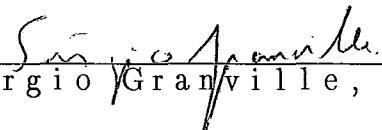


IMPLEMENTAÇÃO DE UM PROGRAMA DE FLUXO DE  
POTÊNCIA ÓTIMO UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA  
SEQUENCIAL

Luiz Antonio Cordeiro Pereira

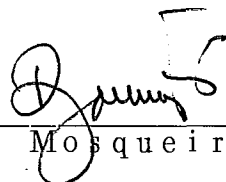
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

  
Sérgio Granville, Ph.D.

(Presidente)

  
Prof. Clóvis Caesar Gonzaga, Ph.D.

  
Prof. Djalma Mosqueira Falcão, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL  
ABRIL DE 1991

PEREIRA, LUIZ ANTONIO CORDEIRO

Implementação de um Programa de Fluxo de Potência Ótimo Utilizando Programação Quadrática Sequencial [Rio de Janeiro] 1991

XVI, 187 p. 29.7 cm (COPPE/UFRJ, M. Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1991)

Tese — Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE .

1. Fluxo de Potência Ótimo, Otimização, Programação Quadrática Sequencial, Esparsidade I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

A meus pais.

A Moema.

## AGRADECIMENTOS

Agradeço em particular ao pesquisador Paulo Alexandre Machado pela eficiente orientação, dedicação e incentivo demonstrados ao longo de todo o desenvolvimento do trabalho.

Tendo sido o pesquisador Paulo Alexandre Machado o principal orientador deste trabalho, tenho a lamentar que o meu desconhecimento com relação às normas da Universidade, tenha impedido a sua presença como membro da banca, lugar este que lhe é devido por mérito, justiça e direito.

Agradeço ao pesquisador Sérgio Granville pelo incentivo, orientação parcial, discussões técnicas e revisão do texto da tese.

Agradeço ao CEPEL pela oportunidade e cessão dos recursos necessários ao desenvolvimento do trabalho.

Aos colegas do departamento agradeço pelo incentivo e companheirismo demonstrados. Em particular agradeço a colaboração do pesquisador Sílvio Binato e de Regina Helena Faceira.

O trabalho datilográfico contou com a colaboração de Rosa Maria Kiwelowicz, e com a inestimável ajuda de Moema de Carvalho Soares a quem agradeço em particular.

Um agradecimento especial a meus pais e a Moema pelo carinho, incentivo e compreensão pela redução do tempo de convívio durante a elaboração do trabalho.

Resumo da tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

IMPLEMENTAÇÃO DE UM PROGRAMA DE FLUXO DE  
POTÊNCIA ÓTIMO UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA  
SEQUENCIAL

Luiz Antonio Cordeiro Pereira

Abril, 1991

Orientadores: Paulo Alexandre Machado  
Sérgio Granville

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

As pesquisas realizadas nos últimos anos tem mostrado que os métodos de segunda ordem são muito eficientes na solução do problema de Fluxo de Potência Ótimo. Este trabalho descreve os aspectos teóricos e práticos relacionados com a implementação de um programa de Fluxo de Potência Ótimo, utilizando o método de programação quadrática sequencial (abordagem de Newton). Foram utilizadas técnicas de desacoplamento dos subproblemas de potência ativa e de potência reativa, além de técnicas eficientes para o tratamento de matrizes esparsas, com o objetivo de reduzir o custo computacional. Um dos aspectos críticos da pesquisa foi o estabelecimento de uma estratégia eficiente para a identificação do conjunto ativo. O método possui características que o credenciam para a solução de problemas práticos de Fluxo de Potência Ótimo de grande porte.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M. Sc.).

DEVELOPMENT OF A OPTIMAL POWER FLOW  
PROGRAM BASED ON SEQUENTIAL QUADRATIC PROGRAMMING

Luiz Antonio Cordeiro Pereira

April, 1991

Thesis Supervisors: Paulo Alexandre Machado  
Sérgio Granville

Department: Systems and Computation Engineering

The most recent researches have shown that second order methods are very efficient in the solution of the Optimal Power Flow problem. This work describes the theoretical and practical aspects related with the development of an Optimal Power Flow program based on the sequential quadratic programming method (Newton approach). The solution approach makes use of the decoupling between the active and reactive power subproblems, and of efficient sparsity techniques aimed to reduce the computational cost. One of the critical aspects of the research was the development of an efficient approach to identify the active set. The method has characteristics that qualify it for the solution of practical large-scale Optimal Power Flow problems.

ÍNDICE

	página
CAPÍTULO I : Introdução	1
CAPÍTULO II : O Problema Geral de Fluxo de Potência	4
II.1 : Equações de fluxo de potência	4
II.2 : Fluxo de potência pelo método de Newton–Raphson	7
II.3 : Características da matriz jacobiana	8
II.4 : Método de Newton–Raphson desacoplado	13
II.5 : Método desacoplado rápido	16
II.6 : Dispositivos de controle e restrições operacionais	20
CAPÍTULO III : Programação Quadrática Sequencial	27
III.1 : Formulação do problema de programação não linear	27
III.1.1 : Condições de otimalidade	29
III.1.2 : Função Lagrangeana	31
III.1.3 : Algoritmo de solução	32
III.2 : Programação quadrática sequencial	35

III.2.1	: Algoritmo de solução	36
III.2.2	: Tratamento das restrições de desigualdade	38
III.2.2.1	: Aspectos de Convergência	40
III.2.2.2	: Função de mérito	40
III.2.2.3	: Custo reduzido	42
III.2.2.4	: Função de penalidade quadrática	44
III.2.2.5	: Estratégia de conjunto ativo	46
CAPÍTULO IV	: Fluxo de Potência Ótimo (FPO)	48
IV.1	: Definição do problema	48
IV.1.1	: Função objetivo	49
IV.1.2	: Variáveis de controle	51
IV.1.3	: Variáveis dependentes	52
IV.1.4	: Restrições de igualdade	53
IV.1.5	: Restrições de desigualdade	53
IV.2	: Características de um problema de FPO	56
IV.2.1	: Dimensão do problema	56
IV.2.2	: Aplicações do FPO	57
IV.2.3	: Função objetivo	57
IV.2.4	: Unicidade da solução	58



IV.2.5	: Não linearidade e discretização de variáveis	58
IV.2.6	: Esparsidade e superesparsidade	59
IV.2.7	: Robustez do algoritmo	59
IV.2.8	: Tempo de computação	60
IV.2.9	: Precisão dos resultados	61
IV.2.10	: Histórico de desenvolvimento do FPO	61
IV.3	: Modelagem do problema de FPO	63
IV.3.1	: Modelagem da função objetivo	63
IV.3.2	: Modelagem das restrições de igualdade	66
IV.3.3	: Modelagem das restrições de desigualdade	69
IV.4	: Método de solução	70
IV.4.1	: Formulação da versão desacoplada	76
IV.5	: Organização das matrizes de solução	78
IV.5.1	: Cálculo dos elementos das matrizes $W_p$ e $W_q$	85
IV.6	: Processo iterativo	86
IV.6.1	: Critério de convergência	86
IV.6.2	: Função de mérito	88

IV.6.3	: Algoritmo de solução	89
IV.7	: Estratégia de conjunto ativo	93
IV.7.1	: Ativação/desativação das restrições de desigualdade	93
IV.7.1.1	: Tratamento das violações de fluxo	97
IV.7.2	: Função de penalidade quadrática	100
IV.7.3	: Iteração exploratória	102
IV.7.4	: Outros tipos de estratégia não implementados	105
IV.7.4.1	: Função de penalidade hiperbólica	106
IV.7.4.2	: Função barreira logarítmica	108
CAPÍTULO V : Técnicas de Esparsidade		111
V.1	: Introdução	111
V.2	: Ordenação ótima das matrizes de solução	113
V.2.1	: Árvore associada à matriz de solução	115
V.2.2	: Critérios de desempate	119
V.2.3	: Alterações na ordenação ótima devido à violação de circuitos	123
V.3	: Cálculo dos fatores triangulares U	125
V.3.1	: Atualização dos fatores triangulares	127

V.4	: Cálculo do vetor de solução $\mathbf{x}$	129
V.4.1	: Soluções parciais para o vetor $\mathbf{x}$	129
V.5	: Esquema alternativo de ordenação para a matriz de solução	130
CAPÍTULO VI : Testes e Resultados		133
VI.1	: Descrição dos sistemas elétricos de teste	133
VI.2	: Descrição dos testes realizados	134
CAPÍTULO VII : Conclusões e Recomendações		144
VII.1	: Recomendações para futuros desenvolvimentos	144
VII.1.1	: Estratégia de conjunto ativo	144
VII.1.2	: Desacoplamento	145
VII.1.3	: Inviabilidade	145
VII.1.4	: Discretização de controles	146
VII.1.5	: Limitação do número de ações de controle	147
VII.1.6	: Equivalentes de rede	148
VII.1.7	: Restrições de segurança	148
VII.2	: Conclusões	149
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS		151

APÊNDICE A :	Modelo das Equações de Fluxo de Potência	156
A.1 :	Modelo de linha de transmissão (LT)	156
A.2 :	Modelo de transformador em fase	157
A.3 :	Modelo de transformador defasador	159
A.4 :	Expressões gerais para os fluxos de potência	160
APÊNDICE B :	Derivadas das Equações de Fluxo de Potência	162
B.1 :	Derivadas de $P_{ij}$	162
B.2 :	Derivadas de $P_{ji}$	163
B.3 :	Derivadas de $Q_{ij}$	165
B.4 :	Derivadas de $Q_{ji}$	166
B.5 :	Derivadas da função <u>quadrado</u> da potência aparente (S)	167
B.5.1 :	Derivadas de $S_{ij}$	168
B.5.2 :	Derivadas de $S_{ji}$	169
APÊNDICE C :	Funções Objetivo – Modelos e Derivadas	170
C.1 :	Mínimo custo de geração de potência ativa	170
C.2 :	Mínimo custo de geração de potência reativa	170
C.3 :	Mínima alocação de potência reativa	171

C.4	:	Mínimo corte de carga	171
C.5	:	Mínima perda	172
C.6	:	Mínimo desvio de potência ativa gerada	173
C.7	:	Mínimo desvio de ângulo de defasamento	173
C.8	:	Mínimo desvio de tensão	174
C.9	:	Mínimo desvio de tap	174
C.10	:	Mínimo desvio do ponto de operação	175
C.11	:	Mínimo desvio de intercâmbio	175
C.12	:	Mínimo desvio de restrição adicional (RAD)	176
APÊNDICE D	:	Função Lagrangeana – Modelo e Derivadas	177
D.1	:	Derivadas em relação às variáveis do subproblema de potência ativa	180
D.2	:	Derivadas em relação às variáveis do subproblema de potência reativa	184

## NOMENCLATURA

A seguinte nomenclatura foi adotada no desenvolvimento deste trabalho.

- 1) Escalares são representados por letras maiúsculas ou minúsculas com ou sem subscrito.

Ex:  $i, a_k, \rho, F, A_{ij}, b_{ij}$

- 2) Vetores são representados por letras minúsculas com ou sem sobrescrito, em negrito.

Ex:  $\mathbf{g}, \lambda^q, \mathbf{z}^{k+1}, \mathbf{y}^t$

- 3) Matrizes são representadas por letras maiúsculas com ou sem sobrescrito, em negrito.

Ex:  $\mathbf{G}, \mathbf{J}^k, \mathbf{A}^t, \mathbf{H}^{-1}, \mathbf{H}^{-t}$

- 4) Funções escalares são representadas por letras maiúsculas ou minúsculas com ou sem subscrito, com ou sem sobrescrito, seguidas pelo conjunto de variáveis associadas à função entre parênteses.

Ex:  $F(\mathbf{x}, \mathbf{y}), z_i(\mathbf{u}), z_i^k(\mathbf{x})$

- 5) Funções vetoriais são representadas por letras minúsculas com ou sem sobrescrito, em negrito, seguidas pelo conjunto de variáveis associadas à função entre parênteses.

Ex:  $\mathbf{h}(\mathbf{y}), \mathbf{g}^k(\mathbf{x})$

- 6) Os espaços e subespaços são denotados por letras maiúsculas com ou sem sobrescrito em gótico.

Ex:  $\mathbb{R}^n$

- 7) Os subscritos podem representar:

- índice de um elemento de um vetor:  $a_k$
- índice de um elemento de uma matriz:  $A_{ij}$ ,  $b_{ij}$
- índice de um elemento de uma função vetorial:  $z_i(\mathbf{x})$

- 8) Os sobrescritos podem representar:

- no. da iteração (num processo iterativo) em que a grandeza é calculada:  
 $\lambda^q, \mathbf{z}^k, \mathbf{J}^k, z_i^k(\mathbf{x}), \mathbf{g}^k(\mathbf{x})$
- dimensão de um espaço ou subespaço:  $\mathbb{R}^n$
- transposição (nesse caso, o sobrescrito é  $t$ ):  $\mathbf{y}^t, \mathbf{A}^t$
- inversão (nesse caso, o sobrescrito é  $-1$ ):  $\mathbf{H}^{-1}$
- transposição e inversão (nesse caso, o sobrescrito é  $-t$ ):  $\mathbf{H}^{-t}$
- fasores (nesse caso, o sobrescrito é  $\sim$ ):  $\tilde{S}_{ij} = P_{ij} + jQ_{ij}$
- conjugado de um fador (nesse caso, o sobrescrito é  $*$ ):  $\tilde{S}_{ij}^* = P_{ij} - jQ_{ij}$
- ponto de otimalidade (nesse caso, o sobrescrito também é  $*$ ):  $\mathbf{x}^*$

Obs: não existe a possibilidade de confusão com o sobrescrito de conjugado de um fador, por serem utilizados em partes distintas do texto.

- 9)  $\{ \bullet \}$  indica conjunto
- 10)  $\max\{ \bullet \}$ ,  $\min\{ \bullet \}$  representam o valor máximo e mínimo respectivamente, entre os elementos do conjunto
- 11)  $\| \bullet \|_p$  indica a norma  $p$  de um vetor ou matriz. Quando  $p$  for omitido fica implícito que  $p = 2$  (norma 2 ou euclidiana).
- 12)  $| \bullet |$  indica o módulo de uma grandeza escalar
- 13)  $\nabla F(\mathbf{x}) = (\partial F / \partial x_1 \dots, \partial F / \partial x_n)^t$  representa o gradiente da função escalar  $F$  em relação às variáveis  $x_1 \dots x_n$  do vetor  $\mathbf{x}$

$$14) \nabla^2 F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \partial^2 F / \partial x_1^2 & \dots & \partial^2 F / \partial x_1 \partial x_n \\ \vdots & & \vdots \\ \partial^2 F / \partial x_n \partial x_1 & \dots & \partial^2 F / \partial x_n^2 \end{bmatrix}$$

é uma matriz quadrada simétrica de ordem  $n$  que contém as segundas derivadas da função escalar  $F$  com relação às variáveis  $x_1 \dots x_n$  do vetor  $\mathbf{x}$ .

- 15) expressões estrangeiras que são comuns, não são traduzidas e estão grafadas em *itálico* no texto.



## CAPÍTULO I INTRODUÇÃO

A finalidade principal de um sistema de energia elétrica é suprir a demanda com níveis de qualidade e confiabilidade adequados. Para que este objetivo seja atingido é necessário que as empresas responsáveis pela operação do sistema realizem estudos elétricos que vão desde o planejamento a longo prazo até a operação em tempo real.

Ao longo das últimas décadas, a disponibilidade de recursos e o fato de não se utilizarem ferramentas computacionais que empregassem técnicas de otimização, contribuiu para que soluções sub-ótimas fossem adotadas. Entretanto, a crescente escassez de recursos para investimento no setor e o natural crescimento da demanda, tornou essencial o uso destas técnicas com o objetivo de manter o suprimento em níveis de qualidade adequados.

As técnicas de otimização, quando aplicadas, tem por objetivo, basicamente, atender os seguintes requisitos:

- 1) Reduzir os custos de investimento no sistema;
- 2) Reduzir os custos operacionais do sistema;
- 3) Melhorar a qualidade de suprimento através do estabelecimento da melhor política de atuação nos controles do sistema.

Como exemplo do primeiro requisito podemos citar a determinação da melhor estratégia para a expansão das fontes de potência reativa do sistema.

Com relação ao segundo requisito podemos citar como exemplo a determinação do despacho ótimo de geração de potência ativa ou o ajuste dos controles com o objetivo de minimizar as perdas do sistema.

O terceiro requisito pode ser exemplificado pelo estabelecimento, em tempo real, do ajuste dos controles do sistema com o objetivo de remover as violações correntes, satisfazendo-se um certo critério.

Na realidade, em todos os estudos de regime permanente, o que se deseja é estabelecer um fluxo de potência na rede elétrica que satisfaça um determinado objetivo, respeitando condições operativas pré—estabelecidas. Tanto o objetivo como as condições operativas variam de acordo com o estudo realizado. A ferramenta mais adequada para a realização destes estudos de regime permanente denomina—se Fluxo de Potência Ótimo.

Este trabalho tem por objetivo descrever em detalhes os aspectos teóricos e práticos relacionados com desenvolvimento e implementação de um programa de Fluxo de Potência Ótimo (FPO).

Ao longo dos anos vários algoritmos tem sido propostos com o objetivo de solucionar o problema de FPO. Como será descrito ao longo do trabalho, o problema de FPO pode ser formulado como um problema de programação não linear de grande porte. O algoritmo descrito neste trabalho se baseia no método de programação quadrática sequencial para a solução de problemas de programação não linear [1], [2] e [3].

Neste método, o problema de programação não linear é resolvido através da formulação e solução de uma sequência de subproblemas quadráticos associados ao problema original. A solução de cada subproblema quadrático é obtida pelo método de Newton—Raphson. Demonstra—se que a sequência de soluções dos subproblemas quadráticos converge para a solução do problema original [4] e [5].

O trabalho está organizado em sete capítulos e quatro apêndices. O Capítulo II descreve o problema geral de fluxo de potência em sistemas elétricos. São apresentados a formulação básica do problema, a modelagem dos dispositivos de controle e das restrições operacionais e os principais métodos de solução do problema geral de fluxo de potência.

O Capítulo III apresenta o método de programação quadrática sequencial para a solução de um problema geral de programação não linear. São descritos a formulação do problema de programação não linear, as condições de otimalidade, o algoritmo de solução, a modelagem das restrições de desigualdade e uma discussão das estratégias de conjunto ativo que podem ser utilizadas.

No Capítulo IV o problema de FPO é modelado como um problema de programação não linear de grande porte. Os modelos apresentados no Capítulo II

são utilizados na formulação do problema. São empregadas técnicas de desacoplamento dos subproblemas de potência ativa e de potência reativa com o objetivo de reduzir o custo computacional. O algoritmo de solução utiliza as técnicas descritas no Capítulo III. As restrições de desigualdade são modeladas através de funções de penalidade quadrática. A estratégia de conjunto ativo utilizada é discutida em detalhes, e outras estratégias alternativas são, também, abordadas.

O Capítulo V descreve as técnicas de esparsidade utilizadas na solução dos sistemas de equações lineares associados ao algoritmo de solução. São descritas técnicas para a atualização dos fatores das matrizes de solução, bem como técnicas para a obtenção de soluções parciais.

O Capítulo VI detalha os resultados obtidos com a implementação do método. O Capítulo VII, finalmente discute as conclusões e as recomendações para futuros desenvolvimentos.

Com relação aos apêndices, o Apêndice A apresenta o modelo das equações de fluxo de potência. O Apêndice B descreve as derivadas das equações de fluxo de potência com relação às variáveis do problema de FPO. O Apêndice C apresenta as funções objetivo implementadas neste trabalho, seus modelos e derivadas. Finalmente, o Apêndice D descreve o modelo da função Lagrangeana e suas derivadas.

## CAPÍTULO II

### O PROBLEMA GERAL DE FLUXO DE POTÊNCIA

O problema de fluxo de potência associado a um sistema de energia elétrica consiste basicamente na determinação do estado da rede e, conseqüentemente, dos fluxos de potência que fluem pelos equipamentos. A modelagem utilizada considera que o sistema elétrico opera em regime estacionário (permanente). Desta forma, o problema pode ser representado por um modelo estático da rede constituído por um conjunto de equações e inequações algébricas. Outra restrição com relação aos modelos utilizados é que a sua validade se restringe apenas à sistemas trifásicos equilibrados, os quais podem ser modelados utilizando-se apenas a rede de sequência positiva.

Os equipamentos de um sistema elétrico podem ser classificados em dois grupos [6]: os componentes externos à rede tais como geradores, compensadores síncronos, compensadores reativos estáticos controláveis (crec's) e cargas, que são modelados através de uma injeção de potência no nó elétrico ao qual estão conectados; e os componentes internos à rede tais como linhas de transmissão, transformadores, reatores e capacitores que são modelados por equações algébricas que representam o fluxo de potência que flui por estes equipamentos. Deve-se ressaltar que no escopo deste trabalho serão considerados apenas sistemas elétricos de corrente alternada.

#### II.1 Equações de Fluxo de Potência [6]

As equações básicas de fluxo de potência são obtidas a partir da aplicação da Lei de Conservação de Energia a cada nó do sistema elétrico (1a. Lei de Kirchoff). Ou seja, a soma das injeções de potência dos componentes "externos" em cada nó da rede deve ser igual à soma dos fluxos nos componentes "internos" ligados ao nó.

Na formulação básica do problema são definidas quatro grandezas para cada nó elétrico  $i$  do sistema:

$V_i$  = módulo da tensão  
 $\Theta_i$  = ângulo de fase da tensão  
 $P_i$  = injeção líquida de potência ativa  
 $Q_i$  = injeção líquida de potência reativa

Na resolução do problema, duas destas grandezas são fixadas e duas são calculadas (incógnitas) em cada nó da rede. Em função de quais grandezas são fixadas podemos definir três tipos básicos de nós elétricos (barras).

PQ – são fixados  $P_i$  e  $Q_i$ , e calculados  $V_i$  e  $\Theta_i$   
 PV – são fixados  $P_i$  e  $V_i$ , e calculados  $Q_i$  e  $\Theta_i$   
 V $\Theta$  (Referência) – são fixados  $V_i$  e  $\Theta_i$ , e calculados  $P_i$  e  $Q_i$

O estado (ponto de operação) do sistema elétrico fica perfeitamente definido através do conhecimento das grandezas  $V_i$  e  $\Theta_i$  em todas as barras. A seguir será descrita a formulação matemática do problema geral de fluxo de potência.

O problema geral de fluxo de potência pode ser formulado através de um conjunto de equações e inequações algébricas da seguinte forma:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^{\text{esp}} \quad (\text{II.1})$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) \geq 0 \quad (\text{II.2})$$

onde:

$\{\mathbf{x}\}$  é o conjunto de incógnitas, definido anteriormente em função do tipo das barras.

$\mathbf{g}(\mathbf{x})$  é uma função vetorial associada às restrições de igualdade do problema;

$\mathbf{g}^{\text{esp}}$  é o vetor que contém os valores especificados para a função  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ ;

$\mathbf{h}(\mathbf{x})$  é uma função vetorial associada às restrições de desigualdade do problema.

O conjunto de restrições de igualdade associado a eq. (II.1) (Equações de Fluxo de Potência) é dado por:

$$P_i = \sum_{j \in \Omega_i} P_{ij}(V_i, V_j, \Theta_{ij}) \quad (\text{II.3})$$

$$Q_i = \sum_{j \in \Omega_i} Q_{ij}(V_i, V_j, \Theta_{ij}) - bsh_i V_i^2 \quad (\text{II.4})$$

onde:

- $i$  — varia de  $1 \rightarrow n$  ( $n = \text{n}^\circ$ . de barras do sistema)
- $\Omega_i$  — conjunto de barras ligadas diretamente à barra  $i$  (vizinhança de  $i$ )
- $V_i, V_j$  — módulo da tensão das barras  $i$  e  $j$
- $\Theta_{ij}$  — defasagem angular da ligação  $i-j$  ( $\Theta_{ij} = \Theta_i - \Theta_j$ )
- $P_{ij}$  — fluxo de potência ativa na ligação  $i-j$
- $Q_{ij}$  — fluxo de potência reativa na ligação  $i-j$
- $bsh_i$  — susceptância dos elementos *shunt* ligados à barra  $i$
- $P_i$  — soma da injeção de potência ativa dos componentes "externos" ligados à barra  $i$
- $Q_i$  — soma da injeção de potência reativa dos componentes "externos" ligados à barra  $i$

Neste ponto cabe uma observação com relação a convenção de sinais que é normalmente adotada para os fluxos de potência e as injeções.

Uma injeção é considerada positiva se a potência entra no nó elétrico. Por outro lado, um fluxo de potência é considerado positivo se a potência sai do nó elétrico.

As expressões para os fluxos  $P_{ij}$  e  $Q_{ij}$  são apresentadas no apêndice A.

O conjunto de inequações associado a (II.2) são as restrições operacionais que devem ser respeitadas na solução do problema. Basicamente são:

$$V_i^{\min} \leq V_i \leq V_i^{\max} \quad (\text{II.5})$$

$$Q_i^{\min} \leq Q_i \leq Q_i^{\max} \quad (\text{II.6})$$

O algoritmo para solução do problema de fluxo de potência pode ser dividido em duas partes. A primeira é constituída por um processo iterativo que resolve o conjunto de equações algébricas não lineares (II.3) e (II.4). Os métodos mais eficientes para a solução deste problema são aqueles baseados no método de Newton–Raphson. A segunda parte, considera a atuação dos dispositivos de controle e o conjunto de restrições operacionais (II.5) e (II.6).

De uma maneira geral as duas partes do problema são resolvidas alternadamente, intercalando-se a solução das equações de fluxo com a representação dos controles e dos limites operacionais.

## II.2 Fluxo de Potência pelo Método de Newton–Raphson [6] e [7]

Com o objetivo de simplificar a abordagem do problema, inicialmente será desprezado o conjunto de restrições de desigualdade. A inclusão destas restrições na formulação do problema será descrita no item II.6. Sendo assim, o sistema de equações algébricas não lineares a ser resolvido é dado pela eq. (II.1), reescrita a seguir:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{g}^{\text{esp}} \quad (\text{II.7})$$

onde:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = [g_1(\mathbf{x}), g_2(\mathbf{x}), \dots, g_n(\mathbf{x})]^t$$

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^t$$

Podemos, inicialmente, linearizar as funções  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  em torno de um ponto  $\mathbf{x}^0$  utilizando a série de Taylor.

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^0 + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) + \mathbf{J}^0 \Delta\mathbf{x}$$

onde:

$$\mathbf{J}^0 = \left[ \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right]_{\mathbf{x} = \mathbf{x}^0}$$

Entretanto, queremos  $\mathbf{g}(\mathbf{x}^0 + \Delta\mathbf{x}) = \mathbf{g}^{\text{esp}}$

Temos então o seguinte sistema de equações lineares:

$$\mathbf{J}^0 \Delta\mathbf{x} = \mathbf{g}^{\text{esp}} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^0) \quad (\text{II.8})$$

Se  $\mathbf{J}^0$  for inversível, resolvendo a eq (II.8) vem:

$$\Delta\mathbf{x} = (\mathbf{J}^0)^{-1} (\mathbf{g}^{\text{esp}} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^0)) \quad (\text{II.9})$$

Com isto obtemos um novo ponto dado por:

$$\mathbf{x}^1 = \mathbf{x}^0 + \Delta\mathbf{x} \quad (\text{II.10})$$

Em seguida podemos linearizar o sistema de equações no ponto  $\mathbf{x}^1$  e repetir o processo até que os valores das funções  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  convirjam para  $\mathbf{g}^{\text{esp}}$  a menos de uma tolerância especificada.

### II.3 Características da Matriz Jacobiana [6]

A matriz Jacobiana  $\mathbf{J}$  associada às funções  $\mathbf{g}(\mathbf{x})$  é dada por:

$$\mathbf{J} = \partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \partial g_1 / \partial x_1 & \partial g_1 / \partial x_2 & \dots & \partial g_1 / \partial x_n \\ \partial g_2 / \partial x_1 & \partial g_2 / \partial x_2 & \dots & \partial g_2 / \partial x_n \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \partial g_n / \partial x_1 & \partial g_n / \partial x_2 & \dots & \partial g_n / \partial x_n \end{bmatrix}$$

Reescrevendo a Equação (II.8) para uma barra genérica  $i$  temos:



$$\Delta P_i = \Delta \Theta_i \frac{\partial P_i}{\partial \Theta_i} + \sum_{j \in \Omega_i} \Delta \Theta_j \frac{\partial P_i}{\partial \Theta_j} + \Delta V_i \frac{\partial P_i}{\partial V_i} + \sum_{j \in \Omega_i} \Delta V_j \frac{\partial P_i}{\partial V_j} \quad (\text{II.11})$$

$$\Delta Q_i = \Delta \Theta_i \frac{\partial Q_i}{\partial \Theta_i} + \sum_{j \in \Omega_i} \Delta \Theta_j \frac{\partial Q_i}{\partial \Theta_j} + \Delta V_i \frac{\partial Q_i}{\partial V_i} + \sum_{j \in \Omega_i} \Delta V_j \frac{\partial Q_i}{\partial V_j} \quad (\text{II.12})$$

onde:

$$\Delta P_i = P_i^{\text{esp}} - P_i(V, \Theta)$$

$$\Delta Q_i = Q_i^{\text{esp}} - Q_i(V, \Theta)$$

Expandindo as eqs.(II.11) e (II.12) para todo o sistema e colocando na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} \partial \mathbf{p} / \partial \boldsymbol{\theta} & \partial \mathbf{p} / \partial \mathbf{v} \\ \partial \mathbf{q} / \partial \boldsymbol{\theta} & \partial \mathbf{q} / \partial \mathbf{v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\theta} \\ \Delta \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p} \\ \Delta \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (\text{II.13})$$

As submatrizes componentes da matriz Jacobiana são normalmente colocadas na seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \partial \mathbf{p} / \partial \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{N} &= \partial \mathbf{p} / \partial \mathbf{v} \\ \mathbf{M} &= \partial \mathbf{q} / \partial \boldsymbol{\theta} \\ \mathbf{L} &= \partial \mathbf{q} / \partial \mathbf{v} \end{aligned} \quad (\text{II.14})$$

Substituindo (II.14) em (II.13) a equação (II.8) pode ser colocada finalmente na forma

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{N} \\ \mathbf{M} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \boldsymbol{\theta} \\ \Delta \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p} \\ \Delta \mathbf{q} \end{bmatrix} \quad (\text{II.15})$$

Os elementos das submatrizes  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{L}$  são dados por:

$$\begin{aligned}
H_{ij} &= \frac{\partial P_{ij}}{\partial \Theta_j} \\
H_{ii} &= \sum_{j \in \Omega_i} \frac{\partial P_{ij}}{\partial \Theta_i} \\
N_{ij} &= \frac{\partial P_{ij}}{\partial V_j} \\
N_{ii} &= \sum_{j \in \Omega_i} \frac{\partial P_{ij}}{\partial V_i} \\
M_{ij} &= \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \Theta_j} \\
M_{ii} &= \sum_{j \in \Omega_i} \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \Theta_i} \\
L_{ij} &= \frac{\partial Q_{ij}}{\partial V_j} \\
L_{ii} &= \sum_{j \in \Omega_i} \frac{\partial Q_{ij}}{\partial V_i} - 2bsh_i V_i
\end{aligned} \tag{II.16}$$

As expressões para  $\partial P_{ij}/\partial \Theta_i$ ,  $\partial P_{ij}/\partial \Theta_j$ ,  $\partial P_{ij}/\partial V_i$ ,  $\partial P_{ij}/\partial V_j$ ,  $\partial Q_{ij}/\partial \Theta_i$ ,  $\partial Q_{ij}/\partial \Theta_j$ ,  $\partial Q_{ij}/\partial V_i$  e  $\partial Q_{ij}/\partial V_j$  podem ser encontradas no apêndice B.

A dimensão das submatrizes da equação (II.15) é dada por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{H} &\rightarrow [npq + npv, npq + npv] \\
\mathbf{N} &\rightarrow [npq + npv, npq] \\
\mathbf{M} &\rightarrow [npq, npq + npv] \\
\mathbf{L} &\rightarrow [npq, npq] \\
\mathbf{J} &\rightarrow [2 * npq + npv, 2 * npq + npv] \\
\Delta \mathbf{p}, \Delta \boldsymbol{\theta} &\rightarrow [npq + npv, 1] \\
\Delta \mathbf{q}, \Delta \mathbf{v} &\rightarrow [npq, 1]
\end{aligned}$$

onde:

npq — número de barras PQ;

npv — número de barras PV

A matriz Jacobiana caracteriza-se por ser esparsa, simétrica em estrutura e assimétrica em valor. A matriz é esparsa porque só existem elementos não nulos  $H_{ij}$ ,  $N_{ij}$ ,  $M_{ij}$  e  $L_{ij}$  caso exista uma ligação entre as barras  $i$  e  $j$ . É simétrica em estrutura porque se existir  $J_{ij}$  existirá  $J_{ji}$  e é assimétrica em valor porque neste caso  $J_{ij} \neq J_{ji}$ .

Para solucionar (II.15) é necessário a obtenção de  $J^{-1}$ . Entretanto, a inversão explícita da matriz  $J$  não é recomendável, uma vez de  $J^{-1}$  não é esparsa. Sendo assim, esquemas de fatoração esparsa da matriz Jacobiana devem ser utilizados de forma a resolver o sistema de equações de uma maneira eficiente.

A seguir será apresentado o algoritmo para solução do problema básico de fluxo de potência pelo método de Newton-Raphson.

a) FAZER  $k = 0$

b) ESCOLHER VALORES para  $x^0$

c) CALCULAR  $P_i^k$  p/  $i = 1, npq + npv$   
 $Q_j^k$  p/  $j = 1, npq$

d) CALCULAR  $\Delta y^k = \begin{bmatrix} \Delta p^k \\ \Delta q^k \end{bmatrix}$

onde:

$$\Delta p_i^k = P_i^{esp} - P_i^k$$

$$\Delta q_j^k = Q_j^{esp} - Q_j^k$$

e) SE  $\text{Max}\{|\Delta p_i^k|\} < \text{tol}$  E  $\text{Max}\{|\Delta q_j^k|\} < \text{tol}$   
 ENTÃO  
     PARE  
 SENÃO  
     CONTINUE  
 FIM SE

f) CALCULAR a matriz Jacobiana  $\mathbf{J}^k$

g) CALCULAR  $\Delta \mathbf{x}^k = (\mathbf{J}^k)^{-1} \Delta \mathbf{y}^k$

h) CALCULAR  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k$   
 onde:

$$\Delta \mathbf{x}^k = \begin{bmatrix} \Delta \theta^k \\ \Delta \mathbf{v}^k \end{bmatrix}$$

i) FAZER  $k = k + 1$

j) VÁ PARA c

#### Comentários:

- a)  $k$  é o contador de iterações.
- b)  $\mathbf{x}^0$  pode ser inicializado com os valores de um caso de fluxo de potência convergido ou com os valores usuais de  $\Theta_i = 0$  e  $V_j = 1.0$ , onde  $i = 1, npq + npv$  e  $j = 1, npq$ . Esta inicialização é denominada *Flat Start*.
- e) A grandeza  $\Delta p_i$  é denominada resíduo ou *mismatch* de potência ativa na barra  $i$ , da mesma forma  $\Delta q_j$  representa o resíduo de potência reativa na barra  $j$ . Um valor usual para  $\text{tol}$  é 1.0 MW/MVAR.
- g) Como já mencionado, a obtenção de  $(\mathbf{J}^k)^{-1}$  deve ser feita utilizando-se técnicas eficientes de fatoração esparsa.

#### II.4 Método de Newton–Raphson Desacoplado [6] e [8]

Em sistemas de extra–alta tensão (>230 kV) verifica–se que existe um forte acoplamento entre as variáveis P– $\theta$  e Q–V, e que, por outro lado, o acoplamento entre as variáveis P–V e Q– $\theta$  é fraco.

Desprezando o acoplamento P–V e Q– $\theta$  podemos dividir o problema de fluxo de potência em dois subproblemas P– $\theta$  e Q–V e resolvê–los de forma alternada.

O método de Newton–desacoplado consiste, portanto, em fazer as submatrizes **N** e **M** da matriz Jacobiana iguais a zero, e, com isto, formar dois subproblemas a partir da eq.(II.15).

Subproblema de Potência Ativa:

$$\mathbf{H}^k \Delta \theta^k = \Delta p^k \quad (\text{II.16})$$

$$\theta^{k+1} = \theta^k + \Delta \theta^k$$

Subproblema de Potência Reativa:

$$\mathbf{L}^k \Delta v^k = \Delta q^k \quad (\text{II.17})$$

$$v^{k+1} = v^k + \Delta v^k$$

O método de Newton Desacoplado, descrito pelas equações (II.16) e (II.17), pode ser reformulado dividindo–se cada uma destas equações pelo módulo da tensão. Esta versão, descrita pelas equações (II.18) e (II.19), pode apresentar, para alguns sistemas, uma convergência mais rápida [6].

$$\tilde{\mathbf{H}} \Delta \theta = \Delta p/v \quad (\text{II.18})$$

$$\tilde{\mathbf{L}} \Delta v = \Delta q/v \quad (\text{II.19})$$

Os elementos das matrizes  $\tilde{\mathbf{H}}$  e  $\tilde{\mathbf{L}}$  são dados por:

$$\tilde{H}_{ii} = H_{ii}/V_i$$

$$\tilde{H}_{ij} = H_{ij}/V_i$$

$$\tilde{L}_{ii} = L_{ii}/V_i$$

$$\tilde{L}_{ij} = L_{ij}/V_i$$

Cabe notar que as aproximações introduzidas na matriz Jacobiana alteram o processo de convergência, mas não a solução final, uma vez que nenhuma aproximação é realizada no cálculo de  $\Delta \mathbf{p}$  e  $\Delta \mathbf{q}$ .

A seguir será mostrado o algoritmo básico do método.

- a) FAZER  $KP = 0$ ;  $KQ = 0$ ;  $p = 0$ ;  $q = 0$
- b) ESCOLHER VALORES para  $\theta^0$  e  $\mathbf{v}^0$
- c) CALCULAR  $\Delta p_i^p/v_i^p = (P_i^{esp} - P_i^p) / V_i^p$ ;  $p/i = 1, npv + npq$
- d) SE  $\text{Max} \{|\Delta p_i^p/v_i^p|\} < \text{tol}$   
 ENTÃO  
      $KP = 1$   
     SE  $KQ = 1$   
     ENTÃO  
         PARE  
     SENÃO  
         VÁ PARA  $i$   
     FIM SE  
 SENÃO  
     CONTINUE  
 FIM SE
- e) CALCULAR  $\tilde{\mathbf{H}}^p$

- f) CALCULAR  $\Delta \theta^p = (\tilde{H}^p)^{-1} (\Delta p^p / v^p)$
- g) CALCULAR  $\theta^{p+1} = \theta^p + \Delta \theta^p$
- h) FAZER  $p = p + 1$
- i) CALCULAR  $\Delta q_j^q / v_j^q = (Q_j^{esp} - Q_j^q) / V_j^q$ ;  $p / j = 1, npq$
- j) SE  $\text{Max} \{ |\Delta q_j^q / v_j^q| \} < \text{tol}$   
 ENTÃO  
     KQ = 1  
     SE KP = 1  
     ENTÃO  
         PARE  
     SENÃO  
         VÁ PARA c  
     FIM SE  
 SENÃO  
     CONTINUE  
 FIM SE
- k) CALCULAR  $\tilde{L}^q$
- l) CALCULAR  $\Delta v^q = (\tilde{L}^q)^{-1} (\Delta q^q / v^q)$
- m) CALCULAR  $v^{q+1} = v^q + \Delta v^q$
- n) FAZER  $q = q + 1$
- o) VÁ PARA c

Comentários:

- a) As variáveis KP e KQ são os indicadores de convergência, enquanto que as variáveis p e q são os contadores de iteração dos subproblemas de potência ativa e de potência reativa respectivamente.

- d,j) Uma vez que os subproblemas são resolvidos de forma alternada, existe a possibilidade de um deles convergir mais lentamente. O esquema proposto acima permite iterar somente sobre o subproblema não convergido [8].
- e,k) O requisito de memória do método é da ordem de 30% daquele necessário para o método de Newton tradicional [8].
- i,k) Os valores de  $\Delta q^q/v^q$  e  $\tilde{L}^q$  são calculados utilizando-se os valores atualizados do ângulo de fase, ou seja  $\theta^{p+1}$

## II.5 Método Desacoplado Rápido [6], [9], [10] e [11]

O método desacoplado rápido tem um algoritmo semelhante ao método de Newton desacoplado descrito pelas equações (II.18) e (II.19). A diferença básica é que no método desacoplado rápido as matrizes Jacobianas são mantidas constantes durante o processo iterativo.

As expressões (II.18) e (II.19) do método desacoplado são reescritas a seguir:

$$\tilde{H} \Delta \theta = \Delta p/v \quad (\text{II.20})$$

$$\tilde{L} \Delta v = \Delta q/v \quad (\text{II.21})$$

Os elementos das matrizes  $\tilde{H}$  e  $\tilde{L}$  são dados por:

$$\tilde{H}_{ij} = V_j(G_{ij} \text{sen} \theta_{ij} - B_{ij} \text{cos} \theta_{ij})$$

$$\tilde{H}_{ii} = -B_{ii} V_i - Q_i / V_i$$

$$\tilde{L}_{ij} = (G_{ij} \text{sen} \theta_{ij} - B_{ij} \text{cos} \theta_{ij})$$

$$\tilde{L}_{ii} = -B_{ii} + Q_i / V_i^2$$



onde:

- $G_{ij}$  — elemento  $ij$  da matriz condutância de barra
- $B_{ij}$  — elemento  $ij$  da matriz susceptância de barra
- $Q_i$  — injeção de potência reativa na barra  $i$

Para obtenção das matrizes utilizadas no método desacoplado rápido são consideradas as seguintes aproximações sobre os elementos de  $\tilde{H}$  e  $\tilde{L}$  :

- 1)  $\cos \theta_{ij} \simeq 1$
- 2)  $B_{ij}$  é, em módulo, muito maior que o termo  $G_{ij} \sin \theta_{ij}$
- 3)  $B_{ii}$  é, em módulo, muito maior do que  $Q_i / V_i^2$
- 4) Desprezar o módulo da tensão na formação de  $\tilde{H}$

Considerando estas aproximações as matrizes  $\tilde{H}$  e  $\tilde{L}$  se reduzem a:

$$\tilde{H} \simeq B'$$

$$\tilde{L} \simeq B''$$

Os elementos das matrizes  $B'$  e  $B''$  são dados pelo simétrico dos elementos da matriz susceptância de barra. Desta forma, os sistemas de equações passam a ser:

$$B' \Delta \theta = \Delta p / v \quad (\text{II.22})$$

$$B'' \Delta v = \Delta q / v \quad (\text{II.23})$$

As matrizes  $B'$  e  $B''$  só dependem dos parâmetros da rede e, portanto, são invariantes com o estado  $(V, \Theta)$ . Desta forma, podem ser fatoradas uma única vez no início do processo iterativo. A dimensão de  $B'$  é idêntica à dimensão de  $H$ , assim como  $B''$  em relação a  $L$ .

No algoritmo proposto em [9] algumas simplificações adicionais são feitas na formação de  $\mathbf{B}'$  e  $\mathbf{B}''$ .

