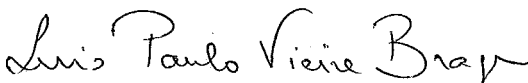


SIMULAÇÃO MULTIVARIÁVEL DE VARIÁVEIS REGIONALIZADAS

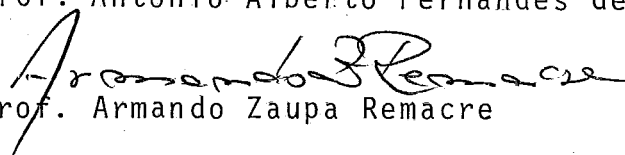
Evangelina Maria Apparício da Silva

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.) EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovado por:

  
Prof. Luis Paulo Vieira Braga  
(Presidente)

  
Prof. Antonio Alberto Fernandes de Oliveira

  
Prof. Armando Zaupa Remacre

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

Março de 1988

SILVA, EVANGELINA MARIA APPARÍCIO DA

Simulação Multivariável de Variáveis Regionalizadas  
(Rio de Janeiro) 1988.

X, 147 p 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia  
de Sistemas e Computação, 1988)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro  
COPPE.

1. Geoestatística I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Este trabalho dedico ao Leonardo (meu esposo) e aos meus filhos Leonardo e Nina esperando compensar, de alguma forma, as limitações sofridas em prol desta realização.

## AGRADECIMENTOS

Um trabalho dessa natureza não poderia ser realizado, integralmente, por uma só pessoa. Não poderia ter realizado as observações minuciosas necessárias ao entendimento e aplicação do modelo matemático utilizado, organização das idéias, organização e coleta de dados e depois tê-los processados dentro dessa abordagem multidisciplinar, sem o auxílio de vários colaboradores que sempre mostraram disponíveis, capazes e dedicados. Desejo expressar, aqui, meus agradecimentos, embora seja impossível nomeá-los e atribuir a cada um a importância de sua contribuição.

Mas, desejo expressar meus agradecimentos ao Prof. Jorge Manuel da Gama Pinto Valente que, desde 1979, quando fora sua aluna, tem contribuído, constantemente, para a minha formação na área de geoestatística e como profissional. Sempre contribui para as minhas próprias descobertas e conclusões e com inúmeras referências bibliográficas e observações importantes para este trabalho. Durante todo o tempo tive a grata satisfação e oportunidade de receber suas contribuições, atuou sempre como dedicado professor e crítico paciente, embora severo, dos trabalhos que pude realizar. Desejo agradecer com satisfação sua participação, verdadeiramente efetiva. Sua amizade, assistência, intuição e inteligência foram para mim um constante estímulo durante os oito anos de trabalho em Ouro Preto-MG.

Ao Prof. Luis Paulo Vieira Braga, orientador deste trabalho, quero agradecer, com grande satisfação, sua participação

eficiente, sua amizade e compreensão pelas mudanças e atrasos ocorridos no andamento do trabalho. Sua liberdade em garantir suas próprias instalações de computação e "software" deu-me a oportunidade de realizar os inúmeros testes e observações em que este trabalho se baseia. Sua capacidade, paciente e exigente orientação foi relevante para o prosseguimento e conclusão do presente trabalho.

Meus agradecimentos à ALCOA ALUMÍNIO DO BRASIL S/A que garantiu meios, preparação e organização dos dados necessários à elaboração deste trabalho. Particularmente, desejo agradecer as contribuições dos senhores engenheiros José Carlos Danza Errico, Don Duane Williams e Carlos Jorge de Andrade, que eficientemente atenderam todas as solicitações efetuadas.

Aos colegas do Departamento de Mineração da Escola de Minas de Ouro Preto que viabilizaram a minha liberação para realizar o curso de mestrado, sou eternamente grata.

Particularmente, agradeço as contribuições valiosas do Moacir, Marcílio e Flávia.

Agradeço à Paulo Abib Engenharia S.A. por ter garantido o término deste trabalho.

Aos meus pais agradeço a mais profunda contribuição, pois fizeram-me capaz de vencer os obstáculos.

Agradeço ao Sr. Raimundo Benedito Silva (meu sogro) e

a Sra. Laura Fideles Apparício da Silva (minha sogra) que, com espírito de colaboração e amizade, estiveram sempre disponíveis às inúmeras solicitações de apoio ocorridas.

É com um sentimento especial de gratidão que me dirijo à minha família: Leonardo (meu esposo), Leonardo e Nina (meus filhos). Afinal foram eles que, para incentivar-me e acompanhar-me, a todo tempo, limitaram suas vidas sem férias e, principalmente, sem minha atenção.

Finalmente, agradeço a Deus acima de tudo.

RESUMO DA TESE APRESENTADA À COPPE/UFRJ COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

SIMULAÇÃO MULTIVARIÁVEL DE VARIÁVEIS REGIONALIZADAS

Evangelina Maria Apparício da Silva

Março, 1988

Orientador: Luis Paulo Vieira Braga

Programa : Engenharia de Sistemas e Computação

Este trabalho retrata os procedimentos e conceitos empregados no estudo das variáveis regionalizadas, enfatizando a metodologia da Simulação Geoestatística e sua aplicação a uma jazida de bauxita, da qual são consideradas as variáveis regionalizadas: alumina aproveitável e sílica reativa.

Numa fase preliminar são analisadas as características estatísticas e estruturais dos dados utilizados e realizadas a necessária transformação gaussiana. Os semi-variogramas experimentais obtidos são analisados e ajustados a um modelo teórico.

Foram realizados diversas simulações através de um programa, escrito em FORTRAN IV, implantado em microcomputador

(PC-XT), que realiza a simulação condicional utilizando a cokrigagem para o processo de condicionamento.

Os resultados obtidos, apresentados no capítulo IV, permitiram concluir sobre a validade de aplicação das técnicas utilizadas para simular as características estatísticas gerais da jazida considerada.



ABSTRACT OF THESIS PRESENTED TO COPRE/UFRJ AS PARTIAL FULFILMENT  
OF THE REQUIREMENTS FOR THE DEGREE OF MASTER OF SCIENCE (M.Sc.)

MULTIVARIATE SIMULATION OF REGIONALIZED VARIABLES

Evangelina Maria Apparício da Silva

MARÇO, 1988

Chairman: Luis Paulo Vieira Braga

Department: Computation and Systems Engineering

This work shows the proceeding and principles employed in the study of the regionalized variables with emphasis in the methodology of the Geostatistics Simulation, and its application in a deposit of bauxite, with the mean variables: useful alumina and reactive silica.

At the beginning, the statistics and structural characteristics of the data used are studied, and realized by Gaussian transform necessary. The experimental semi-variograms in this case are studied too, and made an adjustment to an theoretical model.

A lot of simulations are made through of the a computer program, im FORTRAN.IV, in put in IBM-PC Compatible, which makes the conditional simulation well-founded in the cokriging to the conditioning process.

The results showed in the chapter IV, allow to conclude about the validity of the technic applicated in the simulation of the statistics characteristics of the deposit studied.

## ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO</u> .....	01
I.1 - Objetivo e Justificativa do Trabalho.....	01
I.2 - Considerações Gerais sobre a Bauxita.....	04
I.3 - A Bauxita da Região de Poços de Caldas.....	06
I.3.1 - Aspectos Geológicos.....	06
I.3.2 - Pesquisa, Planejamento e Lavra.....	08
I.3.3 - Beneficiamento da Bauxita.....	11
I.3.4 - Sistema de Estimação da Reserva.....	11
I.3.4.1 - Análise dos Dados de Sondagem.....	13
I.3.4.2 - Análise Estrutural ou Variográfica.....	13
I.3.4.3 - Krigagem.....	18
 <u>CAPÍTULO II - REVISÃO DA LITERATURA</u> .....	 20
II.1 - Generalidades.....	20
II.2 - Métodos Convencionais.....	21
II.3 - Métodos Estatísticos.....	21
II.3.1 - Distribuição Normal ou de Gauss.....	23
II.3.2 - Distribuição Lognormal.....	25
II.3.3 - Análise de Correlação e Regressão.....	28
II.3.4 - Regressão Linear.....	31
II.4 - Métodos Geoestatísticos.....	34
II.4.1 - Considerações Gerais.....	34

	<u>Pág.</u>
II.4.2 - Conceitos Fundamentais em Geoestatística.....	36
II.4.2.1 - Variáveis Regionalizadas (V.Rs:):.....	36
II.4.2.2 - Variáveis Corregionalizadas.....	37
II.4.2.3 - Função Aleatória - (F.A.).....	37
II.4.2.4 - Função Aleatória Estacionária (F.A.E.).....	38
II.4.2.5 - Função Aleatória Estacionária de Segunda Ordem (FAST).....	38
II.4.2.6 - Função Aleatória Intrínseca (FAI-0).....	39
II.4.2.7 - Função Aleatória Intrínseca de Ordem K - (FAI-K)	41
II.4.2.8 - Erro de Estimção.....	42
II.4.2.9 - Variância de Estimção.....	43
II.4.2.10 - Variância de Dispersão.....	45
II.4.3 - Função Variograma $2\gamma(h)$ .....	47
II.4.3.1 - Definição e Propriedades.....	47
II.4.3.2 - Características Estruturais Evidenciadas pelo Semi-Variograma.....	50
II.4.3.3 - Modelos Teóricos.....	55
II.4.3.3.1 - Modelos com Patamar.....	56
II.4.3.3.2 - Modelos sem Patamar.....	58
II.4.4 - Momentos Cruzados.....	59
II.4.5 - Estimção Geoestatística.....	61
II.4.5.1 - Krigagem Estacionária.....	62
II.4.5.2 - Krigagem Universal.....	66
II.4.5.3 - Cokrigagem.....	69

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO III - FUNDAMENTOS TEÓRICOS</u> .....	73
III.1 - Metodologia da Simulação Geoestatística.....	73
III.1.1 - Simulação de Variáveis Regionalizadas.....	73
III.2 - Simulação de Corregionalização.....	102
III.3 - Simulação de Blocos.....	106
III.4 - Fenômenos Anisôtropos, Efeito de Pepita e Deriva..	108
 <u>CAPÍTULO IV - ESTUDO DE CASO</u> .....	 111
IV.1 - Introdução.....	111
IV.2 - Análise de Dados.....	112
IV.3 - Análise Estrutural.....	117
IV.3.1 - Semi-Variogramas Experimentais.....	117
IV.3.2 - Ajuste dos Modelos Teóricos.....	119
IV.4 - Anamorfose Gaussiana.....	119
IV.5 - Simulação.....	125
IV.5.1 - Considerações Gerais.....	125
IV.5.2 - Simulação não-Condiciona1.....	126
IV.5.3 - Simulação Cocondiciona1.....	127
IV.6 - Análise dos Resultados.....	133
 <u>BIBLIOGRAFIA</u> .....	 141

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

#### I.1 - OBJETIVO E JUSTIFICATIVA DO TRABALHO

Este trabalho versa sobre a análise e aplicação de um modelo matemático, portanto, julga-se oportuno introduzi-lo com as observações feitas pelo Prof. J. Neyman sobre o assunto, NEYMAN (34).

"Todas as vezes que utilizamos a matemática a fim de estudar alguns fenômenos deveremos essencialmente começar por construir um modelo matemático (determinístico, probabilístico) para estes fenômenos. Inevitavelmente o modelo deve simplificar os trabalhos e certos pormenores devem ser desprezados. O bom resultado do modelo depende de ser ou não relevantes, estes pormenores desprezados, na elucidação do fenômeno estudado. A resolução do problema matemático pode estar correta, e no entanto, estar em grande discordância com os dados observados, simplesmente por que as hipóteses básicas feitas não foram confirmadas. Geralmente é difícil afirmar, com certeza, se o modelo matemático especificado é ou não adequado, antes que alguns dados de observação sejam obtidos. A fim de verificar a validade de um modelo, deveremos deduzir um certo número de consequência do nosso modelo e, a seguir, comparar estes resultados previstos com observações."

No âmbito da Simulação de Variáveis Regionalizadas (modelo matemático aqui utilizado) esta a obtenção de modelos que

levam em conta certas características de variáveis oriundas da natureza, não considerados pelos procedimentos clássicos de simulação (aleatórios puros).

Tais procedimentos, consistem em introduzir um conjunto de combinatórios das variáveis de entrada e procurar várias soluções para a função objetivo, de acordo com as regras lógicas que constituem o modelo. O objetivo é, portanto, reproduzir o comportamento de um sistema através de modelos determinísticos ou modelos probabilísticos, conforme seja o caso.

Para atingir objetivos cada vez mais gerais no estudo dos fenômenos naturais, é possível estabelecer modelos, desde os mais simples, explicitando a média das variáveis, até os mais complexos, formalizados no âmbito das funções aleatórias, denominados de Simulação Condicional e Simulação Não Condicional (Simulação Geoestatística). Vale-se do modelo condicional ou não condicional em função, evidentemente, do sistema em estudo e dos objetivos estabelecidos.

Em síntese, o modelo da Simulação Geoestatística, desenvolvido pelo Centro de Geoestatística de Fontainebleau, permite localizar as variáveis no espaço e considerar a dependência espacial entre elas. Adicionalmente, destaca-se importantes fatores inerentes ao modelo:

- reprodução da lei de auto-correlação entre as variáveis (revelada pelos semi-variogramas experimentais);
- os dados simulados nos locais das amostras recebem valores iguais aos valores experimentais (simulação condicional aos da

dos);

- simulação em espaços tridimensionais.

Por tais fatores, este modelo tem servido para a solução de vários problemas de Pesquisa Operacional aplicada à indústria mineira, não abordados pelos procedimentos clássicos de simulação.

É importante, também, ressaltar a diferença entre a simulação geoestatística e a estimação (krigagem). A simulação tem o compromisso de restituir as leis de variação (histograma e variogramas) da variável, no interior do domínio considerado (depósito mineral, por exemplo). Enquanto a estimação tem o compromisso de fornecer a avaliação do domínio com as restrições de não tendenciosidade e minimização do erro de estimação, sem o compromisso de restituir as leis de variação da variável. Os Capítulos II e III seguintes, esclarecem estas afirmações e apresentam a bibliografia pertinente.

Considerando o exposto e a variedade de problemas, relativos a indústria mineira, tratados com base na metodologia da Simulação Geoestatística, foi idealizado realizar este trabalho com os objetivos de verificar a adequação do modelo a uma jazida brasileira, gerando hipóteses básicas para a definição do modelo final, bem como mostrar, através da prática, os sucessivos passos para se chegar ao modelo representativo de um dado fenômeno.

Para se atingir estes objetivos, foram contactadas empresas de mineração para a obtenção de dados, entre elas a Alcoa



Alumínio S. A. que, prontamente, colocou à disposição os dados, relativos a mineralização de bauxita da região de Poços de Caldas, e suportes necessários à realização deste trabalho.

As variáveis regionalizadas de interesse, destacadas para este estudo foram a alumina aproveitável e sílica reativa, abordadas no item I.2. O tratamento destas variáveis foi suportado na metodologia descrita no Capítulo III, principalmente na abordagem da simulação cocondicional.

Os resultados obtidos foram bastante satisfatórios, conforme se verá no Capítulo IV. Em virtude da proximidade das características dos valores simulados com as características das amostras, pode-se assegurar que, embora o processo não esteja totalmente sob controle, o modelo obtido cobre aspectos relevantes do sistema, satisfazendo os propósitos deste trabalho.

## I.2 - CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE A BAUXITA

SKINNER (38) informa que o nome bauxita deriva-se da localidade Les Baux de Provence, no sul da França, onde foi inicialmente reconhecida, em 1821, pelo químico francês P. Berthier.

A bauxita é formada em depósitos residuais, sob condições climáticas adequadas, por intemperismo e lixiviação da sílica de rochas portadoras de alumínio. No Brasil, os depósitos segundo BATEMAN (5), são derivados de sienito nefelínico, sendo que em outras regiões são originados de outros tipos de rochas.

Existindo condições favoráveis à ação do intemperismo, sobre as rochas sílico aluminosas com pouco quartzo livre, ocorre a decomposição química dos minerais formando o hidróxido de alumínio. A esse processo dá-se o nome de laterização. BATEMAN (5) observa que, durante o processo de laterização, elementos como o Na, K, Ca e Mg formam compostos, relativamente solúveis, que são rapidamente removidos resultando um resíduo denominado laterita. Este resíduo rico em alumínio origina a bauxita.

A bauxita é composta de um grupo complexo de minerais, sendo os principais:

- a gibsita,  $Al_2(OH)_6$ ;
- a boehmita,  $AlO(OH)$ ; e
- o diasporo,  $HAIO_2$ .

Ocorrem ainda alguns minerais subordinados. A composição da bauxita, considerada por BATEMAN (5) como típica e como minério de alumínio, é a seguinte:

	BAUXITA TÍPICA	MINÉRIO DE ALUMÍNIO
$Al_2O_3$	55 a 65%	50% (no mínimo)
$SiO_2$	2 a 10%	6% (no máximo)
$Fe_2O_3$	2 a 20%	10%
$TiO_2$	1 a 3%	4%
$H_2O$	10 a 30%	-

Considera também que as formas de ocorrência da bauxita utilizada comercialmente são:

- pisolítica ou oolítica, nas quais os núcleos tem até 1 cm de diâmetro consistindo principalmente no trihidrato amorfo;
- minério esponja, poroso retendo em geral a textura da rocha original, sendo composto principalmente de gibbsita; e
- minério amorfo ou argiloso.

LEINZ e AMARAL (30) enfocam as condições necessárias à gênese da bauxita:

- existência de uma rocha aluminosa;
- ambiente de clima tropical ou subtropical;
- topografia suave reduzindo ao mínimo o efeito erosivo;
- material a ser transformado em bauxita com porosidade suficiente para que a água possa penetrar e agir na decomposição;
- alternância de estações chuvosa e seca;
- ph da água ideal para que ocorra a laterização entre 8 e 9 (onde é alta a solubilidade da sílica e baixa a da alumina).

### I.3 - A BAUXITA DA REGIÃO DE POÇOS DE CALDAS

#### I.3.1 - Aspectos Geológicos

ALMEIDA (4) apresenta, em detalhes, a geologia do maciço alcalino de Poços de Caldas. Discorre sobre a geomorfologia, tipos de rochas, mineralogia, tipos de depósitos e sua gênese.

Observa-se que aquele jazimento, considerado de origem vulcânica primeiramente pelo geólogo O. A. Derby, constitui a segunda área com minério de alumínio da plataforma brasileira e o mais importante depósito de bauxita de Minas Gerais.

As condições regionais de Poços de Caldas favoreceram a ocorrência de vários ciclos de bauxitização com camadas de argila cortando o minério; permitiram profunda intemperização com a formação da bauxita. Dentre estas condições ERRICO (22) destaca as principais:

- clima tropical;
- ph da água entre 8 e 9;
- superfície topográfica ondulada;
- presença de material laterítico ( $Fe_2O_3$  e  $Al_2O_3$ );
- baixa relação  $SiO_2/Al_2O_3$  das rochas alcalinas;
- alta precipitação pluviométrica.

ABREU (1) descreve o perfil estatigráfico típico da jazida de Poços de Caldas:

- uma cobertura de solo de 0,1 m de espessura;
- uma camada de cascalho com terra e bauxita de 0,3 a 2,5 m de espessura;
- bauxita friável com 2,5 a 5,0 m de espessura;
- uma camada de argila e rocha em decomposição com 0,5 a 1,5 m de espessura;
- rocha matriz nefelínica.

Desta região foi destacada para este trabalho uma área denominada Corrêgo do Meio II, como mostra a Figura (I.1), localizada na borda norte do maciço alcalino compreendendo uma área de 6045 ha da reserva da Alcoa Alumínio S. A.

### I.3.2 - Pesquisa, Planejamento e Lavra

Todas as informações apresentadas neste item estão descritas com detalhes no trabalho de ERRICO (22).

O reconhecimento geológico do corpo mineralizado é realizado por malha regular, inicialmente com espaçamento de 50 x 50 m. Os detalhes são levantados pela diminuição sucessiva do espaçamento da malha, passando para 25 x 25 m, 12,5 x 12,5 m na fase de pré-lavra, podendo chegar a 10 x 10 m.

As perfurações são feitas a trado manual de 5 1/2" de diâmetro. As amostras para análise são retiradas da parte inferior do trado, de metro em metro, e quarteados para redução do volume. O material assim coletado no campo é embalado, etiquetado indicando as coordenadas, a cota, a profundidade da amostra, e enviando ao laboratório de análise química. Os elementos dosados são:

- alumina total ( $Al_3O_3$ );
- alumina aproveitável, ou seja, parte da alumina total contida no minério que o processo químico de tratamento torna utilizável (A -  $Al_2O_3$ );
- sílica total ( $SiO_2$ );

# Planta de Situação Mina Córrego do Meio II

Origem: Mapa do IBGE Carta do Brasil - Escala 1:50000  
Folhas - Poços de Caldas SF-23-V-C-VI-4  
Caldas SF-23-V-D-IV-3

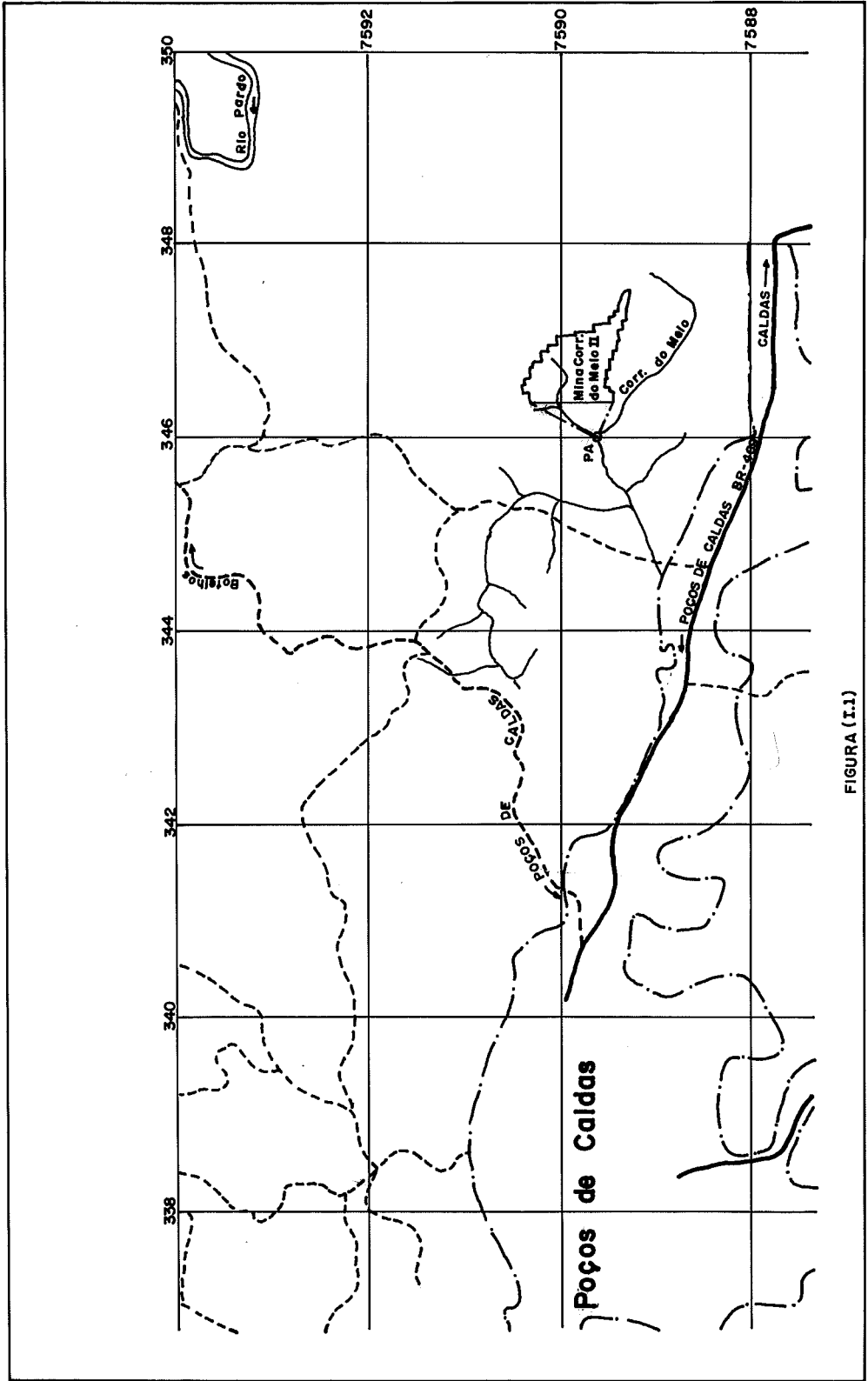


FIGURA (I.1)

- sílica reativa, ou seja, a sílica que se combina com os reativos do processo de aproveitamento da bauxita;
- ferro; titânio e perda ao fogo (água de hidratação e  $\text{CO}_2$ ).

