



LIMITES PARA DISTÂNCIA E DIÂMETRO EM REARRANJO DE GENOMAS POR TRANSPOSIÇÕES

Luís Felipe Ignácio Cunha

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE, da Universidade Federal do Rio de Janeiro, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de Mestre em Engenharia de Sistemas e Computação.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de
Figueiredo
Luis Antonio Brasil Kowada

Rio de Janeiro
Fevereiro de 2013

LIMITES PARA DISTÂNCIA E DIÂMETRO EM REARRANJO DE
GENOMAS POR TRANSPOSIÇÕES

Luís Felipe Ignácio Cunha

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DO INSTITUTO
ALBERTO LUIZ COIMBRA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA DE
ENGENHARIA (COPPE) DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A
OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE
SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Examinada por:

Prof^a. Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D.Sc.

Prof. Luis Antonio Brasil Kowada, D.Sc.

Prof. Valmir Carneiro Barbosa, Ph.D.

Prof. João Meidanis, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
FEVEREIRO DE 2013

Cunha, Luís Felipe Ignácio

Limites para Distância e Diâmetro em Rearranjo de Genomas por Transposições/Luís Felipe Ignácio Cunha. – Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 2013.

XI, 57 p.: il.; 29, 7cm.

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Luis Antonio Brasil Kowada

Dissertação (mestrado) – UFRJ/COPPE/Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, 2013.

Referências Bibliográficas: p. 50 – 54.

1. Rearranjo de Genomas. 2. Distância de Transposição. 3. Diâmetro de Transposição.

I. Figueiredo, Celina Miraglia Herrera de *et al.* II. Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação. III. Título.

*Dedico a Eucinéa, Almir,
Almirzinho e Philippinho!*

Agradecimentos

Quero agradecer a cima de tudo a Deus que se mostra presente em cada momento da minha vida, desde os mais simples aos mais extraordinários. Graças a inteligência dada por Ele consegui chegar até aqui.

Agradeço a minha família, minha mãe Eucinéa que fez tantos sacrifícios para que eu pudesse ter bom estudo e assim ter boas oportunidades, como venho tendo. Ou seja, colocou em primeiro lugar minha educação e do meu irmão também. Se não fosse ela hoje provavelmente não teria chegado onde cheguei. Quero também agradecer ao meu pai Almir que sempre apoiou ao lado da minha mãe no que foi necessário dentro de suas possibilidades. Ao meu irmão Almirzinho que tanto se preocupa e dedica seu tempo pra mim e para nossa família.

Quero agradecer também ao Philippinho, meu afilhado que digo ser meu filho, que tem a idade igual a que tenho de universidade desde a graduação. Ele que tantas vezes vem sentar ao meu lado para me imitar estudando, ao folhear um livro meu e “pensar na matemática”, segundo ele. Esse é um grande incentivo pra mim, poder fazer com que ele se espelhe em coisas boas das pessoas. E além disso tudo, ele é uma pessoa que não me pergunta para que serve o que eu estudo.

Enfim, quero agradecer também a tantas outras pessoas: tios, primos e amigos. Que me ajudam e estão sempre perto de mim, em especial ao meu primo Bruno. Todos vocês estão em meus pensamentos.

Não posso deixar de destacar minha gratidão aos grandes amigos que fiz no LabAC, ou LAC como normalmente falamos. Por todo esse período de estar aí todos os dias e partilhar momentos de estudos, histórias e tantos outros fatos. O conhecimento não é transmitido somente nos artigos científicos, mas também nessa troca de conversas que temos. Aprendo muito com vocês. Outro lado bom é que passei a ter novos irmãos e primos, que além disso, são pesquisadores.

Neste momento posso dizer que estou entre duas pessoas que realmente querem que eu cresça e que depositam confiança em mim. Muito obrigado aos meus orientadores Prof^ª. Celina de Figueiredo e ao Prof. Luis Antonio Kowada. A Prof^ª. Celina que tenho a grandiosa oportunidade de acompanhá-la, ela que é pesquisadora de excelência, onde através de seu rigor eu venho aprendendo a ser também mais disciplinado e com certeza vou levar isso para minha vida de pesquisador e professor.

Também por sempre me estimular a estudar para buscar novas respostas de tantas perguntas que surgem. Ao Luis Antonio, que posso dizer sem demagogia que sou seu amigo, que me orienta (e aguenta) desde a Iniciação Científica, onde tive grande motivação pelo tema de pesquisa desafiador que fui apresentado e estudo até hoje (e tenho a mesma motivação do início). E não só nisso mas também foi quem abriu as portas para que eu começasse minha vida na pesquisa acadêmica, muito obrigado a vocês dois.

Agradeço também ao Rodrigo Hausen, por ter sido o autor do primeiro material que estudei no tema de Rearranjo de Genomas. Dizem que a primeira impressão é a que fica, então a sua tese de doutorado contribuiu muito para o meu interesse pela área e aprendizado.

Muito obrigado ao Prof. Valmir Barbosa e ao Prof. João Meidanis, por terem aceitado em participar da banca examinadora da minha dissertação de mestrado. Para mim é um grande desafio em tê-los em minha defesa, então busquei fazer minha dissertação ao excelente nível dos senhores, espero ter conseguido.

Quero agradecer ao PESC/COPPE, aos professores (em especial aos da linha de Algoritmos e Combinatória), a todos os funcionários da secretaria, suporte e serviços gerais, sempre precisamos de vocês, valeu mesmo.

Quero agradecer também à CAPES, órgão que me mantém financeiramente para que eu possa estar todos os dias na UFRJ.

Resumo da Dissertação apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências (M.Sc.)

LIMITES PARA DISTÂNCIA E DIÂMETRO EM REARRANJO DE GENOMAS POR TRANSPOSIÇÕES

Luís Felipe Ignácio Cunha

Fevereiro/2013

Orientadores: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo
Luis Antonio Brasil Kowada

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Esta dissertação trata do problema de Rearranjo de Genomas em um de seus modelos mais clássicos, modelo de transposições. São abordados dois problemas: Ordenação por Transposições e Diâmetro de Transposição.

Sobre o problema de Ordenação por Transposições — provado ser *NP*-difícil em 2010 — é explorada a classe das *permutações solitárias*. Com o intuito de obter limites justos para esta classe é apresentado um estudo sobre sua caracterização e propriedades estruturais. São determinados assim valores exatos e limites justos para distâncias de algumas famílias apresentadas.

Os atuais limites inferiores para o diâmetro são obtidos através da justaposição de permutações solitárias, assim é tratado também o Diâmetro de Transposição — problema em aberto para $n \geq 16$. Um estudo sobre o atual limite inferior deste problema é apresentado através da investigação teórica da operação de união de permutações. Em particular, é investigada a união de permutações solitárias e sua utilização para construir as famílias que constituem os atuais limites inferiores.

Ainda em relação ao problema de Diâmetro de Transposição, em 2010 foi proposto um novo limite inferior através da união da nova definição de *permutação super-ruim* para construção das famílias mais distantes. Nesta dissertação é apresentada uma invalidação deste limite para o diâmetro de transposição. São apresentadas também condições suficientes para permutações não serem usadas na construção de novos limites através da operação de união. São propostas novas famílias onde suas distâncias atingem o atual limite inferior. E por fim, é apresentada uma nova estratégia para melhorar o limite inferior para o problema do diâmetro de transposição.

Abstract of Dissertation presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc.)

BOUNDS FOR DISTANCE AND DIAMETER IN GENOME
REARRANGEMENTS BY TRANSPOSITIONS

Luís Felipe Ignácio Cunha

February/2013

Advisors: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Luis Antonio Brasil Kowada

Department: Systems Engineering and Computer Science

This dissertation discusses the transposition model, a classic mutational event in Genome Rearrangements. Two problems are considered: Sorting by Transpositions; and the Transposition Diameter.

For the Sorting by Transpositions — settled as NP -hard in 2010 — we obtain tight bounds and determine the transposition exact distance for the lonely permutation class, through a study of characterizations and structural properties of such permutations.

Lower bounds for the diameter have been obtained through a juxtaposition of lonely permutations, therefore for the Transposition Diameter — an open problem for every $n \geq 16$ — we establish an algebraic study of the union operation. We present a theoretical investigation of the union of permutations, and the union of lonely permutations, the main tool used to construct the current lower bound.

In 2010, it was claimed a new lower bound for the Transposition Diameter by using the union of so-called *super-bad permutations* to construct such farther families. In this work, we show that there is no super-bad permutation, thus invalidating the claimed lower bound. We also present conditions so that several permutations cannot be used to increase the lower bound through the union operation. Moreover, we present alternative families that meet the current lower bound and propose a strategy to increase the lower bound that uses the union operation and further advances on the approach used so far in the literature.

Sumário

Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xi
1 Introdução	1
1.1 Definições	6
1.1.1 Permutações solitárias	8
1.1.2 Diagrama de Realidade e Desejo	10
1.2 Reduções e sequência de elementos num ciclo	13
1.3 Diagrama de Realidade e Desejo das permutações solitárias	15
1.4 3-permutação solitária	16
2 Novos Limites de Distâncias de Permutações Solitárias	19
2.1 A permutação nó u_{n,ℓ^*}	19
2.2 Limites para outras permutações solitárias	21
3 Novos Limites Algébricos da Distância de União de Permutações	27
3.1 A união de permutações	27
3.2 União de permutações nós	32
4 O Limite Inferior do Diâmetro	41
4.1 O atual limite inferior do diâmetro	41
4.2 Construção das famílias mais distantes	45
5 Conclusões e Trabalhos Futuros	48
Referências Bibliográficas	50
A Sequências de transposições das uniões das Tabelas 4.2 e 4.3	55

Lista de Figuras

1.1	Evolução hipotética entre cloroplastos do Tabaco e <i>L. fervens</i> (adaptado de Bafna e Pevzner [4]).	2
1.2	O Diagrama de Realidade e Desejo $G(u_{10,8})$ da permutação solitária $u_{10,8} = [8\ 5\ 2\ 10\ 7\ 4\ 1\ 9\ 6\ 3]$ consistindo de somente um ciclo ímpar.	11
1.3	(a) $G([1\ 2\ 8\ 7\ 3\ 4\ 6\ 5\ 9])$ e (b) $G([5\ 4\ 1\ 3\ 2])$	15
3.1	(a) $G(\rho_{[4]})$ e (b) $G(\rho_{[4]} \uplus \rho_{[4]})$	29
3.2	(a) $G(u_{4,4} \uplus u_{6,3})$ e (b) $G((u_{4,4} \uplus u_{6,3}).t(1, 2, 5))$	30

Lista de Tabelas

1.1	Distâncias de permutações solitárias com $n \leq 20$. Células hachuradas correspondem às <i>3-permutações solitárias</i>	18
2.1	Resultados conhecidos de valores exatos para distância de transposição de permutações solitárias, exceto suas inversas.	26
4.1	Resultados conhecidos de valores exatos para o diâmetro de transposição [34].	42
4.2	Distâncias para $u_{10,\ell}$ e $u_{4,4} \uplus u_{10,\ell}$. Células hachuradas correspondem a três permutações diametraes para $n = 15$: $u_{4,4} \uplus u_{10,10}$ [23] e as adicionais $u_{4,4} \uplus u_{10,8}$ e sua inversa. Portanto, podemos construir duas novas famílias correspondentes ao atual limite inferior de Elias e Hartman [22] para $n = 15 + 4k$	47
4.3	Distâncias para $u_{12,\ell}$ e $u_{4,4} \uplus u_{12,\ell}$. Células hachuradas correspondem a duas novas permutações que atingem o atual limite inferior de Elias e Hartman [22] para $n = 17$: $u_{4,4} \uplus u_{12,5}$ e sua inversa. Portanto, podemos construir duas novas famílias correspondentes ao atual limite inferior de [22] para $n = 13 + 4k$	47

Capítulo 1

Introdução

“Durante a evolução, moléculas de hereditariedade são costuradas, modificadas, cortadas, alongadas, encurtadas e revertidas.”

(François Jacob, 1984)

Pelo princípio da evolução molecular, genomas são usados para dar origem a outros. Moléculas de DNA são responsáveis por toda informação genética dos seres vivos. Em proteínas, conteúdos de DNA são quase similares, porém suas organizações são bem diferentes. Um exemplo é o caso dos genomas do Repolho e do Nabo, que possuem genes quase idênticos, porém estes genes aparecem em ordem bem diferente [43]. Rearranjo de genomas é um conjunto de eventos mutacionais que afetam a organização do DNA. E a distância de rearranjo trata de determinar o número mínimo de eventos de rearranjo para transformar um genoma em outro.

Eventos de rearranjo envolvem modelos matemáticos que auxiliam a buscar o quão distante uma espécie está de outra. Esta informação é usada para reconstrução de árvores filogenéticas motivadas por aplicações biológicas. O problema de distância de rearranjo pode ser definido por determinar o menor número de operações necessárias para transformar uma permutação em outra (Figura 1.1), ou de maneira equivalente, determinar o menor número de transposições necessárias para transformar uma permutação na identidade, permutação onde todos os elementos estão em ordem crescente. Ou seja, genomas são definidos por permutações de inteiros distintos, onde cada inteiro representa um gene. Os livros de Fertin *et al.* [24] e de Setubal e Meidanis [46] abordam estes problemas, onde apresentam os modelos de rearranjo de genomas com enfoques computacional e combinatório além de suas implicações práticas.

Nas últimas décadas, houve um grande avanço no estudo de sequenciamento de DNA de espécies, o que permitiu determinar o sequenciamento do genoma de organismos. Com isso, estudos foram propostos de modo a buscar novas técnicas computacionais que fossem capazes de analisar a grande quantidade de dados ob-

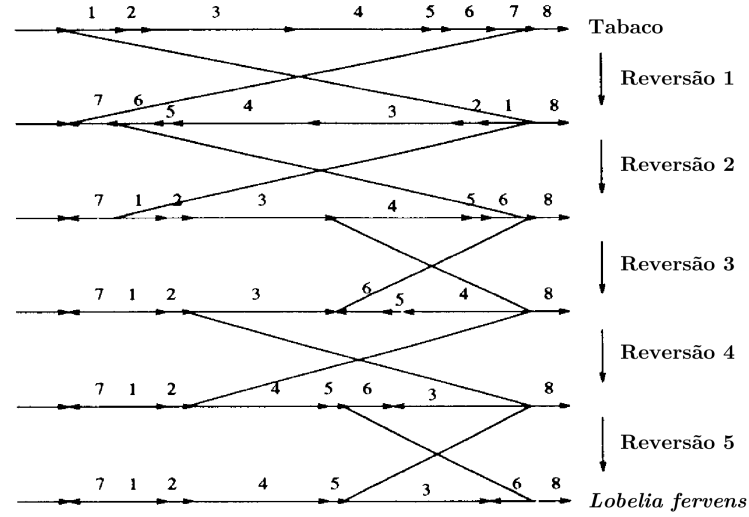


Figura 1.1: Evolução hipotética entre cloroplastos do Tabaco e *L. fervens* (adaptado de Bafna e Pevzner [4]).

tidos dessas sequências para que as informações tenham relevância nas pesquisas biológicas, um exemplo é a compreensão da comparação de genomas. Para que seja melhor entendida a filogenia dentro das hipóteses evolutivas, diversos modelos matemáticos com o objetivo de comparar distinções a partir de eventos mutacionais foram propostos, dentre os quais destacamos:

Ordenação por Reversões com Sinal, proposto por Bafna e Pevzner [4] em 1993, que consiste em, dado um par de permutações onde cada elemento pode ter sinal + ou -, transformar uma permutação em outra com o número mínimo de reversões (os sinais + e - estão relacionados a qual lado da dupla fita de DNA está o gene), operação esta que inverte um determinado bloco da permutação invertendo também o sinal de cada elemento do bloco. Hannenhalli e Pevzner [32] em 1995 determinaram um algoritmo polinomial que determina a distância de reversão com sinal, tendo complexidade $O(n^5)$. Mais tarde em 2001, Bader *et al.* [2] determinaram a computação da distância de reversão com sinal tendo complexidade linear $O(n)$ e a sequência mínima que ordena uma permutação foi apresentada por Tannier [47] com complexidade $O(n^{3/2}\sqrt{\log n})$ e em seguida por Han [31], tendo complexidade reduzida para $O(n^{3/2})$;

Ordenação por Reversões sem Sinal, proposto por Watterson *et al.* [49] em 1982 é similar a Ordenação por Reversão com Sinal porém sem considerar os rótulos + ou - dos elementos das permutações. Este problema porém, foi provado ser *NP*-difícil por Caprara [8] em 1997.

Existem outras variações bem conhecidas, porém sem motivação inicial do problema de rearranjo de genomas, algumas delas são:

Ordenação por Reversões Pré-fixadas proposto por Dweighter [21] em 1975. Uma

reversão pré-fixada é uma reversão que inverte um bloco sempre começando pelo primeiro elemento. O problema de Ordenação por Reversões Pré-fixadas consiste então em determinar o número mínimo de reversões pré-fixadas que transforme uma permutação na identidade. Este problema foi provado ser *NP*-difícil por Bulteau *et al.* [6] em 2011;

Burnt Pancake-Flipping proposto por Gates e Papadimitriou [28] em 1979, que consiste em determinar o número máximo de reversões pré-fixadas com sinal (ou rotações de panquecas de diferentes tamanhos) de maneira a transformar uma permutação em outra (ou transformar uma pilha de panquecas em outra). A versão *burnt* se trata de toda panqueca possuir exatamente um lado queimado, ou seja, um elemento com sinal + (caso o lado queimado esteja para baixo) ou – (caso o lado queimado esteja para cima). A complexidade deste problema permanece em aberto.

Outro clássico evento mutacional é a *Transposição*, que é vista como uma operação que troca de posição dois blocos contíguos em uma permutação. Assim como a operação de reversão, temos também o seguinte problema:

Ordenação por Transposições Pré-fixadas, proposto por Dias e Meidanis [20], onde uma transposição pré-fixada consiste pelo primeiro bloco começar sempre pelo primeiro elemento. Sua complexidade permanece em aberto. Fortuna [25] determinou um limite superior de distância de transposição pré-fixada para uma subclasse de permutações reversas, permutações estas onde todos os elementos estão em ordem decrescente, e Reis [45] abordou aspectos teóricos envolvendo o grafo associado às permutações e suas distâncias de transposições pré-fixadas. Chitturi e Sudborough [9] em 2012 melhoraram o limite superior de distância de transposição pré-fixada conhecido.

Outros modelos foram propostos considerando *Cadeia de Caracteres*, onde elementos da cadeia de caracteres são letras de um alfabeto finito, podendo ou não ter elementos repetidos na cadeia. Dentre estes modelos destacamos:

Ordenação por Reversões em Cadeia de Caracteres Binárias, provado ser *NP*-difícil por Christie e Irving [12]; *Ordenação por Reversões em Cadeia de Caracteres com Sinal*, provado ser *NP*-difícil por Radcliffe *et al.* [44]; a variação *Ordenação por Reversões Pré-fixadas em Cadeia de Caracteres* também é *NP*-difícil, provado independentemente por Hurkens [35] e por Chitturi e Sudborough [10]; O problema de *Ordenação por Transposições em Cadeia de Caracteres* foi provado ser *NP*-difícil por Radcliffe [44] em 2005; e *Ordenação por Transposições Pré-fixadas em Cadeia de Caracteres* também foi provado ser *NP*-difícil por Chitturi e Sudborough [9] em 2012.

Nesta dissertação, consideramos Rearranjo de Genomas em permutações com foco no problema de *Ordenação por Transposições*, que consiste em determinar o menor número de eventos de transposição que transforme uma permutação na iden-

tidade. Uma transposição, como visto anteriormente, é a operação que troca dois blocos contíguos de posição em uma permutação. Os interesses computacionais e combinatórios tornam-se cada vez mais desafiadores. Ordenação por Transposições, foi introduzido por Bafna e Pevzner [3] e diversos trabalhos abordam este problema, como as teses de Dias [16], Dias [18], Hausen [33], e de Walter [48] e as dissertações de Galvão [26] e de Lopes [39]. Ordenação por Transposições foi provado ser NP -difícil por Bulteau *et al.* em 2010 e publicação em [7], através da dificuldade em determinar a distância exata igual ao limite inferior trivial de uma família restrita de 3-permutações. E o melhor algoritmo aproximativo conhecido — proposto por Elias e Hartman [22] — tem razão de 1.375 que é obtido através do *Diagrama de Realidade e Desejo*, este é o grafo associado a cada permutação, e propriedades do Diagrama de Realidade e Desejo fornecem limites inferiores e superiores para distância de transposição de permutações.

Além de algoritmos aproximativos, uma variação do problema de Ordenação por Transposições é encontrar algoritmos exatos ou limites mais justos para classes de permutações, como a classe das *permutações γ* estudadas por Labarre [38]. E outra conhecida é a classe das *permutações solitárias*, proposta por Hausen *et al.* [34]. Apresentamos nesta dissertação propriedades e limites para distância restrita a famílias de permutações solitárias.

O resultado de Bulteau *et al.* [7] provou que é difícil ordenar permutações muito próximas da identidade e estabeleceu uma separação entre dois problemas que historicamente eram pesquisados juntos: Ordenação por Transposições e Diâmetro de Transposição. O estudo das permutações que sejam as mais distantes possíveis, i.e. o *Diâmetro de Transposição*, foi considerado em [22, 23, 40, 42]. As permutações solitárias aparecem como uma generalização da permutação reversa — permutação onde todos os elementos estão em ordem decrescente — intuitivamente a reversa seria a mais distante dado que conjecturava-se que esta seria diametral, com distância de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, onde n é o número de elementos da permutação (ou tamanho da permutação) [42].

Para todo $n \leq 12$ a permutação reversa é diametral. Porém para $n \geq 13$ e ímpar existem famílias com distâncias maiores do que a reversa, ou seja, sabe-se que a reversa não é diametral. Já para $n \geq 16$ e par não se conhece permutação com distância maior que a reversa. Ou seja, o valor do diâmetro, para um dado n como o tamanho da permutação, permanece em aberto para $n \geq 16$. São conhecidos apenas limites para este valor, com melhor limite inferior conhecido de $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1$ proposto por Elias e Hartman [22] e limite superior de $\lfloor \frac{2n-2}{3} \rfloor$ proposto por Eriksson *et al* [23]. Deste modo, sabemos que apesar de um número exponencial de $n!$ permutações, o valor do diâmetro é linear em n .

O problema de Diâmetro de Transposição pode ser visto como determinar a

maior distância num grafo com $n!$ vértices e existe uma aresta entre dois vértices se eles estão a distância 1.