- a) Ignorar na formação de  $\mathbf{B}'$  elementos que afetam predominantemente os fluxos reativos, tais como, reatâncias *shunt* e tap's fora do valor nominal.
- b) Ignorar na formação de  $\mathbf{B}''$  o ângulo de defasamento dos transformadores defasadores.
- c) Ignorar as resistências série no cálculo de  $\mathbf{B}'$ . Desta forma a matriz  $\mathbf{B}'$  se torna a matriz utilizada no fluxo de potência DC. Esta aproximação é importante principalmente em sistemas com baixa relação X/R, veja [10] e [11].

A principal característica do método é a obtenção de uma solução com boa margem de precisão num tempo bem inferior ao método de Newton tradicional. Embora o número de iterações seja normalmente maior que obtido pelo método de Newton para um mesmo critério de convergência, o tempo por iteração é muito menor pelo fato das matrizes  $\mathbf{B}'$  e  $\mathbf{B}''$  serem montadas e fatoradas uma única vez.

Outra característica é uma maior estabilidade do algoritmo em relação ao método de Newton Desacoplado em função das simplificações que são feitas na formação de  $\mathbf{B}'$  e  $\mathbf{B}''$ .

O método desacoplado rápido é, hoje em dia, largamente utilizado na resolução do problema de fluxo de potência tanto em estudos *off-line* como em aplicações *on-line* (aplicações em tempo real em Centros de Supervisão e Controle).

O algoritmo de solução do método será mostrado a seguir:

- a) FAZER  $K_P = 0$ ;  $K_Q = 0$ ;  $p = 0$ ;  $q = 0$
- b) ESCOLHER VALORES para  $\theta^o$  e  $v^o$
- c) CALCULAR  $\mathbf{B}'$  e  $\mathbf{B}''$
- d) CALCULAR  $(\mathbf{B}')^{-1}$  e  $(\mathbf{B}'')^{-1}$

- e) CALCULAR  $\Delta p_i^p/v_i^p = (P_i^{esp} - P_i^p) / V_i^p$ ;  $p/i = 1, npv + npq$
- f) SE  $\text{Max} \{|\Delta p_i^p/v_i^p|\} < \text{tol}$   
 ENTÃO  
     KP = 1  
     SE KQ = 1  
     ENTÃO  
         PARE  
     SENÃO  
         VÁ PARA j  
     FIM SE  
 SENÃO  
     CONTINUE  
 FIM SE
- g) CALCULAR  $\Delta \theta^p = (B')^{-1} (\Delta p^p/v^p)$
- h) CALCULAR  $\theta^{p+1} = \theta^p + \Delta \theta^p$
- i) FAZER  $p = p + 1$
- j) CALCULAR  $\Delta q_j^q/v_j^q = (Q_j^{esp} - Q_j^q) / V_j^q$ ;  $p/j = 1, npq$
- l) SE  $\text{Max} \{|\Delta q_j^q/v_j^q|\} < \text{tol}$   
 ENTÃO  
     KQ = 1  
     SE KP = 1  
     ENTÃO  
         PARE  
     SENÃO  
         VÁ PARA e  
     FIM SE  
 SENÃO  
     CONTINUE  
 FIM SE
- m) CALCULAR  $\Delta v^q = (B'')^{-1} (\Delta v^q/v^q)$

- n) CALCULAR  $v^{q+1} = v^q + \Delta v^q$
- o) FAZER  $q = q + 1$
- p) VÁ PARA e

Comentários:

- c,d) As matrizes  $B'$  e  $B''$  são montadas e fatoradas no início do algoritmo e permanecem constantes durante todo o processo iterativo. O requisito de memória é da ordem de 60% daquele necessário para o método de Newton tradicional [9];
- f,ℓ) O critério de convergência é o mesmo adotado no método de Newton tradicional. O método possui taxa de convergência geométrica, que é comum aos métodos com derivada constante. Uma vez que os subproblemas são resolvidos de forma alternada, existe a possibilidade de um deles convergir mais lentamente. O esquema proposto acima permite iterar somente sobre o subproblema não convergido [9].

## II.6 Dispositivos de Controle e Restrições Operacionais [6]

Até agora foram apresentados os métodos de solução das equações básicas de fluxo de potência. Neste item serão apresentados os modelos básicos que representam os controles automáticos do sistema bem como os limites operativos. Além disto, será apresentada a forma pela qual estes controles e limites são incorporados ao processo de solução do fluxo de potência.

Os controles que normalmente são incluídos em um problema geral de fluxo de potência são os seguintes:

- a) Controle da magnitude de tensão através da injeção de potência reativa;
- b) Controle da magnitude de tensão através do ajuste do tap de transformadores em fase;

- c) Controle do fluxo de potência ativa através do ajuste do ângulo de defasamento de transformadores defasadores;
- d) Controle de intercâmbio entre áreas.

Os limites operativos considerados são:

- 1) Limites de tensão em barras PQ;
- 2) Limites de potência reativa em barras PV;
- 3) Limites de tap em transformadores em fase;
- 4) Limites de ângulo de defasamento em transformadores defasadores;
- 5) Limites de intercâmbio entre áreas.

Normalmente são utilizadas duas maneiras para representar os controles.

- I) Modelagem do controle nas equações básicas do problema de fluxo de potência. Isto significa que o modelo do controle é incorporado às equações básicas do problema. Isto se aplica ao controle **a**, descrito anteriormente, e leva em consideração os limites 1 e 2.

De uma forma resumida teríamos:

A tensão de uma barra PV é mantida no valor especificado enquanto os limites da potência reativa injetada não forem violados. Quando isto ocorrer, a potência reativa é fixada no limite violado; o valor da tensão é relaxado e a barra torna-se, portanto, PQ. A barra poderá voltar a ser PV se o estado do sistema evoluir para um ponto em que a restrição sobre a potência reativa possa ser relaxada sem riscos de nova violação.

A transformação PQ  $\rightarrow$  PV (retorno da barra ao tipo original) pode ser realizada quando:

$$Q^{\text{esp}} = Q_{\text{max}} \text{ E } V^{\text{cal}} > V^{\text{esp}}$$

OU

$$Q^{\text{esp}} = Q_{\text{min}} \text{ E } V^{\text{cal}} < V^{\text{esp}}$$

No caso de uma barra PQ, pode-se monitorar o valor da tensão. Se um dos limites for violado, fixa-se a tensão no limite violado e relaxa-se a injeção de potência reativa através da simulação da existência de uma injeção fictícia na barra. Neste caso a barra torna-se PV. A barra voltará a ser PQ se posteriormente, a restrição sobre a tensão puder ser relaxada sem que isto cause nova violação.

A transformação PV  $\rightarrow$  PQ (retorno da barra ao tipo original) pode ser realizada quando:

$$V^{\text{esp}} = V_{\text{min}} \text{ E } Q^{\text{cal}} < Q^{\text{esp}}$$

OU

$$V^{\text{esp}} = V_{\text{max}} \text{ E } Q^{\text{cal}} > Q^{\text{esp}}$$

- II) Modelagem do controle através de mecanismos de ajuste executados alternadamente com a solução iterativa das equações básicas. Ou seja, ao final de cada iteração as variáveis de controle são ajustadas de forma a diminuir o erro das variáveis controladas em relação aos valores especificados. Durante a iteração o valor das variáveis de controle permanece constante. Este modelo se aplica aos controles **b**, **c** e **d** e são considerados os limites **3**, **4** e **5**, respectivamente.

Este esquema pode ser implementado da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} u^{k+1} &= u^k + \Delta u^k \\ \Delta u^k &= \alpha \Delta z^k \\ \Delta z^k &= z^{\text{esp}} - z^k \end{aligned} \tag{II.24}$$

onde:

- $u$  = variável de controle
- $z$  = variável controlada
- $\alpha$  = fator de sensibilidade do controle.

Aplicando (II.24) aos controles **b**, **c** e **d** temos:

- Controle de tap

$$a_{ij}^{k+1} = a_{ij}^k + \alpha(V_m^{esp} - V_m^k) \quad (II.25)$$

onde:

- $a_{ij}^{k+1}$  — valor do tap a ser utilizado na iteração  $k+1$
- $\alpha$  — fator de sensibilidade  
 $\simeq + 1$  se a tensão controlada estiver do mesmo lado do tap  
 $\simeq - 1$  se a tensão controlada estiver do lado oposto ao tap
- $V_m^{esp}$  — valor especificado da tensão

Obs.: A tensão pode ser controlada em uma das barras terminais do transformador ou em uma barra remota.

- Controle do ângulo de defasamento

$$\varphi_{ij}^{k+1} = \varphi_{ij}^k + \alpha(P_{ij}^{esp} - P_{ij}^k) \quad (II.26)$$

onde:

- $\varphi_{ij}^{k+1}$  — Ângulo de defasamento a ser utilizado na iteração  $k+1$
- $P_{ij}^{esp}$  — Valor especificado para o fluxo de potência ativa da ligação  $ij$ ;
- $\alpha$  — Fator de sensibilidade.

O fator  $\alpha$ , que é função da reatância equivalente dos "outros" caminhos existentes entre os nós  $ij$  e da reatância do transformador defasador, pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\alpha = x_{ij}^{eq} + x_{ij}^{def}$$

onde:

$x_{ij}^{eq}$  — reatância equivalente dos caminhos alternativos vista pelos nós  $ij$ ;

$x_{ij}^{def}$  — reatância do transformador defasador.

Se  $x_{ij}^{eq}$  é pequeno, significa que existem outros caminhos alternativos de baixa impedância. Neste caso,  $\alpha$  é próximo de  $x_{ij}^{def}$ , ou seja, pequeno. Sendo assim, com uma pequena variação de  $\varphi_{ij}$  conseguimos ajustar o valor de  $P_{ij}$ . Se por outro lado, num caso extremo, o transformador for o único caminho entre os nós  $ij$  (sistema radial), temos  $x_{ij}^{eq} = \infty$  e, portanto, o fluxo  $P_{ij}$  será insensível às variações de  $\varphi_{ij}$  [6].

- Controle de Intercâmbio entre Áreas

Em um sistema interligado é necessário controlar o intercâmbio líquido de potência ativa entre as diversas áreas que compõem o sistema. Os intercâmbios especificados (contratados) devem ser mantidos através de ajustes nos níveis de geração de alguns geradores de cada área em proporções especificadas pelo controle automático de geração (CAG).

O erro de intercâmbio líquido de uma área é dado por:

$$\Delta I_i = I_i^{esp} - \sum_{j \in J} P_j \quad (II.27)$$



onde:

- $\Delta I_i$  — Erro de intercâmbio da área  $i$ ;
- $I_i^{esp}$  — Intercâmbio especificado da área  $i$ ;
- $J$  — Conjunto de circuitos (linhas de transmissão e transformadores) que interligam a área  $i$  com as outras áreas;
- $P_j$  — Fluxo de potência ativa no circuito de interligação  $j$ . Este fluxo é medido em um dos extremos do circuito (ponto de entrega).

Um intercâmbio líquido positivo indica exportação de potência. Um erro de intercâmbio positivo significa que o nível de geração da área deve ser aumentado do montante do erro. A distribuição deste erro entre os geradores da área é feita da seguinte maneira:

$$\Delta PG_m = \Delta I_i FP_m / \sum_{k=1}^{ng_i} FP_k$$

onde:

- $\Delta PG_m$  — Incremento de potência ativa associada ao gerador  $m$  para corrigir o erro de intercâmbio;
- $\Delta I_i$  — Erro do intercâmbio da área  $i$ ;
- $FP_m$  — Fator de participação do gerador  $m$  (pertencente a área  $i$ ) no controle de intercâmbio (%);
- $ng_i$  — Número de geradores da área  $i$  que participam do controle de intercâmbio.

O ajuste dos controles e a monitoração dos limites operativos devem ser implementados depois que um certo grau de convergência já tenha sido obtido. Ajustes prematuros podem degradar ou mesmo impossibilitar a convergência do algoritmo.

Com relação aos controles implementados por esquemas de ajuste ao final de cada iteração, cabe salientar que existem maneiras de incluir estes controles na definição das equações básicas do problema. Esta forma global de abordar o problema (equações básicas + controles) será utilizada no algoritmo de fluxo de potência ótimo que será descrito no capítulo IV.

Neste ponto cabe ressaltar algumas deficiências que ocorrem na modelagem dos controles e na consideração dos limites operativos em um programa de fluxo de potência convencional.

Uma limitação imposta à modelagem dos controles, é o seu caráter estritamente local. Ou seja, para cada variável controlada define-se uma variável de controle que será ajustada dentro de limites pré-estabelecidos de forma a manter a variável controlada no valor desejado (ou entre limites especificados). Este modelo é claramente deficiente quando se deseja restringir a variação da tensão em barras PQ a limites pré-estabelecidos. Neste caso, quando ocorre uma violação o modelo aloca uma injeção fictícia de potência reativa na barra violada, mesmo que o ajuste dos outros controles existentes permitisse eliminar a violação. Por outro lado, no caso destes ajustes não possibilitarem a eliminação da violação, situação em que realmente recursos adicionais deveriam ser alocados no sistema, não existe maneira de, com o modelo existente, definir a melhor política de alocação em termos de localização e montante a ser alocado. De uma maneira geral, a impossibilidade de modelar a atuação dos controles de uma forma global não permite, em muitos casos, a obtenção de uma solução viável ou ainda, a manutenção das variáveis controladas nos valores desejados.

Outra limitação do modelo é a impossibilidade de restringir de uma maneira automática e eficiente o carregamento dos circuitos.

Todas estas deficiências podem ser sanadas a partir da utilização de um modelo mais completo e abrangente, como é o caso do modelo utilizado no algoritmo de fluxo de potência ótimo descrito no capítulo IV.

Maiores detalhes sobre a formulação de um problema geral de fluxo de potência podem ser encontrados nas referências [6], [7], [8] e [9].

## CAPÍTULO III

### PROGRAMAÇÃO QUADRÁTICA SEQUENCIAL

A programação quadrática sequencial é um método de solução de problemas de programação não linear, que se utiliza da solução de uma sequência de subproblemas quadráticos associados ao problema original. Demonstra-se que a sequência de soluções geradas pelos subproblemas quadráticos converge para a solução do problema original [4] e [5].

#### III.1 Formulação do Problema de Programação não Linear [4], [12] e [13]

Um problema geral de programação não linear pode ser formulado como:

$$\begin{aligned}
 & \min f(\mathbf{x}) \\
 & \text{s.a.} \quad g_i(\mathbf{x}) = 0 \quad i = 1, \dots, m_1 \\
 & \quad \quad h_j(\mathbf{x}) \geq 0 \quad j = 1, \dots, m_2
 \end{aligned} \tag{III.1}$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$f$ ,  $g_i$  e  $h_j$  são funções reais com primeira e segunda derivadas contínuas.

$m_1$  é o número de restrições de igualdade

$m_2$  é o número de restrições de desigualdade

De uma maneira geral tanto a função objetivo  $f(\mathbf{x})$  como as funções  $g_i(\mathbf{x})$  e  $h_j(\mathbf{x})$  que representam as restrições de igualdade e desigualdade, respectivamente, são funções não lineares em relação ao vetor de variáveis  $\mathbf{x}$ .

Um ponto que satisfaça todas as restrições é considerado um ponto viável. O conjunto de todos os pontos viáveis constitui a região viável do problema e, portanto, somente esta região poderá conter um ponto de mínimo.

A seguir será(ão) caracterizado(s) com maior precisão o(s) ponto(s) de mínimo do problema.

Seja  $\mathbf{x}^*$  solução ótima de (III.1). Seja  $S$  o conjunto de pontos viáveis de (III.1) e  $N(\mathbf{x}^*, \delta)$  o conjunto de pontos viáveis contidos numa vizinhança  $\delta$  de  $\mathbf{x}^*$ .

Definição A [4]: O ponto  $\mathbf{x}^*$  é um ponto de mínimo local forte de (III.1) se existe um  $\delta > 0$  tal que:

- A1:  $f(\mathbf{x})$  é definida em  $N(\mathbf{x}^*, \delta)$  e
- A2:  $f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{y})$  para todo  $\mathbf{y} \in N(\mathbf{x}^*, \delta)$ ,  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}^*$

Definição B [4]: O ponto  $\mathbf{x}^*$  é um ponto de mínimo local fraco de (III.1) se existe um  $\delta > 0$  tal que:

- B1:  $f(\mathbf{x})$  é definida em  $N(\mathbf{x}^*, \delta)$  ;
- B2:  $f(\mathbf{x}^*) \leq f(\mathbf{y})$  para todo  $\mathbf{y} \in N(\mathbf{x}^*, \delta)$  e
- B3:  $\mathbf{x}^*$  não é um ponto de mínimo local forte.

Definição C: O ponto  $\mathbf{x}^*$  é um ponto de mínimo global de (III.1) se  $f(\mathbf{x}^*) < f(\mathbf{y})$  para todo  $\mathbf{y} \in S$  e  $\mathbf{y} \neq \mathbf{x}^*$

Os algoritmos para solução do problema (III.1) são formulados com o objetivo de encontrar um ponto viável que seja mínimo local de  $f$ . Se a região viável for convexa e a função objetivo estritamente convexa, haverá apenas um ponto de mínimo e, portanto, o mínimo local será também mínimo global da função. Se, entretanto, esta condição não for satisfeita, poderão existir vários mínimos locais e neste caso será difícil localizar todos eles, de modo a identificar um mínimo global para a função.

A figura (III.1) caracteriza os três tipos de ponto de mínimo.

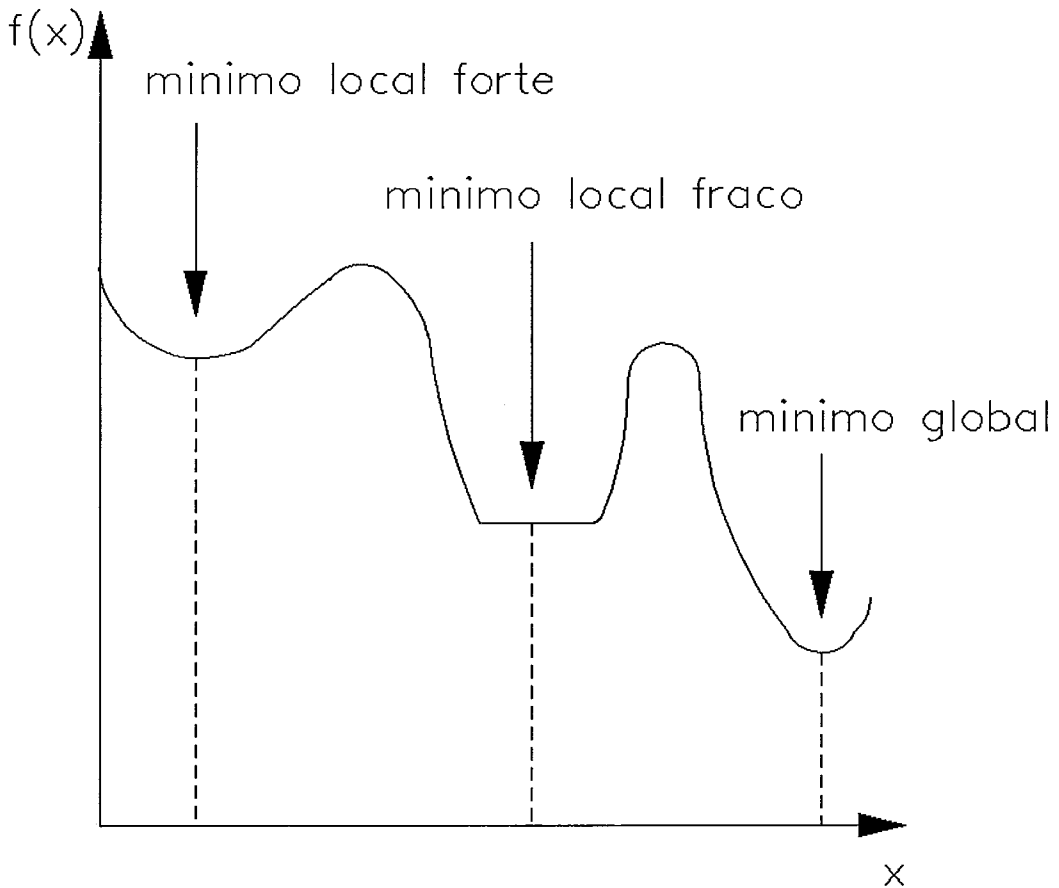


Figura III.1 – Caracterização dos pontos de mínimo

### III.1.1 Condições de Otimalidade [12] e [13]

As condições suficientes de otimalidade de 1a. e 2a. ordem (condições de Karush–Kuhn–Tucker) associadas com o problema (III.1) são [12]:

- Condições de 1a. Ordem:

$$\exists \lambda_i^* \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, m_1;$$

$$\exists \mu_j^* \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, m_2;$$

que são os multiplicadores de Karush–Kuhn–Tucker, tal que:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m_2} \mu_j^* \nabla h_j(\mathbf{x}^*) \quad (\text{III.2})$$

$$g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad i = 1, \dots, m_1 \quad (\text{III.3})$$

$$h_j(\mathbf{x}^*) \geq 0 \quad j = 1, \dots, m_2 \quad (\text{III.4})$$

$$\mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad (\text{III.5})$$

$$\mu_j^* \geq 0 \quad (\text{III.6})$$

- Condições de 2a. Ordem:

$\exists \mathbf{z} \in Z(\mathbf{x}^*), Z(\mathbf{x}^*) \subset \mathbb{R}^n$  tal que:

$$\mathbf{z}^t [\nabla^2 f(\mathbf{x}^*) - \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i^* \nabla^2 g_i(\mathbf{x}^*) - \sum_{j \in I(\mathbf{x}^*)} \mu_j^* \nabla^2 h_j(\mathbf{x}^*)] \mathbf{z} > 0 \quad (\text{III.7})$$

onde  $Z(\mathbf{x}^*) = \{\mathbf{z} : \mathbf{z}^t \nabla h_j(\mathbf{x}^*) = 0, \text{ para } \mu_j > 0 \text{ e } j \in I(\mathbf{x}^*);$

$$\mathbf{z}^t \nabla h_j(\mathbf{x}^*) \geq 0, \text{ para } \mu_j = 0 \text{ e } j \in I(\mathbf{x}^*);$$

$$\mathbf{z}^t \nabla g_i(\mathbf{x}^*) = 0, i = 1, \dots, m_1\};$$

$$I(\mathbf{x}^*) = \{j : h_j(\mathbf{x}^*) = 0\}$$

$\nabla f(\mathbf{x}^*), \nabla g_i(\mathbf{x}^*), \nabla h_j(\mathbf{x}^*)$  são os gradientes de  $f, g_i, h_j$ , respectivamente, em  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ .

$I(\mathbf{x}^*)$  é o conjunto das restrições de desigualdade ativas em  $\mathbf{x}^*$ , também chamado de subconjunto crítico ou conjunto ativo. Note-se que  $\mu_j^* = 0$  se  $j \notin I(\mathbf{x}^*)$ .

$Z(\mathbf{x}^*)$  é o conjunto de todos os vetores tangentes à região viável em  $\mathbf{x}^*$ . Ou seja,  $Z(\mathbf{x}^*)$  define um subespaço ortogonal aos gradientes das restrições ativas em  $\mathbf{x}^*$  (também chamado espaço nulo). Este subespaço define todas as direções em que se poderia tentar minimizar a função objetivo. Entretanto, qualquer movimento neste subespaço a partir de  $\mathbf{x}^*$  faria com que a função  $f(\mathbf{x})$  crescesse. Temos então que  $\mathbf{x}^*$  é um ponto de mínimo local de (III.1). O ponto  $(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*)$  é chamado de ponto de Karush–Kuhn–Tucker.

### III.1.2 Função Lagrangeana [4], [12] e [13]

Existe uma função, denominada função Lagrangeana, associada ao problema (III.1) que é expressa por [12]:

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m_2} \mu_j h_j(\mathbf{x}) \quad (\text{III.8})$$

Um ponto estacionário do Lagrangeano é dado por:

$$\nabla L(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*) = 0 \quad (\text{III.9})$$

A equação (III.9) equivale às condições de 1a. ordem descritas no item III.1.1, ou seja:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0 \Rightarrow \nabla f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \sum_{j=1}^{m_2} \mu_j^* \nabla h_j(\mathbf{x}^*) \quad (\text{III.10})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow g_i(\mathbf{x}^*) = 0 \quad i = 1, \dots, m_1 \quad (\text{III.11})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu} = 0 \Rightarrow \mu_j^* h_j(\mathbf{x}^*) = 0 \quad j = 1, \dots, m_2 \quad (\text{III.12})$$

$$\mu_j^* \geq 0 \quad (\text{III.13})$$

As condições de 2a. ordem descritas no item III.1.1 são equivalentes a [4]:

$$\mathbf{Z}(\mathbf{x}^*)^t \mathbf{H}(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*) \mathbf{Z}(\mathbf{x}^*) \text{ é positiva definida} \quad (\text{III.14})$$

onde  $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla_{\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*)$  é a Hessiana do Lagrangeano com relação ao vetor  $\mathbf{x}$  no ponto  $(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*)$ .

O cálculo de  $\mathbf{H}(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*)$  considera apenas as restrições ativas em  $\mathbf{x}^*$  ou seja:

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla^2 f(\mathbf{x}^*) - \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i^* \nabla^2 \mathbf{g}_i(\mathbf{x}^*) - \sum_{j \in I(\mathbf{x}^*)} \mu_j^* \nabla^2 \mathbf{h}_j(\mathbf{x}^*) \quad (\text{III.15})$$

A matriz  $\mathbf{Z}(\mathbf{x}^*)$  é uma matriz cujas colunas formam uma base do subespaço ortogonal aos gradientes das restrições ativas em  $\mathbf{x}^*$  (espaço nulo). Ou seja,  $\mathbf{Z}(\mathbf{x}^*)$  é uma base do subespaço  $Z$  definido no item III.1.1.

Comparando as condições de otimalidade do item III.1.1 com as condições para se encontrar um ponto estacionário da função Lagrangeana, concluímos que resolver o problema (III.1) (ou seja encontrar  $\mathbf{x}^*$ ) é equivalente a encontrar um ponto estacionário da função Lagrangeana associada a (III.1).

Na realidade o ponto  $(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*)$  é um ponto de sela da função Lagrangeana, ou seja:

$$L(\mathbf{x}^*, \lambda, \mu) \leq L(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*) \leq L(\mathbf{x}, \lambda^*, \mu^*) \quad (\text{III.16})$$

de (III.16) vemos que  $(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*)$  é um ponto de mínimo local com relação a  $\mathbf{x}$  e um ponto de máximo local com relação a  $\lambda$  e  $\mu$ .

Para finalizar este item, convém lembrar que se  $(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*)$  é solução de (III.9), então  $\mathbf{x}^*$  satisfaz as condições de otimalidade de primeira ordem de (III.1).

### III.1.3 Algoritmo de Solução [13]

Neste item será estabelecido um algoritmo de solução para o problema (III.1). Para a obtenção do algoritmo consideraremos, inicialmente, que (III.1) não possui restrições de desigualdade. Estas restrições serão abordadas com mais detalhe no item III.2.2.

Reescrevendo o problema (III.1) somente em termos das restrições de igualdade temos:



$$\begin{aligned} \min \quad & f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad & g_i(\mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, m \end{aligned} \tag{III.17}$$

onde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$

$n$  é o número de variáveis originais do problema

$m$  é o número de restrições de igualdade

O algoritmo de solução será estabelecido em relação ao problema equivalente de obter um ponto estacionário da função Lagrangeana, que é reescrita aqui.

$$L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(\mathbf{x}) \tag{III.18}$$

Como já descrito no item III.1.2 o ponto estacionário de  $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$  satisfaz  $\nabla L(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}^*) = 0$ , ou seja:

$$\nabla f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^m \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) \tag{III.19}$$

$$g_i(\mathbf{x}^*) = 0, \quad i = 1, \dots, m$$

O sistema descrito em (III.19) é um sistema de equações não lineares com  $m+n$  equações e  $m+n$  incógnitas. Resolvendo este sistema pelo método de Newton–Raphson podemos estabelecer o seguinte algoritmo de solução.

- a) FAZER  $k = 0$
- b) ESCOLHER VALORES para  $\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0$
- c) CALCULAR  $\nabla L(\mathbf{x}^k, \boldsymbol{\lambda}^k)$

- d) SE  $\|\nabla L(\mathbf{x}^k, \lambda^k)\| < \text{tol}$   
 ENTÃO  
     PARE  
 SENÃO  
     CONTINUE  
 FIM SE
- e) CALCULAR  $\mathbf{W}^k = \nabla^2 L(\mathbf{x}^k, \lambda^k)$
- f) RESOLVER o sistema

$$\mathbf{W}^k(\Delta \mathbf{x}^k, \Delta \lambda^k) = -\nabla L^k \quad (\text{III.20})$$

- g) CALCULAR  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \Delta \mathbf{x}^k$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \Delta \lambda^k$$

- h) FAZER  $k = k + 1$
- i) VÁ PARA c

Comentários:

- a)  $k$  é o contador de iterações
- d) A condição de parada do algoritmo é que a norma do gradiente de  $L(\mathbf{x}^k, \lambda^k)$  seja menor que uma tolerância.
- e) A matriz  $\mathbf{W}$ , Hessiana do Lagrangeano em relação as variáveis  $\mathbf{x}$  e  $\lambda$  é expressa por:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{H} & -\mathbf{J}^t \\ -\mathbf{J} & 0 \end{bmatrix}$$

onde:  $\mathbf{H}$  é a matriz Hessiana do Lagrangeano em relação a  $\mathbf{x}$ , cuja dimensão é  $n \times n$ .

$$\mathbf{H} = \nabla_{\mathbf{x}}^2 L(\mathbf{x}, \lambda)$$

$\mathbf{J}$  é a matriz Jacobiana do conjunto de restrições  $\mathbf{g}$  em relação a  $\mathbf{x}$ , com dimensão  $m \times n$

$$\mathbf{J} = \nabla \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

f) O sistema (III.20) corresponde a:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^k & -\mathbf{J}^{(k)t} \\ -\mathbf{J}^k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}^k \\ \Delta \lambda^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(\mathbf{x})^k + \sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x})^k \\ \mathbf{g}(\mathbf{x})^k \end{bmatrix} \quad (\text{III.21})$$

### III.2 Programação Quadrática Sequencial [4] e [13]

Seja o seguinte problema quadrático:

$$\text{Min } \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{p}^t \mathbf{H}^k \mathbf{p} + (\nabla f^k - \nabla \mathbf{g}^{(k)t} \lambda^k)^t \mathbf{p} \right\} \quad (\text{III.22})$$

$$\text{s.a. } \mathbf{J}^k \mathbf{p} = -\mathbf{g}^k$$

A função Lagrangeana associada a (III.22) é:

$$L(\mathbf{p}, \gamma) = \frac{1}{2} \mathbf{p}^t \mathbf{H}^k \mathbf{p} + (\nabla f^k - \nabla \mathbf{g}^{(k)t} \lambda^k)^t \mathbf{p} - \gamma^t (\mathbf{J}^k \mathbf{p} + \mathbf{g}^k) \quad (\text{III.23})$$

O ponto estacionário de  $L(\mathbf{p}, \gamma)$ , dado por  $\nabla L(\mathbf{p}, \gamma) = 0$  é:

$$\mathbf{H}^k \mathbf{p} - \mathbf{J}^t \gamma = -\nabla f^k + \nabla \mathbf{g}^{(k)t} \lambda^k \quad (\text{III.24})$$

$$-\mathbf{J}^k \mathbf{p} = \mathbf{g}^k$$

O sistema (III.24) pode ser reescrito como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^{\mathbf{k}} & -\mathbf{J}^{\mathbf{k}t} \\ -\mathbf{J}^{\mathbf{k}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla f(\mathbf{x})^{\mathbf{k}} + \sum_{i=1}^m \lambda_i^{\mathbf{k}} \nabla g_i(\mathbf{x})^{\mathbf{k}} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x})^{\mathbf{k}} \end{bmatrix} \quad (\text{III.25})$$

Comparando os sistemas (III.21) e (III.25) vemos que são equivalentes e que:

$(\mathbf{p}, \boldsymbol{\gamma})$  solução de (III.25) corresponde a  $(\Delta \mathbf{x}^{\mathbf{k}}, \Delta \boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{k}})$  solução da iteração  $\mathbf{k}$  de (III.21).

Vejam agora a formação do subproblema quadrático [13].

- Restrições: Linearizações das restrições do problema original (III.17), uma vez que:

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^{\mathbf{k}} + \mathbf{p}) \simeq \mathbf{g}^{\mathbf{k}} + \mathbf{J}^{\mathbf{k}} \mathbf{p}$$

- Função—Objetivo:
 

Termo linear —	Gradiente do Lagrangeano do problema original.
Termo quadrático —	Hessiano do Lagrangeano do problema original.

Note-se que o Hessiano do Lagrangeano contém informações sobre a curvatura tanto da função objetivo como também das restrições.

Desta análise concluímos que a solução do problema original pode ser obtida através da solução de uma sequência de subproblemas quadráticos associados com o problema original.

### III.2.1 Algoritmo de Solução [13]

O algoritmo de programação quadrática sequencial para a solução do problema (III.17) pode ser resumido como:

a) FAZER  $k = 0$

b) ESCOLHER VALORES para  $\mathbf{x}^0, \lambda^0$

c) SE  $\left\| \left[ \begin{array}{c} \nabla f(\mathbf{x}^k) - \sum_{i=1}^m \lambda_i^k g_i(\mathbf{x}^k) \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}^k) \end{array} \right] \right\| < \text{tol}$

ENTÃO

PARE

SENÃO

CONTINUE

FIM SE

d) CALCULAR  $\mathbf{H}^k, \mathbf{J}^k$

e) RESOLVER o subproblema quadrático:

$$\text{Min} \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{p}^t \mathbf{H}^k \mathbf{p} + (\nabla f^k - \nabla g^{(k)t} \lambda^k)^t \mathbf{p} \right\}$$

(III.26)

$$\text{s.a.} \quad \mathbf{J}^k \mathbf{p} = -\mathbf{g}^k$$

Seja  $(\mathbf{p}, \gamma)$  a sua solução. Onde  $\gamma$  é o multiplicador de Lagrange associado ao subproblema quadrático.

f) CALCULAR  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{p}$   
 $\lambda^{k+1} = \lambda^k + \gamma$

g) FAZER  $k = k + 1$

h) VÁ PARA c

Comentários:

a)  $k$  é o contador de iterações

- e) Este passo corresponde a resolver o sistema de equações lineares descrito em (III.25).

### III.2.2 Tratamento das Restrições de Desigualdade [4], [13] e [14]

Quando no problema original estão presentes restrições de desigualdade como em (III.1), surge um problema combinatorial adicional que trata de determinar quais restrições estarão ativas na solução ótima. Neste caso, existem basicamente dois métodos alternativos para se formular o subproblema quadrático [13] e [14].

- Formulação IQP (*Inequality Constrained Quadratic Programming*)

$$\text{Min } \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{p}^t \mathbf{H}^k \mathbf{p} + (\nabla f^k - \nabla g^k(\mathbf{x}^k)^t \lambda^k)^t \mathbf{p} \right\} \quad (\text{III.27})$$

$$\text{s.a. } \mathbf{J}^k \mathbf{p} = -\mathbf{g}^k$$

$$\mathbf{B}^k \mathbf{p} \geq -\mathbf{h}^k$$

onde:  $\mathbf{J}^k = [\nabla g_1(\mathbf{x}^k), \dots, \nabla g_{m_1}(\mathbf{x}^k)]^t \quad (m_1 \times n)$

$$\mathbf{B}^k = [\nabla h_1(\mathbf{x}^k), \dots, \nabla h_{m_2}(\mathbf{x}^k)]^t \quad (m_2 \times n)$$

$$\mathbf{g}^k = \mathbf{g}(\mathbf{x}^k)$$

$$\mathbf{h}^k = \mathbf{h}(\mathbf{x}^k)$$

Nesta formulação todas as restrições do problema original são linearizadas e incluídas no subproblema quadrático. A solução do problema quadrático identifica o conjunto ativo correto para a iteração  $k$  e este conjunto é utilizado como um preditor do conjunto ativo do problema original. Este procedimento é válido pois em uma vizinhança do ponto ótimo os dois conjuntos ativos coincidem [15]. O subproblema quadrático (III.27) pode ser resolvido utilizando uma estratégia de conjunto ativo [4].

- Formulação EQP (*Equality Constrained Quadratic Programming*)

$$\text{Min } \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{p}^t \mathbf{H}^k \mathbf{p} + (\nabla f^k - \nabla g^{(k)t} \lambda^k)^t \mathbf{p} \right\} \quad (\text{III.28})$$

$$\text{s.a. } \mathbf{J}^k \mathbf{p} = -\mathbf{g}^k$$

$$\hat{\mathbf{B}}^k \mathbf{p} = -\hat{\mathbf{h}}^k$$

$$\text{onde: } \hat{\mathbf{B}}^k = [\nabla h_j^k]^t \quad \text{tal que } j \in I^k$$

$$\hat{\mathbf{h}}^k = [h_j^k]^t \quad \text{tal que } j \in I^k$$

Nesta formulação se tem uma predição do conjunto ativo  $I^k$  que é atualizada a cada iteração e o subproblema quadrático é definido apenas em função das restrições de igualdade ativas em  $k$ . Neste caso, a resolução do subproblema quadrático (III.28) consiste apenas da solução de um sistema de equações lineares. Um aspecto crítico desta formulação é a atualização do conjunto ativo a cada iteração. Uma estratégia possível é incluir no conjunto ativo todas as restrições de desigualdade violadas na iteração  $k$  e remover do conjunto aquelas cujos multiplicadores de Lagrange forem negativos. Esta estratégia assume que os multiplicadores do subproblema quadrático são uma boa estimativa dos multiplicadores do problema original no ponto ótimo. Isto pode não ser uma boa aproximação se  $\mathbf{x}^k$  estiver longe de  $\mathbf{x}^*$ .

Um outro aspecto importante na implementação do algoritmo é estabelecer que procedimentos devem ser adotados se um subproblema quadrático for inconsistente ou não tiver solução ótima [13].

Deve-se ressaltar que a formulação que será utilizada durante todo o desenvolvimento do trabalho é a formulação EQP. Sendo assim, torna-se desnecessário formular explicitamente o subproblema quadrático a cada iteração. Podemos alternativamente resolver um sistema de equações lineares similar a (III.20), alterando o problema original (III.1) a cada iteração de forma a incluir as restrições de desigualdade ativas na iteração  $k$ .

### III.2.2.1 Aspectos de Convergência [13], [16] e [17]

Os aspectos de convergência do algoritmo podem ser abordados em termos de convergência global e convergência local. A análise da convergência global estabelece sobre que hipóteses a sequência de soluções gerada pelo algoritmo converge para a solução ótima do problema. Com relação à convergência local se estabelece a velocidade de convergência da sequência de soluções para um dado ponto inicial suficientemente próximo da solução ótima [13]. Ou seja, em que condições a convergência é superlinear, quadrática, etc. Uma discussão desta análise pode ser vista em [16]. A seguir será feita uma breve análise da convergência local.

Para o estudo da convergência local assume-se que a sequência gerada pelo algoritmo ( $\mathbf{x}^k$ ,  $k = 1, \dots$ ) converge para um ponto de Karush–Kuhn–Tucker do problema original, que as condições suficientes de segunda ordem são satisfeitas e os gradientes das restrições são linearmente independentes. Assume-se também que o conjunto ativo do subproblema quadrático coincide com o conjunto ativo do problema original a partir de determinada iteração [13].

Se as condições acima são satisfeitas e a matriz  $\mathbf{H}$  do subproblema quadrático é igual ao Hessiano do Lagrangeano com as estimativas dos multiplicadores de Lagrange da  $k$ -ésima iteração do subproblema quadrático (método de Newton) e o parâmetro de busca linear  $\alpha^k$  é unitário (com isto,  $\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{p}^k$ ) pode-se demonstrar [17] que a sequência gerada pelo algoritmo converge para  $\mathbf{x}^*$  e que a convergência é quadrática, ou seja:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{x}^k + \mathbf{p}^k - \mathbf{x}^*\|}{\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\|^2} = \text{cte} \quad (\text{III.29})$$

### III.2.2.2 Função de mérito [13] e [15]

As condições que fundamentaram o algoritmo descrito no item III.2.1 são válidas somente em uma vizinhança do ponto ótimo. Sendo assim a validade do subproblema (III.26) é discutível se  $\mathbf{x}^k$  estiver longe de  $\mathbf{x}^*$ . Uma maneira de assegurar a convergência global do algoritmo é garantir que  $\mathbf{x}^{k+1}$  seja uma solução melhor que  $\mathbf{x}^k$ . Isto pode ser feito utilizando o vetor  $\mathbf{p}$  (solução do subproblema quadrático) como uma direção de busca. Desta forma o ponto  $\mathbf{x}^{k+1}$  seria definido como:



$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{p}^k \quad (\text{III.30})$$

onde  $\alpha^k$  é o comprimento do passo, escolhido de forma a garantir um "decréscimo razoável" no valor de uma função de mérito que meça o progresso do algoritmo em direção a  $\mathbf{x}^*$ . O objetivo da função de mérito é garantir a convergência global do algoritmo.

A função de mérito deve satisfazer alguns critérios [4]:

- Deve prover uma "boa" medida do progresso do algoritmo em direção ao ponto ótimo;
- O cálculo do valor da função de mérito não deve ser computacionalmente caro;
- É desejável que a função de mérito não retarde a taxa de convergência dos subproblemas quadráticos. (Ex: Se  $\mathbf{H}$  for a Hessiana do Lagrangeano (Método de Newton) é importante que a função de mérito faça com que o parâmetro  $\alpha^k$  convirja rapidamente para 1 de forma que a convergência quadrática não seja perdida);
- A função de mérito deve compatibilizar da melhor forma possível o conflito que normalmente existe entre reduzir a função objetivo e satisfazer as restrições.

Uma possível função de mérito seria, [13] e [15]:

$$\psi(\mathbf{x}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}) = f(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m_1} \beta_i |g_i(\mathbf{x})| + \sum_{j=1}^{m_2} \gamma_j \max(0, -h_j(\mathbf{x})) \quad (\text{III.31})$$

onde:  $\beta_i = 1, \dots, m_1$  e  $\gamma_j = 1, \dots, m_2$  são parâmetros positivos e constantes a menos de alguns ajustes automáticos que podem ocorrer nas primeiras iterações para se obter valores adequados de  $\psi$ .

O valor de  $\alpha^k$  é calculado como sendo o primeiro elemento de uma sequência monotonicamente decrescente  $\{\alpha_1^k, \alpha_2^k, \alpha_3^k, \dots\}$ , que implique na condição:

$$\psi(\mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{p}^k, \beta, \gamma) < \psi(\mathbf{x}^k, \beta, \gamma) \quad (\text{III.32})$$

Com o valor de  $\alpha^k$  definido,  $\mathbf{x}^{k+1}$  é calculado como:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \alpha^k \mathbf{p}^k \quad (\text{III.33})$$

### III.2.2.3 Custo Reduzido

Suponhamos que em uma iteração  $k$  qualquer a restrição de desigualdade  $h_j$  está violada, e portanto deve ser incluída no conjunto ativo.

Sem perda de generalidade suponha ainda que  $h_j$  é do tipo  $x_m - c \geq 0$ .