A bauxita, economicamente explorável ocorre superficialmente. Ela se apresenta em duas áreas constituindo as jazidas de campo (espessura média entre 2 a 4 m) e das serras (espessura média entre 4 a 5 m). É considerado minério toda a bauxita com um mínimo de 40% de alumina total e no máximo 5% de sílica reativa.

Os teores de corte são de ordem de 40% em A -  $\text{Al}_2\text{O}_3$  e 5,6% em R -  $\text{SiO}_2$ .

Os resultados obtidos no laboratório são transferidos para a planta topográfica, locando os furos positivos (com pelo menos um metro de minério) e delimitado, assim, os vários corpos de minério.

A avaliação da reserva mineral é realizada pela cubagem destes corpos (avaliação do volume de bauxita) cujo resultado é multiplicado pelo peso específico do minério "in situ" (1,6 ton/ $\text{m}^3$ ).

Os vários corpos de minério, com suas tonelagens, teores em alumina aproveitável e sílica reativa, são lavrados obedecendo a um planejamento que prevê as inter-relações entre os diversos corpos fornecendo o número de frentes de lavra em trabalho simultâneo. Isto visa assegurar os teores médios globais da reserva e manter uma distância média de transporte da mina às instalações de beneficiamento do minério.

A área mineralizada é dividida em blocos de 25 x 25 x 2 m cuja disposição vertical constitui um painel. A cada bloco associa-se as variáveis regionalizadas (V.R:) alumina aproveitável e sílica reativa, as quais são estimadas por Krigagem. Os blocos são lavrados mecanicamente por retro-escavadeira e/ou por trator Bulldozer, e transportados por caminhões basculantes para a área industrial.

### I.3.3 - Beneficiamento da Bauxita

O processo utilizado para a extração da alumina é o processo Bayer, que consiste de um ataque por soda cáustica, em solução, sob condições de temperatura e pressão adequadas, formando o aluminato de sódio. Pelo resfriamento precipita-se a alumina hidratada e por calcinação obtém-se  $Al_2O_3$ . A Figura (I.2) é o fluxograma de operação da refinaria que mostra, em linhas gerais, as etapas do beneficiamento da bauxita.

### I.3.4 - Sistema de Estimção da Reserva

ERRICO (22), utilizando as técnicas da geoestatística e programação em linguagem APL, desenvolveu um sistema de estimção de reservas da bauxita composto, basicamente, de três programas:

- análise dos dados de sondagem;
- análise variográfica; e
- krigagem.



# OPERAÇÃO DA REFINARIA

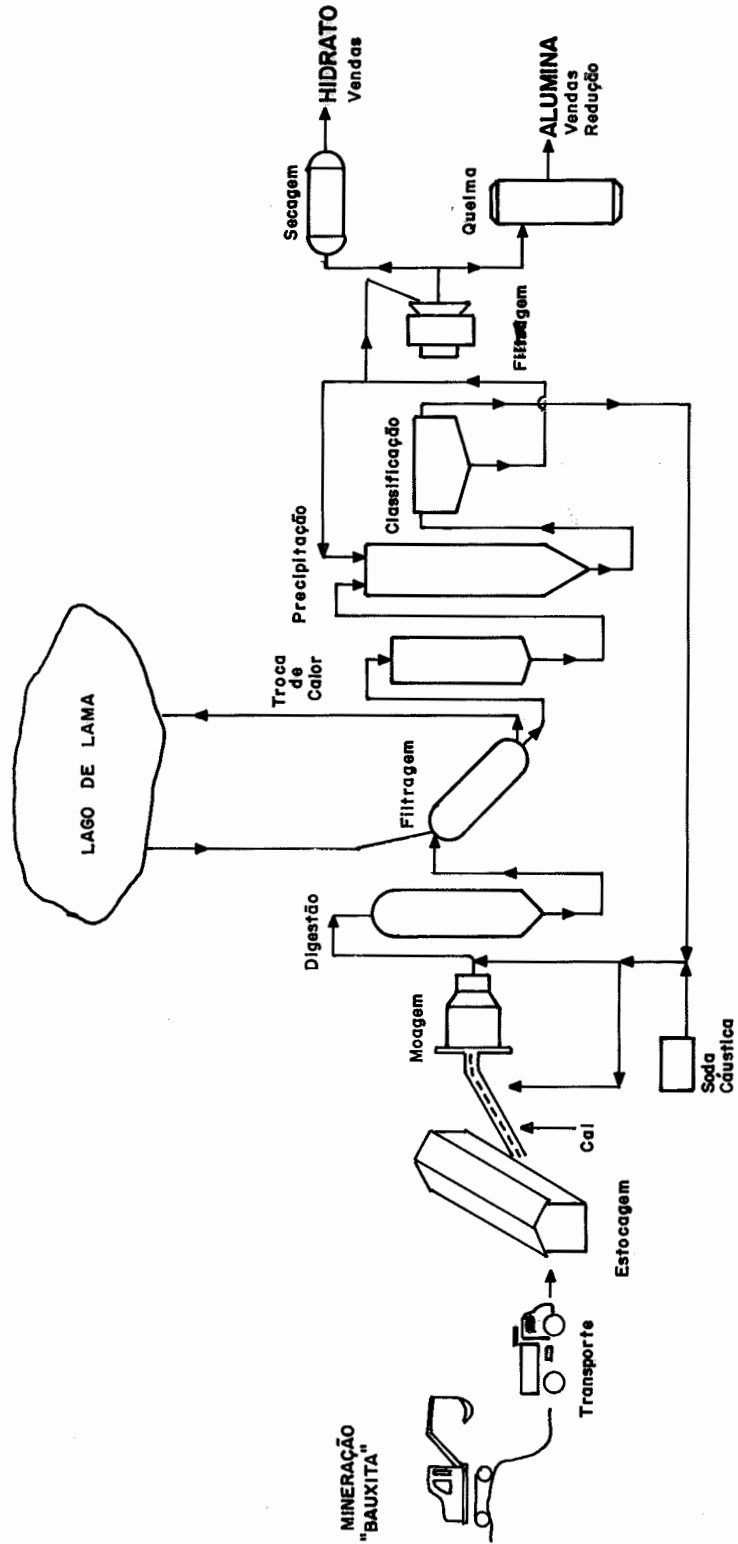


FIGURA (I.2)

#### I.3.4.1 - Análise dos Dados de Sondagem

Inicialmente os resultados da pesquisa geológica, após consolidados, vão compor o arquivo de sondagem. Os principais dados em cada registro são:

- coordenadas e cotas dos pontos amostrados; e
- análise química, metro a metro, de cada furo de sonda (teor em A -  $AlO_3$  e R -  $SiO_2$ ).

A análise dos dados de sondagem fornece variância, média, análise de correlação e histograma. A distribuição dos teores de A -  $Al_2O_3$  e R -  $SiO_2$ , conforme ERRICO (22), tem sido tipicamente lognormal, como ilustra a Figura (I.3). Os itens seguintes referem-se aos resultados da análise variográfica e krigagem obtidos por ERRICO (22), cujos conceitos serão detalhados no Capítulo II.

#### I.3.4.2 - Análise Estrutural ou Variográfica

As variáveis regionalizadas analisadas, visando as características do processo para obtenção da alumina, são a alumina aproveitável (A -  $Al_2O_3$ ) e sílica reativa (R -  $SiO_2$ ). É considerada também a profundidade mineralizada, para o controle de lava.

As direções preferenciais para o cálculo dos variogramas experimentais são definidos em função das características próprias do jazimento. Considera-se o efeito geológico causado

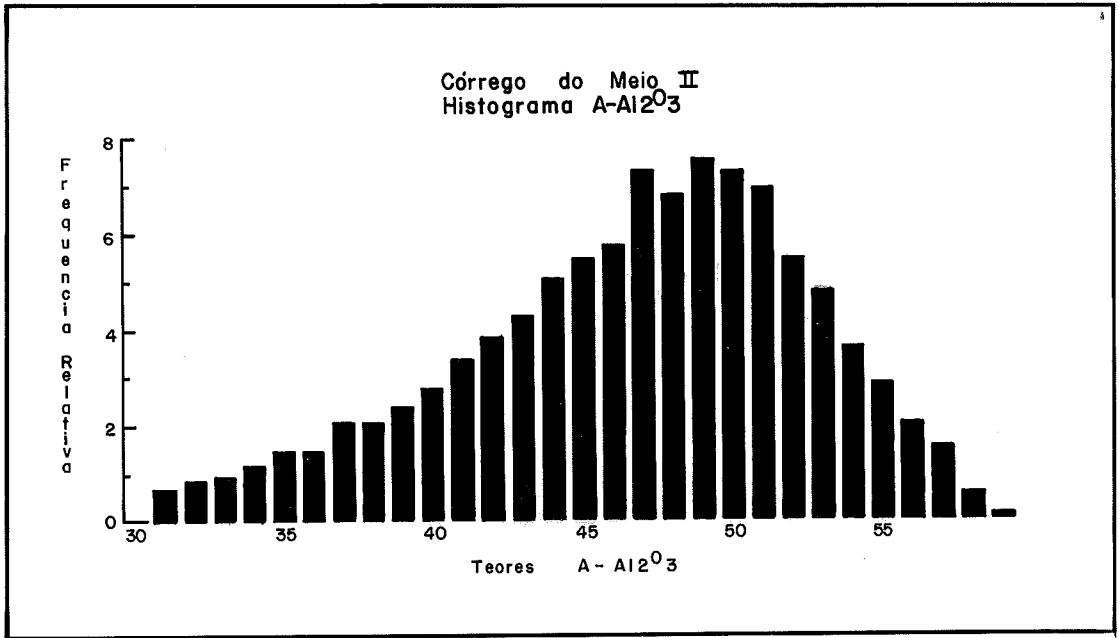


FIGURA (1.3.a)

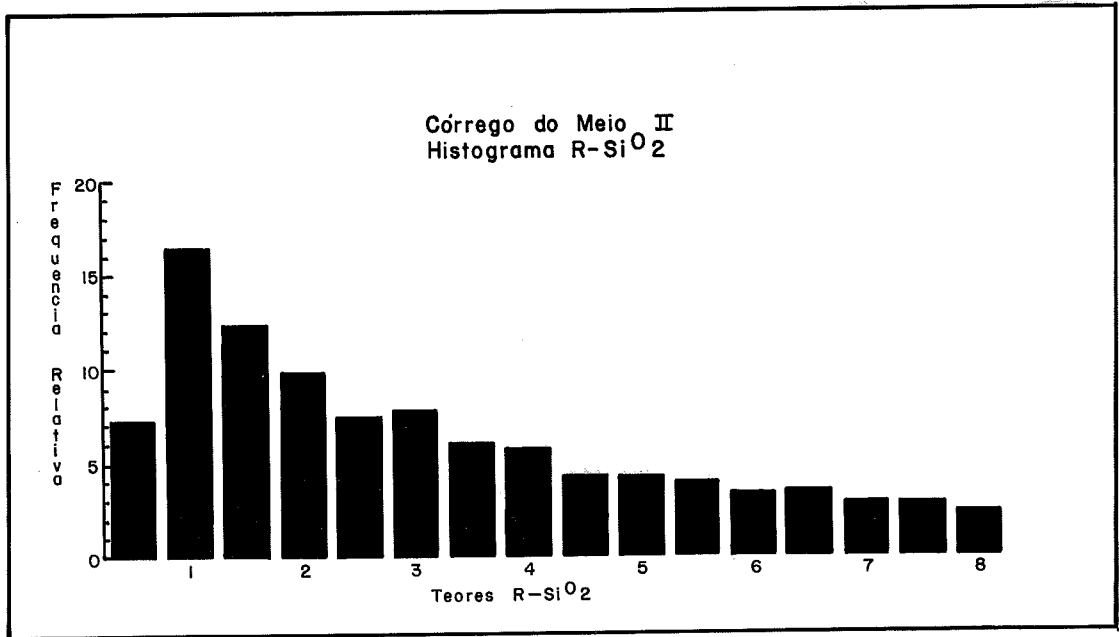


FIGURA (1.3.b)

pela gênese da bauxita ser, sensivelmente controlada pela topografia.

As distâncias regulares entre os pontos amostrados, 25 x 25 m na fase da pesquisa e 12,5 x 12,5 na fase pré-lavra são alteradas pelas diferenças de cotas no cálculo do variograma. Os cálculos para eventuais desvios da malha são feitos com a adoção de classes de distância para os passos e classes de ângulos para as direções que se deseja variografar.

As figuras (I.4) e (I.5), ERRICO (22) ilustram o modelo experimental melhor ajustado àquele fenômeno. É o modelo esférico, cuja equação matemática é a seguinte:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma(h) = C_0 + C \left[ \left( \frac{3}{2} \frac{h}{a} \right) - \left( \frac{1}{2} \frac{h}{a} \right)^3 \right], \text{ para } h \leq a; \\ \gamma(h) = C + C_0 \text{ para } h > a \end{array} \right.$$

sendo:

a - amplitude variográfica;

$C_0$  - efeito de pepita;

$C_0 + C$  - variância total;

C - patamar.

Para se ter pontos do variograma a pequenas distâncias, implantou-se cruz de sondagens com espaçamentos de 5 x 5 m entre os pontos amostrados, segundo as direções NS, EW, NE e NW. Os variogramas,

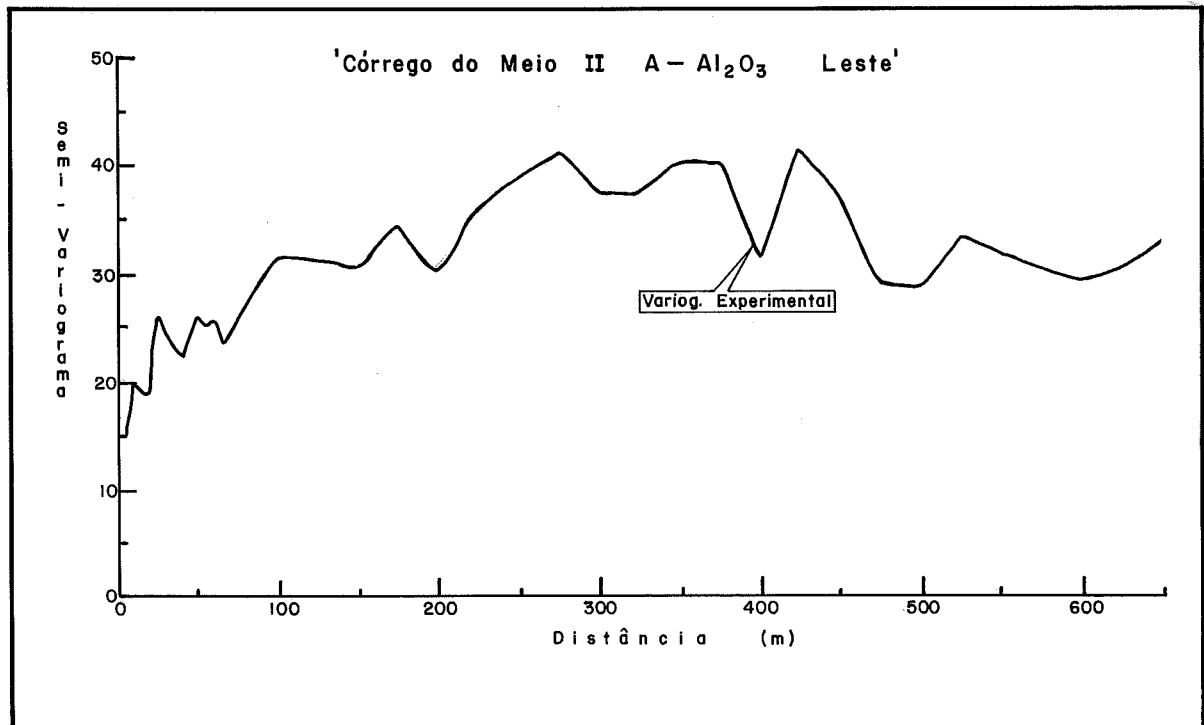
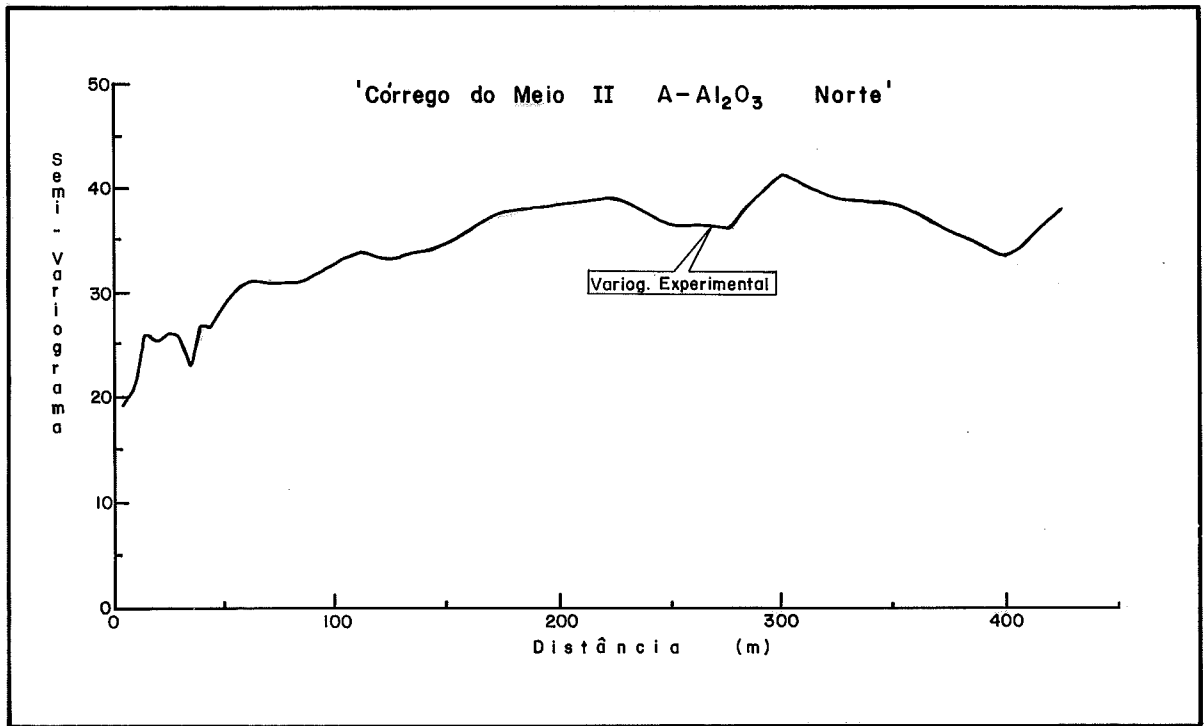


FIGURA (1.4)

