h(G) = n(G)$ .*

**Prova.** Claramente, podemos considerar cada componente conexa de  $G$  separadamente, logo podemos assumir que  $G$  é conexo. Denote a ordem de  $G$  por  $n$ . Pelo Lema 13, podemos checar em tempo  $O(n^2)$  se  $G$  pertence a  $\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ . Se este for o caso, então o Corolário 2 implica que  $h(G) = n(G)$ . Então vamos considerar que  $G$  não pertença a  $\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_1 \cup \mathcal{G}_2$ . Note que existe  $O(n^3)$  escolhas para o vértice  $x$  de  $G$

e duas arestas incidentes  $e_l$  e  $e_r$  de  $G$ . Note ainda que para toda escolha individual da tripla  $(x, e_l, e_r)$ , as propriedades de (i.) até (vi.) do Lema 14 podem ser checadas em tempo  $O(n)$ . Então, pelos lemas 14 e 15, podemos, em tempo  $O(n^4)$ ,

- ou determinar que nenhuma escolha de  $(x, e_l, e_r)$  satisfaz a conclusão do Lema 14, a qual, pelo Corolário 2 implica  $h(G) \neq n(G)$ ,
- ou achar uma tripla  $(x, e_l, e_r)$  adequada e reduzir a instância  $G$  a uma instância menor  $G^- = G - V(C(x, e_l, e_r))$ .

Como a ordem de  $G^-$  é pelo menos três vezes menor do que  $n$ , chegamos que o tempo total do algoritmo é de  $O(n^5)$ . ■

### 4.3 Subgrafos Induzidos Proibidos

Provar que  $h(G) = n(G)$  quando temos  $G$  igual a um caminho, ciclo ou estrela é um exercício simples.

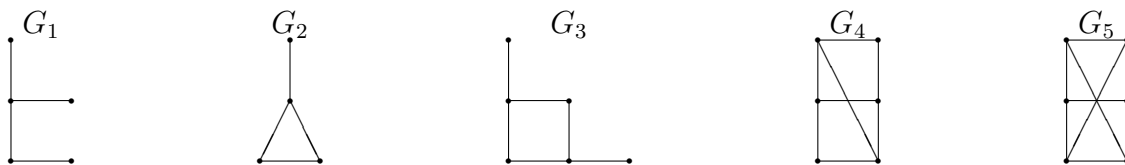


Figura 4.5: Os Cinco Subgrafos Proibidos  $G_1, \dots, G_5$ .

**Teorema 14.** *Se  $G$  é um grafo, então  $h(H) = n(H)$  para todos subgrafo induzido  $H$  de  $G$ , se e somente se  $G$  é livre de  $\{G_1, \dots, G_5\}$ .*

**Prova.**

Como  $3 = h(G_1) = h(G_3) < n(G_1) = n(G_3) = 4$  e  $2 = h(G_2) = h(G_4) = h(G_5) < n(G_2) = n(G_4) = n(G_5) = 3$  a parte somente se do teorema é verdade. Para provar a parte "se", vamos considerar, para a contradição, que  $G$  é um grafo conexo livre de  $\{G_1, \dots, G_5\}$  com  $h(G) < n(G)$ . Vamos considerar diferentes casos.

**Caso 1:**  $G$  possui um triângulo  $T: abca$

Como  $G$  é livre de  $G_2$ , nenhum vértice possui exatamente um vizinho em  $T$ .

Se algum vértice não possui vizinho em  $T$ , então, por simetria, podemos assumir que há dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$  tal que  $uva$  é um caminho e  $u$  não possui vizinho em  $T$ . Como  $G$  é livre de  $G_2$ , podemos assumir que  $v$  é adjacente a  $b$ . Agora  $u, v, a$  e  $b$  induzem  $G_2$ , o que é uma contradição. Logo todo vértice possui pelo menos um

vizinho em  $T$ . Isto implica que o conjunto de vértices de  $G$  pode ser particionado como

$$V(G) = \{a, b, c\} \cup N(\{a, b\}) \cup N(\{a, c\}) \cup N(\{b, c\}) \cup N(\{a, b, c\}),$$

onde  $N(S) = \{u \in V(G) \setminus \{a, b, c\} \mid N_G(u) \cap \{a, b, c\} = S\}$ .

Se dois vértices,  $u$  e  $v$ , em  $N(\{a, b\})$  são adjacentes, então  $u, v, a$ , e  $c$  induzem  $G_2$ , o que é uma contradição. Logo, por simetria, cada um dos três conjuntos  $N(\{a, b\})$ ,  $N(\{a, c\})$ , e  $N(\{b, c\})$  são independentes. Se algum vértice  $u$  em  $N(\{a, b\})$  não é adjacente a algum vértice  $v$  em  $N(\{a, c\})$ , então  $u, v, a$ , e  $b$  induz  $G_2$ , o que é uma contradição. Logo, por simetria, existe todas as arestas possíveis entre cada dois dos três conjuntos  $N(\{a, b\})$ ,  $N(\{a, c\})$ , and  $N(\{b, c\})$ . Se algum vértice  $u$  em  $N(\{a, b\})$  não é adjacente a algum vértice  $v$  em  $N(\{a, b, c\})$ , então  $u, v, a$ , e  $c$  induzem  $G_2$ , o que é uma contradição. Logo, por simetria, existe todas as arestas possíveis entre os dois conjuntos  $N(\{a, b\}) \cup N(\{a, c\}) \cup N(\{b, c\})$  e  $N(\{a, b, c\})$ . Se  $N(\{a, b\})$  contém exatamente um vértice, digamos  $u$ , então  $I_G(\{u, c\}) = V(G)$ , o que implica a contradição  $2 \leq h(G) \leq n(G) \leq 2$ . Logo, por simetria, nenhum dos três conjuntos  $N(\{a, b\})$ ,  $N(\{a, c\})$ , e  $N(\{b, c\})$  contém exatamente um vértice. Se existe dois vértices em  $N(\{a, b\})$ , digamos  $u_1$  e  $u_2$ , e dois vértices em  $N(\{b, c\})$ , digamos  $v_1$  e  $v_2$ , então  $u_1, u_2, v_1, v_2, a$ , e  $c$  induzem  $G_5$ , o que é uma contradição. Logo nenhum par dos três conjuntos  $N(\{a, b\})$ ,  $N(\{a, c\})$ , e  $N(\{b, c\})$  contém pelo menos dois vértices.