O problema a ser resolvido é dado por:

$$\begin{aligned} \min f(\mathbf{x}) \\ \text{s.a.} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \\ x_m = c \end{aligned} \quad (\text{III.34})$$

Se a restrição  $x_m = c$  for explicitamente incluída no conjunto de restrições, podemos definir a seguinte função Lagrangeana associada a (III.34):

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) - \mu_j (x_m - c) \quad (\text{III.35})$$

As condições de otimalidade de 1a. ordem são:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{x}^*) &= \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*) + \mu_j \mathbf{e}_m \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{III.36})$$

$$x_m = c$$

onde o vetor  $\mathbf{e}_m$  é um vetor  $(n \times 1)$  com todas as componentes nulas exceto a componente  $m$  que é unitária.

Neste caso, como a restrição  $x_m = c$  impõe um limite inferior a variável  $x_m$ , a restrição deve ser mantida enquanto o multiplicador  $\mu_j$  for positivo.

Se por outro lado a restrição não for explicitamente incluída no problema, ainda assim é possível manter a restrição ativa ( $x_m = c$ ). Uma maneira seria alterar a linha da matriz  $\mathbf{W}$  associada à variável  $x_m$  em (III.20) de forma que a diagonal seja unitária e os elementos fora da diagonal seja nulos (ou alternativamente colocando um *big-number* na diagonal). Além disto é necessário anular o gradiente em relação a  $x_m$  ( $\partial L / \partial x_m = 0$ ) no lado direito de (III.20) e fazer explicitamente  $x_m = c$ . Desta forma, o valor de  $\Delta x_m$  ao final da iteração  $k$  é nulo e portanto o valor  $x_m = c$  é mantido.

A vantagem deste método é não alterar a estrutura original da matriz  $\mathbf{W}$ , que deveria ser acrescida de uma linha e uma coluna, associadas a variável  $\mu_j$ , caso se desejasse representar explicitamente a restrição.

Por outro lado, sem o multiplicador  $\mu_j$  não temos, em princípio, um critério para decidir se a restrição  $x_m = c$  deve ou não ser mantida na iteração  $k+1$ .

Entretanto, de (III.36) vemos que:

$$\mu_j^* = \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_m} - \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i^* \frac{\partial g_i(\mathbf{x}^*)}{\partial x_m} \quad (\text{III.37})$$

$$\text{Seja } \gamma^{k+1} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^{k+1})}{\partial x_m} - \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i^{k+1} \frac{\partial g_i(\mathbf{x}^{k+1})}{\partial x_m} \quad (\text{III.38})$$

Podemos utilizar  $\gamma^{k+1}$  como um preditor de  $\mu_j^*$  e decidir se a restrição ( $x_m = c$ ) deve ou não ser mantida ao longo da iteração  $k+1$ . Ou seja, se  $\gamma^{k+1}$  é positivo a restrição deve ser mantida.

O parâmetro  $\gamma^{k+1}$  é chamado de custo reduzido da restrição  $h_j$  na iteração  $k+1$ .

Pode-se notar de (III.38) que:

$$\gamma^{k+1} = \partial L(\mathbf{x}, \lambda)^{k+1} / \partial x_m \quad (\text{III.39})$$

Ou seja, o custo reduzido nada mais é do que a derivada do Lagrangeano em relação a variável associada à restrição.

### III.2.2.4 Função de Penalidade Quadrática [4]

Uma forma alternativa de se ativar uma restrição de desigualdade, seria não incluí-la no conjunto original de restrições de igualdade é, em contrapartida, incluir na função objetivo original uma função de penalidade quadrática associada à restrição.

Seja  $h_j(x) \geq 0$  ( $h_j(x) = x_m - c$ ) uma restrição de desigualdade do problema original. A função de penalidade associada é dada por:

$$\phi(x) = \frac{1}{2} a(x_m - b)^2 \quad (\text{III.40})$$

onde  $a$  é o custo da penalidade

$b$  é o valor base da penalidade (inicialmente  $b = c$ ).

A figura (III.2) apresenta um esboço da função de penalidade.

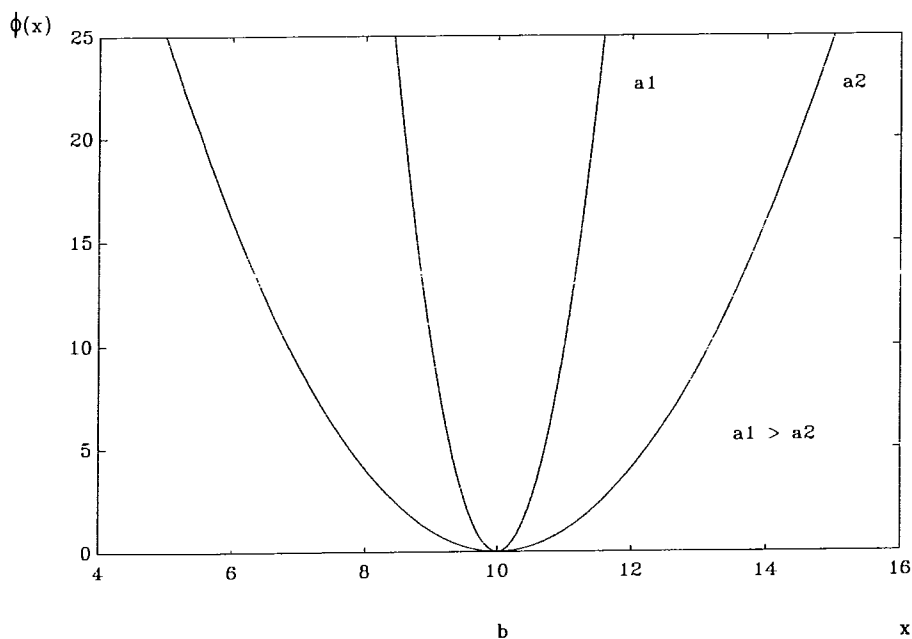


Figura III.2 – Função de penalidade quadrática

A análise da figura (III.2) mostra que o valor da função de penalidade  $\phi(x)$  aumenta quadraticamente a medida que  $x$  se afasta do valor base  $b$ , para um dado valor do custo  $a$ .

Desta forma, os valores de  $b$  e  $a$  podem ser ajustados com o objetivo de manter  $h_j$  no valor desejado (ou seja  $x_m = c$ ).

Seja o problema descrito em (III.34), aqui reescrito.

$$\min f(\mathbf{x})$$

$$\text{s.a.} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0 \quad (\text{III.41})$$

$$x_m = c$$

O problema equivalente utilizando função de penalidade seria:

$$\min f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} a(x_m - b)^2 \quad (\text{III.42})$$

$$\text{s.a.} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = 0$$

onde:  $b$  é o valor base da penalidade (inicialmente  $b = c$ ).

A função Lagrangeana associada a (III.42) é:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} a(x_m - b)^2 - \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) \quad (\text{III.43})$$

As condições de otimalidade de 1a. ordem são:

$$-a(x_m - b) \mathbf{e}_m = \nabla f(\mathbf{x}^*) - \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i^* \nabla \mathbf{g}_i(\mathbf{x}^*) \quad (\text{III.44})$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = 0$$

onde  $\mathbf{e}_m$  é um vetor ( $n \times 1$ ) com todas as componentes nulas exceto a componente  $m$  que é unitária.

Explicitando (III.44) para a variável  $x_m$  temos:

$$-a(x_m^* - b) = \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_m} - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathbf{x}^*)}{\partial x_m} \quad (\text{III.45})$$

Se em  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$  tivermos  $x_m = c$ , comparando (III.45) com (III.37), vemos que:

$$\mu_j^* = -a(x_m^* - b) = -\partial\phi(x_m^*) / \partial x_m \quad (\text{III.46})$$

ou seja, o termo  $-a(x_m^* - b)$  (simétrico do gradiente da função de penalidade  $\phi(x_m)$  em  $\mathbf{x}^*$ ) é igual ao multiplicador de Lagrange associado à restrição  $h_j$  no ponto  $\mathbf{x}^*$ , caso ela tivesse sido explicitamente incluída no conjunto de restrições.

Da mesma forma que em (III.38) podemos calcular  $\gamma^{k+1}$  como sendo:

$$\gamma^{k+1} = -a(x_m^{k+1} - b) \quad (\text{III.47})$$

ou

$$\gamma^{k+1} = \frac{\partial f(\mathbf{x}^{k+1})}{\partial x_m} - \sum_{i=1}^{m-1} \lambda_i^{k+1} \frac{\partial g_i(\mathbf{x}^{k+1})}{\partial x_m} \quad (\text{III.48})$$

De maneira semelhante ao que foi feito no item III.2.2.3 podemos utilizar (III.47) ou (III.48) como um preditor de  $\mu_j^*$  e decidir se a restrição ( $x_m = c$ ) deve ou não ser mantida ao longo da iteração  $k+1$ . Mais uma vez, se  $\gamma^{k+1}$  for positivo a restrição deve ser mantida.

No capítulo IV serão discutidas outras aplicações importantes da função de penalidade quadrática na solução do problema de fluxo de potência ótimo.

### III.2.2.5 Estratégia de Conjunto Ativo [4] e [13]

A discussão sobre a estratégia de conjunto ativo será colocada somente em termos da formulação EQP uma vez que foi esta a formulação adotada do desenvolvimento deste trabalho.

Nesta formulação, a cada iteração é necessário atualizar a predição do conjunto ativo antes que o subproblema quadrático possa ser formulado. Uma estratégia típica seria examinar o conjunto de restrições de desigualdade em  $\mathbf{x}^k$  com respeito às condições de otimalidade que devem ser satisfeitas pelas restrições do conjunto ativo em  $\mathbf{x}^*$ . Neste caso, uma restrição inativa em  $\mathbf{x}^{k-1}$  que estivesse violada em  $\mathbf{x}^k$  seria incorporada ao conjunto ativo. Da mesma forma uma restrição ativa em  $\mathbf{x}^k$  que tivesse o multiplicador  $\mu^k$  ou o custo reduzido  $\gamma^k$  negativo deveria ser removida do conjunto ativo. Convém lembrar, entretanto, que no uso de  $\mu^k$  ou  $\gamma^k$  como critério para remover uma restrição do conjunto ativo está implícito que  $\mu^k$  ou  $\gamma^k$  são uma boa estimativa de  $\mu^*$ , o que normalmente não é verdade se  $\mathbf{x}^k$  estiver longe de  $\mathbf{x}^*$ . Um outro detalhe é que a incorporação de todas as variáveis  $\mathbf{x}^k$  violadas, no conjunto ativo, pode ser desnecessário no caso de variáveis muito correlacionadas.

Uma estratégia mais conservadora seria incluir no conjunto a restrição mais violada e remover a restrição com  $\mu^k$  ou  $\gamma^k$  mais negativo. Entretanto, isto leva, normalmente, a um número excessivo e desnecessário de iterações para que o conjunto ativo seja identificado corretamente.

Outra estratégia possível é basear a decisão no comportamento de uma função de mérito. Ressalte-se que neste caso, a função de mérito deve refletir todas as restrições de desigualdade apesar da formulação do problema quadrático considerar apenas as restrições ativas em  $\mathbf{x}^k$  [4].

Uma estratégia muito eficiente é utilizar iterações exploratórias com o objetivo de "experimental" vários conjuntos ativos para um mesmo estado  $\mathbf{x}^k$ . Nesta estratégia, restrições são adicionadas e removidas do conjunto até que uma predição "razoável" tenha sido obtida. Normalmente esta estratégia é implantada ao final da solução do subproblema quadrático, antes da atualização das variáveis para a iteração  $k+1$ . Particularidades da estratégia de conjunto ativo adotada neste trabalho serão discutidas com mais detalhes no capítulo IV.

Maiores detalhes sobre os assuntos discutidos neste capítulo podem ser encontrados em [4], [5], [12], [13], [14], [15], [16] e [17].

## CAPÍTULO IV

### FLUXO DE POTÊNCIA ÓTIMO (FPO)

Inicialmente façamos um breve histórico do que foi apresentado até aqui. No capítulo II foi abordado o problema geral de fluxo de potência. Foram descritas as variáveis, as restrições, os controles e os métodos utilizados na solução de um problema de fluxo de potência convencional. No capítulo III foi descrita uma metodologia para solucionar problemas de programação não linear utilizando a técnica de programação quadrática sequencial.

Neste capítulo o Fluxo de Potência Ótimo (FPO) será formulado como um problema de programação não linear, serão consideradas as modelagens específicas ao problema de fluxo de potência, descritas no capítulo II, e a solução será obtida a partir da metodologia descrita no capítulo III.

#### IV.1 Definição do Problema

Em sistemas de energia elétrica qualquer problema em regime permanente que envolva o ajuste de grandezas controláveis com o objetivo de se obter uma condição operativa desejada, pode ser formulado como um problema de FPO.

A solução do problema de FPO poderia ser vista, de uma maneira bem mais simples, como sendo a resolução de um problema geral de fluxo de potência pelo método de tentativa e erro, onde para cada tentativa ajusta-se o conjunto de grandezas controláveis até que a condição operativa desejada seja finalmente obtida. Desta forma, um programa de FPO poderia ser visto como um programa de fluxo de potência convencional onde a "estratégia" de ajuste das grandezas controláveis é parte integrante do algoritmo de solução.

Problemas de FPO são problemas de programação não linear de grande porte, e podem ser definidos pela especificação dos seguintes atributos:

- Função Objetivo
- Variáveis de Controle
- Variáveis Dependentes



- Restrições de Igualdade
- Restrições de Desigualdade

A formulação matemática, já apresentada no capítulo III é aqui reescrita.

$$\begin{aligned}
 &\text{Min} \quad f(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \\
 &\text{s.a.} \quad \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = 0 \\
 &\quad \quad \mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{z}) \geq 0
 \end{aligned} \tag{IV.1}$$

onde:  $\mathbf{u}$  = conjunto de variáveis de controle

$\mathbf{z}$  = conjunto de variáveis dependentes

$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{z})$  = conjunto de restrições de igualdade

$\mathbf{h}(\mathbf{u}, \mathbf{z})$  = conjunto de restrições de desigualdade

A seguir será analisado cada um dos atributos que definem o problema de FPO.

#### IV.1.1 Função Objetivo

A função objetivo é uma função escalar das variáveis do problema, e serve como uma medida da condição operativa desejada. Esta condição operativa pode ser, num caso extremo, apenas a obtenção de uma solução viável; ou seja, uma solução em que nenhuma das restrições é violada. Neste caso a função objetivo não existe e o FPO se assemelha a um fluxo de potência convencional. O objetivo de um programa de FPO é estabelecer os controles e determinar o estado do sistema elétrico que minimiza o valor da função objetivo sujeita às restrições impostas ao problema.

A definição da função objetivo depende basicamente das características do sistema elétrico e do tipo de estudo que se deseja realizar.

Num estudo de fluxo de potência, que utilize um programa de fluxo de potência convencional como ferramenta, apesar de não existir uma função objetivo explícita, "implicitamente" a função de minimização de perdas é normalmente considerada. Usualmente, quando a solução do fluxo de potência convencional apresenta um nível de perdas desnecessariamente alto, esta normalmente é desprezada e novos ajustes são propostos com o objetivo de diminuir as perdas do sistema. No que se refere à minimização das perdas a solução obtida por este processo é aproximada uma vez que o programa não "conhece" a estratégia de ajuste dos controles que leva à minimização ótima das perdas. Esta estratégia deve ser concebida e implementada pelo usuário alterando o valor das variáveis de controle e dos dados de entrada a cada tentativa.

Já no caso de se utilizar um programa de FPO, todas as variáveis de controle que tem influência sobre o valor da função objetivo são ajustadas "automaticamente" pelo programa de modo a minimizá-la. A importância da função objetivo de minimização de perdas pode ser constatada pelo fato de que para muitos sistemas elétricos, o melhor ponto de operação é aquele em que a perda é mínima. A função de minimização de perdas poderia ser considerada como a função objetivo padrão de um programa geral de FPO, muito embora diversas outras funções possam ser concebidas para aplicações específicas.

Uma outra função objetivo, matematicamente muito semelhante com a minimização de perdas, é a minimização do custo de geração de potência ativa. Para esta função objetivo é necessário que se forneçam dados que definam o custo de geração como uma função da potência ativa gerada por cada gerador controlador.

Minimização de perdas e minimização do custo de geração de potência ativa são funções objetivo não separáveis. Matematicamente, isto significa que a matriz hessiana do FPO possui elementos não nulos fora da diagonal. Na prática isto significa que o problema tem características de não linearidade muito acentuadas, o que faz com que os métodos de segunda ordem sejam mais eficientes na solução do problema, quando comparados com os métodos de primeira ordem. Teoricamente todo problema de FPO deveria ser formulado com funções objetivo não separáveis. Entretanto estes problemas são mais difíceis de resolver do que aqueles com funções objetivo separáveis. Estas funções podem ser expressas como a soma de funções individuais de cada variável de controle. Com a finalidade de

obter soluções rápidas para aplicações em tempo real alguns problemas de FPO tem sido formulados com funções objetivo separáveis. No item IV.3.1 será descrita a modelagem das funções objetivo implementadas neste trabalho.

#### IV.1.2 Variáveis de Controle

As variáveis de controle em um problema de FPO são grandezas cujos valores podem ser ajustados diretamente com a finalidade de minimizar a função objetivo.

Alguns exemplos de variáveis de controle são:

- Potência Ativa Gerada
- Potência Reativa Gerada
- Intercâmbio entre Áreas
- Tap de Transformador
- Ângulo de Defasamento
- Módulo da Tensão em Barras de Geração
- Susceptância *Shunt*
- Potência Reativa Alocada
- Fator de Rejeição de Carga

Os problemas de FPO podem ser formulados de forma que as grandezas potência ativa gerada e potência reativa gerada possam ser tratadas como variáveis de controle ou como funções escalares, sendo que neste caso o valor da função é que é controlável. Existe também a possibilidade de se utilizar o módulo da tensão da

barra de geração ou a potência reativa gerada como controle. A escolha depende, basicamente, do algoritmo de solução empregado e da função objetivo utilizada. Neste trabalho, todas as grandezas de controle serão consideradas variáveis do problema. As variáveis de controle potência reativa alocada/susceptância *shunt* e fator de rejeição de carga, são empregadas em aplicações específicas do FPO tais como: planejamento da expansão ótima de fontes de potência reativa (as duas primeiras) e estudos de confiabilidade (a última).

Os controles em um programa de FPO são globais e independentes ou seja, todas as variáveis de controle são ajustadas de forma a minimizar globalmente a função objetivo satisfazendo as restrições impostas ao problema. Isto contrasta com a natureza local e dependente dos controles de um programa de fluxo de potência convencional. Neste último poderíamos ter, exemplificando, o tap de um transformador controlando a tensão de uma barra. Neste caso, o tap é uma grandeza dependente pois depende do valor da tensão que controla. Em problemas de FPO, controles locais desta natureza podem também ser representados, mas neste caso o tap passaria a ser uma variável dependente.

Alguns controles em sistemas de energia elétrica são de natureza discreta ao invés de contínua. Exemplos clássicos são os tap's dos transformadores e a susceptância dos equipamentos *shunt*. Uma solução rigorosa de problemas de FPO com variáveis discretas requer que a modelagem seja feita através de um problema de programação mista. Entretanto, esta abordagem se torna impraticável para problemas de grande porte. Na prática, tanto os algoritmos de FPO como os de fluxo de potência convencional ignoram a discretização dos controles ou a consideram de uma forma aproximada. Entretanto, ignorar a natureza discreta de alguns controles pode ser inconsistente com o critério de precisão adotado para a solução do problema de FPO. Obviamente, esta é uma questão ainda não resolvida de maneira satisfatória.

#### IV.1.3 Variáveis Dependentes

As variáveis de um problema de FPO que não são controláveis são classificadas como variáveis dependentes. Estas são as variáveis que estão livres, entre limites, para assumir valores que solucionam o problema. O estado do sistema elétrico fica perfeitamente determinado pelo conhecimento das variáveis de controle e dependentes. As principais variáveis dependentes são:

- Ângulo de Fase das Tensões
- Módulo da Tensão em Barras de Carga
- Fluxo de Potência em Linhas de Transmissão e Transformadores

#### IV.1.4 Restrições de Igualdade

As restrições de igualdade de um problema de FPO são basicamente as mesmas do problema geral de fluxo de potência abordado no capítulo II. Ou seja, as equações de fluxo de potência associadas a cada barra do sistema devem ser incondicionalmente satisfeitas para que a solução do problema seja viável.

Em problemas de FPO o estabelecimento de outras restrições de igualdade pode ser fazer necessário. O intercâmbio de potência ativa entre áreas é um exemplo. Outras vezes uma restrição adicional deve ser incluída de forma a impor uma condição operativa do tipo: a soma de uma ou mais gerações e/ou fluxos deve ser igual a um valor programado. O termo restrição de igualdade é utilizado para designar qualquer equação que deva ser satisfeita exatamente e de forma incondicional no ponto de solução, em contraste com as restrições de desigualdade que estabelecem limites inferiores e superiores aos valores das variáveis

As características das restrições de igualdade tem grande influência na definição do problema de FPO. Normalmente o sistema de equações é de dimensão elevada porém muito esparso e com propriedades que facilitam a solução numérica. Uma propriedade muito importante é a "superesparidade" que faz com que os cálculos das derivadas de segunda ordem das equações de fluxo sejam obtidos facilmente. Esta propriedade vai se deteriorando, em parte, a medida que novas restrições de igualdade são incorporadas com o objetivo de retratar condições operativas específicas.

#### IV.1.5 Restrições de Desigualdade

Em problemas de FPO todas as variáveis de controle e muitas das variáveis dependentes possuem limites inferior e superior. Além disto, quando os controles são representados por funções escalares, estas também possuem limites.

Alguns tipos de restrições de desigualdade são:

- Potência Ativa Gerada
- Potência Reativa Gerada
- Módulo da Tensão
- Tap de Transformador
- Ângulo de Defasamento
- Fluxo de Potência em Linhas de Transmissão e Transformadores
- Susceptância *Shunt*
- Potência Reativa Alocada
- Fator de Rejeição de Carga

As restrições de desigualdade associadas aos fluxos de potência podem ser expressas em termos da potência ativa, potência aparente ou corrente.

Além das restrições listadas acima, existem outras que não são estabelecidas na definição original do FPO, mas que podem vir a ser imprescindíveis ao longo do processo de solução. Estas restrições estão associadas a um problema específico de FPO que é o Fluxo de Potência Ótimo e Seguro. Neste caso, uma lista das contingências (desligamentos) mais severos e/ou mais prováveis de ocorrer são incorporados ao problema, e a solução ótima deve satisfazer além das restrições originais as restrições que porventura venham a ser impostas para eliminar as violações provocadas pela simulação das contingências. Os limites associados a estas restrições podem ser tanto os limites operativos para condição normal de operação como os limites operativos de emergência.

De uma maneira geral, os limites associados às restrições de desigualdade podem ser de dois tipos. Um deles é o limite físico do equipamento, que não pode

ser violado em nenhuma hipótese. O outro é o limite operativo. Este limite é imposto com o objetivo de melhorar a segurança do sistema e pode ser alterado ou relaxado em algumas situações especiais tais como: condição de emergência, ou ocorrência de inviabilidades.

Muitas aplicações do FPO requerem um tratamento especial para as inviabilidades. Por exemplo, pode ser impossível impedir a violação de alguns limites operativos e ainda assim o sistema elétrico operar de maneira satisfatória, se forem consideradas as condições operativas a que foi imposto. Nestes casos, o programa de FPO deve ter meios de identificar as inviabilidades operativas e reduzir/distribuir os efeitos destas inviabilidades da melhor forma possível. Sob estas condições, pode ser necessário relaxar alguns limites operativos com o objetivo de obter uma solução "tecnicamente" viável.

Uma diferença importante entre os programas de FPO e os programas de fluxo de potência convencional é a maneira como são tratadas as restrições de desigualdade. Como já foi descrito no capítulo II o número de restrições de desigualdade que podem ser diretamente impostas ("*enforced*") por um fluxo de potência convencional é muito limitado. Algumas restrições importantes tais como: tensão em barras de carga e fluxo de potência em linhas de transmissão e transformadores só podem ser impostas por um processo de tentativa e erro. Um outro problema é que como as restrições de desigualdade são estabelecidas de uma forma arbitrária, várias soluções podem ser obtidas para um mesmo problema. A solução particular que é obtida pelo programa é função da ordem dos dados de entrada e da forma como esta ordem afeta o algoritmo de solução. Diferentes programas de fluxo de potência convencional podem dar soluções diferentes para um mesmo problema, ou um mesmo programa pode dar soluções diferentes para um mesmo problema em função da maneira como são ordenados os dados de entrada.

Em contraposição, um programa de FPO é capaz de impor todas as restrições de desigualdade necessárias à solução do problema num único passo. Além disto, como existe uma "estratégia" muito bem definida para que estas restrições sejam impostas (minimizar a função objetivo), a solução ótima é via de regra sempre única, independentemente da ordem dos dados de entrada e de peculiaridades da implementação do algoritmo.

## IV.2 Características de um Problema de FPO [3]

Neste item serão descritas as características e os requisitos básicos de um programa de FPO, além de um breve histórico do desenvolvimento dos algoritmos de FPO.

### IV.2.1 Dimensão do Problema

O problema de FPO é um problema de otimização de grande porte. A principal medida da sua dimensão é o número de barras do sistema elétrico, que está diretamente relacionado com o número de restrições de igualdade do problema. A precisão da solução obtida por um algoritmo de FPO se degrada bem mais do que a solução obtida por algoritmo de fluxo de potência convencional quando se equivalenta parcialmente a rede elétrica. Isto ocorre mesmo que apenas uma parte da rede seja controlável. Desta forma, faz-se necessário que os algoritmos de FPO sejam capazes de resolver problemas de grande dimensão.

Uma segunda medida da dimensão do problema é o número de variáveis de controle. Em geral, quanto maior for o número de variáveis de controle mais difícil é o problema. Entretanto o grau de dificuldade é muito dependente do tipo de algoritmo empregado. É necessário que os algoritmos de FPO sejam capazes de acomodar um grande número de variáveis de controle de uma forma eficiente.

A terceira medida da dimensão do problema é o número de restrições de desigualdade. O número e o tipo destas restrições tem um grande impacto na solução de problemas de FPO. Em primeiro lugar as variáveis associadas a estas restrições devem ser monitoradas periodicamente. Segundo, o conjunto ativo (conjunto de restrições de desigualdade que é satisfeito na igualdade num dado momento da solução do problema) deve ser atualizado ao longo do processo de solução. Decidir que atualizações devem ser realizadas e refletir seus efeitos no processo de solução é uma tarefa complicada. Em geral, o número de restrições do conjunto ativo na solução ótima é pequeno se comparado com total de restrições de desigualdade. Isto porque normalmente os sistemas elétricos operam com apenas uma pequena parcela dos equipamentos no limite. Entretanto, o número de alterações no conjunto ativo pode ser grande se comparado com a sua dimensão final. Por último, deve-se ressaltar que o impacto das restrições de desigualdade na solução do problema é muito dependente do algoritmo empregado.



## IV.2.2 Aplicações do FPO

Deve-se fazer uma distinção entre o que seja um problema e uma aplicação de FPO [3]. O problema de FPO já foi definido no item IV.1. Uma aplicação de FPO é via de regra um estudo particular que deve ser realizado, tendo como meta básica o estudo da condição operativa do sistema elétrico em regime permanente, e que para sua solução requer a solução de um ou vários problemas de FPO.

As aplicações do FPO são muito vastas. Abaixo estão listadas algumas aplicações típicas.

- Despacho Econômico e Seguro
- Planejamento da Expansão do Sistema
- Planejamento da Operação do Sistema
- Alocação Ótima de Fontes de Potência Reativa
- Estudos de Rejeição de Carga
- Despacho em Tempo Real
- Despacho em Emergência
- Restauração do Sistema
- Minimização de Perdas
- Estudos de Confiabilidade
- Etc.

## IV.2.3 Função Objetivo

A função objetivo de um problema geral de FPO é uma função escalar não linear e não separável. Como já foi dito, uma função não separável é aquela em que existem elementos não nulos fora da diagonal da matriz hessiana associada à

função de Lagrange do problema. Na prática, qualquer função objetivo de um problema de FPO que inclua as perdas do sistema direta ou indiretamente é uma função não separável. Nestes casos, a única maneira de considerar uma função separável é desprezar as perdas ou aproximá-las de alguma forma. No escopo deste trabalho serão consideradas apenas funções objetivo não separáveis.

#### IV.2.4 Unicidade da Solução

Se a região viável for convexa e a função objetivo estritamente convexa, o problema terá um único ponto de mínimo. Se este espaço for não convexo poderão existir vários pontos de mínimo locais. Neste caso, pode tornar-se difícil senão impossível determinar o mínimo global da função. Entretanto, se o problema não tiver solução única, ainda assim será possível modificá-lo de alguma forma de modo que passe a ter solução única. Isto seria um compromisso entre a função objetivo original (idealizada) e a função que deve ser utilizada para solucionar o problema [3].

Experiências recentes [3] sugerem que, normalmente, as soluções do problema de FPO são únicas. Entretanto, estes resultados não podem ser tomados como uma conclusão geral, pois são dependentes dos problemas específicos que foram estudados. Na realidade não existe uma prova matemática geral de que os problemas de FPO possuem soluções únicas.

Pode-se imaginar que se existem duas ou mais soluções, estas são tecnicamente iguais. Isto não é verdade. Mesmo que duas soluções tenham o mesmo valor para a função objetivo ainda assim podem ter valores muito diferentes para as variáveis de controle. Este comportamento não pode ser tolerado num Centro de Supervisão e Controle, por exemplo, onde seria necessário ajustar os controles para que estes acompanhassem as idiosincrasias do algoritmo utilizado ou as consequências de uma má definição do problema. Em resumo, algoritmos de FPO que não são capazes de obter soluções unimodais, normalmente não são aceitáveis na prática.

#### IV.2.5 Não Linearidade e Discretização de Variáveis

As restrições de igualdade são funções não lineares. Entretanto esta não linearidade não é excessiva, e portanto aproximações lineares das funções são

precisas para pequenas perturbações enquanto que aproximações quadráticas são bastante precisas para perturbações ainda maiores.

Como já foi mencionado, algumas variáveis do problema de FPO não podem ser ajustadas continuamente. Entretanto, os algoritmos disponíveis não conseguem resolver de uma forma eficiente o problema de programação mista que seria necessário para que a modelagem fosse correta. O procedimento que normalmente é adotado é resolver o problema utilizando variáveis contínuas e então fazer algum ajuste sub-ótimo de forma que as variáveis sejam discretizadas. Quanto maiores e irregulares forem os degraus pior será a solução sub-ótima obtida por este procedimento. Os casos típicos de variáveis discretas são os tap's dos transformadores e as susceptâncias *shunt* dos bancos de capacitor/reator. Os degraus para os tap's são normalmente pequenos, entretanto o mesmo não ocorre com os equipamentos *shunt*.

#### IV.2.6 Esparsidade e Superesparsidade

Uma característica que permite que sejam obtidas soluções práticas para problemas de FPO de grande porte é o fato de que as restrições de igualdade são extremamente esparsas. Para que o algoritmo de solução tenha sucesso é fundamental que seja capaz de explorar e preservar a esparsidade do problema.

Uma outra característica importante que aparece na solução dos problemas de FPO é a superesparsidade. Esta característica está relacionada com o fato da aproximação quadrática da função Lagrangeana (Hessiana da Função Lagrangeana), utilizada como matriz de solução do problema, preservar a esparsidade original das equações de fluxo de potência. Esta característica parece ser particular ao problema de FPO.

#### IV.2.7 Robustez do algoritmo

A robustez do algoritmo é uma medida da sua capacidade de solucionar o problema. Um algoritmo robusto é capaz de sempre encontrar a solução se ela existir e assinalar com precisão os casos em que ela não existe. A robustez não é um requisito que necessariamente é incompatível com a eficiência computacional e a precisão, outros requisitos importantes para um algoritmo de solução. Muitos

métodos de otimização necessitam de procedimentos adicionais que servem como salvaguardas que garantem a robustez do algoritmo. Estas salvaguardas devem ser consideradas como parte integrante do método.

#### IV.2.8 Tempo de Computação

Baixo tempo de computação é um requisito importante nas aplicações de FPO. Em algumas aplicações específicas este aspecto pode ser crítico. A velocidade de processamento depende basicamente de dois aspectos: do método utilizado e da qualidade da implementação. Um mesmo método pode ser implementado de diversas formas cada uma com um grau de eficiência diferente. Na verdade, o método em si e a sua implementação são aspectos inseparáveis principalmente quando são empregadas técnicas de esparsidade na solução do problema.

A eficiência da implementação de um programa de FPO é extremamente dependente da qualidade das técnicas de esparsidade utilizadas. Comparar dois métodos pelos tempos absolutos de *CPU* pode não ter muito significado a menos que eles tenham sido implementados com a mesma eficiência.

Em alguns problemas especiais, como em Sistemas de Supervisão e Controle, o tempo de processamento pode ser um aspecto crucial. Nestes casos, algumas simplificações podem ser realizadas no problema geral com objetivo de obter soluções mais rápidas. As mais comuns são [3]:

- Utilizar uma função objetivo separável aproximada ao invés da função não separável exata.
- Restringir os controles.
- Linearizar as restrições de igualdade.

Estas simplificações são um compromisso entre a exatidão da modelagem e o tempo de processamento. Este compromisso deve ser tal que os resultados obtidos sejam compatíveis com a aplicação a que se destinam.

#### IV.2.9 Precisão dos Resultados

A precisão da solução do FPO é afetada basicamente pelos erros de arredondamento e pelas tolerâncias utilizadas no processo iterativo de solução. Os erros de arredondamento podem ser reduzidos pelo uso de variáveis com dupla precisão. Entretanto, deve-se avaliar se a melhoria da precisão compensa os custos adicionais decorrentes da sua utilização. As tolerâncias devem ser ajustadas de modo a se obter o melhor compromisso entre a precisão da solução e o tempo de processamento, levando em consideração o tipo de algoritmo utilizado.

Alguns métodos apresentam convergência quadrática, outros linear ou superlinear. Um método que tenha convergência linear consegue atingir um certo grau de precisão muito rapidamente. Entretanto, se for desejável uma solução muito mais precisa, o algoritmo dispendirá um enorme tempo de processamento até que esta precisão mais elevada seja atingida. Se por outro lado o método possuir convergência quadrática, esta precisão mais elevada será atingida sem maiores dificuldades. Resumindo, a característica de convergência do método de solução é um aspecto importante na definição das tolerâncias.

#### IV.2.10 Histórico de Desenvolvimento do FPO [18]

O problema de FPO tal como se conhece hoje, surgiu como uma generalização do problema de despacho econômico clássico [19]. Foi inicialmente formulado por CARPENTIER [20], onde foi resolvido pela aplicação das condições de Karush–Kuhn–Tucker e a utilização de um método do tipo relaxação. Esta formulação inicial, além de pouco eficiente apresentou sérios problemas de convergência.

Dentre os métodos do tipo gradiente de primeira ordem destaca-se o método de DOMMEL–TINNEY [21]. Nesta implementação as variáveis são divididas em dois grupos: de controle e dependentes. As restrições de igualdade são consideradas através do gradiente reduzido, que é uma função das variáveis de controle. A cada passo é realizada uma busca unidirecional na direção do gradiente reduzido e esta direção é corrigida pela matriz hessiana aproximada. As restrições de desigualdade, nas variáveis de controle, são consideradas através do método do gradiente projetado, enquanto que as restrições associadas às variáveis dependentes são incorporadas através da introdução de funções de penalidade quadrática na função objetivo original. Este método apresenta problemas de

oscilação em torno da solução ótima, além de uma sensibilidade excessiva do processo de convergência em relação ao passo do gradiente. Outra deficiência é o tempo de processamento excessivo o que limita a aplicação do método à sistemas de pequeno e médio porte.

Um aperfeiçoamento do método DOMMEL—TINNEY surgiu com o método do gradiente reduzido generalizado (GRG) [4], [22] e [23]. Neste método, metade de todas as variáveis do problema são consideradas independentes enquanto que a outra metade é composta por variáveis dependentes. As restrições de desigualdade funcionais são transformadas em restrições de igualdade pela introdução de variáveis de folga. O conjunto de restrições de igualdade é tratado pelo método do gradiente reduzido. As variáveis de folga fazem parte do conjunto de variáveis dependentes. As restrições nas variáveis independentes são tratadas pelo método do gradiente projetado. A essência do método GRG está no tratamento das restrições das variáveis dependentes. O procedimento adotado é o seguinte: sempre que a restrição de uma variável dependente é violada, esta variável é transformada em variável independente, e, ao mesmo tempo, uma das variáveis independentes é transformada em dependente. Neste caso a variável violada é especificada no limite correspondente, como qualquer variável independente do problema. O método GRG pode ser utilizado para sistemas de grande dimensão desde que sejam incorporadas técnicas eficientes para exploração da esparsidade das matrizes. Os principais inconvenientes do método são: falta de um critério bem estabelecido para a troca entre variáveis dependentes e independentes; necessidade de inicializar o processo iterativo com uma solução viável.

Outros métodos de primeira ordem importantes, são os métodos baseados em programação linear (Simplex—Revisado—Dual) [24] e [25]. Estes métodos utilizam um modelo linear para o sistema elétrico envolvendo as variáveis  $P\Theta$ . Os problemas de despacho econômico com restrições de fluxos na rede e algumas formulações do problema de controle de segurança foram resolvidos satisfatoriamente com estes métodos. Recentemente vários melhoramentos vem sendo introduzidos nos algoritmos baseados em programação linear, com o objetivo de torná-los capazes de resolver o problema completo de FPO através de um esquema de linearizações sucessivas [26].

A utilização dos métodos de primeira ordem colocou em evidência as suas deficiências e estabeleceu a necessidade do desenvolvimento de métodos de segunda ordem que fossem capazes de resolver o problema de FPO de uma forma rápida e eficiente.

Um dos primeiros métodos de segunda ordem que obteve sucesso foi o proposto por BURCHETT e outros [27]. Este método utiliza um pacote geral de programação não linear conhecido como MINOS [28], para gerar uma sequência de subproblemas que são resolvidos pelo método do Lagrangeano Projetado. A otimização no espaço reduzido é obtida através de um algoritmo Quase–Newton. Este método é capaz de solucionar problemas de grande porte com precisão. Sua principal desvantagem é o excessivo tempo de processamento ocasionado pela utilização do pacote MINOS. Um aperfeiçoamento deste método foi proposto pelo próprio BURCHETTI e outros em [29]. Nesta implementação foi utilizada programação quadrática sequencial e uma estratégia de conjunto ativo baseada na formulação IQP. Como em [27] o subproblema quadrático é resolvido por um algoritmo Quase–Newton.

A implementação descrita neste trabalho se baseia no algoritmo proposto por SUN e outros [1], [2] e [3]. Este algoritmo utiliza o método de programação quadrática sequencial para resolver um problema equivalente ao problema proposto na equação (IV.1). Este problema equivalente trata da localização de um ponto estacionário da função Lagrangeana associada a (IV.1). A cada iteração, o sistema de equações resultante da aproximação quadrática é resolvido pelo método de Newton–Raphson. O conjunto de restrições de desigualdade é tratado através de funções de penalidade quadrática e uma predição do conjunto ativo é atualizada a cada iteração (formulação EQP). Em particular, neste trabalho foi implementada a versão desacoplada do método por considerar-se ser esta a mais promissora para utilização em sistemas reais de grande porte.

### **IV.3 Modelagem do Problema de FPO**

Como já foi dito, o problema de FPO é modelado através de um problema de programação não linear. Neste item serão descritos os modelos específicos para a função objetivo e para o conjunto de restrições.

#### **IV.3.1 Modelagem da Função Objetivo**

As funções objetivo são modeladas por funções escalares lineares ou não lineares. O modelo matemático e as respectivas derivadas das funções objetivo implementadas neste trabalho estão descritas no apêndice C. Deve-se ressaltar

que estes modelos são gerais. Para aplicações específicas podem ser necessários modelos mais elaborados. A seguir é realizada uma descrição sumária destes modelos.

- **Mínimo Custo de Geração de Potência Ativa** – Neste caso define-se uma função custo (quadrática, linear, etc) para cada gerador controlador, tal que o valor do custo esteja relacionado com o nível de potência ativa gerada. Esta função é utilizada basicamente no despacho econômico onde se deseja atender a demanda com o menor custo de geração possível. Em sistemas predominantemente térmicos as funções custo estão associadas ao gasto de combustível. Em sistemas predominantemente hidráulicos as funções custo podem estar relacionadas com o risco de *deficit* futuro.
- **Mínimo Custo de Geração de Potência Reativa** – Da mesma forma que na função anterior, define-se uma função custo quadrática para cada gerador controlador, onde este custo depende da potência reativa gerada. Esta função pode ser utilizada quando se deseja maximizar a reserva de potência reativa do sistema para que ele tenha condições de responder no caso da ocorrência de alguma perturbação.
- **Mínima Alocação de Potência Reativa** – Nesta função objetivo define-se uma função custo (quadrática ou linear) que define o mínimo de "recursos" adicionais de potência reativa que devem ser alocados no sistema de forma que a solução do problema seja viável. O conjunto de barras candidatas em que a alocação pode ser realizada é definido a priori pelo usuário. Notar que os recursos adicionais somente são alocados se as fontes de potência reativa originais do sistema (geradores, compensadores síncronos, *crec's*, *shunt's* e *tap's*) não forem suficientes para que o sistema apresente uma condição operativa viável (sem violações). Desta forma, esta função objetivo pode ser entendida como uma função que verifica a viabilidade do subproblema de potência reativa. Esta função é utilizada basicamente em estudos de planejamento para expansão ótima de fontes de potência reativa. Nestes estudos, a verificação da viabilidade do subproblema de potência reativa (realizado através desta função objetivo) é apenas um dos subproblemas do problema geral, chamado de subproblema de operação [30].



- Mínimo Corte de Carga – Nesta função objetivo define-se uma função custo (linear ou quadrática) que expressa a parcela da carga ativa total do sistema que deve ser rejeitada de forma que o problema apresente uma solução viável. Da mesma forma que na função anterior o corte de carga só é realizado nos casos em que os controles do sistema não podem ser ajustados de forma a atender a demanda sem que ocorram violações. Esta função é utilizada basicamente em estudos da condição operativa em situações de emergência (despacho em emergência) ou em estudos de confiabilidade.
- Mínima Perda – Esta função objetivo expressa as perdas de potência ativa do sistema. Isto pode ser feito de duas formas. A primeira é minimizar a potência ativa gerada por uma única fonte de potência ativa (barra *swing*). A segunda é minimizar o somatório das perdas individuais em cada linha de transmissão e, eventualmente, transformador do sistema. Esta função é de uso bastante geral podendo ser utilizada em estudos *off-line* ou em estudos operativos, em ambiente *on-line*, em Centros de Supervisão e Controle.
- Funções do Tipo Mínimo Desvio – Neste tipo de função, já existe uma condição operativa corrente ou programada e o que se deseja é que a solução ótima se desvie o mínimo possível desta condição inicial e que as violações que porventura existam sejam removidas através do ajuste dos controles. Esta condição operativa inicial pode retratar:
  - Ponto de operação do sistema: neste caso deseja-se que as violações sejam removidas com o mínimo de atuação dos controles.
  - Despacho de potência ativa: neste caso deve-se minimizar o desvio em relação ao despacho inicial de potência ativa.
  - Perfil de tensão: neste caso deseja-se preservar o perfil de tensão original do sistema.
  - Tap dos transformadores
  - Ângulo de defasamento
  - Intercâmbio programado: neste caso deseja-se minimizar o desvio em relação ao intercâmbio contratado (programado) entre as empresas.