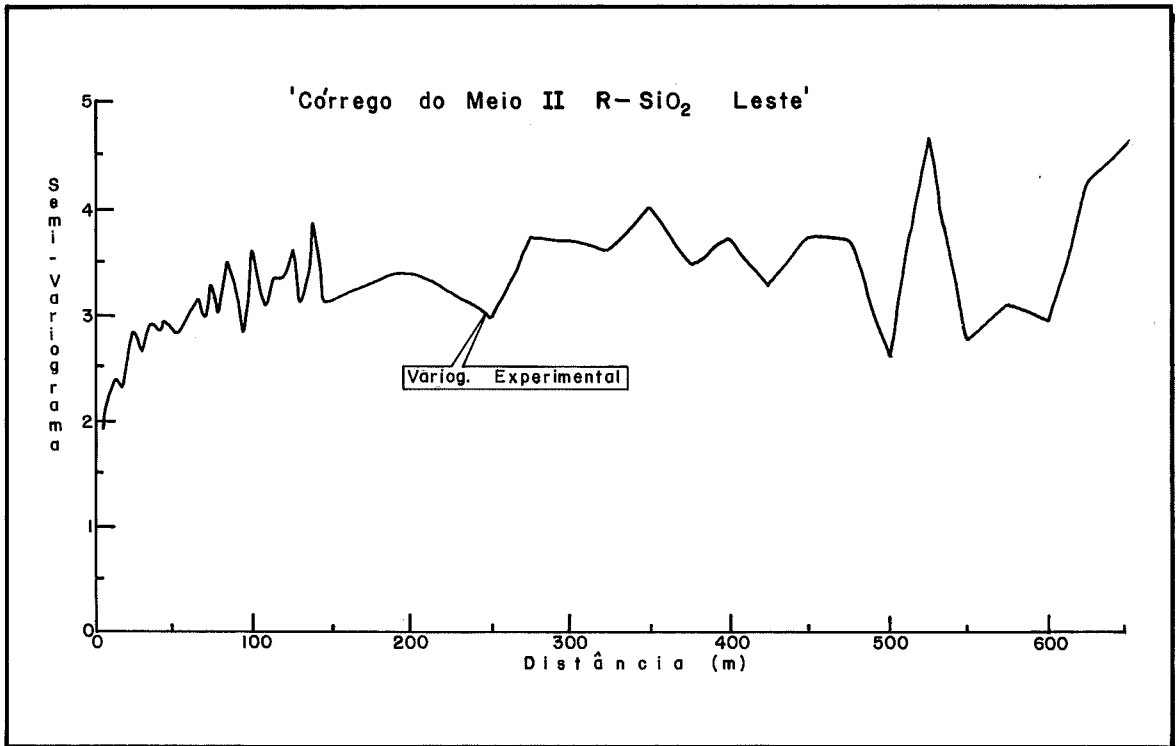
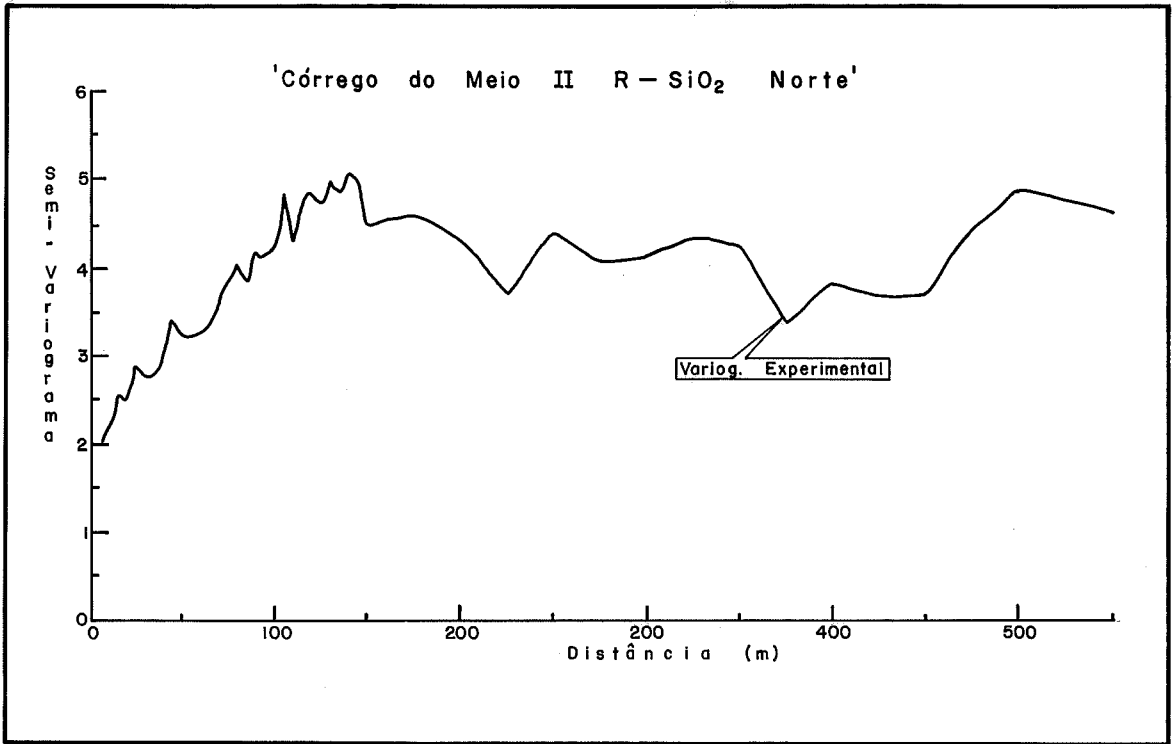


FIGURA ( 1.5)

assim obtidos são comparados com os modelos que representam o fenômeno na escala de 25 x 25 m, para certificar o ajuste efetuado e definir os parâmetros variográficos.

#### I.3.4.3 - Krigagem

Os modelos variográficos ajustados são regularizados (transformação dos modelos definidos em determinado volume amostral em modelos pontuais) para efeito de estimação. Esta transformação está desenvolvida no trabalho de ÉRRICO (22) e conceituada em JOURNEL e HUIJBREGTS (28).

Conhecida a estrutura do fenômeno geológico, refletida pelo modelo variográfico, e os parâmetros estruturais definidos, passa-se à estimação da reserva "*in situ*", utilizando as técnicas de krigagem. Desta forma, estima-se os ponderadores associados a determinadas amostras, para estimação de uma variável regionalizada em um determinado ponto da jazida. O valor obtido é função das amostras que exercem influência sobre este ponto. A influência (peso) de uma dada amostra  $i$ , sobre o valor estimado é quantificada pelo valor do ponderador  $\lambda_i$ .

De posse destes ponderadores, considerando a área mineralizada dividida em blocos de 25 x 25 m, estima-se para cada bloco o teor de A -  $Al_2O_3$  e R -  $SiO_2$ . A tabela seguinte, reproduzida de ÉRRICO (22), mostra os resultados de um painel krigado:

COTA DA BASE DOS BLOCOS	VOLUME m <sup>3</sup>	TEOR (%)	K (%)	TEOR (%)	K (%)
		A - Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	A - Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	R - SiO <sub>2</sub>	R - SiO <sub>2</sub>
1380,00	1187,50	44,89	1,69	3,8	0,36
1378,00	1250,00	46,01	1,49	3,5	0,32
1376,00	1250,00	51,29	1,53	2,9	0,32
1374,00	1250,00	52,62	1,56	2,1	0,32
1372,00	1250,00	49,40	1,76	2,7	0,35



## CAPÍTULO II

### REVISÃO DA LITERATURA

#### II.1 - GENERALIDADES

Devido a própria complexidade dos fenômenos geológicos, que geram um depósito mineral, e o grande número de variáveis envolvidas, com características bastante particulares, torna-se necessário o desenvolvimento de procedimentos adequados para tratar estas variáveis. Haverá sempre um certo grau de subjetividade e incertezas, envolvidas no estudo de tais fenômenos, tanto mais acentuadas quanto menos adequados forem os métodos utilizados. Os resultados obtidos serão sempre uma estimativa dos verdadeiros valores relativos a um determinado depósito, pois, estima-se as propriedades de milhares de toneladas de material a partir de amostras de alguns quilos conforme GUERRA e SALLES (23).

Um dos primeiros problemas relativos a estimação que se depara é na avaliação da reserva. Os métodos empregados têm evoluído, através dos tempos, sendo hoje classificados por diversos autores como:

- métodos convencionais;
- métodos estatísticos; e
- métodos geoestatísticos.

## II.2 - MÉTODOS CONVENCIONAIS

Os métodos convencionais, ou métodos topológicos, baseiam-se em procedimentos clássicos da geologia e mineração fornecendo uma série de informações, as quais dependem também da intuição.

Estes métodos levam em consideração o conceito de área ou volume de influência, que comumente são determinados, empiricamente, com base em apreciações pessoais, ou ainda simplesmente de acordo com a disposição e espaçamento das amostras obtidas. Não consideram, portanto, a variabilidade e dispersão das variáveis, além de serem omissos quanto a quantificação dos erros de estimação e extensão cometidos na avaliação. Atribuem um determinado valor a uma variável mas, não consideram que este valor pode ou não coincidir com o valor verdadeiro, conforme VALENTE (42).

## II.3 - MÉTODOS ESTATÍSTICOS

Estes métodos levam em conta a variabilidade ou dispersão relativa a um fenômeno geológico e consideram-o como um processo totalmente aleatório. As variáveis envolvidas são tratadas através da teoria das probabilidades, permitindo calcular o erro cometido na avaliação.

RENDU (37) observa que os métodos da estatística clássica, usados para descrever as propriedades dos valores das amostras, consideram estes valores como realizações de uma variável

aleatória. Como uma variável aleatória pode tomar valores diferentes em diferentes pontos de observação, mostrando uma certa independência do espaço, o que não ocorre com as variáveis envolvidas nas mineralizações, conclui-se que tais métodos não são muito adequados para tratar tais variáveis.

Uma restrição que se deve levar em conta, na utilização deste método, refere-se ao fato de não ser possível analisar, conjuntamente, os dois aspectos característicos das variáveis envolvidas nos fenômenos geológicos:

- a dependência entre uma amostra e suas vizinhas (aspecto estruturado); e
- a influência que o espaço pode exercer na distribuição de seus valores (aspecto aleatório).

Em resumo, conforme exposto por GUERRA e SALLES (23), o que se pretende em qualquer trabalho estatístico é estudar qual a distribuição teórica que melhor se ajusta à distribuição amostral de tal modo que, a partir da distribuição teórica, possam ser feitas inferências em relação à distribuição verdadeira. Também destacam as principais vantagens destes métodos:

- calcular o erro de estimação associado ao valor estimado (que permite conhecer a variação do estimador em torno do valor verdadeiro); e
- constatar a existência ou não de correlação entre diferentes variáveis.

Os itens (II.3.1) e (II.3.2) a seguir destinam-se a uma conceituação, resumida, das distribuições teóricas que melhor se ajustam às distribuições amostrais referentes a fenômenos geológicos.

### II.3.1 - Distribuição Normal ou de Gauss

A distribuição normal ocorre, conforme DAVID (18), quando o valor do fenômeno estudado é devido a soma de várias causas independentes, cuja função densidade de probabilidade é expressa por:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left[-\frac{1}{2}(x-m)^2\right] dx \\ f(\infty) = 1 \end{array} \right. \quad (II.1)$$

onde:

$\sigma^2$  = variância da população;

$m$  = média da população; e

$\sigma$  = desvio padrão.

A função  $f(X)$  descreve uma curva contínua simétrica em torno da média, cuja área é igual a unidade.

É importante conceituar, conforme GUERRA e SALLES (23), as características amostrais de uma população, normalmente distribuída:

a) média ( $\bar{x}$ ) dos  $n$  valores,  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ )

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{II.2})$$

b) variância

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad (\text{II.3})$$

fornece uma noção da dispersão dos valores  $x_i$  em relação ao seu valor médio.

c) desvio padrão

$$S_x = \sqrt{S_x^2}, \quad (\text{II.4})$$

estabelece o limite de confiança do valor médio estimado.

d) erro padrão da média

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}}, \quad (\text{II.5})$$

denota a segurança na estimação do valor médio (usado para obter os limites de confiança da média estimada).

e) coeficiente de dispersão

$$C_d = \left| \frac{S_x}{\bar{x}} \right| 100, \quad (\text{II.6})$$

indica o grau de variabilidade do depósito.

f) limite de confiança

Estabelece uma faixa de valores, num determinado nível de confiança, dentro do qual está situado o verdadeiro valor procurado, e não um valor único. É estabelecido em função da média amostral ( $\bar{x}$ ) e do erro padrão da média ( $S_x$ ):

limite inferior:  $\bar{x} - KS_x$

limite superior:  $\bar{x} + KS_x$

O fator  $k$  é função do nível de confiança estabelecido. Comumente são usados os valores 1, 2 e 3 correspondentes, respectivamente, às probabilidades 68%, 95% e 99,7%.

### II.3.2 - Distribuição Lognormal

A distribuição lognormal tem como função densidade de probabilidade a seguinte expressão, de DAVID (18):

$$f(x) = \frac{1}{x\beta \sqrt{2\pi}} \exp. \left[ -\frac{1}{2} (\ln \gamma - \ln x) / \beta^2 \right], \quad (\text{II.7})$$

onde:

$\gamma$  = mediana da população lognormal; e

$\beta$  = desvio padrão.

A função  $f(X)$  descreve uma curva contínua assimétrica. Os parâmetros, normalmente, usados para descrever uma distribuição, lognormal são a mediana ( $\gamma$ ) e o desvio padrão ( $\beta$ ).

RENDU (37) menciona que, se  $(X)$  for uma variável com distribuição assimétrica e  $\ln(X)$  apresentar distribuição normal, a distribuição de  $(X)$  é lognormal e bi-paramétrica (depende de  $\gamma$  e  $\beta$ ). Também menciona que, em muitos casos, existe a variável lognormal  $(X)$  com  $\ln(X + \theta)$  distribuída normalmente. Neste caso a distribuição de  $(X)$  é lognormal tri-paramétrica. Os parâmetros que definem a distribuição de  $(X)$  são:

- constante aditiva  $\theta$ ;
- variância logaritmica de  $(X + \theta)$ ; e
- média logaritmica de  $(X + \theta)$ .

Se o número de amostras for grande a constante pode ser determinada graficamente, utilizando a expressão:

$$\theta = [\gamma^2 - f_1 f_2] / [f_1 + f_2 - 2\gamma] \quad (\text{II.8})$$

onde:

- $\gamma$  - mediana;
- $f_1$  e  $f_2$  - são valores amostrais correspondentes as frequências acumuladas  $p$  e  $(1 - p)$ , respectivamente (os valores de  $p$ , indicados por RENDU (37), estão entre 5% e 20%).

Em casos de amostras pequenas, aconselha-se adotar  $\theta = 0$  ou valores provenientes de depósitos similares.

Os detalhes sobre a determinação da constante  $\theta$ , encontram-se expostos por RENDU (37).

É também importante conceituar as características amostrais de uma população (Y) com distribuição lognormal:

a) média aritmética dos logaritmos de n amostras:

$$\alpha = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln(x_i) \quad (\text{II.9})$$

b) variância dos logaritmos

$$\sigma_y^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n [\ln(X) - \mu_y]^2 \right\} \quad (\text{II.10})$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \left\{ \sum_{i=1}^n [\ln(x_i) - \alpha]^2 \right\} \quad (\text{II.11})$$

(estimador de  $\sigma_y^2$ )

c) mediana

$$\mu = e^{\mu_y} \quad (\text{II.12})$$

$$\gamma = e^{\alpha} \text{ (estimador de } \mu) \quad (\text{II.13})$$

d) variância geométrica

$$\sigma_G^2 = \text{antilog } \sigma_y^2 \quad (\text{II.14})$$

$$S_G^2 = \text{antilog } S_y^2 \quad (\text{II.15})$$

(estimador de  $\sigma_G^2$ )



e) média aritmética

$$\bar{X}_a = e^{(\alpha + S_y^2/2)} \quad (\text{II.16})$$

f) limite de confiança

Para amostras consideradas grandes ( $n > 100$ ), os limites de confiança são determinados pelas expressões:

$$\text{limite inferior} = \mu e^{-k\sigma_y} \quad (\text{II.17})$$

$$\text{limite superior} = \mu e^{+k\sigma_y} \quad (\text{II.18})$$

$k$  tem o mesmo significado definido para a distribuição normal, porém os intervalos não são simétricos.

Maiores detalhes sobre esta distribuição frequentemente ajustada na prática, são encontrados em ERRICO (22), JOURNEL e HUIJBREGTS (28), GUERRA e SALLES (23), RENDU (37) e DAVID (18).

### II.3.3 - Análise de Correlação e Regressão

CHOU (13) expõe as formas distintas de analisar a associação entre variáveis aleatórias. A análise de regressão tem como objetivo mostrar a natureza da relação entre as variáveis através de uma relação funcional (linear ou não-linear) entre elas. A análise de correlação estabelece o grau de relação entre as variáveis.

O processo geralmente usado para estabelecer o grau de relação entre duas variáveis aleatórias associados,  $x$  e  $y$ , é através da covariância entre elas, cuja expressão matemática, de acordo com RENDU (11) é:

$$\sigma_{xy} = \text{cov}[XY] = E\{[X - E(X)] [Y - E(Y)]\} \quad (\text{II.19})$$

Efetuada  $n$  observações, obtém-se  $x_i$  e  $y_i$  valores de  $X$  e  $Y$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ . Assim o estimador  $S_{xy}$  da covariância  $\sigma_{xy}$  será:

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x}) (y_i - \bar{y}) \quad (\text{II.20})$$

sendo:

$$E[X] = \mu_x = \text{valor esperado de } X;$$

$$E[Y] = \mu_y = \text{valor esperado de } Y;$$

$$E[X - \mu_x] = \sigma_x^2 = \text{variância de } X;$$

$$E[Y - \mu_y] = \sigma_y^2 = \text{variância de } Y;$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \text{estimador de } \mu_x;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \text{estimador de } \mu_y;$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \text{estimador de } \sigma_x^2$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \text{estimador de } \sigma_y^2$$

A covariância pode ser nula, negativa ou positiva. O valor nulo indica que as variáveis não são correlacionadas, podendo ser dependentes ou independentes. Para verificar a independência entre  $X$  e  $Y$ , no caso de covariância zero, é necessário recorrer a outro método.

O coeficiente de correlação define o grau de correlação entre duas variáveis aleatórias,  $X$  e  $Y$  e se exprime por:

$$\begin{aligned}\rho_{xy} &= \text{Cov.}[XY] / \sigma_x \cdot \sigma_y = \\ &= E[(Y - \mu_y)(X - \mu_x)] / \sqrt{E(Y - \mu_y)^2} \sqrt{E(X - \mu_x)^2} \quad (\text{II.21})\end{aligned}$$

O estimador de  $\rho_{xy}$  é definido pela relação entre os estimadores  $S_{xy}$ ,  $S_x$  e  $S_y$ :

$$r_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_x \cdot S_y} \quad (\text{II.22})$$

O valor do coeficiente de correlação  $r_{xy}$  é um valor entre  $(-1, +1)$ :

se  $r_{xy} = +1$ , significa que existe uma relação funcional perfeita entre  $X$  e  $Y$  (se  $X$  aumenta,  $Y$  também aumenta)

se  $r_{xy} = 0$ , conclui-se que não existe relação nenhuma entre as variáveis  $X$  e  $Y$ .

se  $r_{xy} = -1$ , há também uma relação funcional perfeita entre  $X$  e  $Y$  (se  $Y$  aumenta,  $X$  diminui).

Qualquer outro valor intermediário entre - 1 e + 1 define uma certa correlação entre X e Y cuja interpretação é função de cada caso específico.

O estudo da correlação entre duas variáveis é importante pois, pode-se prever o comportamento de uma variável a partir do conhecimento da outra.

#### II.3.4 - Regressão Linear

A expressão seguinte, reproduzida de CHOU (13) representa um modelo de regressão linear entre uma variável dependente Y relacionada a uma variável independente X:

$$Y = \alpha + \beta X + U \quad (\text{II.23})$$

A relação de dependência linear entre as variáveis é composta dos termos:

$\alpha + \beta X$  - componente sistemática;

U - componente estocástica ou resíduo.

A componente estocástica U, origina resultados incertos para a variável dependente Y. O surgimento da componente aleatória U, se deve, às vezes, a exclusão de outra variável independente importante no modelo. Isto conduz a análise de regressão múltipla, detalhada em CHOU (14), MOSTELLER e TUKEY (32).

Na prática é adotado o modelo de regressão linear, dito clássico, no qual estão incluídas as seguintes considerações:

- a variável independente  $\underline{X}$  possui valores estabelecidos;
- o erro  $\underline{U}$ , associado a cada valor de  $\underline{X}$ , e estatisticamente independente de  $\underline{X}$ , provém de uma população normal com média zero e desvio padrão  $\sigma$ . Se  $E(U) \neq 0$  tem-se uma regressão não linear;
- a variância condicional de  $\underline{Y}$  em relação a  $\underline{X}$ ,  $\sigma_{y|x}$ , é constante e igual a variância de  $U$ , independentemente do valor de  $\underline{X}$ .

Considerando estas observações tem-se:

$$\begin{aligned} E[X/Y] &= E[\alpha + \beta X + U] \\ &= \alpha + \beta E[X + U] \\ &= \alpha + \beta X \end{aligned} \tag{II.24}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y) &= E[Y - E(Y)] \\ &= E[\alpha + \beta X + U] \\ &= E[U] \\ &= \sigma^2 \end{aligned} \tag{II.25}$$

Assim sendo, o modelo de regressão linear pode ser estimado por:

$$y_i = a + bx_i \tag{II.26}$$

sendo:

$(a + bx_i)$  - estimador linear de  $(\alpha + \beta X)$ ;

a e b - estimadores de  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente.

Utilizando o método dos mínimos quadrados, conforme explica CHOU (14), os valores de a e b são selecionados de forma a minimizar a soma dos quadrados das diferenças entre os valores observados  $y_i$  e o valor estimado  $y_i^*$ , ou seja:

$$\sum_{i=1}^n e_i = \sum_{i=1}^n (y_i - y_i^*) = \sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)]^2 \quad (\text{II.27})$$

Resolvendo o sistema de equações:

$$\begin{cases} \sum_i y_i = n a + b \sum_i x_i; \\ y_i x_i = a \sum_i x_i + b \sum_i x_i^2, \end{cases} \quad (\text{II.28})$$

obtem-se os valores de a e b,

$$a = \bar{y} - b\bar{x} \quad (\text{II.29})$$

$$b = (n \sum_i y_i x_i - \sum_i y_i \sum_i x_i) / [n \sum_i x_i - (\sum_i x_i)^2] \quad (\text{II.30})$$

## II.4 - MÉTODOS GEOESTATÍSTICOS

### II.4.1 - Considerações Gerais

Entre as várias características das variáveis envolvidas nos fenômenos naturais estão o duplo aspecto (aleatório e estruturado) que estas variáveis apresentam em comum. Os valores observados (teores por exemplo) apresentam irregularidades com variações imprevisíveis de um ponto a outro do espaço, no entanto, são inteiramente independentes uns dos outros. Os fenômenos naturais, assim caracterizados, são definidos como fenômenos regionalizados (aqueles que variam no espaço mostrando uma certa estrutura).

Estas características somadas aos problemas de estimação, específicos do setor mineral, não tratados pelos métodos convencionais e estatísticos, levaram o pesquisador francês G. Matheron a desenvolver a teoria das variáveis regionalizadas (V. Rs) que possui suporte teórico e prática capaz de considerar e revelar importantes características estruturais de um depósito mineral. O objetivo inicial do trabalho foi, de certa forma, formular as observações práticas levantadas por Krige, e também Sichel, nas minas de ouro do Rand (1951) bem como aquelas feitas por De Wijs sobre jazidas uraníferas (entre 1952 e 1953) na África do Sul. Tal formalismo se apoia na teoria das funções aleatórias.

Assim sendo os métodos geoestatísticos constituem uma etapa superior e complementar, em relação aos métodos anteriores que permitem inferir características estruturais, bem como, possíveis correlações espaciais existentes entre as variáveis. Estas características, referentes a variável regionalizada em estudo são obtidas através da função básica da geoestatística denominada variograma. Os problemas de estimação (adequação do método à estrutura da mineralização, variância mínima e estimador não tendencioso) são tratados pela técnica de estimação denominada krigagem.