Tudo junto, podemos assumir, por simetria, que  $N(\{a, c\})$  e  $N(\{b, c\})$  são vazios. Agora  $I_G(\{a, b\}) = V(G)$ , o que implica a contradição  $2 \leq h(G) \leq n(G) \leq 2$  e completa a prova deste caso.

**Case 2**  $G$  não possui triângulos mas possui um ciclo de tamanho quatro  $C : abcd$ .

Se algum vértice não possuir vizinho em  $C$ , então, por simetria, podemos assumir que existem dois vértices  $u$  e  $v$  de  $G$  tal que  $uva$  é um caminho. Como  $G$  é livre de triângulo,  $v$  não é adjacente a  $b$  ou  $d$ . Logo  $u, v, a, b$ , e  $d$  induzem  $G_1$ , o que é uma contradição. Logo todo vértice possui pelo menos um vizinho em  $C$ . Como  $G$  é livre de triângulos, isto implica que o conjunto de vértices de  $G$  pode ser particionado como

$$V(G) = \{a, b, c, d\} \cup N(\{a\}) \cup N(\{b\}) \cup N(\{c\}) \cup N(\{d\}) \cup N(\{a, c\}) \cup N(\{b, d\}),$$

onde  $N(S) = \{u \in V(G) \setminus \{a, b, c, d\} \mid N_G(u) \cap \{a, b, c, d\} = S\}$ .

Se existir um vértice  $u$  em  $N(\{a\})$  e um vértice  $v$  em  $N(\{c\})$ , então  $u$  e  $v$  são adjacentes, porque  $G$  é livre de  $G_3$ . Agora  $u, v, a, b$ , e  $d$  induzem  $G_1$ , o que é uma contradição. Logo, por simetria, podemos assumir que  $N(\{c\}) \cup N(\{d\})$  é vazio.

Se existir um vértice  $u$  em  $N(\{b\})$  e um vértice  $v$  em  $N(\{a, c\})$ , então  $u$  e  $v$  não são adjacentes, porque  $G$  é livre de  $G_4$ . Agora  $u, v, a, b$ , e  $d$  induzem  $G_1$ , o que é uma contradição. Logo, por simetria, um dos dois conjuntos  $N(\{b\})$  e  $N(\{a, c\})$  é vazio e um dos dois conjuntos  $N(\{a\})$  e  $N(\{b, d\})$  é vazio. Se existe um vértice  $u$  em  $N(\{a, c\})$  e um vértice  $v$  em  $N(\{b, d\})$ , então  $u, v, a, b, c$ , e  $d$  induzem ou um  $G_4$  ou um  $G_5$ , o que é uma contradição. Logo, por simetria, podemos assumir que  $N(\{b, d\})$  é vazio.

Como  $G$  é livre de  $G_1$ , existem todas as arestas possíveis entre os dois conjuntos  $N(\{a\})$  e  $N(\{b\})$ .

Como  $G$  é livre de  $G_1$ , ambos os conjuntos  $N(\{a\})$  e  $N(\{b\})$  contém no máximo um vértice.

Como  $G$  é livre de  $G_1$ , não existe nenhuma aresta entre  $N(\{a\})$  e  $N(\{a, c\})$ .

Se ambos os conjuntos  $N(\{a\})$  e  $N(\{b\})$  são vazios, então  $G$  é um grafo de ordem 6 com  $h(G) = n(G) = 3$ , o que é uma contradição. Logo, por simetria, podemos assumir que

$$V(G) = \{a, b, c, d\} \cup N(\{a\}) \cup N(\{a, c\}).$$

Se  $N(\{a\})$  é vazio, então  $I_G(\{a, c\}) = V(G)$ , o que implica na contradição  $2 \leq h(G) \leq g(G) \leq 2$ . Logo  $N(\{a\})$  contém exatamente um vértice, digamos  $u$ , e  $I_G(\{a, c, u\}) = V(G)$ , o que implica  $n(G) \leq 3$ . Se  $H_G(U) = V(G)$  para algum conjunto  $U$  de vértices de  $G$ , então  $u \in U$ . Tendo em vista a estrutura de  $G$ , segue que  $h(G) \geq 3$ , o que implica a contradição  $h(G) = g(G)$  e completa a prova deste caso.

**Case 3**  $G$  não possui um triângulo ou um ciclo de tamanho quatro.

Se  $G$  não possui vértices de grau pelo menos 3, então  $G$  é um caminho ou ciclo, o que implica a contradição  $h(G) = n(G)$ . Logo, podemos assumir que  $G$  contém um vértice de grau pelo menos 3. Como  $G$  é livre de  $G_1$ ,  $G$  é uma estrela, o que implica a contradição  $h(G) = n(G)$  e completa a prova. ■



# Capítulo 5

## Propostas Futuras

*"A imaginação é mais importante que a ciência, porque a ciência é limitada, ao passo que a imaginação abrange o mundo inteiro."*

Albert Einstein

E o Futuro...

