



TÓPICOS EM B-CONTINUIDADE : OPERAÇÕES EM GRAFOS E GRAFOS DISTÂNCIA-HEREDITÁRIOS

Lucas Pierezan Magalhães

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Rio de Janeiro
Dezembro de 2012

TÓPICOS EM B-CONTINUIDADE : OPERAÇÕES EM GRAFOS E GRAFOS
DISTÂNCIA-HEREDITÁRIOS

Lucas Pierezan Magalhães

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE
SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof^a. Márcia Rosana Cerioli, D.Sc.

Prof^a. Ana Shirley Ferreira da Silva, D.Sc.

Prof. Luerbio Faria, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
DEZEMBRO DE 2012

Magalhães, Lucas Pierezan

Tópicos em b-continuidade : operações em grafos e grafos distância-hereditários/Lucas Pierezan Magalhães. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2012.

VIII, 54 p.: il.; 29, 7cm.

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2012.

Referências Bibliográficas: p. 52 – 53.

1. Coloração. 2. b-Coloração. 3. b-Continuidade.
I. Cerioli, Márcia Rosana. II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente aos meus pais, por todo carinho, conselhos, apoio e uma vida de incentivo à minha formação.

Agradeço ao meu pai, meu grande exemplo e por ter me guiado e inspirado no caminho dos números.

Agradeço à minha mãe, por todo seu amor e pela forma incondicional com que me ajuda em todos os momentos.

Agradeço à minha irmã, por quem tenho grande admiração e cujo convívio só me traz alegria.

Agradeço à minha avó e tia-avó, por minha criação e por toda a fé e bons pensamentos em mim depositados.

Agradeço à minha orientadora, professora Márcia Cerioli, por todo o empenho dedicado não só neste trabalho como em toda a minha orientação desde a primeira iniciação científica. Também sou grato por todos os ensinamentos passados neste período tão importante de minha vida.

Agradeço aos amigos e companheiros do Laboratório de Algoritmos e Combinatória, por proporcionar um ótimo ambiente de trabalho. Pelas enriquecedoras discussões acadêmicas e também pelos jogos, lanches e divertidas conversas.

Agradeço ao Programa de Engenharia de Sistemas e Computação (PESC) pela oportunidade e estrutura indispensável para a confecção deste trabalho.

Agradeço aos excelentes professores que tive na UFRJ pelas aulas e todo o conhecimento passado.

Agradeço aos membros que compõem a banca deste trabalho, Prof^a. Ana Shirley Ferreira da Silva e Prof. Luerbio Faria, por terem aceitado o convite de participar da defesa desta dissertação.

Agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela bolsa de mestrado concedida a mim de março de 2011 a fevereiro de 2012, e à Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (FAPERJ), pela Bolsa Nota 10 concedida a mim de março de 2012 a dezembro de 2012.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

TÓPICOS EM B-CONTINUIDADE : OPERAÇÕES EM GRAFOS E GRAFOS DISTÂNCIA-HEREDITÁRIOS

Lucas Pierezan Magalhães

Dezembro/2012

Orientador: Márcia Rosana Cerioli

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Uma *b-coloração* de um grafo G é uma coloração dos vértices de G em que cada classe de cor tem um vértice que é adjacente a vértices de cada uma das outras cores. Esse tipo especial de coloração foi introduzido por Irving e Manlove em 1999 com a motivação de que uma coloração que não é uma *b-coloração* pode ter seu número de cores reduzido.

O *número b-cromático* $\chi_b(G)$ de um grafo G é o maior k tal que G admite uma *b-coloração* com k cores. Diferente de outras variações do problema de coloração os valores de k para os quais um grafo admite *b-coloração* com k cores não constituem necessariamente um intervalo nos inteiros. Dizemos então que G é *b-contínuo* se este admite *b-coloração* com k cores para todo k tal que $\chi(G) \leq k \leq \chi_b(G)$.

Resultados de NP-completude já são conhecidos para o problema de decidir se um grafo é *b-contínuo* e diversos trabalhos em classes específicas de grafos vem surgindo na literatura. Neste trabalho apresentamos os conceitos básicos sobre *b-coloração* e resultados relacionados ao problema da *b-continuidade*. Trabalhamos sobre a perspectiva de operações que preservam *b-continuidade* e derivamos resultados para algumas classes de grafos, em especial a prova que grafos distância-hereditários são *b-contínuos*. Para isso, também introduzimos técnicas básicas para a manipulação de *b-colorações*.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

TOPICS ON B-CONTINUITY : GRAPH OPERATIONS AND
DISTANCE-HEREDITARY GRAPHS

Lucas Pierezan Magalhães

December/2012

Advisor: Márcia Rosana Cerioli

Department: Systems Engineering and Computer Science

A *b-coloring* of a graph G is a coloring of the vertices of G such that each color class has a vertex that is adjacent to at least one vertex of each of the other colors. This particular type of coloring was introduced by Irving and Manlove in 1999 with the motivation that a coloring that is not a b-coloring can have its number of colors reduced.

The *b-chromatic number* $\chi_b(G)$ of a graph G is the maximum number k such that G admits a b-coloring with k colors. Unlike other variations of the coloring problem the values of k for which a graph admits a b-coloring with k colors do not necessarily form an interval in the integers. We say that G is *b-continuous* if it admits a b-coloring with k colors, for all values of k such that $\chi(G) \leq k \leq \chi_b(G)$.

NP-completeness results are already known for the problem of deciding whether a graph is b-continuous and several papers on specific graph classes are appearing in the literature. In this work we present the basic concepts on b-colorings and results related to the b-continuity problem. We work on the perspective of graph operations that preserve b-continuity and derive results for some graph classes, in particular we show that the distance-hereditary graphs are b-continuous. For this, we also introduce basic techniques for manipulating b-colorings.

Sumário

Lista de Figuras	viii
1 Introdução	1
2 Definições	4
2.1 Definições de Teoria dos Grafos	4
2.2 Classes de Grafos	6
2.2.1 Grafos Cordais	6
2.2.2 Cografos	7
2.2.3 Grafos Distância-hereditários	8
2.2.4 Grafos Periplanares	10
3 b-Coloração e b-Continuidade	12
3.1 Introdução	12
3.2 Número b-Cromático	14
3.3 b-Continuidade	16
4 Resultados	20
4.1 Recoloração e Dominância	20
4.2 b-Continuidade dos Distância-hereditários	23
4.2.1 Propriedades Estruturais dos Distância-hereditários	24
4.2.2 Prova do Teorema 8	26
4.3 b-Continuidade e Operações em Grafos	32
4.3.1 Adição de Simplicial	33
4.3.2 Adição de Vértice Gêmeo	35
4.3.3 Identificar por Cliques	38
4.3.4 Grafos Periplanares	48
5 Conclusões	50
Referências Bibliográficas	52

Lista de Figuras

2.1	Exemplo de grafo cordal	7
2.2	As operações σ_1 , σ_2 e σ_3	9
2.3	Sequência de operações gerando um grafo.	9
2.4	Exemplo de grafo planar	11
2.5	Grafo periplanar	11
3.1	Exemplo de b-coloração	13
3.2	Exemplo do número b-cromático	15
3.3	Grafo b-contínuo	17
3.4	Grafo não b-contínuo	18
3.5	Não existência de 3-b-coloração	18
4.1	Transformação descrita pelo Lema 6.	26
4.2	Estrutura de G	27
4.3	Estrutura de P	30
4.4	Contraexemplo para adição de gêmeo-falso	35
4.5	b-Colorações de G^*	36
4.6	b-Colorações de $G' = \sigma_2 \cdot G^*$	36
4.7	Contraexemplo para adição de gêmeo-verdadeiro	37
4.8	Exemplo da operação $iden()$	39
4.9	Hipóteses do Lema 9	41
4.10	Caso 1 do Lema 10	42
4.11	Caso 2.1 do Lema 10	43
4.12	Caso 2.2 do Lema 10	44
4.13	Grafo planar não b-contínuo	48
4.14	Decomposição do ciclo periplanar	49

Capítulo 1

Introdução

Coloração em grafos é um dos temas mais importantes da teoria dos grafos. Neste campo de estudo o interesse é colorir os vértices de um grafo de forma que vértices ligados recebam cores distintas. O famoso problema das 4 cores, que diz respeito a coloração de vértices de grafos planares, impulsionou pesquisas na área por mais de 100 anos. Além disso, diversas aplicações na área de alocação de tarefas são modeladas com o conceito de coloração de grafos. Dado esse amplo espectro de aplicações e sua relação com diversos conceitos em matemática discreta, muitas variações já foram propostas e estudadas na literatura [21].

Irving e Manlove, em 1999, introduziram um tipo especial de coloração de vértices denominado *b-coloração* [16]. A motivação para esse novo conceito reside no fato de que colorações que não são *b-colorações* podem ter seu número de cores reduzido por uma determinada heurística gulosa. Portanto, determinar o pior caso de funcionamento dessa heurística nada mais é que determinar o maior número de cores que podemos ter em uma *b-coloração* do dado grafo. Nesse mesmo trabalho mostra-se que o problema de maximizar o número de cores de uma *b-coloração* é NP-difícil para grafos quaisquer enquanto que um algoritmo polinomial é desenvolvido para árvores.

Desde então, diversos problemas e conceitos relacionados a *b-coloração* vem sendo introduzidos e estudados. Além do próprio problema do número *b-cromático*, foram criados os conceitos de *b-continuidade* [20] e *grafos b-perfeitos* [15]. Alguns resultados de NP-completude já foram obtidos para alguns desses novos problemas [3, 16] o que vem motivando muitos trabalhos para classes específicas de grafos [6, 17, 18]. Além disso, propriedades de *b-colorações* vem sendo usadas em aplicações nas áreas de sistemas distribuídos e clusterização [9–11].

Diferente de outras variações do problema de coloração, os valores de k para os quais um grafo admite *b-coloração* com k cores não constituem necessariamente um intervalo nos inteiros. Por exemplo, um grafo pode admitir *b-coloração* com 2 cores e com 4 cores porém não admitir nenhuma *b-coloração* com 3 cores. Esse tipo

de situação representa um desafio a mais no estudo de problemas relacionados a b-coloração já que a não existência de uma b-coloração com um determinado número de cores não implica na não existência de b-colorações com mais ou menos cores. Essa propriedade foi primeiramente observada por Kratochvíl et al, em 2002 [20], o que motivou o conceito de b-continuidade. Grafos *b-contínuos* são exatamente aqueles para os quais os valores de k , tal que o grafo admite b-coloração com k cores, constituem um intervalo contínuo de números inteiros. Foi mostrado que determinar se um grafo qualquer é b-contínuo é um problema NP-completo [3]. Dessa forma, torna-se interessante considerar classes específicas de grafos e muitos trabalhos vem sendo desenvolvidos nesse sentido. De forma geral, vem se mostrando que determinadas classes de grafos são b-contínuas, no sentido de que todos os grafos daquela classe são b-contínuos, ou ainda que determinadas propriedades estruturais garantem b-continuidade. Algumas das classes já estudadas nesse sentido são: subclasses de grafos planares [22, 23], cografos [6], grafos de Kneser [1, 12, 18] e grafos cordais [22].

Neste trabalho contribuímos para o estado da arte na área ampliando o estudo de classes b-contínuas para a classe dos grafos distância-hereditários, generalizando resultados anteriores encontrados na literatura. Além disso, realizamos um estudo da propriedade de b-continuidade sobre a perspectiva de operações (em grafos) que preservam b-continuidade. Mais precisamente, buscamos identificar operações elementares em grafos que, quando aplicadas em um grafo b-contínuo, geram um grafo b-contínuo. Com essa nova abordagem obtivemos alguns resultados estruturais, que possibilitam a construção de grafos b-contínuos, assim como desenvolvemos ferramentas teóricas que podem ser usadas para estabelecer b-continuidade em classes específicas de grafos. Como exemplo concreto dessa abordagem, relacionamos b-continuidade com a decomposição por componentes biconexas de um grafo e assim mostramos que grafos periplanares são b-contínuos. Não menos importante, no desenvolvimento desses resultados introduzimos técnicas básicas para manipular b-colorações, principalmente no contexto de estabelecer b-continuidade. Acreditamos que essas técnicas e estratégias usadas podem ser adaptadas para outros problemas relacionados a b-coloração.

No próximo capítulo apresentamos as definições básicas de teoria dos grafos e as caracterizações das principais classes de grafos consideradas neste trabalho. No Capítulo 3 são discutidos os principais conceitos relacionados a b-coloração onde revisamos alguns resultados presentes na literatura. No Capítulo 4 apresentamos nossos resultados. Este é dividido em 3 partes sendo a primeira sobre técnicas básicas que usamos nas demonstrações posteriores. Nas partes seguintes encontram-se nossos resultados para os grafos distância-hereditários e o desenvolvimento da abordagem por operações que preservam b-continuidade. Concluimos com o Capítulo 5

onde é feito um breve resumo dos resultados obtidos e discutimos alguns pontos que foram deixados em aberto para trabalhos futuros. Parte dos resultados presentes nesta dissertação foram apresentados no *11th Cologne-Twente Workshop on Graphs and Combinatorial Optimization*, que ocorreu em Maio de 2012 na cidade de Munique, no trabalho *On b -continuity of Distance-Hereditary Graphs*.

Capítulo 2

Definições

Neste capítulo enunciamos as definições e notações de teoria dos grafos usadas no restante do trabalho. Além disso, dedicamos uma seção para as definições e caracterizações das principais classes de grafos que estão presentes neste trabalho.

2.1 Definições de Teoria dos Grafos

Todos os grafos considerados neste trabalho são simples e finitos. Em geral, as definições e notações usadas aqui encontram-se em [5].

Um grafo $G = (V, E)$ é determinado por seu conjunto de vértices V e de arestas E . Se $uv \in E(G)$ dizemos que u e v são *adjacentes* (ou *vizinhos*) em G . Denotamos por $N(v)$ a *vizinhança* de v , ou seja, o conjunto de vizinhos de v e $d(v) = |N(v)|$ é o *grau* de v em G . Quando queremos incluir v em sua vizinhança, escrevemos $N[v]$ para indicar a *vizinhança fechada* de v , isso é $N[v] = N(v) \cup \{v\}$. Dados dois vértices u e v de G dizemos que estes são *gêmeos-falsos* se $N(u) = N(v)$. Já no caso em que $N[u] = N[v]$ dizemos então que u e v são *gêmeos-verdadeiros*. O maior grau que um vértice assume em um grafo G é denotado por $\Delta(G)$ assim como o menor grau é $\delta(G)$.

Um *caminho* P em G é uma sequência de vértices distintos v_1, v_2, \dots, v_k tal que $v_i v_{i+1} \in E(G)$, $1 \leq i < k$. Os vértices v_1 e v_k são chamados *extremidades* do caminho. O tamanho de um caminho é o número de arestas consecutivas deste e portanto um caminho com n vértices tem tamanho $n - 1$. Se $k > 2$ e $v_k v_1 \in E(G)$ temos que P é um *ciclo*. Denotamos por P_n o grafo que é um caminho composto por n vértices. Uma *clique* é um conjunto de vértices que são dois a dois adjacentes e denotamos por K_n o grafo com n vértices tal que $V(K_n)$ é uma clique. Entendemos por tamanho de uma clique o número de vértices que pertencem a clique. Um conceito complementar ao de clique é o de conjunto independente. Um *conjunto independente* é um conjunto de vértices que são dois a dois não adjacentes.

A *cintura* de um grafo G , denotada por $g(G)$, é o tamanho do menor ciclo de

G . Uma *corda* de um ciclo é uma aresta entre vértices não consecutivos no ciclo. Um grafo G é dito *conexo* se para quaisquer dois vértices u e v em $V(G)$ existe um caminho que liga u e v , isso é, tem u e v como extremidades. Um grafo que não é conexo é dito *desconexo*. A *distância* entre dois vértices u e v , denotado por $dist(u, v)$, é o tamanho do menor caminho que liga u e v e caso não exista esse caminho, dizemos que $dist(u, v) = \infty$. Quando queremos especificar que a função distância diz respeito ao grafo G escrevemos $dist_G(u, v)$. De forma geral, quando queremos especificar que um parâmetro P diz respeito ao grafo G usamos P_G . Por exemplo, $N_G(v)$ denota a vizinhança do vértice v no grafo G .

Um grafo conexo e acíclico é uma *árvore*. Um grafo G que pode ter seu conjunto de vértices $V(G)$ particionado em dois conjuntos não vazios V_1 e V_2 de tal forma que não existe aresta $uv \in E(G)$ com $\{u, v\} \subseteq V_1$ ou $\{u, v\} \subseteq V_2$ é chamado de grafo *bipartido*. Outra classe de grafo que encontramos neste trabalho são os grafos de Kneser. O *grafo de Kneser* $K(p, q)$ é o grafo cujo conjunto de vértices é composto por todos os subconjuntos de q elementos do conjunto $\{1, 2, \dots, p\}$ e dois vértices são adjacentes se seus respectivos conjuntos são disjuntos.

Em determinados momentos queremos considerar apenas algumas partes de um grafo G e não seu conjunto de vértices por inteiro. Nesses momentos utilizamos o conceito de subgrafo. Um grafo H é dito *subgrafo* de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$. Um subgrafo H de G é dito *subgrafo induzido* se H contém todas as arestas presentes em G entre vértices de H , ou seja, $\forall u, v \in V(H)$ se $uv \in E(G)$ então $uv \in E(H)$. Um procedimento comum em teoria dos grafos é considerar subgrafos induzidos por um conjunto de vértices S , de forma que o grafo $G[S]$ é o subgrafo induzido H , de G , tal que $V(H) = S$. Outro uso de subgrafos induzidos se dá pela notação $G - S$, onde S é um conjunto de vértices. Nesse caso, o grafo $G - S$ é o subgrafo induzido $G[V(G) \setminus S]$. Além disso, quando $S = \{v\}$ simplificamos $G - \{v\}$ por $G - v$.

Uma *componente conexa* de um grafo G é um conjunto $S \subseteq V(G)$ maximal para a propriedade de que $G[S]$ é conexo. Dado um grafo conexo G dizemos que $v \in V(G)$ é uma *articulação* de G se o grafo $G - v$ é desconexo. Podemos generalizar esse conceito para grafos não conexos, onde v é uma articulação se a quantidade de componentes conexas de $G - v$ é maior que em G . Uma *componente biconexa* de G é um conjunto $S \subseteq V(G)$ maximal para a seguinte propriedade : $G[S]$ não tem articulação. O conceito de *articulação* pode ser generalizado pelo conceito de clique separadora. Dizemos que uma clique C de G é uma *clique separadora* se $G - C$ tem mais componentes conexas do que G . Veja que uma articulação é uma clique separadora de cardinalidade 1.

Em uma *decomposição por cliques separadoras* de um grafo G este é decomposto em subgrafos induzidos menores obtidos da remoção de uma clique separadora. Mais

precisamente, seja C uma clique separadora de G tal que em $G - C$ temos as componentes conexas S_1, S_2, \dots, S_t . Neste caso o grafo G é decomposto nos subgrafos $G_1 = G[S_1 \cup C], G_2 = G[S_2 \cup C], \dots, G_t = G[S_t \cup C]$. A decomposição prossegue aplicando-se a mesma ideia recursivamente para os grafos G_1, G_2, \dots, G_t até que se obtenham grafos sem clique separadora. Quando, no decorrer da decomposição, obtemos um subgrafo induzido G_i que não possui clique separadora dizemos que G_i é um *átomo* da decomposição por cliques separadoras.

Uma k -coloração de $G = (V, E)$ ou, equivalentemente, uma *coloração* com k cores, é uma função $c : V \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $uv \in E \Rightarrow c(u) \neq c(v)$. Em outras palavras, é uma atribuição de cores (numeradas de 1 a k) aos vértices de G tal que vértices adjacentes não têm a mesma cor. Por questões de simplicidade, a imagem da função c não precisa ser necessariamente o conjunto $\{1, 2, \dots, k\}$ mas sim possuir uma bijeção com este conjunto. Por exemplo, se em uma coloração temos vértices coloridos somente com as cores 1, 2 e 4 trata-se então de uma 3-coloração. Vale notar também que a função c deve ser sobrejetiva de forma que se c é uma k -coloração de G então o conjunto $\{c(v) \mid v \in V(G)\}$ deve ter cardinalidade k . Nesse contexto, o conjunto de vértices coloridos com uma determinada cor é denominado a *classe da cor*. Por exemplo, a classe da cor 2 é o conjunto de vértices coloridos com a cor 2. Sendo uma coloração c uma função utilizamos a notação $c(S)$, onde $S \subseteq V(G)$, para indicar o conjunto $\{c(x) \mid x \in S\}$. Dessa forma, por exemplo, $c(V(G))$ indica o conjunto de cores em uma coloração c de G .