Em resumo estes métodos possuem uma série de recursos que permitem obter o melhor proveito das informações disponíveis, tal como, elaborar através da simulação geoestatística, um modelo numérico que reproduz a distribuição espacial e correlações dos diversos parâmetros da jazida real.

GUERRA e SALLES (23) mencionam importantes observações práticas levantadas a partir dos trabalhos da Escola Sul Africana:

- as variâncias obtidas de amostras tomadas em malha regular são sistematicamente, menores que as obtidas em uma malha irregular;
- a variância total das amostras de um depósito é igual a soma das variâncias das amostras nos painéis e dos painéis no depósito (relação da aditividade de Krige);
- a variância total diminui com o aumento do volume amostrado (efeito de suporte);



- a variância total é a soma de uma variância aleatória (estatística) e uma variável espacial (dispersão);
- a média aritmética não deve ser usada para estimativas, devido a grande influência dos valores altos;
- não devem ser utilizadas áreas de influência diferentes, devido a distorção causada pelas mesmas;
- devido a existência de dois tipos de variâncias (aleatórias e espacial), o número de amostras necessárias para a avaliação é sempre menor do que o solicitado pela estatística clássica;
- as amostras de uma dada variável não se dispõem aleatoriamente e, até uma certa distância, exercem influência sobre o ponto a ser estimado.

#### II.4.2 - Conceitos Fundamentais em Geoestatística

Com respeito as variáveis regionalizadas e o desenvolvimento da teoria das funções aleatórias, alguns conceitos são fundamentais para o entendimento e aplicação dessa teoria como suporte de trabalho. O desenvolvimento do presente trabalho, para tratar as variáveis regionalizadas alumina aproveitável e sílica reativa, será suportado em tais conceitos. As definições seguintes estão fundamentadas em JOURNEL e HUIJBREGTS (28), RENDU(37), DAVID (18), MATHERON (31) e VALENTE (43).

##### II.4.2.1 - Variáveis Regionalizadas (V.Rs)

Entende-se como V.Rs aquelas cujos valores são relacionados de algum modo com a posição espacial que ocupam.

JOURNEL e HUIJBREGTS (28) observam que, a definição de uma V.R. como uma variável distribuída no espaço, é puramente descritiva e não envolve qualquer interpretação probabilística. Uma V.R. é definida, matematicamente, como uma função  $f(x)$  a qual toma um valor em todo ponto  $(x)$  e varia irregularmente no espaço. Uma regionalização espacial de uma única variável pode ser caracterizada pela função covariância  $C(h)$ .

#### II.4.2.2 - Variáveis Corregionalizadas

A existência de variáveis que se inter-correlacionam no espaço representa uma corregionalização espacial multivariável que pode ser caracterizada por uma matriz de covariância  $C_{kk'}(h)$  ou semi-variograma cruzado  $\gamma_{kk'}(h)$ . Esta intercorrelação pode fornecer um estudo simultâneo das variáveis  $k$  e  $k'$ .

Como afirma JOURNEL e HUIJBREGTS (28), sob o ponto de vista probabilístico, uma corregionalização é similar a uma regionalização de uma só variável. As  $m$  V.Rs correlacionadas  $[(z_1(x), z_2(x), \dots, z_m(x))]$  são tratados como realização particular de um conjunto de  $m$  funções aleatórias,  $[Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_m(x)]$ .

#### II.4.2.3 - Função Aleatória - (F.A.)

Seja  $D$  um domínio (depósito mineral) e  $x$  um ponto pertencente a  $D$ . Uma amostra tomada no ponto  $x$  resultará num valor  $z(x)$ . Este valor pode ser considerado como uma realização particular de uma certa variável aleatória  $Z(x)$ , definida no ponto  $x$ .

Implantando, em todos os pontos do domínio  $D$ , uma amostra, resultará um conjunto de variáveis aleatórias  $Z(x)$ ,  $x \in D$ . Este conjunto resultante é denominado de função aleatória, cuja realização particular  $z(x)$  é uma V. R. Uma F. A. é, portanto, composta de uma infinidade de V. As.

#### II.4.2.4 - Função Aleatória Estacionária (F.A.E.)

A F.A.  $Z(x)$  é estacionária, conforme definição JOURNEL e HUIJBREGTS (28), quando possui a mesma lei de distribuição de probabilidades que a sua transladada  $Z(x + h)$ .

Nestas condições admite-se a hipótese de estacionaridade do primeiro momento:

$$E[Z(x)] = E[Z(x + h)] = m = \text{cte.} \quad (\text{II.31})$$

#### II.4.2.5 - Função Aleatória Estacionária de Segunda Ordem (FAST)

A F.A.  $Z(x)$  é estacionária de segunda ordem quando:

- a esperança matemática existe e não depende da sua posição  $x$ ,

$$E[Z(x)] = m, \forall x, \quad (\text{II.32})$$

- a covariância  $C(h)$ , para cada par de variáveis  $Z(x)$ ,  $Z(x + h)$  existe e não depende da posição  $x$ , mas somente da distância relativa entre os pontos,

$$C(h) = E[Z(x + h) \cdot Z(x)] - m, \forall x \quad (\text{II.33})$$

Como consequência da estacionaridade da covariância resulta uma variância a priori finita, e uma função  $\gamma(h)$  estacionária:

$$\text{var } Z(x) = E[Z(x) - m]^2 = C(0), \forall x ; \quad (\text{II.34})$$

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) \quad (\text{II.35})$$

Estas hipóteses nem sempre ocorrem, pois existem fenômenos físicos com capacidade de dispersão infinita, para os quais, não é possível admitir a estacionaridade da função  $\gamma(h)$ , que é uma hipótese menos restritiva que a estacionaridade da covariância.

Existindo a variância finita, é possível resolver os problemas de estimação linear a partir da função covariância  $C(h)$ , se todas as combinações lineares finitas de V.R. tiveram uma variância positiva ou nula conforme PEREIRA (36):

$$\text{var} \left[ \sum_i \lambda_i Z(x_i) \right] = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j C(x_i - x_j) \geq 0 \quad (\text{II.36})$$

#### II.4.2.6 - Função Aleatória Intrínseca (FAI-0)

A F.A. intrínseca exige a validade das seguintes condições:

- a esperança dos acréscimos de primeira ordem não depende do ponto de apoio  $x$ ,

$$E\{Z(x + h) - Z(x)\} = 0 ; \quad (\text{II.37})$$

- para todo vetor  $\underline{h}$ , o incremento  $[Z(x + h) - Z(x)]$  tem variância finita e independente de  $x$ ,

$$\text{var} \{Z(x + h) - Z(x)\} = \{Z(x + h) - Z(x)\}^2 = 2\gamma(h), \quad \forall x \quad (\text{II.38})$$

A hipótese intrínseca, ou estacionaridade dos acréscimos de primeira ordem, não exige o conhecimento da média e a existência de variância finita.

Com base nesta hipótese define-se a função semi-vario-grama, o que permite resolver problemas de estimação linear, e não exigir que todas as combinações lineares sejam positivas ou nulas, mas apenas as combinações lineares autorizadas definidas por MATHERON (31):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{var} \left\{ \sum_i \lambda_i Z(x_i) \right\} = - \sum_i \sum_j \gamma(x_i - x_j) \geq 0 \\ \sum_i \lambda_i = 0 \end{array} \right. \quad (\text{III.39})$$

Esta hipótese é, portanto, mais fraca que a estacionaridade de segunda ordem. Se  $Z(x)$  é uma FAST é também uma FAI-0, BRAGA (7).

#### II.4.2.7 - Função Aleatória Intrínseca de Ordem K - (FAI-K)

Tal como definida em MATHERON (31), uma função aleatória intrínseca de ordem K é uma função aleatória intrínseca em  $\Lambda^k$ , sendo  $\Lambda^k$  um conjunto particular constituído pelos monômios polinomiais de ordem K (K inteiro). São F.As.  $Z(x)$  às quais correspondem covariâncias generalizadas de ordem K que eliminam a deriva presente em  $Z(x)$ .

O modelo FAI-K foi desenvolvido para tratar casos em que a hipótese intrínseca não seja compatível com os dados, isto é, para fenômenos não estacionários em que só os acréscimos de ordem superior à primeira podem admitir uma esperança e variância independentes do ponto de apoio, PEREIRA (36).

As combinações lineares autorizadas, sobre as quais a estacionaridade se verifica, são agora as combinações lineares da V.R. que anulam os polinômios de grau  $< K$  (K é o grau da função deriva  $m(x) = f(x)$ ).

Examinando, simultaneamente, os três tipos de estacionaridade pode-se sintetizar com base em PEREIRA (36), as distinções básicas:

- FAST - exige que todas as combinações lineares finitas da V.R. tenham uma variância positiva ou nula (II.36);
- FAI-0 - exige que somente as combinações lineares autorizadas sejam  $\geq 0$  (II.39);

- FAI-K - as combinações lineares autorizadas são apenas as combinações lineares da V.R. que anulam os polinômios de grau menor que o grau K da deriva.

#### II.4.2.8 - Erro de Estimação

O erro de estimação, detalhado por JOURNEL e HUIJBREGTS (28), está envolvido em todo método de estimação, devido ao fato de que existe sempre uma diferença entre o valor real da variável  $\underline{z}$  e seu valor estimado  $\underline{z}^*$ . Tal diferença ( $z - z^*$ ) caracteriza o erro que se comete na estimação.

Ainda JOURNEL e HUIJBREGTS (28) mostram que, quando o teor médio de um testemunho de sondagem  $\bar{z}$  é usado para estimar o verdadeiro teor médio  $\underline{z}(x_j)$  de um bloco  $\underline{V}$ , o erro envolvido é:

$$r(x_j) = z_V(x_j) - z_V^*(x_j) \quad (\text{II.40})$$

Este erro pode ser interpretado como uma realização particular de uma F.A.  $R(x)$ .

Se a F.A.  $R(x)$  é estacionária as realizações  $r(x_j)$  e  $r(x_j)$  podem ser consideradas como duas realizações diferentes da mesma F.A. estacionária  $R(x)$ . Assim, é possível inferir a esperança estacionária  $m = E|R(x)|$  e a variância do erro  $\sigma_E^2 = \text{var } R(x)$ , da função de distribuição do erro.

A qualidade da estimação é avaliada pela média e pela variância do erro  $r(x)$ , que é desconhecido.

#### II.4.2.9 - Variância de Estimação

É através da variância de estimação que se avalia o erro que se comete ao atribuir valores provenientes de testemunhos de sondagem, por exemplo, a um bloco ou mesmo a uma jazida. Em função deste erro, pode-se avaliar a precisão da estimação, fornecendo ao valor estimado um intervalo de confiança, a um determinado nível de probabilidade.

Para caracterizar a variância de estimação, JOURNEL e HUIJBREGTS (28) expõem um exemplo de estimação do valor médio  $\bar{z}$ , dos  $k$  valores desconhecidos  $\{z(x_j), j = 1, \dots, k\}$ , utilizando os  $n$  valores conhecidos ( $n$  amostras)  $\{z(x_i), i = 1, \dots, n\}$ .

Valendo-se de um método de estimação do valor médio, pode-se determinar  $z^*(x)$ , estimador linear do verdadeiro valor  $z(x)$ , empregando as  $n$  amostras  $\{z(x_i), i = 1, \dots, n\}$ . O estimador  $z^*(x)$  é interpretado como uma realização particular de uma variável aleatória  $Z^*(x)$ . Assim, o erro  $|z(x) - z^*(x)|$  desconhecido é uma realização de uma variável aleatória  $|Z(x) - Z^*(x)|$ .

Sob a hipótese de estacionaridade de segunda ordem tem-se:

$$E|Z(x)| = m;$$

$$E|Z^*(x)| = m \text{ e } E|Z(x) - Z^*(x)| = 0. \quad (\text{II.41})$$



Para avaliar a estimação efetuada, JOURNEL e HUIGBREGTS (28), entre outros, recorrem a variância de estimação  $\sigma_E^2$ :

$$\sigma_E^2 = E[Z(x) - Z^*(x)] . \quad (\text{II.42})$$

A variância  $\bar{\sigma}$  é estimada em função da covariância  $C(h)$  da função aleatória estacionária de segunda ordem  $Z(x)$ , pela seguinte expressão:

$$\sigma_E^2 = \bar{C}[(k), (k)] + \bar{C}[(n), (n)] - 2\bar{C}[(k), (n)], \quad (\text{II.43})$$

onde:

$\bar{C}[(k), (k)]$  = valor médio da covariância  $C(h)$ , quando as duas extremidades do vetor  $\underline{h}$  descrevem, independentemente, o conjunto  $\{z(x_j), j = 1, \dots, k\}$ ;

$\bar{C}[(n), (n)]$  = valor médio da covariância  $C(h)$ , quando as duas extremidades do vetor  $\underline{h}$  descrevem, independentemente, o conjunto  $\{z(x_i), i = 1, \dots, n\}$ ;

$\bar{C}[(k), (n)]$  = valor médio da covariância  $C(h)$ , quando uma extremidade do vetor  $\underline{h}$  descreve o conjunto  $[z(x_j), j = 1, \dots, k]$  e a outra extremidade descreve, independentemente, o conjunto  $\{z(x), i = 1, \dots, n\}$ .

Para o caso contínuo (infinitos pontos  $\underline{k}$  e  $\underline{n}$ ) a variância de estimação é dada, em função das covariâncias médias, para diferentes posições do vetor  $\underline{h}$ :

$$\sigma_E^2 = \sigma_E^2(v/V) = \bar{C}(V, V) + \bar{C}(v, v) - 2\bar{C}(V, v) \quad (\text{II.44})$$

Em termos do semi-variograma  $\bar{\gamma}(h)$ .

$$\sigma_E^2 = \sigma_E^2(v/V) = 2\bar{\gamma}(v, V) - \bar{\gamma}(V, V) - \bar{\gamma}(v, v) \quad (\text{II.45})$$

onde:

- $\sigma_E^2(v/V)$  = variância da estimação do domínio  $V$  com as informações provenientes do domínio  $v$ ;
- $2\bar{\gamma}(v, V)$  = valor médio da função variograma pontual  $\gamma(h)$ , quando uma extremidade ( $x$ ) do vetor  $\underline{h}$  percorre o domínio  $\underline{v}$  e a outra extremidade ( $x'$ ) percorre o domínio  $V$ ;
- $\bar{\gamma}(V, V)$  = valor médio da função variograma pontual  $\gamma(h)$ , quando as duas extremidades do vetor  $\underline{h}$  descrevem, independentemente, o domínio  $V$ ;
- $\bar{\gamma}(v, v)$  = valor médio da função variograma pontual  $\bar{\gamma}(h)$ , quando as duas extremidades do vetor  $\underline{h}$ , descrevem, independentemente, o domínio  $v$ .

#### II.4.2.10 - Variância de Dispersão

Seja o volume  $V$ , com teor médio  $z_V(x)$ , conforme abordagem de JOURNAL e HUIJBREGTS (28), dividido em  $\underline{n}$  volumes  $v(x_i)$  centrados nos pontos  $x_i$  e teor médio  $z_V(x_i)$ . Para cada uma das  $\underline{n}$  posições  $x_i$  de  $v(x_i)$  dentro do volume  $\underline{v}$  corresponde um desvio  $[z_V(x) - z_V(x_i)]$ . A média quadrática destes desvios caracteriza

a dispersão dos  $\underline{n}$  teores  $z_v(x_i)$  em torno do valor médio  $z_v(x)$ :

$$s^2(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [z_v(x) - z_v(x_i)]^2 \quad (\text{II.46})$$

Sendo o teor  $z_v(x)$  e os teores  $z_v(x_i)$  realizações das F.As.  $Z_v(x)$  e  $Z_v(x_i)$ , o desvio quadrático médio  $s^2(x)$  é uma realização particular de uma V.A.  $S^2(x)$ :

$$S^2(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [Z_v(x) - Z_v(x_i)]^2 \quad (\text{II.47})$$

A esperança estacionária de  $S^2(x)$  é definida como a variância de dispersão dos volumes  $\underline{v}$  dentro do volume  $\underline{V}$ :

$$D^2(v/V) = E[S^2(x)] = E\left\{\frac{1}{n} \sum [Z_v(x) - Z_v(x_i)]^2\right\} \quad (\text{II.48})$$

JOURNEL e HUIJBREGTS (28) apresentam um desenvolvimento detalhado para o caso contínuo e definem a variância de dispersão em função das covariâncias e semi-variogramas médios:

$$D^2(v/V) = \bar{C}(v, v) - \bar{C}(V, V) \quad (\text{II.49})$$

$$D^2(v/V) = \bar{\gamma}(V, V) = \bar{\gamma}(v, v)$$

Conhecendo a variância de dispersão é possível estudar a variabilidade de teores num bloco de minério e as flutuações de teores na alimentação da usina de beneficiamento mineral.

GUERRA e SALLES (23) apresentam as seguintes observações práticas sobre a variância de dispersão, em relação as unidades  $\underline{v}$  e  $\underline{V}$ :

- para  $\underline{v}$  fixo, a medida que aumenta  $\underline{V}$ , a variância de dispersão aumenta;
- para  $\underline{V}$  fixo, a medida que aumenta  $\underline{v}$ , a variância de dispersão diminui.

### II.4.3 - Função Variograma $2\gamma(h)$

#### II.4.3.1 - Definição e Propriedades

A função  $2\gamma(h)$ , referida anteriormente, denominada função variograma ou função intrínseca é o suporte básico da teoria das variáveis regionalizadas. Sendo possível definir esta função, isto é, sendo válida a hipótese intrínseca relativa a um dado fenômeno regionalizado em estudo, importantes parâmetros estruturais sobre o fenômeno podem ser evidenciados.

Considerações sobre esta função são apresentados por vários autores, entre outros, JOURNEL e HUIJBREGTS (28), RENDU (37), DAVID (18), MATHERON (31), VALENTE (43), e em vários trabalhos práticos, tais como, GUERRA e SALLES (23), BRAGA (6), CORTEZ e PEREIRA (15), CHAVES (11) e TULCANAZA (41). É importante observar que, nestes trabalhos, na caracterização da função, é sempre ressaltada as características do variograma utilizadas no desenvolvimento do respectivo trabalho. Isto mostra a variedade de aplicações desta função para diferentes objetivos.

Uma definição, geralmente, encontrada diz respeito à sua caracterização como variância dos acréscimos da função aleatória  $Z(x)$  da qual a variável regionalizada  $z(x)$  é uma realização. Esta função será caracterizada matematicamente, baseando em JOURNEL e HUIJBREGTS (28), conforme desenvolvimento que se segue.

Supondo dois valores numéricos  $z(x)$  e  $z(x + h)$ , nos dois pontos  $(x)$  e  $(x + h)$ , separados pela distância  $h$ , A variabilidade espacial entre estes valores é caracterizada pela função variograma, definida como sendo a esperança matemática da variável aleatória  $[Z(x) - Z(x + h)]$ ,

$$2\gamma(x, h) = E[Z(x) - Z(x + h)]^2 \quad (\text{II.50})$$

O variograma  $2\gamma(x, h)$  é função do ponto  $x$  e do vetor  $h$  porém, sendo possível assumir a validade da hipótese intrínseca, define-se a função intrínseca  $2\gamma(h)$  que depende somente do vetor  $h$ , em módulo e direção. O estimador de  $2\gamma(h)$ ,  $\gamma^*(h)$  é dado pela fórmula abaixo (função semi-variograma utilizada na prática):

$$\gamma^*(h) = \frac{1}{2N(h)} \sum_{i=1}^{N(h)} [z(x_i) - z(x_i + h)]^2, \quad (\text{II.51})$$

onde:

- $N(h)$  - número de pares de valores experimentais separados pelo vetor  $h$ ;
- $z(x_i)$  - valor da variável regionalizada tomada no ponto  $(x_i)$ ,
- $z(x_i + h)$  - valor da variável regionalizada tomada no ponto  $(x_i + h)$ .

Como consequência de estacionaridade de segunda ordem, tem-se a estacionaridade da variância e do semi-variograma, resultando a relação (II.35). Tal relação mostra, conforme concluem JOURNEL e HUIJBREGTS (28), que, sob condições de estacionaridade de segunda ordem, a covariância e o variograma são ferramentas equivalentes para caracterizar as auto-correlações existentes entre as variáveis  $Z(x)$  e  $Z(x + h)$ .

CORTÊS e PEREIRA (15) expõem algumas considerações relativas à função semi-variograma:

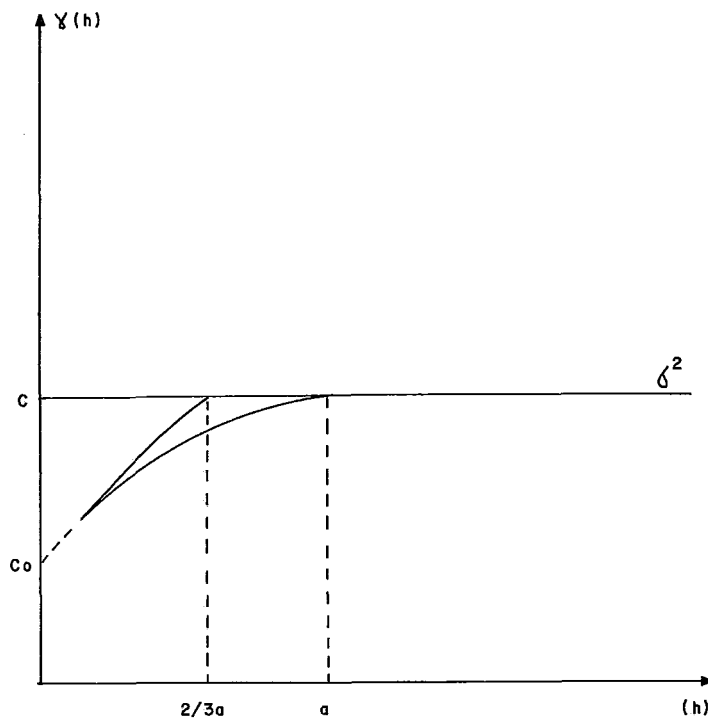
- é uma função simples que, fazendo intervir pares de pontos de uma mineralização, permite apreender o sistema de relações que estrutura o campo onde ela está implantada;
- é geralmente uma função crescente com  $h$ , dando sentido preciso à noção de zona de influência das amostras;
- o crescimento mais ou menos rápido da função  $\gamma(h)$  representa a maneira como as variáveis regionalizadas estão correlacionadas no espaço.

Conforme expõe VALENTE (43), a função semi-variograma possui as seguintes propriedades:

- é uma função simétrica  $\gamma(h) = \gamma(-h)$ ;
- é uma função positiva  $\gamma(0) = 0, \forall(h) > 0$ ;
- possui a propriedade de ordem,  $\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\gamma(h)}{h^2} \rightarrow 0$ .