Apesar de termos visto previamente que o valor do diâmetro de transposição é linear em n , temos que este resultado não é característico em todo grafo com $n!$ vértices e grau polinomial em n . Um exemplo é o grafo potência de ciclos $C_{n!}^{n^3}$, definido por $n!$ vértices $v_1, v_2, \dots, v_{n!}$, grau $O(n^3)$ e existe uma aresta entre dois vértices se a distância entre eles no ciclo $C_{n!}$ é no máximo n^3 . Ao escolher os vértices v_1 e $v_{\frac{n!}{2}+1}$, a distância deles é $\frac{n!}{2n^3}$, implicando assim em um limite inferior para o diâmetro, exponencial em n .

Lu e Yang [40] em 2010, propuseram um novo limite inferior do diâmetro de transposição de $\frac{17n+1}{33}$ utilizando as então definidas *permutações super-ruins*, como também está descrito no livro de Bóna [5]. Nesta dissertação, apresentamos uma invalidação desta proposta através da demonstração da não existência de permutações super-ruins, reestabelecendo assim o limite inferior do diâmetro de $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1$ proposto por Elias e Hartman. Apresentamos também famílias alternativas que possuem distância de transposição igual ao atual limite inferior do diâmetro dado por Elias e Hartman e além disso, propomos uma nova estratégia para melhorar o limite inferior do diâmetro de transposição.

Esta dissertação está organizada da seguinte forma: A seguir, na Seção 1.1, apresentamos algumas definições, como a classe das permutações solitárias e o diagrama de realidade e desejo, conceitos que serão fortemente utilizados no decorrer deste trabalho, com destaque para a Seção 1.3, que explora propriedades estruturais do diagrama de realidade e desejo das permutações solitárias; uma consequência do estudo das propriedades estruturais do diagrama de realidade e desejo das permutações solitárias é o que aborda o Capítulo 2, onde apresentamos a computação de famílias de permutações solitárias, computação que é obtida através do conceito de reduções entre permutações; os atuais limites inferiores para o diâmetro de transposição são obtidos através da justaposição de permutações solitárias, i.e., *união* de permutações solitárias. Assim, no Capítulo 3 propomos um estudo algébrico envolvendo a operação de união de permutações e obtemos novos limites para distâncias, com destaque para a Seção 3.2, que trata de uniões de *permutações nós*, famílias especiais de permutações solitárias que serão necessárias para os resultados do Capítulo 4; o Capítulo 4 trata do atual limite inferior do diâmetro, onde na Seção 4.1 estabelecemos o atual limite inferior e na Seção 4.2 apresentamos famílias alternativas das conhecidas na literatura, que também atingem este limite. Além disso, propomos uma estratégia para melhorar o limite inferior do diâmetro de transposição com a utilização da operação de união de permutações; por fim, no Capítulo 5, concluímos esta dissertação e apresentamos desdobramentos futuros prováveis acerca deste trabalho.

Os Resultados desta dissertação foram divulgados assim: apresentação no *Latin American Workshop on Cliques in Graphs* em 2010 e publicação na revista *Matemática Contemporânea* [13]; apresentação de artigo completo no *Brazilian Symposium on Bioinformatics* 2012 e publicação no correspondente *Lecture Notes in Bioinformatics* [15]; apresentanção de pôster no *RECOMB Comparative Genomics* 2012; e artigo completo submetido para o *SIAM Journal on Discrete Mathematics* [14].

Esta dissertação contribui para o problema de distância de transposição para permutações solitárias, dado que utilizando os resultados encontrados para famílias de permutações solitárias — que são obtidos através de reduções entre permutações — talvez possibilite encontrar padrões na ordenação das permutações já conhecidas com o objetivo de generalizar as reduções para assim ordenar toda permutação solitária. Também contribuímos para o problema de diâmetro de transposição, dado que estabelecemos o real limite inferior conhecido e propomos também uma nova estratégia que possivelmente fornecerá um novo limite para este problema.

1.1 Definições

O modelo de rearranjo entre genes deve obedecer algumas hipóteses a respeito dos genomas:

1. É conhecida a ordem dos genes em cada genoma;
2. Todos os genomas compartilham o mesmo conjunto de genes;
3. Todos os genomas contêm uma única cópia de cada gene;
4. Todos os genomas possuem um único cromossomo.

Estes pontos previamente descritos são necessários para nosso modelo matemático. Trataremos neste trabalho de genomas por permutações pertencentes ao grupo simétrico S_n ¹ e assim temos algumas considerações:

1. Cada permutação é representada por uma função bijetiva;
2. Caso estejamos transformando uma permutação π em outra σ , então π e σ pertencem à S_n , ou seja, ambas possuem o mesmo número de elementos;
3. Toda permutação $\pi \in S_n$ contém n elementos distintos;

¹Para o leitor interessado em conceitos de Teoria dos Grupos e trabalhos que tratam permutações no contexto de estruturas algébricas abstratas recomendamos os livros de Gonçalves [30] e de MacLane e Birkhoff [41].

4. Se π contém n elementos distintos, então π é uma permutação do grupo simétrico S_n .

A partir disto, vamos descrever formalmente uma permutação e uma transposição.

Definição 1.1 (Permutação e Transposição) Uma permutação $\pi_{[n]} = [\pi_1 \pi_2 \cdots \pi_n]$ é uma função bijetiva com domínio no conjunto $\{1, 2, \dots, n\}$ e imagem em $\{1, 2, \dots, n\}$. Ou seja, $\pi(i) = \pi_i, \forall i = 1, 2, \dots, n$ e $\pi(i) = \pi(j)$ se, e somente se, $i = j$.

Uma transposição $t(i, j, k)$, onde $1 \leq i < j < k \leq n + 1$ é a permutação:

$$t(i, j, k) = [1 \ 2 \ \cdots \ i-1 \ j \ j+1 \ \cdots \ k-1 \ i \ \cdots \ j-1 \ k \ \cdots \ n].$$

Temos que uma permutação $\pi_{[n]}$ é um elemento do grupo simétrico S_n , cuja operação é o produto de permutações. Uma transposição $t(i, j, k)$ é um elemento do conjunto gerador de S_n , ou seja, toda permutação pode ser descrita por uma sequência de produtos de transposições. Para uma permutação $\pi_{[n]}$ chamaremos *tamanho* da permutação $\pi_{[n]}$ pelo número de elementos n que existem em $\pi_{[n]}$, ou seja, $\pi_{[n]}$ possui tamanho n .

Quando não causar ambiguidade, escreveremos π para uma permutação pertencente à S_n omitindo o índice $[n]$. A transposição $t(i, j, k)$ aplicada em π , $\pi t(i, j, k)$, tem o efeito em π de tal maneira que o bloco entre as posições i e $j - 1$ é trocado com o bloco entre as posições j e $k - 1$, ou seja:

$$\pi t(i, j, k) = [\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_{i-1} \ \boxed{\pi_j \ \cdots \ \pi_{k-1}} \ \boxed{\pi_i \ \cdots \ \pi_{j-1}} \ \pi_k \ \cdots \ \pi_n].$$

Exemplo 1.2 Seja $\pi = [8 \ 5 \ 2 \ 10 \ 7 \ 4 \ 1 \ 9 \ 6 \ 3]$ uma permutação de S_{10} . Ao aplicarmos $t(3, 7, 9)$ em π obtemos: $\pi t(3, 7, 9) = [8 \ 5 \ 1 \ 9 \ 2 \ 10 \ 7 \ 4 \ 6 \ 3]$.

Algumas permutações recebem nomes e símbolos especiais, como: *permutação identidade*, $\iota_{[n]} = [1 \ 2 \ \cdots \ n]$; *permutação reversa*, $\rho_{[n]} = [n \ n - 1 \ \cdots \ 1]$. E outra definição importante é a de permutação inversa.

Definição 1.3 (Permutação inversa) Dada uma permutação $\pi = [\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_n]$, temos que $\pi^{-1} = [\pi_1^{-1} \ \pi_2^{-1} \ \cdots \ \pi_n^{-1}]$ é a permutação inversa de π , onde $\pi(\pi^{-1}(i)) = i$.

Retornando ao Exemplo 1.2 temos que $\pi^{-1} = [7 \ 3 \ 10 \ 6 \ 2 \ 9 \ 5 \ 1 \ 8 \ 4]$, isto devido $\pi(\pi^{-1}(1)) = \pi(7) = 1$, $\pi(\pi^{-1}(2)) = \pi(3) = 2$, e assim por diante.

Temos então o problema de determinar o valor mínimo de operações de transposição que transforme uma permutação em outra. Esta é portanto, a definição de distância de transposição, como segue:

Definição 1.4 (Distância de transposição) A distância de transposição $d(\pi, \sigma)$ de uma permutação π a uma permutação σ , onde π e σ possuem o mesmo tamanho, é:

a) $d(\pi, \sigma) = 0$, se $\pi = \sigma$;

b) $d(\pi, \sigma) = q$, sendo $q \geq 1$ o menor inteiro para o qual exista uma sequência de transposições t_1, t_2, \dots, t_q , tal que $\pi t_1 t_2 \dots t_q = \sigma$, se $\pi \neq \sigma$.

É possível provar que dadas as permutações π , σ e γ , temos que $d(\pi, \sigma) = d(\gamma\pi, \gamma\sigma)$. Para isso considere $\pi t_1 t_2 \dots t_q = \sigma$ e o produto $\gamma\pi t_1 t_2 \dots t_q$. Pela associatividade do produto entre elementos de S_n , é imediato verificar que $\gamma(\pi t_1 t_2 \dots t_q) = \gamma\sigma$.

Sabendo então que $d(\pi, \sigma) = d(\gamma\pi, \gamma\sigma)$, ao considerar $\gamma = \sigma^{-1}$ teremos $d(\pi, \sigma) = d(\sigma^{-1}\pi, \iota)$. Assim, nosso problema de *Distância de transposição*, Definição 1.4, pode ser definido de maneira equivalente a determinar a quantidade mínima q de transposições da sequência t_1, t_2, \dots, t_q , tal que $\pi t_1 t_2 \dots t_q = \iota$. Com isso, a distância de transposição de uma permutação π será computada em relação à ι , e escreveremos $d(\pi, \iota) = d(\pi)$. É por esta razão que o problema de Distância de transposição é também conhecido como *Ordenação por transposições*. Assim, nesta dissertação quando nos referirmos a *ordenar* uma permutação estamos preocupados em obter o valor da *sequência mínima de transposições* que ordena a permutação.

A partir da relação $d(\pi, \sigma) = d(\gamma\pi, \gamma\sigma)$, também é direto verificarmos que $d(\pi) = d(\pi^{-1})$. Isto devido $d(\pi, \iota) = d(\pi^{-1}\pi, \pi^{-1}) = d(\iota, \pi^{-1})$.

Definição 1.5 (Diâmetro de transposição) O diâmetro de transposição $TD(n)$ é o valor da maior distância de transposição entre qualquer par de permutações com n elementos. Ou seja, $TD(n) = \max_{\pi \in S_n} \{d(\pi)\}$.

1.1.1 Permutações solitárias

Abordaremos agora a classe das *permutações solitárias*. O estudo desta classe foi proposto por Hausen *et al.* [34], onde foi explorada a classe das permutações solitárias restritas a subclasse em que $n + 1$ fosse um número primo, onde n é o tamanho destas permutações. Sabendo de antemão que $n + 1$ é primo, propriedades em relação as *classes unitárias de equivalência tórica* foram encontradas e relações ao diâmetro de transposição foram propostas. Mais tarde, Kowada *et al.* [37] abordam as permutações solitárias no aspecto mais geral não restrito a $n + 1$ ser primo, e assim limites para distâncias de famílias foram apresentadas.

As permutações solitárias aparecem no contexto de permutações tóricas definidas por Eriksson *et al.* [23]. Permutações podem ser agrupadas usando as *classes de*

equivalência tórica (Definições 1.6, 1.7 e 1.9), o que têm como consequência a propriedade que permutações na mesma classe possuem a mesma distância de transposição (Teorema 1.10).

Definição 1.6 [23, 34] *A circularização de uma permutação π em S_n é a permutação circular π° , obtida a partir de π pela inserção do elemento 0 que é inserido anterior ao elemento π_1 e após o elemento π_n e após isto é tomada a classe de equivalência através de rotações cíclicas. Portanto, a mesma permutação π° pode ser representada por $[0 \pi_1 \dots \pi_{n-2} \pi_{n-1} \pi_n]$, $[\pi_n 0 \pi_1 \dots \pi_{n-2} \pi_{n-1}]$, $[\pi_{n-1} \pi_n 0 \pi_1 \dots \pi_{n-2}]$, e assim por diante. A linearização de uma permutação circular π° é a permutação π obtida através da remoção do elemento 0 e tomando o π_1 como o próximo elemento após o elemento 0.*

Definição 1.7 [23] *Seja a permutação $\pi_{[n]}$ e um inteiro m . O m -passo deslocamento cíclico da permutação circular π° é a permutação circular $m + \pi^\circ := [\overline{m} \overline{m+1} \dots \overline{m+n}]$, onde \overline{x} é o resto da divisão de x por $n+1$.*

Exemplo 1.8 *Seja $\pi = [3412]$. As quatro permutações circulares resultantes dos deslocamentos cíclicos de π° são:*

$$\begin{aligned} 1 + \pi^\circ &= [14023] \equiv [02314], & 2 + \pi^\circ &= [20134] \equiv [01342], \\ 3 + \pi^\circ &= [31240] \equiv [03124], & e \quad 4 + \pi^\circ &= [42301] \equiv [01423]. \end{aligned}$$

A notação \equiv denota que ambos os lados são equivalentes através dos deslocamentos cíclicos.

Definição 1.9 [23] *Duas permutações π e σ são toricamente equivalentes se $\pi^\circ \equiv m + \sigma^\circ$, para algum inteiro m .*

Teorema 1.10 [23] *Se π e σ são toricamente equivalentes, então $d(\pi) = d(\sigma)$.*

Algumas classes tóricas possuem somente uma permutação, como por exemplo as classes da permutação reversa e da permutação identidade. Estas classes são chamadas de *classe unitária tórica* e as permutações contidas nessas classes são as *permutações solitárias* [34].

Teorema 1.11 (Caracterização de permutação solitária) [34] *A permutação π é uma permutação solitária se, e somente se, $\pi = [\overline{\ell} \overline{2\ell} \overline{3\ell} \dots \overline{n\ell}]$ para algum $\ell \geq 1$, onde $\text{mdc}(n+1, \ell) = 1$ e \overline{x} é o resto da divisão de x por $n+1$.*

Denotamos uma permutação solitária por $u_{n,\ell}$, onde $n+1$ e ℓ são primos entre si. Por exemplo, têm-se as permutações solitárias $u_{10,8} = [85210741963]$ e $u_{12,5} = [510271249161138]$. Observe que a permutação reversa $\rho_{[n]} = u_{n,n}$ e a permutação identidade $\iota_{[n]} = u_{n,1}$ são ambas permutações solitárias, já que $\text{mdc}(n+1, n) = 1$ e $\text{mdc}(n+1, 1) = 1$.

Proposição 1.12 [34] *Dada uma permutação solitária $u_{n,\ell}$, temos que $(u_{n,\ell})^{-1} = u_{n,\ell^{-1}}$, onde ℓ^{-1} é o inverso multiplicativo de ℓ modulo $n + 1$, ou seja $\ell^{-1} \cdot \ell \equiv 1 \pmod{n + 1}$.*

Demonstração. Para obter a permutação inversa de $u_{n,\ell}$, seja $\pi = (u_{n,\ell})^{-1}$, de modo que $\pi u_{n,\ell} = \iota$, ou seja, $\pi(u_{n,\ell}(1)) = 1, \pi(u_{n,\ell}(2)) = 2, \dots, \pi(u_{n,\ell}(n)) = n$. Como $u_{n,\ell}(i) = \overline{i\ell}$, temos que $\pi(\overline{1\ell}) = 1, \pi(\overline{2\ell}) = 2, \dots, \pi(\overline{n\ell}) = n$. Ou seja, se queremos obter $\pi(1)$ devemos calcular o elemento i onde $\overline{i\ell} = 1$, daí temos que $i = \overline{\ell^{-1}}$, da mesma maneira para obter $\pi(2)$ fazemos $\overline{i\ell} = 2$, com isso $i = \overline{2\ell^{-1}}$. E assim por diante obtemos $\pi = u_{n,\ell^{-1}}$. \square

Exemplo 1.13 *Para a permutação solitária $u_{10,8} = [8\ 5\ 2\ 10\ 7\ 4\ 1\ 9\ 6\ 3]$, temos que $(u_{10,8})^{-1} = u_{10,7} = [7\ 3\ 10\ 6\ 2\ 9\ 5\ 1\ 8\ 4]$. E para $u_{12,5} = [5\ 10\ 2\ 7\ 12\ 4\ 9\ 1\ 6\ 11\ 3\ 8]$ temos $(u_{12,5})^{-1} = u_{12,8} = [8\ 3\ 11\ 6\ 1\ 9\ 4\ 12\ 7\ 2\ 10\ 5]$.*

Corolário 1.14 *Dada uma permutação solitária $u_{n,\ell}$, temos que $d(u_{n,\ell}) = d(u_{n,\ell^{-1}})$.*

Demonstração. Como visto na página 8 que uma permutação possui distância de transposição igual a da sua inversa, e além disso pela Proposição 1.12 vemos que $(u_{n,\ell})^{-1} = u_{n,\ell^{-1}}$. \square

Assim, pelo Corolário 1.14 para as permutações do Exemplo 1.13, temos $d(u_{10,8}) = d(u_{10,7})$ e $d(u_{12,5}) = d(u_{12,8})$.

1.1.2 Diagrama de Realidade e Desejo

A partir da caracterização da classe das permutações solitárias vamos definir o Diagrama de Realidade e Desejo, uma importante ferramenta para podermos estimar limites para distâncias de permutações em geral e em particular para famílias de permutações solitárias.

Definição 1.15 (Diagrama de Realidade e Desejo) [3] *Dada uma permutação $\pi \in S_n$ temos que o Diagrama de Realidade e Desejo, denotado $G(\pi, \iota)$ ou simplesmente $G(\pi)$, é o multigrafo $G(\pi) = (V, R \cup D)$, onde:*

$$\begin{aligned} V &= \{0, -1, +1, -2, +2, \dots, -n, +n, -(n+1)\}, \\ R &= \{(+\pi_i, -\pi_{i+1}) \mid i = 1, \dots, n-1\} \cup \{(0, -\pi_1), (+\pi_n, -(n+1))\}, \\ D &= \{(+i, -(i+1)) \mid i = 0, \dots, n\}. \end{aligned}$$

Podemos verificar que as arestas de realidade R representam as adjacências entre os elementos de π e as arestas de desejo D representam as adjacências entre os elementos de ι . Veja a Figura 1.2.

Definimos o Diagrama de Realidade e Desejo $G(\pi)$ em relação as permutações π e ι , mas essa definição pode ser generalizada para $G(\pi, \sigma)$, diferenciando somente o conjunto de arestas de desejo D , onde D passará a representar a vizinhança entre os elementos de σ .

Temos como consequência da Definição 1.15 que cada vértice possui grau dois, em cada vértice incide uma aresta de realidade e uma de desejo, ou seja, $G(\pi)$ é composto por ciclos disjuntos e os caminhos são alternados entre arestas de realidade e arestas de desejo. No decorrer desta dissertação, quando nos referirmos a *um ciclo em π* estamos nos referindo a *um ciclo em $G(\pi)$* .

Dizemos que um ciclo em π tem tamanho k , ou é um k -ciclo, se este ciclo contém exatamente k arestas de realidade (ou de maneira equivalente, k arestas de desejo). Um ciclo é dito *ímpar* quando existe um número ímpar de arestas de realidade, caso contrário o ciclo é *par*. Se $G(\pi)$ consiste de apenas um ciclo, então π é chamada de uma permutação *unicíclica*. Por exemplo, a permutação solitária $u_{10,8}$ na Figura 1.2 é unicíclica.

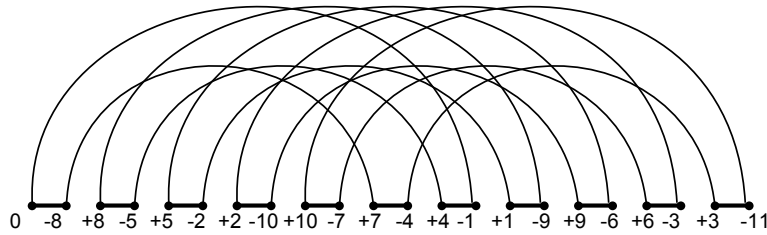


Figura 1.2: O Diagrama de Realidade e Desejo $G(u_{10,8})$ da permutação solitária $u_{10,8} = [8\ 5\ 2\ 10\ 7\ 4\ 1\ 9\ 6\ 3]$ consistindo de somente um ciclo ímpar.

O número de ciclos num Diagrama de Realidade e Desejo é uma importante medida para estimarmos limites para distâncias. Bafna e Pevzner [3] provaram que após uma transposição ser aplicada, *o número de ciclos* é alterado da seguinte maneira: aumenta em dois; ou permanece igual; ou diminui em dois. Como nosso objetivo é ordenar uma permutação π , ou seja, transformar π na permutação identidade ι , que por sua vez possui $n + 1$ ciclos de tamanho 1, um limite inferior imediato é a cada transposição o número de ciclos ser aumentado em dois. Com isso foi obtido o seguinte limite: $d(\pi) \geq \lceil (n + 1 - |C(\pi)|)/2 \rceil$, onde $|C(\pi)|$ é o número de ciclos em π , i.e., $|C(\pi)|$ é a cardinalidade do conjunto dos ciclos de π , como será explorado na Seção 1.2.

Bafna e Pevzner [3] determinaram também um limite inferior ainda melhor, provando que a cada transposição *o número de ciclos ímpares*, denotado por $c_{\text{ímpar}}(\pi)$, é alterado da seguinte maneira: i) aumenta em dois; ii) permanece igual; iii) diminui em dois. Portanto, uma transposição é classificada através de seu efeito quanto ao número de ciclos ímpares numa permutação: i) *2-movimento*; ii) *0-movimento*; iii)

-2-movimento. Como a permutação identidade consiste de $n + 1$ ciclos de tamanho 1, o ideal para ordenar uma permutação é que a cada transposição haja um “movimento” que aumente o número de ciclos ímpares. A partir disso, obtemos o limite inferior visto no Teorema 1.16.

Teorema 1.16 [3] *A distância de transposição de uma permutação π é $d(\pi) \geq \left\lceil \frac{(n+1) - c_{\text{ímpar}}(\pi)}{2} \right\rceil$.*

O Teorema 1.16 nos diz que um limite inferior de distância para π é obtido quando cada transposição aplicada para ordenar π é do tipo 2-movimento.