O *número cromático* de G , $\chi(G)$, é o menor k para o qual existe uma k -coloração de G . Determinar o número cromático de um grafo é um problema clássico da teoria dos grafos com diversas aplicações [21]. No entanto, para um grafo G qualquer, determinar $\chi(G)$ é um problema NP-difícil [19].

2.2 Classes de Grafos

Neste seção apresentamos as definições e caracterizações das principais classes presentes nos resultados do Capítulo 4.

2.2.1 Grafos Cordais

Um grafo G é dito *cordal* se todo ciclo de tamanho maior ou igual a 4 tem pelo menos uma corda. Por esta definição temos que a classe dos grafos cordais é fechada para subgrafos induzidos já que ao remover um vértice não são criados novos ciclos. Esta classe de grafos foi definida e estudada por muitos autores em contextos diferentes e possui diversas caracterizações [7]. Observe por exemplo a Figura 2.1. Podemos facilmente verificar que o grafo da Figura 2.1(a) não possui

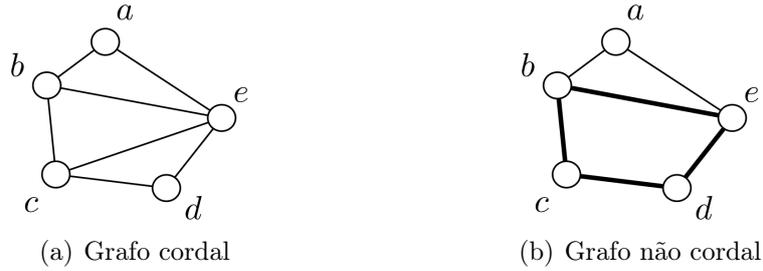


Figura 2.1: Exemplo de grafo cordal

ciclos sem cordas e portanto é um grafo cordal. Já o grafo da Figura 2.1(b) tem um ciclo sem cordas de tamanho 4 em destaque e portanto não é um grafo cordal.

Vamos utilizar aqui a caracterização dos grafos cordais em termos de vértices simpliciais. Um vértice $v \in V(G)$ é *simplicial* se sua vizinhança é uma clique. Um *esquema de eliminação perfeita* de um grafo G é uma ordem v_1, v_2, \dots, v_n de seus vértices tal que, para todo $1 \leq i \leq n$, v_i é simplicial no grafo $G[\{v_1, v_2, \dots, v_i\}]$. Em outras palavras, v_i é simplicial no subgrafo obtido de G desconsiderando-se todos os vértices v_j com $j > i$. Por exemplo, na Figura 2.1 a ordem e, d, c, b, a é um esquema de eliminação perfeita do grafo ilustrado. Os grafos cordais podem ser assim caracterizados:

Teorema 1 ([7]). *Um grafo G é cordal se, e somente se, possui um esquema de eliminação perfeita.*

2.2.2 Cografos

Um *cografo* é um grafo que não possui P_4 como subgrafo induzido. Assim como discutido acima para os grafos cordais, por ter essa definição em termos de subgrafos proibidos, os cografos formam uma classe de grafos fechada por subgrafos induzidos. Como as outras classes que apresentamos neste capítulo, os cografos possuem diversas caracterizações e também foram estudados paralelamente por autores em contextos distintos [7]. Usamos aqui a caracterização baseada nas operações de união disjunta e *join* que são definidas a seguir.

Definição 1. A operação de *união disjunta*, denotada por $+$, é aquela que, dados dois grafos G_1 e G_2 com $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, tem como resultado o novo grafo $G = G_1 + G_2$ onde:

- $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$
- $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$

Definição 2. A operação de *join*, denotada por \wedge , é aquela que, dados dois grafos G_1 e G_2 com $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$, tem como resultado o novo grafo $G = G_1 \wedge G_2$ onde:

- $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$
- $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2) \cup \{uv \mid u \in V(G_1), v \in V(G_2)\}$

O seguinte teorema dá uma caracterização recursiva da classe dos cografos.

Teorema 2 ([7]). *Um grafo G é um cografo se, e somente se, G é um único vértice ou G pode ser obtido como união disjunta ou como join de dois cografos menores.*

O Teorema 2 nos diz que a classe dos cografos é a menor classe de grafos que contém K_1 e é fechada pelas operações de união disjunta e *join*.

2.2.3 Grafos Distância-hereditários

Os grafos distância-hereditários foram definidos e estudados primeiramente em [14]. Um grafo G é *distância-hereditário* se para todo subgrafo induzido conexo H de G as distâncias em H são iguais que as em G . Isto é, para todo subgrafo induzido conexo H de G , $dist_H(u, v) = dist_G(u, v) \forall u, v \in V(H)$. Como o próprio nome diz, trata-se da classe de grafos para o qual a distância entre vértices é uma propriedade hereditária e portanto é uma classe fechada por subgrafos induzidos.

Neste trabalho usaremos uma caracterização da classe dos grafos distância-hereditários, que se encontra em [2], baseada em três operações que nomeamos de σ_1, σ_2 e σ_3 . Essas operações modificam o grafo da seguinte maneira:

Definição 3. Seja G um grafo e $v \in V(G)$ e $u \notin V(G)$. As operações σ_1, σ_2 e σ_3 criam novos grafos $G_1 = \sigma_1(G, v)$, $G_2 = \sigma_2(G, v)$ e $G_3 = \sigma_3(G, v)$ da seguinte forma:

- $V(G_1) = V(G) \cup \{u\}$ e $E(G_1) = E(G) \cup \{uv\}$.
- $V(G_2) = V(G) \cup \{u\}$ e $E(G_2) = E(G) \cup \{uw \mid w \in N_G(v)\}$.
- $V(G_3) = V(G) \cup \{u\}$ e $E(G_3) = E(G) \cup \{uw \mid w \in N_G(v)\} \cup \{uv\}$.

A operação σ_1 adiciona um vértice de grau 1 ao grafo G enquanto que a operação σ_2 adiciona o que é chamado de gêmeo-falso de v . A operação $\sigma_3(G, v)$ é semelhante a operação $\sigma_2(G, v)$ sendo que nessa adicionamos também a aresta uv o que torna u um gêmeo-verdadeiro de v . Quando não queremos especificar qual operação foi aplicada usamos apenas σ e quando não estamos interessados no vértice v escrevemos $G' = \sigma \cdot G$ para indicar $G' = \sigma(G, v)$ para algum v qualquer. Algumas vezes, quando

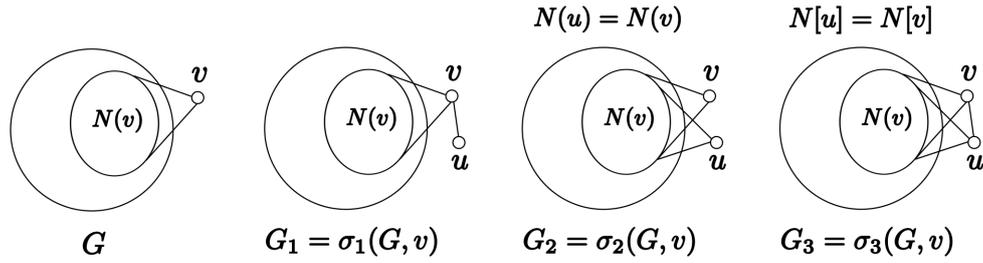


Figura 2.2: As operações σ_1 , σ_2 e σ_3 .

for claro pelo contexto, consideramos que as operações alteram o próprio grafo G , ou seja, $G = \sigma(G, v)$.

A seguinte caracterização dos grafos distância-hereditários é muito utilizada para o desenvolvimento de algoritmos eficientes na classe:

Teorema 3 (Bandelt e Mulder [2]). *Um grafo G é distância-hereditário se, e somente se, G pode ser gerado, começando por um único vértice, por uma sequência de aplicações das operações σ_1 , σ_2 e σ_3 .*

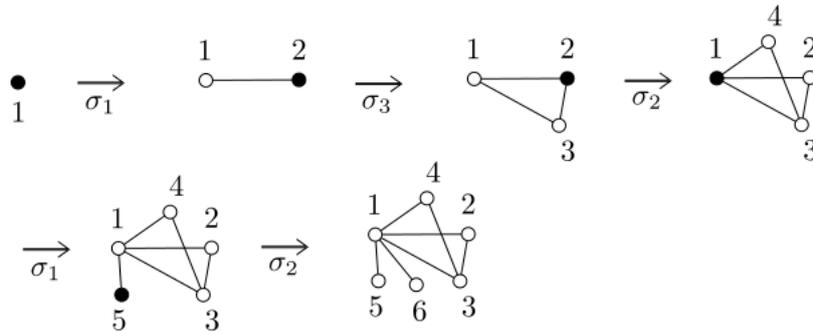


Figura 2.3: Sequência de operações gerando um grafo.

Esta caracterização dá um método para construir grafos distância-hereditários e todo grafo distância-hereditário pode ser construído dessa forma. Considere, por exemplo, a sequência de grafos na Figura 2.3. A cada iteração realizamos uma operação do tipo σ_1 , σ_2 ou σ_3 em um vértice escolhido arbitrariamente no grafo anterior. Além disso, iniciamos com o K_1 , o grafo com um único vértice. Mais precisamente temos que $G_1 = K_1$, $G_2 = \sigma_1(G_1, 1)$, $G_3 = \sigma_3(G_2, 2)$, $G_4 = \sigma_2(G_3, 2)$, $G_5 = \sigma_1(G_4, 1)$, $G_6 = \sigma_2(G_5, 5)$. Pelo Teorema 3, esta sequência de operações é então uma comprovação de que G_6 é distância-hereditário.

É interessante considerar as subclasses dos distância-hereditários que obtemos quando nos restringimos ao uso de apenas uma ou duas das operações descritas. Por exemplo, se nos permitimos utilizar somente a operação σ_1 para construir o grafo, não é difícil ver que teremos uma árvore em cada iteração do processo. Além disso, é fácil ver que toda árvore pode ser gerada dessa forma. Portanto, se nos

Operações Permitidas	Classe de grafo gerada
σ_1	Árvores
σ_2	Grafos totalmente desconexos
σ_3	Grafos completos
σ_1, σ_2	Bipartido \cap Distância-hereditário
σ_1, σ_3	Subclasse de Cordal \cap Distância-hereditário
σ_2, σ_3	Cografo
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Distância-hereditários

Tabela 2.1: Classes geradas por $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$

restringimos a operação σ_1 teríamos uma caracterização para a classe das árvores análoga a do Teorema 3. Neste caso, dizemos que a *classe de grafos gerada* (começando de um único vértice) usando-se somente a operação σ_1 é a classe das árvores. De forma análoga, quando usamos somente a operação σ_2 geramos a classe dos grafos totalmente desconexos (sem arestas) enquanto que se nos restringimos a usar somente a operação σ_3 geramos a classe dos grafos completos. Exemplos mais interessantes são obtidos ao considerarmos os grafos gerados por duas das três operações descritas. Os resultados conhecidos estão resumidos na Tabela 2.1 [2]:

Essa tabela deve ser interpretada da seguinte forma: Um grafo G está na classe “Bipartido \cap Distância-hereditário” se, e somente se, G pode ser gerado a partir do K_1 por uma sequência de operações do tipo σ_1 ou σ_2 . Note que a classe de grafos gerada pelas operações σ_2 e σ_3 é exatamente a classe dos cografos. Isso indica não só que a classe dos cografos é uma subclasse dos grafos distância-hereditários como também descreve outra caracterização dessa classe.

2.2.4 Grafos Periplanares

Os grafos periplanares, também conhecidos como grafos *outerplanares*, constituem uma famosa subclasse dos grafos planares e para defini-los precisaremos primeiro de algumas definições de grafos planares.

Um grafo é *planar* se possui uma representação gráfica no plano onde não ocorre cruzamento de arestas. Informalmente, uma representação gráfica no plano de um grafo nada mais é que um desenho do grafo no plano onde vértices são representados por pontos e arestas por curvas com extremidades nos vértices. Uma representação sem cruzamento de arestas, ou seja, sem que duas curvas se interceptem fora de um vértice, é chamada de *representação planar*. Por exemplo, na Figura 2.4(a) temos uma representação gráfica do K_4 . Como podemos observar, neste representação

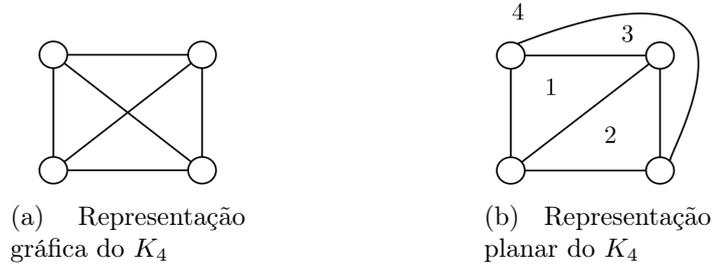


Figura 2.4: Exemplo de grafo planar

existe cruzamento de arestas e portanto não é uma representação planar. Porém K_4 é um grafo planar, como podemos observar pela sua representação planar ilustrada na Figura 2.4(b). Dado uma representação planar de um grafo nos referimos as *faces* como sendo as regiões delimitadas pelas arestas. Na Figura 2.4(b) temos uma representação planar com 4 faces. Note que a face 4 representa a região externa ao desenho e é chamada de *face externa*. Quando é claro pelo contexto, entendemos uma face como sendo o conjunto de vértices que interceptam a região da face. Nesse contexto, podemos dizer que a face 1 contém 3 vértices ou, equivalentemente, tem tamanho 3.

Agora sim, um grafo é *periplanar* se possui uma representação planar com uma face contendo todos os seus vértices. Por exemplo, na representação planar da Figura 2.4(b) não existe nenhuma face que contenha todos os vértices e pode-se mostrar que não existe representação planar do K_4 com tal propriedade. Portanto, K_4 não é um grafo periplanar. Já no grafo ilustrado na Figura 2.5 podemos facilmente verificar que a face externa contém todos os vértices e então trata-se de um grafo periplanar. Dado um grafo periplanar sempre podemos obter uma representação planar deste onde a face externa contém todos os vértices.

A caracterização dos grafos periplanares que utilizaremos é um fato bem conhecido na literatura e vêm diretamente da definição da classe. Esta caracterização está expressa no seguinte teorema.

Teorema 4 ([25]). *Um grafo G é periplanar se, e somente se, toda componente biconexa de G , com mais do que 1 vértice, é uma aresta ou um ciclo que pode ser representado no plano de tal forma que suas cordas não se cruzam.*

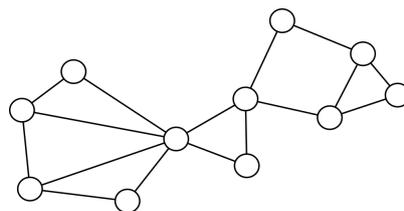


Figura 2.5: Grafo periplanar

Capítulo 3

b-Coloração e b-Continuidade

Neste capítulo apresentamos os conceitos básicos relacionados a b-coloração, principais fundamentos para este trabalho. Introduzimos o conceito de b-coloração, número b-cromático e b-continuidade enunciando os principais resultados encontrados na literatura acerca destes tópicos.

3.1 Introdução

Uma definição fundamental no estudo de b-colorações é o de vértice dominante (também chamado de *b-dominante* ou *b-vértice*) que enunciamos a seguir :

Definição 4. Dado um grafo G e uma coloração c de seus vértices, dizemos que um vértice $v \in V(G)$ é *dominante* se v é adjacente a pelo menos um vértice de cada uma das outras cores que não a sua, isso é $c(N(v)) = c(V(G)) \setminus \{c(v)\}$.

Dado uma coloração c de G e uma cor $A \in c(V(G))$ dizemos que a cor A tem um vértice dominante se existe algum vértice $v \in V(G)$ tal que v é dominante e $c(v) = A$. Considere, por exemplo, o grafo e a atribuição de cores dados na Figura 3.1(a). Ela é uma 3-coloração pois são usadas 3 cores e vértices adjacentes não recebem a mesma cor. Nessa coloração, o vértice d é dominante pois é adjacente a pelo menos um vértice de cada cor diferente da sua própria, ou seja, cores 2 e 3. Já o vértice a não é dominante nesta coloração pois não é adjacente a nenhum vértice de cor 3. Da mesma forma, o vértice f não é dominante pois não é adjacente a nenhum vértice de cor 1. Portanto, não existe vértice dominante da cor 2, ou em outras palavras, a cor 2 não tem dominantes.

Definição 5. Dado um grafo G e uma coloração c de seus vértices, dizemos que c é uma *b-coloração* se toda classe de cor em c possui pelo menos um vértice dominante.

Usando a Definição 5 concluímos que a coloração que encontramos na Figura 3.1(a) não é uma b-coloração pois a cor 2 não tem vértices dominantes. Já

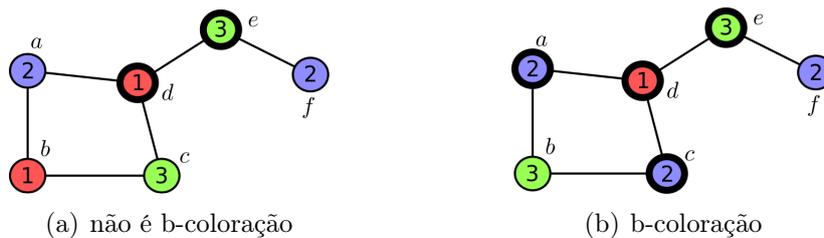


Figura 3.1: Exemplo de b-coloração

na coloração da Figura 3.1(b) podemos facilmente verificar que cada classe de cor possui pelo menos um vértice dominante e portanto é uma b-coloração com 3 cores, ou 3-b-coloração.

O conceito de b-coloração foi introduzido por Irving e Manlove em [16]. A motivação para tal reside no fato de que uma coloração que não é uma b-coloração pode ter seu número de cores reduzido. Mais especificamente: dado um grafo G e uma coloração c de seus vértices, se existe uma cor em c que não possui dominantes então essa cor pode ser removida da coloração, respeitando-se a restrição de que vértices adjacentes tenham cores diferentes. O procedimento para remover uma cor sem dominantes é estudado com detalhes na Seção 4.1 mas discutimos aqui sua ideia básica. Pela definição de vértice dominante, um vértice que não é dominante possui alguma cor, diferente da sua própria, que não aparece em sua vizinhança. Dessa forma, um vértice não dominante pode ter sua cor trocada por essa cor ausente em sua vizinhança, gerando uma nova coloração. Portanto, se uma cor não possui vértices dominantes, pode-se simultaneamente trocar as cores de todos os vértices dessa classe de cor. Por exemplo, na coloração da Figura 3.1(a) podemos trocar a cor do vértice a para 3 e a cor do vértice f para 1, obtendo então uma nova coloração sem a presença da cor 2. Logo, uma b-coloração nada mais é que uma coloração que não pode ser reduzida por esse procedimento de remover cores sem dominantes.

Além desta motivação inicial, vêm surgindo na literatura aplicações que utilizam b-coloração nas áreas de *Clusterização* e *Data Mining*. Em algoritmos de clusterização é comum o interesse de particionar elementos de um conjunto de forma que elementos com características semelhantes fiquem em um mesmo grupo, também chamado de *cluster*. Uma das modelagem utilizadas para este problema consiste em associar cada elemento do conjunto à um vértice em um grafo e adiciona-se arestas entre vértices que não podem ser considerados semelhantes. Numa coloração desse grafo cada classe de cor representa um *cluster*. Desta forma, uma coloração passa a representar uma partição onde elementos não semelhantes pertencem a *clusters* distintos. Esta propriedade é desejável porém não necessariamente agrupa elementos semelhantes. Já em uma b-coloração temos uma restrição adicional. Isso porque, cada vértice dominante passa a representar um elemento do *cluster* que, por ser

adjacente a vértices de todas as outras cores, possui disparidade com elementos de todos os demais *clusters*. Além disso, todos os *clusters* possuem um vértice dominante. Esta propriedade vem se mostrando útil para grandes sistemas distribuídos e redes, por exemplo, em [10] é proposto um algoritmo de roteamento em redes baseado nessa propriedade enquanto que em [9] é proposto um sistema de classificação de *web services* baseado em b-coloração.