Iniciamos este trabalho lendo a respeito da convexidade  $P_3$  em torneios. Um torneio é um grafo completo que tem suas arestas direcionadas. Estudando a convexidade  $P_3$  vimos que surpreendentemente não havia muito sobre esta em grafos não direcionados. Resolvemos então explorar tal área. Mas estávamos enganados!!! Pois alguns dos parâmetros da convexidade  $P_3$  já haviam sido amplamente estudados mas sob outros nomes. Alguns pseudônimos foram citados no decorrer deste trabalho, entre eles, 2-Dominação para o problema do número  $P_3$ , conversão irreversível para número de envoltória.

Após termos explorado as classes de grafos não direcionados resolvemos voltar onde começamos, grafos direcionados. Pensando em estudar a convexidade  $P_3$  em classes de grafos direcionados mais abrangentes que torneios, dividimos nosso ataque em duas partes, os grafos direcionados acíclicos e os grafos direcionados cíclicos. Porém por uma ironia do destino, e por uma pequena falha ao se conceituar a convexidade  $P_3$  em grafos direcionados incorremos na criação de uma nova convexidade, a qual se mostrou muito interessante quanto suas áreas de aplicação. Nomeamos essa nova convexidade de *convexidade de precessão* e na Seção 5.1 definimos e mostramos as idéias iniciais obtidas para tal convexidade na tentativa de demonstrar ao leitor que esta seria uma atraente proposta de estudo futuro. Na Seção 5.1 é resolvido três parâmetros da convexidade de precessão para os grafos dirigidos acíclicos, nossa proposta é continuar tal estudo para os grafos dirigidos cíclicos. O que por um primeiro instinto pode parecer simples, mas algumas intervenções demonstraram que nosso instinto pode nos enganar.

Apesar de nos desviarmos da convexidade  $P_3$  em grafos direcionados, ao achar um artigo de Balister et al. [3], onde é trabalhado um algoritmo para geração de conjuntos convexos em grafos direcionados acíclicos, voltamos nossa atenção novamente ao tópico. No artigo citado é demonstrado algumas aplicações do assunto, entre elas a chamada computação personalizada ("custom computing"). Os autores estudam a convexidade tendo em conta caminhos direcionados de comprimento qualquer, porém restringindo-os aos grafos direcionados acíclicos. Seria do nosso interesse voltarmos ao estudo da convexidade  $P_3$  em grafos orientados.

Ainda trabalhando com os grafos direcionados, gostaríamos de aplicar a convexidade geodética a estes. Convexidade geodética diz respeito ao menor caminho entre dois vértices. Já nos adiantando no assunto, formulamos um algoritmo para encontrar o número de envoltória geodética em um grafo direcionado acíclico. Porém ainda devemos nos certificar de sua corretude. Pretendemos estender o estudo aos demais parâmetros da convexidade citada e também trabalharmos com os grafos orientados

E por fim, porém não de menos interesse, pretendemos ampliar o estudo da classe  $H$  aos grafos gerais. Tal estudo já se encontra em andamento e muito descobrimos sobre a estrutura dos grafos da classe  $H$  com triângulos. Acreditamos que dentro em breve teremos tais resultados provados e redigidos para uma futura publicação.

Terminamos este capítulo com um breve estudo da convexidade de precessão. Convexidade tal que pretendemos atacar como nosso próximo tópico de estudo.

## 5.1 Convexidade de Precessão

Seja um grafo dirigido  $G(V, E)$  e a função  $f : V(G) \rightarrow \{0, 1, 3, \dots, j\}$ . Um conjunto  $S \subset V(G)$  é *convexo de precessão* se  $\forall v \notin S$  possui  $|N^-(v) \cap S| < f(v)$ .

O *número de convexidade de precessão* de  $G$ ,  $c_p(G)$ , é a cardinalidade do maior conjunto convexo de precessão próprio de  $G$ .

Dado  $G(V, E)$  o grafo da Figura 5.1, onde  $f(v) = 2$  para todo vértice em  $V(G)$ .  $S = \{a\}$  é um conjunto convexo de precessão em  $G$ . Um dos maiores conjuntos convexo de precessão de  $G$  é  $\{b, c, d, e, f\}$ , logo  $c_p(G) = 5$ .

Seja  $S$  um subconjunto de vértices de  $V(G)$ . O *intervalo de precessão* de  $S$ ,  $I_p(S) = S \cup \{\forall v \in V(G) : |N^-(v) \cap S| \geq f(v)\}$ . Na Figura 5.1,  $I_p(\{a, b, e\}) = \{a, b, e, c\}$ . Quando  $I_p(S) = V(G)$ ,  $S$  é chamado de *conjunto de precessão*. O *número de precessão* de  $G$ ,  $p_p(G)$ , é a cardinalidade do menor conjunto de precessão. Na Figura 5.1,  $p_p(G) = 4$ , uma das possibilidades para  $S = \{a, b, c, f\}$ .