### II.4.3.2 - Características Estruturais Evidenciadas pelo Semi-Variograma

Os parâmetros principais,  $(a, C, C_0)$  estão ilustrados na Figura (II.1).



a) amplitude variográfica ou alcance -  $(a)$

Amplitude  $\bar{a}$  é a distância, indicada no eixo das abcissas, a partir da qual a covariância entre as amostras se anula, isto é, a partir desta distância as amostras tornam-se independentes umas das outras. Marca o início de pura aleatoriedade. É também definida pelo valor de  $\underline{h}$ , além do qual, a função semi-variograma tende a coincidir com a variância a priori.

b) patamar - (C)

A partir da distância (a) não existe mais correlação entre as variáveis  $Z(x)$  e  $Z(x + h)$ . O gráfico da função semi-variograma mostra este comportamento pois, como referido anteriormente, para distâncias  $h \geq a$ ,  $\gamma(h)$  tende a igualar a variância total das amostras ( $\sigma^2 = C + C_0$ ).

O parâmetro  $C$  conforme interpretação de GUERRA e SALLES (23) é a variância de dispersão e, representa as diferenças espaciais entre os valores de uma variável tomados em dois pontos separados por distâncias cada vez maiores. Alguns semi-variogramas podem não apresentar patamar, o que indica um crescimento indefinido da variância com a distância entre os pontos de amostragem.

O parâmetro (C), indicado na Figura (II.1) é medido no eixo das ordenadas a partir do ponto correspondente a  $\gamma(0)$  até o ponto correspondente a transição da função  $\gamma(h)$ , isto é, o ponto a partir do qual a função  $\gamma(h)$  tende a se igualar a variância a priori  $\sigma^2$ .

Não havendo descontinuidade na origem,  $\gamma(0) = 0$ .

c) efeito de pepita - ( $C_0$ )

O valor  $C_0$  é definido, por VALENTE (43), como sendo a cota do ponto onde o semi-variograma intercepta o eixo das ordenadas. Representa uma descontinuidade na origem, ou seja:



$$\lim_{h \rightarrow 0} \gamma(h) = C_0 \neq 0 \quad (\text{II.52})$$

A ocorrência desta descontinuidade  $C_0$  indica, portanto, presença de variações locais, em pequena escala, não detectadas pela escala de amostragem. Pode ser causada também por erros de análise, erros de amostragem, ou seja, por erros humanos.

d) anisotropia geométrica

A função intrínseca  $\gamma(h)$  depende do vetor  $\underline{h}$ , em módulo e direção. Portanto, é uma função que apresenta andamentos diferentes, conforme a direção considerada, caso seja o fenômeno anisótropo.

A anisotropia geométrica é caracterizada, quando os semi-variogramas, construídos em diferentes direções, apresentam a mesma variabilidade global mas, amplitudes diferentes.

e) anisotropia zonal

A existência de anisotropia zonal é comprovada, quando semi-variogramas, construídos em diferentes direções, apresentam diferentes patamares, podendo apresentar a mesma amplitude. Esse tipo de anisotropia, caracteriza a falta de estacionaridade, conduzindo a diferentes variâncias, isto é, existem populações distintas compondo a informação estudada.

f) efeito proporcional

O efeito proporcional é uma evidência de falta de estacionaridade da F.A.  $Z(x)$ . No entanto, a hipótese intrínseca pode ser assumida com determinadas considerações sobre a função  $\gamma(h)$ , isto é, assume-se a validade da hipótese de quase estacionaridade, sem perder a validade da teoria geral.

A existência de efeito de proporcional gera semi-vario-grama com traço constante ao longo da região em estudo, porém, a amplitude, o patamar e o efeito de pepita estão sempre mudando.

Este efeito está bem tratado e ilustram em JOURNEL e HUIJBREGTS (28), DAVID.(18) e VALENTE (43).

g) deriva

Na prática a estacionaridade de F.A.  $Z(x)$  nem sempre ocorre existindo, portanto, uma esperança matemática de  $Z(x)$ , não estacionária, dependendo do ponto  $(x)$ , numa dada vizinhança da região considerada. O termo deriva, usado para definir a falta de estacionaridade da esperança matemática de  $Z(x)$ , segundo JOURNEL e HUIJBREGTS (28), representa fisicamente uma tendência local. Desta forma define-se uma função pontual  $m(x)$  igual ao momento de primeira ordem de uma F.A.  $Z(x)$  não estacionária:

$$m(x) = E|Z(x)| \quad (\text{II.53})$$

Nestas circunstâncias a V.R.  $z(x)$  pode supor-se constituída de duas componentes:

$$z(x) = m(x) + y(x) \quad , \quad (\text{II.54})$$

onde:

$m(x)$  - deriva (componente não estacionária);

$y(x)$  - resíduo (componente estacionária, possível de ser modelada pela função  $\gamma(h)$ ).

A deriva, tal como definida, pode ser expressa, analiticamente, pela fórmula:

$$m(x) = \sum_{\ell} a_{\ell} f^{\ell}(x) \quad , \quad (\text{II.55})$$

com:

$f^{\ell}(x)$  - funções conhecidas;

$a_{\ell}$  - parâmetros desconhecidos que variam com o ponto  $(x)$  considerado.

JOURNEL e HUIJBREGTS (28), BRAGA (7), entre outros, apresentam mais detalhes relativos ao tratamento da deriva.

h) estruturas embricadas

O embricamento de estruturas quando evidenciado no variograma experimental, revela um fenômeno com sobreposição de estruturas em diferentes escalas, cada uma delas com seu respectivo grau de heterogeneidade.

O número de estruturas detectadas, em uma dada escala de amostragem, é igual ao número de semi-variogramas secundários (correspondentes às micro-estruturas) contidos no semi-variograma principal (correspondente à macro estrutura). O semi-variograma final é composto pela soma dos parâmetros relativos aos secundários:

$$\gamma(h) = \gamma_1(h) + \gamma_2(h) + \dots + \gamma_n(h) , \quad (\text{II.56})$$

onde  $n$  é o número de estruturas secundárias.

#### II.4.3.3 - Modelos Teóricos

Os semi-variogramas experimentais, obtidos através dos dados experimentais, (realização de uma função aleatória intrínseca) são ajustados a uma função matemática definida teoricamente (variogramas teóricos) que caracteriza a estrutural espacial da V.R. em estudo. Este ajuste a um modelo é imprescindível pois, para fazer estimativas suportadas na função variograma, é necessário definir o modelo que melhor representa o fenômeno revelado pelos semi-variogramas experimentais e deste avaliar os parâmetros estruturais. Estes parâmetros ( $C$ ,  $C_0$  e  $a$ ) são obtidos por

interações sucessivas, ajustando-se os valores experimentais aos valores teóricos, até que as discrepâncias sejam mínimas, tal como indicam GUERRA e SALLES (23).

Os principais modelos variográficos, conforme apresentados por JOURNEL e HUIJBREGTS (28), estão expostos nos itens seguintes. Um modelo, denominado modelo quadrático, recentemente introduzido por ALFARO (3), será também apresentado.

#### II.4.3.3.1 - Modelos com Patamar

São modelos representativos de fenômenos de transição, cujo patamar é a variância a priori da F.A.  $Z(x)$ , estacionária de segunda ordem.

##### a) modelo esférico

Define-se um modelo de amplitude  $a$ , patamar  $C$  e efeito de pepita  $C_0$ , conforme a equação:

$$\gamma(h) = \begin{cases} C \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{|h|}{a} - \frac{1}{2} \frac{|h|^3}{a^3} \right] + C_0, & \text{se } |h| \leq a \\ C + C_0, & \text{se } h > a \end{cases} \quad (\text{II.57})$$

##### b) modelo exponencial

O modelo exponencial é definido pela equação:

$$\gamma(h) = C_0 + C \left[ 1 - e^{-\frac{|h|}{a}} \right] \quad (\text{II.58})$$

c) modelo de Gauss

É um modelo variográfico que representa um fenômeno de transição com alta regularidade espacial. Apresenta um comportamento parabólico na origem e é definido por:

$$\gamma(h) = C \left[ 1 - e^{-\frac{|h|^2}{a^2}} \right]$$

d) modelo quadrático

ALFARO (3) introduz um modelo de amplitude  $a$  e patamar  $C$ , que representa, também, um fenômeno de transição cuja equação é a seguinte:

$$\gamma(h) = \begin{cases} C \left[ \frac{2|h|}{a} - \frac{|h|^2}{a^2} \right], & \text{se } h \leq a, \\ C, & \text{se } |h| > a. \end{cases} \quad (\text{II.60})$$

Este modelo, conforme observa o autor, é muito similar ao modelo esférico, porém mais simples.

#### II.4.3.3.2 - Modelos sem Patamar

São modelos correspondentes a F.A.  $Z(x)$  intrínseca, isto é, nem a variância a priori nem a covariância são definidas, mas somente a função variograma.

a) modelo linear

A equação seguinte, definida em função de  $h$ , representa o modelo linear:

$$\gamma(h) = p|h|, \quad (\text{II.61})$$

onde  $p$  é o valor de  $\gamma(h)$  para  $h = 1$ .

b) modelo logaritmico

A equação do modelo logaritmico apresentada por RENDU  
(37) é a seguinte:

$$\gamma(h) = 3 \alpha \log_e h \quad (\text{II.62})$$

onde,  $\alpha$  é uma constante denominada dispersão absoluta.

Tais modelos estão muito bem tratados nas referências JOURNAL e HUIJBREGTS (28), RENDU (37), DAVID (18), MATHERON (31), VALENTE (43), ALFARO (3). Encontram-se suas representações gráficas, todo desenvolvimento teórico, assim como alguns exemplos ilustrativos de depósitos ajustados a tais modelos.

#### II.4.4 - Momentos Cruzados

Os momentos cruzados (semi-variograma e covariância) são interpretados da mesma forma que as funções semi-variograma e covariância destinadas ao estudo das regionalizações. Todos os parâmetros estruturais e modelos teóricos são válidos para o caso das corre regionalizações.

As características estruturais de variáveis corre regionalizadas podem ser interpretadas através da função  $\gamma_{kk'}(h)$ , denominada semi-variograma cruzado, calculada pela expressão:

$$\gamma_{kk'}(h) = \frac{1}{2} E\{[Z_k(x+h) - Z_k(x)] [Z_{k'}(x+h) - Z_{k'}(x)]\}, \quad (II.63)$$

onde:

$k$  e  $k'$  são as variáveis corre regionalizadas;

$[Z_k(x+h) - Z_k(x)]$  - incremento relativo a variável  $k$  em pontos distanciados de  $h$ ;

$[Z_{k'}(x+h) - Z_{k'}(x)]$  - incremento relativo a variável  $k'$  em pontos distanciados de  $h$ .

Em termos da covariância cruzada tem-se a fórmula análoga a (II.63):



$$\begin{aligned} C_{kk'}(h) &= \frac{1}{2} [\gamma_{kk'}(h) - C_k(h) - C_{k'}(h)] = \\ &= \frac{1}{2} \{ \gamma_{kk'}(h) - [S_k - \gamma_k(h)] - [S_{k'} - \gamma_{k'}(h)] \}, \quad (\text{II.64}) \end{aligned}$$

o algoritmo seguinte mostra os passos seguidos para determinar  $C_{kk'}(h)$ :

- a) calcular os variogramas experimentais  $\gamma_k(h)$  e  $\gamma_{k'}(h)$ ;
- b) ajustar a um modelo teórico;
- c) calcular o semi-variograma cruzado experimental  $\gamma_{kk'}(h)$ ;
- d) ajustar a um modelo teórico;
- e) calcular  $C_{kk'}(h)$ , pela fórmula (II.64).

JOURNEL e HUIJBREGTS (28) apresentam as propriedades específicas dos momentos cruzados bem como suas aplicações. JOURNEL (26) faz um estudo de correlação entre várias variáveis e utiliza o semi-variograma cruzado para definir correlações intrínsecas destinadas a simulação.

No Capítulo IV, deste trabalho, será feito um estudo de correionalização das variáveis, A -  $\text{Al}_2\text{O}_3$  e R -  $\text{SiO}_2$ , necessário à determinação de parâmetros para simulação cocondicional efetuada.

Em CARR e MEYRS (8) é estabelecido a noção de covariância das somas dos pares  $kk'$ :

$$C_{kk'}^+(h) = E\{[Z_k(x+h) + Z_{k'}(x+h)] [Z_k(x) + Z_{k'}(x)]\} \quad (\text{II.65})$$

nota-se que

$$C_{kk'}(h) = \frac{1}{2} [C_{kk'}(h) - C_k(h) - C_{k'}(h)] . \quad (\text{II.66})$$

A vantagem de se usar  $C_{kk'}^+(h)$  é trabalhar com o semi-variograma das somas, definido por

$$\gamma_{kk'}^+(h) = \frac{1}{2} E\{[Z_k(x+h) + Z_{k'}(x+h)] - [Z_k(x) + Z_{k'}(x)]\}, \quad (\text{II.67})$$

que, ao contrário de (II.63), é positivo. A relação entre  $C_{kk'}^+$  e  $\gamma_{kk'}^+$  é dada por

$$C_{kk'}^+(h) = C_{kk'}^+(0) - \gamma_{kk'}^+(h) \quad (\text{II.68})$$

#### II.4.5 - Estimação Geoestatística

Como já foi mencionado, o problema de estimação está sempre envolvido nas diversas fases da mineração. As estimações são realizadas partindo-se do conhecimento de alguns pontos do espaço (algumas amostras), para inferir características gerais relativas ao depósito. Geralmente atendem a objetivos distintos tais como: estimação global e estimação local.

Normalmente com os objetivos econômicos, a nível de viabilidade, a estimativa global é destinada a fornecer informações sobre o potencial total da reserva. Por outro lado, a estimativa

Local se destina a procurar o melhor estimador da média de uma V.R. num domínio limitado (bloco de minério). Em qualquer caso, o que se procura é um estimador e o erro, associado a ele, decorrente do processo de estimação. O estimador depende das amostras e seus pesos, o erro depende da estrutura e continuidade (do semi-variograma) e da geometria do domínio a estimar (da distribuição espacial das amostras).

O método de estimação da geoestatística, denominado krigagem, é adequado para a avaliação de reservas pois, fornece o melhor estimador linear, não enviesado para a variável considerada (Best Linear Unibiase Estimator - B.L.U.E.). O termo krigagem, foi idealizado por G. Matheron, em homenagem a D. Krige devido aos seus inúmeros trabalhos empíricos desenvolvidos que, inicialmente, motivaram o desenvolvimento da geoestatística, tal como hoje é entendida.

Para a aplicação da krigagem é necessário o conhecimento da função variograma, a qual fornece a relação de dependência entre as variáveis, considerando suas posições. Tendo o semi-variograma experimental, devidamente ajustado a um modelo teórico, o problema da krigagem consiste em estabelecer os ponderadores relativos a cada amostra.

#### II.4.5.1 - Krigagem Estacionária

Seja  $Z(x)$  uma F.A. estacionária, com suporte pontual. Para esta função pode-se definir os seguintes momentos:

$$E[Z(x)] = m, \quad (\text{II.69})$$

(m é uma constante geralmente desconhecida)

$$C(h) = E[Z(x+h) \cdot Z(x)] - m^2 \text{ (covariância);} \quad (\text{II.70})$$

$$2\gamma(h) = E[Z(x+h) - Z(x)]^2 \text{ (variograma).} \quad (\text{II.71})$$

Considerando os dados experimentais a serem utilizados na estimação, constituídos de um conjunto de valores  $\{Z(x_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ , o estimador linear  $Z_k^*$  é uma combinação dos  $n$  valores:

$$Z_k^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i). \quad (\text{II.72})$$

Os  $n$  ponderadores  $\lambda_i$  são calculados de forma a assegurar que o estimador  $Z_k^*$  seja linear, não enviesado e que a variância do erro de estimação ( $\sigma_E^2$ ) seja mínima. Portanto o estimador  $Z_k^*$  deve satisfazer as propriedades:

a)  $Z_k^*$  é um estimador não tendencioso, isto é, a esperança matemática do erro de estimação ( $Z - Z_k^*$ ) deve ser nula,

$$E[Z - Z_k^*] = 0 \quad (\text{II.73})$$

Impondo a condição  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$  resulta,

$$E[Z_k^*] = E[Z], \quad (\text{II.74})$$

(garante a primeira propriedade do estimador);

b) a variância do erro de estimação deve ser mínima,

$$\sigma_E^2 = E[Z - Z_k^*]^2, \quad (\text{II.75})$$

O problema de otimização colocado é minimizar o erro (ou a variância), isto é:

$$\min \sigma_E^2 = E[Z - Z_k^*]^2, \quad (\text{II.76})$$

sujeito à condição  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ .

Aplicando a técnica de Lagrange obtem-se um sistema, denominado sistema de krigagem, regular, de (n+1) equações a (n+1) incógnitas:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \lambda_j \gamma(x_i, x_j) + \mu = \gamma(x_i, x_j), & i = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{j=1}^n \lambda_j = 1 \end{cases} \quad (\text{II.77})$$

Em função da covariância tem-se:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n \lambda_j \bar{C}(x_i, x_j) - \mu = \bar{C}(x_i, x_j), & i = 1, 2, \dots, n \\ \sum_{i=1}^n \lambda_j = 1 \end{cases} \quad (\text{II.78})$$

Considerando o semi-variograma médio:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n \lambda_j \bar{\gamma}(x_i, x_j) + \mu = \bar{\gamma}(x_i, V) \\ \sum_{i=1}^n \lambda_j = 1 \end{array} \right. \quad (II.79)$$

Em notação matricial o sistema de krigagem  $\bar{e}$  assim apresentado, conforme VALENTE (44):

$$\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_n \\ \mu \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} \bar{\gamma}(x_1, x_1) & \bar{\gamma}(x_1, x_2) & \dots & \bar{\gamma}(x_1, x_n) & 1 \\ \bar{\gamma}(x_2, x_1) & \bar{\gamma}(x_2, x_2) & \dots & \bar{\gamma}(x_2, x_n) & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \bar{\gamma}(x_n, x_1) & \bar{\gamma}(x_n, x_2) & \dots & \bar{\gamma}(x_n, x_n) & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{array} \right. = \begin{array}{c} \bar{\gamma}(x_1, V) \\ \bar{\gamma}(x_2, V) \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{\gamma}(x_n, V) \\ 1 \end{array} \quad (II.80)$$

Resolvendo este sistema obtêm-se os ponderadores resultando o estimador da krigagem ( $z_k^*$ ) e a variância de krigagem  $\sigma_k^2$ :

$$z_k^* = \sum_{i=1}^n \lambda_i z(x_i), \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (II.81)$$

$$\sigma_k^2 = \min \sigma_E^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_i \bar{\gamma}(x, V) - \bar{\gamma}(V, V) + \mu, \quad (II.82)$$

O sistema de krigagem, em notação matricial, pode ser representada como:

$$|A| = |G|^{-1} \cdot |M|. \quad (II.83)$$

É importante observar que a matriz  $|G|$  é simétrica  $\bar{\gamma}(x_i, x_j) = \bar{\gamma}(x_j, x_i) \forall i, j$ . Os termos da diagonal principal são nulos, visto representarem o valor médio do semi-variograma de um ponto com ele mesmo ( $\bar{\gamma}(x_i, x_i) = 0, \forall i$ ). Outra observação importante, conforme JOURNAL e HUIJBREGTS (28), é que a krigagem, além de fornecer um estimador BLUE, prevê também um interpolador exato (assume para os pontos experimentais os valores reais das amostras, em vez de valores próximos, e conduz a uma variância nula).

#### II.4.5.2 - Krigagem Universal

Entre outros sistemas particulares de Krigagem adaptados para problemas específicos de estimação, foi desenvolvido o sistema, denominado krigagem universal, com recursos próprios para tratar o problema de estimação em presença de deriva não estacionária, isto é, a F.A.  $Z(x)$  apresenta uma tendência local:

$$Z(x) = Y(x) + m(x), \tag{II.84}$$

$$Y(z) = Z(x) - m(x).$$

Neste caso, define-se o semi-variograma associado à componente estacionária  $Y(x)$ . Este semi-variograma será então utilizado para estimar realizações de F.A.  $Z(x)$ .

Supondo que se pretende estimar o teor médio  $z_V$ , de um determinado bloco  $V$ , a partir das observações disponíveis  $z_v$ , em presença de deriva não estacionária de uma forma conhecida. A questão suposta origina a determinação de um estimador BLUE ( $z_k^*$ ) e da variância de estimação ( $\sigma_k^2$ ), envolvendo não só as  $(n+1)$

equações e  $(n+1)$  incógnitas, como no caso estacionário, mas também, os termos relativos à deriva.

Em síntese, o que se pretende é estimar  $z_V$  a partir do conhecimento do semi-variograma dos resíduos e da expressão da deriva, mas isto nem sempre é possível.

O algoritmo seguinte, OLEA (35), mostra uma forma de simular um modelo adequado para o semi-variograma dos resíduos e uma expressão correspondente para a deriva:

- escolher um modelo de semi-variograma;
- escolher um modelo de deriva;
- determinar os coeficientes da deriva;
- estimar o resíduo;
- estimar o semi-variograma. (Se houver uma coincidência entre o semi-variograma estimado e o modelo teórico, passar para a solução do sistema de krigagem, senão recomeçar em a).