Nos últimos anos diversos problemas e conceitos derivados de b-coloração vem sendo propostos e estudados na literatura. Dentre eles, podemos destacar o problema do *número b-cromático* e o conceito de *b-continuidade*. Nas próximas seções definimos e discutimos com mais detalhes estes tópicos.

3.2 Número b-Cromático

Como já observado, uma coloração que possui uma cor sem vértices dominantes pode ter essa cor removida da coloração, obtendo-se uma nova coloração com menos cores. A aplicação recorrente desse procedimento dá origem a uma heurística para obter colorações com um número reduzido de cores. De fato, essa heurística sempre produz como resultado uma b-coloração. Tendo isso em mente, temos o seguinte fato:

Fato 1. Toda coloração mínima de um grafo é também uma b-coloração.

Se a coloração mínima não fosse uma b-coloração, poderíamos aplicar o procedimento para remover uma cor sem dominantes obtendo uma coloração com menos cores, o que seria uma contradição. Essa simples observação já nos mostra que, dado um grafo G , sempre existe uma b-coloração de G , assim como sempre existe uma coloração com $\chi(G)$ cores. Além disso, torna-se claro que o problema de minimizar o número de cores de uma b-coloração é exatamente o problema de determinar o número cromático do grafo. Portanto, temos o seguinte fato.

Fato 2. O problema de decidir se um dado grafo G admite b-coloração com k cores, para um inteiro k dado como entrada, é NP-completo.

Na realidade, o problema que se faz interessante é determinar a maior diferença possível entre o número de cores de uma coloração mínima e o número de cores de uma coloração obtida pela heurística descrita, para um mesmo grafo. Com essa motivação, Irving e Manlove, no mesmo artigo onde introduziram o conceito de b-coloração, também definiram o *número b-cromático* de um grafo.

Definição 6. O *número b-cromático* de um grafo G , denotado por $\chi_b(G)$, é o maior inteiro k tal que G admite uma b-coloração com k cores.

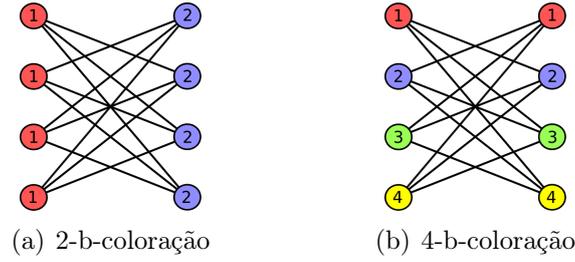


Figura 3.2: Exemplo do número b-cromático

Para ilustrar essa definição, considere por exemplo o grafo da Figura 3.2. Trata-se de um grafo bipartido completo menos um emparelhamento perfeito, que denotaremos por $K_{4,4}^*$. Na Figura 3.2(a), temos uma 2-coloração do $K_{4,4}^*$, que também é uma coloração mínima pois $\chi(K_{4,4}^*) = 2$. Pelo Fato 1, sabemos que essa coloração é também uma b-coloração e, na realidade, não é difícil verificar que todos os vértices são dominantes nessa coloração. Portanto, dessa informação sabemos que $\chi_b(K_{4,4}^*) \geq 2$. Já na Figura 3.2(b) tem-se uma 4-coloração do $K_{4,4}^*$ que também é uma b-coloração pois, assim como na coloração anterior, todos os vértices são dominantes. Logo, pela existência de uma b-coloração com 4 cores, sabemos que $\chi_b(K_{4,4}^*) \geq 4$. Para determinar o número b-cromático desse grafo é preciso saber se existem b-colorações com mais do que 4 cores. Para isto, observamos que, um vértice dominante em uma b-coloração com 5 ou mais cores deve ter grau pelo menos 4, para que possa ser adjacente a vértices de todas as outras cores que não a sua. Dessa simples observação, concluímos que não existe b-coloração com mais do que 4 cores do $K_{4,4}^*$, pois $\Delta(K_{4,4}^*) = 3$. Portanto $\chi_b(K_{4,4}^*) = 4$.

O argumento sobre o grau dos vértices que utilizamos para mostrar que $\chi_b(K_{4,4}^*) \leq 4$ pode ser facilmente generalizado e dá origem a um limite superior para o número b-cromático. De fato, dado uma k -b-coloração de um grafo G , temos que cada classe de cor deve ter pelo menos um vértice dominante. Sejam v_1, v_2, \dots, v_k vértices tal que v_i é um dominante da cor i , $1 \leq i \leq k$. Por ser dominante, v_i é adjacente a pelo menos um outro vértice de cada uma das outras cores que não a sua, logo $d(v_i) \geq k - 1$, $1 \leq i \leq k$. Concluímos que se um grafo G está b-colorido com k cores então existem k vértices com grau maior ou igual a $k - 1$. Define-se como $m(G)$ o maior k tal que existem k vértices de G com grau maior ou igual a $k - 1$. Da discussão anterior, observamos que se G pode ser b-colorido com k cores então $m(G) \geq k$ e portanto :

$$\chi_b(G) \leq m(G)$$

O parâmetro $m(G)$ pode ser computado eficientemente através da sequência de graus do grafo. Para tal, considerando a sequência de graus ordenada de forma decrescente, $d(v_1) \geq d(v_2) \geq \dots \geq d(v_n)$, temos que $m(G) = \max\{i \mid d(v_i) \geq i - 1\}$.

O limite superior $m(G)$ foi estabelecido em [16] onde mostra-se que o problema de determinar se um grafo G pode ser b-colorido com $m(G)$ cores é um problema NP-completo. Sabe-se que esse problema continua NP-completo mesmo quando restrito a classe dos grafos bipartidos [20] e cordais [13]. Por outro lado, algoritmos eficientes vem sendo desenvolvidos para outras classes de grafos. O primeiro resultado obtido nessa direção é apresentado pelo seguinte teorema:

Teorema 5 ([16]). *Se T é uma árvore, então $\chi_b(T)$ pode ser computado em tempo polinomial e $\chi_b(T) = m(T)$ ou $\chi_b(T) = m(T) - 1$.*

Uma vez que o número cromático de uma árvore é 2 este teorema já nos mostra que a distância entre $\chi(G)$ e $\chi_b(G)$ pode ser arbitrariamente grande.

Além das árvores, outras classes de grafos já foram consideradas no estudo do problema do número b-cromático. Diversos trabalhos vem sendo desenvolvidos para grafos regulares, onde o parâmetro $m(G)$ também tem forte influência [8, 17]. Em [1, 12, 18] são considerados grafos de Kneser onde resultados são obtidos para os grafos da forma $K(2k + 1, k)$ e $K(k, 2)$. Outras classe de grafos já estudadas são os cografos e sua superclasse P_4 -esparsos [6]. Bonomo et al desenvolveram um algoritmo polinomial para computar o número b-cromático de cografos e que é generalizado para grafos P_4 -esparsos. Esse algoritmo utiliza a técnica de programação dinâmica junto com a decomposição clássica dos cografos que é descrita na Seção 2.2.2.

3.3 b-Continuidade

Como visto na seção anterior, o grafo $K_{4,4}^*$ admite b-colorações com 2 cores e com 4 cores. Com um simples argumento podemos mostrar que esse grafo não admite b-coloração com 3 cores. Para isso, suponha que temos uma 3-b-coloração de $K_{4,4}^*$. Temos então em $K_{4,4}^*$ pelo menos 3 vértices dominantes com cores distintas. Sejam V_1 e V_2 as duas partes da bipartição que particiona $V(K_{4,4}^*)$. Dois desses vértices dominantes devem estar na mesma parte, digamos V_1 , o que obriga a existência de todas as cores na parte V_2 . Logo, existem 3 vértices em V_2 com cores distintas e, como consequência disso, um vértice em V_1 que não pode ter nenhuma cor em $\{1, 2, 3\}$, uma contradição.

Esta estratégia para mostrar que o grafo $K_{4,4}^*$ não possui 3-b-coloração pode ser facilmente generalizada. De fato, pode-se mostrar que o grafo $K_{n,n}^*$ só admite b-colorações com 2 ou n cores [20]. Portanto, diferente das variações típicas do problema de coloração, o parâmetro k para o qual um grafo admite k -b-coloração não necessariamente constitui um intervalo nos inteiros. Essa característica foi primeiramente ressaltada em [20] onde a pergunta sobre a existência de grafos que admitem

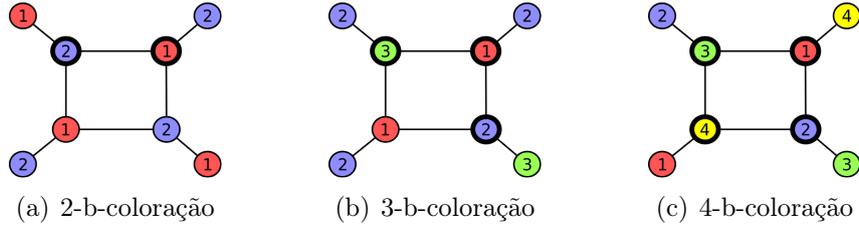


Figura 3.3: Grafo b-contínuo

b-coloração com k cores para valores arbitrários de k foi feita. Esta pergunta foi respondida em [4] onde foi mostrado a existência de grafos que admitem k -b-coloração apenas para valores em um conjunto arbitrário S de números inteiros, dado que o menor elemento em S é maior ou igual a 2. A situação onde os valores de k , para os quais um grafo admite k -b-coloração, não constituem um intervalo contínuo de inteiros representa um desafio a mais na tratabilidade de problemas com b-coloração. Isso porque, ao mostrar a não existência de uma b-coloração com k cores não se pode concluir nada para valores maiores (ou menores) que k . Esse cenário motivou a seguinte definição:

Definição 7. Um grafo G é *b-contínuo* se G admite b-coloração com k cores para todo $\chi(G) \leq k \leq \chi_b(G)$.

Todo grafo G admite b-colorações com $\chi(G)$ cores e com $\chi_b(G)$ cores. A primeira, devido ao Fato 1 e a segunda pela própria definição de $\chi_b(G)$. Desta forma, um grafo é b-contínuo se admite b-coloração para todos os valores de k possíveis, isso é, entre $\chi(G)$ e $\chi_b(G)$. Considere, por exemplo, a Figura 3.3. Nela temos um grafo G e três b-colorações deste grafo. Podemos facilmente verificar que $\chi(G) = 2$ e $\chi_b(G) = 4$. Como ilustrado na figura, esse grafo possui b-coloração para todos os valores entre 2 e 4 e portanto trata-se de um grafo b-contínuo. Observe agora o grafo H da Figura 3.4(a). Na Figura 3.4 ilustramos uma 2-b-coloração e uma 4-b-coloração deste grafo. Temos então que $\chi(H) = 2$ e $\chi_b(H) = 4$, já que $\chi_b(H) \leq m(H) = 4$. Como iremos argumentar mais a frente, este grafo não admite b-coloração com 3 cores de forma que se trata então de um grafo não b-contínuo. Na realidade, H é o menor grafo não b-contínuo. Para tal, implementamos um algoritmo de força bruta para obter os valores de k para o qual um grafo admite k -b-coloração. Além disso, geramos e executamos tal algoritmo para todos os grafos com 7 ou menos vértices. Com isso, obtemos que H é único grafo não b-contínuo com 7 vértices e não existe nenhum outro grafo com menos vértices que possua esta propriedade.

Para verificar que o grafo H da Figura 3.4(a) é de fato não b-contínuo devemos mostrar que este não possui uma 3-b-coloração. Na tentativa de construir uma 3-b-coloração de H vamos construir dois casos, que são ilustrados na Figura 3.5. No Caso 1, a suposição é de que o vértice a é um vértice dominante. Assim, sem

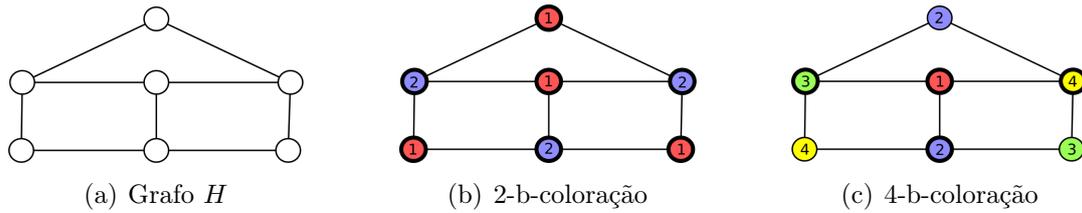


Figura 3.4: Grafo não b-contínuo

perda de generalidade, temos a pré-coloração obtida na Figura 3.5(a). Veja que neste ponto podemos atribuir ao vértice f a cor 1 ou 3. Se atribuímos a f a cor 1 o vértice b não se torna um dominante da cor 2 e nenhum dos vértices restantes (g ou e) podem se tornar dominantes para a cor 2, de forma que não conseguimos completar a b-coloração. Se atribuímos a f a cor 3 então g deve receber a cor 2 fazendo com que a cor 3 não possa ter dominante nesta pré-coloração. No Caso 2, supomos que o vértice a não é dominante e, por uma questão de simetria, o vértice e também não deve ser dominante. Com estas hipóteses recaímos na pré-coloração da Figura 3.5(b). Observe que nesta situação os vértices f e c não podem se tornar dominantes e então temos somente o vértice e como um potencial dominante para as cores 1 e 3. Concluimos então que esta pré-coloração também não pode ser estendida para uma 3-b-coloração, mostrando então que H não admite uma b-coloração com 3 cores.

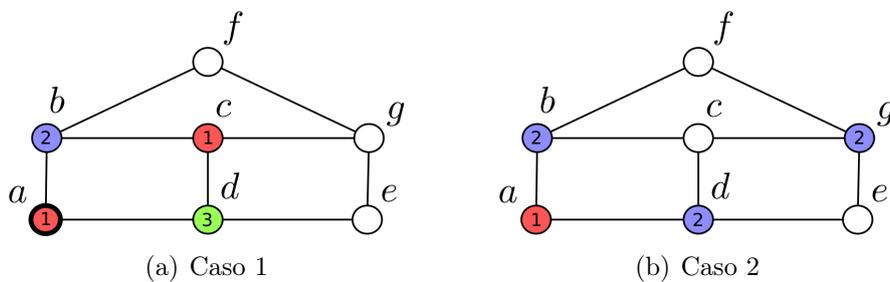


Figura 3.5: Não existência de 3-b-coloração

Tendo em mente a definição de b-continuidade temos o problema natural de, dado um grafo G , determinar se G é b-contínuo. Barth et al mostraram em [4] que esse é um problema NP-completo, mesmo quando uma $\chi_b(G)$ -coloração e uma $\chi(G)$ -coloração são também dadas como entrada. Tal resultado torna interessante o estudo da propriedade de b-continuidade restrito a classes específicas de grafos. Encontram-se na literatura trabalhos onde se mostram que determinadas classes de grafos são b-contínuas, no sentido de que todos os grafos da classe são b-contínuos. Por exemplo, em [3] é provado que todos os grafos de intervalo são b-contínuos, resultado que foi posteriormente generalizado para os grafos cordais [22]. Existem também trabalhos que buscam estabelecer b-continuidade para os grafos de Kneser porém só resultados

parciais foram obtidos até o momento [24]. Outra classe de grafos para a qual se tem resultados de b-continuidade, e que é especialmente importante para nosso trabalho, é a classe dos cografos.

Bonomo et al, em [6], mostraram que a classe dos cografos é b-contínua. De fato, nesse mesmo trabalho esse resultado foi generalizado para a classe dos grafos P_4 -esparcos e também foi desenvolvido um algoritmo eficiente para o problema do número b-cromático nessa classe. Ao final do artigo é questionado se tais resultados podem ser generalizados para outras superclasses de cografos, como os grafos distância-hereditários. Conseguimos neste trabalho uma resposta parcial a essa pergunta, mostrando que os grafos distância-hereditários são b-contínuos. A definição e caracterização dos grafos distância-hereditários é apresentada na Seção 2.2.3 e o resultado de b-continuidade para a classe se encontra na Seção 4.2.

Para provar que a classe dos cografos é b-contínua foram usados os seguintes teoremas:

Teorema 6 ([6]). *Sejam G_1 e G_2 grafos b-contínuos, então $G = G_1 + G_2$ é b-contínuo.*

Teorema 7 ([6]). *Sejam G_1 e G_2 grafos b-contínuos, então $G = G_1 \wedge G_2$ é b-contínuo.*

Como visto na Seção 2.2.2, os cografos podem ser completamente decompostos através das operações de união disjunta e *join*. Portanto, a b-continuidade dos cografos é simples corolário dos teoremas acima. O que observamos nos Teoremas 6 e 7 é que as operações de união disjunta e *join* preservam b-continuidade. Esses resultados são mais gerais e, além de permitir estabelecer b-continuidade para cografos, possibilitam a construção de grafos b-contínuos e também podem ser usados como ferramentas para provar b-continuidade de outras classes de grafos. Neste trabalho introduzimos uma abordagem ao estudo da b-continuidade através de operações que preservam b-continuidade. Assim como no caso dos cografos, mostramos que o resultado de b-continuidade estabelecido para grafos cordais pode ser expresso de forma mais geral através de uma operação de adição de vértice simplicial. Além disso, identificamos novas operações que preservam b-continuidade e utilizamos tais resultados para provar b-continuidade para os grafos periplanares. Esses resultados se encontram na Seção 4.3.

Capítulo 4

Resultados

Neste capítulo apresentaremos os resultados obtidos neste trabalho. Na próxima seção, introduzimos alguns conceitos e técnicas que utilizamos nas demonstrações das seções seguintes. Na Seção 4.2 provamos que os grafos distância-hereditários são b-contínuos. Na Seção 4.3 discutimos mais profundamente uma abordagem ao estudo de b-continuidade através de operações em grafos. Nessa seção identificamos algumas operações que preservam b-continuidade e utilizamos tais resultados para estabelecer b-continuidade em outras classes de grafos.

4.1 Recoloração e Dominância

Na demonstração de teoremas envolvendo coloração é muito comum a necessidade de manipular uma coloração para obter propriedades desejadas. Podemos citar como exemplo a prova do Teorema das 5 cores onde é utilizado cadeia de Kempe para trocar a cor de alguns vértices da coloração [5]. Para estabelecer nossos resultados relacionados a b-coloração e, em especial, b-continuidade também foi muitas vezes necessário manipular uma dada coloração. Porém, como em geral queremos obter b-colorações ao final do processo, torna-se fundamental manter o controle acerca dos vértices dominantes após recolorir o grafo. Com isto em mente, nesta seção introduzimos algumas operações básicas que podemos fazer com uma coloração e analisar qual sua influência na propriedade de um vértice ser ou não dominante. A primeira delas é uma simples operação de renomear cores.

Definição 8. Seja G um grafo, c coloração de G e A e B duas cores distintas em $c(V(G))$. Definimos a operação $sw(c, A, B)$ aquela que cria uma nova coloração $c' = sw(c, A, B)$, da seguinte forma :

- $c'(v) = B$, se $c(v) = A$.
- $c'(v) = A$, se $c(v) = B$.

- $c'(v) = c(v)$, caso contrário.

Por questões de simplicidade, quando c for claro pelo contexto, usaremos apenas $sw(A, B)$.

Lema 1. Seja G um grafo, c uma coloração de G e A e B duas cores distintas de $c(V(G))$. Considere $c' = sw(c, A, B)$. As seguintes afirmações são verdadeiras:

- c' é coloração de G .
- $v \in V(G)$ é vértice dominante em c' se, e somente se, v é dominante em c .

Demonstração. Essa operação apenas troca o nome das cores A e B . Portanto as afirmações são trivialmente verdadeiras. \square

Corolário. *Seja c uma coloração de G tal que existe vértice dominante com a cor A e não existe vértice dominante com a cor B . Então, a coloração $c' = sw(A, B)$ possui as seguintes propriedades:*

- *Existe vértice dominante com a cor B .*
- *Não existe vértice dominante com a cor A .*
- *Dominantes das outras cores são preservados.*

A importância desse corolário se deve ao fato de muitas vezes quisermos fazer com que uma determinada cor fique sem dominante para depois remove-la da coloração. Para remover uma cor sem dominantes de uma coloração vamos definir a seguinte operação:

Definição 9. Seja G um grafo, c uma coloração de G e A uma cor em $c(V(G))$ que não possui dominantes. Definimos a operação $rem(c, A)$ como aquela que cria uma nova coloração $c' = rem(c, A)$ da seguinte forma:

- $c'(v) = c(v)$, se $c(v) \neq A$.
- $c'(v) = B$ para qualquer B tal que $B \in c(V(G)) \setminus (c(N(v)) \cup \{A\})$, se $c(v) = A$.