Definição 1.17 [3] *Dizemos que uma transposição $t(i, j, k)$ afeta um ciclo c do Diagrama de Realidade e Desejo $G(\pi)$ se c contém pelo menos uma das seguintes arestas de realidade: $(+\pi_{i-1}, -\pi_i)$ ou $(+\pi_{j-1}, -\pi_j)$ ou $(+\pi_{k-1}, -\pi_k)$.*

Dizemos que uma permutação π é *orientada*, se existe pelo menos uma transposição do tipo 2-movimento em π , caso contrário dizemos que π é *não-orientada*. Na Seção 1.3 apresentaremos uma caracterização de permutações orientadas.

Obtemos através das propriedades das transposições enunciadas as seguintes observações:

Observação 1.18 *Se uma permutação é unicíclica então esse ciclo é ímpar.*

Numa transposição a paridade do tamanho dos ciclos sempre se mantêm e ι consiste de $n + 1$ ciclos ímpares ($n + 1$ ciclos de tamanho 1), assim temos a explicação da Observação 1.18.

Observação 1.19 *Toda permutação unicíclica contém um número par de elementos.*

Pela Observação 1.18, uma permutação unicíclica possui o ciclo ímpar, ou seja, contém um número ímpar de arestas de realidade. E como são exatamente $n + 1$ arestas de realidade, temos portanto que n é par.

Observação 1.20 *Todas as permutações possuem um número par de ciclos pares.*

Pelo argumento semelhante a Observação 1.18, dado que a paridade do tamanho dos ciclos sempre se mantêm e ι consiste de 0 ciclos pares, assim temos a explicação da Observação 1.20.

Observação 1.21 *Se um 2-movimento afeta dois ciclos, então esses ciclos são pares.*

O número de ciclos não aumenta quando uma transposição afeta mais que um ciclo [33], portanto quando um 2-movimento afeta dois ciclos, a partir de dois pares teremos dois ímpares. Note que esta é a única maneira de haver 2-movimento quando a transposição afeta dois ciclos.

Meidanis *et al.* [42] determinaram a distância de transposição para a permutação reversa $\rho_{[n]}$, isto devido terem apresentado uma sequência de $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ transposições que ordena $\rho_{[n]}$ e garantiram que esta sequência é mínima através do Teorema 1.16. Onde para $n \geq 3$ com $n \equiv 3 \pmod{4}$, o número de ciclos ímpares é 0, assim o limite inferior de $d(\rho) \geq \frac{n+1}{2}$ é igual ao valor da sequência determinada $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Para valores de $n \geq 3$, com n equivalente a 0, 1 ou 2 modulo 4 os limites inferiores resultam em $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, ou seja, uma unidade menor do que a sequência apresentada, porém Meidanis *et al.* também provaram que para ordenar ρ as duas primeira transposições não podem ambas serem 2-movimentos, i.e., ou ρ ou ρt_1 (onde t_1 é a primeira transposição de sequência que ordena ρ) é não-orientada. Com isso, temos que $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ transposições são também necessárias para ordenar $\rho_{[n]}$, com $n \geq 3$, o que implica no Teorema 1.22.

Teorema 1.22 [42] *A distância de transposição da permutação reversa $\rho_{[n]}$, onde $n \geq 3$ é $d(\rho_{[n]}) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.*

1.2 Reduções e sequência de elementos num ciclo

Como visto no Teorema 1.16, um importante limite inferior para distância de transposição $d(\pi)$ pode ser obtido através de $G(\pi)$, contudo podemos também relacionar permutações através de reduções que são obtidas pela análise do Diagrama de Realidade e Desejo. Nesta Seção começamos por definir uma redução, conceito proposto por Christie [11], e o que isto implica entre as distâncias. Também definimos duas maneiras alternativas de representar uma permutação: a *sequência de ciclos* e a *sequência de posições*. Tais maneiras serão utilizadas para determinar a existência de 2-movimentos numa permutação, como será vista logo em seguida na Seção 1.3.

Definição 1.23 [11] *A permutação reduzida de π , denotada por $gl(\pi)$, é a permutação onde $G(gl(\pi))$ é igual a $G(\pi)$ sem os ciclos de tamanho 1, e tendo os rótulos dos vértices remanescentes atualizados.*

Seja $\pi = [1\ 2\ 7\ 6\ 3\ 5\ 4\ 8]$, observe na Figura 1.3a $G(\pi)$ e na Figura 1.3b $G(gl(\pi))$, onde $gl(\pi) = [5\ 4\ 1\ 3\ 2]^2$.

²O termo *gl* foi definido fazendo analogia a uma colagem, do inglês “gluing”, das partes da permutação que não possuem elementos vizinhos ordenados.

Definição 1.24 [11] *Duas permutações π e σ são equivalentes por redução, se $gl(\pi) = gl(\sigma)$.*

Definição 1.25 [37] *Uma permutação σ é uma r -redução de π se existe uma sequência de r transposições do tipo 2-movimentos, que transforma π numa permutação equivalente por redução à σ .*

Corolário 1.26 [37] *Se σ é uma r -redução de π , então $d(\pi) \leq d(\sigma) + r$.*

Assim como existe a definição de r -redução, podemos estender essa definição de maneira a permitir que existam algumas transposições do tipo 0-movimento, como visto na Definição 1.27.

Definição 1.27 [37] *Uma permutação σ é uma (t, r) -redução de π se existe uma sequência de t transposições, onde r transposições são 2-movimentos, que transforma π numa permutação equivalente por redução à σ .*

Corolário 1.28 [37] *Se σ é uma (t, r) -redução de π , então $d(\pi) \leq d(\sigma) + t$.*

É possível representar uma permutação π pela *sequência de elementos não negativos em cada ciclo* de $G(\pi)$, ou pela *sequência de posição dos elementos dos ciclos* na permutação. Esta última será útil para caracterizar as permutações orientadas e na Seção 2.1 para caracterizar as *permutações nós*.

Definição 1.29 [15] *Dada uma permutação π , uma sequência de elementos não negativos em cada ciclo que contém o elemento i de $G(\pi)$ é denotada por $c_i(\pi)$, e a coleção desses elementos é denotada por $C(\pi)$.*

Usamos parênteses para delimitar a sequência de ciclos de $C(\pi)$. O número de ciclos no Diagrama de Realidade e Desejo $G(\pi)$ é $|C(\pi)|$.

Definição 1.30 [15] *Dada uma permutação π e cada sequência de elementos não negativos $c_i(\pi)$, a correspondente sequência de posições dos respectivos elementos de $c_i(\pi)$ em π é denotada por $p_i(\pi)$. A coleção das sequências das posições dos elementos não negativos é denotada por $P(\pi)$.*

Usamos os símbolos “ \langle ” e “ \rangle ” para delimitar as correspondentes sequências de posições.

Se uma permutação π consiste de somente um ciclo usamos $c(\pi)$ e $p(\pi)$ para denotar $c_0(\pi)$ e $p_0(\pi)$, respectivamente. No Exemplo 1.31 vemos as representações de uma permutação.

Exemplo 1.31 *Observe a Figura 1.3a onde $\pi = [1\ 2\ 8\ 7\ 3\ 4\ 6\ 5\ 9]$. $C(\pi) = \{(0), (1), (27), (8645), (3), (9)\}$ e $P(\pi) = \{\langle 0 \rangle, \langle 1 \rangle, \langle 24 \rangle, \langle 3768 \rangle, \langle 5 \rangle, \langle 9 \rangle\}$. Observe que $c_2 = c_7$ e $c_8 = c_6 = c_4 = c_5$.*

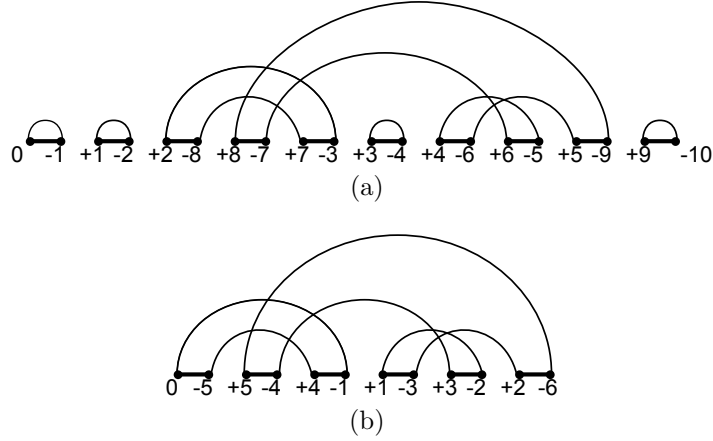


Figura 1.3: (a) $G([1\ 2\ 8\ 7\ 3\ 4\ 6\ 5\ 9])$ e (b) $G([5\ 4\ 1\ 3\ 2])$.

Limites para distância de transposição sem a utilização do Diagrama de Realidade e Desejo foram propostos na literatura, como abordado por Galvão e Dias [27], onde são avaliados os desempenhos dos algoritmos aproximativos conhecidos que não utilizam o Diagrama de Realidade e Desejo para permutações de tamanho até 13 e são comparados em relação as distâncias exatas que são conhecidas de tais permutações. Porém os resultados são menos satisfatórios comparados aos limites apresentados envolvendo Diagrama de Realidade e Desejo.

A seguir apresentaremos propriedades estruturais do Diagrama de Realidade e Desejo das permutações solitárias.

1.3 Diagrama de Realidade e Desejo das permutações solitárias

A partir da construção das permutações solitárias, podemos estabelecer regularidades do $G(u_{n,\ell})$, como é visto no Lema 1.32, e com isso será possível estimar limites para famílias de permutações solitárias, como abordado no Capítulo 2.

Lema 1.32 [37] *Seja $u_{n,\ell}$ uma permutação solitária, com $\ell > 1$. Temos que $G(u_{n,\ell})$ satisfaz:*

1. *cada ciclo, $c_i(u_{n,\ell})$, possui o mesmo tamanho $k = (n + 1)/\text{mdc}(n + 1, \ell - 1)$;*
2. *o número de ciclos, $|C(u_{n,\ell})|$, é $\text{mdc}(n + 1, \ell - 1)$;*
3. *$+i, \overline{+i + \ell - 1}, \overline{+i + 2(\ell - 1)}, \dots, \overline{+i + (k - 1)(\ell - 1)}$ é a sequência de elementos não negativos em todo ciclo, para $i = 0, \dots, |C(u_{n,\ell})| - 1$.*

Dizemos que uma permutação é uma k -permutação quando $G(\pi)$ consiste somente de ciclos de tamanho k . Assim pelo Lema 1.32 temos que toda permutação

solitária é uma k -permutação. O estudo da regularidade dos tamanhos dos ciclos são também vistos no Lema 1.33 e no Corolário 1.34, com o objetivo de determinarmos a sequência de ciclos e posição dos elementos dos ciclos de uma permutação solitária. Com isso, podemos determinar a existência de 2-movimento numa permutação solitária.

Lema 1.33 [37] *Considere o ciclo contendo o vértice 0, $c_0(u_{n,\ell}) = (0, \overline{+\ell-1}, \overline{+2(\ell-1)}, \dots)$. Assim $p_0(u_{n,\ell}) = \langle 0, m, \overline{2m}, \dots \rangle$, onde ℓ^{-1} é um inteiro tal que $\ell \cdot \ell^{-1} \equiv 1 \pmod{n+1}$ e $m \equiv 1 - \ell^{-1} \pmod{n+1}$.*

Corolário 1.34 [37] *A posição do elemento $\overline{i+y(\ell-1)}$ é $\overline{i\ell^{-1}+ym}$, onde $m = \overline{1-\ell^{-1}}$. Ou seja, os ciclos que contém $\overline{+i}, \overline{+i+(\ell-1)}, \overline{+i+2(\ell-1)}, \dots$ e $0, \overline{+\ell-1}, \overline{+2(\ell-1)}, \dots$ têm a mesma estrutura.*

Uma permutação é dita ser *não-orientada*, se toda tripla (x, y, z) pertencendo a um elemento de $P(\pi)$, onde ao escolher uma ordem começando do elemento mais a esquerda, os elementos x, y, z aparecem nesta ordem, e entre x e y — também entre y e z — existe um número par de elementos, satisfazendo uma das três seguintes possibilidades: $x < y < z$, ou $y < z < x$, ou $z < x < y$. Ou seja, a tripla (x, y, z) está em *ordem crescente circular*. Caso contrário π é dita *orientada*.

Lema 1.35 [3] *Uma permutação é orientada se, e somente se, admite um 2-movimento.*

Dada a caracterização de 2-movimento vista no Lema 1.35 podemos determinar se uma permutação solitária é não-orientada simplesmente por verificar em $P(u_{n,\ell})$, já que a construção de $P(u_{n,\ell})$ é direta pelo Corolário 1.34.

Exemplo 1.36 *Seja a permutação solitária $u_{10,8}$. Temos que $G(u_{10,8})$ é unicíclica ($\text{mdc}(11, 7) = 1$, este é o número de ciclos pelo Lema 1.32), a sequência de elementos no ciclo é $C(u_{10,8}) = \{(073106295184)\}$ (também visto no Lema 1.32), e a posição de elementos do ciclo na permutação é $P(u_{10,8}) = \{\langle 051049382716 \rangle\}$ (pelo Lema 1.33). A partir disto, podemos verificar que $u_{10,8}$ é uma permutação não-orientada, já que toda tripla (x, y, z) de $P(u_{10,8})$ está em ordem crescente circular.*

1.4 3-permutação solitária

As 3-permutação são importantes famílias abordadas na literatura. Elias e Hartman [22] apresentaram um algoritmo 1.375-aproximativo para o problema de Ordenação por transposições tendo complexidade $O(n^2)$, Dias e Dias [17] melhoraram a

estrutura de dados e determinaram complexidade de $O(n \log n)$. Este algoritmo consiste em transformar uma permutação qualquer π em uma 3-permutação π' obtida através da inserção de novos elementos em posições determinadas que transformam os ciclos de π em ciclos de tamanho 3, e após isto garantem³ que a cada 11 transposições 8 são do tipo 2-movimentos. Com isso é possível estimar distância para π' e é dado uma aproximação de distância para π . Além disto, Elias e Hartman [22] apresentaram um pior caso para uma 3-permutação e como seria a ordenação desta permutação, ou seja, o diâmetro de transposição de uma 3-permutação, como segue:

Teorema 1.37 [22] *O diâmetro de transposição de uma 3-permutação de tamanho n é:*

$$TD(n) \leq 11 \left\lfloor \frac{n}{24} \right\rfloor + \left\lfloor 3 \frac{(n/3 \pmod{8})}{2} \right\rfloor + 1.$$

Bulteau *et al.* [7] provaram recentemente a NP -dificuldade do problema de Ordenação por Transposições, que consiste em determinar a distância de transposição para toda permutação π . Esta demonstração é obtida através da dificuldade em determinar a distância para uma subclasse de 3-permutações, mesmo sendo famílias que possuem distâncias próximas da identidade. Bulteau *et al.* determinaram a dificuldade de determinar mesmo a existência de algum 0-movimento na sequência ótima.

Vale observar que a família das 3-permutações dada por Bulteau *et al.* são distintas das 3-permutações solitárias, isto porque a sequência $P(\pi)$ — sendo π uma 3-permutação de Bulteau *et al.* — ser diferente da sequência $P(u_{n',\ell'})$, onde $u_{n',\ell'}$ é uma 3-permutação solitária.

Hausen *et al.* [37] apresentaram um limite mais justo para as 3-permutações solitárias, como segue.

Teorema 1.38 [37] *Seja $u_{n',\ell'}$ uma 3-permutação solitária. Temos que $d(u_{n',\ell'}) \geq \frac{n'+1}{3}$ e:*

$$d(u_{n',\ell'}) \leq \begin{cases} \frac{4n'+1}{9} & \text{se } n' \equiv 2 \pmod{9} \\ \frac{4n'+7}{9} & \text{se } n' \equiv 5 \pmod{9} \\ \frac{4n'+4}{9} & \text{se } n' \equiv 8 \pmod{9} \end{cases}$$

O limite inferior do Teorema 1.38 é encontrado de maneira direta pelo Teorema 1.16, e o limite superior é encontrado através de uma sequência recorrente de uma (3,2)-redução entre as 3-permutações solitárias.

O Teorema 1.38 apresenta um limite justo para toda 3-permutação solitária, como pode ser visto na Tabela 1.1 onde é calculada a distância de transposição

³Assim como o Teorema das quatro cores de Appel e Haken [1], a demonstração de que em 11 transposições 8 são do tipo 2-movimentos é obtida através de análise de casos de configurações possíveis de ciclos dos diagramas de realidade e desejo das permutações. Esta análise é feita via computador, cerca de 80 mil casos.

Tabela 1.1: Distâncias de permutações solitárias com $n \leq 20$. Células hachuradas correspondem às *3-permutações solitárias*.

n	$d(u_{n,\ell})$																			
	ℓ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
2		1																		
3			2																	
4			2	2	3															
5					3															
6			3	4	3	4	4													
7				4		4		4												
8			4		4	4		4	5											
9				5				5		5										
10			5	6	6	6	5	6	6	6	6									
11					5			6				6								
12			6	7	7	7	6	6	7	7	7	6	7							
13				7		7				7			7							
14			7		7			7	7			7		7	8					
15				8		8		8		8		8		8		8				
16			8	9	8	9	9	9	8	8	9	9	9	8	9	8	9			
17						9		8				9		8				9		
18			9	9	10	10	10	10	9	10	9	10	9	9	9	9	10	10	10	
19				10				10		8		10		9				9		10
20			10		9	11			9	10	10		10			9	11		10	11

para toda permutação solitária de até 20 elementos, e toda *3-permutação solitária* apresentada possui distância igual ao limite superior do Teorema 1.38.

Capítulo 2

Novos Limites de Distâncias de Permutações Solitárias

Seguindo a mesma ideia apresentada na Seção 1.4 quando foi apresentado um limite mais justo para as 3-permutações solitárias, agora determinaremos limites justos de distâncias para outras famílias de permutações solitárias.

2.1 A permutação nó u_{n,ℓ^*}

As *permutações nós* são as únicas permutações que: são unicíclicas e não admitem um 2-movimento. Nas Seções 3.2 e 4.1 estas permutações são relacionadas ao problema de diâmetro de transposição, na Seção 3.2 mostraremos distâncias da união de permutações nós, e isto será útil para o que será visto na Seção 4.1, onde mostraremos que as *permutações nós* são as únicas candidatas+serem *permutações super-ruins*, de acordo com a Definição 4.5 proposta por Lu e Yang [40], e as que seriam usadas na construção de famílias mais distantes.

Christie [11] definiu a família de permutações denotando por ω , sendo unicíclicas e este ciclo chamado por *knot* (daí nossa tradução para nó), com ω possuindo $2r$ elementos.

Definição 2.1 [11] A permutação $\omega_{[n]}$ é a permutação onde $p(\omega) = \langle 0 \frac{n}{2} n \frac{n}{2} - 1 n - 1 \frac{n}{2} - 2 n - 2 \cdots 1 n - (\frac{n}{2} - 1) \rangle$.

Exemplo 2.2 Para $n = 10$ temos que $p(\omega) = \langle 0 5 10 4 9 3 8 2 7 1 6 \rangle$, e pelo Lema 1.33 na página 16, temos que $p(\omega) = p(u_{10,8})$. Observe que $p(u_{10,8}) = \langle 0 \overline{m} \overline{2m} \cdots \overline{10m} \rangle$, onde $m = \overline{1 - \ell^{-1}}$ e $\ell^{-1} = 7$, com isso $m = 5$.

Observe que a sequência $p(\omega)$ possui os elementos consecutivos entrelaçados, realmente como um nó entre os elementos. Retorne a Figura 1.2 na página 11 e note como as arestas de desejo são entrelaçadas. Isto justifica o nome nó.

Christie [11] também caracterizou a condição de existência de uma permutação ω , como segue no Teorema 2.3.

Teorema 2.3 [11] *A permutação ω com $2r$ elementos existe somente se $r \in \{3q, 3q - 1\}$ para algum inteiro $q \geq 1$. Mais que isso, ω é a única permutação que satisfaz: i) ω é unicíclica; ii) não existe 2-movimento que possa ser aplicado em ω .*

Definição 2.4 *A permutação nó u_{n,ℓ^*} , de parâmetro $q \geq 1$, é a permutação de um dos dois tipos:*

$$\ell^* = \begin{cases} 2q + 1 & \text{para } n = 6q, \\ 4q & \text{para } n = 6q - 2. \end{cases}$$

Observe que $\text{mdc}(6q + 1, 2q + 1) = 1$ e $\text{mdc}(6q - 1, 4q) = 1$, sendo assim possíveis para existência de permutação solitária do Teorema 1.11 na página 9, já que $\text{mdc}(n + 1, \ell) = 1$. A Definição 2.4 foi primeiro proposta por Hausen *et al.* [34], porém restrita aos tipos apresentados na Definição 2.4 em que $n + 1$ fossem primos.

A partir da Definição 2.4 denotaremos a permutação nó por dois tipos, a saber $u_{6q,2q+1}$ e $u_{6q-2,4q}$, para dado o parâmetro $q \geq 1$.

Corolário 2.5 [15] *A permutação nó u_{n,ℓ^*} é a permutação ω .*

Demonstração. Observe que ω e a permutação nó são ambas definidas para os mesmos valores de n . Comparando o Lema 1.33, que representa a sequência das posições de uma permutação solitária, com a Definição 2.1, que representa a sequência das posições da permutação ω , temos que $p(u_{n,\ell^*}) = p(\omega)$, dado que $p(u_{n,\ell^*}) = \langle 0 \bar{m} \bar{2m} \cdots \bar{nm} \rangle$, onde $m = \overline{1 - (\ell^*)^{-1}}$ e $(\ell^*)^{-1} = \frac{n}{2} + 2$. Com isso $m = \overline{1 - \frac{n}{2} - 2} \equiv \overline{-\frac{n}{2} - 1 + n + 1} \equiv \frac{n}{2}$. \square

Teorema 2.6 *A distância de transposição de uma permutação nó u_{n,ℓ^*} é $d(u_{n,\ell^*}) \geq \frac{n}{2} + 1$.*

Demonstração. Pelo limite inferior do Teorema 1.16 temos que $d(u_{n,\ell^*}) \geq \frac{n}{2}$, porém como visto que a distância de transposição é igual ao limite inferior quando a sequência mínima que ordena a permutação consiste apenas por 2-movimentos, e além disso a primeira transposição a ser aplicada em u_{n,ℓ^*} não pode ser 2-movimento, dado que u_{n,ℓ^*} é não-orientada, temos então que pelo menos $\frac{n}{2} + 1$ transposições são necessárias para ordenar u_{n,ℓ^*} . \square

Um resultado obtido de maneira independente por Christie [11] mostra que existe uma sequência de $\frac{n}{2} + 1$ transposições que ordena u_{n,ℓ^*} , assim $d(u_{n,\ell^*}) = \frac{n}{2} + 1$.