### IV.3.2 Modelagem das Restrições de Igualdade

As restrições de igualdade são modeladas pelas equações de fluxo de potência descritas no item II.1 e no apêndice A. Algumas aplicações específicas do FPO requerem uma modelagem mais abrangente das equações de fluxo de potência. A seguir é descrita uma modelagem mais geral para as restrições de igualdade.

- Restrição de igualdade associada à equação de balanço de potência ativa da barra  $i$ .

$$PG_i - FC_i PL_i - \sum_{j \in \Omega_i} P_{ij} = 0 \quad (IV.2)$$

- Restrição de igualdade associada à equação de balanço de potência reativa da barra  $i$ .

$$QG_i + QA_i - FC_i QL_i + V_i^2 bsh_i - \sum_{j \in \Omega_i} Q_{ij} = 0 \quad (IV.3)$$

- Restrição de igualdade associada à equação de intercâmbio líquido da área de controle  $l$ .

$$IT_l - \left( \sum_R P_{ij} + \sum_S P_{ji} - \sum_T P_{ij} - \sum_U P_{ji} \right) = 0 \quad (IV.4)$$

onde:  $PG_i$  = Potência ativa gerada na barra  $i$

$FC_i$  = Fator de carga da barra  $i$  (este fator indica a parcela de carga mantida na barra)

$PL_i$  = Carga de potência ativa original da barra  $i$

$P_{ij}$  = Fluxo de potência ativa na ligação  $ij$

$QG_i$  = Potência reativa gerada na barra  $i$

$QL_i$  = Carga de potência reativa original da barra  $i$

- $QA_i$  = Potência reativa alocada na barra  $i$
- $V_i$  = Módulo da tensão da barra  $i$
- $bsh_i$  = Susceptância *shunt* da barra  $i$
- $Q_{ij}$  = Fluxo de potência reativa na ligação  $ij$
- $IT_l$  = Intercâmbio líquido da área  $l$
- $\Omega_i$  = Conjunto de barras ligadas diretamente à barra  $i$   
 (vizinhança de  $i$ )
- $R$  = Conjunto dos circuitos de interligação  $ij$  tal que:
  - Medição é realizada no nó  $i$
  - Nó  $i$  pertence a área  $l$
- $S$  = Conjunto dos circuitos de interligação  $ij$  tal que:
  - Medição é realizada no nó  $j$
  - Nó  $j$  pertence a área  $l$
- $T$  = Conjunto dos circuitos de interligação  $ij$  tal que:
  - Medição é realizada no nó  $i$
  - Nó  $i$  não pertence a área  $l$
- $U$  = Conjunto dos circuitos de interligação  $ij$  tal que:
  - Medição é realizada no nó  $j$
  - Nó  $j$  não pertence a área  $l$

O modelo de carga descrito nas equações (IV.2) e (IV.3) considera que o valor da carga é invariante com a tensão. Se a variação da carga com a tensão for um aspecto importante em alguma aplicação específica do FPO, os termos PL e QL que aparecem nas equações (IV.2) e (IV.3) devem ser substituídos por um modelo mais completo, descrito a seguir:

- Carga de potência ativa da barra  $i$ :

$$(1 - A_i - B_i + A_i V_i + B_i V_i^2) PL_i \quad (\text{IV.5})$$

- Carga de potência reativa da barra  $i$ :

$$(1 - C_i - D_i + C_i V_i + D_i V_i^2) QL_i \quad (\text{IV.6})$$

onde:  $A_i =$  Parcela, em pu, da carga de potência ativa que varia linearmente com a tensão (modelo de corrente constante)

$B_i =$  Parcela, em pu, da carga de potência ativa que varia quadraticamente com a tensão (modelo de impedância constante)

$C_i =$  Parcela, em pu, da carga de potência reativa que varia linearmente com a tensão

$D_i =$  Parcela, em pu, da carga de potência reativa que varia quadraticamente com a tensão

Além das restrições de igualdade já definidas, o programa computacional desenvolvido permite a utilização de restrições adicionais (RAD) cujos modelos são definidos pelo usuário. Estas restrições tem o objetivo de permitir a modelagem de condições operativas particulares do sistema elétrico. O modelo básico de restrição adicional, que foi adotado neste trabalho, é uma função linear do seguinte tipo:

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n - \text{RAD} = 0 \quad (\text{IV.7})$$

onde:  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$

$v_1, v_2, \dots, v_n$  são variáveis do problema

RAD é o valor especificado para a restrição adicional

### IV.3.3 Modelagem das Restrições de Desigualdade

As restrições de desigualdade são modeladas por funções lineares que expressam os limites inferior e superior das variáveis do problema. Estas funções são do seguinte tipo:

$$v - L_{\text{inf}} \geq 0 \quad (\text{IV.8})$$

$$L_{\text{sup}} - v \geq 0 \quad (\text{IV.9})$$

onde:  $v$  = Variável do problema

$L_{\text{inf}}$  = Limite inferior da variável  $v$

$L_{\text{sup}}$  = Limite superior da variável  $v$

Como já foi dito, estes limites podem ser basicamente de três tipos:

- Limites físicos
- Limites operativos em condição normal
- Limites operativos em condição de emergência

A definição do limite a ser utilizado na solução do problema depende do tipo de estudo que se deseja realizar. Além disto, durante a solução de um mesmo problema mais de um tipo de limite pode ser utilizado. Algumas restrições de desigualdade tem tratamento especial. É o caso das restrições de desigualdade associadas ao fluxo de potência que flui pelos circuitos. Se observarmos a formulação original do problema veremos que não foi definida nenhuma "variável do problema" associada a esta grandeza. O tratamento específico das restrições de fluxo será discutido no item IV.7.1.1.

#### IV.4 Método de Solução

O problema de FPO, equação (IV.1), será resolvido através da solução do problema equivalente de encontrar o ponto estacionário da função Lagrangeana associada ao problema.

Generalizando, seja  $\mathbf{x} = [\mathbf{u}, \mathbf{z}]^t$  o vetor de variáveis do problema (IV.1). A função Lagrangeana associada, já foi apresentada no item III.1.2, e é aqui reescrita.

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i g_i(\mathbf{x}) - \sum_{j=1}^{m_2} \mu_j h_j(\mathbf{x}) \quad (\text{IV.10})$$

Da mesma forma que no capítulo III, o método de solução será descrito, inicialmente, ignorando-se as restrições de desigualdade. O tratamento associado a estas restrições será descrito no item IV.7.

Desta forma, a função Lagrangeana associada ao problema (IV.1) fica definida por:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \lambda) = & f_0 - \sum_{i=1}^{nb} \lambda p_i [PG_i - FC_i PL_i - \sum_{j \in \Omega_i} P_{ij}] + \\ & - \sum_{i=1}^{nb} \lambda q_i [QG_i + QA_i - FC_i QL_i + V_i^2 bsh_i - \sum_{j \in \Omega_i} Q_{ij}] + \\ & - \sum_{i=1}^{na} \lambda l_i [IT_1 - (\sum_R P_{ij} + \sum_S P_{ji} - \sum_T P_{ij} - \sum_U P_{ji})] \end{aligned} \quad (\text{IV.11})$$

onde:  $f_0 =$  função objetivo

$nb =$  número de barras

$na =$  número de áreas elétricas

$\lambda p_i =$  multiplicador de Lagrange associado à equação de balanço de potência ativa da barra  $i$

$\lambda_{qi}$  = multiplicador de Lagrange associado à equação de balanço de potência reativa da barra  $i$

$\lambda_{I_1}$  = multiplicador de Lagrange associado à restrição de intercâmbio da área  $l$

As outras variáveis já foram definidas no item IV.3.2. O modelo da função objetivo assim como suas derivadas de primeira e segunda ordem podem ser encontradas no apêndice D.

O modelo das restrições adicionais não foi incorporado à expressão da função Lagrangeana visto que este modelo é definido pelo usuário.

O modelo de carga adotado na formulação da função Lagrangeana é o modelo simplificado (potência constante) modelos mais complexos podem ser incorporados de acordo com o que foi exposto no item IV.3.2. Antes de prosseguir é interessante estabelecer o conceito dos multiplicadores de Lagrange que aparecem na equação (IV.11). Cada multiplicador  $\lambda_i$  mede a taxa de variação da função objetivo em relação ao valor da restrição de igualdade  $g_i$  no ponto estacionário.

Isto pode ser verificado a partir das condições de otimalidade estabelecidas nas equações (III.2) a (III.15).

Da equação (III.9), temos a seguinte condição no ponto estacionário:

$$\nabla L(\mathbf{x}^*, \lambda^*, \mu^*) = 0 \quad (\text{IV.12})$$

Da equação (III.10), temos:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 0 \Rightarrow \nabla f(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i^* \nabla g_i(\mathbf{x}^*)$$

Explicitando o multiplicador de Lagrange associado à restrição  $g_i$ , temos:

$$\lambda_i^* = \frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial g_i(\mathbf{x}^*)} \quad (\text{IV.13})$$

Os valores das restrições  $g_i$  representam os *mismatches* de potência ativa, de potência reativa e de intercâmbio. Sendo assim,  $\lambda_i^*$  mede a taxa de variação da função objetivo em relação a variação dos *mismatches* no ponto estacionário.  $\lambda_i^*$  é chamado de custo marginal e normalmente tem um significado físico associado.

O tratamento das restrições de desigualdade desempenha um papel fundamental na definição do método de solução. Como já foi descrito no capítulo III, a formulação adotada neste trabalho para o tratamento destas restrições é a formulação EQP (*Equality Constrained Quadratic Programming*). Nesta formulação a predição do conjunto ativo é atualizada a cada iteração. Uma vez tendo-se estabelecido o conjunto ativo para a iteração corrente, minimiza-se a aproximação quadrática considerando que o problema é composto apenas por restrições de igualdade do seguinte tipo:

- Restrições de igualdade originais do problema
- Restrições de "igualdade" associadas à predição corrente do conjunto ativo

O processo é sequencialmente repetido até que a solução do problema (encontrar o ponto estacionário da função de Lagrange) tenha sido obtida.

Conforme já discutido no capítulo III, as "restrições de igualdade" associadas à predição do conjunto ativo podem ser explicitamente acrescentadas ao problema ou, alternativamente, o seu efeito pode ser incorporado implicitamente através da adição de funções de penalidade quadrática à função objetivo original. O tratamento das restrições de desigualdade será detalhado no item IV.7. O que é importante no momento, é estabelecer que a cada iteração a aproximação quadrática é minimizada considerando apenas um conjunto de "restrições de igualdade" que é atualizado previamente. Desta forma, não é necessário formular explicitamente o subproblema quadrático e, portanto, um algoritmo semelhante ao proposto no item III.1.3 pode ser utilizado na solução do problema. Na realidade, tudo se passa como se o problema original (IV.1) fosse reformulado à cada iteração, de forma a conter apenas as restrições de igualdade originais acrescentadas das "restrições de igualdade" associadas à predição do conjunto ativo.

O sistema de equações (III.20) que deve ser resolvido a cada iteração é aqui reescrito.



$$W^k(\Delta x^k, \Delta \lambda^k) = -\nabla L^k \quad (\text{IV.14})$$

onde:  $W^k =$  matriz hessiana do Lagrangeano com relação as variáveis  $x$  e  $\lambda$  na iteração  $k$

$\nabla L^k =$  gradiente do Lagrangeano com relação as variáveis  $x$  e  $\lambda$  na iteração  $k$

$\Delta x^k =$  correção do vetor  $x$  na iteração  $k$

$\Delta \lambda^k =$  correção do vetor  $\lambda$  na iteração  $k$

Matricialmente o sistema de equações (IV.14) corresponde a:

$$\begin{bmatrix} H^k & -J^{(k)t} \\ -J^k & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x^k \\ \Delta \lambda^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overbrace{-(\nabla_x L(x, \lambda))^k} & -\sum_{i=1}^m \lambda_i^k \nabla g_i(x)^k \\ -\nabla_\lambda L(x, \lambda)^k \end{bmatrix} \quad (\text{IV.15})$$

onde:  $H^k =$  matriz hessiana do Lagrangeano com relação às variáveis  $x$  na iteração  $k$ . Sua dimensão é  $n \times n$ , onde  $n$  é o número de variáveis originais do problema.

$J^k$  = matriz jacobiana do conjunto de restrições de igualdade  $g$  em relação às variáveis  $x$  na iteração  $k$ , sua dimensão é  $m \times n$ .

$m$  = número de restrições de igualdade na iteração  $k$ . Este número considera as restrições de igualdade originais do problema e as restrições de igualdade associadas à predição do conjunto ativo que foram explicitamente incorporadas ao problema.

$\nabla_{\lambda} L(x, \lambda)^k$  = vetor que contém o gradiente da função Lagrangeana em relação às variáveis  $\lambda$ , na iteração  $k$ .

$\nabla_x L(x, \lambda)^k$  = vetor que contém o gradiente da função Lagrangeana em relação às variáveis  $x$ , na iteração  $k$ .

$\nabla g_i(x)^k$  = vetor que contém o gradiente da restrição de igualdade  $i$  em relação às variáveis  $x$ , na iteração  $k$ . Para que não haja confusão com a notação, cabe lembrar que, neste momento, a restrição  $g_i$  pode estar representando tanto uma restrição  $g$ , original do problema, como uma restrição  $h$  que foi acrescida à predição do conjunto ativo e incorporada explicitamente à formulação do problema.

$\nabla f(x)^k$  = gradiente da função objetivo em relação às variáveis  $x$ , na iteração  $k$ . Cabe ressaltar que a função objetivo da iteração  $k$  pode conter apenas a função objetivo original ou pode estar acrescida das funções de penalidade quadrática associadas à predição do conjunto ativo, estas funções de penalidade correspondem às restrições de desigualdade que fazem parte do conjunto ativo da iteração  $k$  e que não foram incorporadas explicitamente à formulação do problema.

Cada iteração do algoritmo para a obtenção do ponto estacionário do Lagrangeano pode ser resumida pelos seguintes passos:

1. Atualizar a predição do conjunto ativo
2. Montar e resolver o sistema de equações (IV.15)
3. Atualizar os vetores  $\mathbf{x}$  e  $\lambda$

Só para lembrar, cabe notar que a execução do passo 2 é equivalente a:

- Formular o subproblema quadrático na iteração corrente com base no estado do sistema e na predição do conjunto ativo atualizada
- Minimizar o subproblema quadrático pelo método de Newton–Raphson.

A utilização do sistema de equações (IV.15) leva a formulação acoplada do algoritmo de FPO [1], [2] e [3]. Entretanto, as versões acopladas apesar de extremamente robustas, carecem de um melhor desempenho no que diz respeito à velocidade de processamento. Por outro lado, as versões desacopladas deste algoritmo apresentam um compromisso muito bom entre robustez, requisito de memória e velocidade de processamento.

A versão desacoplada do algoritmo de FPO pode ser obtida a partir da versão acoplada de uma maneira similar à obtenção da versão desacoplada do algoritmo de fluxo de potência convencional a partir da versão acoplada [1], [2] e [3]. Além das simplificações associadas ao desacoplamento outras simplificações no cálculo dos elementos da matriz  $\mathbf{W}$  podem ser realizadas com o objetivo de diminuir o esforço computacional, sem que a robustez do método seja afetada de uma forma sensível.

De uma maneira geral, o acoplamento entre os dois subproblemas através da matriz  $\mathbf{J}$  é fraco e através da matriz  $\mathbf{H}$  é praticamente inexistente. Na prática, os dois subproblemas permanecem fortemente acoplados através dos multiplicadores de Lagrange que são comuns aos dois subproblemas. Os requisitos de memória para o armazenamento das matrizes é reduzido em 50%, na versão desacoplada, quando comparada com a versão acoplada do mesmo algoritmo [1], [2] e [3].

#### IV.4.1 Formulação da Versão Desacoplada

Na versão desacoplada para solução do problema de FPO o sistema de equações (IV.14) é subdividido formando os dois subproblemas descritos abaixo.

- Subproblema de Potência Ativa (denotado pelo subscrito p):

$$W_p(\Delta x_p, \Delta \lambda_p) = -\nabla L_p \quad (IV.16)$$

- Subproblema de Potência Reativa (denotado pelo subscrito q):

$$W_q(\Delta x_q, \Delta \lambda_q) = -\nabla L_q \quad (IV.17)$$

As variáveis do subproblema de potência ativa (corrigidas através dos vetores  $\Delta x_p$  e  $\Delta \lambda_p$ ) são:

- Potência Ativa Gerada (PG)
- Fator de Carga (FC)
- Intercâmbio (IT)
- Ângulo de Defasamento ( $\varphi$ )
- Ângulo de Fase das Tensões ( $\Theta$ )
- Multiplicador de Lagrange associado às restrições de igualdade de potência ativa e de intercâmbio ( $\lambda_p$ )

As variáveis do subproblema de potência reativa (corrigidas através dos vetores  $\Delta x_q$  e  $\Delta \lambda_q$ ) são:

- Potência Reativa Gerada (QG)
- Tap (a)
- Tensão (V)

- Potência Reativa Alocada (QA)
- Multiplicador de Lagrange associado às restrições de igualdade de potência reativa ( $\lambda_q$ )

A solução do problema é obtida a partir da formulação/solução alternada dos dois subproblemas. Os passos do algoritmo de solução poderiam ser resumidos da seguinte forma:

1. Atualizar a predição do conjunto ativo para o subproblema de potência ativa
2. Montar e resolver o sistema de equações (IV.16)
3. Atualizar os vetores  $\mathbf{x}_p$  e  $\lambda_p$
4. Atualizar a predição do conjunto ativo para o subproblema de potência reativa
5. Montar e resolver o sistema de equações (IV.17)
6. Atualizar os vetores  $\mathbf{x}_q$  e  $\lambda_q$
7. Voltar para o passo 1

Os sistemas de equações (IV.16) e (IV.17) podem ser colocados na forma matricial, descrita abaixo.

- Subproblema de Potência Ativa:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_p(\mathbf{x}, \lambda) & -\mathbf{J}_p(\mathbf{x})^t \\ -\mathbf{J}_p(\mathbf{x}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_p \\ \Delta \lambda_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_{\mathbf{x}_p} L(\mathbf{x}, \lambda) \\ -\nabla_{\lambda_p} L(\mathbf{x}, \lambda) \end{bmatrix}$$

(IV.18)

- Subproblema de Potência Reativa:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_q(\mathbf{x}, \lambda) & -\mathbf{J}_q(\mathbf{x})^t \\ -\mathbf{J}_q(\mathbf{x}) & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{x}_q \\ \Delta \lambda_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\nabla_{\mathbf{x}_q} L(\mathbf{x}, \lambda) \\ -\nabla_{\lambda_q} L(\mathbf{x}, \lambda) \end{bmatrix} \quad (\text{IV.19})$$

Onde os subscritos  $\mathbf{x}_p$ ,  $\mathbf{x}_q$ ,  $\lambda_p$ ,  $\lambda_q$  que aparecem em  $\nabla L(\mathbf{x}, \lambda)$  indicam em relação a que conjunto de variáveis o gradiente do Lagrangeano está sendo calculado. As matrizes  $\mathbf{H}_p(\mathbf{x}, \lambda)$  e  $\mathbf{J}_p(\mathbf{x})$  correspondem aos elementos das matrizes  $\mathbf{H}(\mathbf{x}, \lambda)$  e  $\mathbf{J}(\mathbf{x})$  que estão relacionados com as variáveis  $\mathbf{x}_p$  e  $\lambda_p$  do subproblema de potência ativa. O mesmo ocorre com as matrizes  $\mathbf{H}_q(\mathbf{x}, \lambda)$  e  $\mathbf{J}_q(\mathbf{x})$  em relação ao subproblema de potência reativa.

O tipo de particionamento apresentado em (IV.18) e (IV.19) é interessante do ponto de vista conceitual. Entretanto, com relação ao processo de fatoração das matrizes  $\mathbf{W}_p$  e  $\mathbf{W}_q$  esta organização não é eficiente devido ao grande número de elementos *fill-in* introduzidos. A reorganização destas matrizes em uma estrutura formada por blocos melhora substancialmente este problema, como será descrito no próximo item.

#### IV.5 Organização das Matrizes de Solução [3] e [31]

Como mencionado anteriormente, uma versão desacoplada do método e Newton será utilizada na solução do problema de FPO, através do processamento alternado das equações (IV.16) e (IV.17). Como existem controles pertinentes a apenas um destes subsistemas (p.ex. Intercâmbio entre Áreas) as matrizes  $\mathbf{W}_p$  e  $\mathbf{W}_q$  podem ter estruturas diferentes. Esta diferença é pequena tendo em vista que a maior parte destas matrizes é formada pelas derivadas do Lagrangeano em relação ao módulo da tensão e o ângulo de fase das barras e em relação aos multiplicadores de Lagrange das equações de balanço de potência ativa e de potência reativa. Objetivando manter a mesma estrutura para as matrizes  $\mathbf{W}_p$  e  $\mathbf{W}_q$ , quando surgir um controle em apenas um dos subsistemas cria-se uma variável *dummy* no outro.

Aparentemente não existem motivos para se estabelecer uma regra específica para a organização das matrizes  $\mathbf{W}_p$  e  $\mathbf{W}_q$ . Entretanto, ao se analisar a expressão geral da função Lagrangeana (IV.11), com relação as diversas derivadas que compõem as matrizes  $\mathbf{W}_p$  e  $\mathbf{W}_q$ , observa-se que:

- Quando a variável  $x$  corresponde às variáveis de controle PG, FC,  $\varphi$  (subproblema de potência ativa) e QG, a, QA (subproblema de potência reativa), só o termo  $\partial^2 L / \partial x^2$  tem o seu valor diferente de zero, respectivamente nas submatrizes  $\mathbf{H}_p(\mathbf{x}, \lambda)$  e  $\mathbf{H}_q(\mathbf{x}, \lambda)$ . Este termo ( $\partial^2 L / \partial x^2$ ) é diferente de zero porque o Lagrangeano contém funções quadráticas em relação a estas variáveis (penalidades quadráticas ou o modelo da função objetivo).
- Nas submatrizes  $\mathbf{J}_p(\mathbf{x})$  e  $\mathbf{J}_q(\mathbf{x})$  os elementos que compõem as linhas correspondentes, respectivamente às variáveis de controle PG, FC, QG e QA são iguais a zero a menos de um único elemento que corresponde a:

$$\partial^2 L / \partial x \partial \lambda_p \quad \text{OU} \quad \partial^2 L / \partial x \partial \lambda_q$$

No caso das variáveis de controle tap ( $a$ ) e ângulo de defasamento ( $\varphi$ ) existem apenas quatro elementos não nulos nas linhas de  $\mathbf{J}_p$  e  $\mathbf{J}_q$  correspondentes a:

$$\partial^2 L / \partial a \partial V_i, \quad \partial^2 L / \partial a \partial V_j, \quad \partial^2 L / \partial a \partial \lambda_{qi}, \quad \partial^2 L / \partial a \partial \lambda_{qj}$$

OU

$$\partial^2 L / \partial \varphi \partial \Theta_i, \quad \partial^2 L / \partial \varphi \partial \Theta_j, \quad \partial^2 L / \partial \varphi \partial \lambda_{pi}, \quad \partial^2 L / \partial \varphi \partial \lambda_{pj}$$

onde:  $i$  e  $j$  são as barras terminais do transformador

- Na solução dos subproblemas de potência ativa e de potência reativa, cada barra da rede elétrica está associada a quatro variáveis: ângulo da tensão e o multiplicador de Lagrange correspondente à equação de balanço de potência ativa no subproblema de potência ativa; módulo da tensão e o multiplicador de Lagrange associado à equação de balanço de potência reativa no subproblema de potência reativa. Estes pares de variáveis  $(\Theta, \lambda_p$  e  $V, \lambda_q$ ) sempre existem (exceto para a barra de referência).

No caso da existência de restrições de igualdade de intercâmbio ou restrições adicionais fornecidas pelo usuário, ainda assim o par de variáveis se verifica  $(IT, \lambda_I)$  e  $(RAD, \lambda_R)$ .

As observações apresentadas acima sugerem uma organização para as matrizes  $W_p$  e  $W_q$  como a mostrada nas figuras (IV.1) e (IV.2).

	$PG_1$	$\dots$	$PG_k$	$\varphi_1$	$\dots$	$\varphi_m$	$\Theta_1$	$\lambda_{p1}$	$\Theta_2$	$\lambda_{p2}$	$\dots$	$\Theta_n$	$\lambda_{pn}$
$PG_1$	H	.			.		0	J			.		
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$PG_k$		.	H		.				0	J	.		
$\varphi_1$		.		H	.		H	J	H	J	.		
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\varphi_m$		.			.	H			H	J	.	H	J
$\Theta_1$	0	.		H	.		H	J	H	J	.	H	J
$\lambda_{p1}$	J	.		J	.		J	0	J	0	.	J	0
$\Theta_2$		.	0	H	.	H	H	J	H	J	.	H	J
$\lambda_{p2}$		.	J	J	.	J	J	0	J	0	.	J	0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
$\Theta_n$		.			.	H	H	J	H	J	.	H	J
$\lambda_{pn}$		.			.	J	J	0	J	0	.	J	0

Figura IV.1 – Organização da Matriz  $W_p$



	QG <sub>1</sub>	.	QG <sub>k</sub>	a <sub>1</sub>	.	a <sub>m</sub>	V <sub>1</sub>	λq <sub>1</sub>	V <sub>2</sub>	λq <sub>2</sub>	.	V <sub>n</sub>	λq <sub>n</sub>
QG <sub>1</sub>	H	.			.				0	J	.		
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
QG <sub>k</sub>		.	H		.		0	J			.		
a <sub>1</sub>		.		H	.				H	J	.	H	J
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
a <sub>m</sub>		.			.	H	H	J			.	H	J
V <sub>1</sub>		.	0		.	H	H	J	H	J	.	H	J
λq <sub>1</sub>		.	J		.	J	J	0	J	0	.	J	0
V <sub>2</sub>	0	.		H	.		H	J	H	J	.	H	J
λq <sub>2</sub>	J	.		J	.		J	0	J	0	.	J	0
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
V <sub>n</sub>		.		H	.	H	H	J	H	J	.	H	J
λq <sub>n</sub>		.		J	.	J	J	0	J	0	.	J	0

Figura IV.2 – Organização da Matriz  $W_q$ 

Na figura (IV.1) foi suprimida a variável FC por questões de simplicidade. Entretanto, a organização dos elementos da matriz associados a esta variável é idêntica à organização dos elementos associados à variável PG. O mesmo ocorreu na figura (IV.2) com relação à variável QA. Neste caso, a organização dos elementos é idêntica a organização dos elementos da variável QG.

Ainda por questão de simplicidade, os blocos 2x2 (IT,λI) associados ao controle de intercâmbio foram suprimidos da matriz  $W_p$ . Da mesma forma, os blocos 2x2 (RAD,λR) associados às restrições adicionais foram excluídos das matrizes  $W_p$  e  $W_q$ . A inclusão do bloco (RAD,λR) no subproblema de potência ativa ou de potência reativa depende das variáveis envolvidas na restrição. Sendo assim, fica claro que não são permitidas restrições adicionais que contenham variáveis associadas aos dois subproblemas pois isto dificulta o desacoplamento.

A organização das matrizes  $W_p$  e  $W_q$  apresentada nas figuras (IV.1) e (IV.2) é generalizada na figura (IV.3).

<b>A</b>	<b>B<sup>t</sup></b>
<b>B</b>	<b>C</b>

Figura IV.3 – Organização Generalizada das Matrizes  $\mathbf{W}_p$  e  $\mathbf{W}_q$

A seguir são detalhados alguns blocos típicos das submatrizes  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}^t$  e  $\mathbf{C}$  do subproblema de potência reativa (matriz  $\mathbf{W}_q$ )

Este detalhamento reflete as seguintes hipóteses:

1. O gerador  $G_1$  está conectado à barra 1
2. O transformador associado ao tap  $a_1$  está conectado às barras 2 e n.

- Submatriz  $\mathbf{A}$ :

$$QG_1 \quad \boxed{\begin{array}{c} QG_1 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial QG_1^2} \end{array}}$$

$$a_1 \quad \boxed{\begin{array}{c} a_1 \\ \frac{\partial^2 L}{\partial a_1^2} \end{array}}$$

- Submatriz B<sup>t</sup>:

$$\begin{array}{c}
 V_1 \qquad \lambda_{q_1} \\
 \text{QG}_1 \quad \boxed{\begin{array}{cc} 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial \text{QG}_1 \partial \lambda_{q_1}} \end{array}}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 V_2 \qquad \lambda_{q_2} \qquad \qquad \qquad V_n \qquad \lambda_{q_n} \\
 a_1 \quad \boxed{\begin{array}{cc|cc} \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial a_1 \partial V_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_1 \partial \lambda_{q_2}} & \dots & \frac{\partial^2 L}{\partial a_1 \partial V_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial a_1 \partial \lambda_{q_n}} \end{array}}
 \end{array}$$

- Submatriz C:

$$\begin{array}{c}
 V_1 \qquad \lambda_{q_1} \qquad V_2 \qquad \lambda_{q_2} \\
 V_1 \quad \boxed{\begin{array}{cc|cc} \frac{\partial^2 L}{\partial V_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial V_1 \partial \lambda_{q_1}} & \frac{\partial^2 L}{\partial V_1 \partial V_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial V_1 \partial \lambda_{q_2}} \\ \hline \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_{q_1} \partial V_1} & 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_{q_1} \partial V_2} & 0 \end{array}} \\
 \lambda_{q_1}
 \end{array}$$

As características desta organização podem ser resumidas da seguinte forma:

- A submatriz  $A$  é diagonal e formada por blocos  $1 \times 1$ . Representa as derivadas de segunda ordem em relação às variáveis  $PG$ ,  $FC$ ,  $\varphi$  no subproblema de potência ativa e  $QG$ ,  $a$ ,  $QA$  no subproblema de potência reativa. As variáveis que formam a submatriz  $A$  são independentes o que significa que as linhas de  $A$  podem ser fatoradas em qualquer ordem. Ou seja, não há necessidade do emprego de rotinas de ordenação/fatoração específicas.
- As submatrizes  $B$  e  $B^t$  são formadas por blocos  $2 \times 1$  e  $1 \times 2$  respectivamente. As linhas de  $B^t$  (colunas de  $B$ ) tem apenas um bloco não nulo excetuando-se aquelas linhas que representam as variáveis de controle tap e ângulo de defasamento que possuem 2 blocos não nulos.
- A eliminação dos elementos da submatriz  $B$  durante o processo de fatoração não cria nenhum elemento novo (*fill-in*) na submatriz  $C$ , são alterados apenas os valores dos elementos já existentes em  $C$ .
- A submatriz  $C$  é esparsa simétrica e definida por um grafo semelhante ao da matriz jacobiana de um programa de fluxo de potência convencional. A sua organização em blocos  $2 \times 2$  permite uma redução pela quarta parte nos vetores que descrevem a sua estrutura. Este tipo de organização pressupõe o uso de rotinas de ordenação/fatoração através de pivô  $2 \times 2$ . No capítulo V serão descritas técnicas específicas para o tratamento de matrizes esparsas com as características da submatriz  $C$ .
- Os blocos  $2 \times 2$  que compõem a submatriz  $C$  são assimétricos em valor, excetuando-se os blocos que formam a diagonal. Como a submatriz  $C$  é simétrica, o bloco localizado na triangular inferior é o transposto do seu simétrico. As expressões para os elementos das matrizes  $W_p$  e  $W_q$  bem como para os elementos de  $VL_p$  e  $VL_q$  são apresentadas no apêndice D.

#### IV.5.1 Cálculo dos Elementos das Matrizes $W_p$ e $W_q$

As características de desacoplamento dos elementos da matriz  $W$  com relação aos subproblemas de potência ativa e de potência reativa, e que possibilitaram a formulação da versão desacoplada do método de solução do problema de FPO, já foram discutidas anteriormente. Neste item serão descritas algumas características adicionais das matrizes  $W_p$  e  $W_q$  bem como algumas simplificações que podem ser realizadas no cálculo dos seus elementos.

Os elementos das submatrizes  $H_p$  e  $H_q$  tendem a ficar constantes a menos da influência causada pelas mudanças no conjunto ativo, a medida que o processo iterativo progride. As submatrizes  $J_p$  e  $J_q$  também possuem esta característica embora em menor grau. Isto abre a possibilidade de se manter as matrizes  $W_p$  e  $W_q$  constantes, em relação ao estado do sistema, numa fase mais avançada do processo iterativo. Este procedimento será discutido em maior detalhe no item IV.6.3.

No cálculo das submatrizes  $J_p$  e  $J_q$  podem ser realizadas simplificações semelhantes àquelas executadas na matriz jacobiana durante a obtenção das matrizes  $B'$  e  $B''$  do método desacoplado rápido para a solução do problema de fluxo de potência convencional. Estas simplificações já foram discutidas no capítulo II.

Quando o sistema elétrico associado ao problema de FPO possui ligações cuja relação  $X/R$  é baixa, torna-se imperativo alterar o cálculo das matrizes  $J_p$  e  $J_q$  para que o processo de convergência da versão desacoplada seja estável.

As simplificações necessárias foram discutidas em [10] e [11]. A principal delas é a seguinte:

No cálculo da matriz  $J_p$  ou (exclusivo) da matriz  $J_q$ , a susceptância ( $B$ ) das ligações deve ser calculada desprezando-se a resistência ( $B = -1/X$ ). Uma exposição detalhada dos motivos que levam a esta simplificação pode ser encontrada em [11]. Suscintamente poderia-se dizer o seguinte: quando o sistema elétrico apresenta ligações com baixa relação  $X/R$  o desacoplamento entre os subproblemas de potência ativa e de potência reativa não é desprezível. Entretanto, o esquema alternado de solução compensa de certa forma a perda de

acoplamento" desde que os elementos das matrizes  $\mathbf{J}_p$  e  $\mathbf{J}_q$  sejam calculados considerando a simplificação descrita acima. Simulações com sistemas reais comprovaram estas características. Na versão desenvolvida neste trabalho foram adotadas simplificações no cálculo da matriz  $\mathbf{J}_p$  que ficou semelhante à matriz  $\mathbf{B}'$  do fluxo de potência convencional.

## IV.6 Processo Iterativo

Nos itens anteriores foram abordados aspectos relacionados com o método de solução e foram discutidas as características e a organização das matrizes de solução. Neste item serão descritos aspectos relacionados com o processo iterativo de solução alternada dos subproblemas de potência ativa e de potência reativa, tais como:

- Critério de Convergência
- Função de Mérito
- Iteração Primária e Secundária
- Algoritmo de Solução

### IV.6.1 Critério de Convergência

O critério de convergência (regra de parada do algoritmo) se resume em verificar as condições de otimalidade descritas no item III.1.1. As condições de primeira ordem estabelecem o critério para que um ponto viável seja um ponto estacionário (ponto em que o gradiente da função Lagrangeana se anula). As condições de segunda ordem estabelecem o critério para que o ponto estacionário seja um mínimo local do problema original. Entretanto, na solução de problemas práticos, algumas questões devem ser consideradas.

A primeira questão diz respeito à condição de otimalidade de segunda ordem. Esta condição estabelece que a projeção da matriz hessiana  $\mathbf{H}$  sobre a região viável no ponto estacionário seja positiva definida. Isto garante que o ponto

estacionário não é um ponto de sela do problema original mas um ponto de mínimo. Aqui cabe uma observação com relação ao ponto estacionário do problema original e da função de Lagrange.

- O ponto estacionário em relação ao problema original pode ser:
  - Ponto de mínimo local: quando as condições de otimalidade de primeira e segunda ordem são satisfeitas.
  - Ponto de sela: quando apenas as condições de otimalidade de primeira ordem são satisfeitas.
- Por outro lado, o ponto estacionário, em relação a função de Lagrange associada ao problema original, será sempre um ponto de sela, visto que a função de Lagrange não possui ponto de mínimo.

O cálculo da projeção da hessiana requer um esforço computacional muito grande se comparado com o esforço necessário para obter o ponto estacionário. Desta forma, o teste das condições de segunda ordem deve ser suprimido em problemas de grande porte. Testes realizados com sistemas menores [3] sugerem que em problemas de FPO a condição de segunda ordem é sempre satisfeita. Entretanto, testes mais rigorosos com vários sistemas de grande porte deveriam ser realizados. Neste trabalho foram consideradas apenas as condições de otimalidade de primeira ordem.

Outra questão importante diz respeito ao ponto de mínimo ser local ou global. Se a função objetivo e/ou o espaço formado pela região viável não forem convexos, poderão existir vários pontos de mínimo nesta região. Neste caso, não existirá nenhuma garantia de que o ponto encontrado pelo algoritmo seja o mínimo global da função objetivo na região viável. Entretanto, a experiência atual [3] sugere que existe apenas um ponto de mínimo na região viável nos problemas práticos de FPO e que os algoritmos baseados no método de Newton são capazes de convergir para este ponto mesmo que se varie o ponto de partida do algoritmo.

As condições de otimalidade de primeira ordem, que foram utilizadas como critério de convergência do algoritmo, são aqui reescritas.

- 1) A norma (ou cada componente) do vetor gradiente ( $\nabla L_p$  e  $\nabla L_q$ ) deve ser menor que uma tolerância especificada. Esta condição corresponde às condições expressas nas equações (III.2) e (III.3).
- 2) Não existe nenhuma restrição de desigualdade violada. Isto garante que o ponto estacionário é viável.
- 3) Os multiplicadores de Lagrange associados às restrições de desigualdade ativas passam no teste de sinal. Isto garante que o conjunto ativo está correto e que nenhuma restrição de desigualdade ativa deve ser relaxada. Os critérios para verificação da identificação correta do conjunto ativo serão descritos em detalhe no item IV.7. As condições 2 e 3, aqui apresentadas, correspondem às condições expressas pelas equações (III.4) a (III.6).

#### IV.6.2 Função de Mérito

Conforme já descrito no item III.2.2.2 a função de mérito é uma função que se destina a medir o progresso do algoritmo em direção ao ponto ótimo. Neste trabalho, entretanto, não se adotou uma função de mérito específica. Desta forma assumiu-se que a aplicação de um passo unitário à direção de Newton que minimiza o subproblema quadrático, proporciona um razoável progresso do algoritmo em direção ao ótimo, mesmo quando  $\mathbf{x}^k$  está longe de  $\mathbf{x}^*$  e a predição do conjunto ativo ainda não é muito confiável, ou seja:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{p}^k$$

onde  $\mathbf{p}^k$  é a solução do subproblema quadrático na iteração  $k$ .

Por outro lado, a ausência de uma função de mérito que estabeleça o melhor compromisso possível para o "conflito", que normalmente existe, entre reduzir a função objetivo e satisfazer as restrições, pode ocasionar um grande número de violações nas primeiras iterações.

Para reduzir o risco deste grande número de violações iniciais foram adotadas funções de penalidade quadrática que tem a finalidade de reduzir a correção nas variáveis do problema. A aplicação destas funções será discutida em detalhes no item IV.7.2.



### IV.6.3 Algoritmo de Solução

Antes de descrever o algoritmo de solução propriamente dito, vamos estabelecer alguns conceitos importantes.

Conforme foi dito no item IV.5.1, as matrizes  $\mathbf{W}_p$  e  $\mathbf{W}_q$  tendem a ficar constantes a medida que o processo iterativo progride a menos da influência causada pelas mudanças no conjunto ativo. Isto leva à definição de dois tipos básicos de iteração: a iteração primária e a iteração secundária.

Na iteração primária são realizados os seguintes passos básicos:

- Atualização do Conjunto Ativo
- Cálculo do Gradiente ( $\nabla L_p$  ou  $\nabla L_q$ )
- Cálculo da Matriz de Solução ( $\mathbf{W}_p$  ou  $\mathbf{W}_q$ )
- Fatoração da Matriz de Solução ( $\mathbf{W}_p$  ou  $\mathbf{W}_q$ )
- Solução da equação (IV.16) ou (IV.17)
- Atualização das Variáveis ( $\mathbf{x}_p, \lambda_p$  ou  $\mathbf{x}_q, \lambda_q$ )

Na iteração secundária a matriz de solução ( $\mathbf{W}_p$  ou  $\mathbf{W}_q$ ) é mantida constante em relação às variáveis do subproblema (estado do sistema). Neste caso são realizados os seguintes passos básicos:

- Atualização do Conjunto Ativo
- Cálculo do Gradiente ( $\nabla L_p$  ou  $\nabla L_q$ )
- Atualização dos Fatores da Matriz de Solução ( $\mathbf{W}_p$  ou  $\mathbf{W}_q$ ) para refletir as mudanças no Conjunto Ativo.

- Solução da equação (IV.16) ou (IV.17)
- Atualização das Variáveis ( $\mathbf{x}_p, \lambda_p$  ou  $\mathbf{x}_q, \lambda_q$ )

O critério de escolha entre uma iteração primária ou secundária pode variar. A forma mais simples é calcular os elementos da matriz nas iterações iniciais e manter a matriz constante a partir de uma determinada iteração. Eventualmente, pode-se optar por recalcular a matriz mais uma vez, no final do processo iterativo, com o objetivo de melhorar a precisão da solução. O critério para "chavear" o tipo de iteração pode ser simples como: a partir de uma iteração  $k$  pré-especificada; ou mais elaborado como: "chavear" quando a norma do gradiente for menor que uma tolerância pré-estabelecida.

Uma outra questão é a localização do teste de parada do algoritmo (verificação das condições de otimalidade). O teste de parada pode ter três localizações básicas:

- 1) No Início do Subproblema de Potência Ativa
- 2) No Início do Subproblema de Potência Reativa
- 3) No Início de cada um dos Subproblemas. Neste caso o teste de parada é realizado a cada meia iteração do algoritmo.

Neste trabalho optou-se por localizar o critério de parada no início do Subproblema de Potência Reativa. A seguir será apresentado o algoritmo básico da versão desacoplada do programa de FPO.

#### Inicialização

- a) FAZER  $k = 0$
- b) ESCOLHER VALORES para  $\mathbf{x}_p^0, \mathbf{x}_q^0, \lambda_p^0, \lambda_q^0$

## Subproblema de Potência Ativa

- c) ATUALIZAR o conjunto ativo para o subproblema de potência ativa
- d) CALCULAR  $\nabla L_p^k$
- e) SE a iteração é primária  
ENTÃO
- f) CALCULAR e FATORAR  $W_p^k$   
SENÃO
- g) ATUALIZAR os fatores de  $W_p^k$  para refletir as mudanças no conjunto ativo  
FIM SE
- h) RESOLVER o sistema  $W_p^k (\Delta x_p^k, \Delta \lambda_p^k) = -\nabla L_p^k$
- i) CALCULAR  $x_p^{k+1} = x_p^k + \Delta x_p^k$   
 $\lambda_p^{k+1} = \lambda_p^k + \Delta \lambda_p^k$

## Subproblema de Potência Reativa

- j) ATUALIZAR o conjunto ativo para o subproblema de potência reativa
- k) CALCULAR  $\nabla L_q^k$
- l) TESTAR as condições de otimalidade
  - $\max\{|\nabla L_{p_i}^k|\} \leq \text{tol}$  E  $\max\{|\nabla L_{q_i}^k|\} \leq \text{tol}$
  - não ocorreram mudanças no conjunto ativo dos subproblemas de potência ativa e de potência reativa durante a iteração k.
- m) SE as condições de otimalidade foram satisfeitas  
ENTÃO  
PARE. O ponto ótimo foi encontrado.  
SENÃO  
CONTINUE  
FIM SE

- n) SE a iteração é primária  
ENTÃO
- o) CALCULAR e FATORAR  $W_q^k$   
SENÃO
- p) ATUALIZAR os fatores de  $W_q^k$  para refletir as mudanças no conjunto  
ativo  
FIM SE
- q) RESOLVER o sistema  $W_q^k (\Delta x_q^k, \Delta \lambda_q^k) = -\nabla L_q^k$
- r) CALCULAR  $x_q^{k+1} = x_q^k + \Delta x_q^k$   
 $\lambda_q^{k+1} = \lambda_q^k + \Delta \lambda_q^k$
- s) FAZER  $k = k + 1$
- t) VÁ PARA c

Comentários:

- a)  $k$  é o contador de iterações
- b) A inicialização das variáveis do problema pode ser feita a partir de um ponto de operação anterior ou a partir de valores nominais. Esta última inicialização é conhecida como *flat-start*.