O sistema resultante, denominado sistema de krigagem universal, é da forma:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_j \lambda_j \bar{\gamma}(V_i, V_j) + \sum_{\ell} \mu_{\ell} b_{Vi}^{\ell} = \bar{\gamma}(V_i, V_j), \quad i = 1, \dots, n \\ \sum_j \lambda_j b_{Vj} = b_V^{\ell}, \quad \forall i = 1, \dots, k, \end{array} \right. \quad (\text{II.85})$$

onde:



k - é a ordem da função aleatória;

$$b_v^\ell = \frac{1}{V} \int_V f^\ell(x) dx, \quad (II.86)$$

$$\sum_i \lambda_i b_{vi}^\ell = b_v^\ell. \quad (II.87)$$

Em forma matricial, conforme notação de JOURNEL E HUIJBREGTS (28), o sistema se apresenta por:

$$|\lambda| = |K_k|^{-1} \cdot |M2_k|, \quad (II.88)$$

com:

$$\begin{array}{c|cccccc|cccc|c} \lambda_1 & \bar{C}(V_1 V_1) & \bar{C}(V_1 V_2) & \dots & \bar{C}(V_1 V_n) & 1 & b_1^2 & \dots & b_1^k & & \bar{C}(V_1, V) \\ \lambda_2 & \bar{C}(V_2 V_1) & \bar{C}(V_2 V_2) & \dots & \bar{C}(V_2 V_n) & 1 & b_2^2 & \dots & b_2^k & & \bar{C}(V_2, V) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_n & \bar{C}(V_n V_1) & \bar{C}(V_n V_2) & \dots & \bar{C}(V_n V_n) & 1 & b_{vn}^2 & \dots & b_{vn}^k & & \bar{C}(V_n, V) \\ -\mu_1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & & 1 \\ -\mu_2 & b_{v1}^2 & b_{v2}^2 & \dots & b_{vn}^2 & 0 & 0 & \dots & 0 & & b_v^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \vdots \\ -\mu_x & b_{v1}^k & b_{v2}^k & \dots & b_{vn}^k & 0 & 0 & \dots & 0 & & b_v^k \end{array} \quad (II.89)$$

Resolvendo o sistema resulta os estimadores:

$$Z_{ku}^* = \sum_i \lambda_i z(x_i) \quad (\text{II.90})$$

(estimador linear do teor médio  $\bar{z}$ )

$$\sigma_{ku}^2 = \bar{C}(V, V) - |\lambda|^t \cdot |M2_k| \quad (\text{II.91})$$

O sistema de krigagem universal é composto de  $(n+k+1)$  equações a  $(n+k+1)$  incógnitas. É um sistema regular se, e somente se, as  $(k+1)$  funções  $f(x)$  forem linearmente independentes. Se  $k = 0$  este sistema conduz ao sistema de krigagem estacionária e  $m(x) = a = \text{cte.}$

RENDU (37) mostra exemplos que esclarecem a aplicabilidade da krigagem universal. JOURNEL e HUIJBREGTS (28), DAVID (18), BRAGA (7) e VALENTE (44) explanam amplamente este tópico.

#### II.4.5.3 - Cokrigagem

É um sistema particular de krigagem desenvolvido para estimar variáveis corregeionalizadas ou regionalizações simultâneas. A existência de variáveis corregeionalizadas possibilita estabelecer o comportamento de uma variável em função de informações provenientes de outra e estimá-las simultaneamente.

Conforme especifica VALENTE (44) a aplicação da cokrigagem só é útil:

- quando as informações disponíveis, relativas a variável em estudo, são insuficientes para se obter boas estimativas;

- quando a correlação entre as variáveis é suficientemente forte.

Seja as funções aleatórias estacionárias de segunda ordem:

$$\bar{Z}(x) = [Z_1(x), Z_2(x), \dots, Z_m(x)] \quad (\text{II.92})$$

com

$$E[\bar{Z}(x)] = [0, 0, \dots, 0] \quad (\text{II.93})$$

$$\bar{C}(h) = E[\bar{Z}(x+h)^T \bar{Z}(x)] \quad (\text{II.94})$$

O objetivo da cokrigagem é estimar  $\bar{Z}(x)$ , conforme notação de CARR, MYERS e GLASS (9), por:

$$\bar{Z}^*(x) = \sum_{j=1}^n \bar{Z}(x_j) \Gamma_j = [Z_1^*(x), \dots, Z_m^*(x)] \quad (\text{II.95})$$

onde

$\Gamma_1, \Gamma_2 \dots \Gamma_m$  são matrizes  $m \times m$ .

Os ponderadores  $\Gamma_i$  são obtidos de forma que  $\bar{Z}^*(x_0)$  seja um estimador BLUE, resultando o sistema de cokrigagem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar } \sum_{j=1}^m \text{var}[\bar{Z}_j(x) - \bar{Z}_j^*(x)] \\ \text{tal que:} \\ E[\bar{Z}(x) - \bar{Z}^*(x)] = 0 \\ \sum_{j=1}^m \Gamma_j = I \end{array} \right. \quad (\text{II.96})$$

Em notação matricial tem-se o sistema, cujos elementos são matrizes  $m \times m$ :

$$\begin{array}{c|cccccc|c} \Gamma_1 & \bar{C}(x_1-x_1) & \bar{C}(x_1-x_2) & \dots & \bar{C}(x_1-x_n) & 1 & \bar{C}(x_1-x) \\ \Gamma_2 & \bar{C}(x_2-x_1) & \bar{C}(x_2-x_2) & \dots & \bar{C}(x_2-x_n) & 1 & \bar{C}(x_2-x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_n & \bar{C}(x_n-x_1) & \bar{C}(x_n-x_2) & \dots & \bar{C}(x_n-x_n) & 1 & \bar{C}(x_n-x) \\ \hline \bar{\mu} & 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \end{array} = \quad (\text{II.97})$$

Resolvendo o sistema obtém-se:

$$\bar{Z}_{ck}^*(x) = \sum_{j=1}^n \bar{Z}(x_j) \Gamma_j, \quad (\text{II.98})$$

$$\sigma_{ck}^2 = T_r \bar{C}(0) - T_r \Sigma \bar{C}(x_j - x) \Gamma_j - T_r \bar{\mu} \quad (\text{II.99})$$

JOURNAL E HUIJBREGTS (28), VALENTE (44), CARR, MYERS e GLASS (9) expõem mais detalhes sobre a cokrigagem, bem como, aplicações que ilustram os objetivos e vantagens oriundas de sua utilização.

Neste trabalho serão utilizados os recursos da cokrigagem para a Simulação Cocondicional (metodologia apresentada no Capítulo III) das variáveis corregeionalizadas, A -  $Al_2O_3$  e R -  $SiO_2$ , em estudo.

## CAPÍTULO III

### FUNDAMENTOS TEÓRICOS

#### III.1 - METODOLOGIA DA SIMULAÇÃO GEOESTATÍSTICA

##### III.1.1 - Simulação de Variáveis Regionalizadas

O esquema representado na Figura (III.1) mostra as várias etapas envolvidas na simulação de uma dada variável regionalizada conforme metodologia de JOURNEL e HUIJBREGTS (28). Tais etapas serão detalhadas a seguir.

a) Preparação dos dados

a.1) Análise estatística e estrutural

Como a simulação gera uma realização  $z_s(x)$  de uma F.A.  $Z(x)$ , tal realização deve ser, tanto quanto possível, similar à realização  $z(x_i)$  referente aos dados reais. Por isso, antes de realizar a simulação, procura-se estabelecer as características estatísticas (histograma experimental ( $f$ ), esperança ( $\underline{m}$ ) e variância  $\sigma^2$ ), relativas à variável regionalizada em estudo, tal como descreve DAGBERT (16):

$$E[Z(x)] = m , \quad (III.1)$$

$$E[Z(x_i) - m]^2 = \sigma^2 . \quad (III.2)$$

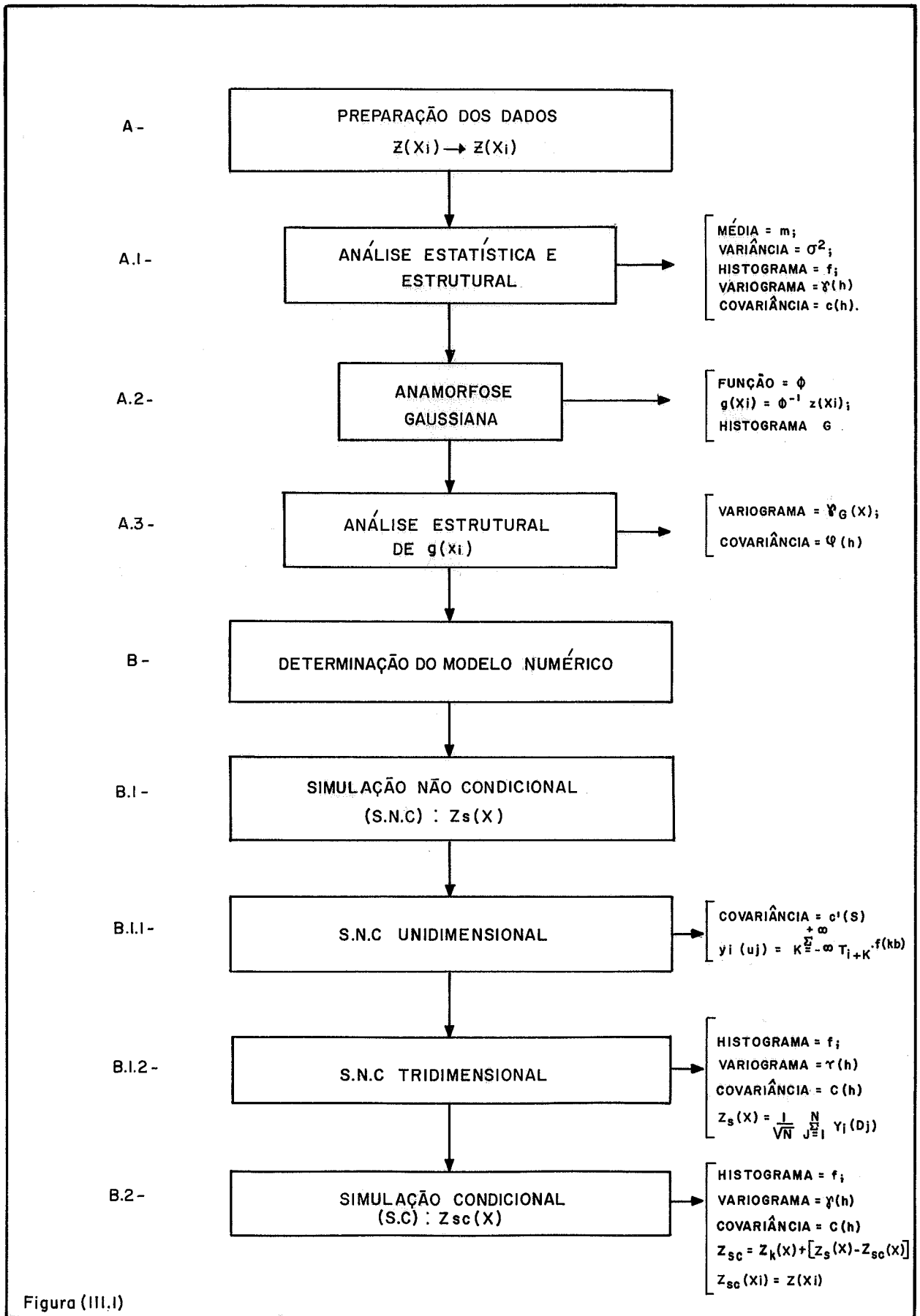


Figura (III.1)

Nesta etapa estabelece-se o modelo estrutural o qual revela a continuidade espacial da V. R.:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E[Z(x) - Z(x+h)]^2, \quad (\text{III.3})$$

$$C(h) = E[Z(x+h) \cdot Z(x)] - m^2. \quad (\text{III.4})$$

Caso existam variáveis corregionalizadas torna-se interessante definir os semi-variogramas cruzados ou covariâncias cruzadas para caracterizar o modelo das corregionalizações:

$$\gamma_{kk'}(h) = \frac{1}{2} E[z_k(x+h) - z_k(x)] [z_{k'}(x+h) - z_{k'}(x)], \quad (\text{III.5})$$

$$C_{kk'}(h) = E[z_k(x+h) \cdot z_{k'}(x)] - m_k m_{k'}. \quad (\text{III.6})$$

## a.2) Anamorfose gaussiana

### a.2.1) Justificativa

As variáveis regionalizadas características de um depósito mineral (J) podem ser analisadas, sob vários aspectos, através de valores provenientes de amostras ( $z(x_i)$ ,  $i \in I$ ), valores estimados e, também, por valores simulados por métodos apropriados a tratar suas particularidades.

Seja a F.A. estacionária  $Z(x)$  com lei de distribuição qualquer, representada por um histograma experimental ( $f$ ). Este histograma pode, teoricamente, se apresentar sob qualquer aspecto, porém na prática verifica-se, em geral, histogramas experi-



mentais assimétricos do tipo lognormal ou outra lei de dispersão que garanta valores não negativos, como observa JOURNEL (26).

Nas aplicações mineiras os histogramas dos dados reais ( $z(x_i)$ ,  $i \in I$ ) são, frequentemente de aspecto lognormal. Tal é o caso em estudo dos teores de A -  $Al_2O_3$  (alumina aproveitável) e da R -  $SiO_2$  (sílica relativa).

Por outro lado, tem-se as realizações simuladas ( $z_s(x)$ ;  $x \in J$ ) da F.A. estacionária  $Z_s(x)$  com uma lei de distribuição espacial gaussiana, representada por um histograma gaussiano (G). JOURNEL e HUIJBREGTS (28) justificam esta afirmação, com base no teorema do limite central, pelo fato de serem os valores simulados obtidos pela soma, no espaço, de um grande número de realizações independentes sobre retas (método das "bandas rotativas"). O teorema do limite central garante que "a soma de n variáveis aleatórias independentes, com lei de distribuição qualquer segue uma lei normal".

Conclui-se, portanto, que coexistem um histograma experimental (f) e um histograma dos valores simulados (G), os quais refletem dispersões distintas relativas a um mesmo fenômeno. A transformação gaussiana se faz necessária porque não se sabe construir simulações de qualquer distribuição. Devido ao fato de que se dispõe de bons conhecimentos para a simulação de dados gaussianos prefere-se então transformar os dados originais (brutos) em dados "gaussianos".

Baseando-se na hipótese de permanência da distribuição, detalhada por JOURNEL e HUIJBREGTS (28), é possível definir uma função de transformação  $\Phi$ , a qual expressa uma variável aleatória estacionária  $y$  (com média e variância definidas) em função de uma variável normal padrão:

$$y = \Phi(u) \tag{III.7}$$

ou inversamente,

$$u = \Phi^{-1}(y) \tag{III.8}$$

Portanto, o problema de definir uma função que transforme os dados  $\{z(x_i), i \in I\}$  em gaussianos  $g(x)$ ,  $x \in J$  se resolve conforme a fórmula (III.8):

$$g(x) = \Phi^{-1} Z(x) \quad .. \tag{III.9}$$

A variável transformada  $g(x)$  é simulada em vez de  $z(x)$ , gerando variáveis gaussianas  $g_s(x)$ . A transformação inversa, executada sobre  $g_s(x)$ , fornece a simulação pretendida  $\{z_s(x), x \in J\}$ , a qual apresenta histograma similar ao dos dados reais:

$$Z_s(x) = \Phi g_s(x) \tag{III.10}$$

A função  $\Phi$  pode ser definida graficamente ou analiticamente, conforme será visto em (a.2.2).

Observando as Figuras (I.3.a) e (I.3.b) verifica-se que os histogramas experimentais, referentes a A - Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> e R - SiO<sub>2</sub>, representam uma lei de distribuição tipicamente lognormal. Para esses casos a função de transformação é conhecida e a variável gaussiana transformada é obtida por:

$$g(x) = \log[Z(x)] \quad (\text{III.11})$$

Para a variável lognormal Z(x), JOURNEL e HUIJBREGTS (28) definem as seguintes características:

$$E[Z(x)] = m , \quad (\text{III.12})$$

$$\text{var}[Z(x)] = \sigma_Z^2 = C(0) , \quad (\text{III.13})$$

$$\text{cov}[Z(x)] = C(h) , \quad (\text{III.14})$$

$$\gamma(h) = C(0) - C(h) . \quad (\text{III.15})$$

As características da variável g(x) deduzida de Z(x) são:

$$E[g(x)] = m' = \log m - \frac{\sigma^2}{2} , \quad (\text{III.16})$$

$$\text{var}[g(x)] = \sigma^2 = \log 1 + \frac{\sigma_Z^2}{m} = k(0) , \quad (\text{III.17})$$

$$\text{cov}[g(x)] = k(h) = \log \left[ 1 + \frac{C(h)}{m^2} \right] , \quad (\text{III.18})$$

$$\gamma_G(h) = k(0) - k(h), \quad (\text{III.19})$$

histograma gaussiano (G).

Em vez de simular  $Z(x)$ , simula-se  $\log[Z(x)]$ , gerando a realização  $\{g_s(x), x \in J\}$  com histograma gaussiano. A transformação inversa  $\exp.[g_s(x)]$  restitui a simulação procurada:

$$Z_s(x) = \exp.[g_s(x)] \quad . \quad (\text{III.20})$$

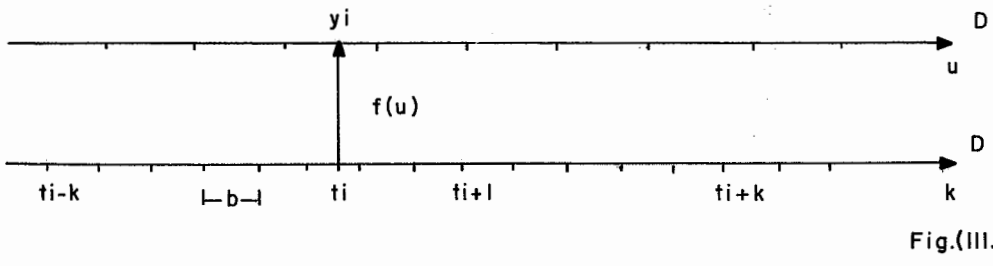
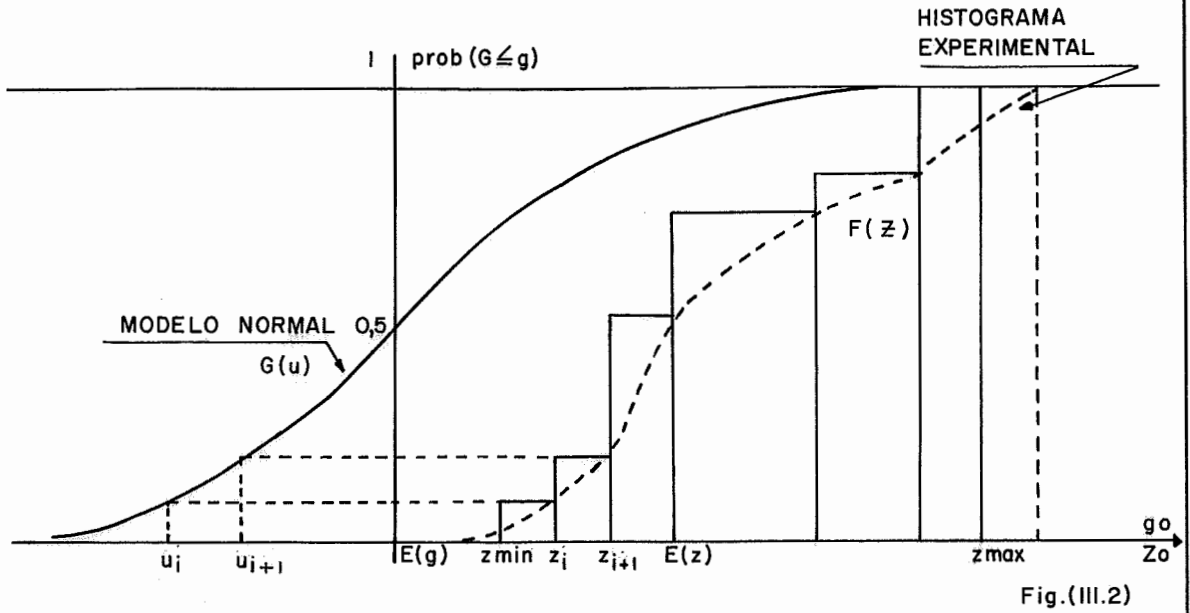
A variável simulada  $Z_s(x)$  apresenta histograma do tipo lognormal, similar a  $Z(x_i)$ ,  $i \in I$ .

a.2.2) Métodos de obtenção da função de transformação

a.2.2.1) Anamorfose gráfica

Considerando as curvas  $F(z) = \text{Prob}\{Z(z)\}$  e  $G(u) = \text{Prob}\{U < u\}$  correspondentes, respectivamente a distribuição acumulada da variável  $z(x)$  e da variável normal padrão  $U$ , apresentada na Figura (III.2) transcrita de JOURNAL (26), pode-se determinar graficamente a função de transformação, conforme procedimento a seguir.

$G(u)$  é uma função contínua. Supondo  $F(z)$  contínua tem-se  $G(u) = F(z)$  com  $\underline{u}$  e  $\underline{z}$  únicos. Portanto, existe uma correspondência biunívoca entre  $\underline{z}$  e  $\underline{u}$  que permite identificar  $F(z) = G(u)$  e definir graficamente:



$$u = \Phi^{-1}(z) , \text{ conforme a equação} \quad (\text{III.8})$$

$$z = \Phi(u) , \text{ conforme a equação} \quad (\text{III.7})$$

Desta forma, define-se a função de anamorfose estritamente monótona e contínua.

Em termos de função aleatória, se  $Z(x)$  é uma F.A. estacionária de lei de distribuição  $F[Z(x)]$ , existirá uma função  $\Phi$  e uma F.A.  $G(x)$  tal que, em todo ponto  $x$ ,  $\Phi[G(x)]$  é equivalente em lei a  $Z(x)$ :

$$Z(x) = \Phi[G(x)] . \quad (\text{III.21})$$

Na prática determina-se  $\Phi_z$ , graficamente, identificando o histograma experimental acumulado  $F^*(x)$  e o histograma acumulado gaussiano  $G(u)$ . Cada classe  $[z_i, z_{i+k}]$  de  $F^*(z)$  está associado a uma classe  $[u_i, u_{i+1}]$  de  $G(u)$ , indicado por JOURNEL (27):

$$F^*(z_i) = G(u_i) . \quad (\text{III.22})$$

No interior de cada classe efetua-se uma interpolação linear.

#### a.2.2.2) Determinação analítica da função $\Phi$

Em casos de distribuição n-paramétrica representada por histograma experimental complexo, torna-se difícil estabelecer, conforme anamorfose gráfica, a correspondência entre as classes

$[z_i, z_{i+1}]$  e  $[u_i, u_{i+1}]$ . É aconselhável, nestes casos, definir uma expansão polinomial, de ordem  $n$ , da função de transformação de modo a ajustá-la, o mais fielmente possível, ao histograma experimental.

Tal expressão polinomial é estabelecida, por JOURNEL e HUIJBREGTS (28), através da representação analítica da função que, sob certas hipóteses, apresenta-se como uma combinação linear de polinômios de Hermite, isto é:

$$\Phi(u) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i}{i!} \cdot H_i(u) . \quad (\text{III.23})$$

A fórmula usada na prática é definida em função da complexidade do histograma experimental, isto é, o grau  $n$  do polinômio será tanto maior quanto mais complexo for o histograma, porém é um número finito ( $i = 0, \dots, n$ ) e:

$$\Phi(u) = \sum_{i=0}^n \frac{\psi_i}{i!} \cdot H_i(u) . \quad (\text{III.24})$$

Onde:

$H_i(u)$  - são os polinômios de Hermite;

$\psi_i = (n+1)$  coeficientes do polinômio;

$n$  - número finito que define o grau do polinômio que melhor se ajuste ao histograma experimental.