Dado um subconjunto  $S$  de  $V(G)$ ,  $I_p^+(S) = S_i$  onde  $S_1 = I_p(S)$ ,  $S_2 = I_p(S_1)$ ,  $S_3 = I_p(S_2)$ , ...,  $S_i = I_p(S_{i-1})$  e  $S_i$  é um conjunto convexo de precessão. O conjunto  $S$  é uma *envoltória convexa de precessão*. Quando  $I_p^+(S) = V(G)$ , então  $S$  é uma

envoltória de precessão de  $G$ . O número da envoltória de precessão,  $h_p(G)$ , é a cardinalidade da menor envoltória de precessão de  $G$ . Na Figura 5.1 seja com  $f = V(G) \rightarrow \{2, 2, 2, 2, 2, 2\}$ , então  $I_p^+(\{a, b\}) = V(G)$ , logo  $h_p(G) = 2$ .

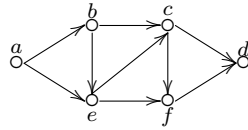


Figura 5.1: Grafo Direcionado  $G$

A seguir iremos definir o número de convexidade de precessão, número de precessão e número da envoltória de precessão para os grafos dirigidos acíclicos.

**Teorema 15.** *Dado  $G(V, E)$  um grafo dirigido acíclico,*

$$c_p(G) = \begin{cases} |V(G)| - 1, & \text{se } \exists v : N^-(v) < f(v); \\ 0, & \text{se } \forall v : N^-(v) \geq f(v). \end{cases}$$

**Prova.** No caso  $|V(G)| - 1$ , para se obter o maior conjunto convexo de precessão próprio de  $G$ ,  $S$ , basta retirar um único vértice  $v$  onde  $N^-(v) < f(v)$ . Este vértice nunca terá o número de vizinhos suficientes em  $S$ , logo  $V(G) - v$  é um conjunto convexo de precessão e claramente é um dos maiores conjuntos próprio possíveis.

Se  $\forall v : N^-(v) \geq f(v)$  então  $I_p^+(\emptyset) = V(G)$ , logo  $c_p(G) = 0$ . Seja  $G$  um grafo dirigido acíclico tal que  $I_p^+(\emptyset) \neq V(G)$ . Então existe pelo menos um vértice  $v$  de  $G$  tal que  $v \notin I_p^+(\emptyset)$ . Como  $v \notin I_p^+(\emptyset)$ ,  $v$  não é fonte. Pela propriedade  $N^-(v) \geq f(v)$  sabemos que existe  $N^-(v) + 1 - f(v)$  predecessores diretos de  $v$  que não pertencem a  $I_p^+(\emptyset)$ . O mesmo pode-se concluir desses predecessores, e assim iterativamente. Como o grafo é acíclico, chegaremos ao início de um caminho, uma fonte, que pela propriedade  $N^-(v) \geq f(v)$  pertence a  $I_p^+(\emptyset)$  sem a necessidade de nenhum predecessor. Contradição. ■

O problema do número de precessão é NP-Completo para grafos dirigidos acíclicos. A redução deste problema é feita utilizando-se o problema da SATISFABILIDADE BOOLEANA (SAT). Uma definição deste pode ser encontrada na Seção 3.3.

**Problema 8. CONJUNTO DE PRECESSÃO**

INSTÂNCIA: Grafo  $G = (V(G), E(G))$ , inteiro positivo  $k \leq n$

PERGUNTA: Existe um conjunto de precessão de tamanho  $k$  ou menor em  $G$ , isto é, existe um subconjunto  $V' \subseteq V(G)$ , tal que  $|V'| \leq k$  e todo  $u \in V(G) - V'$  possui pelo menos  $f(u)$  predecessores em  $V'$ ?

**Teorema 16.** *O problema do CONJUNTO DE PRECESSÃO é NP-completo.*

**Prova.**

Um conjunto de precessão pertence a NP, pois dado um certificado, um subconjunto de vértices de  $G$ , é possível responder em tempo polinomial se este subconjunto possui o tamanho apropriado e se todo vértice que não pertence a este subconjunto possui  $f(x)$  predecessores no mesmo.

A prova segue com a transformação do problema  $SAT$  para o problema conjunto de precessão. Seja  $\mathcal{C} = C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_i$  uma instância arbitrária de  $SAT$ . Construímos um grafo  $G$  da seguinte forma: para cada cláusula  $C_j$  de  $\mathcal{C}$  criar um vértice  $c_j$  em  $V(G)$ . Para cada variável de  $\mathcal{C}$  criar o conjunto de vértices  $\{x_l, \bar{x}_l, v_l, u_l\}$  e as arestas  $\{(x_l u_l), (\bar{x}_l u_l), (v_l x_l), (v_l \bar{x}_l)\}$  (Figura 5.2). Atribuir a todos os vértices  $f(x) = 1$ . Finalmente, se a variável  $x_l/\bar{x}_l$  aparece na cláusula  $C_i$ , criar a aresta a aresta  $(x_l c_i)/(\bar{x}_l c_i)$ .

A seguir vamos demonstrar que se  $SAT$  possui um conjunto satisfazível então  $G$  possui um conjunto de precessão de tamanho  $2i$ , onde  $i$  é o número de cláusulas. Suponha que  $S$  seja um conjunto de variáveis verdadeiras mínimo que satisfazem  $\mathcal{C}$ . Seja  $P$  o conjunto de precessão de  $G$  e  $V$  o conjunto de todos os vértices  $v$  de  $G$ . Então  $P = S \cup V \cup \{u_l \in G \mid x_l, \bar{x}_l \notin S\}$ . Como toda cláusula de  $\mathcal{C}$  possui pelo menos uma variável verdadeira, temos que cada  $c_i$  possui pelo menos um predecessor em  $P$ . O conjunto  $V$  garante o predecessor de  $x$  e  $\bar{x}$ . O conjunto  $S$  fornece predecessores para alguns vértices  $u$ , aqueles que não possuem predecessores em  $S$  pertencem a  $P$ . Então  $k=2i$ , ou seja,  $i$  vértices  $v$ ,  $k$  vértices de  $S$  e  $i-k$  vértices  $u$ .