Na inicialização *flat-start* os valores usuais são:

- Módulo das Tensões : 1 pu
- Tap dos Transformadores Controladores : 1 pu
- Ângulo de Fase das Tensões : 0 graus

- Potência Ativa dos Geradores Controladores : 0 MW
- Potência Reativa dos Geradores Controladores : 0 MVAR

Além da inicialização das variáveis originais do problema, é necessário inicializar os multiplicadores de Lagrange. Neste trabalho os multiplicadores de Lagrange dos subproblemas de potência ativa e de potência reativa foram inicializados com 1.0.

- c,j) As técnicas para atualização do conjunto ativo serão discutidas no próximo item.
- k,o) Notar que o cálculo do gradiente e da matriz de solução do subproblema de potência reativa já leva em conta os resultados atualizados pela meia iteração de potência ativa.
- l) Se a tolerância for muito pequena, podem ocorrer oscilações indesejáveis no processo final de convergência provocadas por erros de arredondamento. Uma solução para acelerar o processo final de convergência é, nesta fase, limitar a correção das variáveis (e por conseguinte as oscilações) através do uso de funções de penalidade quadrática.

#### IV.7 Estratégia de Conjunto Ativo

A estratégia de conjunto ativo implementada neste trabalho se baseia na formulação EQP (*Equality Constrained Quadratic Programming*). Nesta formulação, a predição do conjunto ativo é atualizada a cada iteração, antes da formulação do subproblema quadrático. Uma vez atualizado o conjunto ativo o subproblema quadrático é formulado contendo apenas restrições de igualdade, veja item III.2.2.5. Uma questão crucial desta formulação é a estratégia utilizada para atualizar a predição do conjunto ativo. Nos itens subsequentes serão discutidas as questões relacionadas com a implementação desta estratégia.

##### IV.7.1 Ativação/Desativação das Restrições de Desigualdade

As restrições de desigualdade estão associadas aos limites impostos às variáveis do problema de FPO. Neste trabalho a ativação das restrições de

desigualdade foi realizada através de funções de penalidade quadrática (veja item III.2.2.4).

Como já foi visto, a predição do conjunto ativo deve ser atualizada antes da formulação do subproblema quadrático (ativo ou reativo) a cada iteração. Isto é feito através da execução dos seguintes passos:

- Monitorar o valor de todas as variáveis do subproblema sujeitas à restrição.
- Incluir no conjunto ativo todas as restrições associadas às variáveis violadas.
- Excluir do conjunto ativo todas as restrições que não são mais necessárias.

Uma estratégia mais conservadora seria incluir/excluir do conjunto ativo apenas um subconjunto das restrições violadas/desnecessárias através de algum critério de decisão (por exemplo a magnitude da violação/valor do custo reduzido da restrição, respectivamente). Entretanto, na maioria dos casos esta estratégia não proporciona o melhor desempenho do algoritmo.

A inclusão de uma restrição de desigualdade no conjunto ativo é realizada através da adição de uma função de penalidade quadrática à função objetivo original. Esta função tem a seguinte expressão geral.

$$\phi(x_j) = \frac{1}{2} a_j(x_j - b_j)^2 \quad (\text{IV.20})$$

As derivadas da função de penalidade quadrática são dadas por:

$$\frac{\partial \phi(x_j)}{\partial x_j} = a_j(x_j - b_j) \quad (\text{IV.21})$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x_j)}{\partial x_j^2} = a_j \quad (\text{IV.22})$$

onde:

- $a_j$  é o custo da penalidade
- $x_j$  é a variável violada
- $b_j$  é o valor base da penalidade (inicialmente  $b_j$  é igual ao limite violado).

A figura (IV.4) apresenta um esboço da função de penalidade quadrática.

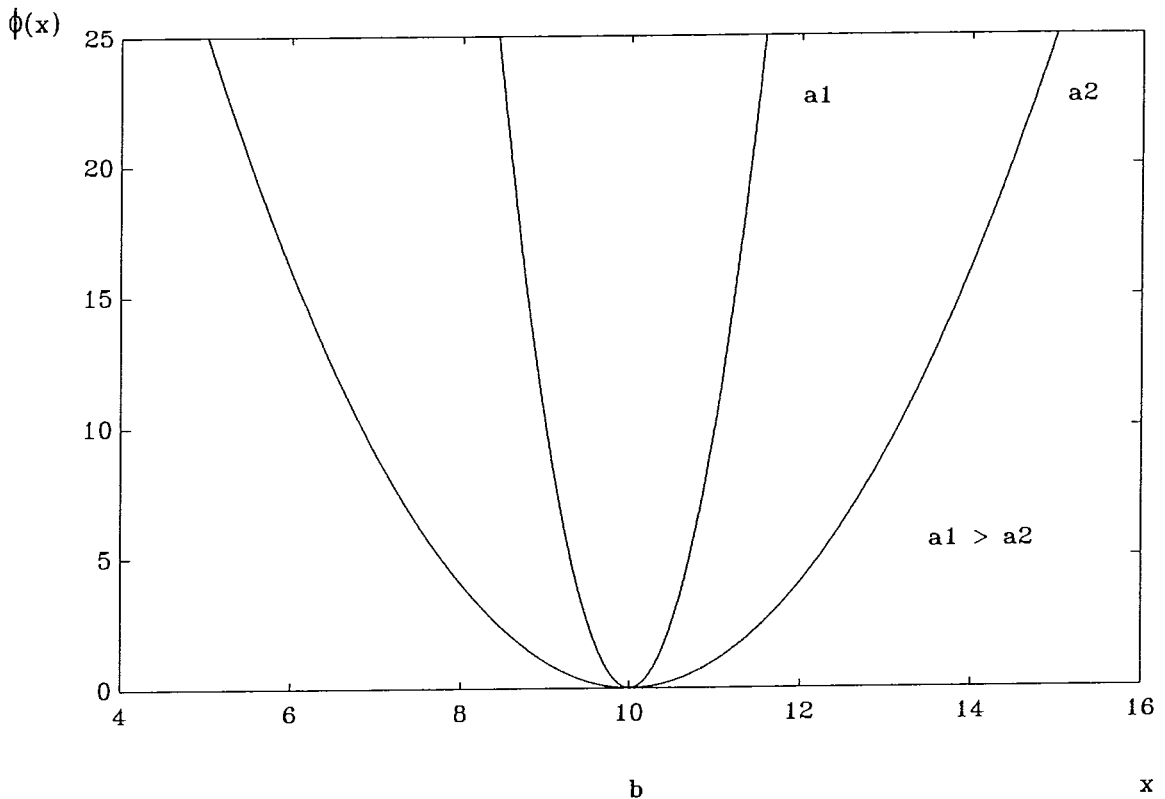


Figura IV.4 – Função de penalidade quadrática

Após exaustivos testes, foram adotados, neste trabalho, valores de  $\underline{a}$  da ordem de 50.000. Se após a inclusão no conjunto ativo a variável continuar violada na iteração seguinte, existem duas soluções alternativas:

- 1) Aumentar o valor do custo  $\underline{a}$ . Esta solução, que implica na alteração dos elementos da matriz de solução e do gradiente, possui as seguintes desvantagens:
  - Se a iteração for secundária será necessário atualizar os fatores da matriz de solução.

- Valores muito altos de  $\underline{a}$  podem tornar a matriz de solução ( $\mathbf{W}_p$  ou  $\mathbf{W}_q$ ) mal condicionada.

2) Alterar o valor base  $\underline{b}$ . Esta solução é mais fácil de implementar porque a alteração do valor base afeta apenas os termos do vetor gradiente não tendo nenhuma influência nos elementos da matriz de solução. Esta foi a solução adotada neste trabalho. A alteração do valor base  $b$  é feita a partir da magnitude da violação remanescente.

$$b'_j = b_j + (\bar{x}_j - x_j) \quad (\text{IV.23})$$

onde:  $b_j$  = valor base original  
 $b'_j$  = valor base atualizado  
 $\bar{x}_j$  = valor do limite violado  
 $x_j$  = valor corrente da variável

A exclusão de uma restrição do conjunto ativo é realizada com base no custo reduzido da função de penalidade quadrática associada à variável. Conforme foi visto no item III.2.2.3 os parâmetros da função de penalidade podem ser ajustados de forma que a variável seja mantida no valor limite. Neste caso o valor do custo reduzido associado a função de penalidade será idêntico ao valor do multiplicador de Lagrange associado à restrição de desigualdade, caso ela tivesse sido explicitamente incluída na formulação do problema. Se em certo momento a função de penalidade não estiver mantendo a variável no valor limite, o módulo do custo reduzido não corresponderá ao módulo do multiplicador de Lagrange. Entretanto, o sinal do custo reduzido estará correto. O custo reduzido da função de penalidade quadrática é dado por:

$$\gamma_j^k = -a_j^k(x_j^k - b_j^k) \quad (\text{IV.24})$$

A restrição de desigualdade deve ser relaxada nos seguintes casos:

- O limite violado é o limite superior e o custo reduzido é positivo
- O limite violado é o limite inferior e o custo reduzido é negativo.



Para relaxar a restrição deve-se remover a função de penalidade quadrática da formulação do problema. Isto é feito alterando-se os elementos do gradiente e da matriz de solução.

#### IV.7.1.1 Tratamento das Violações de Fluxo

No item anterior foi descrito o tratamento das violações associadas as variáveis originais do problema de FPO. Entretanto, existem restrições de desigualdade que não estão associadas às variáveis originais do problema. Este é o caso das restrições associadas ao fluxo de potência que flui pelos circuitos. A grandeza fluxo de potência não é incluída como variável original do problema pelos motivos expostos a seguir:

- O número de restrições de fluxo é muito grande (da ordem de 1,7 vezes o número de barras). Para que a grandeza se tornasse uma variável do problema seria necessário incluir uma restrição de igualdade, para cada fluxo, de modo a relacionar esta variável com as outras variáveis do problema (modelo da grandeza). Isto faria com que a matriz de solução tivesse dimensões proibitivas para a solução de problemas práticos. Por outro lado o percentual de restrições de fluxo ativas na solução ótima é normalmente muito pequeno.
- A grandeza fluxo de potência não é importante no estabelecimento do estado do sistema elétrico. Na realidade o fluxo de potência é uma grandeza derivada do estado. A sua importância está relacionada apenas com a viabilidade da solução do problema.

Desta forma, é mais conveniente tratar as restrições de fluxo como restrições funcionais (restrição funcional é uma restrição imposta a uma função algébrica das variáveis do problema). A grandeza fluxo de potência pode ser expressa em termos da potência ativa, potência aparente ou ainda fluxo de corrente. Por questão de simplicidade, neste trabalho adotou-se o quadrado da potência aparente como grandeza representativa do fluxo de potência.

$$S_{ij} = P_{ij}^2 + Q_{ij}^2 \quad (\text{IV.25})$$

onde:  $S_{ij}$  = Quadrado da potência aparente na ligação  $ij$   
 $P_{ij}$  = Fluxo de potência ativa na ligação  $ij$   
 $Q_{ij}$  = Fluxo de potência reativa na ligação  $ij$

O tratamento das violações de fluxo é realizado através da execução dos seguintes passos:

- Monitorar  $S_{ij}$  em todos os circuitos
- SE  $S_{ij}$  estiver violado  
 ENTÃO
  - Incluir uma restrição de igualdade, cujo modelo é dado pela equação (IV.25) e o respectivo multiplicador de Lagrange nos subproblemas de potência ativa e de potência reativa, uma vez que não é possível desacoplar a grandeza potência aparente.
  - Incluir a grandeza  $S_{ij}$  como variável do problema. A variável  $S_{ij}$  será comum aos dois subproblemas. A sua inclusão é necessária para preservar a estrutura de blocos  $2 \times 2$  da matriz de solução.
  - Incluir uma função de penalidade quadrática associada à variável  $S_{ij}$  de forma a mantê-la no valor limite. Posteriormente se for necessário relaxar a restrição, bastará remover a função de penalidade da forma descrita no item anterior.

Com a inclusão da restrição de igualdade associada à violação de fluxo a função Lagrangeana associada aos subproblemas de potência ativa e de potência reativa é alterada da seguinte forma:

$$L_p = \dots - \lambda S_{pm}(S_m - S_m(x)) \quad (\text{IV.26})$$

$$L_q = \dots - \lambda S_{qm}(S_m - S_m(x)) \quad (\text{IV.27})$$

- onde:
- $L_p =$  Função Lagrangeana do subproblema de potência ativa
  - $L_q =$  Função Lagrangeana do subproblema de potência reativa
  - $S_m =$  Variável quadrado da potência aparente na ligação m
  - $S_m(x) =$  Função quadrado da potência aparente na ligação m (Eq. IV.25). A expressão e as derivadas da função  $S_m(x)$  são apresentadas no apêndice B.
  - $\lambda S_{pm} =$  multiplicador de Lagrange associado à restrição de fluxo da ligação m no subproblema de potência ativa.
  - $\lambda S_{qm} =$  multiplicador de Lagrange associado à restrição de fluxo da ligação m no subproblema de potência reativa.

A função de penalidade quadrática que deve ser adicionada a função objetivo original do problema é do seguinte tipo:

$$\phi(S_m) = \frac{1}{2} a(S_m - \bar{S}_m)^2 \quad (\text{IV.28})$$

onde:  $\bar{S}_m$  é o limite violado. Notar que os limites são expressos em termos do quadrado da potência aparente.

a é o custo da função de penalidade.

A inclusão da restrição de fluxo na formulação dos subproblemas de potência ativa e de potência reativa implica na adição de uma nova linha/coluna nas matrizes de solução. Esta linha/coluna corresponde a um bloco 2x2 composto pelas variáveis  $S_m$  e  $\lambda S_{pm}$  no subproblema de potência ativa e  $S_m$  e  $\lambda S_{qm}$  no subproblema de potência reativa. A figura (IV.5) detalha o bloco associado ao subproblema de potência ativa.

	$S_m$	$\lambda S_{p_m}$	$\Theta_i$	$\lambda p_i$		$\Theta_j$	$\lambda p_j$
$S_m$	H	J	0	0	...	0	0
$\lambda S_{p_m}$	J	0	J	0	...	J	0

Figura IV.5 — Bloco 2x2 associado à restrição de fluxo no Subproblema de Potência Ativa

Em uma primeira análise, um dos problemas críticos associados à ativação da restrição de fluxo durante o processo de solução, é decidir em que posição da matriz incluir o novo bloco 2x2. Notar que neste ponto a matriz já está ordenada e fatorada em estrutura. Este problema será discutido no capítulo V.

#### IV.7.2 Função de Penalidade Quadrática

No método de Newton para a solução de problemas de FPO as funções de penalidade quadrática são largamente utilizadas na representação de funções objetivo, na estratégia de conjunto ativo e no tratamento de problemas de mal condicionamento da matriz de solução.

A função de penalidade quadrática tem o objetivo de criar um custo quadrático adicional no caso da variável ou função a ela associada se afastar de um valor base especificado. O uso da função de penalidade quadrática no tratamento de violação/relaxação já foi detalhado no item IV.7.1.

Várias funções objetivo utilizam funções de penalidade na sua representação. Entre elas podemos citar as funções objetivo do tipo mínimo desvio. Neste tipo de função objetivo deseja-se encontrar uma solução viável que se afaste o mínimo possível de uma condição operativa anterior. O valor das variáveis que definem a condição operativa anterior é utilizado como valor base da(s) função(ões) de penalidade. Os modelos das funções objetivo podem ser encontrados no apêndice C.

O tratamento de mal condicionamento nas matrizes de solução é um outro uso muito importante das funções de penalidade quadrática. As principais causas de mal condicionamento são apresentadas a seguir:

- Durante o processo de solução não se conhece o conjunto ativo verdadeiro. O que está disponível é uma predição do conjunto ativo no ponto ótimo. Desta forma, ao se formular o subproblema quadrático, a matriz hessiana  $H$  pode não ser positiva definida. Se isso ocorrer a matriz de solução  $W_p$  ou  $W_q$  pode ficar mal condicionada e levar o processo à divergência.
- Como já foi dito, a ausência de uma função de mérito que estabeleça o melhor compromisso possível para o "conflito", que existe entre reduzir a função objetivo e satisfazer as restrições, pode ocasionar grandes violações, principalmente nas iterações iniciais.
- A definição de um critério de convergência muito preciso pode provocar oscilações indesejáveis no processo final de convergência devido a erros de arredondamento.
- Os parâmetros do sistema elétrico também tem influência sobre o condicionamento da matriz de solução. Ligações com baixa relação  $X/R$  (caso dos métodos desacoplados) e ligações de baixa impedância tendem a causar mal condicionamento.

Uma solução para os problemas expostos é incluir na formulação do FPO funções de penalidade quadrática para um subconjunto das variáveis do problema. Experiências mostraram que este subconjunto deve ser composto pelas seguintes variáveis:

- Módulo da tensão
- Tap dos transformadores
- Ângulo de defasamento

As características destas funções de penalidade são as seguintes:

- O custo é pequeno da ordem de 50.
- O valor base da penalidade deve ser ajustado a cada iteração, para que fique igual ao último valor calculado para a variável. Desta forma a função de penalidade não exerce nenhuma influência no gradiente da função

Lagrangeana, alterando apenas os termos diagonais da matriz  $H$ . Por conseguinte, não altera a determinação do ponto ótimo de solução.

Os benefícios da inclusão destas funções de penalidade são os seguintes:

- Adicionar um termo positivo na diagonal da matriz  $H$ , fazendo com esta matriz se torne "mais" positiva definida.
- Limitar a correção das variáveis do problema o que evita um grande número de violações no início do processo de solução e oscilações indesejáveis no processo final de convergência.

#### IV.7.3 Iteração Exploratória [1], [2] e [3]

Como já foi explicado, a cada iteração o subproblema quadrático é formulado a partir de uma predição do conjunto ativo. Uma maneira de tornar mais efetiva a identificação deste conjunto crítico seria, numa mesma iteração, "testar" várias predições e escolher aquela que levasse ao menor número de violações/relaxações na iteração seguinte. Esta estratégia pode ser implementada através da execução de um conjunto de iterações especiais, denominado genericamente de iteração exploratória.

A iteração exploratória é realizada através de uma série de soluções parciais do sistema de equações (IV.16) ou (IV.17), dependendo de qual subproblema está sendo resolvido. As únicas alterações que ocorrem durante as iterações exploratórias, são devidas à atualização do conjunto ativo. Ou seja, o estado do sistema fica congelado durante a iteração exploratória.

A iteração exploratória se inicia após o cálculo do vetor de correção, obtido pela execução da iteração principal (primária ou secundária). Com isso temos uma primeira estimativa para o estado  $\mathbf{x}^{k+1}$ . Se o conjunto ativo da iteração  $k$  não for compatível com o estado  $\mathbf{x}^{k+1}$  uma série de iterações exploratórias devem ser realizadas de forma a tornar o conjunto ativo "aceitável" em  $\mathbf{x}^{k+1}$ . Após ter identificado o melhor conjunto ativo, o sistema é movido de  $\mathbf{x}^k$  para  $\mathbf{x}^{k+1}$ . Obviamente este estado  $\mathbf{x}^{k+1}$  final pode ser muito diferente daquela primeira estimativa que estava disponível no início da iteração exploratória.

A seguir serão descritas as modificações que devem ser introduzidas no

algoritmo de solução apresentado no item IV.6.3 de forma a incluir a iteração exploratória. Por questão de simplicidade serão apresentadas apenas as modificações necessárias para o subproblema de potência ativa. As alterações para o subproblema de potência reativa são idênticas.

Substituir o passo  $\underline{h}$  por:

- h<sub>1</sub>) RESOLVER o sistema  $W_p^k (\Delta x_p^k, \Delta \lambda_p^k) = -\nabla L_p^k$
- h<sub>2</sub>) VERIFICAR a solução inicial  $x^{k+1}$  com relação aos seguintes erros causados por um conjunto ativo incorreto.
- 1) restrições de desigualdade violadas
  - 2) restrições de desigualdade ativas que não são mais necessárias
- h<sub>3</sub>) SE o conjunto ativo está correto  
 ENTÃO  
 FIM da iteração exploratória  
 VÁ PARA o passo  $\underline{i}$  (veja item IV.6.3)  
 SENÃO  
 CONTINUE  
 FIM SE
- h<sub>4</sub>) SELECIONAR o conjunto de variáveis que necessitam de monitoração durante a iteração exploratória, a partir dos erros identificados em h<sub>2</sub>.
- h<sub>5</sub>) ESTABELEECER o caminho múltiplo (veja capítulo V) associado ao conjunto identificado no passo h<sub>4</sub>.
- h<sub>6</sub>) ATUALIZAR o conjunto ativo para corrigir alguns ou todos os erros identificados.
- h<sub>7</sub>) ATUALIZAR os termos do gradiente e eventualmente os fatores da matriz em função das mudanças realizadas em h<sub>6</sub>.

- h<sub>8</sub>) RESOLVER parcialmente o sistema  $W_p^k (\Delta x_p^k, \Delta \lambda_p^k) = -\nabla L_p^k$  utilizando rotinas baseadas em técnicas de vetor esparso (veja capítulo V).
- h<sub>9</sub>) VERIFICAR a nova solução  $x^{k+1}$  com relação a erros no conjunto ativo. Monitorar apenas as variáveis do conjunto selecionado em h<sub>4</sub>.
- h<sub>10</sub>) SE o conjunto ativo é "aceitável"  
 ENTÃO  
 FIM da iteração exploratória  
 VÁ para o passo  $i$  (veja item IV.6.3)  
 SENÃO  
 VÁ para passo h<sub>6</sub>  
 FIM SE

Comentários:

- h<sub>2</sub>) A verificação dos erros no conjunto ativo é realizada da maneira descrita no item IV.7.1.
- h<sub>5</sub>) O caminho múltiplo corresponde ao conjunto de equações do sistema descrito em h<sub>1</sub> que serão afetadas pelas mudanças no conjunto ativo.
- h<sub>6</sub>) A atualização do conjunto ativo consiste basicamente da inclusão/retirada de funções de penalidade quadrática ou ainda do ajuste do valor base das funções já existentes.
- h<sub>7</sub>) A alteração dos termos do gradiente e da matriz de solução são devidas unicamente às derivadas de primeira e segunda ordem das funções de penalidade quadrática. O custo computacional da iteração exploratória depende basicamente da quantidade e do tipo de alterações introduzidas no conjunto ativo. A inclusão ou exclusão de funções de penalidade quadrática implica na atualização dos fatores da matriz de solução, o que acarreta um custo computacional maior.



- h<sub>8</sub>) O sistema de equações é resolvido parcialmente utilizando rotinas baseadas em técnicas de vetor esparsa, de forma a calcular o estado  $\mathbf{x}^{k+1}$  apenas para o conjunto de variáveis selecionado em h<sub>4</sub>.
- h<sub>10</sub>) O número total de iterações exploratórias numa série, necessárias para identificar o conjunto ativo para a iteração k+1, depende basicamente do conceito de conjunto ativo "aceitável" expresso em h<sub>10</sub>. O conjunto ativo pode ser atualizado basicamente com dois objetivos:

- 1) Remover todos os erros identificados
- 2) Remover apenas os piores erros identificados

Adotar o segundo critério normalmente leva a uma solução mais rápida e eficiente. Normalmente são necessárias poucas iterações exploratórias (da ordem de cinco) para se obter um conjunto ativo "aceitável" para a iteração seguinte. Um teste comparativo da utilização de iterações exploratórias é apresentado no capítulo VI.

#### IV.7.4 Outros Tipos de Estratégia Não Implementados

A solução do problema de FPO pelo método de Newton pode ser implementada utilizando-se outras estratégias de conjunto ativo. A idéia básica é substituir a função de penalidade quadrática por outras funções que penalizem as variáveis que tenderem a se afastar da região viável. Duas funções que parecem promissoras são a função barreira logarítmica e a função de penalidade hiperbólica.

A estratégia de conjunto ativo baseada nestas funções está relacionada à formulação IQP (*Inequality Constrained Quadratic Programming*) onde as restrições de desigualdade são incorporadas à formulação do subproblema quadrático na sua totalidade. Convém lembrar que na formulação EQP somente as restrições de desigualdade associadas à predição do conjunto ativo eram incorporadas à formulação do subproblema quadrático.

Entretanto, apesar destas novas estratégias serem baseadas na formulação IQP, as restrições de desigualdade não são explicitamente incluídas na formulação do subproblema quadrático. Na realidade o que é feito é adicionar à função objetivo original um conjunto de funções (barreira logarítmica ou penalidade

hiperbólica) que representam implicitamente o conjunto de restrições de desigualdade. A seguir é feita uma breve descrição de como estas estratégias alternativas podem ser implementadas na solução do FPO.

#### IV.7.4.1 Função de Penalidade Hiperbólica [32] e [33]

A estratégia de conjunto ativo baseada em funções de penalidade hiperbólica consiste em incluir na função objetivo original do problema uma função de penalidade hiperbólica para cada restrição de desigualdade do problema. Idealmente, esta função de penalidade deveria ter as seguintes características:

- Custo nulo para excursões da variável dentro da região viável.
- Custo muito alto para excursões da variável fora da região viável.

Estas características ideais podem ser aproximadas na prática através de uma função hiperbólica. Considere a seguinte restrição de desigualdade:

$$h_j(x) \geq 0 \quad \text{onde } h_j(x) = x_j - \bar{x}_j$$

A função de penalidade hiperbólica associada a  $h_j(x)$  é a seguinte:

$$\phi(x_j) = A \{-(x_j - \bar{x}_j) + [(x_j - \bar{x}_j)^2 + d^2/A^2]^{0.5}\} \quad (\text{IV.29})$$

onde:  $x_j$  = variável a ser penalizada  
 $\bar{x}_j$  = limite inferior da variável  $x_j$   
 $d \geq 0$  é um parâmetro da penalidade

$$A = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)-1}$$

$\alpha \in (0, \pi/2)$  é um parâmetro da penalidade

As derivadas da função de penalidade hiperbólica são as seguintes:

$$\frac{\partial \phi(x_j)}{\partial x_j} = A \{-1 + (x_j - \bar{x}_j) [(x_j - \bar{x}_j)^2 + d^2/A^2]^{-0.5}\} \quad (\text{IV.30})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi(x_j)}{\partial x_j^2} = & A [(x_j - \bar{x}_j)^2 + d^2/A^2]^{-0.5} + \\ & - A (x_j - \bar{x}_j)^2 [(x_j - \bar{x}_j)^2 + d^2/A^2]^{-1.5} \end{aligned} \quad (\text{IV.31})$$

Um esboço da função de penalidade hiperbólica é apresentado na figura (IV.6).

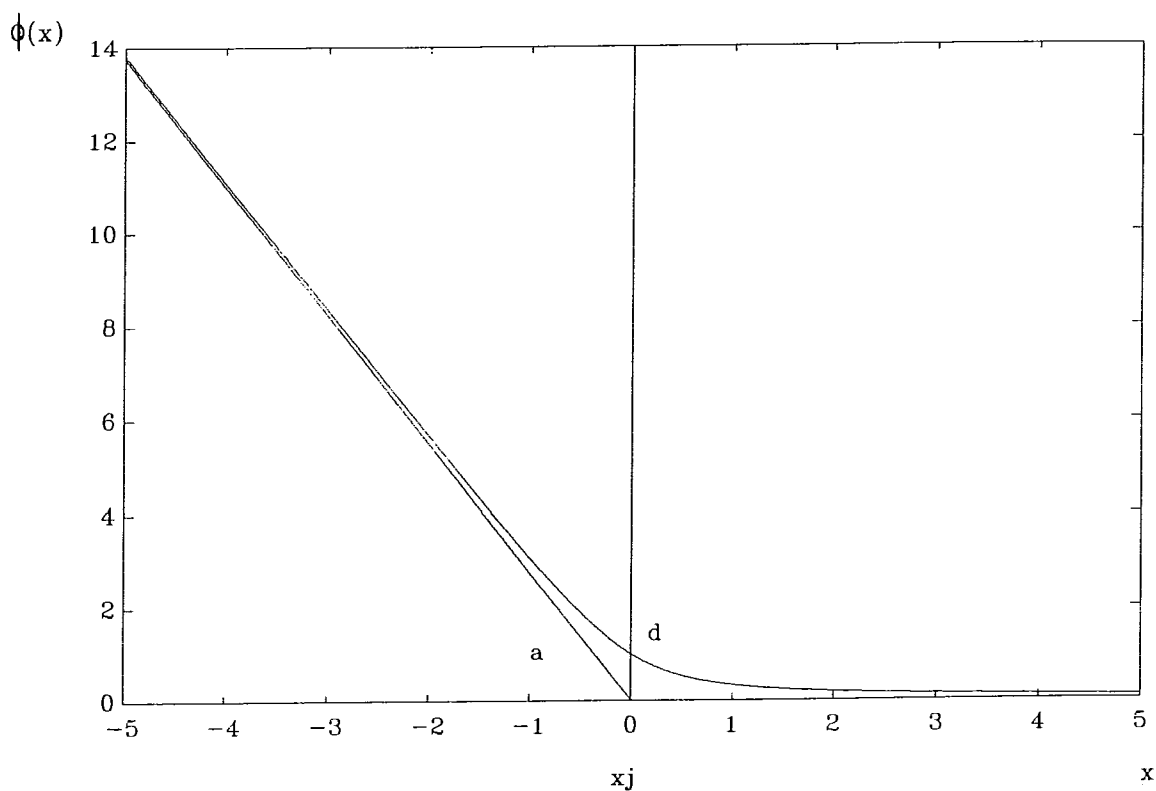


Figura IV.6 – Função de penalidade hiperbólica

Os parâmetros da penalidade  $\underline{a}$  e  $\underline{d}$  devem ser ajustados durante o processo de solução. Este processo de ajuste pode ser dividido em duas fases.

1a. FASE: Manter  $d = \text{cte.}$  e variar  $\underline{a}$  de modo que  $x_j$  se situe na região viável. Sendo assim, se  $x_j^k$  não for viável, o parâmetro  $\underline{a}$  deve ser corrigido da seguinte forma:

$$a^{k+1} = \beta a^k + (1-\beta)\pi/2, \quad 0 < \beta < 1$$

$$d^{k+1} = d^k$$

2a. FASE: Uma vez que  $x_j$  seja viável deve-se manter  $a = \text{cte}$  e diminuir o valor do parâmetro  $\underline{d}$  de forma a diminuir a influência da função de penalidade sobre a excursão das variáveis dentro da região viável. Sendo assim,  $d^{k+1}$  deve ser ajustado da seguinte forma:

$$d^{k+1} = q d^k, \quad 0 < q < 1$$

$$a^{k+1} = a^k$$

O ajuste do parâmetro  $\underline{d}$  requer certos cuidados pois valores muito pequenos para  $\underline{d}$  podem tornar a matriz hessiana  $H$  mal condicionada.

As informações disponíveis fazem crer que esta estratégia de conjunto ativo, aplicada ao método de Newton, é capaz de gerar uma sequência de pontos que sob certas condições converge para a solução ótima do problema de FPO.

#### IV.7.4.2 Função Barreira Logarítmica [4] e [5]

A estratégia de conjunto ativo baseada em funções do tipo barreira logarítmica é semelhante à estratégia baseada em funções de penalidade hiperbólica, com a diferença de que aqui a sequência de pontos gerados é estritamente viável. A idéia da função barreira é criar um custo adicional à função objetivo a medida que as variáveis associadas às restrições de desigualdade se

aproximem da fronteira da região viável pelo seu interior. Outra característica importante é que o custo no interior da região viável seja próximo de zero de forma que a função barreira não tenha influência sobre a função objetivo para as restrições de desigualdade inativas.

Considere a seguinte restrição de desigualdade:

$$h_j(x) \geq 0 \quad \text{onde} \quad h_j(x) = x_j - \bar{x}_j$$

A função barreira logarítmica associada a  $h_j(x)$  é a seguinte:

$$\phi(x_j) = -p \ln(x_j - \bar{x}_j) \quad (\text{IV.32})$$

onde:  $x_j$  é uma variável do problema. Notar que obrigatoriamente devemos ter  $x_j \geq \bar{x}_j$  pois a função logaritmo não é definida para  $x_j < \bar{x}_j$ .

$\bar{x}_j$  é o limite inferior da variável.

$p$  é o parâmetro da barreira ( $p \geq 0$ )

As derivadas da função barreira logarítmica são as seguintes:

$$\frac{\partial \phi(x_j)}{\partial x_j} = -p / (x_j - \bar{x}_j) \quad (\text{IV.33})$$

$$\frac{\partial^2 \phi(x_j)}{\partial x_j^2} = p / (x_j - \bar{x}_j)^2 \quad (\text{IV.34})$$

Um esboço da função barreira logarítmica é apresentado na figura (IV.7).

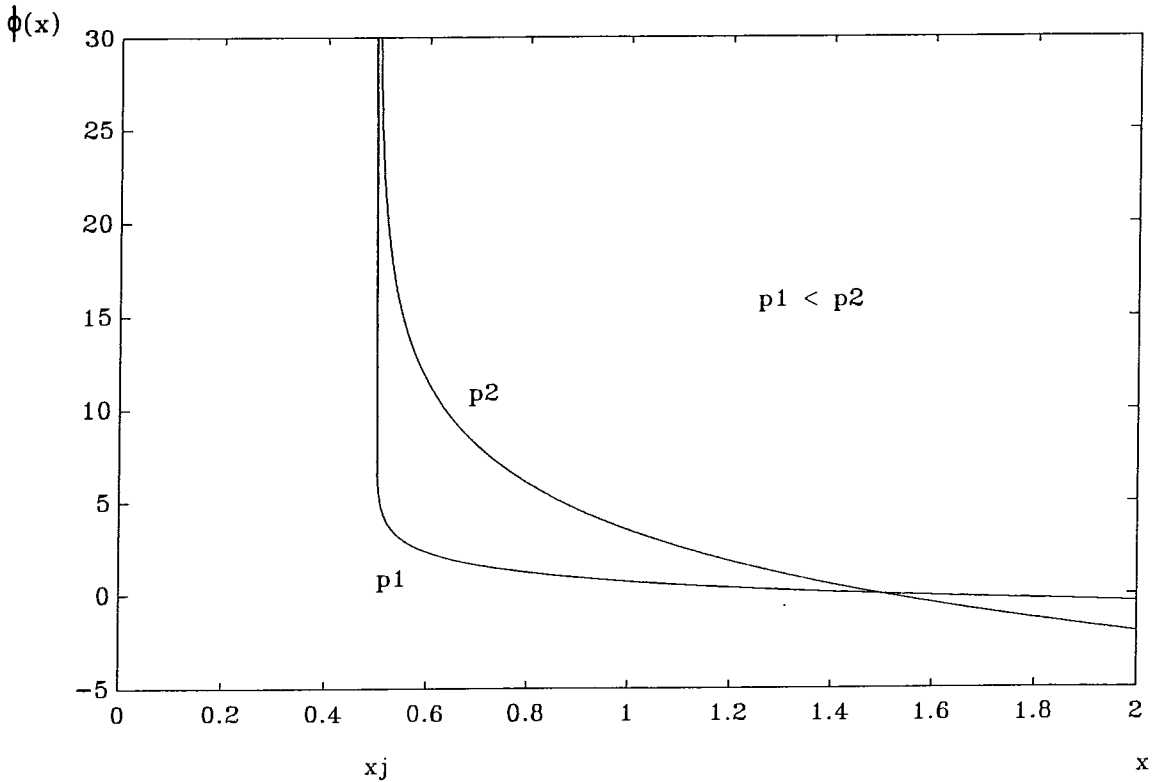


Figura IV.7 – Função barreira logarítmica

O parâmetro da barreira  $p$  deve ser ajustado durante o processo de solução. Uma estratégia possível é começar o processo com um valor de  $p$  da ordem de 1 ou 10 e a cada iteração dividi-lo por um fator constante (por exemplo 5). Experiências práticas tem mostrado que o valor inicial de  $p$  não pode ser muito pequeno pois isto faz com que as variáveis se aproximem muito rápido da barreira, instabilizando o algoritmo. Ao longo do processo deve-se fazer com que  $p \rightarrow 0$  para que as restrições inativas não afetem a função objetivo. Entretanto este ajuste deve ser realizado com cuidado pois valores muito pequenos de  $p$  tendem a fazer com que a matriz hessiana  $H$  fique mal condicionada. Uma outra característica desta estratégia é que o ponto de partida do algoritmo deve ser obrigatoriamente viável.

Uma dificuldade adicional da estratégia, diz respeito à necessidade de se realizar uma busca linear não trivial ao final de cada iteração com objetivo de garantir que nenhuma variável ultrapasse a barreira.

Maiores detalhes sobre os assuntos abordados neste capítulo podem ser encontrados nas referências [1], [2], [3], [4], [5], [11], [31], [34], [35], [36] e [37].

## CAPÍTULO V

### TÉCNICAS DE ESPARSIDADE

#### V.1 Introdução

A resolução do problema de FPO é realizada através da solução alternada das eqs. (IV.16) e (IV.17). Na solução do subproblema de potência ativa (Eq. IV.16) calculam-se os vetores de correção  $\Delta \mathbf{x}_p$  e  $\Delta \lambda_p$ , enquanto que na solução do subproblema de potência reativa (Eq. IV.17) são calculados os vetores  $\Delta \mathbf{x}_q$  e  $\Delta \lambda_q$ . Durante este processo a estrutura das matrizes  $\mathbf{W}_p$  e  $\mathbf{W}_q$  permanece constante (a menos da inclusão de circuitos violados, veja item IV.7.1.1). Quanto aos valores, são atualizados a cada iteração primária.

A obtenção dos vetores de correção implica no conhecimento de  $\mathbf{W}_p^{-1}$  e  $\mathbf{W}_q^{-1}$ . Entretanto, a inversão explícita das matrizes de solução não é recomendável, uma vez que apresenta as seguintes desvantagens:

- O número de operações aritméticas para uma matriz cheia  $n \times n$  é muito alto, da ordem de  $n^3$ .
- No caso da matriz ser esparsa, o cálculo da sua inversa explicitamente pode resultar numa matriz cheia. Este fato limitaria a aplicação do método a sistemas de pequeno porte.

Na resolução de sistemas lineares de grande porte onde a matriz de solução é esparsa o mais adequado é obter a sua inversa de forma implícita. Isto pode ser feito através da decomposição da matriz original em matrizes de fatores. A decomposição mais utilizada na análise de sistemas elétricos de potência é a decomposição LDU. Neste caso, a solução do sistema de equações lineares é realizada em duas etapas. Inicialmente são calculados os fatores LDU da matriz (etapa de fatoração); em seguida estes fatores são utilizados no cálculo do vetor de solução (etapa de solução).

A obtenção dos fatores LDU é realizada durante o processo de triangularização da matriz, através do método de eliminação de Gauss. Durante este processo os elementos do triângulo inferior são gradualmente eliminados e o valor dos fatores é armazenado na estrutura que originalmente

guardava os valores da matriz. Uma característica adicional é que se o processo de fatoração for realizado sob certas condições (veja item V.2) as matrizes de fatores preservam a esparsidade da matriz original.

Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{V.1})$$

onde:  $\mathbf{M}$  é uma matriz não singular ( $n \times n$ )  
 $\mathbf{b}$  é o vetor independente ( $n \times 1$ )  
 $\mathbf{x}$  é o vetor solução ( $n \times 1$ )

A decomposição LDU da matriz  $\mathbf{M}$  é dada por :

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} \mathbf{D} \mathbf{U} \quad (\text{V.2})$$

onde:  $\mathbf{L}$  é uma matriz triangular inferior com diagonal unitária  
 $\mathbf{U}$  é uma matriz triangular superior com diagonal unitária  
 $\mathbf{D}$  é uma matriz diagonal

A obtenção do vetor solução  $\mathbf{x}$  (etapa de solução) é feita em 2 fases, a partir dos fatores LDU da matriz.

Fase 1 – Triangularização (*Forward*)

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{b} \quad (\text{V.3})$$

onde:  $\mathbf{y}$  é um vetor intermediário.

Fase 2 – Retrosubstituição (*Backward*)

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{y} \quad (\text{V.4})$$

Quando a matriz  $\mathbf{M}$  é simétrica os seus fatores podem ser colocados da seguinte forma:

$$\mathbf{M} = \mathbf{U}^t \mathbf{D} \mathbf{U} \quad (\text{V.5})$$



Neste caso o vetor  $\mathbf{x}$  é obtido da seguinte forma:

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{U}^{-t} \mathbf{b} \quad (\text{V.6})$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{y} \quad (\text{V.7})$$

No problema de FPO as matrizes de solução  $\mathbf{W}_p$  e  $\mathbf{W}_q$  são esparsas e simétricas e a sua estrutura se assemelha à estrutura da matriz admitância de barra.

Durante o processo de fatoração, a eliminação de um elemento pode ocasionar a criação de novos elementos (elementos *fill-in*). Com o objetivo de preservar a esparsidade das matrizes de fatores, o processo de eliminação dos elementos da triangular inferior da matriz deve ser realizado numa ordem que minimize a criação de novos elementos. O próximo item discute esquemas de ordenação ótima para a fatoração das matrizes de solução. Cabe ressaltar que os esquemas de ordenação que serão discutidos se aplicam apenas à submatriz  $\mathbf{C}$  da figura (IV.3), uma vez que a submatriz  $\mathbf{A}$ , como já foi discutido no item IV.5, é diagonal e portanto pode ser fatorada em qualquer ordem.

## V.2 Ordenação Ótima das Matrizes de Solução [31]

O objetivo de estipular uma ordem para o pivoteamento das linhas da matriz é minimizar a criação de elementos não nulos (*fill-in*). Geralmente os esquemas de ordenação consideram apenas a estrutura da matriz e ignoram os valores numéricos. Isto facilita o processo de ordenação, e pode ser realizado quando a matriz  $\mathbf{M}$  tem a propriedade de que para qualquer permutação entre linhas e colunas os elementos diagonais sejam suficientemente grandes em módulo de forma a evitar o mal condicionamento numérico do processo de fatoração.

Apesar das matrizes de solução do problema de FPO serem indefinidas (possuem diagonais nulas para os elementos  $\partial^2 L / \partial \lambda p^2$  e  $\partial^2 L / \partial \lambda q^2$ ), o fato da submatriz  $\mathbf{C}$  ter sido organizada em blocos 2x2 da forma descrita no item IV.5, com os determinantes diferentes de zero, permite que o processo de ordenação considere apenas a estrutura da matriz. Um esquema alternativo de ordenação (não implementado) que considera também o valor dos elementos da matriz será discutido no item V.5.

A estratégia de pivoteamento adotada neste trabalho é a que utiliza pivôs diagonais. Embora o pivoteamento diagonal não seja obrigatório, no caso de matrizes simétricas ele é imprescindível para que a simetria da matriz seja preservada durante o processo de fatoração.