Observe que existe certa liberdade para a escolha da cor B . Para nossos propósitos não importa qual cor B escolhermos, desde que ela satisfaça a condição $B \in c(V(G)) \setminus (c(N(v)) \cup \{A\})$. Sempre há uma escolha possível para B pois, como A não tem vértices dominantes, existe alguma cor de $c(V(G)) \setminus \{c(v)\}$ que não está em $c(N(v))$, $\forall v$ com $c(v) = A$. Esta operação é exatamente a de remover uma cor sem dominantes descrita na Seção 3.1 que dá origem a definição de b-coloração. Quando a coloração c estiver clara pelo contexto usaremos apenas a notação $rem(A)$.

Lema 2. Seja G um grafo, c uma coloração de G e A uma cor em $c(V(G))$ que não possui dominante. Então, uma coloração $c' = \text{rem}(c, A)$ possui as seguintes propriedades:

- $c'(V(G)) = c(V(G)) \setminus \{A\}$
- c' é coloração.
- $c(N(v)) \setminus \{A\} \subseteq c'(N(v)), \forall v \in V(G)$
- se v é vértice dominante em c então v é vértice dominante em c' .

Demonstração. A operação $\text{rem}(c, A)$ altera somente a cor dos vértices do conjunto $S = \{v \mid c(v) = A\}$. Cada vértice em S recebe uma cor diferente de A e cada vértice em $V(G) \setminus S$ permanece com sua cor. Portanto, somente a cor A é removida da coloração enquanto as outras continuam existindo.

Suponha por contradição que $c'(v) = c'(u)$ para alguma aresta $vu \in E(G)$. Como c é coloração e não alteramos as cores dos vértices em $V(G) \setminus S$ ocorre que u ou v deve estar em S . Não podem ambos estar em S , pois S é conjunto independente. Suponha, sem perda de generalidade, que $v \in S$ e $u \notin S$. Logo, $c'(u) = c(u)$ e $c'(v) = c(u)$ mas, pela definição da operação $\text{rem}(c, A)$, isso implica que $c(u) \notin (c(N(v)) \cup \{A\})$. Uma contradição, já que $c(u) \in c(N(v))$.

Só os vértices com cor A tem suas cores alteradas. Portanto, um vértice $v \in V(G)$ deixa de ver em sua vizinhança, no pior caso, somente a cor A . Logo, $c(N(v)) \setminus \{A\} \subseteq c'(N(v))$.

Seja v um vértice dominante em c . Portanto, $c(v) \neq A$ e $c'(v) = c(v)$, pois A não tem vértices dominantes. Como v é dominante $c(N(v)) = c(V(G)) \setminus \{c(v)\}$. Os vértices com cor diferente de A em $N(v)$ não tiveram suas cores alteradas, logo $c'(N(v)) \supseteq c(N(v)) \setminus \{A\} = c(V(G)) \setminus \{c(v), A\} = c'(V(G)) \setminus \{c'(v)\}$. Por outro lado, $c'(N(v)) \subseteq c'(V(G)) \setminus \{c'(v)\}$, pois c' é coloração. Então, $c'(N(v)) = c'(V(G)) \setminus \{c'(v)\}$ e v é dominante em c' . \square

Corolário. *Seja G um grafo e c uma k -coloração de G onde somente a cor $A \in c(V(G))$ não tem dominantes. Então, a coloração $c' = \text{rem}(c, A)$ é uma $(k - 1)$ -coloração de G .*

A operação $\text{rem}(c, A)$ foi definida de forma que todos os vértices em $S = \{v \mid c(v) = A\}$ tenham sua cor alterada. Observe que poderíamos realizar o mesmo procedimento mas apenas alterando as cores de um subconjunto $S' \subseteq S$ de vértices. Nesse caso a cor A poderia continuar existindo na coloração mas c' continua sendo uma coloração válida. Além disso, vértices que eram dominantes em c podem deixar de ser dominantes, mas apenas pela ausência da cor A .

Vamos analisar agora as consequências de remover um vértice de um grafo que está b-colorido. Para isto, veja que se G tem uma coloração c , ao remover um vértice v de G , podemos também entender c como uma coloração de $G - v$.

Lema 3. Seja G um grafo com um vértice $v \in V(G)$ e uma b-coloração c . O grafo $G - v$ não admite c como b-coloração se, e somente se, alguma dessas afirmações forem verdade:

- v é o único dominante de sua cor em c e $c(v) \in c(V(G - v))$.
- Existe uma cor A cujo conjunto de dominantes é $S = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$, com $S \subseteq N(v)$. Além disso, v é o único vizinho de w com a cor $c(v)$, para todo $w \in S$.

Demonstração. Se alguma dessas condições ocorre, claramente c não é b-coloração de $G - v$. Logo, por definição, existe $A \in c(V(G - v))$ que deixou de ter dominante em $G - v$. Se $A = c(v)$, então o vértice v era o único dominante de sua cor, e a primeira afirmação vale. Se $c(v) \neq A$, todos dominantes $S = \{w_1, w_2, \dots, w_k\}$ da cor A deixaram de ser dominantes. Os únicos vértices que tiveram sua adjacência alterada com a remoção de v são aqueles em $N(v)$ e portanto $S \subseteq N(v)$. Além disso, v era o único vizinho com a cor $c(v)$ dos vértices em S , caso contrário, ao remover v , algum vértice em S continuaria sendo dominante. \square

Como podemos ver, para que a remoção de um vértice altere a característica de uma coloração ser b-coloração, algumas situações restritivas tem que ocorrer. Pelo Lema 3, podemos ver que uma dessas situações exige que todos os dominantes de uma cor estejam aglomerados em um determinado conjunto. Esse tipo de situação é interessante quando queremos remover uma cor da b-coloração e por isso merece uma definição especial.

Definição 10. Dado um grafo G e uma b-coloração c de G . Dizemos que uma cor $A \in c(V(G))$ é *b-restrita* em $S \subseteq V(G)$ se todos os vértices dominantes de A estão em S .

4.2 b-Continuidade dos Distância-hereditários

O principal resultado dessa seção está expresso no seguinte teorema:

Teorema 8. *Se G é um grafo distância-hereditário então G é b-contínuo.*

Com este, generalizamos o resultado de b-continuidade conhecido para cografos, respondendo parcialmente a pergunta feita em [6]. Uma segunda motivação para

considerar os grafos distância-hereditários vem da Tabela 2.1. Veja que já era conhecido que grafos cordais e cografos são b-contínuos. Portanto, dentre as classes geradas por exatamente 2 operações, apenas a classe dos bipartidos distância-hereditários não era conhecida ser b-contínua. Diferente dos outros dois casos, esta classe não é trivialmente b-contínua pois nem todos os grafos bipartidos são b-contínuos, como observado na Seção 3.3. Logo, com o resultado do Teorema 8, também encontramos uma subclasse dos grafos bipartidos para o qual a propriedade de b-continuidade vale.

A demonstração do Teorema 8 é bastante técnica e utilizamos indução matemática em conjunto com uma análise de casos. Além disso, usamos profundamente algumas propriedades estruturais dos grafos distância-hereditários que derivam de sua caracterização apresentada na Seção 2.2.3. Dessa forma, esta seção está dividida em duas partes. Na primeira, desenvolvemos as propriedades estruturais dos grafos distância-hereditários que serão usados na prova. Na segunda parte apresentamos a prova do Teorema 8.

4.2.1 Propriedades Estruturais dos Distância-hereditários

O seguinte lema nos ajudará a entender como as operações σ_2 e σ_3 alteram um grafo G dado.

Considere um grafo G e uma partição de seus vértices V_1, V_2, \dots, V_k . Cada vez que aplicamos uma operação $\sigma(G, v)$ estamos adicionando um vértice u ao grafo. Neste momento, considere que este vértice u está sendo adicionado a parte V_i a qual v pertence. Dessa forma, após uma sequência de aplicações das operações que transformam G em G' obtemos uma extensão da partição original de $V(G)$ para a partição V'_1, V'_2, \dots, V'_k de $V(G')$, onde $V_i \subseteq V'_i, \forall 1 \leq i \leq k$.

Lema 4. Seja G um grafo e V_1, V_2, \dots, V_k uma partição de seus vértices. Considere o grafo G' obtido por uma sequência arbitrária de aplicações das operações σ_2 e σ_3 e seja V'_1, V'_2, \dots, V'_k a extensão da partição de $V(G)$ para $V(G')$. Então, as seguintes afirmações são verdadeiras :

- Se $G[V_i]$ é cografo então $G'[V'_i]$ é cografo.
- Se $V_i \times V_j \subseteq E(G)$ então $V'_i \times V'_j \subseteq E(G')$.
- Se $(V_i \times V_j) \cap E(G) = \emptyset$ então $(V'_i \times V'_j) \cap E(G') = \emptyset$.

Demonstração. A primeira afirmação é trivial, se considerarmos a caracterização de cografos na Tabela 2.1. $G'[V'_i]$ é gerado por uma sequência de operações do tipo σ_2 ou σ_3 a partir de $G[V_i]$ e este, por ser cografo, é gerado por uma sequência das

mesmas operações a partir de K_1 . Logo, $G'[V'_i]$ é gerado por σ_2 e σ_3 a partir de K_1 e portanto é cografo.

Para mostrar que a segunda afirmação é verdadeira basta prova-la para uma única aplicação de operação, pois de maneira indutiva ela é verdadeira para uma sequência de aplicações. Portanto, seja V_i e V_j partes de $V(G)$ que tem todas as arestas entre si. Ao realizar a operação σ_2 ou σ_3 em algum vértice $v \in V_i$ obtemos a nova partição com $V'_i = V_i \cup \{u\}$, onde u é o vértice adicionado e $V'_j = V_j$, $\forall j \neq i$. Observe que, pela definição destas operações, $N_{G'}(u) \supseteq N_G(v)$ e $V_i \times V_j \subseteq E(G) \Rightarrow N_G(v) \supseteq V_j$. Logo, $N_{G'}(u) \supseteq V_j$ e portanto $V'_i \times V'_j \subseteq E(G')$.

A prova da terceira afirmação é análoga a da segunda. \square

Este lema vale para qualquer partição dos vértices do grafo original e nos ajuda a entender como as operações σ_2 e σ_3 modificam um grafo. Considere, por exemplo, a partição natural onde cada V_i é composto por um único vértice $v_i \in V(G)$. O que o Lema 4 nos diz é que, após aplicar uma sequência arbitrária de operações do tipo σ_2 ou σ_3 , cada vértice de $v_i \in V(G)$ será transformado em um cografo arbitrário $G'[V'_i]$ (pela primeira afirmação). A segunda afirmação nos diz que se dois vértices v_i e v_j eram adjacentes, os cografos $G'[V'_i]$ e $G'[V'_j]$ tem todas as arestas entre eles em G' . Por final, a última afirmação do lema nos diz que se dois vértices não eram adjacentes em G então seus cografos não tem aresta entre eles em G' .

Vamos utilizar este lema em conjunto com a seguinte propriedade bem conhecida dos grafos distância-hereditários:

Lema 5 (Bandelt e Mulder [2]). Seja G um grafo distância-hereditário. Então, $G[N(v)]$ é um cografo, $\forall v \in V(G)$.

Finalmente, segue o lema que explicita qual estrutura vamos utilizar na demonstração.

Lema 6. Seja G um grafo tal que existe $v \in V(G)$ com $d_G(v) = 1$ e seja u o único vizinho de v . Além disso, G satisfaz que $G[N(u)]$ é um cografo. Considere o grafo G' obtido de G por uma sequência arbitrária de aplicações das operações σ_2 e σ_3 . Então, existe partição V'_1, V'_2, V'_3 e V'_4 de $V(G')$ tal que:

- $G'[V'_1]$, $G'[V'_2]$ e $G'[V'_3]$ são cografos.
- $V'_1 \times V'_2 \subseteq E(G')$
- $V'_2 \times V'_3 \subseteq E(G')$
- $(V'_1 \times V'_3) \cap E(G') = \emptyset$
- $(V'_1 \times V'_4) \cap E(G') = \emptyset$

- $(V'_2 \times V'_4) \cap E(G') = \emptyset$

Demonstração. Considere a seguinte partição de $V(G)$, $V_1 = \{v\}$, $V_2 = \{u\}$, $V_3 = N(u) \setminus \{v\}$ e $V_4 = V(G) \setminus (V_1 \cup V_2 \cup V_3)$, e use o Lema 4. \square

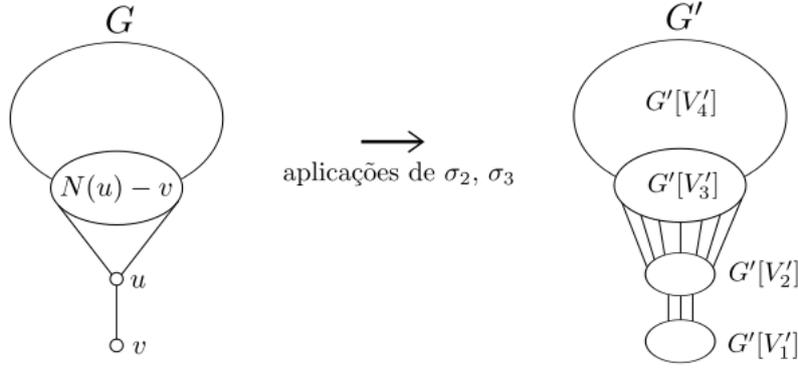


Figura 4.1: Transformação descrita pelo Lema 6.

Na seção seguinte vamos trabalhar com grafos G' que podem ser obtidos como descrito pelo Lema 6. Vamos mostrar que todo grafo distância-hereditário possui tal decomposição.

4.2.2 Prova do Teorema 8

A prova será feita por indução em $n = |V(G)|$. O teorema claramente é verdadeiro para $n \leq 2$. Para provar que G com $n \geq 3$ vértices é b-contínuo precisamos mostrar que G tem k -b-coloração para todo $\chi(G) \leq k \leq \chi_b(G)$. Por definição, G tem b-coloração com $k = \chi(G)$ cores. Vamos mostrar então que se G tem b-coloração com $k > \chi(G) + 1$ cores então G também admite b-coloração com $k - 1$ cores, concluindo a prova. Seja então c uma k -b-coloração de G com $k > \chi(G) + 1$.

Vamos agora desenvolver as propriedades estruturais que vamos precisar de G . Como G é distância-hereditário existe uma sequência de operações p_1, p_2, \dots, p_m que geram G , a partir de um único vértice, tal que $p_i \in \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$, $1 \leq i \leq m$. Considere que as operações são feitas na ordem p_1, p_2, \dots, p_m de forma que $G = p_m \cdots p_2 \cdot p_1 \cdot K_1$. Seja j o maior índice tal que $p_j = \sigma_1$. Se tal j não existir, significa que G é gerado apenas por σ_2 e σ_3 e portanto é cografo, caso em que não resta nada a provar já que cografos são b-contínuos [6]. Considere então $G' = p_j \cdot p_{j-1} \cdots p_2 \cdot p_1 \cdot K_1$, ou seja o grafo que obtemos parando após a última operação do tipo σ_1 . Sabe-se que G' é distância-hereditário e seja v o vértice adicionado pela última operação p_j e u seu único vizinho. Logo, $d_{G'}(v) = 1$ e $G'[N(u)]$ é um cografo, pelo Lema 5. Veja que o grafo G' satisfaz as hipóteses descritas no Lema 6. Além disso, G é gerado a partir de G' por uma sequência de operações do tipo σ_2 ou σ_3 . Aplicamos então o Lema 6, neste caso considerando a transformação que leva G' em G . Obtemos com isso a

decomposição V'_1, V'_2, V'_3, V'_4 desejada de $V(G)$ descrita pelo lema. Vamos considerar então, daqui por diante, os subgrafos induzidos $P = G[V'_1]$, $H = G[V'_2]$, $W = G[V'_3]$ e $T = G[V'_4]$ que particionam $V(G)$. Além disso, no restante desta prova vamos denotar por $P \wedge H$ o grafo $G[V(P) \cup V(H)]$. De acordo com o Lema 6, P , H e W são cografos. Existem todas as arestas entre $V(P)$ e $V(H)$ e nenhuma outra aresta saindo de $V(P)$. Além disso, existem todas as arestas entre $V(H)$ e $V(W)$ e todas as arestas que saem de $V(H)$ vão para $V(P)$ ou $V(W)$.

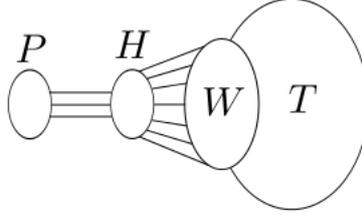


Figura 4.2: Estrutura de G .

Por uma questão de simplicidade vamos considerar que G é conexo, caso contrário poderíamos aplicar a hipótese de indução em cada componente conexa de G e usar o fato que a união de grafos b-contínuos é b-contínuo [6].

Para obter uma $(k - 1)$ -b-coloração de G vamos proceder com uma sequência de casos. Neles vamos identificar uma cor b-restrita em um conjunto apropriado e tentar remove-la através das operações vistas na Seção 4.1. A primeira divisão de casos que faremos é sobre a existência de cor b-restrita em $V(P)$.

Existe cor b-restrita em $V(P)$

Nesta seção estamos supondo que existe uma cor A b-restrita em $V(P)$, isto é, todos os dominantes da cor A se encontram em $V(P)$. Isso implica que $A \in c(V(P))$ e $c(P \wedge H) = \{1, 2, \dots, k\} = c(V(G))$, pois a existência de dominantes em P forçam a existência de todas as cores em $P \wedge H$. Lembramos que, por construção, existem todas as arestas entre P e H e então $c(V(P)) \cap c(V(H)) = \emptyset$. Essas duas propriedades nos levam ao seguinte fato básico que será útil quando consideramos restrições da coloração c para os grafos P e H .

Fato 3. Se um vértice $v \in V(P)$ é dominante em G então este também é dominante em P , na coloração c restrita a $V(P)$. No sentido inverso, se v é dominante na coloração c restrita a $V(P)$ então ele também é dominante em G na coloração c de $V(G)$. O mesmo vale para vértices $v \in V(H)$ e a coloração c restrita a $V(H)$.

Este fato, que é válido apenas no presente caso onde $V(P)$ possui dominantes, indica a equivalência entre a propriedade de um vértice ser dominante em relação à coloração c de G e as restrições de c nos grafos P ou H .

Caso 1: Existe $B \in c(V(P))$ tal que B não tem dominante em $V(P)$.

Nesse caso realizamos primeiramente a operação $sw(A, B)$ em P . Pelas propriedades dessa operação temos que P continua com coloração válida e vértices dominantes são preservados. Além disso, como nenhuma cor aparece em P e H simultaneamente, a coloração obtida ainda é válida para G . Dominantes em H e em $G - (P \wedge H)$ são preservados. Logo, pelo corolário do Lema 1, a cor A deixou de ter dominante em P (e portanto em G) e a cor B passou a ter dominante em P . Nesta nova coloração a cor A é a única sem dominantes e realizando a operação $rem(A)$ em G obtemos uma $(k-1)$ -b-coloração de G , como apontado pelo corolário do Lema 2.

Caso 2: Toda cor $B \in c(V(P))$ tem dominante em $V(P)$ e $|c(V(P))| > \chi(P)$.

Nesse caso P está b-colorido com $k' = |c(V(P))| > \chi(P)$ cores. Como P é cografo, e portanto b-contínuo, existe $(k' - 1)$ -b-coloração de P . Considere uma dessas $(k' - 1)$ -b-colorações de P e renomeie as cores de forma que apenas a cor A desapareça de P e as demais cores permaneçam. Os vértices que são dominantes na coloração restrita a $V(P)$ deixam de ver apenas a cor A na coloração restrita a $V(G)$. Da mesma forma, os vértices que eram dominantes em H deixam de ver somente a cor A . Desta forma, somente a cor A deixa de ter dominantes nesta nova coloração. Aplicamos então a operação $rem(A)$ em G para obter uma $(k-1)$ -b-coloração de G .