Os polinômios  $H_i(u)$ , conforme desenvolvimento de JOURNEL e HUIJBREGTS (28), são definidos por:

$$H_0(x) = 1, \quad (\text{III.25})$$

$$H_{i+1}(x) = -x H_i(x) - i H_{i-1}(x), \quad (\text{III.26})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} H_i(x) \cdot H_j(x) g(x) dx = i! \delta_{ij}, \quad (\text{III.27})$$

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (\text{III.28})$$

(densidade da distribuição normal padrão)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}. \quad (\text{III.29})$$

Os coeficientes  $\psi_i$  são dados pela expressão:

$$\psi_i = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x) H_i(x) g(x) d(x), \quad \forall i. \quad (\text{III.30})$$

A relação entre  $\psi_i$  e os dois primeiros momentos de  $Z(x)$  é expressa pelas fórmulas:

$$E[Z(x)] = m = \psi_0 \quad (\text{III.31})$$

$$\text{var}[Z(x)] = \sigma_Z^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\psi_i^2}{i!} \quad (\text{III.32})$$

A relação (III.32) representa uma forma prática de definir a ordem  $n$ , na qual é conveniente parar a expressão de  $H_i$ . A ordem  $n$ , definida por JOURNEL e HUIJBREGHTS (28), é aquela que reconstitui melhor a variável experimental  $\sigma^2$ . Desta forma, de



fine-se o polinômio de grau  $n$  que conduz ao histograma teórico, o mais próximo possível do histograma experimental.

Os dois métodos apresentados determinam a função de anamorfose  $\Phi$  a partir do histograma experimental. É de grande importância, portanto, garantir que este histograma seja bem representativo da lei a priori da F. A.  $Z(x)$ .

O conhecimento gráfico da anamorfose  $\bar{\epsilon}$ , quase sempre, suficiente para determinar a variável gaussiana necessária para a simulação. No entanto a análise estrutural das gaussianas pode ser efetuada de maneira mais rápida, conhecendo-se a forma analítica de  $\Phi$ . Sobretudo, é interessante conhecer a forma analítica, se desejar estudar a variável sobre um suporte diferente daquele dos dados, conforme observações de JOURNEL e HUIJBREGTS (28)..

### ã.3) Análise estrutural das gaussianas

Conforme observado em (a.2.2.2), sendo conhecida a função de anamorfose por seu desenvolvimento analítico, pode-se deduzir diretamente a covariância  $\mathcal{Q}(h)$  de  $g(x)$  da covariância  $C(h)$  relativa às amostras. A relação entre  $\mathcal{Q}(h)$  e  $C(h)$  é dada por:

$$C(h) = \sum_{n=0}^{\infty} n\Phi / n! \mathcal{Q}(h) . \quad (\text{III.33})$$

Para cada  $h$ , calcula-se o valor numérico de  $\mathcal{Q}(h)$  em função de  $C(h)$  e  $\Phi$ . Assim, o modelo de covariância para a simulação é ajustado.

## b) Determinação do modelo numérico

### b.1)-Simulação não condicional

A simulação não condicional é uma etapa preliminar e fundamental na determinação do modelo numérico referente a uma variável regionalizada. Requer um tratamento matemático rigoroso do qual depende a simulação condicional.

O que se procura é simular uma realização  $z_s(x)$  de uma F.A.  $Z_s(x)$ , isomorfa de  $Z(x)$ . A simulação  $z_s(x)$  é não condicional pois, não reproduz, necessariamente, os valores experimentais  $z(x_i)$  nos pontos amostrais  $x_i$ , isto é,  $z_s(x) \neq z(x_i)$ ,  $x_i \in I$ .

Inicialmente realiza-se a simulação unidimensional com a finalidade de gerar, nos nós de uma malha regular, uma realização  $y(u)$  de um F.A. unidimensional  $Y(u)$  com covariância  $C^1(s)$ .

Como a variável regionalizada  $z(x)$  é definida em  $x \in R^3$ , torna-se necessário realizar a simulação tridimensional para obter  $z_s(x)$  com as mesmas características de  $z(x)$ . O método utilizado é denominado "*método das bandas rotativas*" originado por G. Matheron e pelo Centro de Geoestatística de Fontainebleau. As referências JOURNEL e HUIJBREGTS (28), JOURNEL (27), DOWD (21), CARR e MYERS (8) e VALENTE (45), são bastantes esclarecedoras sobre o formalismo teórico deste método, nas quais estão fundamentados os tópicos seguintes.

b.1.1) Simulação não condicional unidimensional

Este procedimento é destinado a gerar uma variável aleatória simulada  $y(u)$  (realização particular de uma F.A. unidimensional  $Y(u)$  com covariância  $C^1(s)$  com as mesmas características estatísticas dos dados reais. É aplicado quando se tem modelo de covariância  $C(h)$  tridimensional, do tipo esférico ou exponencial, às quais correspondem covariâncias unidimensionais  $C^1(s)$ , que podem ser expressas sob a forma de um produto de convolução de uma função de ponderação  $f(u)$  pela sua transposta.

$$f^v(u) = f(u), \quad (\text{III.34})$$

$$C^1(s) = f * f^v. \quad (\text{III.35})$$

Portanto, a partir de uma realização  $z(x)$  de uma F.A.  $Z(x)$  com covariância isotrópica tridimensional  $C(h) = E[Z(x) \cdot Z(x+h)]$  e esperança suposta nula  $E[z(x)] = 0$ , simula-se uma realização  $y(u)$  de uma F. A.  $Y(u)$  com esperança nula  $E[Y(u)] = 0$  e covariância unidimensional  $C^1(s)$ , deduzida de  $C(h)$ .

Considerando  $T(r)$  uma coleção de números aleatórios independentes e  $f(u)$  uma função de ponderação, JOURNEL (27) define a F.A. unidimensional  $Y(u)$  por:

$$Y(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u+r) T(r) dr = T * f^v. \quad (\text{III.36})$$

$Y(u)$  é uma F.A. estacionária com covariância  $C^1(s)$ :

$$C^1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) \cdot f(u+s) du . \quad (\text{III.37})$$

A F. A.  $Y(u)$ , sendo expressa por um produto de convolução, permite aplicação do método das médias móveis com uma função de ponderação para gerar a variável aleatória simulada  $y(u)$ :

$$y_i(D) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} t_{i+k} \cdot f(kb) . \quad (\text{III.38})$$

$t_{i+k}$  são realizações das variáveis aleatórias ( $T_i$ ) discretas, independentes de esperança nula e variância  $\sigma^2 = E(T_i)$ , conforme JOURNEL e HUIJBREGTS (28). Os valores, gerados com uma função de distribuição uniforme, são locados nos pontos  $i$ , distribuídos em intervalos regulares  $b$ , em uma dada direção  $D$ . A Figura (III.3), reproduzida de JOURNEL (26) ilustra tal procedimento.

A F. A. estacionária  $Y(u)$  simulada sobre  $D$  tem esperança nula e covariância  $C_d^1(s)$  (aproximação discreta da integral III.37).

$$C_d^1(s) = \sigma^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kb) \cdot f(kb - bs), \quad (\text{III.39})$$

Na prática o parâmetro multiplicativo  $\sigma^2 = E(T)^2$  corrige a diferença entre  $C^1(s)$  e  $C_d^1(s)$ , causada pela aproximação discreta.

A soma infinita ( $k = -\infty, +\infty$ ) pode ser limitada na prática considerando valores finitos de  $t_{i+k}$  para obter  $y_i(D_j)$ .

Para cada modelo estrutural JOURNEL e HUIJBREGTS (28) indicam fórmulas práticas para obter a função de ponderação  $f(u)$  bem como, as covariâncias unidimensionais  $C^1(s)$ .

a) Modelo esférico

$$C(h) = \begin{cases} K \left[ 1 - \frac{3h}{2a} + \frac{h^3}{2a^3} \right], & \forall h \in [0, a] \\ 0, & \forall h \geq a, \end{cases} \quad (\text{III.40})$$

com:

$a$  - amplitude variográfica;

$K = C(0) = \text{var}[Z(x)]$  .

A covariância unidimensional correspondente ao modelo esférico é obtida por:

$$C^1(s) = \frac{\partial}{\partial(s)} \cdot C(s) ; \quad (\text{III.41})$$

$$C^1(s) = \frac{\partial}{\partial(s)} \cdot K \left[ 1 - \frac{3s}{2a} + \frac{s^3}{2a^3} \right] \quad (\text{III.42})$$

$$C^1(s) = \begin{cases} K \left[ 1 - \frac{3s}{a} + \frac{2s^3}{a^3} \right], & \forall s \in [0, a] \\ 0, & \forall s > a. \end{cases} \quad (\text{III.43})$$

A função de ponderação correspondente é:

$$f(u) = \begin{cases} \sqrt{\left(12 \frac{K}{a^3}\right)}, & u, \forall u \in \left[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}\right] \\ 0, & \forall u \notin \left[-\frac{a}{2}, +\frac{a}{2}\right] \end{cases} \quad (\text{III.44})$$

A soma infinita (III.39) é limitada a  $(2R + 1)$  valores de  $t_{i+k}$ , assim,  $k$  terá valores inteiros dentro do intervalo  $[-R, +R]$ :

$$y_i(u) = \sum_{k=-R}^{+R} t_{i+k} \cdot f(kb) \quad . \quad (\text{III.45})$$

O intervalo  $b$  considerado é definido por:

$$b = \frac{a}{2R}, \text{ com } R > 20, \text{ geralmente.}$$

b) Modelo exponencial

$$C(h) = K e^{-\lambda h}, \forall h > 0, \text{ com } \lambda = \frac{1}{a} \quad . \quad (\text{III.46})$$

A covariância unidimensional correspondente e a função de ponderação tornam-se:

$$C^1(s) = K(1 - \lambda_s) e^{-\lambda_s}, s \geq 0 \quad (\text{III.47})$$

$$f(u) = \begin{cases} 2 \sqrt{(K\lambda)} (1 - \lambda_u) e^{-\lambda_u}, & \forall u \geq 0 \\ 0, & \forall u < 0 \end{cases} \quad (\text{III.48})$$

Considerações práticas:

- a função de ponderação  $\bar{e}$  é limitada ao intervalo  $|0, 4a|$ ;
- considera-se  $(8R + 1)$  valores  $t_{i+k}$  para obter  $y_i(D_j)$ ;

$$y_i(D_j) = \sum_{k=-4R}^{+4R} t_{i+k} \cdot f(kb) \quad (\text{III.49})$$

$$b = \frac{a}{2R} ;$$

$$R \geq 20 .$$

c) Modelo gaussiano

$$C(h) = K e^{(-h^2/a^2)} , \quad \forall h \geq 0. \quad (\text{III.50})$$

A covariância  $C^1(s)$  correspondente será:

$$C^1(s) = K \left(1 - \frac{2s^2}{a}\right) e^{(-s^2/a^2)} , \quad \forall s \geq 0 , \quad (\text{III.51})$$

com função de ponderação:

$$f(u) = \mu e^{(-2u^2/a^2)} , \quad \forall u \in [-\infty, +\infty]$$

$$\lambda = \frac{16 K}{a^3 \cdot \sqrt{\pi}} . \quad (\text{III.52})$$

Considerações práticas:

$$b = \frac{a}{2R} \text{ com } R \geq 20$$

$f(u)$  é limitada ao intervalo  $[-2a, +2a]$  .

Considera-se  $(8R + 1)$  intervalos discretos para obter  $y_i(u)$ :

$$y_i(D_j) = \sum_{K=-4R}^{+4R} t_{i+k} \cdot f(kb) . \quad (\text{III.53})$$

#### b.1.2 - Simulação não-condicional tridimensional

O método desenvolvido por G. Matheron e pelo Centro de Geoestatística de Fontainebleau, denominado "método das bandas rotativas" tem como finalidade reduzir a simulação de uma F.A. estacionária  $Z(x)$ , definida em  $x \in R^3$ , numa soma de infinitas simulações independentes unidimensionais as quais, posteriormente, são projetadas no espaço tridimensional. JOURNEL e HUIJBREGTS (28), JOURNEL (26) e (27), DOWD (21) e VALENTE (45) apresentam o desenvolvimento teórico deste método além de exemplos práticos ilustrativos. As Figuras (III.4) e (III.5) devidas a JOURNEL (26) ilustram o procedimento do método.

As  $N$  simulações independentes são realizadas ao longo de  $N$  linhas ( $N$  direções) que se cruzam no centro de uma esfera unitária, JOURNEL e HUIJBREGTS (28) e DOWD (21).



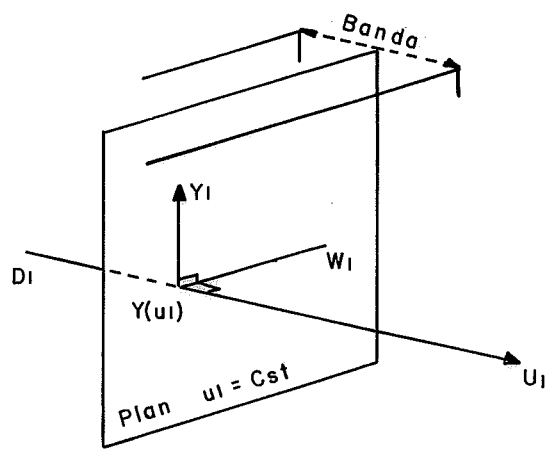


Fig.(III.4)

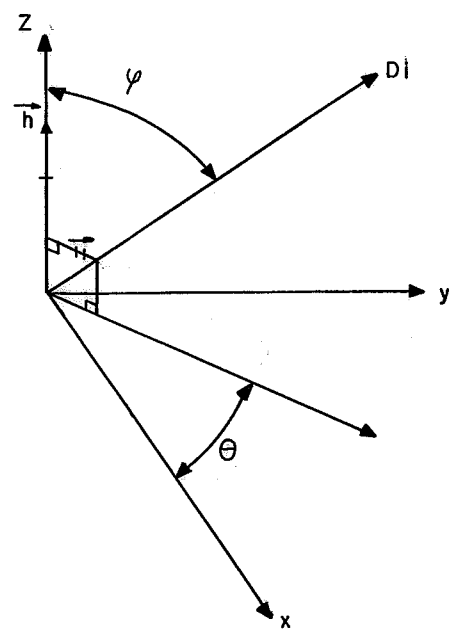


Fig. (III.5)

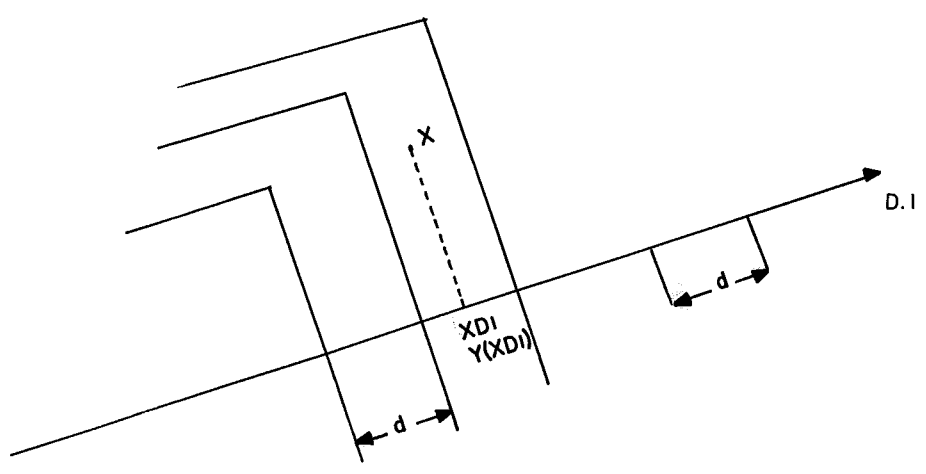


Fig.(III.6)

O que se pretende é gerar uma realização  $z_1(x)$  de uma F.A.  $Z_1(x)$  a partir da F.A.  $Y(x_{D_1})$  definida sobre a direção  $D_1$ . A F.A.  $Y(x_{D_1})$  é estacionária de segunda ordem com  $E[Y(x_{D_1})] = 0$  e covariância  $C^1(h_{D_1})$ . Portanto, define-se a F.A.  $Z_1(x) = Y(x_{D_1})$ ,  $\forall x \in R^3$ , com  $E[Z_1(x)] = 0$  e covariância tridimensional igual a  $C^1(h_{D_1})$ , segundo JOURNEL e HUIJBREGTS (28) e JOURNEL (27), entre outros. Isto significa que:

$$E[Z_1(x) \cdot Z_1(x+h)] = E[Y(x_{D_1}) \cdot Y(x_{D_1} + h)] = C^1(h_{D_1}). \quad (\text{III.54})$$

Para gerar uma realização  $z_1(x)$  da F.A.  $Z_1(x)$  considera-se sobre a reta  $D_1$ , sobre a qual se conhece a simulação a uma dimensão  $y(x_{D_1})$ , uma família de planos perpendiculares a  $D_1$  que dividem o espaço em um número de bandas (fatias) centradas sobre os pontos  $x_{D_1}$ , equidistantes de  $d$ , como ilustra a Figura (III.6).

Todo ponto  $x$  do espaço pertence a uma destas bandas. A contribuição da reta  $D_1$  ao valor simulado em  $x$  é  $y(x_{D_1})$ , isto é:

$$z_1(x) = y(x_{D_1}) \quad (\text{III.55})$$

Generalizando este procedimento para  $n$  retas  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , com direções uniformemente distribuídas sobre a esfera unitária, obtem-se a contribuição total das  $n$  retas sobre o valor simulado:

$$z_s(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n y_i(D_j). \quad (\text{III.56})$$

$$z_s(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n z_i(x) \quad (\text{III.57})$$

$z_s(x)$  é uma realização de uma F.A.  $Z_s(x)$  tridimensional, estacionária de segunda ordem, de média nula e covariância  $C(h)$ .

$$C(h) = E[Z_s(x) \cdot Z_s(x + h)] \quad (\text{III.58})$$

JOURNEL e HUIJBREGTS (28) observa que se  $n \rightarrow \infty$ ,  $C(h) \rightarrow C(r)$  (covariância isotrópica):

$$C(r) = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} C(\langle h, k \rangle) dk \quad (\text{III.59})$$

(esfera unitária)

onde:

$\langle h, k \rangle$  - é a projeção ortogonal do vetor  $h$  no eixo  $k$ ;

$$r = |h| = \sqrt{(h_{u1}^2 + h_{v1}^2 + h_{w1}^2)} \quad (\text{III.60})$$

Embora as covariâncias isotrópicas sejam alcançadas quando  $n \rightarrow \infty$ , na prática  $n$  é limitado de modo que a equação (III.57) possa ser resolvida sem perda de validade. O limite de  $n$  é arbitrário conforme observam JOURNEL (26) e DOWD (21), no entanto afirmam ser suficiente tomar  $n = 15$ . Definem assim quinze direções, para simular, correspondentes às retas que unem as arestas opostas de um icosaedro regular. Desta forma a equação (III.57) torna-se:

$$z_s(x) = \frac{1}{\sqrt{15}} \sum_{i=1}^{15} z_i(x) \quad (\text{III.61})$$

A covariância ( $C_r$ ) torna-se:

$$C^*(h) = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} C^1(\langle h, k_i \rangle) \quad (\text{III.62})$$

A diferença entre  $C^*(h)$  e  $C(r)$  não é relevante na prática.

Esta limitação prática ( $n = 15$ ) se justifica pelo fato de fornecer resultados satisfatórios e  $n < 15$  resultaria poucas direções para efetuar a simulação. O icosaedro regular é considerado devido as suas propriedades geométricas, tal como mostra JOURNAL (26).

Os quinze vetores definidos (direções para simular) são divididos em cinco grupos de três vetores. Cada grupo é obtido de qualquer outro por simples rotação.

Seja o primeiro grupo (Grupo<sub>1</sub>), tal como JOURNAL (26), definido pelos vetores:

$$\begin{cases} O_{u1} = (k, 1, 1 + k); \\ O_{v1} = (1, -(1 + k), k); \\ O_{w1} = (1 + k, k, -1). \end{cases} \quad (\text{III.63})$$

$$[\text{GRUPO}_1] = \theta \begin{vmatrix} k & K & 1+k \\ 1 & -(1+k) & k \\ 1+k & K & -1 \end{vmatrix} \quad (\text{III.64})$$

$k$  é a raiz da equação  $k^2 + k - 1 = 0$ .

Os outros grupos de vetores são obtidos a partir do  $[\text{GRUPO}_1]$  aplicando uma rotação por meio da matriz  $[R]$ :

$$R = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -(1+k) & k \\ 1+k & K & -1 \\ k & 1 & 1+k \end{vmatrix} \quad (\text{III.65})$$

Os outros grupos são:

$$\begin{aligned} [\text{GRUPO}_2] &= [\text{GRUPO}_1] \cdot [R] \\ [\text{GRUPO}_3] &= [\text{GRUPO}_2] \cdot [R] \\ [\text{GRUPO}_4] &= [\text{GRUPO}_3] \cdot [R] \\ [\text{GRUPO}_5] &= [\text{GRUPO}_4] \cdot [R] \end{aligned} \quad (\text{III.66})$$

Uma vez definidos os quinze vetores, a simulação tridimensional é obtida da simulação unidimensional gerada sobre estes vetores, conforme método descrito em (b.1.1).

Um resumo, das etapas necessárias para gerar as realizações  $z_s(x)$ , é apresentado por VALENTE (45) como segue:

- encontrar a covariância unidimensional  $C^1(s)$  que corresponde à covariância da função aleatória estacionária  $Z_s(x)$ ;
- gerar realizações  $y_i(u)$ , da classe de funções aleatórias unidimensionais, com variância  $C^1(s)$  em cada direção;
- projetar estas realizações no espaço tridimensional e somá-las em cada ponto onde se pretende obter valores simulados.

#### b.2) Simulação condicional

O objetivo da simulação condicional é gerar uma realização  $z_{sc}(x)$ , da F.A. estacionária  $Z_{sc}(x)$ , isomorfa de  $Z(x)$ , com o compromisso de reproduzir os valores experimentais  $z(x_i)$  nos pontos de amostragem, isto é:

$$z_{sc}(x_i) = z(x_i) , \quad \forall i \in I . \quad (\text{III.67})$$

Sabe-se que o verdadeiro valor desconhecido  $z(x)$  de uma variável regionalizada, em um ponto  $(x)$  qualquer da jazida, pode ser estimado por krigagem fornecendo o estimador da forma:

$$z_k^*(x) = \sum_i \lambda_i z(x_i) , \quad (\text{III.68})$$

com

$$z(x) = z_k^*(x) + [z(x) - z_k^*(x)] \quad (\text{III.69})$$

Os dois valores, verdadeiro e estimado, diferem-se por um erro  $[z(x) - z_k^*(x)]$  que, também, é desconhecido:

$$e(x) = [z(x) - z_k^*(x)] \quad (\text{III.70})$$

É possível simular este erro, como demonstra JOURNEL e HUIJBREGTS (28), com auxílio da simulação não condicional, da krigagem e obter a simulação condicional pretendida.