Agora seja  $S$  um conjunto de precessão de  $G$ . Então  $S$  contém todos os vértices  $v$  de  $G$  o que garante um predecessor para  $x$  e  $\bar{x}$ ,  $|S| = i$ . Para se ter um conjunto de precessão deve-se colocar em  $S$  os vértices  $c$  ou um de seus predecessores. Como queremos o conjunto de precessão mínimo, coloca-se em  $S$  um predecessor de  $c_i$ , pois este predecessor também será predecessor de  $u_i$ . Pode existir ainda vértices  $u$  sem predecessores, estes por questão de clareza, acrescenta-se em  $S$ . Logo  $|S| = (i) + (k) + (i - k) = 2i$ . Então o conjunto verdade de  $\mathcal{C}$  é  $\{x/\bar{x} \mid x/\bar{x} \in S\}$ . ■

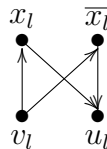


Figura 5.2: Gadget Teorema 16

**Teorema 17.** Dado um grafo dirigido acíclico  $G$ ,  $h_p(G) = |S|$ , onde  $S$  é o conjunto de todos os vértices de  $G$  tal que  $N^-(v) < f(v)$ .

**Prova.** Seja  $G(V, E)$  um grafo dirigido acíclico e  $S$  o conjunto de todos os vértices de  $G : N^-(v) < f(v)$ . Suponha que  $S$  não seja uma envoltória de precessão de  $G$ . Então existe um vértice de  $G$ ,  $v : v \notin I_p^+(S)$ . Logo  $v$  possui  $N^-(v) + 1 - f(v)$  predecessores diretos que não pertencem a  $I_p^+(S)$ . Estes claramente possuem  $N^-(x) \geq f(x)$  e o mesmo se aplica a eles, e assim iterativamente. Como o grafo é acíclico, chegaremos ao início de um caminho, uma fonte, a qual ou pertence a  $S$  ou a  $I_p^+(S)$ . Contradição.

Claramente  $S$  é mínimo. ■

# Capítulo 6

## Conclusão

*"O gênio e a natureza fizeram uma aliança eterna:  
o que o primeiro promete, a segunda certamente realiza.*

Friedrich Schiller

Concluimos este trabalho com a esperança de utilização destes resultados nas diversas áreas de aplicabilidade deste estudo como medicina, WEB (p.e. páginas de busca), marketing (p.e. estratégia de mercado), entre outras.

Para a nossa realização, a convexidade  $P_3$  já vem sendo amplamente estudada pelo grupo encabeçado por pesquisadores da UFRJ. Outros parâmetros da convexidade se tornaram de interesse e vem sendo tópico de teses e artigos. Acreditamos que muito ainda pode ser desenvolvido sobre o assunto.

Este trabalho trata tão somente da ponta de um iceberg. Nele estudamos apenas três parâmetros da convexidade  $P_3$  para grafos não direcionados, sendo eles: o número  $P_3$ , o número de convexidade  $P_3$  e o número de envoltória  $P_3$ .

Conseguimos uma certa delimitação dos problemas dentre diversas classes de grafos. O número de convexidade  $P_3$  e o número  $P_3$  por exemplo, são NP-completos para as classes de grafos cordais e cordais bipartidos, mas são polinomiais para árvores, cografos e certas grades. Para o número de convexidade foi possível determinar limites para as três classes. Para o número  $P_3$  desenvolvemos um algoritmo para árvores e limites para cografos e grades  $3 \times n$ . Sabendo que o problema do número  $P_3$  se iguala a 2-Dominação, Blidia, Chellali e Favaron [9], determinam limites para árvores. Já o número de envoltória  $P_3$  é polinomial para todas as classes de grafos estudadas, árvores, cografos, grades e cordais. Isto parece ser um padrão que se repete, apesar do número de convexidade  $P_3$  e número  $P_3$  serem problemas visualmente mais fáceis de se resolver do que o número de envoltória  $P_3$ , é o último que apresenta mais soluções polinomiais.

Uma próxima classe a ser considerada para estudo é a classe de grafos de intervalo próprio. Visto que tal classe é uma subclasse dos cordais, o algoritmo para número de envoltória  $P_3$  nos dá uma solução polinomial para um dos três problemas. Dependemos, então, um certo esforço para solucionar o número  $P_3$  para a classe dos grafos de intervalo próprio, mas para toda resposta pensada até o momento um contra-exemplo era achado. Sendo assim, o número  $P_3$  para os grafos de intervalo próprio ainda é um problema que nos desafia.

Podemos resumir os resultados obtidos nas diversas classes de grafos com a tabela a seguir. Note que apesar de não haver uma prova para o número de convexidade dos grafos cordais sabemos que este é uma superclasse dos grafos split, para os quais apresentamos uma redução para o referido problema.