Caso 3: Toda cor $B \in c(V(P))$ tem dominante em $V(P)$ e $|c(V(P))| = \chi(P)$.

Nesse caso P está com uma coloração mínima. Para tratar esse caso vamos precisar considerar a coloração em H , criando dois novos sub-casos.

Caso 3.1: Existe $B \in c(V(H))$ tal que B não tem dominante em $V(H)$.

Nesse caso realizamos primeiramente a operação $sw(A, B)$ em $P \wedge H$. Pelo Lema 1 e seu corolário, temos que dominantes em $P \wedge H$ são preservados de forma que a cor A passa a não ter dominantes em $P \wedge H$ e a cor B passa a ter dominantes em $P \wedge H$. As demais cores que tinham dominantes em $P \wedge H$ continuam tendo. Todas as cores em W , exceto A , tem dominantes em P e portanto não precisamos nos preocupar com dominantes de W . Dominantes em T claramente não são afetados. Portanto, a única cor sem dominante é A . Mas ainda precisamos verificar que a nova coloração c' é de fato uma coloração de G . Esta é claramente válida para $P \wedge H$ mas podem ocorrer conflitos entre H e W . Os únicos conflitos que podem ocorrer são arestas uv tal que $u \in V(W)$, $v \in V(H)$ e $c'(v) = c'(u) = c(u) = A$. Veja que u não era dominante, pois via todas as cores em $c(V(H))$ e A era b-restrita em $V(P)$. Portanto existe uma cor, diferente de A , que não aparece em sua vizinhança que está em $c(V(P))$. Já v não era dominante também e via todas as

cores em $c(V(P))$. Portanto existe uma cor, diferente de B , que não aparece em sua vizinhança que está em $c(V(H))$. Logo, podemos trocar a cor de u e de v de forma que tenham cores diferentes, pois $c(V(P)) \cap c(V(H)) = \emptyset$. Esse processo pode ser feito para todas as arestas uv conflitantes de forma independente. Este processo não cria novos conflitos pois ao alterar a cor de um vértice usamos o fato deste não ser dominante na coloração inicial para mostrar a existência de uma cor que não aparece em sua vizinhança. Além disso, os vértices afetados em W formam um conjunto independente assim como os vértices afetados em H . Ao alterar cores em W podemos alterar a dominância de vértices em T porém, como alteramos vértices em W cuja cor é A , estes vértices que eram dominantes em T deixam de ser somente pela ausência da cor A . Ao final desse processo temos uma coloração válida de G onde a cor A não tem dominante e as demais cores tem dominantes a menos da ausência da cor A em suas vizinhanças. Basta então aplicar a operação $rem(A)$ em G obtendo uma $(k - 1)$ -b-coloração de G .

Caso 3.2: Toda cor $B \in c(V(H))$ tem dominante em $V(H)$.

Logo, H está b-colorido na restrição de c a $V(H)$. Mas P também está b-colorido e portanto $P \wedge H$ está b-colorido com k cores (todas as cores estão em $P \wedge H$). Seja B uma cor em $c(V(H))$. Assim como no caso anterior, vamos aplicar a operação $sw(A, B)$ em $P \wedge H$. Todos os dominantes em $P \wedge H$ são preservados e portanto $P \wedge H$ continua k -b-colorido. A nova coloração c' não é válida apenas por arestas uv tal que $u \in V(W)$, $v \in V(H)$ e $c'(v) = c'(u) = c(u) = A$. Usando o argumento do caso anterior podemos trocar as cores de todos os vértices $u \in V(W)$ que tem conflitos com vértices em H . Assim c' se torna uma k -b-coloração. Veja que todas as cores em G tem dominantes em $P \wedge H$ e portanto não precisamos nos preocupar com dominantes em W ou T . Dado que P está $\chi(P)$ -colorido temos que H não pode estar b-colorido com $\chi(H)$ cores. Isto porque, caso contrário, teríamos que $k = \chi(P) + \chi(H) = \chi(P \wedge H) \leq \chi(G)$ mas, por hipótese, $k > \chi(G) + 1$. Logo, H está b-colorido com $k' > \chi(H)$ cores e então existe $(k' - 1)$ -b-coloração deste. Analogamente ao Caso 2, vamos renomear as cores dessa $(k' - 1)$ -b-coloração de forma que somente a cor A desapareça de H . Com isso, obtemos uma coloração válida de G onde a cor A não tem dominante e as demais cores tem dominantes exceto a ausência da cor A em suas vizinhanças. Basta então aplicar a operação $rem(A)$ em G para obter uma $(k - 1)$ -b-coloração de G .

Não existe cor b-restrita em $V(P)$

Nesta seção vamos lidar com o caso de não existir cor b-restrita em $V(P)$. Com essa hipótese o seguinte fato vai ser usado.

Fato 4. Se c não é b-coloração de $G - v$ e $v \in V(P)$ então a segunda afirmação do Lema 3 é verdadeira e o conjunto S de cores que não tem dominantes em c restrita a $G - v$ satisfaz $S \subseteq c(N(v) \cap V(H))$.

Isso é verdade pois como não existe cor b-restrita em $V(P)$ então v não pode ser o único dominante de sua cor. Além disso, as cores em $c(V(P))$ tem vértices dominantes fora de P e portanto não deixaram de ter dominante em $G - v$.

Para realizar a indução queremos usar o grafo $G - v$. Mas é preciso também saber como recolorir o vértice v ao adiciona-lo de novo. Para isso, vamos precisar analisar melhor a estrutura de P . Vamos separar nos casos em que $V(P)$ não é uma clique e no caso que $V(P)$ é uma clique.

$V(P)$ não é clique

Vamos proceder de forma análoga ao que fizemos com G para obter propriedades estruturais de P . Como P é um cografo existe uma sequência de operações p_1, p_2, \dots, p_m que geram P , a partir de um único vértice, tal que $p_i \in \{\sigma_2, \sigma_3\}, 1 \leq i \leq m$. Ou seja, $P = p_m \cdots p_2 \cdot p_1 \cdot K_1$. Seja j o maior índice tal que $p_j = \sigma_2$. Tal j deve existir pois, caso contrário, P é gerado apenas por σ_3 e portanto é um grafo completo, uma contradição. Considere o grafo $P' = p_j \cdot p_{j-1} \cdots p_2 \cdot p_1 \cdot K_1$. Seja $u \in V(P')$ o vértice adicionado pela última operação p_j e $v \in V(P')$ o vértice que foi usado na operação. Por definição temos que $N_{P'}(u) = N_{P'}(v)$. O grafo P é gerado a partir de P' por uma sequência de operações do tipo σ_3 . Logo, podemos aplicar o Lema 4 à partição $V_1 = \{u\}, V_2 = \{v\}, V_3 = N(u)$ e $V_4 = V(P') \setminus (V_1 \cup V_2 \cup V_3)$ obtendo a partição V'_1, V'_2, V'_3 e V'_4 de $V(P)$. Pelo Lema 4, $P[V'_1], P[V'_2]$ e $P[V'_3]$ são cografos e seguem a estrutura da figura a seguir.

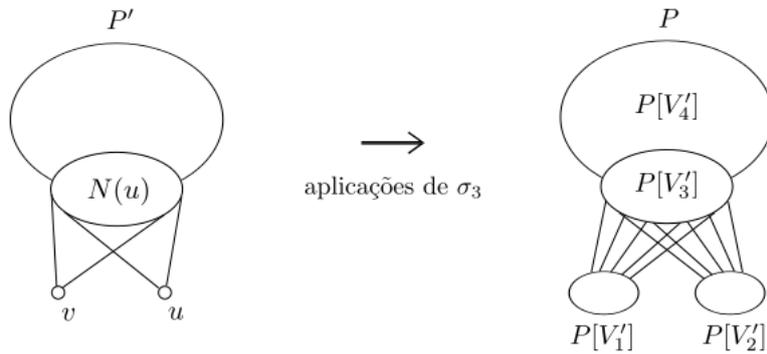


Figura 4.3: Estrutura de P .

Veja que na realidade estamos numa situação mais restrita do que a expressa no Lema 4 pois só usamos operações σ_3 para construir P a partir de P' . Os grafos $P[V'_1]$ e $P[V'_2]$ foram gerados a partir de u e v , respectivamente, somente pela operação σ_3 . Logo, o seguinte fato vale:

Fato 5. $P[V'_1]$ e $P[V'_2]$ são grafos completos.

Suponha, sem perda de generalidade que $|V'_1| \leq |V'_2|$. Agora estamos em condição de alterar a b-coloração.

Caso 1: Existe $v \in V'_1$ tal que c é k -b-coloração de $G - v$.

Nesse caso, aplicamos a hipótese de indução em $G - v$ para obter $(k - 1)$ -b-coloração c' de $G - v$. Basta então adicionar v e encontrar uma cor disponível para v . Veja que $(V'_1 \setminus \{v\})$ e V'_3 particionam $N(v)$. Por construção, $c'(V'_3) \cap c'(V'_2) = \emptyset$. Então, existem pelo menos $|c'(V'_2)| = |V'_2|$ cores que não estão em $c'(V'_3)$. Logo, existem pelo menos $|V'_2| - |(V'_1 \setminus \{v\})| \geq 1$ cores disponíveis para v .

Caso 2: Existe $v \in V'_1$ tal que c não é k -b-coloração de $G - v$.

Usando o Fato 4 e Lema 3 concluímos que existe cor $A \in c(V(H))$ que é b-restrita em $V(H)$. Além disso, v é o único vértice de P com cor $c(v)$ e $c(v) \notin c(V(W))$, caso contrário v não seria o único vértice de cor $c(v)$ dos dominantes de A . Seja então c' a coloração obtida através da operação $sw(A, c(v))$ em $\mathbf{P} \wedge \mathbf{H}$. A coloração c' é válida em G pois $c(v) \notin c(V(W))$ e $c'(V(W)) = c(V(W))$. Pelo Lema 1, dominantes em $\mathbf{P} \wedge \mathbf{H}$ são preservados. Os vértices que podem deixar de ser dominantes estão em $V(W)$ e a única cor que possivelmente falta em suas vizinhanças é A . Veja que v é o único vértice em $\mathbf{P} \wedge \mathbf{H}$ com a cor A e os demais vértices com a cor A não são dominantes, pois A estava b-restrita em $V(H)$. Por um argumento análogo ao caso anterior, v não é dominante. Isso porque $A \notin c'(V'_2) \Rightarrow c'(V'_2) \setminus c'(V'_1) \neq \emptyset$ e então existe uma cor em $c'(V'_2)$ que não está em $N(v)$. Logo, a cor A deixou de ter dominante em G . Aplicando $rem(A)$ em \mathbf{G} os vértices dominantes afetados em $V(W)$ voltam a ser dominantes e obtemos uma $(k - 1)$ -b-coloração de G .

$V(P)$ é clique

Caso 1: A coloração c não é k -b-coloração de $G - v$, $\forall v \in V(P)$.

Pelo Fato 4 e Lema 3 temos que $c(V(P)) \cap c(V(W)) = \emptyset$ e existe $A \in c(V(H))$ b-restrita em $V(H)$. Seja $v \in V(P)$, vamos então realizar a operação $sw(A, c(v))$ em $\mathbf{P} \wedge \mathbf{H}$ obtendo a coloração c' . De forma análoga ao Caso 2 da seção anterior c' é coloração válida de G , pois $c(v) \notin c(V(W))$, e os únicos dominantes possivelmente afetados estão em $V(W)$ e deixaram de ver somente a cor A . Além disso, v é o único vértice com cor A em $\mathbf{P} \wedge \mathbf{H}$ e os demais vértices da cor A não são dominantes. Podemos supor que $V(W) \neq \emptyset$ pois, caso contrário, $G = \mathbf{P} \wedge \mathbf{H}$ é cografo e não temos nada a provar. Logo, existe $u \in V(W) \Rightarrow c'(u) = c(u)$ e $c(u) \notin (c(V(P)) \cup c(V(H)))$. Portanto a cor $c'(u)$ não está em $c'(N(v))$ e concluímos que v não é dominante. Aplicando $rem(A)$ em \mathbf{G} os vértices dominantes afetados em $V(W)$ voltam a ser dominantes e obtemos uma $(k - 1)$ -b-coloração de G .

Caso 2: Existe $v \in V(P)$ tal que c é k -b-coloração de $G - v$.

Nesse caso vamos então aplicar a hipótese de indução em $G - v$ para obter uma $(k - 1)$ -b-coloração c' de $G - v$. Nosso objetivo agora é encontrar uma cor em $\{1, 2, \dots, k - 1\}$ disponível para v . Se $|c'(N(v))| < k - 1$ essa cor disponível existe e não há mais nada a provar. O caso difícil é quando $c'(N(v)) = \{1, 2, \dots, k - 1\}$. Nessa situação, usando o fato de que $V(P)$ é uma clique, temos que todos os vértices em $V(P) \setminus \{v\}$ são dominantes. Além disso, todas as $k - 1$ cores de c' estão em $P \wedge H$. Vamos então alterar a coloração em H para achar uma cor livre para v . Para isso, recorreremos a dois sub-casos.

Caso 2.1: Existe cor $B \in c'(V(H))$ tal que B não tem dominante em $V(H)$.

Como B não tem dominante em $V(H)$ aplicamos $rem(B)$ em H para remover a cor B de $V(H)$. Seja c'' essa nova coloração de G . Com esta operação, dominantes em H , W e $P - v$ podem ter deixado de ver a cor B . Faça $c''(v) = B$. Como $V(P)$ é clique, todos os dominantes em $P - v$ passam a ver a cor B novamente. Os dominantes em H também voltam a ver a cor B e todas as cores em W possuem dominantes em $P - v$. Portanto, c'' é uma $(k - 1)$ -b-coloração de G .

Caso 2.2: Toda cor $B \in c'(V(H))$ tem dominante em $V(H)$.

Logo c' é uma k' -b-coloração em H , onde $k' = c'(V(H))$. Veja que $k - 1 = k' + |V(P)| - 1 \Rightarrow k = k' + |V(P)| \Rightarrow k = k' + \chi(P)$, pois $V(P)$ é clique. Além disso, $k > \chi(G) + 1 \geq \chi(H) + \chi(P) + 1$. Portanto $k' > \chi(H) + 1$. Como H é b-contínuo existe então $(k' - 1)$ -b-coloração c'' de H . Essa coloração c'' pode ter suas cores renomeadas de forma que apenas uma cor arbitrária $A \in c'(V(H))$ deixe de aparecer em $c''(V(H))$, ou seja, $c''(V(H)) = c'(V(H)) \setminus \{A\}$. Considere a extensão de c'' para $G - v$ de forma que $c''(u) = c'(u)$, quando $u \notin V(H)$. Em c'' a cor A deixou de aparecer em H e isso pode afetar dominantes em H , W e $P - v$. Faça então $c''(v) = A$. De forma análoga a anterior, todos dominantes em $P - v$ e H são restaurados e G está $(k - 1)$ -b-colorido.

4.3 b-Continuidade e Operações em Grafos

Nesta seção vamos desenvolver uma abordagem ao estudo de b-continuidade através de operações em grafos que preservam b-continuidade. Dizemos que uma operação em grafo *preserva b-continuidade* se, ao realizar a operação com grafos b-contínuos, temos sempre como resultado um grafo que também é b-contínuo.

Temos como motivação os Teoremas 6 e 7 que dizem que as operações de união disjunta e *join* preservam b-continuidade. Entendemos que esse tipo de resultado é interessante por não se restringir a uma classe de grafos. Esses teoremas foram usados para estabelecer a b-continuidade dos cografos mas acreditamos que esses

também podem ser usados em diversos outros aspectos. Por exemplo, se estamos buscando grafos *não b-contínuos minimais* para alguma classe de grafo fechada por subgrafos induzidos, podemos sem perda de generalidade considerar grafos conexos e que não podem ser decompostos como *join* de grafos menores. Outro aspecto que podemos considerar é o de utilizar os Teoremas 6 e 7 para desenvolver métodos de construção de grafos b-contínuos.

Com esta motivação, nesta seção vamos identificar outras operações que preservam b-continuidade e utilizar tais resultados como ferramentas para estabelecer b-continuidade em outras classes de grafos. Na Seção 4.3.1 vamos expressar o resultado de b-continuidade conhecido para cordais em termos de uma operação que modifica o grafo, conseguindo um resultado mais geral. Na Seção 4.3.2 vamos dar indícios negativos sobre a possibilidade de utilizar a abordagem de operações que preservam b-continuidade para desenvolver o resultado de b-continuidade dos grafos distância-hereditários. Na Seção 4.3.3 vamos considerar operações que identificam cliques de dois grafos disjuntos. Com isso, vamos relacionar b-continuidade com a decomposição por blocos e, de forma mais geral, por cliques separadoras. De posse desses resultados vamos também provar que grafos periplanares são b-contínuos.

4.3.1 Adição de Simplicial

Como discuto na Seção 3.3 já é conhecido que grafos cordais são b-contínuos [22]. A estratégia utilizada na prova é a mesma que usamos na demonstração para os distância-hereditários, onde tem-se um grafo cordal G com uma k -b-coloração tal que $k > \chi(G)$ e mostra-se que G tem uma $(k - 1)$ -b-coloração. Na demonstração utiliza-se indução matemática junto com a caracterização dos grafos cordais em termos do esquema de eliminação perfeita. Nesta seção vamos estabelecer a b-continuidade dos grafos cordais como consequência de que a seguinte operação preserva b-continuidade.

Definição 11. Seja G um grafo e $C \subseteq V(G)$ uma clique de G . A operação $\text{simp}(G, C)$ cria o grafo $G' = \text{simp}(G, C)$ com as seguintes características:

- $V(G') = V(G) \cup \{u\}$.
- $E(G') = E(G) \cup \{uv \mid v \in C\}$.

Essa operação adiciona um novo vértice u ao grafo e faz com que $N(u) = C$. Portanto, u passa a ser um vértice simplicial de G' . Temos então o seguinte teorema:

Teorema 9. *Seja G um grafo b-contínuo e $C \subseteq V(G)$ uma clique de G . Então, $G' = \text{simp}(G, C)$ é b-contínuo.*

Demonstração. Seja $G' = \text{simp}(G, C)$ e $u \in V(G')$ o vértice simplicial adicionado. Para mostrar que G' é b -contínuo seja c uma k - b -coloração de G' com $k > \chi(G')$. Vamos mostrar então que G' admite uma $(k-1)$ - b -coloração. Note que $\chi(G') \geq \chi(G)$ pois G é subgrafo de G' e $\chi(G') \geq |C| + 1$ pois $N[u]$ é uma clique de tamanho $|C| + 1$ em G' . Suponha por contradição que $d(u) = k - 1$. Então teríamos as k cores ocorrendo em $N[u]$ o que implicaria que $k = |C| + 1$ mas $k > \chi(G') \geq |C| + 1 \Rightarrow k \geq |C| + 2$. Logo, $d(u) < k - 1$ e u não é dominante em c . Vamos então considerar a coloração c restrita a G e analisar dois casos.

Caso 1: c é b -coloração em G .

Como u não é dominante temos que $c(u) \in c(V(G))$ e portanto c é uma k - b -coloração de G . Como $k > \chi(G') \geq \chi(G)$ e G é b -contínuo, existe $(k - 1)$ - b -coloração c' de G . A b -coloração c' pode ser facilmente expandida para G' , para isto basta colorir u . Isso pode ser feito pois $d(u) < k - 1$ e portanto existe alguma cor $A \in c'(V(G))$ que não ocorre em $N(u) = C$. Fazendo $c'(u) = A$ obtemos uma $(k - 1)$ - b -coloração de G' .

Caso 2: c não é b -coloração em G .