Exemplo 2.7 *Pela Definição 2.4 vemos que $u_{10,8}$ e $u_{12,5}$ são permutações nós. Com isso, as permutações $u_{10,8}$ e $u_{12,5}$ são as únicas permutações unicíclicas não-orientadas de tamanhos 10 e 12, respectivamente.*

2.2 Limites para outras permutações solitárias

Vista a dificuldade em determinar a distância de transposição para uma dada permutação, surge assim o desafio de determinar distâncias exatas ou limites mais justos para classes de permutações. Focamos na classe das permutações solitárias, nesta Seção determinamos distâncias exatas para $u_{n,3}$, quando $n+1$ é múltiplo de quatro, e limites justos para outras permutações solitárias, tais como: $u_{n,n-1}$, $u_{n,\frac{n}{2}}$, $u_{n,3}$ — quando $n+1$ não é múltiplo de quatro — e $u_{n,4}$.

Primeiro vamos definir a operação de concatenação, onde através dela é possível representar uma permutação pela sua regra de formação.

Definição 2.8 [25] *A concatenação de uma sequência a com uma sequência b , denotada por $a \odot b$, é a operação que une as duas sequências. A concatenação generalizada, denotada por $\overset{z}{\odot}_{x=y}[f(x)]$ e é a concatenação das sequências $f(x)$, com x variando de y a z .*

Exemplo 2.9 *Seja a permutação solitária $u_{n,\ell} = [\bar{\ell} \bar{2\ell} \bar{3\ell} \dots \bar{n\ell}]$. Através da operação de concatenação temos que $u_{n,\ell} = \overset{n}{\odot}_{i=1}[i\bar{\ell}]$.*

Teorema 2.10 [14] *A distância de transposição da permutação solitária $u_{n,n-1}$ é $\frac{n}{2} - 1 \leq d(u_{n,n-1}) \leq \frac{n}{2}$, se $n \equiv 2 \pmod{6}$, ou $\frac{n}{2} \leq d(u_{n,n-1}) \leq \frac{n}{2} + 1$, se $n \equiv 0$ ou $4 \pmod{6}$.*

Demonstração. Consideremos todos os casos de n , ou seja, $n \in \{6q, 6q+1, 6q+2, 6q+3, 6q-2, 6q+5\}$. Verificando que $\text{mdc}(n+1, n-1) \neq 1$ somente para $n \in \{6q+1, 6q+3, 6q+5\}$, analisemos então os casos $n \in \{6q-2, 6q, 6q+2\}$ que são justamente onde temos a existência de permutação solitária.

O limite inferior da distância de transposição em cada caso $n = 6q-2$, $n = 6q$ e $n = 6q+2$ vêm como consequência direta do Lema 1.32 na página 15. Agora, vamos encontrar a sequência de transposições que ordena $u_{n,n-1}$, resultando num limite superior para a distância.

Caso 1: Para $n = 6q-2$, com $q \geq 1$.

$$\pi = u_{6q-2,6q-3} = \underbrace{[6q-3 \ 6q-5 \ \dots \ 5 \ 3 \ 1]}_{3q-1} \underbrace{[6q-2 \ 6q-4 \ \dots \ 6 \ 4 \ 2]}_{3q-1} = \overset{3q-2}{\odot}_{i=0}[6q-3-2i] \odot \overset{3q-1}{\odot}_{i=1}[6q-2i].$$

Aplicando a transposição $t(2, 3q, 6q-2)$ em π , resulta em

$$\pi' = [6q-3] \odot \overset{3q-2}{\odot}_{i=1}[6q-2i] \odot \overset{3q-2}{\odot}_{i=1}[6q-3-2i] \odot [2].$$

Se $q = 1$, temos $\pi' = [3\ 4\ 1\ 2]$. Basta aplicar $t(1, 3, 5)$ em π' e assim com no máximo $\frac{n}{2} + 1$ transposições $u_{n,n-1}$ foi ordenada;

Se $q = 2$, temos $\pi' = [9\ 10\ 8\ 6\ 4\ 7\ 5\ 3\ 1\ 2]$. Ao obter a permutação equivalente por redução $gl(\pi')$, temos $gl(\pi') = [8\ 7\ 5\ 3\ 6\ 4\ 2\ 1]$. Neste caso apliquemos a sequência de 5 transposições: $t(1, 2, 3)$, $t(1, 4, 5)$, $t(1, 6, 8)$, $t(2, 6, 9)$, e $t(1, 4, 7)$. Assim, $\frac{n}{2} + 1 = 6$ transposições foram aplicadas em $\pi = u_{n,n-1}$;

Se $q > 2$, aplicamos a seguinte sequência de transposições: $t_i = t(3q - 3 - 3i, 3q - 3i, 6q - 5 - 6i)$, com $0 \leq i \leq q - 2$.

Após as q transposições anteriores seja $\pi' t_0 t_1 \cdots t_{q-2} = \pi^q$. Observe que $gl(\pi^q) = \rho_{[4q-2]}$. Pelo Teorema 1.22 temos que $d(\rho_{[4q-2]}) = 2q$, portanto $d(\pi) \leq q + 2q = \frac{n}{2} + 1$.

Caso 2: Para $n = 6q$. A análise deste caso é de maneira similar ao Caso 1. Temos $\pi' = \pi \cdot t(2, 3q + 1, 6q)$ e então aplicando as transposições $t_i = t(3q - 2 - 3i, 3q + 1 - 3i, 6q - 3 - 6i)$, com $0 \leq i \leq q - 2$. Neste caso, $gl(\pi^q) = \rho_{[4q]}$, portanto $d(\pi^q) = 2q + 1$ e $d(\pi) \leq q + 2q + 1 = \frac{n}{2} + 1$.

Caso 3: Para $n = 6q + 2$. Similar aos dois casos anteriores. Temos $\pi' = \pi \cdot t(2, 3q + 2, 6q + 2)$ e então aplicando as transposições $t_i = t(3q - 1 - 3i, 3q + 2 - 3i, 6q - 1 - 6i)$, com $0 \leq i \leq q - 2$. Neste caso, $gl(\pi^q) = \rho_{[4q+1]}$, portanto $d(\pi^q) = 2q + 1$ e $d(\pi) \leq q + 2q + 1 = \frac{n}{2}$. \square

Observe que, se $n \equiv 0, 2$, ou $4 \pmod{6}$, o inverso multiplicativo de $\frac{n}{2}$ modulo $n + 1$ é $n - 1$. Pelo Corolário 1.14 na página 10 podemos determinar $d(u_{n, \frac{n}{2}})$, dado $d(u_{n, n-1})$, como segue no Corolário 2.11.

Corolário 2.11 [14] *A distância de transposição da permutação solitária $u_{n, \frac{n}{2}}$ é $\frac{n}{2} - 1 \leq d(u_{n, \frac{n}{2}}) \leq \frac{n}{2}$, se $n = 6q + 2$, ou $\frac{n}{2} \leq d(u_{n, \frac{n}{2}}) \leq \frac{n}{2} + 1$, caso contrário.*

Teorema 2.12 [13, 14] *A distância de transposição da permutação solitária $u_{n,3}$ é $d(u_{n,3}) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, se $n + 1$ é múltiplo de 4, ou $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq d(u_{n,3}) \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$, se $n + 1$ não é múltiplo de 4.*

Demonstração. Assim como no Teorema 2.10 vamos considerar todos os casos de n . Para $u_{n,3}$ seja $n \in \{3q, 3q + 1, 3q + 2\}$. Pela condição de existência de permutação solitária, temos que para $n = 3q + 2$, $\text{mdc}(n + 1, 3) \neq 1$. Vamos então analisar então os casos $n \in \{3q, 3q + 1\}$.

Caso 1: Para $n = 3q$. Temos que $d(u_{n,3}) = d(u_{n,2q+1})$, já que $2q + 1$ é o inverso multiplicativo de 3 modulo $n + 1$. Seja $\pi = u_{n,2q+1}$, assim

$$\pi = \bigodot_{i=0}^{q-1} [(2q + 1 + i) (q + 1 + i) (i + 1)].$$

Primeiro vamos aplicar $t_i = t(i, 3i, 3i + 2)$, onde $i = 1, 2, \dots, q - 1$. Após $q - 1$ transposições $\pi t_1 t_2 \cdots t_{q-1} = \pi^{(q-1)}$, e $gl(\pi^{(q-1)}) = \rho_{[q+2]}$, o que implica em $d(\pi^{(q-1)}) = \lfloor \frac{q+2}{2} \rfloor + 1$. Portanto $d(u_{n,3}) = d(\pi) \leq q - 1 + \lfloor \frac{q+2}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Caso 2: Para $n = 3q + 1$. Temos que $q + 1$ é o inverso multiplicativo de 3 modulo $n + 1$. Assim $d(u_{n,3}) = d(u_{n,q+1})$. Seja $\pi = u_{n,q+1}$, assim

$$\pi = \bigcirc_{i=0}^{q-1} [(q+1+i)(2q+2+i)(i+1)] \odot [(2q+1)].$$

Aplicando $t_i = t(i, 3i, 3i+2)$ onde $i = 1, 2, \dots, q$, temos que $d(u_{n,3}) = d(u_{n,q+1}) \leq q + \lfloor \frac{q+1}{2} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.

Este limite superior é justo. De fato, caso $n + 1$ seja múltiplo de 4, temos exatamente a distância de transposição. Observe que neste caso, existe somente ciclos pares em $G(u_{n,3})$ de acordo com o Lema 1.32, o que implica em $d(u_{n,3}) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Para o caso em que $n + 1$ não é múltiplo de 4, temos que $d(u_{n,3}) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, já que $u_{n,3}$ consiste de somente um ciclo ímpar (se n é par) e dois ciclos ímpares (se n é ímpar). \square

Vamos agora encontrar reduções entre permutações solitárias, com isto podemos limitar distâncias que envolvam permutações solitárias de tamanhos menores. Outra consequência é que podemos propor um limite justo para a $u_{n,4}$, Corolário 2.15. Para obter o limite superior para $u_{n,4}$, vamos determinar uma redução de $u_{kq,k}$ para $u_{kq-2(q+2),q(k-3)-1}$.

Teorema 2.13 [37] *Seja $u_{kq-2,k}$ uma permutação solitária. Assim $u_{k(q-2),k}$ é uma $(k-1)$ -redução de $u_{kq-2,k}$, o que implica em $d(u_{kq-2,k}) \leq d(u_{k(q-2),k}) + k - 1$.*

Demonstração. Vamos mostrar que $u_{n-2(\ell-1),\ell}$ é uma $(\ell-1)$ -redução de $u_{n,\ell}$.

Dada a permutação $u_{n,\ell} = u_{kq-2,k}$, tem-se que $n+2$ é múltiplo de ℓ . Consideremos $x = \frac{n+2}{\ell}$. Segue que $\ell x \equiv n+2 \equiv 1 \pmod{n+1}$, o que implica $x = \overline{\ell^{-1}}$. A posição do elemento i é portanto, $\overline{i\ell^{-1}} = \overline{i\frac{n+2}{\ell}}$.

Calculando as posições dos elementos $1, 2, \dots, \ell-1$, temos a sequência $1x, 2x, \dots, (\ell-1)x$ crescente, já que $i\frac{n+2}{\ell} \leq n$ para $i \leq \ell-1$. Para os elementos $n+2-\ell, n+2-\ell+1, n+2-\ell+2, \dots, n+2-\ell+\ell-2 = n$, suas correspondentes posições são $1x-1, 2x-1, \dots, (\ell-1)x-1$.

Considere $n' = n+2-\ell$, a permutação solitária $u_{n,\ell}$ é portanto:

$$[\ell \dots n' \boxed{1 \dots} n'+1 \boxed{2 \dots} n'+2 \boxed{3 \dots} \dots n \boxed{\ell-1 \dots n\ell}].$$

A sequência $t(1, x, 2x-1), \dots, t(i, ix, (i+1)x-1), \dots, t(\ell-1, (\ell-1)x, n+1)$, tendo $\ell-1$ transposições, transforma $u_{n,\ell}$ em

$$\underbrace{[1 \ 2 \ 3 \ \dots \ \ell-1]}_{\ell-1 \text{ elementos}} \ell-1+\ell \ \ell-1+2\ell \ \dots \ \underbrace{[n' \ n'+1 \ n'+2 \ \dots \ n]}_{\ell-1 \text{ elementos}},$$

O que é equivalente por redução à $u_{n-2(\ell-1),\ell}$.

Todas as $\ell - 1$ transposições aplicadas em $u_{n,\ell}$ são 2-movimentos, conforme mostraremos a seguir. A permutação $[1 \ 2 \ \dots \ \ell - 1 + \ell \ \ell - 1 + 2\ell \ \dots \ n' \ \dots \ n]$ que é obtida após aplicar as transposições em $u_{n,\ell}$ é equivalente por redução à $u_{n-2(\ell-1),\ell}$, possui o número de ciclos de $u_{n-2(\ell-1),\ell}$ além dos ciclos de tamanho 1.

O número de ciclos de $u_{n-2(\ell-1),\ell}$ é igual o número de ciclos de $u_{n,\ell}$, para $mdc(n - 2(\ell - 1) + 1, \ell - 1) = mdc(n + 1, \ell - 1)$. Observe que os $2(\ell - 1)$ elementos $1, 2, \dots, \ell - 1, n', n' + 1, \dots, n$ gera, cada um deles, um ciclo de tamanho 1 em $[1 \ 2 \ \dots \ \ell - 1 + \ell \ \ell - 1 + 2\ell \ \dots \ n' \ \dots \ n]$. Assim, a permutação que é equivalente por redução à $u_{n-2(\ell-1),\ell}$ possui $2(\ell - 1)$ mais ciclos que $u_{n,\ell}$. Como podemos aumentar no máximo 2 ciclos após aplicar uma transposição, temos que todas as transposições são do tipo 2-movimento. \square

Teorema 2.14 [14] *Seja $u_{kq,k}$ uma permutação solitária, onde $k > 3$. Temos que $d(u_{kq,k}) \leq d(u_{q(k-2)-2,q(k-3)-1}) + (q + 2)$.*

Demonstração. Observe que $q(k - 1) + 1$ é o inverso multiplicativo de k modulo $kq + 1$, com isso temos que $d(u_{kq,k}) = d(u_{kq,q(k-1)+1})$. O restante da demonstração é mostrar a sequência de transposições a ser aplicada em $u_{kq,q(k-1)+1}$.

$$u_{kq,q(k-1)+1} = \bigodot_{i=0}^{q-1} \left[\bigodot_{j=0}^{k-1} [kq + 1 - q - jq + i] \right].$$

O primeiro passo consiste em aplicar as transposições $t(i, ki, k(i + 1) - 1)$, com $1 \leq i \leq q - 1$, a partir de $u_{kq,q(k-1)+1}$.

O segundo passo é reduzir a permutação obtida após estas $q - 1$ transposições anteriores, para uma permutação que vamos denotar por σ . A permutação equivalente por redução é:

$$\sigma = \bigodot_{i=0}^{q-1} \left[\bigodot_{j=0}^{k-3} [q(k - 2) + 2 - jq - i] \right] \odot [2 \ 1],$$

com $n' = kq - 2(q - 1) = q(k - 2) + 2$ elementos.

O último passo consiste em aplicar três transposições a partir de σ , das quais a primeira é um 0-movimento e os outros dois são 2-movimentos: $t(1, kq - 2q, kq - 2(q - 1))$, $t(2, 4, kq - 2q + 3)$ e $t(1, kq - 2q, kq - 2(q - 1))$. Após este passo, a permutação obtida equivalente por redução é $u_{q(k-2)-2,q(k-3)-1}$. Portanto, $u_{q(k-2)-2,q(k-3)-1}$ é uma $(q + 2, q + 1)$ -redução de $u_{kq,q(k-1)+1}$, que por sua vez é a permutação inversa de $u_{kq,k}$. \square

Um exemplo que pode ser utilizado o Teorema 2.14 e os resultados vistos nos Teoremas 2.13 e 2.10, das páginas 23 e 21, respectivamente, é o seguinte Corolário 2.15 para obtermos limites para as distâncias de transposição das permutações solitárias $u_{n,4}$, como segue.

Corolário 2.15 [14] Para a permutação solitária $u_{n,4}$:

- se $n = 12q + 8$ onde $q \geq 0$, então $\frac{n}{2} - 1 \leq d(u_{n,4}) \leq \frac{n}{2} + 2$.
- se $n = 12q + 2$ onde $q \geq 1$, então $\frac{n}{2} - 1 \leq d(u_{n,4}) \leq \frac{n}{2} + 2$.
- caso contrário, $\frac{n}{2} \leq d(u_{n,4}) \leq \frac{n}{2} + 3$.

Demonstração. Consideremos os casos $n = 4q - 2$ e $n = 4q$. Se n é $4q + 1$ ou $4q + 3$, não existe $u_{n,4}$, pois $\text{mdc}(n + 1, 4) \neq 1$.

Caso 1: Para $n = 4q - 2$. Vamos determinar a distância de $u_{4q-2,4}$ em 4 passos.

No primeiro passo vamos usar o Teorema 2.13 para reduzir $u_{4q-2,4}$ na permutação $\sigma = u_{4(q-2),4}$ com 3 transposições (observe que $n + 2$ é múltiplo de 4).

No segundo passo vamos usar o Teorema 2.14 para reduzir σ na permutação $\sigma' = u_{2(q-3),q-3}$ com q transposições.

No terceiro passo usamos novamente o Teorema 2.14 para reduzir σ' na permutação $\sigma'' = u_{2(q-6),2(q-6)-1}$ com 4 transposições.

O quarto passo é dividido entre dois subcasos complementares:

Subcaso 1.1: Se $2(q - 6) \equiv 2 \pmod{6}$, pelo Teorema 2.10 σ'' pode ser ordenado com $q - 6$ transposições. Esta condição ocorre se $n = 12q + 2$. Portanto, $d(u_{n,4}) \leq 3 + q + 4 + q - 6 = \frac{n}{2} + 2$.

Subcaso 1.2: Se $2(q - 6) \not\equiv 2 \pmod{6}$, pelo Teorema 2.10 σ'' pode ser ordenado com $q - 5$ transposições. Assim, $d(u_{n,4}) \leq 3 + q + 4 + q - 5 = \frac{n}{2} + 3$.

Caso 2: Para $n = 4q$. Sem perda de generalidade consideremos $q' = q + 2$, assim $u_{4q,4} = u_{4(q'-2),4}$. Podemos então proceder como no caso prévio, começando pelo segundo passo. Desde que o primeiro passo foi passado, não vamos aplicar as primeiras 3 transposições vistas no Caso 1. Novamente, vamos dividir em dois subcasos que são similares aos Subcasos 1.1 e 1.2:

Subcaso 2.1: Se $2(q' - 6) \equiv 2 \pmod{6}$, temos $d(u_{n,4}) \leq q' + 4 + q' - 6 = 2q + 2 = \frac{n}{2} + 2$.

Subcaso 2.2: Se $2(q' - 6) \not\equiv 2 \pmod{6}$, temos $d(u_{n,4}) \leq q' + 4 + q' - 5 = 2q + 3 = \frac{n}{2} + 3$.

Para determinar o limite inferior, considere $n \in \{12q, 12q+2, 12q+4, \dots, 12q+10\}$. Se n for ímpar, não existe $u_{n,4}$, devido 2 ser divisor comum de $n + 1$ de 4.

Se $n = 12q + 2$ ou $n = 12q + 8$, Lema 1.32 implica em que $u_{n,4}$ possui três ciclos, devido ao $\text{mdc}(n + 1, 3) = 3$, e os ciclos são ímpares, com tamanho $\frac{3(4q+1)}{3}$ ou $\frac{3(4q+3)}{3}$, respectivamente. Assim, segue do Teorema 1.16 que $d(u_{n,4}) \geq \frac{n}{2} - 1$.

Para os casos $n \in \{12q, 12q + 4, 12q + 6, 12q + 10\}$, segue do Lema 1.32 que a permutação solitária $u_{n,4}$ é unicíclica. \square

Na Tabela 2.1 apresentamos os resultados conhecidos de distância de transposição das seguintes permutações solitárias: a permutação reversa na primeira li-

Tabela 2.1: Resultados conhecidos de valores exatos para distância de transposição de permutações solitárias, exceto suas inversas.

n	ℓ	$d(u_{n,\ell})$	Referência
q	q	$\lfloor \frac{q}{2} \rfloor + 1$	Meidanis <i>et al.</i> [42]
$4q - 1$	$2q + 1$	$2q$	Christie [11]
$6q - 2$	$4q$	$3q$	Hausen <i>et al.</i> [34]
$6q$	$2q + 1$	$3q + 1$	Hausen <i>et al.</i> [34]
$2q$	2	q	Hausen <i>et al.</i> [34]
$4q - 1$ com $q > 1$	3	$2q$	Cunha e Kowada [13]

nha, resultado encontrado por Meidanis *et al.* [42]; na segunda linha a *2-permutação solitária*, i.e., permutações solitárias onde todo ciclo possui tamanho dois [11]; na terceira e quarta linhas as permutações nós u_{n,ℓ^*} ; a permutação solitária $u_{n,2}$ na quinta linha [34]. A última linha é o resultado do Teorema 2.12.

Comparando nossos limites superiores para a distância de transposição de $u_{n,3}$, $u_{n,n-1}$ e $u_{n,\frac{n}{2}}$ com os valores conhecidos das distâncias de permutações solitárias com até 20 elementos da Tabela 1.1 na página 18, podemos observar que os limites superiores diferem dos valores exatos da distância, de no máximo, 1 unidade.

Capítulo 3

Novos Limites Algébricos da Distância de União de Permutações

Vamos agora investigar a operação de união de permutações, que consiste da justaposição de permutações. Esta operação foi primeiramente abordada no contexto do problema de diâmetro de transposição. E as permutações solitárias aparecem em importantes contribuições para a construção de famílias mais distantes, como será explicado no Capítulo 4. No Capítulo 2 mostramos limites para famílias de permutações solitárias, agora mostraremos propriedades algébricas da união de permutações, e mais particularmente união de permutações solitárias. Tais propriedades algébricas trazem como consequência podermos estimar limites e valores exatos para a distância de transposição de mais famílias de permutações.

A seguir, na Seção 3.1, tratamos de propriedades algébricas que envolvem a operação de união e na Seção 3.2, apresentamos valores exatos de distâncias de transposição para uniões que envolvam permutações nós. Estes resultados serão úteis mais tarde no Capítulo 4 onde exploramos o problema do diâmetro de transposição.