Tabela 6.1: Resultados sobre a Convexidade  $P_3$

	$n(G)$	$h(G)$	$c(G)$
<b>Geral</b>	NP-completo	NP-completo	NP-completo
<b>Árvores</b>	P	P	P
<b>Cografos</b>	P	P	P
<b>Grades</b>	P ( $3 \times n$ )	P ( $m \times n$ )	P ( $m \times n$ )
<b>Cordais</b>	NP-completo	P	NP-completo

Os resultados obtidos para as diversas classes de grafos podem ser lidos nos artigos publicados pelo grupo sobre o assunto [15–17]. Estes artigos estendem os resultados mostrados na tabela, trabalhando não apenas com o número de envoltória limitado a dois vizinhos, mas levando em conta um número inteiro  $k$  de vizinhos [17]. Também trabalha-se não apenas com o número de convexidade  $P_3$  mas sim com partições convexas [16].

Além de estudar os parâmetros da convexidade o grupo se interessou por perceber como tais parâmetros se relacionam, criando assim uma classe de grafos chamada classe  $H$ , a qual consiste dos grafos onde o número de envoltória  $P_3$  é igual o número  $P_3$ . Esta classe foi elaborada durante estudo desenvolvido na Universidade de Ulm, Alemanha, nele reconhecemos os grafos livres de triângulos que pertencem a classe  $H$  e ainda caracterizamos subgrafos proibidos para todo subgrafo induzido de um grafo  $G$  da classe  $H$ . Os resultados obtidos foram descritos em um artigo recentemente submetido e é com estes que fechamos este trabalho.

Durante estes anos de estudo vimos um crescente desenvolvimento na teoria da convexidade  $P_3$ . Intencionamos ainda adicionar a ela um estudo sobre a convexidade  $P_3$  em grafos direcionados, bem como completar o reconhecimento da classe  $H$  para os grafos em geral.

A convexidade  $P_3$  fez surgir a determinação da convexidade de precessão, a qual é determinada em grafos direcionados. Como os grafos direcionados têm uma alta aplicação no estudo dirigido a Internet, achamos que esta poderá responder

muitas questões formuladas à respeito da utilização da WEB. Por isso o estudo da convexidade de precessão vem ser uma de nossas propostas futuras.

Hoje temos a certeza que muito virá a se adicionar a este estudo que vem sendo divulgado em palestras e seminários. Como foi encontrada uma relação de equivalência dos problemas estudados com problemas bem conhecidos, como 2-Dominação vemos os nossos resultados como um novo impulso para a retomada do estudo de tais problemas. Ainda, o problema do número de envoltória não para de nos surpreender, pois hora ou outra nos deparamos com artigos que tratam de problemas equivalentes, como por exemplo monopólios dinâmicos, problemas estes que são estudados em outras áreas da computação. Por este e outros motivos, pretendemos dar continuidade ao estudo da convexidade  $P_3$  e problemas afins.



# Referências Bibliográficas

- [1] Aizenman, M., Lebowitz, J.L., *Metastability Effects in Bootstrap Percolation*, J. Phys. v. **A21**, pp. 3801–3813, 1988.
- [2] Atici, M., *Computational Complexity of Geodetic Set*, Intern. J. Computer Math. v. **5 79**, pp. 587–591, 2002.
- [3] Balister, P., Gerke, S., Gutin, G., Johnstone, A., Reddington, J., Scott, E., Soleimanfallah, A., Yeo, A., *Algorithm for Generating Convex Sets in Acyclic Digraphs*, Journal of Discrete Algorithms v. **7**, n. **4**, pp. 509–518, 2009.
- [4] Balister, P., Bollobás, B., Johnson, J.R., Walters, M., *Random Majority Percolation*, Random Structures Algorithms v. **36**, pp. 315–340, 2010.
- [5] Balogh, J., Pete, C., *Random Disease on the Square Grid*, Random Structures Algorithms v. **13**, pp. 409–422, 1998.
- [6] Balogh, J., Bollobás, B., *Sharp Thresholds in Bootstrap Percolation*, Physica A v. **326**, pp. 305–312, 2003.
- [7] Batten, L. M., *Geodesic Subgraphs*, Journal of Graph Theory, v. **7 2**, pp. 159–163, 1983.
- [8] Bertossi, A.A., *Dominating Sets for Split and Bipartite Graphs*, Information Processing Letters v. **19**, pp. 37–40, 1984.
- [9] Blidia, M., Chellali, M., Favaron, O., *Independence and 2-Domination in Trees*, Australasian Journal of Combinatorics v. **33**, pp. 317–327, 2005.
- [10] Bollobás, B., *The Art of Mathematics: Coffee Time in Memphis*, Cambridge - UK, Cambridge University Press, 2006.
- [11] Branstädt, A., Dragan, F.F., Nicolai, F., *Convexity and HHD-free Graphs*, SIAM J. Disc. Math. 1 v. **12**, pp. 119–135, 1999.