Veja que $G' = G - u$ e podemos aplicar o Lema 3. Como u não é dominante, vale a segunda afirmação do lema e então existe um conjunto de cores $\{A_1, A_2, \dots, A_t\} \subseteq c(V(G))$ que deixaram de ter dominantes em G pois todos seus dominantes estavam em $N(u)$ e u era o único vizinho com cor $c(u)$ desses dominantes. Observe que $N(u)$ é uma clique e portanto para cada cor A_i existe um único vértice $w_i \in N(u)$ tal que $c(w_i) = A_i$. Temos então que w_i era o único dominante de sua cor e u era o único vértice com cor $c(u)$ em $N(w_i)$ em G' , para todo $1 \leq i \leq t$. Considere uma nova coloração c' de G fazendo $c'(v) = c(v)$ para todo $v \in V(G) \setminus \{w_1\}$ e $c'(w_1) = c(u)$. Todos os vértices w_i com $i \geq 2$ voltaram a ter a cor $c(u)$ em suas vizinhanças mas podem ter deixado de ver somente a cor $c(w_1) = A_1$. Da mesma forma, os vértices dominantes em $V(G) \setminus N(u)$ podem ter deixado de ser dominantes somente pela ausência da cor A_1 . Como w_1 era o único dominante de sua cor, A_1 passa a não ter dominantes em c' . Seja então $c'' = \text{rem}(c', A_1)$. Em c'' todos os vértices que deixaram de ser dominantes pela ausência de A_1 voltam a ser dominantes e portanto c'' é uma $(k-1)$ - b -coloração de G . De mesma forma como no caso anterior, podemos expandir essa $(k-1)$ - b -coloração de G para uma $(k-1)$ - b -coloração de G' pois $d(u) < k - 1$. \square

Considerando a caracterização pelo esquema de eliminação perfeita, é fácil ver que todo grafo cordal (conexo) pode ser construído por uma sequência de operações $\text{simp}()$ iniciando-se com apenas um vértice. Logo, como corolário do Teorema 9, temos que todos grafos cordais são b -contínuos. Neste trabalho damos preferência a

abordagem construtiva através de operações que modificam o grafo mas vale notar que o Teorema 9 pode ser expresso equivalentemente da seguinte forma:

Corolário. *Seja G um grafo e v um vértice simplicial de G . Se $G - v$ é b-contínuo então G é b-contínuo.*

4.3.2 Adição de Vértice Gêmeo

Na seção anterior mostramos que a operação $\text{simp}()$ preserva b-continuidade. Observe que essa operação é uma generalização da operação σ_1 apresentada na Seção 2.2.3. Isso porque um vértice por si só é uma clique e portanto $\sigma_1(G, v) = \text{simp}(G, \{v\})$. Na prova de b-continuidade para os grafos distância-hereditários não usamos diretamente o fato de que σ_1 preserva b-continuidade. De fato, se as operações σ_2 e σ_3 também preservassem b-continuidade, obteríamos a b-continuidade dos grafos distância-hereditários como simples consequência de sua caracterização por essas operações. Surge então a pergunta natural se essa nova estratégia de prova poderia ser posta em prática e, mais precisamente, a pergunta : as operações σ_2 e σ_3 preservam b-continuidade?

Respondemos negativamente essa pergunta mostrando que as operações σ_2 e σ_3 não necessariamente preservam b-continuidade. Para mostrar que a operação σ_2 nem sempre preserva b-continuidade foi necessário encontrar um grafo b-contínuo G^* tal que existe $v \in V(G^*)$ onde $G' = \sigma_2(G^*, v)$ não é b-contínuo. De forma análoga, para mostrar que a operação σ_3 não necessariamente preserva b-continuidade foi preciso encontrar um grafo b-contínuo G^* que, após a adição de um gêmeo-verdadeiro, se obtém como resultado um grafo não b-contínuo G' .

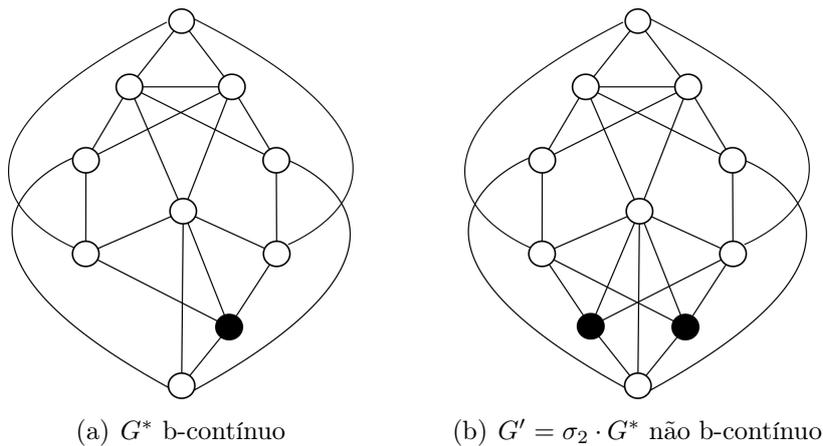


Figura 4.4: Contraexemplo para adição de gêmeo-falso

Vamos apresentar primeiramente o grafo G^* que satisfaz as condições mencionadas para a operação σ_2 . Este grafo se encontra na Figura 4.4(a). Este grafo

possui b-colorações apenas com 3 e 4 cores, apresentadas na Figura 4.5, e portanto trata-se de um grafo b-contínuo. Após realizar a operação σ_2 no vértice destacado da Figura 4.4(a) obtemos o grafo G' da Figura 4.4(b). Este novo grafo G' admite b-colorações, apresentadas na Figura 4.6, apenas com 3, 4 e 6 cores e portanto trata-se de um grafo não b-contínuo. Logo, os grafos G^* e G' representam um contraexemplo para a conjectura de que a operação σ_2 preserva b-continuidade.

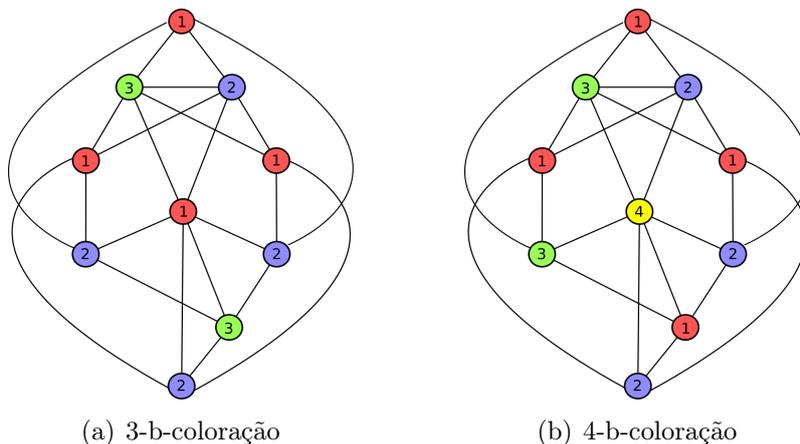


Figura 4.5: b-Colorações de G^*

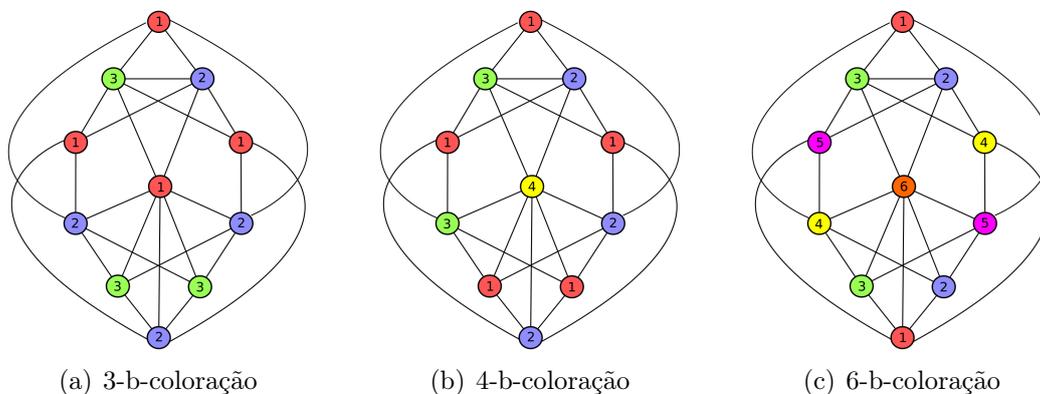


Figura 4.6: b-Colorações de $G' = \sigma_2 \cdot G^*$

Para verificar que os grafos G^* e $G' = \sigma_2 \cdot G^*$ não admitem k -b-coloração para outros valores de k além dos apresentados nas Figuras 4.5 e 4.6 foi utilizado o algoritmo de força bruta onde todas as colorações para esses grafos são geradas e testadas para as restrições de b-coloração. Mais precisamente, para encontrar as b-colorações de um grafo G o algoritmo de força bruta funciona da seguinte maneira: Consideramos uma ordem v_1, v_2, \dots, v_n dos vértices em $V(G)$ e um parâmetro $maxC$ que indica a maior cor que poderá ser atribuída a um vértice. Primeiramente, nenhum vértice tem cor atribuída e tentamos atribuir as cores de 1 a $maxC$ para v_1 . Após atribuída uma cor para v_i realizamos o mesmo processo recursivamente para

a sequência de vértices v_i, v_{i+1}, \dots, v_n . No passo geral, ao atribuir uma cor a um vértice v_i verificamos antes se este não possui vizinho colorido com esta cor. Este processo é um simples *backtracking* que gera todas as colorações dos vértices em $V(G)$ usando cores no conjunto $\{1, 2, \dots, \max C\}$. Escolhendo o parâmetro $\max C$ adequado, como $\max C = |V(G)|$ por exemplo, geramos todas as colorações de G . A cada momento que uma coloração c é gerada testamos esta coloração para a propriedade de ser b-coloração. Este teste é simples e é feito em duas fases. Na primeira fase realizamos uma busca em G para obter o conjunto S de vértices dominantes em G . Na segunda fase percorremos o conjunto S para verificar se todas as cores em $c(V(G))$ aparecem no conjunto S , ou seja $c(S) = c(V(G))$. Dessa forma, geramos todas as b-colorações do grafo G .

O auxílio de um programa de computador se torna útil já que, como mencionado na Seção 3.2, decidir se um grafo qualquer G admite b-coloração com k cores é um problema NP-completo. No nosso caso, podemos facilmente argumentar que o grafo G' não admite b-coloração com 7 ou mais cores, já que $m(G') = 6$ e, como observado na Seção 3.2, $\chi_b(G') \leq m(G')$. Porém, não encontramos na literatura resultados teóricos que nos auxiliem na argumentação de que o grafo G' não admite b-coloração com 5 cores. De fato, para mostrar que G' não admite 5-b-coloração teríamos que proceder com uma extensa análise de casos que se assemelha com um próprio algoritmo de força bruta.

No caso da operação σ_3 , os grafos que atestam que esta operação nem sempre preserva b-continuidade estão ilustrados na Figura 4.7. Utilizando o algoritmo de força bruta descrito obtemos que o grafo G^* da Figura 4.7(a) admite b-colorações apenas para os valores 3 e 4, sendo assim um grafo b-contínuo. Já o grafo G' ilustrado na Figura 4.7(b) admite b-coloração apenas com 3 ou 5 cores e portanto trata-se de um grafo não b-contínuo. Além disso, é fácil ver que o grafo G' pode ser obtido através de uma operação σ_3 no grafo G^* . De fato, $G' = \sigma_3(G^*, v)$. Podemos concluir então que a operação σ_3 não necessariamente preserva b-continuidade.

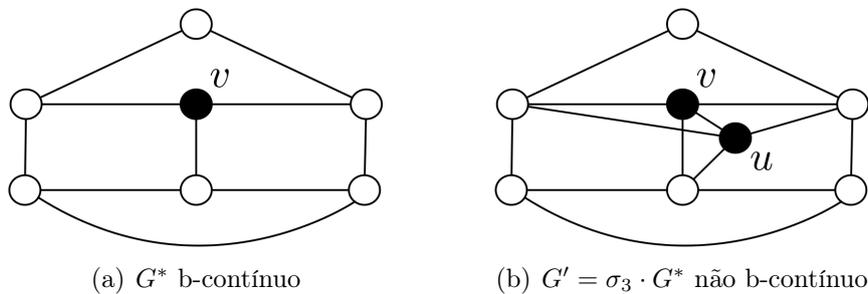


Figura 4.7: Contraexemplo para adição de gêmeo-verdadeiro

Como mencionado na Seção 3.3, utilizamos o algoritmo de *backtracking* descrito (para determinar os valores de k para os quais um grafo admite k -b-coloração) junto

com um processo de geração de grafos para encontrar o menor grafo não b-contínuo. Com esse mesmo procedimento, obtivemos a listagem dos grafos não b-contínuos com 8 vértices. Através da análise desta lista encontramos o grafo da Figura 4.7(b), que representa o contraexemplo para a conjectura de que a operação σ_3 preserva b-continuidade.

Para encontrar os grafos da Figura 4.4 que atestam que a operação σ_2 nem sempre preserva b-continuidade foi necessária outra abordagem. Isto porque a lista dos grafos não b-contínuos com 8 vértices gerada não continha um contraexemplo análogo para a operação σ_2 . Além disso, o fato de termos em mãos somente um algoritmo exponencial para obter as b-colorações dos grafos gerados, torna computacionalmente inviável a listagem sistemática de grafos não b-contínuos com mais do que 8 vértices.

Sendo assim, procuramos por um grafo H não b-contínuo, com par de vértices u e v gêmeos-falsos tal que $H - u$ fosse um grafo b-contínuo. Nesse caso, fazendo $G^* = H - u$ e $G' = H = \sigma_2(G^*, v)$ temos o resultado esperado. A busca pelo grafo H , e não por G^* diretamente, se torna mais interessante pois algumas propriedades estruturais de H podem ser derivadas de suas restrições. Por não ser b-contínuo, e utilizando os resultados conhecidos de b-continuidade, sabemos que podemos procurar por um grafo H conexo, que não é cografo (e portanto tem P_4 induzido), não é cordal (e portanto tem ciclo sem corda) e não é um grafo distância-hereditário. Outras propriedades estruturais de H surgem através da tentativa de provar que a operação de gêmeo-falso preserva b-continuidade. Na tentativa de provar que o grafo H , junto com uma k -b-coloração, possui uma $(k - 1)$ -b-coloração, observa-se a dificuldade de concluir a demonstração no caso de $H - u$ não estar b-colorido e diversos dominantes serem afetados com a remoção de v . De fato, observando a 6-b-coloração de G' na Figura 4.6(c) nota-se que a remoção de um gêmeo-falso faz com que as cores 1, 4 e 5 deixem de ter dominante. De forma geral, derivamos informações sobre H através das falhas na tentativa de demonstrar que a operação σ_2 preserva b-continuidade, junto com propriedades estruturais decorrentes do fato de H não ser b-contínuo. Essas informações não foram suficientes para determinar $G' = H$ unicamente, mas foram fundamentais em auxiliar no processo de busca pelo contraexemplo, culminando no grafo G' da Figura 4.4(b).

4.3.3 Identificar por Cliques

Como enunciado no Teorema 6 é sabido que a operação de união disjunta preserva b-continuidade. Motivados por esse resultado, consideramos uma operação mais interessante onde o grafo gerado não é mais a união disjunta dos operandos, mas sim a identificação de cliques nos grafos operandos para que esses não sejam mais

disjuntos. Mais precisamente temos :

Definição 12. Sejam G_1 e G_2 dois grafos disjuntos e $C_1 \subseteq V(G_1)$ e $C_2 \subseteq V(G_2)$ duas cliques tal que $|C_1| = |C_2| = t$. Considere que $C_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ e $C_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_t\}$. Definimos a operação $iden()$ como aquela que cria o novo grafo $G = iden(G_1, C_1, G_2, C_2)$ identificando os vértices v_i e u_i , para $1 \leq i \leq t$. Mais precisamente temos :

- $V(G) = (V(G_1) \setminus C_1) \cup (V(G_2) \setminus C_2) \cup \{w_1, w_2, \dots, w_t\}$.
- $E(G) = E(G_1 - C_1) \cup E(G_2 - C_2) \cup \{zw_i \mid zv_i \in E(G_1) \text{ ou } zu_i \in E(G_2)\} \cup \{w_i w_j \mid 1 \leq i < j \leq t\}$.

A operação $iden()$ apenas “cola” os grafos G_1 e G_2 identificando duas cliques de mesmo tamanho, uma em G_1 e outra em G_2 . Na Figura 4.8 ilustramos um exemplo da operação $iden()$ onde os conjuntos C_1 e C_2 estão representados pelos vértices em destaque. Na definição 12, por uma questão de formalidade, inserimos novos vértices w_i com o papel de representar os vértices v_i e u_i em $G = iden(G_1, C_1, G_2, C_2)$ depois que estes são identificados. Dessa forma, em G , para efeitos práticos temos que $v_i = u_i = w_i$, $1 \leq i \leq |C_1|$. Por questões de simplicidade nos referirmos a $v_i \in V(G_1)$ também quando falamos dos vértices de G , assumindo então que $v_i \in V(G)$. Da mesma forma, $u_i \in V(G_2)$ também é tratado como vértice de G . Seguindo esse raciocínio consideramos que $C_1 = C_2$ em G e, quando queremos falar desta clique que foi identificada, vamos utilizar também a notação C_1 .

De forma geral, quando as cliques C_1 e C_2 estiverem claras pelo contexto, ou quando não importar suas especificações, denotaremos a operação por $iden(G_1, G_2)$.

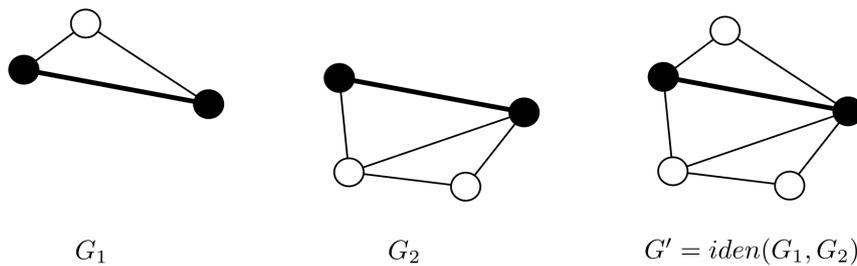


Figura 4.8: Exemplo da operação $iden()$

O principal resultado desta seção é o Teorema 10 que nos diz que a operação $iden()$ preserva b-continuidade quando as cliques identificadas tem tamanho 1 ou 2. Para provar este teorema vamos prosseguir com uma sequência de lemas auxiliares. Vale notar que, por não apresentar maior dificuldade, os próximos lemas não assumem que o tamanho da clique C_1 (e por consequência o tamanho da clique C_2) é limitado.

Lema 7. Sejam G_1 e G_2 grafos e $G = \text{iden}(G_1, C_1, G_2, C_2)$. Seja k um inteiro tal que $k > \chi(G)$. Se G_1 , ou G_2 , admite $(k - 1)$ -b-coloração então G admite $(k - 1)$ -b-coloração.

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que G_1 admite uma $(k - 1)$ -b-coloração c_1 . Considere então c_2 , uma $\chi(G_2)$ -coloração de G_2 . Como $C_1 = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ e $C_2 = \{u_1, u_2, \dots, u_t\}$ são cliques temos que cada vértice da clique recebe uma cor diferente. Podemos então renomear as cores em c_2 de forma que $c_1(v_i) = c_2(u_i)$, $1 \leq i \leq t$. Após renomear as cores em c_2 estas colorações podem ser unidas em uma nova coloração c_3 de G onde $c_3(v) = c_1(v)$, se $v \in V(G_1)$, e $c_3(v) = c_2(v)$ se $v \in V(G_2)$. Como G_2 é subgrafo de G temos que $\chi(G) \geq \chi(G_2)$ e portanto $k > \chi(G_2)$. Temos então $k - 1$ cores em c_1 e no máximo $k - 1$ cores em c_2 . Dessa forma a coloração c_3 de G é uma $(k - 1)$ -coloração de G . A coloração c_3 é também uma $(k - 1)$ -b-coloração pois os dominantes em $V(G_1)$ pela coloração c_1 continuam dominantes em c_3 , já que a coloração c_3 é extensão da coloração c_1 . Logo, G admite $(k - 1)$ -b-coloração. \square

Lema 8. Sejam G_1 e G_2 grafos b-contínuos e $G = \text{iden}(G_1, C_1, G_2, C_2)$. Seja k um inteiro tal que $k > \chi(G)$. Se G_1 , ou G_2 , admite k -coloração c tal que c é k -b-coloração ou c tem apenas uma cor sem dominante, então G admite $(k - 1)$ -b-coloração.