Existem basicamente três critérios para estipular a ordem de pivoteamento da matriz [38]. Estes critérios se distinguem pela forma como é escolhida a linha a ser pivoteada a cada passo do processo de fatoração.

- 1) Escolher a cada passo a linha da matriz **M original** que possua o menor número de elementos fora da diagonal (critério Tinney I).
- 2) Escolher a cada passo a linha da matriz **M reduzida** (pelo processo de fatoração) que possua o menor número de elementos fora da diagonal (critério Tinney II).
- 3) Escolher a cada passo a linha da matriz cuja eliminação irá causar efetivamente a criação do menor número de elementos não nulos na matriz **M reduzida** (critério Tinney III).

Normalmente existe um consenso com relação à aplicação destes critérios. O critério 1 é muito fácil de implementar mas não apresenta resultados satisfatórios quanto a preservação da esparsidade. O critério 2 tem um custo computacional adicional pequeno em relação ao critério 1 e apresenta resultados muito bons quanto a preservação da esparsidade. Quanto ao critério 3, o ganho adicional na preservação da esparsidade normalmente não compensa o custo computacional adicional. Neste trabalho foi adotado o critério Tinney II.

A estrutura de uma matriz simétrica pode ser descrita por um grafo onde cada nó representa o elemento diagonal e cada ramo representa um par de elementos simétricos e não nulos localizados fora da diagonal da matriz. No caso do problema de FPO, o grafo da submatriz **C** é muito semelhante ao grafo que descreve a conectividade do sistema elétrico.

O processo de fatoração tem por objetivo anular os elementos fora da diagonal que compõem o triângulo inferior da matriz **M** através de operações elementares. Ao final do processo obtém-se a matriz de fatores **U**.

Na prática existem dois procedimentos que podem ser adotados para o cálculo da matriz  $\mathbf{U}$ . O primeiro pode ser executado através dos seguintes passos:

1. Formar a estrutura da matriz  $\mathbf{M}$ .
2. Processar a rotina de ordenação obtendo-se a ordem ótima de eliminação.
3. Formar a matriz  $\mathbf{M}$  em estrutura e valor com base na ordem ótima de eliminação.
4. Fatorar a matriz  $\mathbf{M}$  determinando-se os valores dos elementos bem como a localização dos elementos *fill-in*, obtendo-se assim a matriz de fatores  $\mathbf{U}$ .

O segundo procedimento pode ser implementado pela execução dos seguintes passos:

1. Formar a estrutura da matriz  $\mathbf{M}$ .
2. Processar a rotina de ordenação estabelecendo-se a ordem ótima de eliminação e a estrutura dos elementos da matriz fatorada (inclusive os elementos *fill-in* – estrutura da matriz  $\mathbf{U}$ ).
3. Formar a matriz  $\mathbf{M}$  em valor.
4. Fatorar a matriz  $\mathbf{M}$  em valor, obtendo-se assim os valores para a matriz de fatores  $\mathbf{U}$ .

O procedimento 1 tem a desvantagem de gerar a estrutura da matriz fatorada durante o processo de fatoração em valor. Como esta estrutura é constante (a menos da inclusão de circuitos violados, que será abordada posteriormente) torna-se vantajoso determiná-la à priori juntamente com o processo de ordenação ótima como foi realizado no segundo procedimento, adotado neste trabalho.

### V.2.1 Árvore Associada à Matriz de Solução [31], [39] e [40]

Os critérios de ordenação descritos no item anterior são genericamente chamados de critérios de mínimo grau (MD). Neste tipo de critério quando duas

ou mais linhas da matriz possuem o mesmo número de elementos fora da diagonal elas podem ser fatoradas em qualquer ordem.

A estratégia de conjunto ativo adotada neste trabalho utiliza iterações exploratórias. Como já foi visto, a iteração exploratória consiste de uma série de soluções parciais dos sistemas de Eqs. (IV.16) e (IV.17).

O esforço computacional de uma solução parcial pode ser minimizado se o conjunto de linhas da matriz  $\mathbf{M}$  envolvido nesta solução for reduzido. Isto pode ser realizado através da inclusão de critérios adicionais no processo de ordenação ótima, com o objetivo de solucionar os "empates" que ocorrem na escolha dos pivôs pelo método de mínimo grau.

As técnicas especiais que são introduzidas na solução de sistemas lineares com o objetivo de reduzir o esforço computacional das soluções parciais são genericamente chamadas de técnicas de Vetores Esparsos (*Sparse Vectors*). A seguir são introduzidos conceitos novos que são úteis na aplicação destas técnicas.

- Um Vetor Elementar (*Singleton*) é um vetor com apenas uma posição diferente de zero (p.ex. na linha  $\underline{k}$ ).
  - Um Caminho (*Path*) associado a um *singleton* (ex. linha  $k$ ) é uma lista ordenada de linhas da matriz  $\mathbf{U}$  definida da seguinte forma:
    1. INCLUIR  $\underline{k}$  no caminho
    2. SE  $\underline{k}$  é a última linha de  $\mathbf{U}$   
ENTÃO  
PARE  
SENÃO  
TROCAR  $\underline{k}$  pela coluna do primeiro elemento diferente de zero da linha  $\underline{k}$  da matriz  $\mathbf{U}$ .  
VOLTAR PARA 1.
- FIM SE

Ao final deste processo obtem-se o conjunto de linhas da matriz  $\mathbf{U}$  cujos fatores são alterados quando os elementos da linha  $\underline{k}$  são modificados. Isto significa que se  $x_k$  é o único elemento do vetor  $\mathbf{x}$  que deve ser determinado, somente as linhas de  $\mathbf{U}$  associadas ao caminho de  $x_k$  são necessárias para esta solução parcial.

O conjunto de caminhos associados às linhas da matriz  $U$  pode ser expresso através de uma árvore. Seja a matriz  $M$  representada pelo grafo da figura (V.1). A matriz  $U$ , obtida pela ordenação de  $M$  pelo método de mínimo grau (MD), é apresentada na figura (V.2). Nesta figura a matriz  $U$  foi formada considerando a ordenação ótima. A identificação original das linhas da matriz aparece na coluna mais à esquerda. A árvore associada a matriz  $U$  pode ser vista na figura (V.3).

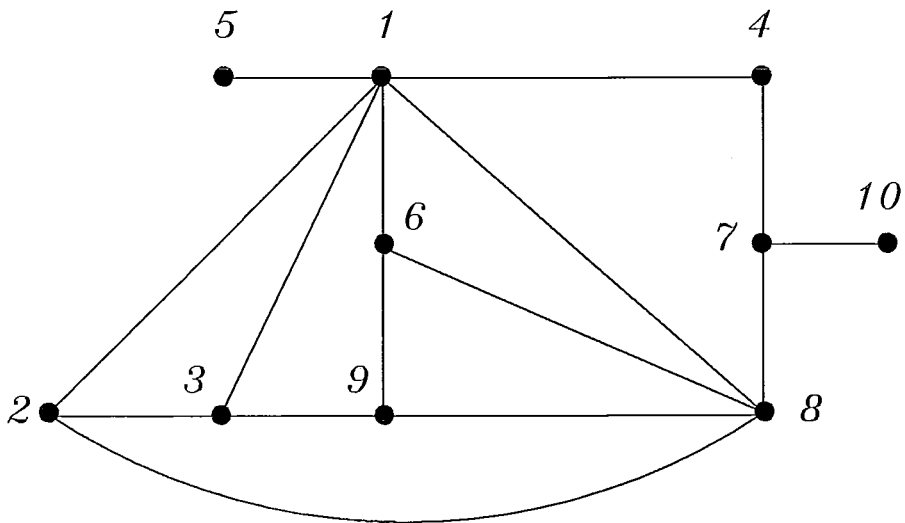


Figura V.1 – Grafo da Matriz M

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	1	X					X				
10	2		X		X						
4	3			X	X		X				
7	4				X		O			X	
2	5					X	X	X		X	
1	6						X	X	X	X	
3	7							X	O	O	X
6	8								X	X	X
8	9									X	X
9	10										X

X – Elemento Original ; O – Elemento *fill-in*

Figura V.2 – Matriz U dos fatores triangulares montada pela ordem de eliminação (Critério MD)

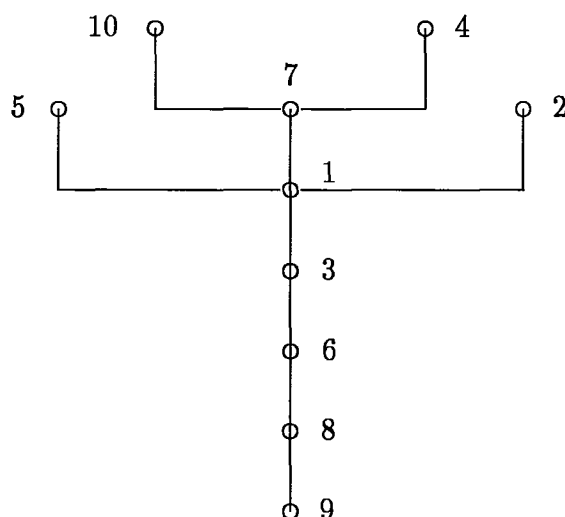


Figura V.3 – Árvore da Matriz U (Critério MD)

A figura (V.4) a seguir apresenta a estrutura da matriz  $U^{-1}$  associada ao exemplo. Nesta figura a matriz também foi montada considerando a ordenação ótima.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	1	X					X	X	X	X	X
10	2		X		X		X	X	X	X	X
4	3			X	X		X	X	X	X	X
7	4				X		X	X	X	X	X
2	5					X	X	X	X	X	X
1	6						X	X	X	X	X
3	7							X	X	X	X
6	8								X	X	X
8	9									X	X
9	10										X

Figura V.4 – Matriz  $U^{-1}$  dos fatores triangulares montada pela ordem de eliminação (Critério MD)

### V.2.2 Critérios de Desempate [31] e [40]

Existe uma relação interessante entre a árvore da matriz  $U$ , figura (V.3), e a estrutura da matriz  $U^{-1}$ , figura (V.4). As colunas não nulas associadas à linha  $\underline{k}$  na matriz  $U^{-1}$  correspondem ao caminho do nó  $\underline{k}$  na árvore da matriz  $U$ . Uma outra relação interessante é que as linhas não nulas associadas à coluna  $\underline{k}$  da matriz  $U^{-1}$  correspondem aos nós predecessores do nó  $\underline{k}$  na árvore da matriz  $U$ .

Pode-se constatar que o número de elementos não nulos da matriz  $U^{-1}$  é uma medida do caminho médio da árvore da matriz  $U$ . Na realidade, este caminho médio corresponde ao número de elementos não nulos da matriz  $U^{-1}$  (incluindo a diagonal) dividido pela ordem da matriz. Entretanto, a matriz  $U^{-1}$  não é utilizada explicitamente no cálculo das soluções parciais. Estas soluções são obtidas através de rotinas que utilizam a matriz  $U$ . Desta discussão fica claro que é importante preservar a esparsidade tanto da matriz  $U^{-1}$  quanto da matriz  $U$ .

Os critérios de desempate associados ao método de mínimo grau se destinam a preservar a esparsidade da matriz  $U^{-1}$  (o que é equivalente a reduzir o caminho médio da árvore associada à matriz  $U$ ) através da análise da estrutura da matriz  $U$ . Isto deve ser feito sem sacrificar a esparsidade de  $U$  que já é preservada pelo critério de mínimo grau. Daí o fato de se utilizar os critérios de desempate como um critério adicional ao critério de mínimo grau (Tinney II).

Antes de descrever os critérios de desempate vamos estabelecer conceitos importantes como grupo predecessor (GP), grupo predecessor adjacente (GPA) e profundidade (PF) associados a um nó genérico  $\underline{k}$  da árvore da matriz  $U$ .

- O grupo predecessor do nó  $\underline{k}$  ( $GP_k$ ) é composto pelo conjunto de nós predecessores do nó  $\underline{k}$  na árvore. Este grupo corresponde aos nós que foram eliminados antes do nó  $\underline{k}$ .
- O grupo predecessor adjacente do nó  $\underline{k}$  ( $GPA_k$ ) é um subconjunto de  $GP_k$ , composto apenas pelos nós adjacentes ao nó  $\underline{k}$  no grafo completo da matriz (grafo original + ramos *fill-in*).
- A profundidade do nó  $\underline{k}$  ( $PF_k$ ) é o comprimento do maior caminho (medido em nós, incluindo o nó  $\underline{k}$ ) dentre todos os caminhos associados ao grupo predecessor de  $\underline{k}$  ( $GP_k$ ) e que terminam no nó  $\underline{k}$ .

A figura (V.5) ilustra os conceitos apresentados acima com relação ao nó 3 da árvore apresentada na figura (V.3).



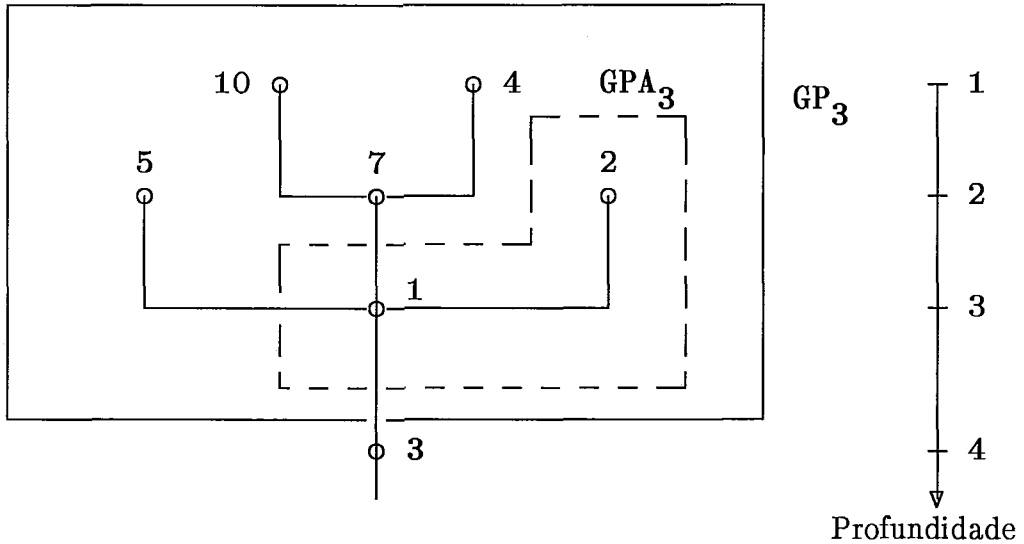


Figura V.5 – Conceitos de GP, GPA e PF associados ao nó 3

Serão propostos três critérios de desempate.

O primeiro utiliza a cardinalidade dos grupos predecessores dos nós não eliminados como critério de desempate. Como GP é um subconjunto da matriz  $U^{-1}$ , esta estratégia minimiza localmente o número de elementos não nulos de  $U^{-1}$ . Este critério é denominado MD-MNP (*Minimum Degree – Minimum Number of Predecessors*).

O segundo utiliza a cardinalidade do grupo predecessor adjacente. Neste caso quando mais de um nó possuir o mesmo grau no grafo reduzido da matriz (o grafo reduzido não considera os ramos já eliminados), é escolhido o nó de menor grau no grafo completo da matriz (grafo original + ramos *fill-in*). Este método não assegura o mínimo local para os elementos não nulos de  $U^{-1}$ .

O terceiro utiliza a profundidade dos nós não eliminados como critério de desempate. A profundidade de um nó  $k$  não eliminado é igual a maior profundidade dentre os nós já eliminados ligados ao nó  $k$  (no grafo completo da

matriz) mais uma unidade. Neste critério escolhe-se o nó de menor profundidade dentre aqueles de mesmo grau. Esta estratégia minimiza localmente o comprimento médio da árvore, e é conhecida como MD-ML (*Minimum Degree - Minimum Length*).

Uma comparação entre os critérios apresentados pode ser encontrada em [40]. Neste trabalho foi utilizado o critério MD-ML. As figuras (V.6) e (V.7) apresentam, respectivamente, a estrutura e a árvore da matriz U correspondentes ao método MD-ML. Comparando-se as figuras (V.3) e (V.7) vemos que a aplicação do critério MD-ML reduziu o caminho médio da árvore de 4.7 para 3.7.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
5	1	X							X		
10	2		X		X						
4	3			X	X				X		
7	4				X				O	X	
2	5					X		X	X	X	
6	6						X		X	X	X
3	7							X	X	O	X
1	8								X	X	O
8	9									X	X
9	10										X

X – Elemento Original ; O – Elemento *fill-in*

Figura V.6 – Matriz U dos fatores triangulares montada pela ordem de eliminação (Critério MD-ML)

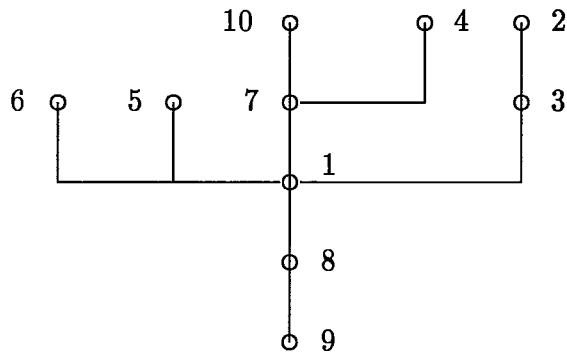


Figura V.7 – Árvore da Matriz U (Critério MD–ML)

Ao final, a rotina de ordenação ótima fornece os seguintes resultados:

- Ordem ótima de eliminação pelo critério MD–ML.
- Árvore da matriz U.
- Estrutura da matriz fatorada organizada tanto por linha quanto por coluna.

### V.2.3 Alterações na Ordenação Ótima Devido à Violação de Circuitos [31]

Durante a solução do problema de FPO podem ocorrer violações de fluxo. Como já foi descrito no item IV.7.1.1, a ocorrência de uma violação de fluxo implica na inclusão de uma restrição de igualdade que representa o modelo do fluxo de potência no circuito violado. A inclusão desta restrição pode ser feita tanto na submatriz A quanto na submatriz C. Por questões de coerência com a estrutura de dados utilizada no resto do programa, decidiu-se por incluir o bloco adicional na submatriz C, apesar da outra solução ser equivalente tecnicamente.

A alteração na submatriz C, que a esta altura já está ordenada e com a estrutura dos fatores calculada, sugere, a primeira vista, que é necessário reordenar a matriz de solução. Entretanto, pelas razões expostas a seguir isto não é necessário.

O bloco adicional  $(S_{ij}, \lambda S_{ij})$  contém ligações apenas com os blocos  $(\Theta_i, \lambda P_i)$  e  $(\Theta_j, \lambda P_j)$  no subproblema de potência ativa e com os blocos  $(V_i, \lambda Q_i)$  e  $(V_j, \lambda Q_j)$  no subproblema de potência reativa. Onde  $i$  e  $j$  são os nós terminais do circuito violado. O grafo associado ao circuito violado no subproblema de potência ativa pode ser visto na figura (V.8). A estrutura do bloco adicional pode ser vista na figura (IV.5).

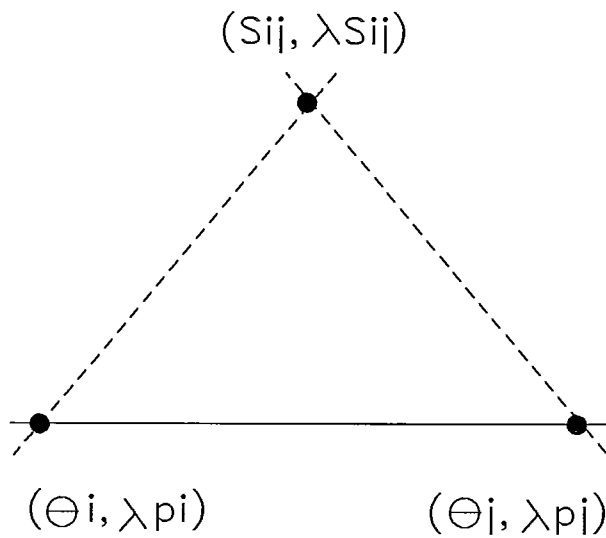


Figura V.8 – Grafo associado ao circuito violado (Subproblema de Potência Ativa)

Do que foi exposto acima pode-se concluir que se o bloco adicional  $(S_{ij}, \lambda S_{ij})$  for eliminado antes dos blocos  $(\Theta, \lambda P)$  e  $(V, \lambda Q)$  não ocorrerá nenhuma alteração na estrutura original da matriz  $U$  em termos da criação de elementos *fill-in*. Faz-se necessário, apenas, acrescentar à matriz original o bloco adicional descrito na figura (IV.5). Com relação aos vetores que descrevem a ordem de eliminação e a árvore da matriz, basta atualizá-los para refletir o fato do bloco adicional ser eliminado antes dos blocos  $(\Theta, \lambda P)$  e  $(V, \lambda Q)$ , o que é de fácil implementação.

### V.3 Cálculo dos Fatores Triangulares U [31]

Uma vez estabelecida a estrutura dos fatores triangulares  $U$  das matrizes de solução  $W_p$  e  $W_q$  pela rotina de ordenação ótima, resta calcular os valores correspondentes. Esta fase, denominada, fatoração em valor é executada a cada iteração primária, e utiliza a estrutura de fatores organizada por coluna.

A atualização dos valores do vetor independente, devido às operações realizadas na matriz durante o processo de fatoração constitui a 1a. fase da etapa de solução denominada de triangularização ou *forward*.

Estas atividades (fatoração em valor e *forward*) podem ser realizadas em uma única rotina ou em rotinas separadas.

No processo de solução das eqs. (IV.16) ou (IV.17) durante a iteração primária, estas duas atividades são processadas por uma única rotina. Esta rotina possui características especiais para efetuar o pivoteamento com blocos  $2 \times 2$ .

A seguir serão apresentados alguns aspectos básicos relativos ao processamento da fatoração em valor considerando as particularidades da matriz de solução do problema de FPO.

Como já foi mencionado no item IV.5 a fatoração em valor da submatriz  $A$ , que corresponde a eliminação dos elementos da submatriz  $B$ , pode ser realizada em qualquer ordem pelo fato da submatriz  $A$  ser diagonal. Este processo é realizado à priori por rotinas específicas. Neste item estamos interessados em descrever o processo de fatoração em valor da submatriz  $C$ .

Inicialmente temos:

- Estrutura dos fatores  $U$  da submatriz  $C$  organizada por linha e coluna.
- Valores originais da submatriz  $C$ , já alterados pela eliminação dos elementos da submatriz  $B$  (fatoração em valor da submatriz  $A$ ). Detalhes da organização da matriz de solução podem ser vistos no item IV.5.

Aspectos básicos da fatoração em valor da submatriz **C**:

- a) Ao fatorar-se a linha  $i$  da submatriz **C**, a eliminação dos elementos **L** da coluna  $i$  ocasiona contribuições em elementos de linhas ainda não fatoradas e nas respectivas diagonais.
- b) Como a matriz é simétrica em estrutura e valor a eliminação de um elemento **L** da matriz pode ser simulada facilmente percorrendo-se a localização dos elementos **U** da matriz.
- c) Devido a eliminação do elemento de **L**  $a_{ji}$  existirão tantas contribuições quantos forem os produtos  $a_{ji} \times a_{ik}$ , onde  $a_{ik}$  representa os outros elementos da linha  $i$ . Estas contribuições sempre serão efetuadas em elementos pertencentes a coluna  $k$  ( $a_{jk}$ ). Quando  $k$  for igual a  $j$  a contribuição será na diagonal  $d_{jj}$ .
- d) O pivoteamento é realizado utilizando-se a estrutura por coluna. Ou seja, as colunas da matriz são pivoteadas utilizando-se a ordem ótima de fatoração. Dentro de uma coluna os elementos (linhas) estão organizados em ordem crescente segundo a ordem ótima. Desta forma, a simulação dos produtos  $a_{ji} \times a_{ik}$  não é efetuada em uma única etapa. Os elementos da linha  $i$  são processados a medida que a coluna  $k$  (que está sendo pivoteada) contenha um elemento na linha  $i$ . Como as contribuições dos elementos que estão na coluna  $k$  ocorrem em elementos da própria coluna  $k$  (veja item c acima), a instalação das contribuições é bem simples. A simulação dos produtos  $a_{ji} \times a_{ik}$  para as colunas  $i$  já fatoradas e que portanto contribuem no elemento  $a_{jk}$  é realizada utilizando-se a estrutura por linha. Nesta estrutura os elementos de uma linha (colunas) estão organizados em ordem decrescente segundo a ordem ótima. As contribuições nos elementos da coluna  $k$  ( $a_{jk}$ ) são armazenadas em um vetor de trabalho auxiliar. Somente após completadas as contribuições sobre o elemento  $a_{jk}$  é que este elemento é efetivamente atualizado. Esta atualização é realizada durante o processo normal de pesquisa dos elementos da coluna  $k$  que está sendo pivoteada.

### V.3.1 Atualização dos Fatores Triangulares [41]

Se os valores da matriz de solução forem parcialmente alterados (devido a atualização do conjunto ativo, por exemplo) é vantajoso atualizar os fatores triangulares ao invés de executar o processo de fatoração em valor completamente.

Os métodos de atualização dos fatores que serão apresentados neste item tem as seguintes características básicas:

- A árvore da matriz  $U$  é utilizada para identificar o conjunto de linhas afetadas pelas modificações introduzidas na matriz (caminho múltiplo).
- As alterações da matriz de solução estão limitadas àquelas que não criam elementos *fill-in* na estrutura de fatores existentes. Entretanto, as alterações podem incluir a adição de uma nova linha/coluna desde que a estrutura de fatores existentes não seja alterada devido a criação de *fill-in*, quando da eliminação desta linha adicional. Este é o caso dos blocos adicionais que são inseridos na matriz devido à violação de circuitos.

#### Método 1 (Refatoração Parcial)

Este método atualiza os fatores triangulares para um número qualquer de modificações na matriz original, através da repetição do processo normal de fatoração sobre o conjunto de linhas afetadas pela modificação (caminho múltiplo). A seguir são descritos os passos básicos do método.

- Identificar o conjunto de linhas/colunas que foram modificadas
- Identificar o caminho múltiplo (*path-graph*) associado a este conjunto
- Recarregar os valores originais da matriz para as linhas/colunas pertencentes ao caminho múltiplo.
- Refatorar as linhas/colunas pertencentes ao caminho múltiplo através do algoritmo original de fatoração em valor.

### Método 2 (Atualização de Fatores)

Este método atualiza os fatores triangulares existentes para refletir uma alteração de posto 1 (*rank 1*) na matriz de solução. Para alterações de posto mais alto o método é aplicado recursivamente. O esforço computacional é proporcional ao número total de alterações de posto 1. Para cada alteração de posto 1, o método atualiza os fatores das linhas/colunas do caminho (*path*) associado com a alteração. Os elementos originais da matriz não são necessários para a aplicação do método, são utilizados apenas os fatores triangulares relativos ao caminho.

Uma modificação de posto 1 é uma modificação que pode ser expressa através de uma matriz de posto 1, que é uma matriz da forma  $\mathbf{u} \mathbf{v}^t$ , onde  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores não nulos. Em uma matriz deste tipo cada coluna é um múltiplo do vetor  $\mathbf{u}$  e cada linha é um múltiplo do vetor  $\mathbf{v}^t$  [4].

As modificações de posto 1 para matrizes simétricas podem ser colocadas na seguinte forma:

$$\mathbf{M}' = \mathbf{M} + \mathbf{n} \Delta \mathbf{M} \mathbf{n}^t \quad (\text{V.8})$$

onde  $\mathbf{M}$  é a matriz original representada pelos fatores triangulares  $\mathbf{U}^t \mathbf{D} \mathbf{U}$   
 $\mathbf{M}'$  é a matriz com os fatores atualizados  
 $\mathbf{n}$  é um vetor de mesma ordem da matriz  $\mathbf{M}$   
 $\Delta \mathbf{M}$  é um escalar

O algoritmo para a implementação do método 2, bem como testes comparativos entre os dois métodos podem ser encontrados em [41].

Normalmente o método 2 é mais eficiente que o método 1 para um número pequeno de alterações de posto 1. O ponto de intersecção em termos de eficiência é dependente do problema e normalmente se situa entre alterações de posto 7 a 15 [41]. Um programa de FPO completo deve incluir os dois esquemas e uma lógica inteligente deve selecionar o esquema mais apropriado para cada situação em particular. Por questões de simplicidade, neste trabalho foi implementado apenas o método 1 (Refatoração Parcial).



## V.4 Cálculo do Vetor de Solução $\mathbf{x}$

Como já foi descrito no início deste capítulo a etapa de solução pode ser dividida em duas fases:

Fase 1 – Triangularização (*Forward*)

$$\mathbf{y} = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{U}^{-t} \mathbf{b} \quad (\text{V.9})$$

onde  $\mathbf{y}$  é um vetor intermediário.

Fase 2 – Retrossubstituição (*Backward*)

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1} \mathbf{y} \quad (\text{V.10})$$

A fase 1 (*forward*) pode ser realizada utilizando-se tanto a estrutura dos fatores organizada por linha quanto por coluna. Quando a iteração é primária o cálculo do vetor intermediário  $\mathbf{y}$  é realizado juntamente com o processo de fatoração em valor. Quando a iteração é secundária a fase 1 é executada por uma rotina específica que utiliza a estrutura de fatores por linha.

A fase 2 (*backward*) deve ser realizada por uma rotina específica que utiliza a estrutura dos fatores organizada por linha.

### V.4.1. Soluções Parciais para o Vetor $\mathbf{x}$

Durante a iteração exploratória é necessário calcular o vetor de correção para um subconjunto de variáveis do problema (veja item IV.7.3). Uma solução parcial para o vetor  $\mathbf{x}$  pode ser obtida através da execução dos seguintes passos.

- Identificar o caminho múltiplo associado ao subconjunto de variáveis da solução parcial.

- Atualizar o vetor intermediário  $y$  com as mudanças necessárias para a solução parcial. No caso da iteração exploratória estas mudanças dizem respeito à atualização do gradiente em função das alterações no conjunto ativo.
- Executar a fase 1 da etapa de solução (*fast-forward*) através de uma rotina específica que utiliza a estrutura dos fatores por coluna. Esta rotina executa o processo normal de *forward* somente sobre os elementos do vetor intermediário  $y$  pertencentes ao caminho múltiplo. Notar que no início do processamento da rotina o vetor  $y$  contém posições (associadas ao caminho múltiplo) com valores do vetor independente  $b$ . Ao final desta fase obtém-se o vetor  $y$  atualizado.
- Executar a fase 2 da etapa de solução (*fast-backward*) através de uma rotina específica que utiliza a estrutura dos fatores por linha. Esta rotina executa o processo normal de *backward* sobre o vetor  $y$  atualizado no passo anterior, somente para os elementos do vetor  $x$  pertencentes ao caminho múltiplo. No caso particular desta implementação o vetor de correção associado à solução parcial (subconjunto do vetor  $x$  original) é armazenado numa estrutura de trabalho auxiliar.

## V.5 Esquema Alternativo de Ordenação para a Matriz de Solução

Conforme descrito no item V.2, neste trabalho foi utilizado um método de ordenação ótima que considera apenas a estrutura da matriz. Entretanto, ao longo do desenvolvimento foi testado um esquema alternativo de ordenação que considera tanto a estrutura quanto os valores da matriz.

Embora os objetivos fossem distintos, as idéias básicas para o desenvolvimento e teste desta estratégia foram obtidas de [42] e [43].

Em [42] e [43] o método se destinava a resolver o problema de estimação de estado pelo método de equações normais com restrição de igualdade. Nesse tipo de problema a matriz de solução é esparsa simétrica e indefinida. Sendo assim, o método de fatoração da matriz por pivôs  $1 \times 1$  eventualmente acoplado a esquemas de adiamento, pode em alguns casos levar a não solução do problema. Em [42] e [43] é proposto um método de ordenação misto com pivôs  $1 \times 1$  e  $2 \times 2$  que é capaz de sempre fatorar a matriz de solução caso ela não seja singular. Um

aspecto crítico deste método é a definição do critério de escolha das linhas para compor o pivô  $2 \times 2$  quando ele se faz necessário. Em [42] e [43] o critério se destinava, principalmente, a preservar a esparsidade da matriz  $U$  (através da minimização do número de contribuições — semelhante ao critério Tinney II para pivôs  $1 \times 1$ ). Além disto o critério garantia que os elementos diagonais do pivô  $2 \times 2$  tivessem magnitude suficiente para não tornar a matriz mal condicionada. Notar que no problema de estimação de estado com restrições de igualdade não é possível definir à priori blocos  $2 \times 2$  para as diagonais nulas e desta forma pré-definir os pivôs  $1 \times 1$  e  $2 \times 2$ , pois isto pode tornar a matriz de solução não observável (veja discussão do artigo [44]).

De forma distinta, no problema de FPO é sempre possível pré-definir blocos  $2 \times 2$  para as diagonais nulas da matriz de solução (como foi feito neste trabalho) e desta forma utilizar rotinas triviais de ordenação com pivôs  $1 \times 1$  em que apenas a estrutura da matriz é considerada. Notar que neste caso, cada bloco  $2 \times 2$  se comporta como se fosse um elemento da matriz.

Sendo assim, qual seria a vantagem de aplicar as técnicas mais complexas desenvolvidas em [42] e [43] ao problema de FPO?

Como foi descrito no item IV.7.2, é necessário incluir funções de penalidade quadrática, associadas a algumas variáveis do problema de FPO, de forma a garantir que a matriz de solução seja bem condicionada.

A idéia original era tentar suprir este "melhor condicionamento da matriz" através de uma estratégia alternativa de ordenação ótima que considerasse tanto a estrutura quanto os valores da matriz.

Os resultados iniciais da aplicação desta estratégia ao problema de FPO não foram satisfatórios. Entretanto, várias questões relativas a sua implementação continuam abertas e estudos mais detalhados deverão ser realizados no futuro para que se possa chegar a uma conclusão definitiva. As principais questões que continuam abertas são as seguintes:

- A primeira e mais importante trata do seguinte aspecto: ainda não está muito bem estabelecida a sensibilidade entre a aplicação do esquema alternativo de ordenação e o melhoramento da condição numérica da matriz de solução.

- Como resolver o conflito que normalmente existe no critério de escolha dos pivôs  $2 \times 2$  entre preservar a esparsidade da matriz  $U$  e melhorar a condicionamento da matriz?
- Como introduzir técnicas avançadas de preservação da esparsidade da matriz  $U^{-1}$  (aspecto fundamental para a aplicação das técnicas de vetor esparso) ao critério, já complexo, de escolha dos pivôs  $2 \times 2$  ?

Maiores detalhes sobre os assuntos discutidos neste capítulo podem ser encontrados em [1], [2], [3], [4], [31], [38], [39], [40], [41], [42] e [45].

## CAPÍTULO VI TESTES E RESULTADOS

### VI.1 Descrição dos Sistemas Elétricos de Teste

Foram considerados três sistemas elétricos de teste. Estes sistemas se distinguem pela dimensão e pelas características elétricas. A seguir é apresentada uma descrição sumária.

#### SISTEMA I

Sistema equivalente da região sudeste do Brasil.

- 46 Barras
- 23 Transformadores (7 LTC's)
- 40 Linhas de Transmissão
- 10 Geradores
- 10 *Shunt's*

#### SISTEMA II

Sistema equivalente da região noroeste dos Estados Unidos.

- 329 Barras
- 91 Transformadores (45 LTC's)
- 365 Linhas de Transmissão

60 Geradores

26 *Shunt's*

### SISTEMA III

Sistema completo da região sul/sudeste do Brasil.

1320 Barras

362 Transformadores (134 LTC's)

958 Linhas de Transmissão

167 Geradores

6 Compensadores Síncronos

136 *Shunt's*

## VI.2 Descrição dos Testes Realizados

O primeiro teste está relacionado com o sistema I (46 barras). Neste teste deseja-se apenas obter uma solução viável para o problema. Os controles são as tensões das barras de geração, os tap's dos transformadores LTC e a potência ativa gerada pela barra de referência. As outras variáveis do problema são as tensões das barras de carga e as potências reativas geradas. Todas estas variáveis foram inicializadas com a condição de *flat-start* enquanto que os multiplicadores de Lagrange foram inicializados com 1.0. Neste problema, em particular, a função objetivo não existe. Na solução dos sistemas de equações lineares foram utilizadas apenas iterações primárias. O conjunto ativo foi identificado com a ajuda de iterações exploratórias.

A tabela (VI.1) detalha os resultados do teste. A primeira coluna é o contador de iterações, a segunda e a terceira são os resíduos máximos de potência ativa e potência reativa, respectivamente. Por último, a quarta e a quinta colunas apresentam, respectivamente, a norma do vetor gradiente dos ângulos de fase (subproblema de potência ativa) e das tensões (subproblema de potência reativa), dividida pelo número de componentes de cada vetor (RMS/N).

A tolerância especificada para os resíduos de potência ativa e de potência reativa foi de 1.0 MW e 1.0 MVAR, respectivamente.

Iteração	Resíduo		Gradiente (RMS/N)	
	MW	MVAR	Ângulo	Tensão
1	1389.60	728.96	0.0	0.771
2	186.04	58.41	1.366	0.675
3	44.16	12.11	0.809	1.335
4	5.92	1.52	0.137	0.034
5	1.68	0.28	0.041	0.012
6	0.37	0.06	0.005	0.002

Tabela VI.1 – Solução Viável (caso 46 barras)

Controles:

Potência ativa gerada : 1

Tensão em barra de geração : 10

Tap de transformador LTC : 7

Conjunto Ativo:

Tensão em barra de carga : 6

Tempo de Computação (CPU) : 2.1 Seg (VAX 11/780)

O segundo teste está relacionado com o sistema II (329 barras). Aqui deseja-se tornar o subproblema de potência reativa viável através da minimização da potência reativa alocada no sistema.

Os controles são as tensões das barras de geração, os tap's dos transformadores LTC e a potência ativa gerada pela barra de referência. Em cada barra do sistema é "instalada" uma fonte "fictícia" de potência reativa que é modelada na função objetivo através de uma função de custo quadrático. Como as fontes originais de potência reativa do sistema (geradores e transformadores) não eram suficientes para suprir a demanda de potência reativa, o programa alocou um total de 16.5 MVAR.

Os resultados estão descritos na tabela (VI.2). As variáveis originais do problema foram inicializadas com a condição *flat-start*, enquanto que os multiplicadores de Lagrange foram inicializados com 1.0. Foram utilizadas apenas iterações primárias. O conjunto ativo foi identificado com o auxílio de iterações exploratórias. A tolerância especificada para os resíduos de potência ativa e de potência reativa foi de 1.0 MW e 1.0 MVAR, respectivamente.

O problema foi, também, resolvido sem a utilização de iterações exploratórias. Os resultados foram os mesmos a menos do número de iterações e do tempo de processamento, que aumentou 27%. Estes resultados estão descritos na tabela (VI.3).



Iteração	Resíduo		Gradiente (RMS/N)	
	MW	MVAR	Ângulo	Tensão
1	2572.00	657.73	0.0	0.111
2	130.55	31.58	0.279	1.694
3	42.58	10.58	0.132	0.686
4	5.76	1.49	0.065	0.015
5	2.06	0.42	0.008	0.003
6	0.74	0.13	0.003	0.001

Tabela VI.2 – Mínima Alocação de Potência Reativa com Iteração Exploratória (caso 329 barras)

Controles:

Potência ativa gerada : 1  
Tensão em barra de geração : 60  
Tap de transformador LTC : 45

Conjunto Ativo:

Potência reativa gerada : 29  
Tap de transformador LTC : 8  
Tensão em barra de geração : 9

Tempo de Computação (CPU) : 15.9 Seg (VAX 11/780)

Iteração	Resíduo		Gradiente (RMS/N)	
	MW	MVAR	Ângulo	Tensão
1	2572.00	657.73	0.0	0.1110
2	130.06	35.34	0.2870	6.7370
3	32.26	8.57	0.1230	2.3570
4	29.38	9.59	0.1390	6.3720
5	32.54	9.38	0.0940	2.4740
6	23.70	2.86	0.0350	0.1150
7	14.40	11.70	0.0250	0.0150
8	9.86	2.99	0.0100	0.0040
9	1.35	0.37	0.0030	0.0010
10	0.45	0.28	0.0009	0.0006

Tabela VI.3 – Mínima Alocação de Potência Reativa sem Iteração Exploratória (caso 329 barras)

Tempo de Computação (CPU) : 20.3 Seg (VAX 11/780)

O terceiro teste ainda está relacionado com o sistema II (329 barras). Após alocar a potência reativa indicada pelo segundo teste, deseja-se agora minimizar as perdas do sistema, através do ajuste dos tap's dos transformadores LTC e das tensões das barras de geração. A função objetivo foi modelada através da minimização da potência ativa gerada pela barra de referência.

As variáveis originais do problema foram inicializadas com a condição de *flat-start* e os multiplicadores de Lagrange foram inicializados com 1.0. Utilizou-se apenas iterações primárias. O conjunto ativo foi identificado com o auxílio de iterações exploratórias. A tolerância especificada para os resíduos de potência ativa e de potência reativa foi de 1.0 MW e 1.0 MVAR, respectivamente.

Os resultados do teste estão resumidos na tabela (VI.4). As perdas no caso base eram de 197 MW. Na solução ótima houve uma redução da ordem de 5%, fazendo com que as perdas decaíssem para 187.5 MW. Esta redução foi conseguida, basicamente, através da elevação do nível de tensão das barras de geração.

Iteração	Resíduo		Gradiente (RMS/N)	
	MW	MVAR	Ângulo	Tensão
1	2572.00	657.73	0.0	0.111
2	129.73	31.24	0.279	1.622
3	45.55	9.17	0.075	1.757
4	24.58	1.28	0.025	0.098
5	5.15	0.99	0.012	0.192
6	0.62	0.12	0.007	0.001

Tabela VI.4 – Mínima Perda (caso 329 barras)

Controles:

Potência ativa gerada : 1

Tensão em barra de geração : 60

Tap de transformador LTC : 45

Conjunto Ativo:

Potência reativa gerada : 29

Tap de transformador LTC : 9

Tensão em barra de geração : 8

Tempo de Computação (CPU) : 16.3 Seg (VAX 11/780)

O quarto teste está relacionado com o sistema III (1320 barras). Neste teste como no segundo, deseja-se minimizar a potência reativa alocada de forma a tornar o subproblema de potência reativa viável.

Da mesma forma que no segundo teste, aqui os controles são a potência ativa gerada pela barra de referência, as tensões das barras de geração e os tap's dos transformadores LTC. Como sempre, as variáveis originais do problema foram inicializadas com a condição de *flat-start* e os multiplicadores de Lagrange com 1.0. Para cada barra do sistema foi associada uma função de custo quadrático para a potência reativa gerada por uma fonte fictícia.

A tabela (VI.5) ilustra os resultados do teste. Foi necessário alocar um total de 451.4 MVAR (363.3 capacitivo e 88.1 indutivo). Foram utilizadas apenas iterações primárias. O conjunto ativo foi identificado com o auxílio de iterações exploratórias. A tolerância para os resíduos de potência ativa e de potência reativa foi de 1.0 MW e 1.0 MVAR, respectivamente.

O número excessivo de iterações foi causado pela dificuldade de identificar o conjunto ativo correto. Isto ocorreu, provavelmente, devido à utilização dos recursos originais de geração de potência reativa do sistema. Como estes recursos não tem nenhum custo no modelo da função objetivo, o algoritmo tenta esgotá-los do ponto de vista de utilização. Este fato deve ter causado um atraso na identificação do conjunto ativo correto.