3.1 A união de permutações

Definição 3.1 [11, 22, 40] *Dadas as permutações $\pi \in S_r$ e $\sigma \in S_s$, a união de π e σ é um elemento $\pi \uplus \sigma \in S_n$, onde $n = r + s + 1$ tal que:*

$$\begin{aligned} \pi \uplus \sigma &= [\pi_1 \cdots \pi_{r-1} \pi_r (r+1) (r+1+\sigma_1) \cdots (r+1+\sigma_{s-1}) (r+1+\sigma_s)] = \\ &= \bigodot_{i=1}^r [\pi_i] \odot [r+1] \odot \bigodot_{i=1}^s [\sigma_i + r + 1]. \end{aligned}$$

A operação de união \uplus foi primeiramente usada com o símbolo $++$ por Chris-

tie [11] com a proposta de construir permutações distantes do clássico limite inferior de Bafna e Pevzner fornecido pelo Teorema 1.16. Elias e Hartman [22] implicitamente usaram a operação de união para construir duas famílias de permutações de tamanho ímpar que correspondem ao atual limite inferior do diâmetro de transposição. Para n ímpar, embora estas famílias de Elias e Hartman sejam as mais distantes relatadas na literatura, para $n \geq 16$ o problema de diâmetro está em aberto.

Exemplo 3.2 *Dadas as permutações nós $u_{4,4} = [4321]$ e $u_{6,3} = [362514]$, obtenmos a união $u_{4,4} \uplus u_{6,3} \in S_{11}$: $u_{4,4} \uplus u_{6,3} = [4321581171069]$.*

A partir de propriedades conhecidas do Diagrama de Realidade e Desejo das permutações π e σ , podemos garantir propriedades estruturais do Diagrama de Realidade e Desejo da união $\pi \uplus \sigma$.

Proposição 3.3 [14] *[Comutatividade] A permutação $\pi \uplus \sigma$ é toricamente equivalente à $\sigma \uplus \pi$. Assim, $d(\pi \uplus \sigma) = d(\sigma \uplus \pi)$.*

Demonstração. Considere $\pi \in S_r$ e $\sigma \in S_s$. A permutação obtida pelo $-(r+1)$ -passo deslocamento cíclico da permutação circular $(\pi \uplus \sigma)^\circ$ é a permutação circular

$$-(r+1) + (\pi \uplus \sigma)^\circ = [(s+1) (\pi_1 + s + 1) (\pi_2 + s + 1) \cdots (\pi_r + s + 1) 0 \sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_s].$$

Observe que $-(r+1) + (\pi \uplus \sigma)^\circ \equiv (\sigma \uplus \pi)^\circ$. Assim, pela Definição 1.9, $\pi \uplus \sigma$ e $\sigma \uplus \pi$ são toricamente equivalentes. Pelo Teorema 1.10, temos que duas permutações toricamente equivalentes possuem mesma distância de transposição, com isso $d(\pi \uplus \sigma) = d(\sigma \uplus \pi)$. \square

Pela definição de união de permutações podemos observar que o Diagrama de Realidade e Desejo $G(\pi \uplus \sigma)$ de $\pi \uplus \sigma$ é obtido pela união disjunta de $G(\pi)$ e $G(\sigma)$, ou seja, a vizinhança das arestas de realidade e desejo não é alterada quando a operação de união é aplicada em duas permutações. Este resultado vem através da inclusão do elemento $r+1$ entre as permutações $\pi_{[r]}$ e $\sigma_{[s]}$ para a união $\pi \uplus \sigma$. O elemento $r+1$ faz o papel do vértice $-(r+1)$ em $G(\pi)$, e do vértice 0 em $G(\sigma)$. Observe que $G(\pi \uplus \sigma)$ é isomorfo à $G(\sigma \uplus \pi)$.

Exemplo 3.4 *A Figura 3.1a ilustra o Diagrama de Realidade e Desejo de $\rho_{[4]}$, e a Figura 3.1b mostra como o Diagrama de Realidade e Desejo de $\rho_{[4]} \uplus \rho_{[4]}$ é obtido.*

Observação 3.5 *[Estrutura de ciclos] Considere as permutações π e σ . Temos que o número de ciclos da união $\pi \uplus \sigma$ é igual a soma do número de ciclos entre π e σ , ou seja, $|C(\pi \uplus \sigma)| = |C(\pi)| + |C(\sigma)|$. Em particular $c_{\text{ímpar}}(\pi \uplus \sigma) = c_{\text{ímpar}}(\pi) + c_{\text{ímpar}}(\sigma)$.*

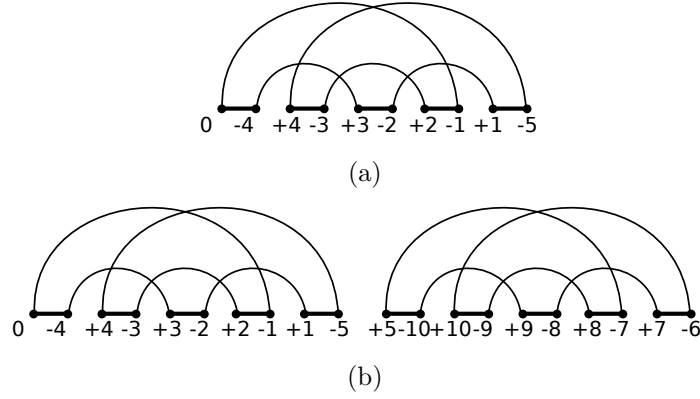


Figura 3.1: (a) $G(\rho_{[4]})$ e (b) $G(\rho_{[4]} \uplus \rho_{[4]})$.

Pelo classico limite inferior obtido no Teorema 1.16 da página 12 observamos que para a permutação $\pi \uplus \sigma$,

$$d(\pi \uplus \sigma) \geq \frac{n+1 - c_{\text{ímpar}}(\pi \uplus \sigma)}{2} = \frac{r+1 - c_{\text{ímpar}}(\pi)}{2} + \frac{s+1 - c_{\text{ímpar}}(\sigma)}{2}.$$

Um limite inferior para $\pi \uplus \sigma$ pode ser obtido através da soma dos limites inferiores de π e σ . Porém, a distância de transposição da união $d(\pi \uplus \sigma)$ não necessariamente é obtida pela soma das distâncias $d(\pi)$ e $d(\sigma)$, como serão vistos nos Teoremas 3.13, 3.19, 3.21, e 3.23. O valor de $d(\pi) + d(\sigma)$ nos dá somente um limite superior para $d(\pi \uplus \sigma)$, como descrito na Proposição 3.6.

Proposição 3.6 [14] [Desigualdade triangular] $d(\pi \uplus \sigma) \leq d(\pi) + d(\sigma)$.

Demonstração. Segue diretamente da estrutura de $G(\pi \uplus \sigma)$, dado que as transposições que afetam apenas os ciclos de π (ou somente os ciclos de σ) não afetam os ciclos de σ (ou os ciclos de π). \square

Exemplo 3.7 Considere a união $u_{4,4} \uplus u_{6,3}$. Apliquemos uma transposição que afete apenas o ciclo de $u_{4,4}$, por exemplo $t(1, 2, 5)$. Observe na Figura 3.2a o $G(u_{4,4} \uplus u_{6,3})$ e os ciclos de $G((u_{4,4} \uplus u_{6,3}).t(1, 2, 5))$ na Figura 3.2b.

Outra consequência da operação de união é que a inversa da união de permutações é igual a união das inversas das permutações, como segue na Proposição 3.8.

Proposição 3.8 [14] [Distributividade da inversa] $(\pi \uplus \sigma)^{-1} = \pi^{-1} \uplus \sigma^{-1}$.

Demonstração. Considere $\pi \in S_r$ e $\sigma \in S_s$. Seja $\omega = \pi \uplus \sigma \in S_n$, onde $n = r + s + 1$. A posição i é mapeada em $\omega(i)$ por:

$$\omega(i) = \begin{cases} \pi(i) & \text{se } 1 \leq i \leq r, \\ r+1 & \text{se } i = r+1, \\ r+1+\sigma(i-r-1) & \text{se } r+2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

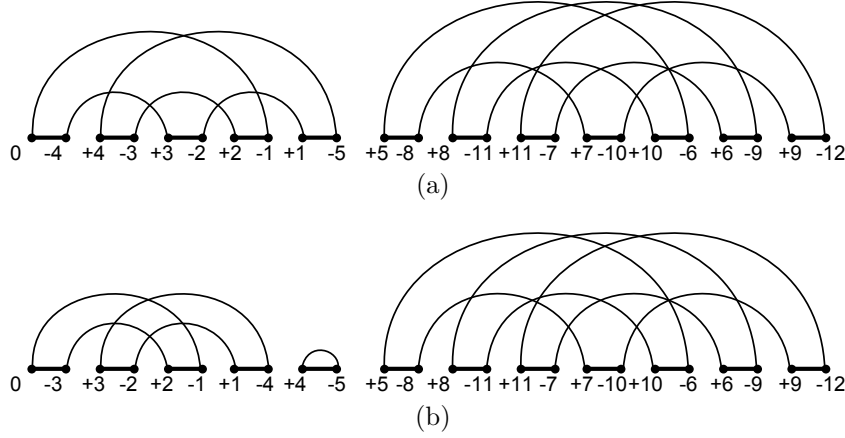


Figura 3.2: (a) $G(u_{4,4} \uplus u_{6,3})$ e (b) $G((u_{4,4} \uplus u_{6,3}).t(1, 2, 5))$.

Definamos uma nova permutação $\xi = \pi^{-1} \uplus \sigma^{-1} \in S_n$, onde a posição i é obtida:

$$\xi(i) = \begin{cases} \pi^{-1}(i) & \text{se } 1 \leq i \leq r, \\ i & \text{se } i = r + 1, \\ \sigma^{-1}(i - r - 1) + r + 1 & \text{se } r + 2 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Façamos agora o produto $\xi\omega$, e assim obtemos o valor para a posição i em $\xi(\omega(i))$:

$$\xi\omega(i) = \begin{cases} \xi(\omega(i)) = \pi^{-1}(\pi(i)) = i & \text{se } 1 \leq i \leq r, \\ \xi(r + 1) = r + 1 & \text{se } i = r + 1, \\ \xi(\omega(i)) = \xi(r + 1 + \sigma(i - r - 1)) = \\ \sigma^{-1}(r + 1 + \sigma(i - r - 1) - r - 1) + r + 1 = \\ \sigma^{-1}(\sigma(i - r - 1)) + r + 1 = i & \text{se } r + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Temos portanto que $\xi\omega = \iota_{[n]}$, implicando que $\xi = (\pi \uplus \sigma)^{-1}$. \square

Proposição 3.9 [14] *Dadas duas permutações unicíclicas $\pi \in S_r$ e $\sigma \in S_s$, onde $d(\pi) = \frac{r}{2}$, temos que:*

$$d(\pi \uplus \sigma) = \begin{cases} \frac{r+s}{2} & \text{se } d(\sigma) = \frac{s}{2}, \\ \frac{r+s}{2} + 1 & \text{se } d(\sigma) = \frac{s}{2} + 1. \end{cases}$$

Demonstração. Conforme visto na Observação 1.19 na página 12, toda permutação unicíclica contém um número par de elementos, assim π e σ contém cada uma um número par de elementos. Como σ possui somente um ciclo ímpar, pelo limite inferior do Teorema 1.16, temos que $d(\sigma) \geq \frac{s}{2}$.

Se $d(\sigma) = \frac{s}{2}$, segue da desigualdade triangular da Proposição 3.6 que $d(\pi \uplus \sigma) \leq \frac{r+s}{2}$ e pela Observação 3.5 temos a igualdade $d(\pi \uplus \sigma) = \frac{r+s}{2}$.

Se $d(\sigma) = \frac{s}{2} + 1$, segue da desigualdade triangular da Proposição 3.6 que

$d(\pi \uplus \sigma) \leq \frac{r+s}{2} + 1$, uma unidade além do limite inferior do Teorema 1.16, e a igualdade $\frac{r+s}{2}$ segue somente se transposições 2-movimentos forem aplicadas para ordenar $\pi \uplus \sigma$. Porém, é necessário aplicar um 0-movimento para ordenar $\pi \uplus \sigma$: i) se as partes π e σ são ordenados separadamente, $C(\sigma)$ necessita de um 0-movimento por hipótese; ii) se alguma transposição aplicada afeta dois ciclos ímpares, então não gera mais dois ciclos ímpares (Observação 1.21), ou seja, esta transposição foi um 0-movimento. Portanto, $d(\pi \uplus \sigma) = \frac{r+s}{2} + 1$. \square

Corolário 3.10 [14] *A permutação $\pi_{[r]} \uplus \rho_{[s]}$, onde π é unicíclica e $d(\pi) = \frac{r}{2}$, e s é um número par, possui distância de transposição $d(\pi \uplus \rho_{[s]}) = \frac{r+s}{2} + 1$.*

Demonstração. A permutação $\rho_{[s]}$ com s par consiste de um único ciclo ímpar, como pode ser verificado no Lema 1.32 na página 15, e sua distância é $d(\rho_{[s]}) = \frac{s}{2} + 1$, pelo Teorema 1.22. Então o valor $d(\pi \uplus \rho_{[s]})$ é consequência imediata da Proposição 3.9. \square

Corolário 3.11 [14] *A permutação $u_{n,2} \uplus u_{n,\frac{n}{2}+1}$ possui distância de transposição $d(u_{n,2} \uplus u_{n,\frac{n}{2}+1}) = n$.*

Demonstração. A permutação $u_{n,2}$ é unicíclica e possui distância de transposição igual a $d(u_{n,2}) = \frac{n}{2}$, como visto na Tabela 2.1. A permutação $u_{n,\frac{n}{2}+1}$ é inversa de $u_{n,2}$, também unicíclica e possui distância igual a $\frac{n}{2}$, pelo Corolário 1.14. Então o valor da distância $d(u_{n,2} \uplus u_{n,\frac{n}{2}+1})$ é consequência imediata da Proposição 3.9. \square

Proposição 3.12 [14] *Dadas as permutações $\pi \in S_r$ e $\sigma \in S_s$, ambas unicíclicas com $d(\pi) = \frac{r}{2} + 1$ e $d(\sigma) = \frac{s}{2} + 1$, temos que $\frac{r+s}{2} + 1 \leq d(\pi \uplus \sigma) \leq \frac{r+s}{2} + 2$.*

Demonstração. O limite superior segue da Proposição 3.6. O limite inferior visto no Teorema 1.16 é $d(\pi \uplus \sigma) \geq \frac{r+s}{2}$. Porém, pelo menos um 0-movimento que afeta dois ciclos ímpares é necessário para ordenar $\pi \uplus \sigma$, como visto na demonstração da Proposição 3.9. Portanto, $d(\pi \uplus \sigma) \geq \frac{r+s}{2} + 1$. \square

Teorema 3.13 [14] *A distância de transposição de $\rho_{[r]} \uplus \rho_{[r]}$ satisfaz a seguinte desigualdade: $d(\rho_{[r]} \uplus \rho_{[r]}) \leq r + 1$. A igualdade segue se r é par ou se $r \equiv 3 \pmod{4}$.*

Demonstração. A sequência de transposições para aplicar é $t_i = t(i, r+i-1, r+i+1)$ com $i = 1, 2, \dots, r+1$. Devemos agora provar que $r+1$ transposições são também necessárias para ordenar $\rho_{[r]} \uplus \rho_{[r]}$.

Quando r é par, pela Proposição 3.12 temos o limite inferior de $r+1$. Quando $r \equiv 3 \pmod{4}$, o número de ciclos ímpares é zero, e pelo limite inferior do Teorema 1.16, $d(\rho_{[r]} \uplus \rho_{[r]}) \geq r+1$. Portanto $d(\rho_{[r]} \uplus \rho_{[r]}) = r+1$. \square

Exemplo 3.14 *Considere a reversa $\rho_{[8]}$. Uma seqüência que ordena $\rho_{[8]} \uplus \rho_{[8]}$ obtida no Teorema 3.13 é:*

$$\begin{aligned} t_1 &= t(1, 8, 10), & t_4 &= t(4, 11, 13), & t_7 &= t(7, 14, 16), \\ t_2 &= t(2, 9, 11), & t_5 &= t(5, 12, 14), & t_8 &= t(8, 15, 17), \\ t_3 &= t(3, 10, 12), & t_6 &= t(6, 13, 15), & t_9 &= t(9, 16, 18). \end{aligned}$$

3.2 União de permutações nós

No Teorema 3.13, mostramos que as permutações obtidas por: união de duas cópias da mesma permutação reversa de tamanho par; e por união de duas cópias da mesma reversa de tamanho 3 modulo 4 possuem distâncias de transposição iguais ao limite inferior visto na Proposição 3.12. Nesta seção, resultados similares serão obtidos através de: a união de duas cópias da mesma permutação nó (Teorema 3.19); a união de uma permutação nó e sua inversa (Teorema 3.21); e a união de duas permutações nós de *tipos* distintos com mesmo *parâmetro* (Teorema 3.23), lembre da Definição 2.4 na página 20 onde denotamos a permutação nó por dois tipos $u_{6q,2q+1}$ e $u_{6q-2,4q}$ dado o parâmetro $q \geq 1$.

Primeiramente, demonstraremos que para toda permutação nó u_{n,ℓ^*} , existe uma seqüência que ordena $u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*}$ com somente um 0-movimento. Portanto $d(u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*})$ é igual ao limite inferior da Proposição 3.12. Na Seção 4.1, usaremos este resultado para provar a não existência de permutações super-ruins.

No Lema 3.16, mostraremos três transposições que nos permitem reduzir o problema de ordenar uma permutação de tamanho $2n + 1$ para outra com tamanho $2n - 3$.

Definição 3.15 [14, 15] *Dado $q \geq 3$, as permutações $\delta_{[12q-3]}$ e $\epsilon_{[12q-7]}$ são:*

$$\begin{aligned} \delta_{[12q-3]} &= \odot_{i=2}^q [(2q+2i-3)(4q+2i-3)(2i-2)] \odot [(4q-1)(10q-1)(6q)] \odot \\ &\odot \odot_{i=2}^q [(8q+2i-4)(10q+2i-3)(6q+2i-2)] \odot [2q] \odot \\ &\odot \odot_{i=q+2}^{2q} [(2q+2i-4)(2i-2q-3)(2i-2)] \odot [(6q-2)(2q-1)] \odot \\ &\odot \odot_{i=q+1}^{2q} [(8q+2i-4)(4q+2i-3)(6q+2i-3)], \quad e \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{[12q-7]} = & \bigcirc_{i=2}^q [(4q+2i-5)(2q+2i-4)(2i-2)] \odot [(8q-3)(6q-2)] \odot \\
& \odot \bigcirc_{i=2}^{q-1} [(10q+2i-7)(8q+2i-5)(2i+6q-4)] \odot [(12q-7)(10q-5)(4q-2)] \odot \\
& \odot [(2q-1)] \odot \bigcirc_{i=q+2}^{2q-1} [(2i-2q-3)(2q+2i-4)(2i-3)] \odot [(2q-3)(6q-4)] \odot \\
& \odot [(4q-3)(8q-4)] \odot \bigcirc_{i=q+1}^{2q-1} [(2i+4q-5)(8q+2i-6)(2i+6q-4)] \odot [8q-5].
\end{aligned}$$

Lema 3.16 [14, 15] Dada uma permutação nó u_{n,ℓ^*} com parâmetro $q \geq 3$, consideremos as transposições: $t_1 = t(1, n/2 + 2, n + 2)$, $t_2 = t(2, n/2 + 3, n + 3)$ e $t_3 = t(n/2 + 1, n + 2, 3n/2 + 2)$. Se a permutação nó for do tipo $n = 6q$ então $gl((u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*})t_1 t_2 t_3) = \delta_{[12q-3]}$, por outro lado, se o tipo for $n = 6q - 2$ então $gl((u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*})t_1 t_2 t_3) = \epsilon_{[12q-7]}$.

Demonstração. Pela construção de $u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*}$, temos que não é possível aplicar um 2-movimento na primeira transposição da sequência ótima que ordena $u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*}$, devido cada ciclo conservar a estrutura de uma permutação nó, e como cada ciclo possui tamanho ímpar, se a transposição afeta dois ciclos, o número de ciclos ímpares permanece o mesmo.

Caso 1: Suponha $n = 6q$. Seja $\alpha = u_{6q,2q+1} \uplus u_{6q,2q+1}$. Portanto, α pode ser descrita pela seguinte concatenação:

$$\begin{aligned}
\alpha = & \bigcirc_{i=1}^q [(2q+2i-1)(4q+2i)(2i)] \odot \bigcirc_{i=q+1}^{2q} [(2q+2i-1)(2i-2q-1)(2i)] \odot \\
& \odot [6q+1] \odot \bigcirc_{i=1}^q [(8q+2i)(10q+2i+1)(6q+2i+1)] \odot \\
& \odot \bigcirc_{i=q+1}^{2q} [(8q+2i)(4q+2i)(6q+2i+1)].
\end{aligned}$$

Aplicando a sequência de transposições $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3$ em α , obtemos α^3 :

$$\begin{aligned}
\alpha^3 = & [(1)(2)] \odot \bigcirc_{i=2}^q [(2q+2i-1)(4q+2i)(2i)] \odot [(4q+1)(4q+2)] \odot \\
& \odot [(10q+3)(6q+3)] \odot \bigcirc_{i=2}^q [(8q+2i)(10q+2i+1)(6q+2i+1)] \odot \\
& \odot [(8q+2)(2q+2)] \odot \bigcirc_{i=q+2}^{2q} [(2q+2i-1)(2i-2q-1)(2i)] \odot \\
& \odot [(6q+1)(2q+1)] \odot \bigcirc_{i=q+1}^{2q} [(8q+2i)(4q+2i)(6q+2i+1)].
\end{aligned}$$

A permutação equivalente por redução de α^3 é obtida pela eliminação dos elementos 1, 2, $4q+2$ e $8q+2$, e rerotulando os elementos que restam, o que resulta em $\delta_{[12q-3]}$.