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que G_1 admite k -coloração c tal que c é k -b-coloração ou c tem apenas uma cor sem dominante. Como G_1 é subgrafo de G temos que $\chi(G) \geq \chi(G_1)$ e portanto $k > \chi(G_1)$. Se c é uma k -b-coloração, por G_1 ser b-contínuo, temos que G_1 admite $(k - 1)$ -b-coloração. Se c tem apenas uma cor $A \in c(V(G_1))$ sem dominante, pelo corolário do Lema 2, ao aplicar a operação $\text{rem}(A)$ em \mathbf{G}_1 obtemos uma $(k - 1)$ -b-coloração de G_1 . Em ambos os casos temos que G_1 admite $(k - 1)$ -b-coloração e portanto, pelo Lema 7, G admite $(k - 1)$ -b-coloração. \square

Lema 9. Sejam G_1 e G_2 grafos b-contínuos e $G = \text{iden}(G_1, C_1, G_2, C_2)$. Seja c uma k -b-coloração de G tal que $k > \chi(G)$. Se existe vértice $v \in C_1$ tal que v é o único dominante de sua cor e existe cor $A \notin c(C_1 \cup N_{G_2}(v))$ sem dominantes em $V(G_1)$, então G admite $(k - 1)$ -b-coloração.

Demonstração. A Figura 4.9 ilustra as hipóteses do lema. O círculo tracejado em G_1 indica que a cor A não tem dominantes em $V(G_1)$. Além disso, indicamos pelas marcações de “X” que a cor A não está na clique central e tão pouco na vizinhança de v que diz respeito a G_2 .

Seja $B = c(v)$ e considere a coloração c' , de G , obtida após aplicar a operação $\text{sw}(c, A, B)$ em \mathbf{G}_1 . Em outras palavras, trocamos as cores A e B somente em

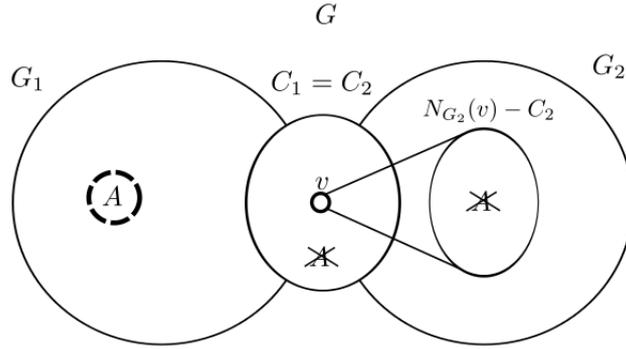


Figura 4.9: Hipóteses do Lema 9

$V(G_1)$ para obter uma nova coloração c' de G . Primeiramente, c' é coloração de G . Isso porque, pelas propriedades das operação $sw()$, c' é coloração de G_1 e também é coloração em G_2 pois o único vértice em $V(G_2)$ que teve cor alterada foi v e A não aparece em sua vizinhança em G_2 . Como A não tinha dominantes em G_1 , pelas propriedades da operação $sw()$ descritas no Lema 1, a cor B passa a não ter dominante em G_1 . Como v era o único dominante de sua cor a cor B passa a não ter dominantes em G_2 também. Além disso, os vértices que eram dominantes em $V(G_1) \setminus C_1$ continuam sendo dominantes em c' . Os vértices em G_2 que eram dominantes só deixaram de ser, no máximo, a cor B . Logo, a cor B deixou de ter dominantes e os vértices que possivelmente deixaram de ser dominantes tem apenas a cor B faltando em sua vizinhança. Portanto, após realizar a operação $rem(c', B)$ obtemos uma $(k - 1)$ -b-coloração de G . \square

Observe que a operação $iden(G_1, G_2)$ não é alterada quando trocamos a ordem dos grafos G_1 e G_2 . Como consequência disso, o Lema 9 continua valendo quando trocamos G_1 por G_2 em suas hipóteses. Mais precisamente, o lema ainda vale quando consideramos a hipótese: se existe $v \in C_1$ tal que v é o único dominante de sua cor e existe cor $A \notin c(C_1 \cup N_{G_1}(v))$ sem dominantes em $V(G_2)$.

Lema 10. Sejam G_1 e G_2 grafos b -contínuos e $G = iden(G_1, C_1, G_2, C_2)$. Seja c uma k -b-coloração de G tal que $k > \chi(G)$. Se existe cor $A \in c(V(G))$ tal que $A \notin c(C_1)$ e A não tem dominantes em $V(G_1)$, então G admite $(k - 1)$ -b-coloração.

Demonstração. Se existe $v \in C_1$ tal que v é o único dominante de sua cor e $A \notin N_{G_2}(v)$ estamos exatamente nas hipóteses do Lema 9 e não resta nada a provar. Logo, daqui em diante podemos considerar a seguinte hipótese adicional:

Hipótese 1. $\forall u \in C_1$, u não é o único dominante de sua cor ou $A \in c(N_{G_2}(u))$.

Além disso, se a coloração c restrita a G_2 é uma k -b-coloração ou tem apenas uma cor (do conjunto $c(V(G))$) sem dominante, podemos aplicar o Lema 8 e não há mais nada a provar. Logo, vamos também considerar a seguinte hipótese:

Hipótese 2. Existem pelo menos duas cores de $c(V(G))$ que não tem dominantes em $V(G_2)$.

Pela Hipótese 2, existe cor $B \in c(V(G))$ que não tem dominante em $V(G_2)$. Vamos então prosseguir a prova com dois casos.

Caso 1: $B \notin c(C_1)$.

Ambas as cores A e B não estão na clique C_1 . Como c é b-coloração de G temos que a cor A deve ter dominante em $V(G_2) \setminus C_1$, pois por hipótese esta não tem dominantes em $V(G_1)$. Por um raciocínio análogo a cor B deve ter dominantes em $V(G_1) \setminus C_1$. Logo, as cores A e B são distintas. A Figura 4.10 ilustra a coloração c no atual caso. Os círculos tracejados indicam a ausência de dominantes com determinada cor enquanto que os círculos destacados indicam a presença de dominantes.

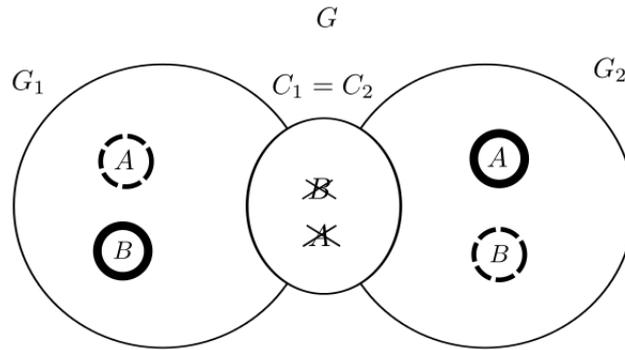


Figura 4.10: Caso 1 do Lema 10

Considere então a coloração c' obtida pela aplicação da operação $sw(c, A, B)$ em G_2 . Temos que c' é coloração de G pois nenhum vértice em $V(G_1)$, incluindo a clique central C_1 , teve sua cor alterada e, pelas propriedades da operação $sw()$, c' é coloração em $V(G_2)$. Pelo corolário do Lema 1 a cor A passa a não ter dominante em $V(G_2)$ e portanto deixa de ter dominante em G . Considere a seguinte partição de $V(G)$: $S_1 = V(G_1) \setminus C_1$, $S_2 = C_1$ e $S_3 = V(G_2) \setminus C_1$. Os vértices dominantes em S_1 não tiveram as cores em sua vizinhança alteradas e portanto continuam dominantes em c' . Os vértices dominantes em S_3 continuam dominantes em c' , pelas propriedades da operação $sw()$ descritas no Lema 2. Os vértices $v \in S_2$ podem ter deixado de serem dominantes pela ausência das cores A ou B em $N_{G_2}(v)$. Seja $v \in S_2$ um vértice que deixou de ser dominante em c' . Pela Hipótese 1 temos que v não era o único dominante da sua cor ou $A \in c(N_{G_2}(v))$, na coloração c . Se v não era o único dominante de sua cor é porque existem dominantes da cor $c(v)$ em S_1 ou S_3 que foram preservados em c' , porque $c(v) \notin \{A, B\}$. Nesse caso, a cor $c(v)$ tem dominantes em c' . Já no caso em que $A \in c(N_{G_2}(v))$, após realizar a operação $sw(c, A, B)$ obtemos que $B \in c'(N_{G_2}(v))$. Nesse caso, v deixa de ser dominante

somente pela ausência da cor A . Portanto, na nova coloração c' a cor A deixa de ter dominantes e as demais cores que possivelmente deixaram de ter dominantes são devido a ausência da cor A na vizinhança de vértices em C_1 . Logo, após realizar a operação $rem(c', A)$ obtemos uma $(k - 1)$ -b-coloração de G .

Caso 2: $B \in c(C_1)$.

Seja c_1 a coloração c restrita a $V(G_1)$ e c_2 a restrição de c a $V(G_2)$. Neste caso trabalharemos com as colorações c_1 de G_1 e c_2 de G_2 separadamente para, ao final, junta-las em uma $(k - 1)$ -b-coloração de G . Além disso, como C_1 é clique, seja $v \in C_1$ o único vértice tal que $c(v) = B$.

Lembrando que a cor B não tem dominantes em $V(G_2) \setminus C_1$, seja c'_2 a nova coloração de G_2 após aplicar a operação $rem(c_2, B)$ em G_2 . Pelo Lema 2 os vértices deixam de ver (em c'_2) em suas vizinhanças, no pior caso, somente a cor B . Seja $D \in c(V(G_2))$ a cor atribuída a v após a operação $rem(c_2, B)$, ou seja $c'_2(v) = D$. Veja que, como v recebeu a cor D temos que $D \notin c_2(C_1)$. Neste ponto, a coloração c_1 e c'_2 diferem, no que diz respeito as cores dos vértices em C_1 , somente na atribuição da cor de v . Isso porque $c_1(v) = B$ e $c'_2(v) = D$ e $B \neq D$. Vamos então dividir a demonstração em outros dois casos onde vamos alterar a coloração c_1 para que esta fique de acordo com a coloração c'_2 . Ao final desse processo a cor B ficará sem dominantes em $V(G_1)$ e $V(G_2)$. Além disso, os vértices dominantes das demais cores, em c , deixam de ver somente a cor B . Neste momento poderemos remover a cor B para obter uma $(k - 1)$ -b-coloração de G .

Caso 2.1: A cor D não tem dominantes em c_1 .

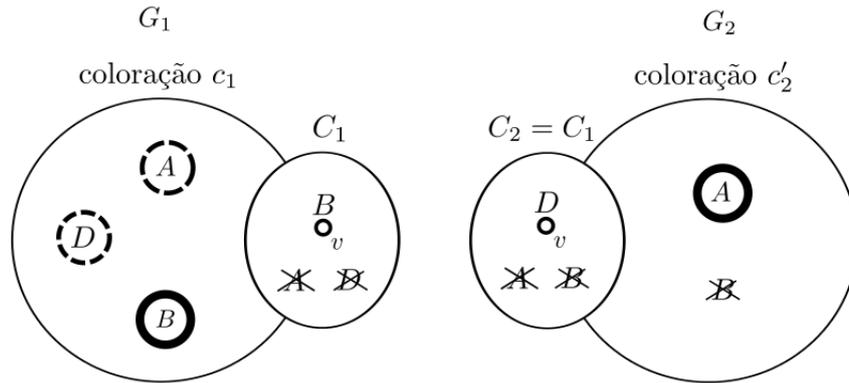


Figura 4.11: Caso 2.1 do Lema 10

A Figura 4.11 ilustra o cenário que encontramos no atual caso. Na coloração c a cor B não tem dominantes em $V(G_2) \setminus C_1$ e, como c é b-coloração, B deve ter dominantes em $V(G_1)$. Como discutido anteriormente, $D \notin c_2(C_1)$ e portanto $D \notin c_1(C_1)$. Neste caso, além da cor A , a cor D também não possui dominantes em $V(G_1)$ o que indicamos pelos círculos tracejados.

Considere então a coloração $c'_1 = sw(c_1, B, D)$, onde trocamos as cores B e D em G_1 . Pelas propriedades descritas no Lema 1 e seu corolário a cor B passa a não ter dominantes em c'_1 . Além disso, vértices dominantes (em relação à coloração c) em $V(G_1) \setminus C_1$ continuam dominantes na coloração c'_1 . Como $c'_1(v) = D$ os vértices em C_1 deixam de ver, possivelmente, somente a cor B . As colorações c'_1 e c'_2 se comportam de forma igual em C_1 já que $c'_1(u) = c'_2(u)$, $\forall u \in C_1$. Podemos então considerar a coloração c' de G que é “união” dessas duas colorações. Na coloração c' a cor B não tem dominantes, pois esta cor não está presente na clique identificada e não possui dominantes em c'_1 e tão pouco em c'_2 . Os vértices em $V(G_1) \setminus C_1$ que eram dominantes em c continuam dominantes em c' . Os vértices em C_1 deixam de ver em sua vizinhança, no pior caso, somente a cor B . O mesmo ocorre para os vértices em $V(G_2) \setminus C_1$. Logo, após realizar a operação $rem(c', B)$ em G obtemos uma $(k - 1)$ -b-coloração de G .

Caso 2.2: A cor D tem dominantes em c_1 .

A Figura 4.12 ilustra o cenário do Caso 2.2. Veja que esta figura é semelhante a que encontramos no Caso 2.1 porém o círculo em G_1 com a cor D passa a estar destacado, indicando que a cor D tem dominantes em $V(G_1)$. Como D tem dominantes em G_1 sabemos também que $D \neq A$. Considere então a coloração $c'_1 = sw(c_1, A, D)$, onde trocamos as cores A e D em G_1 . Pelo Lema 1 e seu corolário sabemos que, em c'_1 , a cor D passa a não ter dominantes (e a cor A passa a ter dominantes). Logo, os vértices em $V(G_1) \setminus C_1$ que eram dominantes em relação à coloração c , e portanto são dominantes em relação à c_1 , continuam sendo dominantes em c'_1 . Os vértices em C_1 não tiveram suas cores alteradas e, em suas vizinhanças relativas a G_1 , podem ter deixado de ver a cor D ou a cor A porém não ambas.

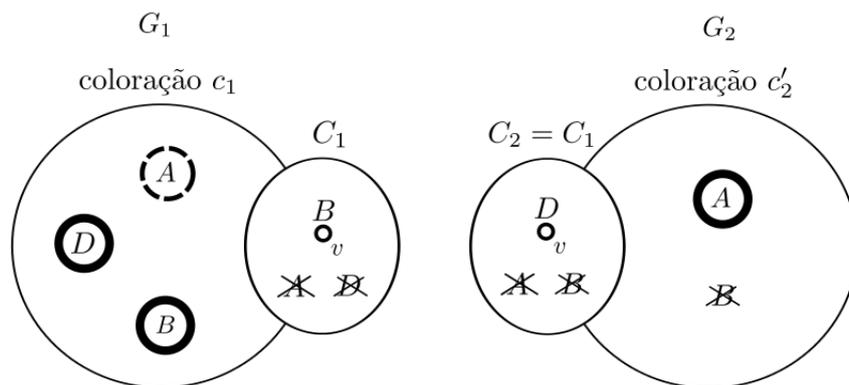


Figura 4.12: Caso 2.2 do Lema 10

A coloração c'_1 ainda não está de acordo com a coloração c'_2 já que $c'_1(v) = B \neq D = c'_2(v)$. Portanto, considere a coloração $c''_1 = sw(c'_1, B, D)$, onde trocamos as cores B e D em G_1 . Como a cor D não possuía dominantes em c'_1 (e a cor B possuía) sabemos que em c''_1 essa situação se inverte de forma que a cor B passa a

não ter dominantes em $V(G_1)$ (enquanto que a cor D passa a ter dominantes em $V(G_1)$). Além disso, pelo mesmo raciocínio do parágrafo acima, os vértices que são dominantes em $V(G_1) \setminus C_1$, em relação à coloração c , continuam dominantes em relação à coloração c'_1 . Observe que v podia ser o único dominante de sua cor na coloração c de G . Neste caso a cor D não tem dominantes na coloração restrita a $V(G_1)$ mas como v era dominante, ao unir as colorações c'_1 e c'_2 o vértice v passa a ser dominante para a cor D .

Portanto, as cores $X \notin \{A, B, D\}$ que tinham dominantes, em relação à coloração c , no conjunto $V(G_1) \setminus C_1$, continuam tendo dominantes em c'_1 . A coloração c'_1 está de acordo com a coloração c'_2 e podemos “uni-las” na coloração c' de G . Considere a seguinte partição de $V(G)$: $S_1 = V(G_1) \setminus C_1$, $S_2 = C_1 \setminus \{v\}$, $S_3 = V(G_2) \setminus C_1$ e $S_4 = \{v\}$. Como já mencionado, os vértices de S_1 que eram dominantes em relação à coloração c ainda o são na coloração c' . No caso de v ser o único dominante da cor B na coloração c de G a cor $D \in S_1$ deixa de ter dominantes em S_1 porém v passa a ser dominante da cor D em c' . Os vértices em S_3 que eram dominantes em relação à coloração c deixam de ver em suas vizinhanças, no pior caso, somente a cor B . Seja u um vértice em S_2 que é dominante em relação à coloração c . Vamos mostrar que a cor $c(u)$ continua tendo dominantes em c' , exceto possivelmente pela ausência da cor B na vizinhança. Em $c'_2(N_{G_2}(u))$ temos as mesmas cores que em $c_2(N_{G_2}(u))$ exceto a possível ausência da cor B . Após as modificações na coloração c_1 (que levaram à coloração c'_1) as cores em $c_1(N_{G_1}(u))$ são as mesmas que em $c'_1(N_{G_1}(u))$ exceto a possivelmente ausência das cores B e A (note que $uv \in E(G) \Rightarrow D \in c'(N(u))$). Como a cor B será removida ao final do processo, não é preocupante a ausência da cor B na vizinhança de u . Porém a ausência da cor A pode representar problemas já que u pode ter deixado de ser o único dominante da cor $c(u)$ na nova coloração c' . Mas veja que, pela Hipótese 1 o vértice u não é o único dominante de sua cor ou $A \in c(N_{G_2}(u))$, em relação à coloração c . Se u não é o único dominante de sua cor então $c(u)$ tem outros dominantes em $S_1 \cup S_3$ que, como já analisado, permanecem dominantes na coloração c' exceto a possível ausência da cor B na vizinhança. Por outro lado, se $A \in c(N_{G_2}(u))$ temos que $A \in c_2(N_{G_2}(u)) \Rightarrow A \in c'_2(N_{G_2}(u)) \Rightarrow A \in c'(N_{G_2}(u))$ de forma que a cor u não deixa de ver A em c' e continua sendo um dominante da cor $c(u)$. Logo, as cores em $c(S_1 \cup S_2 \cup S_3)$ continuam tendo dominantes em c' a menos da possível ausência da cor B nas vizinhanças. Dessa forma, após aplicar a operação $rem(c', B)$ em G obtemos uma $(k - 1)$ -b-coloração de G . \square

O Lema 10 representa o resultado mais forte que temos quando não limitamos o tamanho das cliques identificadas. Vale notar que, pelo mesmo raciocínio feito nos lemas anteriores, a operação $iden()$ não depende da ordem dos grafos G_1 e G_2 e

nenhuma característica intrínseca destes grafos é usada na demonstração. Portanto, podemos intercambiar os grafos G_1 e G_2 na hipótese do Lema 10 obtendo o seguinte corolário:

Corolário. *Sejam G_1 e G_2 grafos b -contínuos e $G = \text{iden}(G_1, C_1, G_2, C_2)$. Seja c uma k - b -coloração de G tal que $k > \chi(G)$. Se existe cor $A \in c(V(G))$ tal que $A \notin c(C_1)$ e A não tem dominantes em $V(G_2)$, então G admite $(k - 1)$ - b -coloração.*

Finalmente, de posse deste lema estamos em condição de provar o seguinte teorema:

Teorema 10. *Sejam G_1 e G_2 dois grafos e $G = \text{iden}(G_1, C_1, G_2, C_2)$ tal que $|C_1| \leq 2$. Se G_1 e G_2 são b -contínuos então G é b -contínuo.*

Demonstração. Seja c uma k - b -coloração de G , tal que $k > \chi(G)$. Para provar que G é b -contínuo basta mostrar que G admite uma $(k - 1)$ - b -coloração. Considere c_1 a coloração de G_1 obtida pela restrição de c a $V(G_1)$ e c_2 a coloração de G_2 obtida pela restrição de c a $V(G_2)$. Se a coloração c_1 não é uma k -coloração então existe uma cor $A \in c(V(G))$ que só está presente em $V(G_2) \setminus C_1$ e portanto esta cor não tem dominantes em $V(G_1)$ na coloração c . Aplicando o Lema 10 à cor A concluímos a prova. Vamos considerar então que c_1 é uma k -coloração e, pelo raciocínio análogo, c_2 também.