Iteração	Resíduo		Gradiente (RMS/N)	
	MW	MVAR	Ângulo	Tensão
1	2050.00	16715.36	0.0102	0.3810
2	257.35	317.01	0.2834	6.3778
3	210.66	88.55	0.1213	2.1984
4	29.32	81.03	0.1536	0.6791
5	20.25	59.36	0.0229	0.0585
6	10.01	29.54	0.0082	0.0069
7	9.37	10.23	0.0041	0.0039
8	8.71	1.69	0.0017	0.0018
9	8.79	1.95	0.0014	0.0354
10	8.85	2.27	0.0069	0.0024
11	5.22	1.67	0.0010	0.0009
12	2.68	1.27	0.0006	0.0007
13	3.84	1.52	0.0018	0.0010
14	1.16	0.43	0.0004	0.0005
15	1.20	0.34	0.0003	0.0005
16	0.60	0.20	0.0002	0.0005

Tabela VI.5 – Mínima Alocação de Potência Reativa  
utilizando os Recursos do Sistema  
(caso 1320 barras)

Controles:

Potência ativa gerada : 1

Tensão em barra de geração : 173

Tap de transformador LTC : 134

Conjunto Ativo:

Potência reativa gerada	:	33
Tap de transformador LTC	:	8
Tensão em barra de carga	:	60
Tensão em barra de geração	:	31

Tempo de Computação (CPU) : 141.8 Seg (VAX 11/780)

O quinto teste também está relacionado com o sistema III. Da mesma forma que no teste anterior, deseja-se minimizar a potência reativa alocada de forma a tornar o subproblema de potência reativa viável. A diferença é que agora não vamos utilizar os recursos originais de geração de potência reativa do sistema. Isto significa que o tap dos transformadores LTC e a potência reativa gerada pelos geradores e pelos compensadores síncronos serão mantidos no valor do caso base.

Embora este não seja um problema prático, o teste é útil a título de comparação com o teste anterior. As variáveis originais do problema foram inicializadas com a condição de *flat-start* e os multiplicadores de Lagrange com 1.0. Foram utilizadas apenas iterações primárias. O conjunto ativo foi identificado com a ajuda de iterações exploratórias. A tolerância para os resíduos de potência ativa e de potência reativa foi de 1.0 MW e 1.0 MVAR, respectivamente.

A tabela (VI.6) apresenta os resultados do teste. Foi necessário alocar um total de 1790.7 MVAR (911.8 capacitivo e 878.9 indutivo). Como já era esperado, o total alocado é maior do que o obtido no quarto teste. Por outro lado, como os recursos do sistema não foram utilizados, a identificação do conjunto ativo foi mais simples. Isto ficou retratado pela redução do número de iterações.

Iteração	Resíduo		Gradiente (RMS/N)	
	MW	MVAR	Ângulo	Tensão
1	2050.00	16715.36	0.0102	0.3884
2	274.99	634.11	1.1423	9.2470
3	213.29	172.63	0.8042	3.2780
4	54.12	55.78	0.6007	0.9097
5	47.82	17.71	0.1805	0.3868
6	11.24	4.97	0.0938	0.1637
7	7.05	4.71	0.0337	0.0162
8	2.72	1.55	0.0232	0.0527
9	3.15	2.07	0.0138	0.0066
10	1.32	1.43	0.0051	0.0028
11	0.60	0.99	0.0033	0.0018

Tabela VI.6 – Mínima Alocação de Potência Reativa  
sem utilizar os Recursos do Sistema  
(caso 1320 barras)

Controles:

Potência ativa gerada : 1

Conjunto Ativo:

Tensão em barra de carga : 58

Tensão em barra de geração : 14

Tempo de Computação (CPU) : 97.7 Seg (VAX 11/780)

## CAPÍTULO VII CONCLUSÕES E RECOMENDAÇÕES

### VII.1 Recomendações para Futuros Desenvolvimentos [3], [46] e [47]

Este trabalho descreve uma implementação básica do método de programação quadrática sequencial para a solução do problema de FPO. Entretanto, para uma solução rigorosa de problemas práticos (gerais ou específicos), novas pesquisas são necessárias para que todos os requisitos possam ser preenchidos.

Este item descreve características do problema ou do método de solução que poderiam ser pesquisados e abordados em trabalhos futuros.

#### VII.1.1 Estratégia de Conjunto Ativo

Um dos principais desafios durante a implementação do método foi o estabelecimento de uma estratégia de conjunto ativo eficiente. A partir da execução de testes exaustivos com vários sistemas de características distintas, poderiam ser coletadas informações preciosas que proporcionassem um aperfeiçoamento da estratégia de conjunto ativo implementada.

Um outro campo de pesquisa é o estabelecimento de novas estratégias de conjunto ativo. As estratégias discutidas no item IV.7.4 baseadas na função barreira logarítmica e na função penalidade hiperbólica parecem muito promissoras. Entretanto, existem outras possibilidades que também merecem atenção como a utilização de técnicas de região de confiança, etc. Estas novas estratégias devem garantir entre outros requisitos:

- Rápida e correta identificação do conjunto ativo.
- Manutenção da estabilidade numérica da(s) matriz(es) de solução durante o processo de identificação.

Em resumo, este tópico apresenta um vasto campo de pesquisa.



### VII.1.2 Desacoplamento

A versão desacoplada do método de Newton para a solução do problema de FPO oferece um compromisso muito bom entre robustez e eficiência computacional. Entretanto, alguma pesquisa deve ser realizada no sentido de melhorar a robustez do método para a solução de alguns problemas mal condicionados. Problemas que apresentam ligações com baixa relação X/R fazem com que o acoplamento entre os subproblemas de potência ativa e de potência reativa não seja desprezível. Uma outra dificuldade aparece quando, por exemplo, a eliminação de uma violação de tensão deve ser realizada através do ajuste da potência ativa de um gerador [3]. Neste caso o controle e a grandeza controlada estão em subproblemas distintos.

Esta pesquisa levará a uma das seguintes conclusões:

- É possível desenvolver salvaguardas de forma que a versão desacoplada seja capaz de resolver qualquer problema prático de FPO.
- Para que seja possível resolver todos os problemas práticos de FPO é necessário o desenvolvimento de uma versão híbrida acoplada/desacoplada.

### VII.1.3 Inviabilidade

Quando uma solução viável não é possível, isto significa que as restrições de igualdade e desigualdade não podem ser satisfeitas simultaneamente. Um programa completo de FPO deve ser capaz tratar de uma forma automática ou semi-automática (com alguma intervenção do usuário) todos os casos de inviabilidade. As principais causas de inviabilidade são:

1. Dados Inconsistentes — Neste caso o programa deve conter rotinas específicas que identifiquem os dados inconsistentes possíveis de gerar inviabilidade.
2. Violação de Limites Físicos — Estes limites não podem ser violados na solução do problema. Uma solução que contenha algum destes limites violado não é fisicamente realizável.

3. Violação de Limites Operativos — A imposição destes limites se destina a melhorar a segurança do sistema. Sendo assim, estes limites podem ser relaxados, se necessário, de forma a se obter uma solução viável.

Uma área de pesquisa é o estabelecimento de uma metodologia para identificar o subconjunto de restrições que devem ser relaxadas com o objetivo de se obter uma solução viável. O método deve ser capaz de identificar e minimizar o conjunto de restrições críticas que devem ser relaxadas.

#### VII.1.4 Discretização de Controles

Alguns controles de um problema de FPO só podem ser alterados de forma discreta. Os exemplos clássicos são o tap dos transformadores e a susceptância *shunt* dos bancos de capacitores e reatores. Apesar disto, os métodos de FPO disponíveis tratam todas as variáveis como contínuas.

O modelo matemático correto deveria incluir variáveis discretas. Entretanto, isto implicaria em que a solução do problema fosse obtida por métodos de programação mista que são muito lentos do ponto de vista computacional.

Uma estratégia que tem sido adotada é obter uma solução ótima inicial considerando todas as variáveis contínuas. Em seguida ajustar cada variável discreta para o degrau mais próximo e ajustar a solução do problema mantendo estas variáveis no degrau estabelecido. Este procedimento tem as seguintes desvantagens:

- A solução obtida é sub-ótima. O erro em relação à solução ótima com variáveis discretas depende da uniformidade e do valor dos degraus. Em particular, no caso do chaveamento de bancos de capacitores/reatores, onde os degraus geralmente são grandes, os erros podem ser inaceitáveis.
- Pode não ser possível obter uma solução viável para o problema, ajustando as variáveis discretas para o degrau mais próximo.

Desta forma, conclui-se que são necessárias novas pesquisas que estabeleçam metodologias alternativas e mais confiáveis para o tratamento de variáveis discretas.

### VII.1.5 Limitação do Número de Ações de Controle

Uma característica dos métodos de FPO é ajustar todas as variáveis de controle durante o processo de solução. Em estudos *off-line*, normalmente, este procedimento é admissível. Entretanto, para aplicações em tempo real onde o FPO é utilizado para orientar o operador em ações corretivas, torna-se inviável alterar simultaneamente um grande número de controles. Neste ambiente, a minimização da função objetivo e a eliminação das violações correntes devem ser realizadas a partir do estado corrente do sistema, através de um pequeno número de ações de controle.

Este requisito poderia ser modelado através da inclusão de funções de custo associadas às variáveis de controle. Estas funções teriam um alto custo para se alterar inicialmente o controle e custo nulo a partir daí (ou seja, uma função degrau). Entretanto, mais uma vez, um modelo deste tipo só poderia ser resolvido por métodos de programação mista.

O estabelecimento de uma metodologia alternativa e eficiente é um outro campo de pesquisa. Notar que algumas variáveis de controle são discretas, o que traz uma ligação com o problema apresentado no item anterior. Desta forma, para aplicações em tempo real, pode-se pensar numa estratégia que resolva os dois problemas conjuntamente.

Qualquer que seja a metodologia, ela deve conter as seguintes características básicas:

- Selecionar apenas os controles que forem mais efetivos para a solução do problema.
- O número máximo de controles deve ser passível de ajuste pelo usuário.
- O custo computacional deve ser baixo.

### VII.1.6 Equivalentes de Rede

A solução de problemas de FPO de grande porte pode ter um custo computacional elevado para algumas aplicações específicas. Desta forma torna-se interessante reduzir ao máximo as dimensões do sistema em estudo. Entretanto, os métodos de equivalente de rede utilizados em problemas de fluxo de potência convencional não são adequados para problemas de FPO, pois apresentam as seguintes deficiências:

- Não modelam as perdas do sistema externo convenientemente.
- Não modelam as restrições de desigualdade do sistema externo.
- Não modelam as ações de controle do sistema externo.

Um modelo equivalente mais elaborado que solucione as deficiências apresentadas ainda é objeto de pesquisa.

### VII.1.7 Restrições de Segurança

Em aplicações específicas tais como o Fluxo de Potência Ótimo e Seguro é necessário obter a solução ótima considerando diversos cenários da operação do sistema. Estes cenários são obtidos a partir de um conjunto de contingências mais severas ou prováveis que é fornecido pelo usuário. Cada cenário representa a configuração básica do sistema, deteriorada pela simulação de uma ou várias contingências.

A solução do problema deve ser tal que:

- Minimizar a função objetivo do caso base
- Satisfazer todas as restrições do caso base (solução viável para o caso base)
- Satisfazer todas as restrições de cada cenário (solução viável para cada cenário)

Os limites operativos utilizados na solução de cada cenário podem ser mais relaxados que os limites do caso base (limites operativos de emergência).

O problema pode ser resolvido considerando-se ou não redespacho corretivo pós-contingência. Se o redespacho for utilizado ele poderá ser total ou parcial.

Uma solução completa para este problema pode ser obtida utilizando-se técnicas de decomposição (BENDERS por exemplo). Neste tipo de metodologia as inviabilidades dos subproblemas associados aos diversos cenários são incorporadas ao problema principal (caso base) através de restrições lineares que são construídas a partir dos multiplicadores de Lagrange de cada subproblema.

A extensão deste trabalho com a inclusão de técnicas de decomposição para a solução do problema de Fluxo de Potência Ótimo e Seguro é um trabalho de pesquisa interessante.

## VII.2 Conclusões

Este trabalho discutiu aspectos teóricos e práticos relacionados com a implementação de um problema de Fluxo de Potência Ótimo pelo método de programação quadrática sequencial.

As principais características do método de solução são as seguintes:

1. Utilização de técnicas de desacoplamento para decompor o problema original em dois subproblemas (potência ativa e potência reativa).
2. Solução do problema original a partir da solução alternada dos dois subproblemas.
3. Cada iteração corresponde à minimização da aproximação quadrática da função Lagrangeana (subproblema quadrático).
4. Todas as variáveis do problema, sejam elas de controle ou dependentes, são processadas de forma idêntica na solução do sistema de equações lineares a cada iteração.

5. Organização específica da estrutura da matriz de solução com o objetivo de diminuir o esforço computacional, a partir da utilização de técnicas de esparsidade eficientes.
6. Tempo computacional aproximadamente proporcional à dimensão do sistema elétrico, e pouco afetado pelo número de restrições de desigualdade, bem como pelo número de controles.
7. Taxa de convergência superlinear (devido ao desacoplamento).
8. Utilização de iterações primárias e secundárias com o objetivo de diminuir o esforço computacional
9. Modelagem das restrições de desigualdade através de funções de penalidade quadrática.
10. Utilização de técnicas de vetor esparso para atualizar os fatores da matriz de solução e na obtenção de soluções parciais.
11. Estratégia de conjunto ativo baseada na utilização de iterações exploratórias e na ativação/desativação de várias restrições simultaneamente.

O método implementado se mostrou robusto, eficiente do ponto de vista computacional e adequado para a solução de problemas práticos.

Os principais desafios durante o desenvolvimento do trabalho foram:

- Implementação de técnicas eficientes de esparsidade.
- Estabelecimento de uma estratégia de conjunto ativo eficiente.
- Desenvolvimento de salvaguardas com o objetivo de evitar o mal condicionamento da matriz de solução.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [ 1] SUN D. I., ASHLEY B. T., BREWER B. J., HUGHES B. A. e TINNEY W. F., "Optimal Power Flow by Newton Approach", IEEE Transactions on PAS, Vol. 103, No.10, Outubro 1984.
- [ 2] SUN D. I., HUGHES B. A., TINNEY W. F., BRIGHT J., M. e LAMONT J., "Optimal Power Flow by Newton's Method", IEEE Tutorial Course – Reactive Power: Basics, Problems and Solutions, 87EHO262–6–PWR, 1987
- [ 3] TINNEY W. F. e SUN D. I., "Optimal Power Flow: Research and Code Development", EPRI Research Project No.1724–1, Final Report, Fevereiro 1987.
- [ 4] GILL P. E., MURRAY W. e WRIGHT M. H., "Practical Optimization", Academic Press, London, 1981.
- [ 5] SCALES L. E., "Introduction to Non–Linear Optimization", Macmillan Publishers Ltd, London, 1985.
- [ 6] MONTICELLI A., "Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica", Editora Edgard Blücher, São Paulo , 1983.
- [ 7] TINNEY W. F. e HART C. E., "Power Flow Solution by Newton's Method", IEEE Transactions on PAS, Vol. 86, pp.1449–1456, 1967.
- [ 8] STOTT B., "Decoupled Newton Load Flow", IEEE Transactions on PAS, Vol. 91, pp.1955–1959, 1972.
- [ 9] STOTT B. e ALSAC O., "Fast Decoupled Load Flow", IEEE Transactions on PAS, Vol. 93, pp.859–869, 1974.
- [10] VAN AMERONGEN R. A. M., "A General–Purpose Version of the Fast Decoupled Load Flow", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 4, No. 2, Maio 1989.

- [11] MONTICELLI A., GARCIA A. e SAAVEDRA O. R., "Fast Decoupled Load Flow: Hypothesis, Derivations, and Testing", 89WM-172-8PWRS, IEEE PES Winter Meeting, New York, Fevereiro 1989.
- [12] AVRIEL M., "Nonlinear Programming: Analysis and Methods", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [13] GRANVILLE S., "Programação Quadrática Sequencial e Fluxo de Potência Ótimo", Relatório Técnico, CEPEL, Rio de Janeiro, 1987.
- [14] GILL P., MURRAY W. e WRIGHT M., "Model Building and Pratical Aspects of Nonlinear Programming", Technical Report SOL 85-2, Stanford University.
- [15] POWEL M. J. D., "Variable Metric Methods for Constrained Optmization in Mathematical Programming: The State of the Art", ed. by A. Bachem , M. Grotschel and B. Korte, 1983.
- [16] ORTEGA J. M. e RHEINBOLDT W. C., "Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables", Academic Press, 1977.
- [17] FLETCHER R., "Practical Methods of Optimization Vol. 2 – Constrained Optimization", John Wiley & Sons, Chichester , 1981.
- [18] MONTICELLI A., DECKMANN S. e GARCIA A., "Introdução ao Fluxo de Potência Ótimo", Apostila do Curso Sistema de Análise de Redes, Volume II, CEPEL, 1981.
- [19] KIRCHMAYER L. K., "Economic Operation of Power Systems", John Wiley, New York, 1958.
- [20] CARPENTIER J., "Contribution á L'étude du Dispatching Économique", Bulletin de la Societe Française des Electriciens, SER. 8, Vol. 3, pp.431-447, 1962.
- [21] DOMMEL H. W. e TINNEY W. F., "Optimal Power Flow Solutions", IEEE Transactions on PAS, Vol. 87, pp.1876-1886, Outubro 1968.



- [22] PESHON J., BREE D. W. e HAJDU L. P., "Optimal Solutions Involving Systems Security", Proceedings on PICA, pp.210–218, 1971.
- [23] PESHON J., BREE D. W. e HAJDU L. P., "Optimal Power Flow Solution for Power System Planning", IEEE Transactions on PAS, Vol. 60, No. 1, pp.64–70, Janeiro 1972.
- [24] STOTT B. e HOBSON H., "Power System Security Control Calculations Using Linear Programming—Parts I and II", IEEE PES Summer Meeting, México, Julho 1977.
- [25] STOTT B. e MARINHO J. L., "Linear Programming for Power System Network Security Applications", 78SM–F78701–5, IEEE PES Summer Meeting, Los Angeles, Julho 1978.
- [26] ALSAC O., BRIGHT J., PRAIS M. e STOTT B., "Further Developments in LP–Based Optimal Power Flow", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 5, No. 3, pp.697–711, Agosto 1990.
- [27] BURCHETT R. C. , HAPP H. H. e WIRGAU K. A., "Large Scale Optimal Power Flow", IEEE Transactions on PAS, Vol. 101, pp.3722–3732, Outubro 1982.
- [28] MURTAUGH B. A. e SAUNDERS M. A., "MINOS 5.0 User's Guide", Technical Report SOL 83–20, Stanford University, Dezembro 1983.
- [29] BURCHETT R. C., HAPP H. H. e VIERATH D. R., "Quadratically Convergent Optimal Power Flow", IEEE Transactions on PAS, Vol. 103, No. 11, pp.3267–3276, Novembro 1984.
- [30] GRANVILLE S., PEREIRA M. V. F. e MONTICELLI A., "An Integrated Methodology for VAR Sources Planning", IEEE Transactions on Power System, Vol. 3, No. 2, pp.549–557, Maio 1988.
- [31] MACHADO P. A., "Desenvolvimento e Implementação de um Programa de Fluxo de Potência Ótimo – Aspectos Teóricos e Práticos", Relatório Técnico CEPEL, Rio de Janeiro, a ser publicado.

- [32] XAVIER A. E., "Penalização Hiperbólica", Anais do I Congresso Latino-Americano de Pesquisa Operacional e Engenharia de Sistemas, Rio de Janeiro, Novembro 1982.
- [33] XAVIER A. E., "Penalização Hiperbólica: Resultados Computacionais", Relatório Técnico SERPRO, Rio de Janeiro.
- [34] MARIA G. A. e FINDLAY J. A., "A Newton Optimal Power Flow Program for Ontario Hydro EMS", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. PWRS-2, No. 3, pp.576-584, Agosto 1987.
- [35] PAPALEXOPOULOS A. D., IMPARATO C. F. e WU F. F., "Large-Scale Optimal Power Flow: Effects of Initialization, Decoupling & Discretization", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 4, No. 2, pp.748-759, Maio 1989.
- [36] MONTICELLI A., LIU WEN-HSIUNG E., "Adaptive Movement Penalty Method for the Newton Optimal Power Flow", 90WM251-9PWRS, IEEE PES Winter Meeting, Atlanta, Fevereiro 1990.
- [37] HUNEAULT M. e GALIANA F. D., "A Survey of the Optimal Power Flow Literature", 90SM-484-6PWRS, IEEE PES Summer Meeting, Minneapolis, Julho 1990.
- [38] TINNEY W. F. e WALKER J. W., "Direct Solutions of Sparse Network Equations by Optimally Ordered Triangular Factorization Proceed", IEEE Transactions on PAS, Vol. 55, pp.1801-1897, 1967.
- [39] TINNEY W. F., BRANDWAJN V. e CHAN S. M., "Sparse Vector Methods", IEEE Transactions on PAS, Vol. 104, pp.295-301, Fevereiro 1985.
- [40] GÓMEZ A. e FRANQUELO L. G., "An Efficient Ordering Algorithm to Improve Sparse Vector Methods", IEEE Transactions on Power System, Vol. 3, No. 4, pp.1538-1544, Novembro 1988.
- [41] CHAN S. M. e BRANDWAJN V., "Partial Matrix Refatorization", IEEE Transactions on PAS, Vol. 104, pp.193-200, Fevereiro 1986.

- [42] AZEVEDO G. P. "Uma Nova Estratégia para Solução de Problemas de Estimação de Estado com Restrições de Igualdade", Tese de Mestrado Submetida à COPPE/UFRJ, Novembro 1989.
- [43] MACHADO P. A., AZEVEDO G. P. e MONTICELLI A., "A Mixed Pivoting Approach to the Factorization of Indefinite Matrices in Power System State Estimation", IEEE PES Summer Meeting, Paper 90SM491-1 PWRs, Minneapolis, Julho 1990.
- [44] MACHADO P. A., AZEVEDO G. P., Discussão do artigo: ALVARADO F. L. e TINNEY W. F., "State Estimation using Augmented Blocked Matrices", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 5, pp.911-922, Agosto 1990.
- [45] PISSANETSKY S., "Sparse Matrix Technology", Academic Press, New York, 1984.
- [46] TINNEY W. F., BRIGHT J. M., DEMAREE K. D. e HUGHES B. A., "Some Deficiencies in Optimal Power Flow", IEEE Transactions on Power Systems, Vol. 3, No. 2, pp.676-683, Maio 1988.
- [47] SUN D. I., DEMAREE K. D. e BREWER B., "Application and Adaptation of Newton for Optimal Power Flow", IEEE Tutorial Course - Application of Optimization Methods for Economy/Security Functions in Power Systems Operations, 90EH0328-5-PWR, 1990.

**APÊNDICE A**  
**MODELO DAS EQUAÇÕES DE FLUXO DE POTÊNCIA [6]**

**A.1 Modelo de Linha de Transmissão (LT)**

A figura (A.1) apresenta o modelo  $\pi$  de uma linha de transmissão.

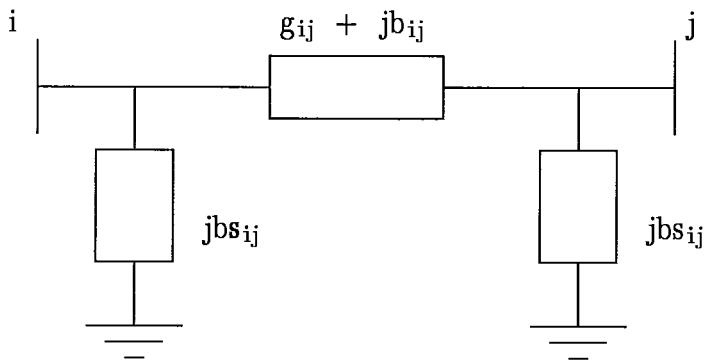


Figura A.1 – Modelo de Linha de Transmissão

onde:

- $g_{ij}$  = condutância série da ligação  $ij$
- $b_{ij}$  = susceptância série da ligação  $ij$
- $bs_{ij}$  = susceptância *shunt* da ligação  $ij$

A potência aparente que flui de  $i$  para  $j$  é dada por:

$$\tilde{S}_{ij} = P_{ij} + jQ_{ij}$$

Expressando  $\tilde{S}_{ij}$  em termos das tensões nodais e dos parâmetros da LT temos:

$$\tilde{S}_{ij}^* = \tilde{E}_i^* (\tilde{E}_i - \tilde{E}_j) (g_{ij} + jb_{ij}) + \tilde{E}_i^* \tilde{E}_i (jbs_{ij})$$

(A.1)

onde:  $\tilde{E}_i$  é o fasor tensão do nó  $i$  dado por:

$$\tilde{E}_i = V_i e^{j\theta_i}; \text{ de maneira semelhante}$$

$$\tilde{E}_j = V_j e^{j\theta_j}$$

O termo  $e^{j\theta_i}$  pode ser reescrito como:

$$e^{j\theta_i} = \cos \theta_i + j\text{sen} \theta_i$$

Desenvolvendo (A.1) temos:

$$\tilde{S}_{ij}^* = V_i^2 [g_{ij} + j(b_{ij} + bs_{ij})] - V_i V_j (\cos \theta_{ij} - j\text{sen} \theta_{ij}) (g_{ij} + jb_{ij})$$

Separando a parte real e imaginária de  $\tilde{S}_{ij}^*$ , temos:

$$P_{ij} = V_i^2 g_{ij} - V_i V_j (g_{ij} \cos \theta_{ij} + b_{ij} \text{sen} \theta_{ij}) \quad (\text{A.2})$$

$$Q_{ij} = -V_i^2 (b_{ij} + bs_{ij}) - V_i V_j (g_{ij} \text{sen} \theta_{ij} - b_{ij} \cos \theta_{ij}) \quad (\text{A.3})$$

Analogamente, os fluxos  $P_{ji}$  e  $Q_{ji}$  são dados por:

$$P_{ji} = V_j^2 g_{ij} - V_i V_j (g_{ij} \cos \theta_{ij} - b_{ij} \text{sen} \theta_{ij}) \quad (\text{A.4})$$

$$Q_{ji} = -V_j^2 (b_{ij} + bs_{ij}) + V_i V_j (g_{ij} \text{sen} \theta_{ij} + b_{ij} \cos \theta_{ij}) \quad (\text{A.5})$$

## A.2 Modelo de Transformador em Fase

A figura (A.2) representa o modelo de um transformador em fase e a figura (A.3) o modelo equivalente  $\pi$ .

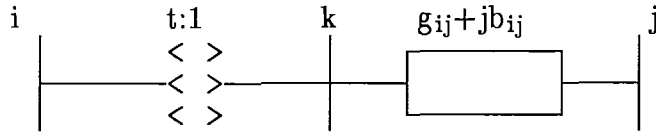
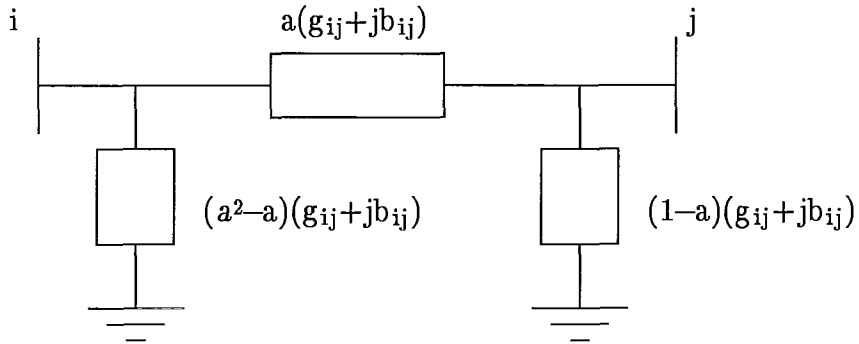


Figura A.2 – Modelo de Transformador em Fase

onde:  $t$  é a relação de transformação referida ao lado  $i$

Figura A.3 – Modelo  $\pi$  do Transformador

onde:  $a = a_{ij} = 1/t$  é o inverso da relação de transformação

Expressando a potência aparente  $\tilde{S}_{ij}$  em termos das tensões nodais e dos parâmetros do transformador temos:

$$\tilde{S}_{ij}^* = \tilde{E}_i^* (\tilde{E}_i - \tilde{E}_j) a_{ij} (g_{ij} + jb_{ij}) + \tilde{E}_i^* \tilde{E}_i (a_{ij}^2 - a_{ij}) (g_{ij} + jb_{ij}) \quad (\text{A.6})$$

Desenvolvendo (A.6), temos:

$$\tilde{S}_{ij}^* = V_i^2 a_{ij}^2 (g_{ij} + jb_{ij}) - a_{ij} V_i V_j (\cos \theta_{ij} - j \text{sen} \theta_{ij}) (g_{ij} + jb_{ij})$$

Separando a parte real e imaginária de  $\tilde{S}_{ij}^*$ , temos:

$$P_{ij} = a_{ij}^2 V_i^2 g_{ij} - a_{ij} V_i V_j (g_{ij} \cos \theta_{ij} + b_{ij} \sin \theta_{ij}) \quad (\text{A.7})$$

$$Q_{ij} = -a_{ij}^2 V_i^2 b_{ij} - a_{ij} V_i V_j (g_{ij} \sin \theta_{ij} - b_{ij} \cos \theta_{ij}) \quad (\text{A.8})$$

Analogamente, os fluxos  $P_{ji}$  e  $Q_{ji}$  são dados por:

$$P_{ji} = V_j^2 g_{ij} - a_{ij} V_i V_j (g_{ij} \cos \theta_{ij} - b_{ij} \sin \theta_{ij}) \quad (\text{A.9})$$

$$Q_{ji} = -V_j^2 b_{ij} + a_{ij} V_i V_j (g_{ij} \sin \theta_{ij} + b_{ij} \cos \theta_{ij}) \quad (\text{A.10})$$

### A.3 Modelo de Transformador Defasador

A figura (A.4) representa o modelo de um transformador defasador

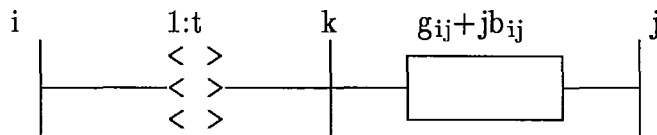


Figura A.4 – Modelo de Transformador Desfasador

onde:  $t = e^{j\varphi_{ij}}$

$\varphi_{ij}$  = ângulo de defasamento do terminal i do transformador em relação ao terminal j

Expressando a potência aparente  $\tilde{S}_{ij}$  em termos das tensões nodais e dos parâmetros do transformador temos:

$$\tilde{S}_{ij}^* = (e^{j\varphi_{ij}} \tilde{E}_i)^* (e^{j\varphi_{ij}} \tilde{E}_i - \tilde{E}_j) (g_{ij} + jb_{ij}) \quad (\text{A.11})$$

Desenvolvendo (A.11), temos:

$$\tilde{S}_{ij}^* = [V_i^2 - V_i V_j e^{-j(\theta_{ij} + \varphi_{ij})}] (g_{ij} + jb_{ij})$$

Separando a parte real e imaginária de  $\tilde{S}_{ij}^*$ , temos:

$$P_{ij} = V_i^2 g_{ij} - V_i V_j [g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + b_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{A.12})$$

$$Q_{ij} = -V_i^2 b_{ij} - V_i V_j [g_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) - b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{A.13})$$

Analogamente, os fluxos  $P_{ji}$  e  $Q_{ji}$  são dados por:

$$P_{ji} = V_j^2 g_{ij} - V_i V_j [g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) - b_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{A.14})$$

$$Q_{ji} = -V_j^2 b_{ij} + V_i V_j [g_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{A.15})$$

#### A.4 Expressões Gerais para os Fluxos de Potência

$$P_{ij} = a_{ij}^2 V_i^2 g_{ij} - a_{ij} V_i V_j [g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + b_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{A.16})$$

$$Q_{ij} = -a_{ij}^2 V_i^2 (b_{ij} + bs_{ij}) - a_{ij} V_i V_j [g_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) - b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{A.17})$$



$$P_{ji} = V_j^2 g_{ij} - a_{ij} V_i V_j [g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) - b_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{A.18})$$

$$Q_{ji} = -V_j^2 (b_{ij} + bs_{ij}) + a_{ij} V_i V_j [g_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{A.19})$$

sendo que:

$$\text{Para linhas de transmiss\~{a}o:} \quad a_{ij} = 1; \quad \varphi_{ij} = 0$$

$$\text{Para transformadores em fase:} \quad bs_{ij} = 0; \quad \varphi_{ij} = 0$$

$$\text{Para transformadores defasadores:} \quad bs_{ij} = 0; \quad a_{ij} = 1$$

## APÊNDICE B

### DERIVADAS DAS EQUAÇÕES DE FLUXO DE POTÊNCIA

Este item apresenta as derivadas de primeira e segunda ordem das expressões gerais de fluxo de potência (A.16) a (A.19) com relação às variáveis do problema de FPO ( $V_i$ ,  $V_j$ ,  $a_{ij}$ ,  $\theta_i$ ,  $\theta_j$ ,  $\varphi_{ij}$ ).

Como já mencionado anteriormente, neste trabalho foi utilizado um algoritmo desacoplado para a solução do problema de FPO. Sendo assim, não são apresentadas as expressões das derivadas de segunda ordem das equações de fluxo de potência que acoplam os subproblemas de potência ativa e de potência reativa.

Ex.:  $\partial^2 P_{ij} / \partial V_i \partial \theta_i$  não é apresentada.

#### B.1 Derivadas de $P_{ij}$

$$\partial P_{ij} / \partial \theta_i = a_{ij} V_i V_j [g_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) - b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.1})$$

$$\partial P_{ij} / \partial \theta_j = - \partial P_{ij} / \partial \theta_i \quad (\text{B.2})$$

$$\partial P_{ij} / \partial \varphi_{ij} = \partial P_{ij} / \partial \theta_i \quad (\text{B.3})$$

$$\partial P_{ij} / \partial V_i = 2a_{ij}^2 V_i g_{ij} - a_{ij} V_j [g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + b_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.4})$$

$$\partial P_{ij} / \partial V_j = -a_{ij} V_i [g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + b_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.5})$$

$$\partial P_{ij} / \partial a_{ij} = 2a_{ij} V_i^2 g_{ij} - V_i V_j [g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + b_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.6})$$

$$\partial^2 P_{ij} / \partial \theta_i^2 = a_{ij} V_i V_j [g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + b_{ij} \sin(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.7})$$

$$\partial^2 P_{ij} / \partial \theta_i \partial \theta_j = - \partial^2 P_{ij} / \partial \theta_i^2 \quad (\text{B.8})$$

$$\partial^2 P_{ij} / \partial \theta_j^2 = \partial^2 P_{ij} / \partial \theta_i^2 \quad (\text{B.9})$$

$$\partial^2 P_{ij} / \partial \varphi_{ij}^2 = \partial^2 P_{ij} / \partial \theta_i^2 \quad (\text{B.10})$$

$$\partial^2 P_{ij} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_i = \partial^2 P_{ij} / \partial \theta_i^2 \quad (\text{B.11})$$

$$\partial^2 P_{ij} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_j = - \partial^2 P_{ij} / \partial \theta_i^2 \quad (\text{B.12})$$

$$\partial^2 P_{ij} / \partial V_i^2 = 2a_{ij}^2 g_{ij} \quad (\text{B.13})$$

$$\partial^2 P_{ij} / \partial V_i \partial V_j = - a_{ij} [g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + b_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.14})$$

$$\partial^2 P_{ij} / \partial V_j^2 = 0 \quad (\text{B.15})$$

$$\partial^2 P_{ij} / \partial a_{ij}^2 = 2V_i^2 g_{ij} \quad (\text{B.16})$$

$$\partial^2 P_{ij} / \partial a_{ij} \partial V_i = 4a_{ij} V_i g_{ij} - V_j [g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + b_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.17})$$

$$\partial^2 P_{ij} / \partial a_{ij} \partial V_j = - V_i [g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + b_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.18})$$

## B.2 Derivadas de $P_{ji}$

$$\partial P_{ji} / \partial \theta_i = a_{ij} V_i V_j [g_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.19})$$

$$\partial P_{ji} / \partial \theta_j = - \partial P_{ji} / \partial \theta_i \quad (\text{B.20})$$

$$\partial P_{ji} / \partial \varphi_{ij} = \partial P_{ji} / \partial \theta_i \quad (\text{B.21})$$

$$\partial P_{ji}/\partial V_i = -a_{ij}V_j[g_{ij}\cos(\theta_{ij}+\varphi_{ij}) - b_{ij}\text{sen}(\theta_{ij}+\varphi_{ij})] \quad (\text{B.22})$$

$$\partial P_{ji}/\partial V_j = 2V_jg_{ij} - a_{ij}V_i[g_{ij}\cos(\theta_{ij}+\varphi_{ij}) - b_{ij}\text{sen}(\theta_{ij}+\varphi_{ij})] \quad (\text{B.23})$$

$$\partial P_{ji}/\partial a_{ij} = -V_iV_j[g_{ij}\cos(\theta_{ij}+\varphi_{ij}) - b_{ij}\text{sen}(\theta_{ij}+\varphi_{ij})] \quad (\text{B.24})$$

$$\partial^2 P_{ji}/\partial \theta_i^2 = a_{ij}V_iV_j[g_{ij}\cos(\theta_{ij}+\varphi_{ij}) - b_{ij}\text{sen}(\theta_{ij}+\varphi_{ij})] \quad (\text{B.25})$$

$$\partial^2 P_{ji}/\partial \theta_i \partial \theta_j = -\partial^2 P_{ji}/\partial \theta_i^2 \quad (\text{B.26})$$

$$\partial^2 P_{ji}/\partial \theta_j^2 = \partial^2 P_{ji}/\partial \theta_i^2 \quad (\text{B.27})$$

$$\partial^2 P_{ji}/\partial \varphi_{ij}^2 = \partial^2 P_{ji}/\partial \theta_i^2 \quad (\text{B.28})$$

$$\partial^2 P_{ji}/\partial \varphi_{ij} \partial \theta_i = \partial^2 P_{ji}/\partial \theta_i^2 \quad (\text{B.29})$$

$$\partial^2 P_{ji}/\partial \varphi_{ij} \partial \theta_j = -\partial^2 P_{ji}/\partial \theta_i^2 \quad (\text{B.30})$$

$$\partial^2 P_{ji}/\partial V_i^2 = 0 \quad (\text{B.31})$$

$$\partial^2 P_{ji}/\partial V_i \partial V_j = -a_{ij}[g_{ij}\cos(\theta_{ij}+\varphi_{ij}) - b_{ij}\text{sen}(\theta_{ij}+\varphi_{ij})] \quad (\text{B.32})$$

$$\partial^2 P_{ji}/\partial V_j^2 = 2g_{ij} \quad (\text{B.33})$$

$$\partial^2 P_{ji}/\partial a_{ij}^2 = 0 \quad (\text{B.34})$$

$$\partial^2 P_{ji}/\partial a_{ij} \partial V_i = -V_j[g_{ij}\cos(\theta_{ij}+\varphi_{ij}) - b_{ij}\text{sen}(\theta_{ij}+\varphi_{ij})] \quad (\text{B.35})$$

$$\partial^2 P_{ji} / \partial a_{ij} \partial V_j = -V_i [g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) - b_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.36})$$

### B.3 Derivadas de $Q_{ij}$

$$\partial Q_{ij} / \partial \theta_i = -a_{ij} V_i V_j [g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + b_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.37})$$

$$\partial Q_{ij} / \partial \theta_j = -\partial Q_{ij} / \partial \theta_i \quad (\text{B.38})$$

$$\partial Q_{ij} \partial \varphi_{ij} = \partial Q_{ij} / \partial \theta_i \quad (\text{B.39})$$

$$\partial Q_{ij} / \partial V_i = -2a_{ij}^2 V_i (b_{ij} + b_{s_{ij}}) - a_{ij} V_j [g_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) - b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.40})$$

$$\partial Q_{ij} / \partial V_j = -a_{ij} V_i [g_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) - b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.41})$$

$$\partial Q_{ij} / \partial a_{ij} = -2a_{ij} V_i^2 b_{ij} - V_i V_j [g_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) - b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.42})$$

$$\partial^2 Q_{ij} / \partial \theta_i^2 = a_{ij} V_i V_j [g_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) - b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.43})$$

$$\partial^2 Q_{ij} / \partial \theta_i \partial \theta_j = -\partial^2 Q_{ij} / \partial \theta_i^2 \quad (\text{B.44})$$

$$\partial^2 Q_{ij} / \partial \theta_j^2 = \partial^2 Q_{ij} / \partial \theta_i^2 \quad (\text{B.45})$$

$$\partial^2 Q_{ij} / \partial \varphi_{ij}^2 = \partial^2 Q_{ij} / \partial \theta_i^2 \quad (\text{B.46})$$

$$\partial^2 Q_{ij} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_i = \partial^2 Q_{ij} / \partial \theta_i^2 \quad (\text{B.47})$$

$$\partial^2 Q_{ij} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_j = -\partial^2 Q_{ij} / \partial \theta_i^2 \quad (\text{B.48})$$

$$\partial^2 Q_{ij} / \partial V_i^2 = -2a_{ij}^2(b_{ij} + bs_{ij}) \quad (\text{B.49})$$

$$\partial^2 Q_{ij} / \partial V_i \partial V_j = -a_{ij}[g_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) - b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.50})$$

$$\partial^2 Q_{ij} / \partial V_j^2 = 0 \quad (\text{B.51})$$

$$\partial^2 Q_{ij} / \partial a_{ij}^2 = -2V_i b_{ij} \quad (\text{B.52})$$

$$\partial^2 Q_{ij} / \partial a_{ij} \partial V_i = -4a_{ij} V_i b_{ij} - V_j [g_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) - b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.53})$$

$$\partial^2 Q_{ij} / \partial a_{ij} \partial V_j = -V_i [g_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) - b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.54})$$