Caso 2: Suponha $n = 6q - 2$. Seja $\beta = u_{6q-2,4q} \uplus u_{6q-2,4q}$. Com isso, β pode ser descrita através da seguinte concatenação:

$$\begin{aligned} \beta = & \bigodot_{i=1}^q [(4q+2i-2) (2q+2i-1) (2i)] \odot \bigodot_{i=q+1}^{2q-1} [(2i-2q-1) (2q+2i-1) (2i)] \odot \\ & \odot [(2q-1) (6q-1)] \odot \bigodot_{i=1}^q [(10q+2i-3) (8q+2i-2) (2i+6q-1)] \odot \\ & \odot \bigodot_{i=q+1}^{2q-1} [(2i+4q-2) (8q+2i-2) (2i+6q-1)] \odot [8q-2]. \end{aligned}$$

Aplicando a sequência de transposições $t_1 \cdot t_2 \cdot t_3$ em β , obtemos β^3 :

$$\begin{aligned} \beta^3 = & [(1) (2)] \odot \bigodot_{i=2}^q [(4q+2i-2) (2q+2i-1) (2i)] \odot [(2q+1) (8q)] \odot [(6q+1)] \odot \\ & \odot \bigodot_{i=2}^{q-1} [(10q+2i-3) (8q+2i-2) (2i+6q-1)] \odot [(12q-3) (10q-2) (10q-1)] \odot \\ & \odot [(4q+1) (2q+2)] \odot \bigodot_{i=q+2}^{2q-1} [(2i-2q-1) (2q+2i-1) (2i)] \odot [(2q-1) (6q-1)] \odot \\ & \odot [(4q) (8q-1)] \odot \bigodot_{i=q+1}^{2q-1} [(2i+4q-2) (8q+2i-2) (2i+6q-1)] \odot [8q-2]. \end{aligned}$$

A permutação equivalente por redução de β^3 é obtida pela eliminação dos elementos 1, 2, $2q+1$ e $10q-1$, e rerotulando os elementos que restam, o que resulta em $\epsilon_{[12q-7]}$. \square

Note que o Lema 3.16 não contém as permutações nós com os parâmetros $q=1$ e $q=2$. Porém podemos verificar que as permutações $u_{4,4} \uplus u_{4,4}$, $u_{6,3} \uplus u_{6,3}$, $u_{10,8} \uplus u_{10,8}$ e $u_{12,5} \uplus u_{12,5}$ podem ser ordenadas com exatamente um 0-movimento, através da aplicação das mesmas transposições t_1 , t_2 e t_3 , nesta ordem, especificadas no Lema 3.16 e a partir disto, ordenar a permutação obtida através da redução, apenas aplicando 2-movimentos, como pode ser visto no Teorema 3.17.

Teorema 3.17 [14, 15] *A distância de transposição de $gl((u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*})t_1t_2t_3)$ com $n \leq 12$, onde $t_1 = t(1, n/2 + 2, n + 2)$, $t_2 = t(2, n/2 + 3, n + 3)$, $t_3 = t(n/2 + 1, n + 2, 3n/2 + 2)$, e $gl((u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*})t_1t_2t_3)$ é uma $(3, 2)$ -redução de $u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*}$ e pode ser ordenada somente por 2-movimentos.*

Demonstração. As únicas permutações nós u_{n,ℓ^*} com $n \leq 12$, considerando que $n = 6q$ ou $n = 6q - 2$, são quatro: para $n = 6q$, temos $q = 1$ e $q = 2$, ou seja $u_{4,4}$ e $u_{10,8}$; para $n = 6q - 2$, temos $q = 1$ e $q = 2$, ou seja $u_{6,3}$ e $u_{12,5}$. Portanto, são quatro casos de uniões $u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*}$ de cópias da mesma permutação nó.

Primeiramente aplicamos $t_1 = t(1, n/2 + 2, n + 2)$, $t_2 = t(2, n/2 + 3, n + 3)$, $t_3 = t(n/2 + 1, n + 2, 3n/2 + 2)$ e obtemos a permutação reduzida $gl((u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*})t_1t_2t_3)$. Vamos considerar os casos de $n = 6q$ ou $n = 6q - 2$ com $q = 1$ e $q = 2$ após aplicarmos as transposições t_1 , t_2 e t_3 .

Se $n = 4$, aplicamos $t(1, 3, 5)$ e $t(2, 4, 6)$ e após isto $u_{4,4} \uplus u_{4,4}$ já está ordenada.

Caso contrário, aplicamos $t(1, n/2-1, n-1)$, $t(2, n/2, 3n/2)$.

Se $n = 6$, aplicamos $t(1, 5, 7)$, $t(2, 4, 10)$, e $u_{6,3} \uplus u_{6,3}$ está ordenada.

Se $n = 10$ ou $n = 12$, aplicamos $t(n, 3n/2-1, 2n-2)$, $t(n/2, n-1, 3n/2)$, $t(2, n/2+3, 3n/2+2)$, $t(1, n/2+2, n+3)$.

Caso $n = 10$, aplicamos $t(5, 9, 15)$ e $t(2, 7, 13)$, e assim, $u_{10,8} \uplus u_{10,8}$ está ordenada.

Caso $n = 12$, aplicamos $t(11, 18, 21)$, $t(3, 16, 19)$, $t(9, 13, 21)$, $t(2, 15, 19)$, com isso $u_{12,5} \uplus u_{12,5}$ está ordenada. \square

Deste modo, toda união de duas cópias da mesma permutação nó u_{n,ℓ^*} com $n \leq 12$ possui distância $n + 1$, igual ao limite inferior da Proposição 3.12. O Lema 3.18 e o Teorema 3.19 a seguir generalizam este resultado para toda união de duas cópias da mesma permutação nó com mais de 12 elementos.

Lema 3.18 [14, 15] *Para todo parâmetro $q \geq 3$ a permutação $\delta_{[12(q-2)-3]}$ é uma 12-redução da permutação $\delta_{[12q-3]}$, e portanto $d(\delta_{[12q-3]}) = d(\delta_{[12(q-2)-3]}) + 12$. E a permutação $\epsilon_{[12(q-2)-7]}$ é uma 12-redução da permutação $\epsilon_{[12q-7]}$, e portanto $d(\epsilon_{[12q-7]}) = d(\epsilon_{[12(q-2)-7]}) + 12$.*

Demonstração. Seja q um inteiro maior que 2. Caso a permutação a ser ordenada seja $\delta_{[12q-3]}$, considere $n = 6q$. Caso $\epsilon_{[12q-7]}$ seja a permutação a ser ordenada, considere $n = 6q - 2$. As transposições a serem aplicadas em ambos os casos são:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= t(1, \frac{n}{2}-1, n-1), & \lambda_5 &= t(2, \frac{n}{2}+3, \frac{3n}{2}+2), & \lambda_9 &= t(n-3, n+1, \frac{3n}{2}-1), \\ \lambda_2 &= t(2, \frac{n}{2}, \frac{3n}{2}), & \lambda_6 &= t(1, \frac{n}{2}+1, n+3), & \lambda_{10} &= t(2, \frac{n}{2}, \frac{3n}{2}-3), \\ \lambda_3 &= t(n, \frac{3n}{2}-1, 2n-2), & \lambda_7 &= t(n-1, \frac{3n}{2}, 2n-3), & \lambda_{11} &= t(\frac{n}{2}-5, \frac{3n}{2}-7, 2n-5), \\ \lambda_4 &= t(\frac{n}{2}, n-1, \frac{3n}{2}), & \lambda_8 &= t(\frac{n}{2}-3, \frac{3n}{2}-2, 2n-5), & \lambda_{12} &= t(n-6, \frac{3n}{2}-5, 2n-3). \end{aligned}$$

Para o caso de $\delta_{[12q-3]}$, após aplicarmos $\lambda_1 \dots \lambda_{12}$ nesta ordem, obtemos σ'^{12} :

$$\begin{aligned} \sigma'^{12} &= [(1)(2)] \odot \bigodot_{i=3}^{q-1} [(2q+2i-3)(4q+2i-3)(2i-2)] \odot [(4q-3)(4q-2)(4q-1)] \odot \\ &\quad \odot [(4q)(4q+1)(10q-1)(10q)(10q+1)(6q+2)] \odot \bigodot_{i=3}^{q-1} [(8q+2i-4)(10q+2i-3) \\ &\quad (6q+2i-2)] \odot [(8q-3)(8q-2)(8q-1)(8q)(2q)(2q+1)(2q+2)] \odot \\ &\quad \odot \bigodot_{i=q+3}^{2q-1} [(2q+2i-4)(2i-2q-3)(2i-2)] \odot [(6q-4)(2q-3)(2q-2)(2q-1)] \odot \\ &\quad \odot [(10q-4)(10q-3)(10q-2)(6q-3)(6q-2)(6q-1)(6q)] \odot [(6q+1)(8q+1)] \odot \\ &\quad \odot \bigodot_{i=q+2}^{2q-1} [(8q+2i-4)(4q+2i-3)(6q+2i-3)] \odot [(12q-4)(12q-3)]. \end{aligned}$$

A redução de σ'^{12} é obtida pela eliminação dos elementos 1, 2, $4q-2$, $4q-1$, $4q$, $4q+1$, $10q$, $10q+1$, $8q-3$, $8q-2$, $8q-1$, $8q$, $2q+1$, $2q+2$, $2q-2$, $2q-1$, $10q-3$,

$10q - 2, 6q - 2, 6q - 1, 6q, 6q + 1, 12q - 4$ e $12q - 3$, rerotulando os elementos que restam, o que resulta em $\delta_{[12(q-2)-3]}$.

Para o caso $\epsilon_{[12q-7]}$, após aplicarmos $\lambda_1 \dots \lambda_{12}$ nesta ordem, obtemos σ''^{12} :

$$\begin{aligned} \sigma''^{12} = & [(1) (2)] \odot \bigcirc_{i=3}^{q-1} [(4q+2i-5) (2q+2i-4) (2i-2)] \odot [(2q-3) (2q-2)] \odot \\ & \odot [(2q-1) (2q) (8q-3) (8q-2) (8q-1) (6q)] \odot \bigcirc_{i=3}^{q-2} [(10q+2i-7) (8q+2i-5) \\ & (2i+6q-4)] \odot [(12q-9) (10q-7) (10q-6) (10q-5) (10q-4) (10q-3)] \odot \\ & \odot [(4q-2) (4q-1) (4q) (2q+1)] \odot \bigcirc_{i=q+3}^{2q-1} [(2i-2q-3) (2q+2i-4) (2i-3)] \\ & \odot [(4q-4) (4q-3) (8q-6) (8q-5) (8q-4) (6q-5) (6q-4) (6q-3) (6q-2)] \odot \\ & \odot \bigcirc_{i=q+2}^{2q-2} [(2i+4q-5) (8q+2i-6) (2i+6q-4)] \odot [(8q-7) (12q-8) (12q-7)]. \end{aligned}$$

A redução de σ''^{12} é obtida pela eliminação dos elementos $1, 2, 2q - 3, 2q - 2, 2q - 1, 2q, 8q - 2, 8q - 1, 10q - 6, 10q - 5, 10 - 4, 10q - 3, 4q - 1, 4q, 4q - 4, 4q - 3, 8q - 5, 8q - 4, 6q - 4, 6q - 3, 6q - 2, 6q - 1, 12q - 8, 12 - 7$, e rerotulando os elementos que restam, o que resulta em $\epsilon_{[12(q-2)-7]}$. \square

Finalmente, após os Lemas 3.16 e 3.18 e o Teorema 3.17 concluímos que o valor da distância de transposição de $u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*}$ é $n + 1$, ou seja, igual ao limite inferior da Proposição 3.12, como segue no Teorema 3.19.

Teorema 3.19 [14, 15] *A distância de transposição de $u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*}$ é igual a $n + 1$.*

Demonstração. Como visto anteriormente na Seção 2.1, a permutação nó u_{n,ℓ^*} é unicíclica e possui distância $d(u_{n,\ell^*}) = \frac{n}{2} + 1$, assim pela Proposição 3.12 pelo menos $n + 1$ transposições são necessárias para ordenar $u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*}$. De fato, $n + 1$ transposições são também suficientes para ordenar $u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*}$.

No Lema 3.16 estabelecemos que é possível aplicarmos um 0-movimento e dois 2-movimentos nesta ordem para obter uma permutação equivalente por redução a $\delta_{[12q-3]}$ caso o tipo seja $n = 6q$, ou uma redução a $\epsilon_{[12q-7]}$ caso o tipo seja $n = 6q - 2$. Consideremos $n = 6q$ e com isso a permutação $u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*} = u_{6q,2q+1} \uplus u_{6q,2q+1}$ ter sido reduzida à $\delta_{[12q-3]}$.

Caso $q \leq 2$, vimos anteriormente no Teorema 3.17 que, nestes casos bases, $gl((u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*})t_1 t_2 t_3)$ podem ser ordenados somente por 2-movimentos.

Caso $q \geq 3$, a sequência de transposições do tipo 2-movimento vista no Lema 3.18 é aplicada i vezes repetidas, obtendo assim $\delta_{[12(q-2)-3]}, \delta_{[12(q-4)-3]}, \dots, \delta_{[12(q-2i)-3]}$, até que $q - 2i \leq 2$. Note que de um passo $\delta_{[12(q-2i)-3]}$ para $\delta_{[12(q-2(i+1))-3]}$ há remoção de 24 elementos, ou seja, em cada uma das 12 transposições há remoção de dois elementos, ou como pode ser visto de maneira equivalente, a cada transposição

há um aumento em dois do número de ciclos de tamanho 1, assim cada uma das 12 transposições é um 2-movimento.

Deste modo $\delta_{[12(q-2i)-3]}$ pode ser ordenado aplicando somente 2-movimentos. Como visto, somente a primeira transposição aplicada a $u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*}$ é 0-movimento e utilizamos exatamente $n + 1$ transposições, valor igual ao limite inferior da Proposição 3.12. O caso da permutação ter sido reduzida a $\epsilon_{[12q-7]}$ é tratado de maneira similar. \square

Exemplo 3.20 *Considere a permutação nó $u_{16,12}$. Ou seja, o parâmetro $q = 3$ para a permutação do tipo $n = 16$. A sequência obtida no Teorema 3.19 que ordena $u_{16,12} \uplus u_{16,12}$ é:*

1) *Primeiro passo (Lema 3.16): Aplicar t_1, t_2 e t_3 , onde:*

$$\begin{aligned} t_1 &= t(1, 10, 18), \\ t_2 &= t(2, 11, 19), \\ t_3 &= t(9, 18, 26). \end{aligned}$$

Obter a permutação equivalente por redução:

$$gl((u_{16,12} \uplus u_{16,12})t_1t_2t_3) = [11\ 6\ 2\ 13\ 8\ 4\ 21\ 16\ 27\ 23\ 18\ 29\ 25\ 10\ 5\ 1\ 12\ 7\ 3\ 14\ 9\ 20\ 15\ 26\ 22\ 17\ 28\ 24\ 19].$$

2) *Segundo passo (Lema 3.18): Aplicar $\lambda_1, \dots, \lambda_{12}$ em $gl((u_{16,12} \uplus u_{16,12})t_1t_2t_3)$, onde:*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= t(1, 7, 15), & \lambda_5 &= t(2, 11, 26), & \lambda_9 &= t(13, 17, 23), \\ \lambda_2 &= t(2, 8, 24), & \lambda_6 &= t(1, 10, 19), & \lambda_{10} &= t(2, 8, 21), \\ \lambda_3 &= t(16, 23, 30), & \lambda_7 &= t(15, 24, 29), & \lambda_{11} &= t(3, 17, 27), \\ \lambda_4 &= t(8, 15, 24), & \lambda_8 &= t(5, 22, 27), & \lambda_{12} &= t(10, 19, 29). \end{aligned}$$

Obter a permutação equivalente por redução:

$$gl(gl((u_{16,12} \uplus u_{16,12})t_1t_2t_3)\lambda_1 \cdots \lambda_{12}) = [5\ 2\ 1\ 4\ 3].$$

3) *Terceiro passo (Teorema 3.17): Observe que $[5\ 2\ 1\ 4\ 3]$ é igual a permutação obtida da permutação nó $u_{4,4}$, ou seja com parâmetro $q = 1$ e do tipo $n = 4$ após as primeiras três transposições vistas no Teorema 3.17.*

Aplicar $t(1, 3, 5).t(2, 4, 6)$ em $[5\ 2\ 1\ 4\ 3]$.

No Teorema 3.19, vimos que a união de cópias de duas permutações nós possui distância igual ao limite inferior da Proposição 3.12. Outras condições suficientes para obtermos permutações iguais a este limite inferior são vistas a seguir nos Teoremas 3.21 e 3.23.

Teorema 3.21 [14] *A distância de transposição da permutação $u_{n,\ell^*} \uplus (u_{n,\ell^*})^{-1}$ é $d(u_{n,\ell^*} \uplus (u_{n,\ell^*})^{-1}) = n + 1$.*

Demonstração. Dada uma permutação nó u_{n,ℓ^*} temos que $(\ell^*)^{-1} = \frac{n}{2} + 2$, então pelo Corolário 1.14 da página 10 temos que $(u_{n,\ell^*})^{-1} = u_{n,\frac{n}{2}+2}$. Para ordenar $u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\frac{n}{2}+2}$ basta aplicarmos as transposições $t(i, i-1 + (\ell^*)^{-1}, n+1+i)$ para $i = 1, 2, \dots, n+1$. Temos que $n+1$ transposições são também necessárias para ordenar $u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\frac{n}{2}+2}$, como visto na Proposição 3.12. \square

Exemplo 3.22 *Considere a nó $u_{6,3}$ e sua inversa $u_{6,5}$. Uma seqüência obtida no Teorema 3.21 que ordena $u_{6,3} \uplus u_{6,5}$ é:*

$$t(1, 5, 8), t(2, 6, 9), t(3, 7, 10), t(4, 8, 11), t(5, 9, 12), t(6, 10, 13), t(7, 11, 14).$$

Uma estratégia similar a usada para estabelecer que a distância de transposição de $u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*}$ pode ser aplicada para provar a distância de transposição da união de duas permutações nós de tipos distintos e com mesmo parâmetro q , ou seja, a permutação $u_{6q-2,4q} \uplus u_{6q,2q+1}$ pode ser ordenada de tal maneira que seja aplicado somente um 0-movimento.

Teorema 3.23 [14] *A distância de transposição de $\zeta_{[n]} = u_{6q-2,4q} \uplus u_{6q,2q+1}$ é igual a $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$.*

Demonstração. Pela Proposição 3.12 temos que $\zeta_{[n]} \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Considere $\zeta_{[12q-1]} = u_{6q-2,4q} \uplus u_{6q,2q+1}$ e $\zeta'_{[12q-5]} = gl(\zeta t_1 t_2 t_3)$, onde $t_1 = t(1, 3q+1, 6q)$, $t_2 = t(2, 3q+2, 6q+4)$ e $t_3 = t(3q, 6q+1, 9q)$.

Caso 1: Suponha $q = 1$. A permutação ζ' pode ser ordenada aplicando a seguinte seqüência: $\zeta' \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$, tal que $\lambda_1 = t(1, 4, 7)$, $\lambda_2 = t(2, 6, 8)$ e $\lambda_3 = t(3, 5, 7)$.

Caso 2: Suponha $q = 2$. A permutação ζ' pode ser ordenada aplicando a seguinte seqüência: $\zeta' \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_9$, tal que $\lambda_1 = t(1, 4, 10)$, $\lambda_2 = t(2, 6, 17)$, $\lambda_3 = t(10, 15, 20)$, $\lambda_4 = t(5, 9, 16)$, $\lambda_5 = t(2, 9, 19)$, $\lambda_6 = t(1, 7, 14)$, $\lambda_7 = t(6, 10, 16)$, $\lambda_8 = t(4, 14, 17)$, $\lambda_9 = t(2, 11, 17)$.

Caso 3: Para $q > 2$. Considere a permutação $\zeta'^{(q)}$, onde $\zeta'^{(q)}$ é ζ' com parâmetro q , ou seja, $\zeta'^{(q)} = gl((u_{6q-2,4q} \uplus u_{6q,2q+1}) t_1 t_2 t_3)$.

Assim $\zeta'^{(q)}$ pode ser reduzida a $\zeta'^{(q-2)}$ através da seqüência recorrente de 12 transposições $\lambda_1 \dots \lambda_{12}$ na seguinte ordem:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= t(1, 3q-2, 6q-2), & \lambda_5 &= t(2, 3q+3, 9q+1), & \lambda_9 &= t(6q-4, 6q, 9q-2), \\ \lambda_2 &= t(2, 3q, 9q-1), & \lambda_6 &= t(1, 3q+1, 6q+2), & \lambda_{10} &= t(2, 3q-1, 9q-4), \\ \lambda_3 &= t(6q-2, 9q-3, 12q-4), & \lambda_7 &= t(6q-2, 9q-2, 12q-5), & \lambda_{11} &= t(3q-6, 9q-8, 12q-7), \\ \lambda_4 &= t(3q-1, 6q-3, 9q-2), & \lambda_8 &= t(3q-4, 9q-3, 12q-7), & \lambda_{12} &= t(6q-8, 9q-7, 12q-5). \end{aligned}$$

Aplicando o Caso 3 i repetidas vezes, obtemos:

i) se a última redução gera $q = 1$, temos que $12(q-2i) - 5 = 7$, assim $i = \frac{q-1}{2}$ e portanto foram aplicadas $12 \frac{q-1}{2} + 3 + 3 = 6q = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ transposições. Ou seja, 3

transposições que transformam ζ em ζ' , i passos de 12 transposições do Caso 3 e 3 transposições do Caso 1;

ii) se a última redução gera $q = 2$, temos que $12(q - 2i) - 5 = 19$, assim $i = \frac{q-2}{2}$ e portanto foram aplicadas $12\frac{q-2}{2} + 3 + 9 = 6q = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ transposições. Ou seja, 3 transposições que transformam ζ em ζ' , i passos de 12 transposições do Caso 3 e 9 transposições do Caso 2. \square

Exemplo 3.24 *Considere as permutações nós com $q = 3$. Uma sequência obtida no Teorema 3.23 que ordena $u_{16,12} \uplus u_{18,7}$ é:*

1) *Primeiro passo: Aplicar t_1, t_2 , e t_3 , onde:*

$$t_1 = t(1, 10, 18),$$

$$t_2 = t(2, 11, 20),$$

$$t_3 = t(9, 19, 27).$$

Obter a permutação reduzida:

$$gl((u_{16,12} \uplus u_{18,7})t_1t_2t_3) = [11\ 6\ 2\ 13\ 8\ 4\ 16\ 22\ 29\ 18\ 24\ 31\ 20\ 27\ 10\ 5\ 1\ 12\ 7\ 3\ 14\ 9\ 26\ 15\ 21\ 28\ 17\ 23\ 30\ 19\ 25].$$

2) *Segundo passo: Aplicar $\lambda_1, \dots, \lambda_{12}$ em $gl((u_{16,12} \uplus u_{18,7})t_1t_2t_3)$, onde:*

$$\lambda_1 = t(1, 7, 16), \quad \lambda_5 = t(2, 12, 28), \quad \lambda_9 = t(14, 18, 25),$$

$$\lambda_2 = t(2, 9, 26), \quad \lambda_6 = t(1, 10, 20), \quad \lambda_{10} = t(2, 8, 23),$$

$$\lambda_3 = t(16, 24, 32), \quad \lambda_7 = t(16, 25, 31), \quad \lambda_{11} = t(3, 19, 29),$$

$$\lambda_4 = t(8, 15, 25), \quad \lambda_8 = t(5, 24, 29), \quad \lambda_{12} = t(10, 20, 31).$$

Obter a permutação reduzida:

$$gl(gl((u_{16,12} \uplus u_{18,7})t_1t_2t_3)\lambda_1 \cdots \lambda_{12}) = [4\ 7\ 2\ 1\ 6\ 3\ 5].$$

3) *Terceiro passo (Caso 1): Observe que $[4\ 7\ 2\ 1\ 6\ 3\ 5]$ é igual a permutação obtida pelas permutações nós com parâmetro $q = 1$ após as três primeiras transposições.*

Aplicar $t(1, 4, 7).t(2, 6, 8).t(3, 5, 7)$ em $[4\ 7\ 2\ 1\ 6\ 3\ 5]$.