Se a coloração c_1 é uma k - b -coloração ou tem apenas uma cor sem dominante, pelo Lema 8, G admite $(k - 1)$ - b -coloração e não há mais nada a provar. Portanto, c_1 tem duas ou mais cores sem dominantes. Seja $N_1 = \{A_1, A_2, \dots, A_{t_1}\}$ o conjunto das cores sem dominantes de c_1 , com $t_1 \geq 2$. Aplicando o raciocínio análogo para a coloração c_2 de G_2 , seja $N_2 = \{B_1, B_2, \dots, B_{t_2}\}$ o conjunto das cores sem dominantes de c_2 , com $t_2 \geq 2$.

Observe que, se existir cor $X \notin c(C_1)$ sem dominantes em $V(G_1)$ ou $V(G_2)$, pelo Lema 10 (e seu corolário), G admite $(k - 1)$ - b -coloração. Dessa forma, se existir $X \in N_1 \cup N_2$ tal que $X \notin c(C_1)$ a prova está concluída. Então, no caso que resta, temos que $(N_1 \cup N_2) \subseteq c(C_1)$. Porém, se $|C_1| = |C_2| = 1$ ambas as cores em $\{A_1, A_2\}$ não podem estar em $c(C_1)$ e não há mais nada a provar.

Se $|C_1| = |C_2| = 2$, temos que $|c(C_1)| = 2$. Além disso, $2 \leq |N_1 \cup N_2| \leq 4$ pois $t_1 \geq 2$ e $t_2 \geq 2$. Então, para que $(N_1 \cup N_2) \subseteq c(C_1)$ é preciso que $|N_1 \cup N_2| = 2$ o que implica $N_1 = N_2 = c(C_1) = \{A_1, A_2\}$. Seja $v \in C_1$ tal que $c(v) = A_1$ e $u \in C_1$ com $c(u) = A_2$. Como a cor A_1 não tem dominante na coloração c_1 , não existem dominantes de A_1 , em relação à coloração c , em $V(G_1) \setminus C_1$. Da mesma forma, não existem dominantes de A_1 , em relação à coloração c , em $V(G_2) \setminus C_1$. Logo, o único dominante da cor A_1 em c é o vértice v . Pelo mesmo raciocínio o único dominante da cor A_2 em c é o vértice u . Note também que, como c_2 é k -coloração e $N_2 = \{A_1, A_2\}$ é verdade que todas as cores em $c(V(G)) \setminus \{A_1, A_2\}$ tem dominantes em $V(G_2) \setminus C_1$.

O vértice v não é dominante em c_1 e seja $D \in c(V(G)) \setminus \{A_1\}$ uma cor não presente na vizinhança de v em relação a G_1 , ou seja $D \notin c(N_{G_1}(v))$. Considere então a coloração c' obtida quando realizamos a operação $sw(A_1, D)$ em $G_1 - v$. Em outras palavras, trocamos as cores A_1 e D nos vértices em $V(G_1) \setminus \{v\}$. Observe que, pelas propriedades da operação $sw()$ a atribuição de cores c' é coloração em $G_1 - v$. Além disso, como $D \notin c(N_{G_1}(v))$, as cores em $c(N_{G_1}(v))$ não foram alteradas e c' é coloração em G_1 . Finalmente, c' é coloração em G pois nenhuma cor em G_2 foi alterada. Como v era o único dominante de sua cor em c , a cor D passa a não ter dominantes em $V(G_1)$. Se a coloração c' é uma k -b-coloração aplicamos o Lema 10 à cor D e não há mais nada a provar. Suponha então que c' não é k -b-coloração. Porém, a coloração em G_2 não foi alterada e todas as cores em $c(V(G)) \setminus \{A_1, A_2\}$ continuam tendo dominantes em $V(G_2) \setminus C_1$ na coloração c' . Além disso, v não teve cores alteradas em sua vizinhança e portanto continua sendo vértice dominante da cor A_1 em c' . Logo, a cor que deixou de ter dominantes tem de ser A_2 e somente esta. Após aplicar a operação $rem(c', A_2)$ obtemos então uma $(k - 1)$ -b-coloração de G . \square

Note que, no grafo $G = iden(G_1, C_1, G_2, C_2)$ a clique C_1 é uma clique separadora (exceto o caso de borda onde $V(G) = C_1$). De fato, o resultado do Teorema 10 pode ser expresso equivalentemente pelo seguinte corolário.

Corolário. *Seja G um grafo e $C_1 \subseteq V(G)$ uma clique separadora de G tal que $|C_1| \leq 2$. Seja S_1, S_2 uma partição dos vértices de $V(G) \setminus C_1$ tal que as componentes conexas de $G - C_1$ estão contidas inteiramente em S_1 ou S_2 . Se os grafos $G[C_1 \cup S_1]$ e $G[C_1 \cup S_2]$ são b -contínuos então G é b -contínuo.*

O corolário acima segue do fato que fazendo $G_1 = G[C_1 \cup S_1]$ e $G_2 = G[C_1 \cup S_2]$ temos que $G = iden(G_1, C_1, G_2, C_1)$. Optamos por desenvolver o resultado presente no Teorema 10 dentro do contexto de operações que preservam b -continuidade mas, como podemos observar pelo corolário acima, tal resultado também se insere no contexto da decomposição por cliques separadoras. De fato, como consequência direta do corolário acima temos outro corolário.

Corolário. *Seja G um grafo. Se G admite uma decomposição por cliques separadoras, utilizando-se somente cliques de tamanho menor ou igual a 2, onde todos os átomos são grafos b -contínuos, então G é b -contínuo.*

Em particular, quando consideramos uma decomposição somente por articulações temos o seguinte resultado.

Corolário. *Seja G um grafo. Se as componentes biconexas de G são b -contínuas, então G é b -contínuo.*

A dificuldade de generalizar a demonstração do Teorema 10 para cliques de tamanho quaisquer se dá em dois pontos. Primeiramente, usando a terminologia estabelecida na demonstração, deixa de ser necessariamente verdade que os vértices em C_1 são os únicos dominantes de suas cores, mesmo valendo que $(N_1 \cup N_2) \subseteq c(C_1)$. O segundo ponto é que, após aplicar a operação $sw(A_1, D)$ em $G_1 - v$ mais do que uma cor dentro da clique C_1 pode deixar de ter dominantes, de forma que não podemos utilizar a operação $rem()$ para obter $(k - 1)$ -b-coloração.

Apesar das dificuldades descritas no parágrafo acima, não encontramos um contraexemplo para a generalização do Teorema 10 para cliques maiores que 2. Na realidade, acreditamos que o Lema 10 seja suficientemente forte para permitir desenvolver uma prova de que a operação $iden(G_1, C_1, G_2, C_2)$ preserva b-continuidade para cliques de tamanho quaisquer. Dessa forma, propomos a seguinte conjectura.

Conjectura. *A operação $iden(G_1, G_2, C)$ preserva b-continuidade.*

4.3.4 Grafos Periplanares

Nas Seções 4.3.1 e 4.3.3 mostramos que certas operações preservam b-continuidade. Tais resultados não assumem que os grafos em questão pertencem a alguma classe específica e tão pouco utilizam fortemente propriedades estruturais destes grafos. Os Teoremas 6, 7, 9 e 10 assumem, em essência, somente a b-continuidade dos grafos usados pelas operações. Acreditamos que tal característica é interessante, pois permite a utilização destes teoremas em diversos aspectos, inclusive para estabelecer a b-continuidade de classes específicas de grafos. Por exemplo, nesta seção vamos utilizar estes teoremas para apresentar uma simples prova de que os grafos periplanares são b-contínuos.

Como visto na Seção 2.2.4, os grafos periplanares constituem uma famosa subclasse dos grafos planares. Nem todos os grafos planares são b-contínuos. Como foi discutido na Seção 3.3, o grafo da Figura 4.13 é o menor grafo não b-contínuo, admitindo b-colorações somente com 2 e 4 cores. Além disso, é fácil verificar que este grafo é planar. Na literatura revisada encontramos poucos resultados relacionando b-continuidade e grafos planares. Um deles, enunciado no próximo teorema, estabelece b-continuidade para uma subclasse muito específica dos grafos planares.

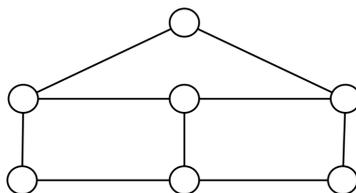


Figura 4.13: Grafo planar não b-contínuo

Teorema 11 ([22]). *Seja G um grafo planar conexo tal que $g(G) \geq 5$ e considere $t = m(G)$. Se G tem t vértices v_1, v_2, \dots, v_t tal que $d(v_i) \geq t - 1$ para todo $1 \leq i \leq t$ e $\text{dist}(v_i, v_j) \geq 5$ para todo $i \neq j$, então $\chi_b(G) = m(G)$ e G é b-contínuo.*

Os grafos *cactus* são aqueles para os quais todo par de ciclos tem no máximo um vértice em comum. Uma caracterização bem conhecida na literatura é de que um grafo G , com $|V(G)| > 1$, é cactus se, e somente se, toda componente biconexa de G é uma aresta ou um ciclo sem cordas. Por essa caracterização, e pelo Teorema 4, fica claro que se trata de uma subclasse dos grafos periplanares. Em [23], utilizando-se técnica semelhante a utilizada em [22], é provado que os grafos cactus são b-contínuos. Utilizando o Teorema 10 somos capazes de facilmente generalizar tal resultado para a classe dos grafos periplanares.

Teorema 12. *Os grafos periplanares são b-contínuos.*

Demonstração. Seja G um grafo periplanar. Pelo Teorema 10 e seus corolários, basta provar as componentes biconexas de G são b-contínuas. Pela caracterização dos grafos periplanares enunciada no Teorema 4, as componentes biconexas de G são arestas ou ciclos que podem ser representados no plano de forma que suas cordas não se cruzam. Como arestas são grafos b-contínuos, basta provar que os ciclos periplanares são grafos b-contínuos. Seja H um grafo ciclo nestas condições e seja $V(H) = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$ de forma que v_1, v_2, \dots, v_t é um ciclo. Se H não tem cordas é fácil ver que $2 \leq \chi(H) \leq 3$ e $2 \leq \chi_b(H) \leq 3$ de forma que H é b-contínuo. Se H possui uma corda $v_i v_j$ estamos na situação descrita na Figura 4.14.

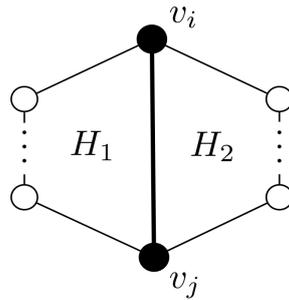


Figura 4.14: Decomposição do ciclo periplanar

Neste caso $\{v_i, v_j\}$ formam uma clique separadora de tamanho 2, pois nenhuma corda do ciclo pode cruzar a aresta $v_i v_j$. Utilizando a clique $\{v_i, v_j\}$ para realizar uma decomposição por clique separadoras, obtemos os grafos H_1 e H_2 . Os grafos H_1 e H_2 são também ciclos periplanares. Procedendo recursivamente com a decomposição em H_1 e H_2 obtemos átomos que são ciclos sem cordas. Todos os átomos são b-contínuos e a decomposição utiliza cliques de tamanho 2. Logo, pelo Teorema 4 e seus corolários, H é b-contínuo e portanto G é b-contínuo. \square

Capítulo 5

Conclusões

Neste trabalho foram apresentados os principais conceitos relacionados a b-coloração, como o problema do número b-cromático e o conceito de b-continuidade. Nos aprofundamos no estudo da b-continuidade em grafos onde novos resultados foram obtidos.

Na Seção 4.1 introduzimos e analisamos algumas técnicas para manipular uma b-coloração. Foi feito um estudo sistemático de como algumas formas de alterar a coloração se relacionam com as propriedades de dominância dos vértices. No desenvolvimento dos resultados das seções posteriores usamos com sucesso tais técnicas, indicando a sua utilidade no estudo de b-continuidade. Essas técnicas foram propostas baseadas no problema de determinar se um grafo é b-contínuo mas acreditamos que possam ser usadas como ferramentas teóricas em contextos relacionados a b-coloração em geral.

Na Seção 4.2 provamos que os grafos distância-hereditários são b-contínuos. Para tal, na Seção 4.2.1 foi feito um estudo aprofundado das propriedades estruturais desta classe de grafos. Este estudo nos proveu de uma decomposição estrutural específica dos grafos distância-hereditários que foi base para a demonstração de b-continuidade na classe. Com o resultado do Teorema 8, generalizamos o resultado de b-continuidade para cografos estabelecido em [6]. Vale notar que, em [6], a decomposição estrutural dos cografos que é usada para estabelecer a b-continuidade da classe foi também base para o desenvolvimento de um algoritmo polinomial para o problema do número b-cromático na classe. Deixamos então em aberto a possibilidade de utilizar as decomposições estruturais dos grafos distância-hereditários presentes neste trabalho como base para o desenvolvimento de um algoritmo polinomial para o problema do número b-cromático para esta classe.

Na Seção 4.3, motivado pelos Teoremas 6 e 7, introduzimos e desenvolvemos uma abordagem ao estudo da b-continuidade através de operações que preservam b-continuidade. Na Seção 4.3.1 tomamos como motivação o fato de que grafos cordais são b-contínuos para definir a operação de adição de simplicial. Provamos que

esta operação preserva b-continuidade, generalizando o resultado de b-continuidade para grafos cordais. Na Seção 4.3.2 consideramos as operações de adição de gêmeo-falso e adição de gêmeo-verdadeiro. Apresentamos exemplos que mostram que estas operações não preservam b-continuidade. Com isto, apresentamos indícios que tal abordagem não poderia ser utilizada em uma nova estratégia de prova para a b-continuidade dos grafos distância-hereditários. Na Seção 4.3.3 introduzimos a operação de identificar cliques. Tal operação foi estudada para a propriedade de preservar b-continuidade. Mostramos que identificar cliques de tamanho 1 ou 2 preserva b-continuidade. Com este resultado, relacionamos o conceito de b-continuidade com a decomposição por componentes biconexas e, de forma mais geral, por clique separadoras. Grande parte do que foi desenvolvido nesta seção não assume a hipótese de que as cliques identificadas tem tamanho limitado de modo que conjecturamos que esta operação preserva b-continuidade no caso geral. Finalmente, na Seção 4.3.4 ilustramos como os resultados obtidos nas seções anteriores podem ser usados para estabelecer b-continuidade de classes específicas de grafos. Foram considerados os grafos periplanares, que possuem uma caracterização em termos de suas componentes biconexas. Dessa forma, usando o teorema e corolários da Seção 4.3.3, provamos facilmente que os grafos periplanares são b-contínuos, generalizando o conhecido resultado de b-continuidade para os grafos cactus [23].

Na Seção 4.3 duas novas operações em grafos que preservam b-continuidade foram exibidas. Mais especificamente, as operações de adição de simplicial e de identificar cliques de tamanho 1 ou 2. As técnicas desenvolvidas para obter tais resultados também contribuem para o estudo do número b-cromático. Por exemplo, como consequência do Lema 7 temos que $\chi_b(\text{iden}(G_1, C_1, G_2, C_2)) \geq \max\{\chi_b(G_1), \chi_b(G_2)\}$.

Vale notar que estes resultados não se restringem a nenhuma classe específica de grafos e tem como hipótese apenas a b-continuidade dos grafos envolvidos na operação. Portanto, acreditamos que os Teoremas 9 e 10 (junto com os já conhecidos Teoremas 6 e 7) possam incorporar um conjunto de ferramentas teóricas mais gerais no contexto do estudo da b-continuidade em grafos.

Referências Bibliográficas

- [1] R. BALAKRISHNAN e T. KAVASKAR. b-coloring of Kneser graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 160, pp. 9 – 14, 2012.
- [2] H.-J. BANDELT e H. M. MULDER. Distance-hereditary graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, v. 41, pp. 182 – 208, 1986.
- [3] D. BARTH, J. COHEN e F. TAOUFIK. *Complexity of Determining the b-continuity Property of Graphs*. Interne A03-R-519 || barth03c, 2003.
- [4] D. BARTH, J. COHEN e T. FAIK. On the b-continuity property of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 155, pp. 1761 – 1768, 2007.
- [5] J. A. BONDY e U. S. R. MURTY. *Graph Theory with Applications*. North-Holland, 1979.
- [6] F. BONOMO, G. DURÁN, F. MAFFRAY, J. MARENCO e M. VALENCIA-PABON. On the b-coloring of cographs and P_4 -sparse graphs. *Graphs and Combinatorics*, v. 25, pp. 153–167, 2009.
- [7] A. BRANDSTÄDT, V. B. LE e J. P. SPINRAD. *Graph Classes: a survey*. SIAM, 1999.
- [8] S. CABELLO e M. JAKOVAC. On the b-chromatic number of regular graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 159, pp. 1303 – 1310, 2011.
- [9] L. DEKAR e H. KHEDDOUCI. A graph b-coloring based method for composition-oriented web services classification. In: A. An, S. Matwin, Z. Ras e D. Slezak (Eds.), *Foundations of Intelligent Systems*, v. 4994, *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 599–604, 2008.
- [10] B. EFFANTIN e H. KHEDDOUCI. A distributed algorithm for a b-coloring of a graph. In: M. Guo, L. Yang, B. Di Martino, H. Zima, J. Dongarra e F. Tang (Eds.), *Parallel and Distributed Processing and Applications*, v. 4330, *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 430–438, 2006.

- [11] H. ELGHAZEL, H. KHEDDOUCI, V. DESLANDRES e A. DUSSAUCHOY. A graph b-coloring framework for data clustering. *Journal of Mathematical Modelling and Algorithms*, v. 7, pp. 389–423, 2008.
- [12] H. HAJIABOLHASSAN. On the b-chromatic number of Kneser graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 158, pp. 232 – 234, 2010.
- [13] F. HAVET, C. L. SALES e L. SAMPAIO. b-coloring of tight graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 160, pp. 2709 – 2715, 2012.
- [14] E. HOWORKA. A characterization of distance-hereditary graphs. *The Quarterly Journal of Mathematics*, v. 28, pp. 417–420, 1977.
- [15] C. T. HOÀNG e M. KOUIDER. On the b-dominating coloring of graphs. *Discrete Applied Mathematics*, v. 152, pp. 176–186, 2005.
- [16] R. W. IRVING e D. F. MANLOVE. The b-chromatic number of a graph. *Discrete Applied Mathematics*, v. 91, pp. 127 – 141, 1999.
- [17] M. JAKOVAC e S. KLAVŽAR. The b-chromatic number of cubic graphs. *Graphs and Combinatorics*, v. 26, pp. 107–118, 2010.
- [18] R. JAVADI e B. OMOOMI. On b-coloring of the Kneser graphs. *Discrete Mathematics*, v. 309, pp. 4399 – 4408, 2009.
- [19] R. M. KARP. Reducibility Among Combinatorial Problems. In: R. E. Miller e J. W. Thatcher (Eds.), *Complexity of Computer Computations*, Plenum Press, pp. 85–103, 1972.
- [20] J. KRATOCHVÍL, Z. TUZA e M. VOIGT. On the b-chromatic number of graphs. In: G. Goos, J. Hartmanis, J. van Leeuwen e L. Kucera (Eds.), *Graph-Theoretic Concepts in Computer Science*, v. 2573, *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, pp. 310–320, 2002.
- [21] M. KUBALE. *Graph Colorings*. AMS, 2004.
- [22] J. KÁRA, J. KRATOCHVÍL e M. VOIGT. *b-continuity*. Relatório Técnico M 14/04, Technical University Ilmenau, Alemanha, 2004.
- [23] L. S. ROCHA. *b-Colorações de Grafos*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal do Ceará, MDCC, 2009.
- [24] S. SHAEBANI. On b-continuity of Kneser Graphs of type $KG(2k+1,k)$. *ArXiv e-prints*, (set.), 2009.

- [25] M. M. SYSŁO. Characterizations of outerplanar graphs. *Discrete Mathematics*, v. 26, pp. 47 – 53, 1979.