- [12] Buckley, F., Harary, F., *Distance in Graphs*, Redwood City - CA, Addison-Wesley Publishing Company, 1990.
- [13] Cáceres, J., Hernando, C., Mora, M., Puertas, M.L., Seara, C., *On Monophonic Sets in Graphs*, In: 20th British Combinatorial Conference, Durham - England, 2005.
- [14] Caro, Y., Roditty, Y., *A Note on the  $k$ -Domination Number of a Graph*, Internat. J. Math e Math Sci., **v. 13 n. 1**, pp. 205–206, 1990.
- [15] Centeno, C.C., Dourado, M.C., Szwarcfiter, J.L., *On the Convexity of Paths of Length Two in Undirected Graphs*, Eletronic Notes in Discrete Mathematics, **v. 32**, pp. 15–18, 2009.
- [16] Centeno, C.C., Dantas, S., Dourado, M.C., Rautenbach, D., Szwarcfiter, J.L., *Convex Partitions of Graphs Induced by Paths of Order Three*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, **v. 12:5**, pp. 175–184, 2010.
- [17] Centeno, C.C., Dourado, M.C., Penso, L.D., Rautenbach, D., Szwarcfiter, J.L., *Irreversible Conversion of Graphs*, Theoretical Computer Science, **v. 412**, pp. 3693–3700, 2011.
- [18] Centeno, C.C., Penso, L.D., Rautenbach, D., De Sa, V.G.P., *Immediate Versus Eventual Conversion: Comparing Geodetic and Hull Numbers in  $P_3$  Convexity*, Proceedings WG 2012.
- [19] Centeno, C.C., Penso, L.D., Rautenbach, D., De Sa, V.G.P., *Geodetic Number Versus Hull Number in  $P_3$  Convexity*, submitted.
- [20] Changat, M., Mathew, J., *On Triangle Path Convexity in Graphs*, Discrete Math. **v. 206**, pp. 91–95, 1999.
- [21] Changat, M., Mulder, H.M., Sierksma, G., *Convexities Related to Path Properties on Graphs*, Discrete Math., **v. 290**, pp. 117–133, 2005.
- [22] Chartrand, G., Harary, F., Zhang, P., *Geodetic Sets in Graphs*, Discrete Math. Graph Theory, **v. 20**, pp. 129–138, 2000.
- [23] Chartrand, G., Fink, J.F., Zhang, P., *Convexity in Oriented Graphs*, Discrete Applied Math. **v. 116**, pp. 115–126, 2002.
- [24] Chartrand, G., Wall, C.E., Zhang, P., *The Convexity Number of a Graph*, Graphs Combin., **v. 18, n. 2**, pp. 209–217, 2002.

- [25] Chartrand, G., Palmer, E.M., Zhang, P., *The Geodetic Number of a Graph: a Survey*, Congressus Numerantium, **v. 156**, pp. 37–58, 2002.
- [26] Chartrand, G., Harary, F., Zhang, P., *On the Geodetic Number of a Graph*, Networks, **v. 39, n. 1**, pp. 1–6, 2002.
- [27] Chartrand, G., Fink, J.F., Zhang, P., *The Hull Number of Oriented Graph*, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, pp. 2265–2275, 2003.
- [28] Chellali, M., *Bounds on the 2-Domination Number in Cactus Graphs*, Opuscula Mathematica, **v. 26, n. 1**, pp. 5–11, 2006.
- [29] Chepói, V., *Separation of Two Convex Sets in Convexity Structures*, J. Geometry **v. 50**, pp. 30–51, 1994.
- [30] De Vel, M. J. L. V., *Theory of Convex Structures*, Amsterdam, North-Holland, 1993.
- [31] Dourado, M. C., Protti, F., Szwarcfiter, J.L., *On the Complexity of the Geodetic and Convexity Numbers of a Graph*, Lecture Notes of the Ramanujan Mathematical Society **v. 7**, pp. 497–400, 2006.
- [32] Dourado, M. C., Protti, F., Szwarcfiter, J.L., *Algorithmic Aspects of Monophonic Convexity*, Eletronic Notes in Discrete Mathematics **v. 30**, pp. 177–182, 2008.
- [33] Dourado, M. C., Gimbel, J.G., Kratochvil, J., Protti, F., Szwarcfiter, J.L., *On the Computation of the Hull Number of a Graph*, Discrete Mathematics **v. 309, n. 18**, pp. 5668–5674, 2009.
- [34] Dourado, M.C., Protti, F., Rautenbach, D., Szwarcfiter, J.L., *On the Hull Number of Triangle Free Graphs*, Siam Journal on Discrete Mathematics **v. 23, n. 4**, pp. 2163–2172, 2010.
- [35] Domingos, P., Richardson, M., *Mining the Network Value of Customers*, In: Proceedings of the 7th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, pp. 57–66, 2001.
- [36] Dreyer Jr., P.A., Roberts, F.S., *Irreversible  $k$ -Threshold processes: Graph-Theoretical Threshold Models of the Spread of Disease and of Opinion*, Discrete Appl. Math. **v. 157**, pp. 1615–1627, 2009.
- [37] Duchet, P., *Convexity in Graphs II. Minimal Path Convexity*, J. Combin Theory Ser. B **v. 44, n. 3**, pp. 307–316, 1988.