Observe os seguintes casos de uniões: permutações nós iguais, Teorema 3.19; uma permutação nó e sua inversa, Teorema 3.21; e permutações nós de tipos distintos com mesmo parâmetro, Teorema 3.23. Para todas essas uniões, temos que a distância de transposição é igual ao limite inferior da Proposição 3.12, porém não temos uma regra para determinar uma família que envolva uniões de permutações nós onde sua distância seja igual ao limite superior de $\frac{r+s}{2} + 2$, visto na Proposição 3.12 — onde r e s são os tamanhos das permutações nós envolvidas na união. Sabemos, através de um algoritmo *branch-and-bound* [19], que existem uniões envolvendo permutações nós que atingem este limite superior, um exemplo é a união de duas permutações nós $u_{4,4} \uplus u_{10,8}$, que possui distância 9 computada pelo algoritmo, como será discutido

na Seção 4.2. Observe que as permutações nós $u_{4,4}$ e $u_{10,8}$ são do mesmo tipo e possuem parâmetros diferentes.

Obter permutações que tenham distância igual ao limite superior da Proposição 3.12 é uma estratégia promissora para estabelecer novos limites inferiores para o problema do diâmetro de transposição, como será visto a seguir no Capítulo 4.

Capítulo 4

O Limite Inferior do Diâmetro

Vimos no Capítulo 3 propriedades envolvendo a operação de união de permutações, e mais particularmente, propriedades da união de permutações nós. Discutiremos agora a relação entre as famílias mais distantes propostas na literatura (e nesta dissertação) e a operação de união de permutações. A seguir, na Seção 4.1, veremos como se aplica a união de permutações aos resultados sobre limites inferiores para o diâmetro. Também abordaremos a proposta recentemente publicada por Lu e Yang [40] para melhorar o limite inferior, que se trata de apresentar famílias que atendam as características de serem uniões de permutações “especiais”, as chamadas permutações super-ruins. A partir do resultado visto de distância para uniões de cópias da mesma permutação nó (Teorema 3.19 na página 36), podemos provar que não existem permutações super-ruins, o que é feito no Teorema 4.6.

Na Seção 4.2, propomos novas famílias que atingem o atual limite inferior de Elias e Hartman [22], que são obtidas através da união de permutações nós de tipos distintos, onde estas uniões possuem distância igual ao limite superior da Proposição 3.12. Concluimos nosso estudo do diâmetro pela proposta de uma nova estratégia para melhorar o limite inferior do diâmetro de transposição, através de uma generalização da teoria desenvolvida por Elias e Hartman [22].

4.1 O atual limite inferior do diâmetro

O primeiro limite inferior não trivial para o diâmetro de transposição foi dado por Meidanis, Walter e Dias [42], como consequência do Teorema 1.22 da distância da reversa. Além disso, eles conjecturaram que o diâmetro seria exatamente $\lfloor n/2 \rfloor + 1$ e assim, a permutação reversa seria diametral. Porém, permutações com distâncias maiores que a reversa foram encontradas para n ímpar, Eriksson *et al.* [23] encontraram duas permutações, $[4\ 3\ 2\ 1\ 5\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6] = \rho_{[4]} \uplus \rho_{[8]}$ e $[4\ 3\ 2\ 1\ 5\ 15\ 14\ 13\ 12\ 11\ 10\ 9\ 8\ 7\ 6] = \rho_{[4]} \uplus \rho_{[10]}$, onde suas distâncias de transposição são 8 e 9, respectivamente, ou seja, uma unidade além da distância da reversa,

Tabela 4.1: Resultados conhecidos de valores exatos para o diâmetro de transposição [34].

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$TD(n)$	0	1	2	3	3	4	4	5	5	6	6	7	8	8	9

invalidando assim a conjectura para $TD(13)$ e $TD(15)$.

Estes valores, 8 para $TD(13)$ e 9 para $TD(15)$, atingem justamente um limite superior para o diâmetro, que é dado pelo Teorema 4.1. Este resultado foi obtido através do estudo do grafo associado $TRG(n)$ ¹. O grafo $TRG(n)$ é definido por: cada vértice representa uma permutação de tamanho n , e existe uma aresta incidentes a dois vértices quando estes vértices possuem distância de transposição 1. Existe uma relação de recorrência para construção de $TRG(n)$ em função de $TRG(n - 1)$, e partir desta relação encontrada foi possível limitar o diâmetro de transposição, como segue.

Teorema 4.1 [33] *O diâmetro de transposição $TD(n)$, com $n > 0$, é: $TD(n - 1) \leq TD(n) \leq TD(n - 1) + 1$.*

Outro limite superior para o diâmetro foi dado por Eriksson *et al.* [23]. Este resultado, Teorema 4.2, foi obtido através do estudo de casos em que a cada duas transposições sempre é possível reduzir a uma permutação com três elementos a menos, como segue.

Teorema 4.2 [23] *O diâmetro de transposição $TD(n)$, com $n > 0$, é: $TD(n) \leq TD(n - 3) + 2$.*

Na Tabela 4.1 apresentamos os valores exatos conhecidos para o diâmetro de transposição. Como pode ser observado pelos Teoremas 4.1 e 4.2 o valor de $TD(16)$ pode ser 9 ou 10 e como um algoritmo de força bruta possui complexidade exponencial ao valor de n , torna-se inviável tal busca computacional ainda que para permutações de poucos elementos.

Com isso, vemos que os argumentos para limite superior para o diâmetro dos Teoremas 4.1 e 4.2 são obtidos de maneira distintas: um através de aspectos teóricos relacionados ao grafo $TRG(n)$ associado; e outro através de análise de um algoritmo aproximativo que ordena uma permutação qualquer.

Um limite inferior melhor para n ímpar com $n \geq 13$ foi dado por Elias e Hartman [22]. As famílias foram construídas a partir das permutações encontradas por

¹ $TRG(n)$ é o Grafo de Rearranjo por Transposições para permutações de tamanho n e foi explorado por Hausen [33].

Eriksson *et al.* [23], e portanto tais famílias de permutações com um número ímpar de elementos possuem distância de transposição igual a $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1$.

Incluimos a prova do Teorema 4.3 porque evidencia a utilidade da operação de união e também pelo argumento similar que será dado na página 46 para as novas famílias propostas que atingem o atual limite inferior do diâmetro.

Teorema 4.3 [22] *A permutação $(\rho_{[4]} \uplus \rho_{[8]}) \underbrace{\uplus \rho_{[3]} \uplus \rho_{[3]} \dots \uplus \rho_{[3]}}_{k \text{ termos}}$, com $n = 13 + 4k$ possui distância de transposição igual a $\frac{n+1}{2} + 1$.*

Demonstração. A demonstração se baseia por uma análise sobre as maneiras de ordenar a permutação.

Para obter o limite inferior, vemos que $c_{\text{ímpar}}((\rho_{[4]} \uplus \rho_{[8]}) \underbrace{\uplus \rho_{[3]} \uplus \rho_{[3]} \dots \uplus \rho_{[3]}}_{k \text{ termos}}) = c_{\text{ímpar}}(\rho_{[4]} \uplus \rho_{[8]})$, já que $G(\rho_{[3]})$ consiste de dois ciclos pares. Com isso temos que a distância de transposição é pelo menos $\frac{n-1}{2}$, onde $n = 13 + 4k$. Mostraremos que são necessários dois 0-movimentos para ordenar $(\rho_{[4]} \uplus \rho_{[8]}) \underbrace{\uplus \rho_{[3]} \uplus \rho_{[3]} \dots \uplus \rho_{[3]}}_{k \text{ termos}}$, ou seja, duas transposições além do limite inferior, obtendo assim $\frac{n-1}{2} + 2 = \frac{n+1}{2} + 1$.

A permutação $\underbrace{\rho_{[3]} \uplus \rho_{[3]} \dots \uplus \rho_{[3]}}_{k \text{ termos}}$ pode ser ordenada aplicando somente 2-movimentos, como visto no Teorema 3.13. Temos assim os seguinte casos:

Caso 1: $\rho_{[4]} \uplus \rho_{[8]}$ é ordenada separadamente do restante da permutação. Observe que esta é justamente a permutação encontrada por Eriksson *et al.* [23] que requer dois 0-movimentos, isto devido a sua distância ser 8, duas unidades além do limite inferior.

Caso 2: $\rho_{[4]} \uplus \rho_{[3]}$ é ordenada separadamente do restante da permutação. Temos a distância para $\rho_{[4]} \uplus \rho_{[3]}$ igual a 5, uma unidade além do limite inferior. Outro 0-movimento é necessário através da permutação $\rho_{[8]}$, já que tanto $\rho_{[8]}$ quanto $\rho_{[8]} \uplus \rho_{[3]}$ necessita de um 0-movimento cada.

Caso 3: $\rho_{[8]} \uplus \rho_{[3]}$ é ordenada separadamente do restante da permutação. Análogo ao Caso 2.

Caso 4: $\underbrace{\rho_{[3]} \uplus \rho_{[3]} \dots \uplus \rho_{[3]}}_{k \text{ termos}}$ é ordenada separadamente do restante da permutação. Deste modo, $\rho_{[4]} \uplus \rho_{[8]}$ também será ordenada separadamente do restante da permutação e como visto no Caso 1 dois 0-movimentos são necessários. \square

Para $n = 15 + 4k$, a permutação $(\rho_{[4]} \uplus \rho_{[10]}) \underbrace{\uplus \rho_{[3]} \uplus \rho_{[3]} \dots \uplus \rho_{[3]}}_{k \text{ termos}}$ possui distância $\frac{n+1}{2} + 1$, e a demonstração é semelhante ao do Teorema 4.3. Observe que, para permutações com número par de elementos, não se conhece nenhuma permutação cuja distância de transposição seja superior à da distância da reversa, cujo valor é

$d(\rho_{[n]}) = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1$ para n par. Com isso temos o limite inferior para o diâmetro de transposição, visto a seguir no Teorema 4.4.

Teorema 4.4 [22] *O diâmetro de transposição $TD(n)$, com $n > 0$, é: $TD(n) \geq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1$.*

Portanto, a partir do Teorema 4.4 e ao calcular a relação de recorrência do Teorema 4.2, temos os limites inferiores e superiores, são respectivamente:

$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1 \leq TD(n) \leq \left\lfloor \frac{2n-2}{3} \right\rfloor.$$

Lu e Yang [40] propuseram um limite inferior do diâmetro de $TD(n) \geq \frac{17n+1}{33}$, através da construção de uniões das então definidas permutações super-ruins (permutações super-ruins é a tradução encontrada para *super-bad permutations* utilizada em [40]).

Definição 4.5 [40] *A permutação γ é uma permutação super-ruim se: i) γ é unicíclica; ii) não existe 2-movimento que pode ser aplicado em γ ; iii) toda sequência de transposição que ordena $\gamma \uplus \gamma$ contém pelo menos dois 0-movimentos.*

A partir de uma permutação super-ruim de tamanho b , o diâmetro de transposição segundo Lu e Yang [40] seria $TD(n) \geq \frac{(3b+4)}{6(b+1)}n + \frac{1}{3(b+1)}$. Lu e Yang [40] afirmaram terem encontrado através de busca computacional uma permutação super-ruim de tamanho 10, que seria a permutação nó $u_{10,8}$. E com isso, teriam obtido o limite inferior de $TD(n) \geq \frac{17n+1}{33}$, que é correspondente a permutação $\underbrace{u_{10,8} \uplus u_{10,8} \uplus \dots \uplus u_{10,8}}_{k \text{ termos}} \uplus \rho_{[r-1]}$, dado $n = 11k + r$, para $r < 10$. A permutação é construída pela união de k cópias da permutação nó $u_{10,8}$ e uma cópia da reversa $\rho_{[r-1]}$.

Lu e Yang estavam corretos em relação as condições (i) e (ii) da Definição 4.5 para a permutação $u_{10,8}$: a permutação $u_{10,8}$ é unicíclica; e não existe uma transposição 2-movimento que pode ser aplicada em $u_{10,8}$. Porém, como visto no Teorema 3.19, a sequência mínima que ordena $u_{10,8} \uplus u_{10,8}$ contém exatamente um 0-movimento, invalidando assim a condição (iii) da Definição 4.5. Temos assim, a não existência de permutações super-ruins, como segue no Teorema 4.6.

Teorema 4.6 [14, 15] *Não existem permutações super-ruins.*

Demonstração. Como visto no Corolário 2.5, as permutações nós u_{n,ℓ^*} são as únicas que satisfazem as condições (i) e (ii) da Definição 4.5. Além disso, para u_{n,ℓ^*} ser uma permutação super-ruim, $u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*}$ teria que possuir distância de transposição

pelo menos $n + 2$. Porém no Teorema 3.19 mostramos que $d(u_{n,\ell^*} \uplus u_{n,\ell^*}) = n + 1$, então garantimos a não existência de permutações super-ruins. \square

Existe uma sequência de 11 transposições que ordena $u_{10,8} \uplus u_{10,8}$. O Exemplo 4.7, a seguir, usa os resultados dos Lemas 3.16 e 3.18 para obter a sequência que ordena $u_{10,8} \uplus u_{10,8}$ e Teorema 3.19 para garantir a distância de transposição.

Observe que as transposições $t_1 = t(1, 7, 12)$, $t_2 = t(2, 8, 13)$ e $t_3 = t(6, 12, 17)$ — tais que somente t_1 é um 0-movimento — quando aplicadas nesta ordem, transformam $u_{10,8} \uplus u_{10,8}$ numa permutação que é equivalente por redução a $gl((u_{10,8} \uplus u_{10,8})t_1t_2t_3) = [7\ 4\ 2\ 13\ 10\ 17\ 15\ 6\ 3\ 1\ 8\ 5\ 12\ 9\ 16\ 14\ 11]$ e esta pode ser ordenada aplicando somente 2-movimentos.

Exemplo 4.7 *Para ordenar $u_{10,8} \uplus u_{10,8}$ é necessário e suficiente aplicar somente um 0-movimento.*

Pelo Lema 3.18, primeiramente aplicamos $t_1 = t(1, 7, 12)$, $t_2 = t(2, 8, 13)$ e $t_3 = t(6, 12, 17)$ e em $gl((u_{10,8} \uplus u_{10,8})t_1t_2t_3)$ as transposições $t(1, 4, 9)$, $t(2, 5, 15)$, $t(10, 14, 18)$, $t(5, 9, 15)$, $t(2, 8, 17)$, $t(1, 7, 13)$ nesta ordem e finalmente aplicamos $t(5, 9, 15)$ e $t(2, 7, 13)$.

4.2 Construção das famílias mais distantes

Na Seção 4.1, provamos a não existência das permutações super-ruins, uma família proposta por Lu e Yang [40] onde uniões de cópias de permutações super-ruins iriam aumentar o limite inferior do diâmetro. Assim, o limite inferior do diâmetro de transposição $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1$ ainda pertence a Elias e Hartman [22].

A seguir, apresentamos novas famílias de permutações com distâncias iguais a $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1$ para $n = 15 + 4k$ e $n = 13 + 4k$, seguindo o argumento análogo ao proposto em [22], explicado na Seção 4.1 (Teorema 4.3 na página 43), porém usando permutações nós. Por fim, apresentamos uma estratégia alternativa que talvez possibilite aumentar o limite inferior do diâmetro obtida através de uniões de permutações nós.

Para a família alternativa com $n = 15 + 4k$, $k \geq 0$, calculamos através do estudo algébrico visto no Capítulo 3 seguido de busca computacional, a distância de transposição de toda $u_{4,4} \uplus u_{10,\ell}$. Os resultados estão na Tabela 4.2. Pela Proposição 3.9 temos que $d(u_{p,\ell}) = \frac{p}{2}$ implica em $d(u_{4,4} \uplus u_{p,\ell}) = \frac{p}{2} + 3$, o que é menor que $\frac{p}{2} + 4$, o atual limite inferior do diâmetro. Assim, uma condição necessária para encontrarmos permutações diametraais do tipo $u_{4,4} \uplus u_{p,\ell}$ é que $d(u_{p,\ell}) = \frac{p}{2} + 1$. Foi provado por Hausen *et al.* [34], e visto na Tabela 2.1, que $d(u_{p,2}) = \frac{p}{2}$ o que implica pelo Corolário 1.14 que sua inversa possui distância $d(u_{p,\frac{p}{2}+1}) = \frac{p}{2}$. Por outro lado, temos que a permutação nó satisfaz $d(u_{p,\ell^*}) = \frac{p}{2} + 1$, e pela Definição 2.4 de permutação nó

implica que $\rho_{[4]} = u_{4,4}$ é a única permutação reversa que é uma nó, assim $u_{4,4}$ e u_{p,ℓ^*} possuem as condições da Proposição 3.12 na página 31. Além disso, consideramos $n \geq 13$ o que implica em $p \geq 8$, porém não existe nó com $p = 8$, o que justifica nossa busca por $p = 10$ na Tabela 4.2. Através do algoritmo de força bruta, *branch-and-bound*, implementado por Dias [19] para determinar exatamente a distância de transposição, podemos completar as distâncias para as quatro permutações restantes da Tabela 4.2.

No Apêndice A, mostramos as sequências mínimas de transposições dado pelo algoritmo que atingem o limite inferior da Proposição 3.12. Observe na Tabela 4.2 que, além da permutação $u_{4,4} \uplus u_{10,10}$ [23], a união das duas permutações nós $u_{4,4} \uplus u_{10,8}$ atinge o limite superior da Proposição 3.12 e com isso sua inversa $u_{4,4} \uplus u_{10,7}$ também atinge o limite superior da Proposição 3.12. Cada célula hachurada corresponde a uma permutação que necessita de dois 0-movimentos. O argumento dado por Elias e Hartman [22] visto no Teorema 4.3 pode ser aplicado para construir duas novas famílias $u_{4,4} \uplus u_{10,8} \uplus u_{3,3} \dots \uplus u_{3,3}$ e $u_{4,4} \uplus u_{10,7} \uplus u_{3,3} \dots \uplus u_{3,3}$ que atingem o limite inferior atual para $n = 15 + 4k$.

Para o caso ímpar complementar $n = 13 + 4k$, $k \geq 1$ também apresentamos uma família alternativa através do estudo algébrico visto no Capítulo 3 seguido de busca computacional, a distância de transposição de toda $u_{4,4} \uplus u_{12,\ell}$. Os resultados estão na Tabela 4.3. Pela Definição 2.4 de permutações nós, temos que o menor valor de n deve ser 17, dado que $n = 13$ e $u_{4,4} \uplus u_{p,\ell^*}$ implica $p = 8$ e não existe permutação nó u_{8,ℓ^*} . Para $n = 17$, a permutação mais distante conhecida é $\rho_4 \uplus \rho_8 \uplus \rho_3$ [22]. Observe na Tabela 4.3 que a união das duas permutações nós $u_{4,4} \uplus u_{12,5}$ atinge o limite superior da Proposição 3.12, assim como sua inversa $u_{4,4} \uplus u_{12,8}$. Portanto, novamente usando o mesmo argumento de [22], podemos construir duas novas famílias para $n \geq 17$ e $n = 13 + 4k$, $u_{4,4} \uplus u_{12,5} \uplus u_{3,3} \dots \uplus u_{3,3}$ e $u_{4,4} \uplus u_{12,8} \uplus u_{3,3} \dots \uplus u_{3,3}$ que atingem o atual limite inferior. O limite superior da Proposição 3.12 no Capítulo 3 direciona nossa busca para permutações nós.

Um limite inferior melhor para o diâmetro de transposição possivelmente possa ser obtido através da determinação de uma permutação $\xi \in S_n$, construída pela união de quatro permutações nós distintas $\xi_{[n]} = \pi \uplus \sigma \uplus \delta \uplus \epsilon$, tal que $d(\xi)$ atinge o limite superior dada pela desigualdade triangular da Proposição 3.6 $d(\pi) + d(\sigma) + d(\delta) + d(\epsilon) = \frac{n+1}{2} + 2$. Uma condição suficiente para construir tal permutação ξ é que: todos seis pares de permutações tomadas duas a duas, a saber $\pi \uplus \sigma$, $\pi \uplus \delta$, $\pi \uplus \epsilon$, $\sigma \uplus \delta$, $\sigma \uplus \epsilon$ e $\delta \uplus \epsilon$, necessitem de dois 0-movimentos; e que todas quatro uniões de três permutações, a saber $\pi \uplus \sigma \uplus \delta$, $\pi \uplus \sigma \uplus \epsilon$, $\pi \uplus \delta \uplus \epsilon$ e $\sigma \uplus \delta \uplus \epsilon$, necessitem de três 0-movimentos.

Temos como consequência do diâmetro limitado inferiormente por $TD(n) \geq d(\xi) = \frac{n+1}{2} + 2$ que para n par existiriam permutações com distâncias além da

Tabela 4.2: Distâncias para $u_{10,\ell}$ e $u_{4,4} \uplus u_{10,\ell}$. Células hachuradas correspondem a três permutações diametrais para $n = 15$: $u_{4,4} \uplus u_{10,10}$ [23] e as adicionais $u_{4,4} \uplus u_{10,8}$ e sua inversa. Portanto, podemos construir duas novas famílias correspondentes ao atual limite inferior de Elias e Hartman [22] para $n = 15 + 4k$.

π	$u_{10,2}$	$u_{10,3}$	$u_{10,4}$	$u_{10,5}$	$u_{10,6}$	$u_{10,7}$	$u_{10,8}$	$u_{10,9}$	$u_{10,10}$
$d(\pi)$	5	6	6	6	5	6	6	6	6
$d(u_{4,4} \uplus \pi)$	8	8	8	8	8	9	9	8	9

Tabela 4.3: Distâncias para $u_{12,\ell}$ e $u_{4,4} \uplus u_{12,\ell}$. Células hachuradas correspondem a duas novas permutações que atingem o atual limite inferior de Elias e Hartman [22] para $n = 17$: $u_{4,4} \uplus u_{12,5}$ e sua inversa. Portanto, podemos construir duas novas famílias correspondentes ao atual limite inferior de [22] para $n = 13 + 4k$.