#### B.4 Derivadas de $Q_{ji}$

$$\partial Q_{ji} / \partial \theta_i = a_{ij} V_i V_j [g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) - b_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.55})$$

$$\partial Q_{ji} / \partial \theta_j = -\partial Q_{ji} / \partial \theta_i \quad (\text{B.56})$$

$$\partial Q_{ji} / \partial \varphi_{ij} = \partial Q_{ji} / \partial \theta_i \quad (\text{B.57})$$

$$\partial Q_{ji} / \partial V_i = a_{ij} V_j [g_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.58})$$

$$\partial Q_{ji} / \partial V_j = -2V_j(b_{ij} + bs_{ij}) + a_{ij} V_i [g_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.59})$$

$$\partial Q_{ji} / \partial a_{ij} = V_i V_j [g_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) + b_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{B.60})$$

$$\partial^2 Q_{ji}/\partial\theta_i^2 = -a_{ij}V_iV_j[g_{ij}\text{sen}(\theta_{ij}+\varphi_{ij}) + b_{ij}\text{cos}(\theta_{ij}+\varphi_{ij})] \quad (\text{B.61})$$

$$\partial^2 Q_{ji}/\partial\theta_i\partial\theta_j = -\partial^2 Q_{ji}/\partial\theta_i^2 \quad (\text{B.62})$$

$$\partial^2 Q_{ji}/\partial\theta_j^2 = \partial^2 Q_{ji}/\partial\theta_i^2 \quad (\text{B.63})$$

$$\partial^2 Q_{ji}/\partial\varphi_{ij}^2 = \partial^2 Q_{ji}/\partial\theta_i^2 \quad (\text{B.64})$$

$$\partial^2 Q_{ji}/\partial\varphi_{ij}\partial\theta_i = \partial^2 Q_{ji}/\partial\theta_i^2 \quad (\text{B.65})$$

$$\partial^2 Q_{ji}/\partial\varphi_{ij}\partial\theta_j = -\partial^2 Q_{ji}/\partial\theta_i^2 \quad (\text{B.66})$$

$$\partial^2 Q_{ji}/\partial V_i^2 = 0 \quad (\text{B.67})$$

$$\partial^2 Q_{ji}/\partial V_i\partial V_j = a_{ij}[g_{ij}\text{sen}(\theta_{ij}+\varphi_{ij}) + b_{ij}\text{cos}(\theta_{ij}+\varphi_{ij})] \quad (\text{B.68})$$

$$\partial^2 Q_{ji}/\partial V_j^2 = -2(b_{ij}+bs_{ij}) \quad (\text{B.69})$$

$$\partial^2 Q_{ji}/\partial a_{ij}^2 = 0 \quad (\text{B.70})$$

$$\partial^2 Q_{ji}/\partial a_{ij}\partial V_i = V_j[g_{ij}\text{sen}(\theta_{ij}+\varphi_{ij}) + b_{ij}\text{cos}(\theta_{ij}+\varphi_{ij})] \quad (\text{B.71})$$

$$\partial^2 Q_{ji}/\partial a_{ij}\partial V_j = V_i[g_{ij}\text{sen}(\theta_{ij}+\varphi_{ij}) + b_{ij}\text{cos}(\theta_{ij}+\varphi_{ij})] \quad (\text{B.72})$$

## B.5 Derivadas da Função Quadrado da Potência Aparente (S)

$$\text{Seja } S_{ij} = P_{ij}^2 + Q_{ij}^2$$

### B.5.1 Derivadas de $S_{ij}$

$$\partial S_{ij} / \partial \theta_i = 2(P_{ij} \partial P_{ij} / \partial \theta_i + Q_{ij} \partial Q_{ij} / \partial \theta_i) \quad (\text{B.73})$$

$$\partial S_{ij} / \partial \theta_j = - \partial S_{ij} / \partial \theta_i \quad (\text{B.74})$$

$$\partial S_{ij} / \partial \varphi_{ij} = \partial S_{ij} / \partial \theta_i \quad (\text{B.75})$$

$$\partial S_{ij} / \partial V_i = 2(P_{ij} \partial P_{ij} / \partial V_i + Q_{ij} \partial Q_{ij} / \partial V_i) \quad (\text{B.76})$$

$$\partial S_{ij} / \partial V_j = 2(P_{ij} \partial P_{ij} / \partial V_j + Q_{ij} \partial Q_{ij} / \partial V_j) \quad (\text{B.77})$$

$$\partial S_{ij} / \partial a_{ij} = 2(P_{ij} \partial P_{ij} / \partial a_{ij} + Q_{ij} \partial Q_{ij} / \partial a_{ij}) \quad (\text{B.78})$$

$$\begin{aligned} \partial^2 S_{ij} / \partial \theta_i^2 = & 2[(P_{ij} \partial^2 P_{ij} / \partial \theta_i^2) + (\partial P_{ij} / \partial \theta_i)^2 + \\ & + (Q_{ij} \partial^2 Q_{ij} / \partial \theta_i^2) + (\partial Q_{ij} / \partial \theta_i)^2] \end{aligned} \quad (\text{B.79})$$

$$\partial^2 S_{ij} / \partial \theta_i \partial \theta_j = - \partial^2 S_{ij} / \partial \theta_i^2 \quad (\text{B.80})$$

$$\partial^2 S_{ij} / \partial \theta_j^2 = \partial^2 S_{ij} / \partial \theta_i^2 \quad (\text{B.81})$$

$$\partial^2 S_{ij} / \partial \varphi_{ij}^2 = \partial^2 S_{ij} / \partial \theta_i^2 \quad (\text{B.82})$$

$$\partial^2 S_{ij} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_i = \partial^2 S_{ij} / \partial \theta_i^2 \quad (\text{B.83})$$

$$\partial^2 S_{ij} / \partial \varphi_i \partial \theta_j = - \partial^2 S_{ij} / \partial \theta_i^2 \quad (\text{B.84})$$

$$\begin{aligned} \partial^2 S_{ij} / \partial V_i^2 = & 2[(P_{ij} \partial^2 P_{ij} / \partial V_i^2) + (\partial P_{ij} / \partial V_i)^2 + \\ & + (Q_{ij} \partial^2 Q_{ij} / \partial V_i^2) + (\partial Q_{ij} / \partial V_i)^2] \end{aligned} \quad (\text{B.85})$$

$$\begin{aligned} \partial^2 S_{ij} / \partial V_i \partial V_j = & 2[(P_{ij} \partial^2 P_{ij} / \partial V_i \partial V_j) + (\partial P_{ij} / \partial V_i \partial P_{ij} / \partial V_j) + \\ & + (Q_{ij} \partial^2 Q_{ij} / \partial V_i \partial V_j) + (\partial Q_{ij} / \partial V_i \partial Q_{ij} / \partial V_j)] \end{aligned} \quad (\text{B.86})$$



$$\begin{aligned} \partial^2 S_{ij} / \partial V_j^2 = & 2[(P_{ij} \partial^2 P_{ij} / \partial V_j^2) + (\partial P_{ij} / \partial V_j)^2 + \\ & + (Q_{ij} \partial^2 Q_{ij} / \partial V_j^2) + (\partial Q_{ij} / \partial V_j)^2] \end{aligned} \quad (\text{B.87})$$

$$\begin{aligned} \partial^2 S_{ij} / \partial a_{ij}^2 = & 2[(P_{ij} \partial^2 P_{ij} / \partial a_{ij}^2) + (\partial P_{ij} / \partial a_{ij})^2 + \\ & + (Q_{ij} \partial^2 Q_{ij} / \partial a_{ij}^2) + (\partial Q_{ij} / \partial a_{ij})^2] \end{aligned} \quad (\text{B.88})$$

$$\begin{aligned} \partial^2 S_{ij} / \partial a_{ij} \partial V_i = & 2[(P_{ij} \partial^2 P_{ij} / \partial a_{ij} \partial V_i) + (\partial P_{ij} / \partial a_{ij} \partial P_{ij} / \partial V_i) + \\ & + (Q_{ij} \partial^2 Q_{ij} / \partial a_{ij} \partial V_i) + (\partial Q_{ij} / \partial a_{ij} \partial Q_{ij} / \partial V_i)] \end{aligned} \quad (\text{B.89})$$

$$\begin{aligned} \partial^2 S_{ij} / \partial a_{ij} \partial V_j = & 2[(P_{ij} \partial^2 P_{ij} / \partial a_{ij} \partial V_j) + (\partial P_{ij} / \partial a_{ij} \partial P_{ij} / \partial V_j) + \\ & + (Q_{ij} \partial^2 Q_{ij} / \partial a_{ij} \partial V_j) + (\partial Q_{ij} / \partial a_{ij} \partial Q_{ij} / \partial V_j)] \end{aligned} \quad (\text{B.90})$$

### B.5.2 Derivadas de $S_{ji}$

Para obter as derivadas de  $S_{ji}$  basta substituir o subscrito "ij" que aparece em  $S_{ij}$ ,  $P_{ij}$  e  $Q_{ij}$  por "ji" nas expressões apresentadas no item B.5.1.

**APÊNDICE C**  
**FUNÇÕES OBJETIVO – MODELOS E DERIVADAS**

**C.1 Mínimo Custo de Geração de Potência Ativa**

$$f_0 = \frac{1}{2} \sum_i CP_i PG_i^2 \quad (C.1)$$

onde:  $PG_i$  = potência ativa gerada no gerador  $i$

$CP_i$  = custo de geração de potência ativa

$$\partial f_0 / \partial PG_i = CP_i PG_i \quad (C.2)$$

$$\partial^2 f_0 / \partial PG_i^2 = CP_i \quad (C.3)$$

**C.2 Mínimo Custo de Geração de Potência Reativa**

$$f_0 = \frac{1}{2} \sum_i CQ_i QG_i^2 \quad (C.4)$$

onde:  $QG_i$  = potência reativa gerada no gerador  $i$

$CQ_i$  = custo de geração de potência reativa

$$\partial f_0 / \partial QG_i = CQ_i QG_i \quad (C.5)$$

$$\partial^2 f_0 / \partial QG_i^2 = CQ_i \quad (C.6)$$

### C.3 Mínima Alocação de Potência Reativa

$$f_0 = \frac{1}{2} \sum_i CQA_i QA_i^2 \quad (C.7)$$

onde:  $QA_i$  = potência reativa alocada no nó  $i$

$CQA_i$  = custo de alocação de potência reativa

$$\partial f_0 / \partial QA_i = CQA_i QA_i \quad (C.8)$$

$$\partial^2 f_0 / \partial QA_i^2 = CQA_i \quad (C.9)$$

### C.4 Mínimo Corte de Carga

$$f_0 = \frac{1}{2} \sum_i CFC_i [(1 - FC_i) PL_i]^2 \quad (C.10)$$

onde:  $PL_i$  = carga de potência ativa original do nó  $i$  (cte.)

$FC_i$  = parcela da carga de potência ativa mantida no nó  $i$   
(em pu)

$CFC_i$  = custo associado ao corte de carga

$0 \leq FC_i \leq 1$        $FC = 0 \Rightarrow$  corte total da carga;  
                                  $FC = 1 \Rightarrow$  não há corte

$$\partial f_0 / \partial FC_i = - CFC_i (1 - FC_i) PL_i^2 \quad (C.11)$$

$$\partial^2 f_0 / \partial FC_i^2 = CFC_i PL_i^2 \quad (C.12)$$

### C.5 Mínima Perda

$$f_o = \sum_{ij} g_{ij} [a_{ij}^2 V_i^2 + V_j^2 - 2a_{ij} V_i V_j \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{C.13})$$

onde:  $\sum_{ij}$  significa somatório sobre todos os circuitos

$$\partial f_o / \partial \theta_i = \sum_{ij} g_{ij} [2a_{ij} V_i V_j \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{C.14})$$

$$\partial f_o / \partial \theta_j = - \partial f_o / \partial \theta_i \quad (\text{C.15})$$

$$\partial f_o / \partial \varphi_{ij} = 2a_{ij} V_i V_j g_{ij} \text{sen}(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) \quad (\text{C.16})$$

$$\partial f_o / \partial V_i = \sum_{ij} g_{ij} [2a_{ij}^2 V_i - 2a_{ij} V_j \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{C.17})$$

$$\partial f_o / \partial V_j = \sum_{ij} g_{ij} [2V_j - 2a_{ij} V_i \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{C.18})$$

$$\partial f_o / \partial a_{ij} = g_{ij} [2a_{ij} V_i^2 - 2V_i V_j \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{C.19})$$

$$\partial^2 f_o / \partial \theta_i^2 = \sum_{ij} g_{ij} [2a_{ij} V_i V_j \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (\text{C.20})$$

$$\partial^2 f_o / \partial \theta_i \partial \theta_j = - 2a_{ij} V_i V_j g_{ij} \cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) \quad (\text{C.21})$$

$$\partial^2 f_o / \partial \theta_j^2 = \partial^2 f_o / \partial \theta_i^2 \quad (\text{C.22})$$

$$\partial^2 f_o / \partial \varphi_{ij}^2 = - \partial^2 f_o / \partial \theta_i \partial \theta_j \quad (\text{C.23})$$

$$\partial^2 f_o / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_i = \partial^2 f_o / \partial \varphi_{ij}^2 \quad (\text{C.24})$$

$$\partial^2 f_o / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_j = - \partial^2 f_o / \partial \varphi_{ij}^2 \quad (\text{C.25})$$

$$\partial^2 f_o / \partial V_i^2 = \sum_{ij} 2a_{ij}^2 g_{ij} \quad (\text{C.26})$$

$$\partial^2 f_o / \partial V_i \partial V_j = -2a_{ij}g_{ij}\cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) \quad (C.27)$$

$$\partial^2 f_o / \partial V_j^2 = \sum_{ij} 2g_{ij} \quad (C.28)$$

$$\partial^2 f_o / \partial a_{ij}^2 = 2V_i^2 g_{ij} \quad (C.29)$$

$$\partial^2 f_o / \partial a_{ij} \partial V_i = g_{ij}[4a_{ij}V_i - 2V_j\cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij})] \quad (C.30)$$

$$\partial^2 f_o / \partial a_{ij} \partial V_j = -2V_i g_{ij}\cos(\theta_{ij} + \varphi_{ij}) \quad (C.31)$$

### C.6 Mínimo Desvio de Potência Ativa Gerada

$$f_o = \sum_i \frac{1}{2} \text{CMP}_i (\text{PG}_i - \text{PGB}_i)^2 \quad (C.32)$$

onde:  $\text{PG}_i$  = potência ativa gerada no gerador  $i$

$\text{PGB}_i$  = potência ativa especificada para o gerador  $i$

$\text{CMP}_i$  = custo

$$\partial f_o / \partial \text{PG}_i = \text{CMP}_i (\text{PG}_i - \text{PGB}_i) \quad (C.33)$$

$$\partial^2 f_o / \partial \text{PG}_i^2 = \text{CMP}_i \quad (C.34)$$

### C.7 Mínimo Desvio de Ângulo de Defasamento

$$f_o = \sum_{ij} \frac{1}{2} \text{CMF}_{ij} (\varphi_{ij} - \text{FB}_{ij})^2 \quad (C.35)$$

onde:  $\varphi_{ij}$  = ângulo de defasamento do circuito ij

$FB_{ij}$  = ângulo de defasamento especificado para o circuito ij

$CMF_{ij}$  = custo

$$\frac{\partial f_o}{\partial \varphi_{ij}} = CMF_{ij} (\varphi_{ij} - FB_{ij}) \quad (C.36)$$

$$\frac{\partial^2 f_o}{\partial \varphi_{ij}^2} = CMF_{ij} \quad (C.37)$$

### C.8 Mínimo Desvio de Tensão

$$f_o = \sum_i \frac{1}{2} CMV_i (V_i - VB_i)^2 \quad (C.38)$$

onde:  $V_i$  = tensão do nó i

$VB_i$  = tensão especificada para o nó i

$CMV_i$  = custo

$$\frac{\partial f_o}{\partial V_i} = CMV_i (V_i - VB_i) \quad (C.39)$$

$$\frac{\partial^2 f_o}{\partial V_i^2} = CMV_i \quad (C.40)$$

### C.9 Mínimo Desvio de Tap

$$f_o = \sum_{ij} \frac{1}{2} CMA_{ij} (a_{ij} - ab_{ij})^2 \quad (C.41)$$

onde:  $a_{ij}$  = tap do transformador ij

$ab_{ij}$  = valor especificado para o tap do transformador ij

$CMA_{ij}$  = custo

$$\partial f_o / \partial a_{ij} = CMA_{ij} (a_{ij} - ab_{ij}) \quad (C.42)$$

$$\partial^2 f_o / \partial a_{ij}^2 = CMA_{ij} \quad (C.43)$$

### C.10 Mínimo Desvio do Ponto de Operação

Esta função objetivo é uma combinação das funções apresentadas nos itens C.6 a C.9.

$$f_o = f_oP + f_o\varphi + f_oV + f_oT \quad (C.44)$$

onde:  $f_oP$  = mínimo desvio de potência ativa gerada

$f_o\varphi$  = mínimo desvio de ângulo de defasamento

$f_oV$  = mínimo desvio de tensão

$f_oT$  = mínimo desvio de tap

Os valores do gradiente e da hessiana da função objetivo, são aqueles já apresentados nos itens C.6 a C.9.

### C.11 Mínimo Desvio de Intercâmbio

$$f_o = \sum_i \frac{1}{2} CMI_i (IT_i - ITB_i)^2 \quad (C.45)$$

onde:  $IT_i$  = intercâmbio da área i

$ITB_i$  = intercâmbio especificado para a área i

$CMI_i$  = custo

$$\partial f_o / \partial IT_i = CMI_i (IT_i - ITB_i) \quad (C.46)$$

$$\partial^2 f_o / \partial IT_i^2 = CMI_i \quad (C.47)$$

### C.12 Mínimo Desvio de Restrição Adicional (RAD)

$$f_o = \sum_i \frac{1}{2} CMR_i (RA_i - RAB_i)^2 \quad (C.48)$$

onde:  $RA_i$  = valor calculado da restrição adicional i

$RAB_i$  = valor especificado para a restrição adicional i

$CMR_i$  = custo

$$\partial f_o / \partial RA_i = CMR_i (RA_i - RAB_i) \quad (C.49)$$

$$\partial^2 f_o / \partial RA_i^2 = CMR_i \quad (C.50)$$



**APÊNDICE D**  
**FUNÇÃO LAGRANGEANA – MODELO E DERIVADAS**

Como descrito no capítulo IV a função lagrangeana, associada ao problema de FPO (IV.1), pode ser escrita da seguinte forma:

$$L(\mathbf{x}, \lambda, \mu) = f_0 - \lambda^t \mathbf{g}(\mathbf{x}) - \mu^t \mathbf{h}(\mathbf{x}) \quad (\text{D.1})$$

Neste item, o termo associado às restrições de desigualdade será desprezado. O tratamento destas restrições está descrito no capítulo IV.

Sendo assim, temos a seguinte função lagrangeana simplificada:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f_0 - \lambda^t \mathbf{g}(\mathbf{x}) \quad (\text{D.2})$$

onde:  $f_0$  = função objetivo

$\lambda$  = vetor dos multiplicadores de Lagrange associado às restrições de igualdade

$\mathbf{g}$  = função vetorial das restrições de igualdade

$\mathbf{x}$  = conjunto de variáveis do problema

Explicitando a função  $\mathbf{g}$  e os multiplicadores de Lagrange para o problema de FPO temos:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x}, \lambda) = & f_0 - \sum_i \lambda p_i [P G_i - F C_i P L_i - \sum_{j \in \Omega_i} P_{ij}] + \\ & - \sum_i \lambda q_i [Q G_i - F C_i Q L_i + Q A_i + V_i^2 b s h_i - \sum_{j \in \Omega_i} Q_{ij}] + \\ & - \sum_i \lambda I_i [I T_1 - (\sum_R P_{ij} + \sum_S P_{ji} - \sum_T P_{ij} - \sum_U P_{ji})] \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$

- onde:
- $\lambda_{p_i}$  = multiplicador de Lagrange associado à equação de balanço de potência ativa do nó  $i$
  - $\lambda_{q_i}$  = multiplicador de Lagrange associado à equação de balanço de potência reativa do nó  $i$
  - $\lambda_{I_1}$  = multiplicador de Lagrange associado à restrição de intercâmbio da área  $l$
  - $P_{G_i}$  = potência ativa gerada no nó  $i$
  - $FC_i$  = fator de carga (carga mantida) no nó  $i$
  - $PL_i$  = carga ativa original do nó  $i$
  - $QG_i$  = potência reativa gerada no nó  $i$
  - $QL_i$  = carga reativa original do nó  $i$
  - $QA_i$  = potência reativa alocada no nó  $i$
  - $b_{sh_i}$  = valor total da susceptância *shunt* do nó  $i$
  - $IT_1$  = intercâmbio líquido da área  $l$
  - $\Omega_i$  = vizinhança do nó  $i$  (conjunto de nós ligados ao nó  $i$ )
  - $P_{ij}$  = fluxo de potência ativa no circuito  $ij$
  - $Q_{ij}$  = fluxo de potência reativa no circuito  $ij$
  - $R$  = conjunto de circuitos de interligação  $ij$  tal que:
    - medição é realizada no nó  $i$
    - nó  $i$  pertence a área  $l$

S = conjunto de circuitos de interligação  $ij$  tal que:  
 – medição é realizada no nó  $j$   
 – nó  $j$  pertence a área  $l$

T = conjunto de circuitos de interligação  $ij$  tal que:  
 – medição é realizada no nó  $i$   
 – nó  $i$  não pertence a área  $l$

U = conjunto de circuitos de interligação  $ij$  tal que:  
 – medição é realizada no nó  $j$   
 – nó  $j$  não pertence a área  $l$

Obs:

- 1) O modelo das restrições adicionais não foi incluído na função Lagrangeana devido ao seu caráter particular. Entretanto, detalhes relativos a este modelo podem ser encontrados no item IV.3.2.
- 2) O modelo de carga adotado na formulação da função Lagrangeana é invariante com a tensão. Os modelos de carga que variam com a tensão são tratados de forma particular no item IV.3.2.

A seguir são apresentadas as derivadas da função Lagrangeana (D.3) com relação às variáveis  $x$  e  $\lambda$ . Pelos motivos já expostos no apêndice B, não serão apresentadas as derivadas da função Lagrangeana que acoplam os subproblemas de potência ativa e de potência reativa.

### D.1 Derivadas em Relação às Variáveis do Subproblema de Potência Ativa

$$\begin{aligned}
 \partial L / \partial \theta_i &= \partial f_o / \partial \theta_i + \lambda_{p_i} \sum_{j \in \Omega_i} \partial P_{ij} / \partial \theta_i + \sum_{j \in \Omega_i} \lambda_{p_j} \partial P_{ji} / \partial \theta_i + \\
 &+ \lambda_{q_i} \sum_{j \in \Omega_i} \partial Q_{ij} / \partial \theta_i + \sum_{j \in \Omega_i} \lambda_{q_j} \partial Q_{ji} / \partial \theta_i + \\
 &+ \sum_{l \in X} \lambda I_l (\sum_R \partial P_{ij} / \partial \theta_i + \sum_S \partial P_{ji} / \partial \theta_i - \sum_T \partial P_{ij} / \partial \theta_i - \sum_U \partial P_{ji} / \partial \theta_i)
 \end{aligned} \tag{D.4}$$

onde: X é o conjunto de áreas elétricas associado aos circuitos de interligação conectados ao nó i.

$$\begin{aligned}
 \partial L / \partial \theta_j &= \partial f_o / \partial \theta_j + \lambda_{p_j} \sum_{i \in \Omega_j} \partial P_{ji} / \partial \theta_j + \sum_{i \in \Omega_j} \lambda_{p_i} \partial P_{ij} / \partial \theta_j + \\
 &+ \lambda_{q_j} \sum_{i \in \Omega_j} \partial Q_{ji} / \partial \theta_j + \sum_{i \in \Omega_j} \lambda_{q_i} \partial Q_{ij} / \partial \theta_j + \\
 &+ \sum_{l \in Y} \lambda I_l (\sum_R \partial P_{ij} / \partial \theta_j + \sum_S \partial P_{ji} / \partial \theta_j - \sum_T \partial P_{ij} / \partial \theta_j - \sum_U \partial P_{ji} / \partial \theta_j)
 \end{aligned} \tag{D.5}$$

onde: Y é o conjunto de áreas elétricas associado aos circuitos de interligação conectados ao nó j.

$$\begin{aligned}
 \partial L / \partial \varphi_{ij} &= \partial f_o / \partial \varphi_{ij} + \lambda_{p_i} \partial P_{ij} / \partial \varphi_{ij} + \lambda_{p_j} \partial P_{ji} / \partial \varphi_{ij} + \\
 &+ \lambda_{q_i} \partial Q_{ij} / \partial \varphi_{ij} + \lambda_{q_j} \partial Q_{ji} / \partial \varphi_{ij} + \\
 &+ \sum_{l \in Z} \lambda I_l (\sum_R \partial P_{ij} / \partial \varphi_{ij} + \sum_S \partial P_{ji} / \partial \varphi_{ij} - \sum_T \partial P_{ij} / \partial \varphi_{ij} - \sum_U \partial P_{ji} / \partial \varphi_{ij})
 \end{aligned} \tag{D.6}$$

onde: Z é o conjunto de áreas elétricas interligadas pelo circuito ij

$$\partial L / \partial PG_i = \partial f_o / \partial PG_i - \lambda_{p_i} \tag{D.7}$$

$$\partial L / \partial FC_i = \partial f_o / \partial FC_i + \lambda_{p_i} PL_i + \lambda_{q_i} QL_i \tag{D.8}$$

$$\partial L / \partial IT_1 = \partial f_o / \partial IT_1 - \lambda I_1 \tag{D.9}$$

$$\partial L / \partial \lambda_{p_i} = FC_i PL_i - PG_i + \sum_{j \in \Omega_i} P_{ij} \quad (D.10)$$

$$\partial L / \partial \lambda_{I_1} = \left( \sum_R P_{ij} + \sum_S P_{ji} - \sum_T P_{ij} - \sum_U P_{ji} \right) - IT_1 \quad (D.11)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 L / \partial \theta_i^2 &= \partial^2 f_o / \partial \theta_i^2 + \lambda_{p_i} \sum_{j \in \Omega_i} \partial^2 P_{ij} / \partial \theta_i^2 + \sum_{j \in \Omega_i} \lambda_{p_j} \partial^2 P_{ji} / \partial \theta_i^2 + \\ &+ \lambda_{q_i} \sum_{j \in \Omega_i} \partial^2 Q_{ij} / \partial \theta_i^2 + \sum_{j \in \Omega_i} \lambda_{q_j} \partial^2 Q_{ji} / \partial \theta_i^2 + \\ &+ \sum_{l \in X} \lambda_{I_1} \left( \sum_R \partial^2 P_{ij} / \partial \theta_i^2 + \sum_S \partial^2 P_{ji} / \partial \theta_i^2 + \right. \\ &\left. - \sum_T \partial^2 P_{ij} / \partial \theta_i^2 - \sum_U \partial^2 P_{ji} / \partial \theta_i^2 \right) \end{aligned} \quad (D.12)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 L / \partial \theta_i \partial \theta_j &= \partial^2 f_o / \partial \theta_i \partial \theta_j + \lambda_{p_i} \partial^2 P_{ij} / \partial \theta_i \partial \theta_j + \lambda_{p_j} \partial^2 P_{ji} / \partial \theta_i \partial \theta_j + \\ &+ \lambda_{q_i} \partial^2 Q_{ij} / \partial \theta_i \partial \theta_j + \lambda_{q_j} \partial^2 Q_{ji} / \partial \theta_i \partial \theta_j + \\ &+ \sum_{l \in Z} \lambda_{I_1} \left( \sum_R \partial^2 P_{ij} / \partial \theta_i \partial \theta_j + \sum_S \partial^2 P_{ji} / \partial \theta_i \partial \theta_j + \right. \\ &\left. - \sum_T \partial^2 P_{ij} / \partial \theta_i \partial \theta_j - \sum_U \partial^2 P_{ji} / \partial \theta_i \partial \theta_j \right) \end{aligned} \quad (D.13)$$

$$\begin{aligned} \partial^2 L / \partial \theta_j^2 &= \partial^2 f_o / \partial \theta_j^2 + \lambda_{p_j} \sum_{i \in \Omega_j} \partial^2 P_{ji} / \partial \theta_j^2 + \sum_{i \in \Omega_j} \lambda_{p_i} \partial^2 P_{ij} / \partial \theta_j^2 + \\ &+ \lambda_{q_j} \sum_{i \in \Omega_j} \partial^2 Q_{ji} / \partial \theta_j^2 + \sum_{i \in \Omega_j} \lambda_{q_i} \partial^2 Q_{ij} / \partial \theta_j^2 + \\ &+ \sum_{l \in Y} \lambda_{I_1} \left( \sum_R \partial^2 P_{ij} / \partial \theta_j^2 + \sum_S \partial^2 P_{ji} / \partial \theta_j^2 + \right. \\ &\left. - \sum_T \partial^2 P_{ij} / \partial \theta_j^2 - \sum_U \partial^2 P_{ji} / \partial \theta_j^2 \right) \end{aligned} \quad (D.14)$$

$$\begin{aligned}
\partial^2 L / \partial \varphi_{ij}^2 &= \partial^2 f_0 / \partial \varphi_{ij}^2 + \lambda_{p_i} \partial^2 P_{ij} / \partial \varphi_{ij}^2 + \lambda_{p_j} \partial^2 P_{ji} / \partial \varphi_{ij}^2 + \\
&+ \lambda_{q_i} \partial^2 Q_{ij} / \partial \varphi_{ij}^2 + \lambda_{q_j} \partial^2 Q_{ji} / \partial \varphi_{ij}^2 + \\
&+ \sum_{l \in Z} \lambda_{I_l} \left( \sum_{R} \partial^2 P_{ij} / \partial \varphi_{ij}^2 + \sum_{S} \partial^2 P_{ji} / \partial \varphi_{ij}^2 + \right. \\
&\left. - \sum_{T} \partial^2 P_{ij} / \partial \varphi_{ij}^2 - \sum_{U} \partial^2 P_{ji} / \partial \varphi_{ij}^2 \right) \tag{D.15}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial^2 L / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_i &= \partial^2 f_0 / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_i + \lambda_{p_i} \partial^2 P_{ij} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_i + \lambda_{p_j} \partial^2 P_{ji} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_i + \\
&+ \lambda_{q_i} \partial^2 Q_{ij} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_i + \lambda_{q_j} \partial^2 Q_{ji} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_i + \\
&+ \sum_{l \in Z} \lambda_{I_l} \left( \sum_{R} \partial^2 P_{ij} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_i + \sum_{S} \partial^2 P_{ji} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_i + \right. \\
&\left. - \sum_{T} \partial^2 P_{ij} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_i - \sum_{U} \partial^2 P_{ji} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_i \right) \tag{D.16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial^2 L / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_j &= \partial^2 f_0 / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_j + \lambda_{p_i} \partial^2 P_{ij} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_j + \lambda_{p_j} \partial^2 P_{ji} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_j + \\
&+ \lambda_{q_i} \partial^2 Q_{ij} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_j + \lambda_{q_j} \partial^2 Q_{ji} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_j + \\
&+ \sum_{l \in Z} \lambda_{I_l} \left( \sum_{R} \partial^2 P_{ij} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_j + \sum_{S} \partial^2 P_{ji} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_j + \right. \\
&\left. - \sum_{T} \partial^2 P_{ij} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_j - \sum_{U} \partial^2 P_{ji} / \partial \varphi_{ij} \partial \theta_j \right) \tag{D.17}
\end{aligned}$$

$$\partial^2 L / \partial P G_i^2 = \partial^2 f_0 / \partial P G_i^2 \tag{D.18}$$

$$\partial^2 L / \partial F C_i^2 = \partial^2 f_0 / \partial F C_i^2 \tag{D.19}$$

$$\partial^2 L / \partial \Gamma_1^2 = \partial^2 f_0 / \partial \Gamma_1^2 \quad (\text{D.20})$$

$$\partial^2 L / \partial \lambda_{p_i} \partial \theta_i = \sum_{j \in \Omega_i} \partial P_{ij} / \partial \theta_i \quad (\text{D.21})$$

$$\partial^2 L / \partial \lambda_{p_i} \partial \theta_j = \partial P_{ij} / \partial \theta_j \quad (\text{D.22})$$

$$\partial^2 L / \partial \lambda_{p_j} \partial \theta_i = \partial P_{ji} / \partial \theta_i \quad (\text{D.23})$$

$$\partial^2 L / \partial \lambda_{p_j} \partial \theta_j = \sum_{i \in \Omega_j} \partial P_{ji} / \partial \theta_j \quad (\text{D.24})$$

$$\partial^2 L / \partial \lambda_{p_i} \partial \varphi_{ij} = \partial P_{ij} / \partial \varphi_{ij} \quad (\text{D.25})$$

$$\partial^2 L / \partial \lambda_{p_j} \partial \varphi_{ij} = \partial P_{ji} / \partial \varphi_{ij} \quad (\text{D.26})$$

$$\partial^2 L / \partial \lambda_{p_i} \partial PG_i = -1 \quad (\text{D.27})$$

$$\partial^2 L / \partial \lambda_{p_i} \partial FC_i = PL_i \quad (\text{D.28})$$

$$\partial^2 L / \partial \lambda_{I_1} \partial \theta_i = \sum_R \partial P_{ij} / \partial \theta_i + \sum_S \partial P_{ji} / \partial \theta_i - \sum_T \partial P_{ij} / \partial \theta_i - \sum_U \partial P_{ji} / \partial \theta_i \quad (\text{D.29})$$

$$\partial^2 L / \partial \lambda_{I_1} \partial \theta_j = \sum_R \partial P_{ij} / \partial \theta_j + \sum_S \partial P_{ji} / \partial \theta_j - \sum_T \partial P_{ij} / \partial \theta_j - \sum_U \partial P_{ji} / \partial \theta_j \quad (\text{D.30})$$

$$\partial^2 L / \partial \lambda_{I_1} \partial \varphi_{ij} = \sum_R \partial P_{ij} / \partial \varphi_{ij} + \sum_S \partial P_{ji} / \partial \varphi_{ij} - \sum_T \partial P_{ij} / \partial \varphi_{ij} - \sum_U \partial P_{ji} / \partial \varphi_{ij} \quad (\text{D.31})$$

$$\partial^2 L / \partial \lambda_{I_1} \partial \Gamma_1 = -1 \quad (\text{D.32})$$

## D.2 Derivadas em Relação às Variáveis do Subproblema de Potência Reativa

$$\begin{aligned}
\partial L / \partial V_i &= \partial f_o / \partial V_i + \lambda_{p_i} \sum_{j \in \Omega_i} \partial P_{ij} / \partial V_i + \sum_{j \in \Omega_i} \lambda_{p_j} \partial P_{ji} / \partial V_i + \\
&+ \lambda_{q_i} (\sum_{j \in \Omega_i} \partial Q_{ij} / \partial V_i - 2V_i \text{bsh}_i) + \sum_{j \in \Omega_i} \lambda_{q_j} \partial Q_{ji} / \partial V_i + \\
&+ \sum_{l \in X} \lambda_{I_l} (\sum_R \partial P_{ij} / \partial V_i + \sum_S \partial P_{ji} / \partial V_i - \sum_T \partial P_{ij} / \partial V_i - \sum_U \partial P_{ji} / \partial V_i)
\end{aligned} \tag{D.33}$$

$$\begin{aligned}
\partial L / \partial V_j &= \partial f_o / \partial V_j + \lambda_{p_j} \sum_{i \in \Omega_j} \partial P_{ji} / \partial V_j + \sum_{i \in \Omega_j} \lambda_{p_i} \partial P_{ij} / \partial V_j + \\
&+ \lambda_{q_j} (\sum_{i \in \Omega_j} \partial Q_{ji} / \partial V_j - 2V_j \text{bsh}_j) + \sum_{i \in \Omega_j} \lambda_{q_i} \partial Q_{ij} / \partial V_j + \\
&+ \sum_{l \in Y} \lambda_{I_l} (\sum_R \partial P_{ij} / \partial V_j + \sum_S \partial P_{ji} / \partial V_j - \sum_T \partial P_{ij} / \partial V_j - \sum_U \partial P_{ji} / \partial V_j)
\end{aligned} \tag{D.34}$$

$$\begin{aligned}
\partial L / \partial a_{ij} &= \partial f_o / \partial a_{ij} + \lambda_{p_i} \partial P_{ij} / \partial a_{ij} + \lambda_{p_j} \partial P_{ji} / \partial a_{ij} + \\
&+ \lambda_{q_i} \partial Q_{ij} / \partial a_{ij} + \lambda_{q_j} \partial Q_{ji} / \partial a_{ij} + \\
&+ \sum_{l \in Z} \lambda_{I_l} (\sum_R \partial P_{ij} / \partial a_{ij} + \sum_S \partial P_{ji} / \partial a_{ij} - \sum_T \partial P_{ij} / \partial a_{ij} - \sum_U \partial P_{ji} / \partial a_{ij})
\end{aligned} \tag{D.35}$$

$$\partial L / \partial QG_i = \partial f_o / \partial QG_i - \lambda_{q_i} \tag{D.36}$$

$$\partial L / \partial QA_i = \partial f_o / \partial QA_i - \lambda_{q_i} \tag{D.37}$$

$$\partial L / \partial \lambda_{q_i} = FC_i QL_i - QG_i - QA_i - V_i^2 \text{bsh}_i + \sum_{j \in \Omega_i} Q_{ij} \tag{D.38}$$



$$\begin{aligned}
\partial^2 L / \partial V_i^2 &= \partial^2 f_0 / \partial V_i^2 + \lambda_{p_i} \sum_{j \in \Omega_i} \partial^2 P_{ij} / \partial V_i^2 + \sum_{j \in \Omega_i} \lambda_{p_j} \partial^2 P_{ji} / \partial V_i^2 + \\
&+ \lambda_{q_i} (\sum_{j \in \Omega_i} \partial^2 Q_{ij} / \partial V_i^2 - 2bsh_i) + \sum_{j \in \Omega_i} \lambda_{q_j} \partial^2 Q_{ji} / \partial V_i^2 + \\
&+ \sum_{l \in X} \lambda_{I_l} (\sum_{R} \partial^2 P_{ij} / \partial V_i^2 + \sum_{S} \partial^2 P_{ji} / \partial V_i^2 + \\
&- \sum_{T} \partial^2 P_{ij} / \partial V_i^2 - \sum_{U} \partial^2 P_{ji} / \partial V_i^2) \tag{D.39}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial^2 L / \partial V_i \partial V_j &= \partial^2 f_0 / \partial V_i \partial V_j + \lambda_{p_i} \partial^2 P_{ij} / \partial V_i \partial V_j + \lambda_{p_j} \partial^2 P_{ji} / \partial V_i \partial V_j + \\
&+ \lambda_{q_i} \partial^2 Q_{ij} / \partial V_i \partial V_j + \lambda_{q_j} \partial^2 Q_{ji} / \partial V_i \partial V_j + \\
&+ \sum_{l \in Z} \lambda_{I_l} (\sum_{R} \partial^2 P_{ij} / \partial V_i \partial V_j + \sum_{S} \partial^2 P_{ji} / \partial V_i \partial V_j + \\
&- \sum_{T} \partial^2 P_{ij} / \partial V_i \partial V_j - \sum_{U} \partial^2 P_{ji} / \partial V_i \partial V_j) \tag{D.40}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial^2 L / \partial V_j^2 &= \partial^2 f_0 / \partial V_j^2 + \lambda_{p_j} \sum_{i \in \Omega_j} \partial^2 P_{ji} / \partial V_j^2 + \sum_{i \in \Omega_j} \lambda_{p_i} \partial^2 P_{ij} / \partial V_j^2 + \\
&+ \lambda_{q_j} (\sum_{i \in \Omega_j} \partial^2 Q_{ji} / \partial V_j^2 - 2bsh_j) + \sum_{i \in \Omega_j} \lambda_{q_i} \partial^2 Q_{ij} / \partial V_j^2 + \\
&+ \sum_{l \in Y} \lambda_{I_l} (\sum_{R} \partial^2 P_{ij} / \partial V_j^2 + \sum_{S} \partial^2 P_{ji} / \partial V_j^2 + \\
&- \sum_{T} \partial^2 P_{ij} / \partial V_j^2 - \sum_{U} \partial^2 P_{ji} / \partial V_j^2) \tag{D.41}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial^2 L / \partial a_{ij}^2 &= \partial^2 f_0 / \partial a_{ij}^2 + \lambda_{p_i} \partial^2 P_{ij} / \partial a_{ij}^2 + \lambda_{p_j} \partial^2 P_{ji} / \partial a_{ij}^2 + \\
&+ \lambda_{q_i} \partial^2 Q_{ij} / \partial a_{ij}^2 + \lambda_{q_j} \partial^2 Q_{ji} / \partial a_{ij}^2 + \\
&+ \sum_{l \in Z} \lambda_{I_l} \left( \sum_{R} \partial^2 P_{ij} / \partial a_{ij}^2 + \sum_{S} \partial^2 P_{ji} / \partial a_{ij}^2 + \right. \\
&\left. - \sum_{T} \partial^2 P_{ij} / \partial a_{ij}^2 - \sum_{U} \partial^2 P_{ji} / \partial a_{ij}^2 \right) \tag{D.42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial^2 L / \partial a_{ij} \partial V_i &= \partial^2 f_0 / \partial a_{ij} \partial V_i + \lambda_{p_i} \partial^2 P_{ij} / \partial a_{ij} \partial V_i + \lambda_{p_j} \partial^2 P_{ji} / \partial a_{ij} \partial V_i + \\
&+ \lambda_{q_i} \partial^2 Q_{ij} / \partial a_{ij} \partial V_i + \lambda_{q_j} \partial^2 Q_{ji} / \partial a_{ij} \partial V_i + \\
&+ \sum_{l \in Z} \lambda_{I_l} \left( \sum_{R} \partial^2 P_{ij} / \partial a_{ij} \partial V_i + \sum_{S} \partial^2 P_{ji} / \partial a_{ij} \partial V_i + \right. \\
&\left. - \sum_{T} \partial^2 P_{ij} / \partial a_{ij} \partial V_i - \sum_{U} \partial^2 P_{ji} / \partial a_{ij} \partial V_i \right) \tag{D.43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial^2 L / \partial a_{ij} \partial V_j &= \partial^2 f_0 / \partial a_{ij} \partial V_j + \lambda_{p_i} \partial^2 P_{ij} / \partial a_{ij} \partial V_j + \lambda_{p_j} \partial^2 P_{ji} / \partial a_{ij} \partial V_j + \\
&+ \lambda_{q_i} \partial^2 Q_{ij} / \partial a_{ij} \partial V_j + \lambda_{q_j} \partial^2 Q_{ji} / \partial a_{ij} \partial V_j + \\
&+ \sum_{l \in Z} \lambda_{I_l} \left( \sum_{R} \partial^2 P_{ij} / \partial a_{ij} \partial V_j + \sum_{S} \partial^2 P_{ji} / \partial a_{ij} \partial V_j + \right. \\
&\left. - \sum_{T} \partial^2 P_{ij} / \partial a_{ij} \partial V_j - \sum_{U} \partial^2 P_{ji} / \partial a_{ij} \partial V_j \right) \tag{D.44}
\end{aligned}$$

$$\partial^2 L / \partial Q G_i^2 = \partial^2 f_0 / \partial Q G_i^2 \tag{D.45}$$

$$\partial^2 L / \partial Q A_i^2 = \partial^2 f_0 / \partial Q A_i^2 \tag{D.46}$$

$$\partial^2 L / \partial \lambda_{q_i} \partial V_i = \sum_{j \in \Omega_i} \partial Q_{ij} / \partial V_i - 2V_i b_{sh_i} \quad (D.47)$$

$$\partial^2 L / \partial \lambda_{q_i} \partial V_j = \partial Q_{ij} / \partial V_j \quad (D.48)$$

$$\partial^2 L / \partial \lambda_{q_j} \partial V_i = \partial Q_{ji} / \partial V_i \quad (D.49)$$

$$\partial^2 L / \partial \lambda_{q_j} \partial V_j = \sum_{i \in \Omega_j} \partial Q_{ji} / \partial V_j - 2V_j b_{sh_j} \quad (D.50)$$

$$\partial^2 L / \partial \lambda_{q_i} \partial a_{ij} = \partial Q_{ij} / \partial a_{ij} \quad (D.51)$$

$$\partial^2 L / \partial \lambda_{q_j} \partial a_{ij} = \partial Q_{ji} / \partial a_{ij} \quad (D.52)$$

$$\partial^2 L / \partial \lambda_{q_i} \partial Q G_i = -1 \quad (D.53)$$

$$\partial^2 L / \partial \lambda_{q_i} \partial Q A_i = -1 \quad (D.54)$$