- [38] Erdős, P., Fried, E., Hajnal, A., Milner, E.C., *Some Remarks on Simple Tournaments*, Algebra Universalis **v. 2**, pp. 238–245, 1972.
- [39] Everett, M. G., Seidman, S.B., *The Hull Number of a Graph*, Discrete Mathematics **v. 57**, pp. 217–223, 1985.
- [40] Farber, M., Jamison, R.E., *Convexity in Graphs and Hypergraphs*, SIAM Journal Algebraic and Discrete Methods **v. 7**, pp. 433–444, 1986.
- [41] Favaron, O., Hansberg, A., Volkmann, L., *On  $K$ -Domination and Minimum Degree in Graphs*, Journal of Graph Theory, pp. 33–40, 2007.
- [42] Flocchini, P., Geurts, F., Santoro, N., *Optimal Irreversible Dynamisms in Chordal Rings*, Discrete Appl. Math. **v.113**, pp. 23–42, 2001.
- [43] Flocchini, P., Královic, R., Roncato, A., Ruzicka, P., Santoro, N., *On Time Versus Size for Monotone Dynamic Monopolies in Regular Topologies*, J. Discrete Algorithms **v. 1**, pp. 129–150, 2003.
- [44] French, J., *A Formal Theory of Social Power*, Psychology Rev. **v. 63**, pp. 181–194, 1956.
- [45] Fujisawa, J., Hansberg, A., Kubo, T., Saito, A., Sugita, M., Volkmann, L., *Independence and 2-Domination in Bipartite Graphs*, Australasian Journal of Combinatorics **40**, pp. 265 – 268, 2008.
- [46] Garey, M.R. and Johnson, D.S., *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman and Company, 1979.
- [47] Gimbel, J. G., *Some Remarks on the Convexity Number of a Graph*, Graphs and Combinatorics **v. 19**, pp. 357–361, 2003.
- [48] Goles, E., Olivos, J., *Comportement périodique des fonctions à seuil binaires et applications*, Discrete Appl. Math **v. 3**, pp. 93–105, 1981.
- [49] Haglin, D.J., Wolf, M.J., *On Convex Subsets in Tournaments*, SIAM J. Disc. Math. **v. 9**, pp. 63 – 70, 1994.
- [50] Hernando, C., Mora, M., Pelayo, I.M., Seara, C., *On Geodetic and Monophonic Convexity*, In: 20th European Workshop on Computational Geometry, Sevilla (Spain), 2004.
- [51] Hernando, C., Mora, M., Pelayo, I.M., Seara, C., *On Monophonic Sets in Graph*, Journal of Combinatorial Theory series B.

- [52] Harary, F., Nieminen, J., *Convexity in Graphs*, J. Differential Geometry **v. 16**, pp. 185–190, 1981.
- [53] Hassin, Y., Peleg, D., *Distributed Probabilistic Polling and Applications to Proportionate Agreement*, Inform. and Comput. **v. 171**, pp. 248–268, 2001.
- [54] Kay, D.C., Breen, M., *Convexity and Related Combinatorial Geometry : proceedings of the second University of Oklahoma conference*, New York, M. Dekker, 1982.
- [55] Kempe, D., Kleinberg, J., Tardos, É., *Maximizing the Spread of Influence Through a Social Network*, In: Proceedings of the 9th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery and Data Mining, pp. 137–146, 2003.
- [56] Kutten, S., Peleg, D., *Fault-Local Distributed Mending*, J. Algorithms **v. 30**, pp. 144–165, 1999.
- [57] Moon, J.W., *Embedding Tournaments in Simple Tournaments*, Discrete Mathematics **v. 2**, pp. 389–395, 1972.
- [58] Muller, H., Brandstädt, A., *The NP-Completeness of Steiner Tree and Dominating Set for Chordal Bipartite Graphs*, Theoretical Computer Science **v. 53**, pp. 257–265, 1987.
- [59] Mustafa, N.H., Pekec, A., *Listen to Your Neighbors: How (not) to Reach a Consensus*, SIAM J. Discrete Math. **v. 17**, pp. 634–660, 2004.
- [60] Nieminen, J., *Characterizations of Graphs by Convex Hulls*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica **v. 10**, pp. 177–184, 1982.
- [61] Parker, D.B., Westhoff, R.F., Wolf, M.J., *Two-Path Convexity and Bipartite Tournaments of Small Rank*, Ars Combinatoria.
- [62] Parker, D.B., Westhoff, R.F., Wolf, M.J., *On Two-Path Convexity in Multipartite Tournaments*, European Journal of Combinatorics **v. 29**, pp. 641–651, 2008.
- [63] Parker, D.B., Westhoff, R.F., Wolf, M.J. *Convex Independence and the Structure of Clone-Free Multipartite Tournaments*, Discussiones Mathematicae Graph Theory **v. 29**, 2009.
- [64] Peleg, D., *Local Majorities, Coalitions and Monopolies in Graphs: a Review*, Theoret. Comput. Sci. **v. 282**, pp. 231–257, 2002.

- [65] Poljak, S., Suura, M., *On Periodical Behaviour in Societies with Symmetric Influences*, *Combinatorica* **v. 3**, pp. 119–121, 1983.
- [66] Rautenbach, D., Volkmann, L., *New Bounds on the  $k$ -Domination Number and the  $k$ -Tuple Domination Number*, *Applied Mathematics Letters* **v. 20**, pp. 98–102, 2007.
- [67] Schonmann, R.H., *On the Behavior of Some Cellular Automata Related to Bootstrap Percolation*, *Ann. Probab.* **v. 20**, pp. 174–193, 1992.
- [68] Schonmann, R.H., *Finite Size Scaling Behavior of a Biased Majority Rule Cellular Automaton*, *Physica A* **v. 167**, pp. 619–627, 1990.
- [69] Varlet, J.C., *Convexity in Tournaments*, *Bull. Société Royale des Sciences de Liège* **v. 45**, pp. 570–586, 1976.
- [70] DeLaViña, E.C., Larson, E., Pepper, R., Waller, B., *Graffiti.pc on the 2-Domination Number of a Graph*.

*No decorrer deste trabalho apresentamos alguns pensamentos de personalidades alemãs. Estes foram introduzidos nesta tese como forma de demonstrar nosso agradecimento a Lucia D. Penso e Dieter Rautenbach que muito contribuíram para este trabalho e que carinhosamente nos receberam em Ulm, Alemanha (cidade natal de Albert Einstein: "Não sei por que todos me adoram se ninguém entende minhas ideias.")*

*"A ciência sem a religião é paralítica.*

*A religião sem a ciência é cega..."*

Albert Einstein