π	$u_{12,2}$	$u_{12,3}$	$u_{12,4}$	$u_{12,5}$	$u_{12,6}$	$u_{12,7}$	$u_{12,8}$	$u_{12,9}$	$u_{12,10}$	$u_{12,11}$	$u_{12,12}$
$d(\pi)$	6	7	7	7	6	6	7	7	7	6	7
$d(u_{4,4} \uplus \pi)$	9	9	9	10	9	9	10	9	9	9	9

reversa, ou seja, a reversa então não seria diametral, como visto no Teorema 4.1, já que ξ contém um número ímpar n de elementos e para $TD(n+1)$ sabemos que $TD(n) \leq TD(n+1) \leq TD(n) + 1$ e $\frac{n+1}{2} + 2 > d(\rho_{[n+1]}) = \frac{n+1}{2} + 1$.

No Capítulo 3, mostramos algumas uniões de permutações nós que não atingem o limite superior da desigualdade triangular, a saber permutações obtidas por uniões de: permutações nós iguais, Teorema 3.19; uma permutação nó e sua inversa, Teorema 3.21; e permutações nós de tipos distintos com mesmo parâmetro, Teorema 3.23. Porém para o caso em que a permutação é obtida pela união de duas permutações nós de tipos iguais e parâmetros diferentes, assim como para o caso da união de duas permutações nós de tipos diferentes e parâmetros diferentes, ainda não encontramos uma caracterização para a distância. Observe que tanto pela Tabela 4.2, a união das permutações nós de tipos iguais e parâmetros diferentes $u_{4,4} \uplus u_{10,8}$, quanto pela Tabela 4.3, a união de duas permutações nós de tipos diferentes e parâmetros diferentes $u_{4,4} \uplus u_{12,5}$, ambas uniões atingem o limite superior da desigualdade triangular da Proposição 3.6.

Note que nossa estratégia para aumentar o limite inferior do diâmetro de transposição sugere que uma permutação que atenda tais propriedades tenha pelo menos 30 elementos e deste modo é necessário termos um estudo adicional de propriedades algébricas para assim reduzirmos o esforço computacional.

Capítulo 5

Conclusões e Trabalhos Futuros

“A Evolução é a Lei da Vida, o Número é a Lei do Universo, a Unidade é a Lei de Deus.”

(Pitágoras)

Nesta dissertação contribuimos para dois importantes problemas relacionados ao Rearranjo de Genomas: Ordenação por Transposições e Diâmetro de Transposição.

No problema de Ordenação por Transposições, que é *NP*-difícil, exploramos a classe das permutações solitárias e encontramos valores exatos de distância e limites mais justos para as famílias: $u_{n,n-1}$, $u_{n,\frac{n}{2}}$, $u_{n,3}$ e $u_{n,4}$. No entanto, ainda há muito para ser descoberto para obter um algoritmo polinomial com uma razão de aproximação bem justa para toda permutação solitária, caminhos a serem seguidos para isso são:

- Analisar as possíveis reduções entre as permutações solitárias. Fizemos isto no decorrer dos resultados encontrados, por exemplo no Corolário 2.15. Assim uma meta seria generalizar estas reduções de forma que: para ordenar uma permutação solitária, consigamos um caminho que passe por uma outra permutação solitária de tamanho menor e assim iterativamente até chegarmos numa outra que já tenha conhecida sua distância exata.
- Desenvolver um algoritmo onde a cada três transposições consigamos reduzir a uma outra permutação com cinco elementos a menos, ou seja, obtemos uma permutação possuindo cinco ciclos a mais de tamanho um. Note que independentemente da permutação ser uma solitária, este resultado nos mostraria um fator de aproximação de $\frac{9}{5} = 1.8$, já que o melhor cenário possível seria a cada transposição aumentar em três o número de ciclos de tamanho um. O fator de 1.8 forneceria portanto, um limite superior melhor que o de Eriksson *et al.* [23], já que no deles a cada duas transposições aumenta-se em três o número de ciclos de tamanho um, possuindo assim fator de aproximação de 2. Galvão e Dias [27] observaram, através de verificação computacional, que

em todas as instâncias com até 13 elementos é possível ordenar com fator de aproximação de 1.8. A busca de algoritmo 1.8-aproximativo para as permutações solitárias pode ser mais direta devido a caracterização do Diagrama de Realidade e Desejo e das sequências de ciclos $C(u_{n,\ell})$ e posições $P(u_{n,\ell})$.

- Uma outra investigação que envolva as permutações solitárias é o problema conhecido como *Ordenação por Transposições Curtas*, que se trata pelo problema de ordenação utilizando a operação de transposição $t(i, j, k)$ onde a diferença $k - i \leq 3$, a complexidade deste problema está em aberto. Uma publicação recente de Jiang *et al.* [36] mostra um algoritmo aproximativo de $(1 + \epsilon) - \epsilon$ se trata pelo tamanho da permutação dividido pelo número de arestas existentes no Grafo de Permutações ¹ — para uma classe de permutações chamada de *guarda-chuva*. As permutações solitárias se relacionam a classe guarda-chuva, a subclasse $u_{n, \frac{n}{2}+1}$ está contida no guarda-chuva.

No problema de Diâmetro de Transposição, que permanece em aberto para $n \geq 16$, estabelecemos um estudo algébrico em torno da operação de união de permutações, já que esta operação tem se mostrado como uma estratégia promissora para a obtenção de famílias mais distantes. Com isso, encontramos uma invalidação da proposta de melhor limite inferior publicada por Lu e Yang [40] e estabelecemos que o melhor limite inferior conhecido é de $\frac{n+1}{2} + 1$ devido a Elias e Hartman. Além disto, encontramos famílias alternativas que atingem este limite do diâmetro e apresentamos também uma estratégia que possivelmente aumentaria o limite inferior de $\frac{n+1}{2} + 1$ para $\frac{n+1}{2} + 2$. Contudo, para estabelecermos tal limite precisamos encontrar permutações que satisfaçam as hipóteses apresentadas na Seção 4.2.

- A busca computacional por permutações mais distantes se torna inviável devido o tamanho das instâncias. Como discutido, tais uniões possuiriam mais que 30 elementos. Outras maneiras de computar distâncias devem ser exploradas, como encontrar mais propriedades algébricas que envolvam a operação de união, para determinarmos condições suficientes para a existência de permutações que atinjam o valor de distância de $\frac{n+1}{2} + 2$.

Demos um primeiro passo ao determinar permutações que não podem ser usadas nas uniões para aumentar o limite inferior do diâmetro, como por exemplo: uniões de reversas de mesmo tamanho, união de cópias da mesma nó, união de uma permutação nó e sua inversa, união de duas nós diferentes com mesmo parâmetro. Uma maneira de obtermos permutações mais distantes seria a investigação entre a união de nós de tipos iguais e parâmetro diferentes, exemplos são as uniões $u_{4,4} \uplus u_{10,8}$ e $u_{4,4} \uplus u_{12,5}$.

¹Para maiores informações sobre Grafos de Permutações consulte livro do Golubic [29].

Referências Bibliográficas

- [1] Appel, K., Haken, W., 1977, “Every planar map is four colorable part I: Discharging.” *Illinois Journal of Mathematics*, v. 21, pp. 429–490.
- [2] Bader, D. A., Moret, B. M. E., Yan, M., 2001, “A Linear-Time Algorithm for Computing Inversion Distance between Signed Permutations with an Experimental Study”, *Journal of Computational Biology*, v. 8, pp. 483–491.
- [3] Bafna, V., Pevzner, P. A., 1998, “Sorting by transpositions”, *SIAM J. Discrete Math.*, v. 11, n. 2, pp. 224–240.
- [4] Bafna, V., Pevzner, P. A., 1993, “Genome Rearrangements and Sorting by Reversals”. In: *Proceedings of 34th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, FOCS, pp. 148–157.
- [5] Bóna, M., 2012, *Combinatorics of Permutations*. The CRC Press.
- [6] Bulteau, L., Fertin, G., Rusu, I., 2011, “Pancake flipping is hard”, *CoRR*, v. abs/1111.0434.
- [7] Bulteau, L., Fertin, G., Rusu, I., 2012, “Sorting by transpositions is difficult”, *SIAM J. Discrete Math.*, v. 26, n. 3, pp. 1148–1180.
- [8] Caprara, A., 1997, “Sorting by reversals is difficult”. In: *Proceedings of the first annual international conference on computational molecular biology*, RECOMB, pp. 75–83. ACM.
- [9] Chitturi, B., Sudborough, I. H., 2012, “Bounding prefix transposition distance for strings and permutations”, *Theor. Comput. Sci.*, v. 421, pp. 15–24.
- [10] Chitturi, B., Sudborough, I. H., 2010, “Prefix reversals on strings”. In: Arabnia, H. R., Tran, Q.-N., Chang, R., et al. (Eds.), *BIOCOMP*, pp. 591–598. CSREA Press.
- [11] Christie, D. A., 1999, *Genome Rearrangement Problems*. Phd thesis, University of Glasgow, UK.

- [12] Christie, D. A., Irving, R. W., 2001, “Sorting Strings by Reversals and by Transpositions”, *SIAM J. Discrete Math.*, v. 14, n. 2, pp. 193–206.
- [13] Cunha, L. F. I., Kowada, L. A. B., 2010, “Upper bounds and exact values on transposition distance of permutations”. In: *4th Latin-American Workshop on Cliques in Graphs*, Matemática Contemporânea, pp. 77–84. SBM.
- [14] Cunha, L. F. I., Kowada, L. A. B., de A. Hausen, R., et al., “Advancing the transposition distance and diameter through lonely permutations”, Submetido para publicação no *SIAM J. Discrete Math.*, Nov 2012.
- [15] Cunha, L. F. I., Kowada, L. A. B., de A. Hausen, R., et al., 2012, “Transposition diameter and lonely permutations”. In: *Advances in Bioinformatics and Computational Biology*, pp. 1–12. LNBI, Springer-Verlag.
- [16] Dias, U. M., 2012, *Problemas de Comparação de Genomas*. Tese de doutorado, UNICAMP, Brasil.
- [17] Dias, U., Dias, Z., 2010, “An improved 1.375-approximation algorithm for the transposition distance problem”. In: *Proceedings of the First ACM International Conference on Bioinformatics and Computational Biology*, BCB’10, pp. 334–337. ACM.
- [18] Dias, Z., 2002, *Rearranjo de Genomas: uma Coletânea de Artigos*. Tese de doutorado, UNICAMP, Brasil.
- [19] Dias, Z., 2002. <http://www.ic.unicamp.br/~zanoni/tese/programas.tar.gz>.
- [20] Dias, Z., Meidanis, J., 2002, “Sorting by prefix transpositions”. In: *Proceedings of the 9th International Symposium on String Processing and Information Retrieval*, SPIRE 2002, pp. 65–76. LNCS, Springer-Verlag.
- [21] Dweigher, H., 1975, “Elementary problems and solutions, problem E2569”, *American Mathematical Monthly*, v. 82, pp. 1010.
- [22] Elias, I., Hartman, T., 2006, “A 1.375-approximation algorithm for sorting by transpositions”, *IEEE/ACM Trans. Comput. Biol. Bioinformatics*, v. 3, n. 4, pp. 369–379.
- [23] Eriksson, H., Eriksson, K., Karlander, J., et al., 2001, “Sorting a bridge hand”, *Discrete Math.*, v. 241, n. 1-3, pp. 289–300.

- [24] Fertin, G., Labarre, A., Rusu, I., et al., 2009, *Combinatorics of Genome Rearrangements*. The MIT Press.
- [25] Fortuna, V. J., 2005, *Distâncias de Transposição entre Genomas*. Dissertação de mestrado, Instituto de Computação, UNICAMP.
- [26] Galvão, G. R., 2012, *Uma Ferramenta de Auditoria para Algoritmos de Rearranjo de Genomas*. Dissertação de mestrado, UNICAMP, Brasil.
- [27] Galvão, G. R., Dias, Z., 2012, “On the approximation ratio of algorithms for sorting by transpositions without using cycle graph”. In: *Advances in Bioinformatics and Computational Biology*, pp. 25–36. LNBI, Springer-Verlag.
- [28] Gates, W. H., Papadimitriou, C. H., 1979, “Bounds for sorting by prefix reversal”, *Discrete Math.*, v. 27, pp. 47–57.
- [29] Golumbic, M. C., 2004, *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs (Annals of Discrete Mathematics, Vol 57)*. Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, North-Holland Publishing Co.
- [30] Gonçalves, A., 2012, *Introdução à Álgebra*. Coleção Projeto Euclides, IMPA.
- [31] Han, Y., 2006, “Improving the Efficiency of Sorting by Reversals”. In: Arabnia, H. R., Valafar, H. (Eds.), *Proceedings of the 2006 International Conference on Bioinformatics & Computational Biology, BIOCOMP 06*, pp. 406–409. CSREA Press.
- [32] Hannenhalli, S., Pevzner, P., 1995, “Transforming cabbage into turnip: polynomial algorithm for sorting signed permutations by reversals”. In: *Proceedings of the twenty-seventh annual ACM symposium on Theory of computing, STOC’95*, pp. 178–189, New York, NY, USA. ACM.
- [33] Hausen, R. A., 2007, *Rearranjo de Genomas: Teoria e Aplicações*. Tese de doutorado, UFRJ, Brasil.
- [34] Hausen, R. A., Faria, L., de Figueiredo, C. M. H., et al., 2010, “Unitary toric classes, the reality and desire diagram, and sorting by transpositions”, *SIAM J. Discrete Math.*, v. 24, n. 3, pp. 792–807.
- [35] Hurkens, C., Van Iersel, L., Keijsper, J., et al., 2007, “Prefix reversals on binary and ternary strings”. In: *Proceedings of the 2nd international conference on Algebraic biology, AB’07*, pp. 292–306. Springer-Verlag.

- [36] Jiang, H., Zhu, D., Zhu, B., 2012, “A $(1+\epsilon)$ -approximation algorithm for sorting by short block-moves”, *Theor. Comput. Sci.*, v. 439, pp. 1–8.
- [37] Kowada, L. A. B., de A. Hausen, R., de Figueiredo, C. M. H., 2010, “Bounds on the transposition distance for lonely permutations”. In: *Advances in Bioinformatics and Computational Biology*, pp. 35–46. LNBI, Springer-Verlag.
- [38] Labarre, A., 2006, “New bounds and tractable instances for the transposition distance”, *IEEE/ACM Transactions on Computational Biology and Bioinformatics*, v. 3, n. 4, pp. 380–394.
- [39] Lopes, M. P., 2011, *Distância de Transposição Através da Transformação em Permutação Simples*. Dissertação de mestrado, UFRJ, Brasil.
- [40] Lu, L., Yang, Y., 2010, “A lower bound on the transposition diameter”, *SIAM J. Discrete Math.*, v. 24, n. 4, pp. 1242–1249.
- [41] MacLane, S., Birkhoff, G., 1971, *Algebra*. The Macmillan Company.
- [42] Meidanis, J., Walter, M. E. M. T., Dias, Z., 1997, “Transposition distance between a permutation and its reverse”. In: *Proceedings of the 4th South American Workshop on String Processing*, pp. 70–79.
- [43] Palmer, J. D., Herbon, L. A., 1998, “Plant mitochondrial DNA evolves rapidly in structure, but slowly in sequence”, *Journal of Molecular Evolution*, v. 27, pp. 87–97.
- [44] Radcliffe, A. J., Scott, A. D., Wilmer, E. L., 2005, “Reversals and transpositions over finite alphabets”, *SIAM J. Discrete Math.*, v. 19, n. 1, pp. 224–244.
- [45] Reis, C. S., 2010, *Ciclo Hamiltoniano em Grafos de Rearranjo de Genomas por Transposições Pré-Fixadas*. Dissertação de mestrado, UFRJ, Brasil.
- [46] Setubal, J. C., Meidanis, J., 1997, *Introduction to Computational Molecular Biology*. PWS Publishing Company.
- [47] Tannier, E., Sagot, M.-F., 2004, “Sorting by Reversals in Subquadratic Time”. In: Sahinalp, S. C., Muthukrishnan, S., Dogrusöz, U. (Eds.), *Proceedings of the Combinatorial Pattern Matching, 15th Annual Symposium, CPM 2004*, v. 3109, LNCS, pp. 1–13. Springer.
- [48] Walter, M. E. M. T., 1999, *Algorithms in Genome Rearrangement*. Tese de doutorado, UNICAMP, Brasil.

- [49] Watterson, G. A., Ewens, W. J., Hall, T. E., et al., 1982, “The chromosome inversion problem”, *Journal of Theoretical Biology*, v. 99, pp. 1–7.

Apêndice A

Sequências de transposições das uniões das Tabelas 4.2 e 4.3

[Sequências de transposições para as uniões da Tabela 4.2] Observe que pelo Corolário 1.14 na página 10 toda permutação possui distância de transposição igual a da sua inversa. Assim, precisamos somente calcular a distância de uma permutação dentre um par de permutações tal que uma é inversa da outra. Ou seja, os pares (π, σ) , onde $\pi = \sigma^{-1}$, de permutações mutuamente inversas são: $(u_{10,2}, u_{10,6}), (u_{10,3}, u_{10,4}), (u_{10,5}, u_{10,9}), (u_{10,7}, u_{10,8}), (u_{10,10}, u_{10,10})$.

Na Proposição 3.9 da página 31, mostramos a distância da união de duas permutações unicíclicas quando pelo menos uma necessita de um 0-movimento. Portanto, já sabemos a distância para a união $u_{4,4} \uplus u_{10,2}$, dado que $u_{10,2}$ é unicíclica e somente $u_{4,4}$ necessita de um 0-movimento. Além disso, a distância de transposição da permutação $u_{4,4} \uplus u_{10,10}$ já foi calculada por Eriksson *et al.* [23].

A seguir, mostramos para cada uma das permutações restantes, uma sequência mínima que ordena e atinge o limite inferior da Proposição 3.12:

$$d(u_{4,4} \uplus u_{10,3}) = 8.$$

$$\begin{aligned} t_1 &= t(1, 4, 6), & t_5 &= t(5, 8, 10), \\ t_2 &= t(2, 5, 7), & t_6 &= t(7, 13, 16), \\ t_3 &= t(3, 6, 8), & t_7 &= t(8, 12, 14), \\ t_4 &= t(4, 7, 9), & t_8 &= t(11, 13, 15). \end{aligned}$$

$$d(u_{4,4} \uplus u_{10,5}) = 8.$$

$$\begin{aligned} t_1 &= t(1, 4, 6), & t_5 &= t(4, 9, 14), \\ t_2 &= t(2, 5, 9), & t_6 &= t(3, 6, 12), \\ t_3 &= t(4, 9, 10), & t_7 &= t(4, 11, 15), \\ t_4 &= t(8, 14, 16), & t_8 &= t(9, 12, 16). \end{aligned}$$

Já para a permutação $u_{4,4} \uplus u_{10,8}$, a sequência mínima retornada pelo algoritmo foi como se ordenasse separadamente as partes $u_{4,4}$ e $u_{10,8}$:

$$d(u_{4,4} \uplus u_{10,8}) = 9.$$

$$\begin{aligned} t_1 &= t(1, 2, 3), & t_6 &= t(1, 6, 9), \\ t_2 &= t(1, 3, 4), & t_7 &= t(3, 7, 16), \\ t_3 &= t(1, 4, 5), & t_8 &= t(1, 6, 14), \\ t_4 &= t(1, 7, 13), & t_9 &= t(6, 13, 15). \\ t_5 &= t(4, 12, 15), \end{aligned}$$

[Sequências de transposições para as uniões da Tabela 4.3] Observe que semelhante a análise prévia da Tabela 4.2 temos os pares (π, σ) , onde $\pi = \sigma^{-1}$, de permutações mutuamente inversas são: $(u_{12,2}, u_{12,7})$, $(u_{12,3}, u_{12,9})$, $(u_{12,4}, u_{12,10})$, $(u_{12,5}, u_{12,8})$, $(u_{12,6}, u_{12,11})$, $(u_{12,12}, u_{12,12})$. E pelas Proposição 3.9 e Corolário 1.14 não precisamos calcular as distâncias de $u_{4,4} \uplus u_{12,2}$, $u_{4,4} \uplus u_{12,7}$, $u_{4,4} \uplus u_{12,6}$ e $u_{4,4} \uplus u_{12,11}$.

A seguir, mostramos para cada uma das permutações restantes, uma sequência mínima que ordena e atinge o limite inferior da Proposição 3.12:

$$d(u_{4,4} \uplus u_{12,3}) = 9.$$

$$\begin{aligned} t_1 &= t(1, 4, 6), & t_4 &= t(4, 5, 6), & t_7 &= t(7, 9, 15), \\ t_2 &= t(2, 5, 8), & t_5 &= t(4, 10, 14), & t_8 &= t(7, 11, 17), \\ t_3 &= t(3, 7, 11), & t_6 &= t(5, 13, 16), & t_9 &= t(14, 16, 18). \end{aligned}$$

$$d(u_{4,4} \uplus u_{12,4}) = 9.$$

$$\begin{aligned} t_1 &= t(1, 4, 6), & t_4 &= t(4, 9, 12), & t_7 &= t(6, 8, 12), \\ t_2 &= t(2, 5, 8), & t_5 &= t(5, 11, 14), & t_8 &= t(8, 11, 17), \\ t_3 &= t(3, 7, 10), & t_6 &= t(6, 13, 16), & t_9 &= t(8, 11, 18). \end{aligned}$$

$$d(u_{4,4} \uplus u_{12,12}) = 9.$$

$$\begin{aligned} t_1 &= t(1, 4, 7), & t_4 &= t(3, 6, 13), & t_7 &= t(5, 8, 14), \\ t_2 &= t(2, 6, 12), & t_5 &= t(8, 12, 18), & t_8 &= t(4, 10, 12), \\ t_3 &= t(4, 9, 17), & t_6 &= t(7, 10, 15), & t_9 &= t(5, 8, 13). \end{aligned}$$

Já para a permutação $u_{4,4} \uplus u_{12,5}$, a sequência mínima retornada pelo algoritmo foi como se ordenasse separadamente as partes $u_{4,4}$ e $u_{12,5}$:

$$d(u_{4,4} \uplus u_{12,5}) = 10.$$

$$\begin{aligned} t_1 &= t(1, 2, 3), & t_6 &= t(1, 6, 10), \\ t_2 &= t(1, 3, 4), & t_7 &= t(3, 8, 17), \\ t_3 &= t(1, 4, 5), & t_8 &= t(1, 6, 15), \\ t_4 &= t(1, 7, 13), & t_9 &= t(6, 14, 16), \\ t_5 &= t(4, 13, 16), & t_{10} &= t(10, 14, 18). \end{aligned}$$