Previamente deve-se definir os (m) dados condicionantes  $z_a(x)$  e gerar, em cada ponto (m) da malha definida para a simulação condicional, os valores  $z_s(p)$  por meio da simulação não condicional. Em seguida, efetua-se krigagem para gerar os estimadores  $z_k^*(p)$ , utilizando os dados condicionantes  $z_a(x)$  e  $z_{sk}^*(p)$ , utilizando os valores  $z_s(x)$ , desta forma obtem-se:

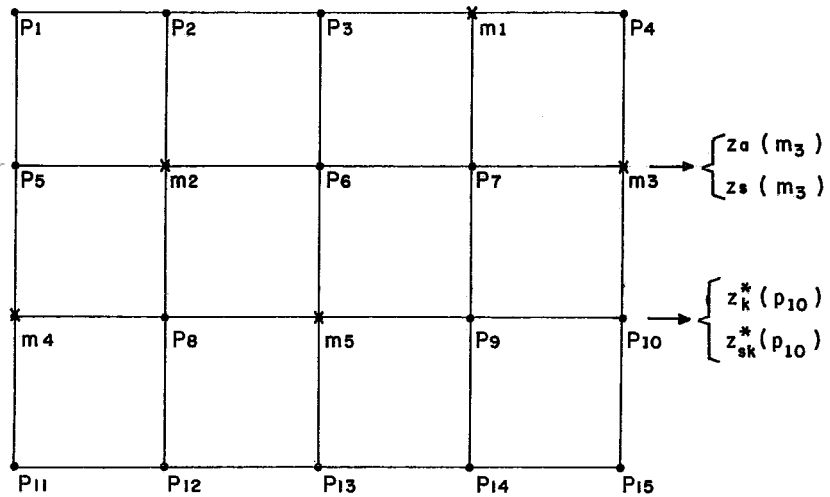
$$z_k^*(p) = \sum_{i=1}^m \lambda_i z_a(x_i) \quad (\text{III.71})$$

$$z_{sk}^*(p) = \sum_{i=1}^m \lambda_i z_s(x_i) \quad (\text{III.72})$$

Ilustração, Figura (III.7):

m = dados condicionantes  $z_a(x)$ ;

p = pontos a simular.



Os ponderadores  $\lambda_j$  são os mesmos, tanto para  $z_k^*(p)$  quanto para  $z_{sk}^*(p)$ , pois os valores  $z_s(x)$  tem o mesmo variograma que  $z_a(x_j)$  e a configuração geométrica é única para os dois sistemas de krigagem. É suficiente, portanto, resolver um só sistema de krigagem para obter os dois estimadores:

Somando-se ao valor krigado, no ponto  $(p_i)$ , o erro simulado  $e_s(p_i)$  obtem-se a simulação desejada:

$$z_{sc}(p) = z_k^*(p) + [z_s(p) - z_{sk}^*(p)], \quad (\text{III.73})$$

$$e_s(p) = [z_s(p) - z_{sk}^*(p)] \quad . \quad (\text{III.74})$$

A equação (III.70) é obtida com base na propriedade de ortogonalidade do erro de krigagem, ou seja:

$$E\{z_k^*(x) \cdot [z(x) - z_k^*(x)]\} = 0 \quad , \quad (\text{III.75})$$



da mesma forma,

$$E\{z_k^*(p) \cdot [z_s(p) - z_k^*(p)]\} = 0 \quad . \quad (\text{III.76})$$

Em termos da F. A.:

$$Z_{SC}(x) = Z_k^*(x) + [Z_s(x) - Z_{Sk}^*(x)] \quad . \quad (\text{III.77})$$

$Z_{SC}(x)$  é menos suavizada que  $Z_k^*(x)$ . A média de várias simulações tende a  $Z_k^*(x)$ .

JOURNEL e HUIJBREGTS (28) mostram que a simulação condicional satisfaz as seguintes propriedades:

- a F.A.  $Z_{SC}(x)$  tem a mesma esperança que a F.A.  $Z(x)$ .

Sendo o estimador de krigagem não tendencioso.

$$E[Z_k^*(x)] = E[Z(x)] \quad (\text{III.78})$$

e

$$E[Z_{Sk}^*(x)] = E[Z_s(x)] \quad (\text{III.79})$$

portanto

$$E[Z_{SC}(x)] = E[Z(x)] = m, \quad \forall x, \quad (\text{III.80})$$

- a F.A.  $Z_{SC}(x)$  é isomorfa de  $Z(x)$ , pois o erro  $[Z_s(x) - Z_{Sk}^*(x)]$  é isomorfo do erro  $[Z(x) - Z_k^*(x)]$  e independente de  $Z_k^*(x)$ .

- a realização  $z_{SC}(x)$  é condicionada aos dados experimentais. Como os estimadores de krigagem são exatos tem-se nos pontos

amostrais:

$$z_k^*(x) = z(x_i) \text{ e } z_{sk}^*(x) = z_s(x_i) \text{ de onde vem}$$

$$z_{sc}(x_i) = z(x_i), \quad \forall x_i \in I. \quad (\text{III.81})$$

Resumindo as sucessivas etapas deste método, VALENTE (45) descreve os seguintes tópicos:

- obter uma simulação não condicional  $z_s(x)$  da variável regionalizada em todos os pontos  $x \in I$ . Esta simulação obedece à esperança e covariância experimental;
- usando os dados experimentais  $z_a(x_i)$  estimar por krigagem todos os pontos  $x \in I$ , obtem-se, assim, nova coleção de valores  $z_k^*(x)$ ,  $x \in I$ ;
- com base nos valores simulados  $z_s(x_i)$  nos pontos amostrais  $(x_i)$ , estimar por krigagem todos os pontos  $x \in I$ , obtendo-se outra coleção de valores  $[z_{sk}^*(x), x \in I]$ ;
- finalmente, obter a simulação condicional somando em cada ponto  $(x)$ , o erro de krigagem  $[z_s(x) - z_{sk}^*(x)]$  e o valor estimado  $z_k^*(x)$ .

$$z_{sc}(x) = z_k^*(x) + [z_s(x) - z_{sk}^*(x)]. \quad (\text{III.82})$$

### III.2 - SIMULAÇÃO DE CORREGIONALIZAÇÃO

O modelo da simulação condicional desenvolvido para variáveis regionalizadas (item III.1), gera um modelo de distribuição no espaço para a V.R. em estudo, mantendo os atributos estatísticos relativos as amostras. Isto se passa da mesma forma para o caso de variáveis corregionalizadas, porém existem modelos específicos adequados à análise estrutural e a simulação de corregionalizações.

A análise estrutural é realizada em função dos momentos cruzados. Supondo  $z_k(x)$  e  $z_{k'}(x)$  duas variáveis corregionalizadas e  $C_{kk'}(h)$  a covariância-cruzada. Suas respectivas funções de anamorfose são:

$$\Phi_k = \sum_{i=1}^n \frac{\psi_{i,k}}{i!} \cdot H_i, \quad (\text{III.83})$$

$$\Phi_{k'} = \sum_{i=1}^n \frac{\psi_{i,k'}}{i!} \cdot H_i. \quad (\text{III.84})$$

As variáveis gaussianas correspondentes  $y_k$  e  $y_{k'}$ , possuem covariância-cruzada  $\varphi_{kk'}(h)$ . Existe uma relação entre  $C_{kk'}(h)$ , relativa aos dados reais  $z_k(x)$  e  $z_{k'}(x)$ , e  $\varphi_{kk'}(h)$ , relativa às variáveis gaussianas  $y_k$  e  $y_{k'}$ :

$$C_{kk'}(h) = \sum_{i=1}^n \frac{(\psi_{k,i} \cdot \psi_{k',i})}{i!} \cdot \varphi_{kk'}(h) \quad (\text{III.85})$$

Supondo que  $\Phi_k$  e  $\Phi_{k'}$ , possuem a mesma ordem  $n$ , esta relação permite deduzir  $\varphi_{kk'}(h)$  diretamente de  $C_{kk'}(h)$ .

Quanto ao modelo de simulação, a diferença básica está no método utilizado para o condicionamento.

Primeiramente será apresentado o modelo proposto por JOURNEL e HUIJBREGTS (28), denominado de simulação de correção regionalização.

Supondo que se deseja simular  $L$  F. As estacionárias  $[Z_i(x), i = 1, \dots, L]$ , caracterizadas pela matriz de covariância  $[C_{kk'}(h)]$ .

Este modelo em linhas gerais consiste em considerar as  $n$  F. As estacionárias  $[y_i(x), i = 1, \dots, n]$  com covariância direta  $K_i(h)$  e procurar uma combinação linear do tipo:

$$Z_i(x) = \sum_{i=1}^n a_{ki} y_i(x) . \quad (\text{III.86})$$

A correção regionalização espacial  $[Z(x), k = 1, \dots, L]$  é caracterizada pela matriz de covariância  $C_{kk'}(h)$  cujo modelo teórico (item II.4.4) é uma combinação linear de  $n$  covariâncias  $K_i(h)$ :

$$C_{kk'}(h) = \sum_{i=1}^n a_{ki} a_{k'i} K_i(h) . \quad (\text{III.87})$$

Assim, a simulação de  $[Z_i(x), i = 1, \dots, L]$  pode ser reduzida à simulação de realizações independentes de  $n$  F. As  $Y_i(x)$  com covariância  $K_i(h)$ . Para cada componente das F. As  $Z_i(x)$ , é reproduzida uma função de distribuição, JOURNEL e HUIJBREGTS (28).

Portanto, este método envolve a execução de várias simulações, uma para cada variável, seguindo a metodologia geral da simulação condicional. O processo de condicionamento é executado variável por variável, por krigagem direta e não por cokrigagem.

A equação (III.82), neste caso, é expressa pela seguinte notação (para uma variável  $Z_k(x)$ ):

$$Z_{k,sc}(x) = Z_{k,k}^*(x) + [Z_{k,s}(x) - Z_{k,sk}^*(x)] \quad (\text{III.89})$$

onde:

$Z_{k,k}^*(x)$  - é o estimador para  $z_k(x)$  por krigagem, a partir dos dados reais  $z_k(x_i)$ ;

$Z_{k,sk}^*(x)$  - é o valor estimado para  $z_k(x)$  por krigagem, a partir de valores simulados  $z_{k,s}(x)$ .

Uma segunda metodologia proposta por CARR e MYERS (8), denominada de simulação cocondicional, basicamente difere da primeira pelo uso de cokrigagem no processo de condicionamento. Este procedimento, pelo fato de realizar a cokrigagem, torna-se

computacionalmente menos eficiente que a metodologia anterior. Porém traz a vantagem de realizar uma conveniente simulação múltipla em uma única execução do programa e por aumentar a precisão na reprodução da correlação-cruzada, CARR e MEYES (8).

Como na simulação de regionalização, na simulação de corregionalização, aplica-se o modelo da simulação não-condicional, independentemente, para cada F.A. de interesse.

A equação (III.57) torna-se:

$$\bar{z}_s(x) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \sum_{i=1}^n \bar{z}_i(x) \quad (\text{III.89})$$

onde:

$$\bar{z}_s = (\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots, \bar{z}_m);$$

$$\bar{z}_i = (\bar{z}_{i1}, \bar{z}_{i2}, \dots, \bar{z}_{im})$$

m = é o número de F.As. a ser simuladas.

Usando a cokrigagem para o processo de condicionamento da simulação condicional a equação (III.70) é:

$$\bar{z}_{sc}(p) = \bar{z}_k^*(p) + [\bar{z}_s(p) - \bar{z}_{sk}^*(p)] \quad (\text{III.90})$$

onde:

$$\bar{z}_{sc}(p) = [z_{sc,1}(p), z_{sc,2}(p), \dots, z_{sc,m}(p)];$$

$$\bar{z}_k^*(p) = [z_{k,1}^*(p), z_{k,2}^*(p), \dots, z_{k,2m}^*(p)];$$

$$\bar{z}_s(p) = [z_{s,1}(p), z_{s,2}(p), \dots, z_{s,m}(p)];$$

$$\bar{z}_{sk}(p) = [z_{sk,1}(p), z_{sk,2}(p), \dots, z_{sk,m}(p)];$$

m = número de F.As. intercorrelacionadas.

O vetor  $\bar{z}_k^*(p)$  é estimado por cokrigagem a partir dos dados reais. O vetor  $\bar{z}_{sk}^*(p)$  é estimado por cokrigagem a partir dos valores simulados por simulação não condicional.

CARR e PREZBINDOWSKI (10) aplica esta metodologia na exploração de petróleo e mostra as vantagens procedentes de sua utilização.

No presente trabalho será utilizada esta metodologia, com o objetivo de modelar a correionalização das variáveis (A -  $Al_2O_3$  e R -  $SiO_2$ ) existente numa mineralização de bauxita.

### III.3 - SIMULAÇÃO DE BLOCOS

A simulação de variáveis pontuais  $z(x)$ , metodologia descrita em (III.1), é um processo geral aplicado ao caso de simulação de variáveis com suporte não pontual  $z_v(x)$  (teores de blocos, painéis, etc.). As adaptações sugeridas por JOURNEL e HUIJBREGTS (28), serão descritas a seguir.

O método proposto consiste em trabalhar, o mais possível, sobre as variáveis pontuais. Simula-se, seguindo a metodologia geral, os teores pontuais sobre uma malha bastante fina, de modo a se poder considerar que a média destes pontos reconstitui bem o teor do bloco.

Assim, o teor verdadeiro do bloco  $z_v(x) = \frac{1}{v} \int z(y) dy$  é estimado pela aproximação discreta.

$$z_v^*(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z(x_i) , \quad (\text{III.91})$$

onde:

$n$  = número de pontos interiores ao bloco  $v$ ;

$z(x_i)$  = valores assumidos pela variável nos pontos  $x_i$  ( $i=1, \dots, n$ ).

O número  $n$  é convenientemente definido em função do erro aceitável ( $z_v - z_v^*$ ). O número  $n$  é então determinado em função do semi-variograma  $\gamma_v(h)$  ou da covariância  $C_v(h)$ , de forma que a variabilidade espacial do suporte  $v$  não seja mascarada.

Este método, possui a grande desvantagem de ser necessário estimar, por krigagem, cada um dos nós da malha, para gerar a simulação condicional:

$$z_{v,sc}(x) = z_{v,k}^*(x) + [z_{v,s}(x) - z_{v,sk}^*(x)] \quad (\text{III.92})$$

onde:



$z_{v,sc}(x)$  = simulação condicional do bloco v;

$z_{v,k}^*(x)$  = valor estimado, por krigagem, a partir dos dados experimentais;

$z_{v,s}^*(x)$  = simulação não condicional do bloco v;

$z_{v,sk}^*(x)$  = valor estimado, por krigagem, a partir dos valores  $z_s(x)$ .

Um segundo método consiste em simular, não condicionalmente, os teores pontuais e efetuar a simulação condicional por krigagem de blocos diretamente. Isto diminui o tempo necessário a krigagem, pois o procedimento requer a simulação não condicional de  $(n.N)$  valores pontuais, ( $n$  valores para cada um dos  $N$  blocos) e somente a krigagem dos  $N$  blocos no processo da simulação condicional. Neste caso a simulação não-condicional de  $(n.N)$  pontos pode tornar inviável a utilização deste método.

#### III.4 - FENÔMENOS ANISÔTROPICOS, EFEITO DE PEPITA E DERIVA

Os aspectos estruturais, tais como anisotropias, deriva e efeito de pepita, comumente detectados no estudo de variáveis regionalizadas não foram considerados até o momento. Para tratar estes aspectos algumas considerações são introduzidas, JOURNEL e HUIJBREGTS (28) e DOWD (21), as quais tornam o modelo da simulação generalizado.

O comportamento espacial anisôtrofo geralmente se evidencia na prática mostrando direções preferenciais de variabilidade da variável regionalizada. Uma covariância tridimensional anisôtrofa  $C(h_u, h_v, h_w)$  pode ser tratada como uma soma de covariâncias isotropas no espaço de dimensão 3, ou seja, conforme exemplifica JOURNEL e HUIJBREGTS (28):

$$C(h_u, h_v, h_w) = k_0 C_0(r) + k_1 C_1(h_w) + k_2 C_2 C[\sqrt{(h_u^2 + h_v^2)} + k_3 C_3(r)] . \quad (\text{III.93})$$

Sendo as covariâncias  $C_0, C_1, C_2$  e  $C_3$  isotropas, é aplicado o método precedente para simular, independentemente, as realizações correspondentes a cada modelo isotropo. Em seguida soma-se as realizações simuladas ponto a ponto.

A simulação de fenômenos com efeito de pepita  $C_0$ , componente aleatória da variância total, segundo DOWD (27), é realizada conforme as técnicas da simulação unidimensional descrita em (III.b.1.1). Observa-se que, neste caso, são gerados números aleatórios com esperança nula e variância igual a  $C_0$ .

No desenvolvimento do método das bandas rotativas considera-se a F.A. tridimensional  $Z(x)$  com  $E[Z(x)] = 0$ , gerando realizações  $z_s(x)$  de uma F.A.  $Z_s(x)$  com  $E[Z_s(x)] = 0$ . A esperança suposta nula geralmente não ocorre, isto é,  $E[Z(x)] = m \neq 0$ . Portanto, para obter a esperança  $E[Z_s(x)] = m' \neq 0$ , é suficiente adicionar a cada realização  $z_s(x)$  uma constante igual a média  $m$ .

Isto se procede, da mesma forma, em casos de simulação de F.A. não estacionária da forma:

$$Z(x) = m(x) + R(x) . \quad (\text{III.94})$$

O resíduo estacionário  $R(x)$  é simulado aplicando o método das bandas rotativas. A cada valor simulado  $R_s(x)$  é adicionado o valor  $m_s(x)$ , correspondente a deriva, em cada ponto considerado. A simulação da esperança não estacionária  $m(x)$  é realizado independente de  $R(x)$ .

## CAPÍTULO IV

### ESTUDO DE CASO

#### IV.1 - INTRODUÇÃO

Este capítulo é destinado a apresentação dos resultados obtidos por simulação geoestatística das variáveis regionalizadas, A -  $Al_2O_3$  e R -  $SiO_2$ , apresentadas no Capítulo I.

As etapas, seguidamente, expostas estão em conformidade com a metodologia geral, descrita no Capítulo III, particularizando-se ao uso da simulação cocondicional (simulação multivariável), desenvolvida por CARR e MYERS (8).

O que motivou a utilização da simulação cocondicional foi, além da disponibilidade de "*software*", verificar a validade de sua aplicação ao caso em questão, já que se refere a variáveis corregionalizadas no espaço. Conforme CARR e MYERS (8), as vantagens são várias, principalmente a de reproduzir a correlação cruzada entre as variáveis simuladas.

Seguindo a metodologia, o trabalho foi subdividido nas seguintes etapas interrelacionadas:

- análise dos dados;
- análise estrutural;
- anamorfose gaussiana;

- análise estrutural das gaussianas;
- simulação não condicional;
- simulação condicional multivariável.

#### IV.2 - ANÁLISE DE DADOS

O banco de dados, contendo as informações necessárias, relativas às variáveis A -  $Al_2O_3$  e R -  $SiO_2$ , localizadas na área denominada Corrego do Meio II, foi inicialmente subdivididos em arquivos, separando as informações por níveis de jazida (divisão vertical da jazida em junção do intervalo de amostragem). Desta forma, reduzindo o espaço de trabalho ao plano bi-dimensional.

A análise estatística dos dados, para os dez primeiros níveis, está resumida na Tabela (IV.1). Observa-se uma forte correlação entre as variáveis, diminuindo para os níveis inferiores. A correlação negativa pode ser explicada pelo fato que, em média, os teores de A -  $Al_2O_3$  crescem enquanto os teores de R -  $SiO_2$  decrescem. A Figura (IV.1) ilustra a análise de regressão relativa ao primeiro nível da jazida.

Os histogramas experimentais mostram que, para a sílica, persiste uma distribuição tipicamente lognormal (forte assimetria à direita) para todos os níveis da jazida, enquanto que, para a alumina, isto não é tão característico. Há uma certa irregularidade nos histogramas. As Figuras (IV.2) e (IV.3) referem-se às distribuições de frequências da alumina e da sílica respectivamente, no primeiro nível.

TABELA IV.1

VARIÁVEL	NÍVEL/Nº AMOSTRAS	MÉDIA (%)	VARIÂNCIA (%) <sup>2</sup>	PADRÃO (%)	TEOR (%)		COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO
					MIN	MAX	
A-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	1/729	43,37	36,11	6,01	26,60	51,10	- 0,8421
R-SiO <sub>2</sub>		4,89	7,04	2,65	0,10	14,00	
A-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	2/608	44,07	50,2	7,08	30,10	58,00	- 0,820
R-SiO <sub>2</sub>		4,45	9,39	3,06	0,30	13,80	
A-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	3/470	44,29	53,56	7,32	30,10	58,30	- 0,751
R-SiO <sub>2</sub>		4,29	11,02	3,32	0,10	14,40	
A-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	4/378	44,4	51,93	7,21	30,10	58,00	- 0,752
R-SiO <sub>2</sub>		4,23	12,39	3,52	0,10	14,80	
A-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	5/317	44,76	49,85	7,06	30,20	58,30	- 0,715
R-SiO <sub>2</sub>		3,05	10,65	3,26	0,10	13,60	
A-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	6/283	44,47	53,52	7,32	30,00	58,00	- 0,679
R-SiO <sub>2</sub>		3,08	10,82	3,29	0,10	13,7	
A-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	7/222	44,47	53,52	7,32	30,00	58,1	- 0,656
R-SiO <sub>2</sub>		3,70	10,96	3,31	0,00	12,90	
A-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	8/196	44,23	54,72	7,39	29,1	58,0	- 0,704
R-SiO <sub>2</sub>		3,90	12,59	3,55	0,10	14,80	
A-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	9/165	45,26	53,51	7,31	30,30	59,2	- 0,644
R-SiO <sub>2</sub>		3,32	10,65	3,26	0,00	14,00	
A-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	10/129	44,68	54,82	7,40	31,10	57,20	- 0,668
R-SiO <sub>2</sub>		3,47	8,95	2,99	0,00	12,50	

### REGRESSÃO LINEAR

$(R-SiO_2) \times (A-Al_2O_3)$

EQUAÇÃO:  $A-Al_2O_3 = -1,9066 \times (R-SiO_2) + 52,7053$

COEFICIENTE DE CORRELAÇÃO:  $-0,8421$

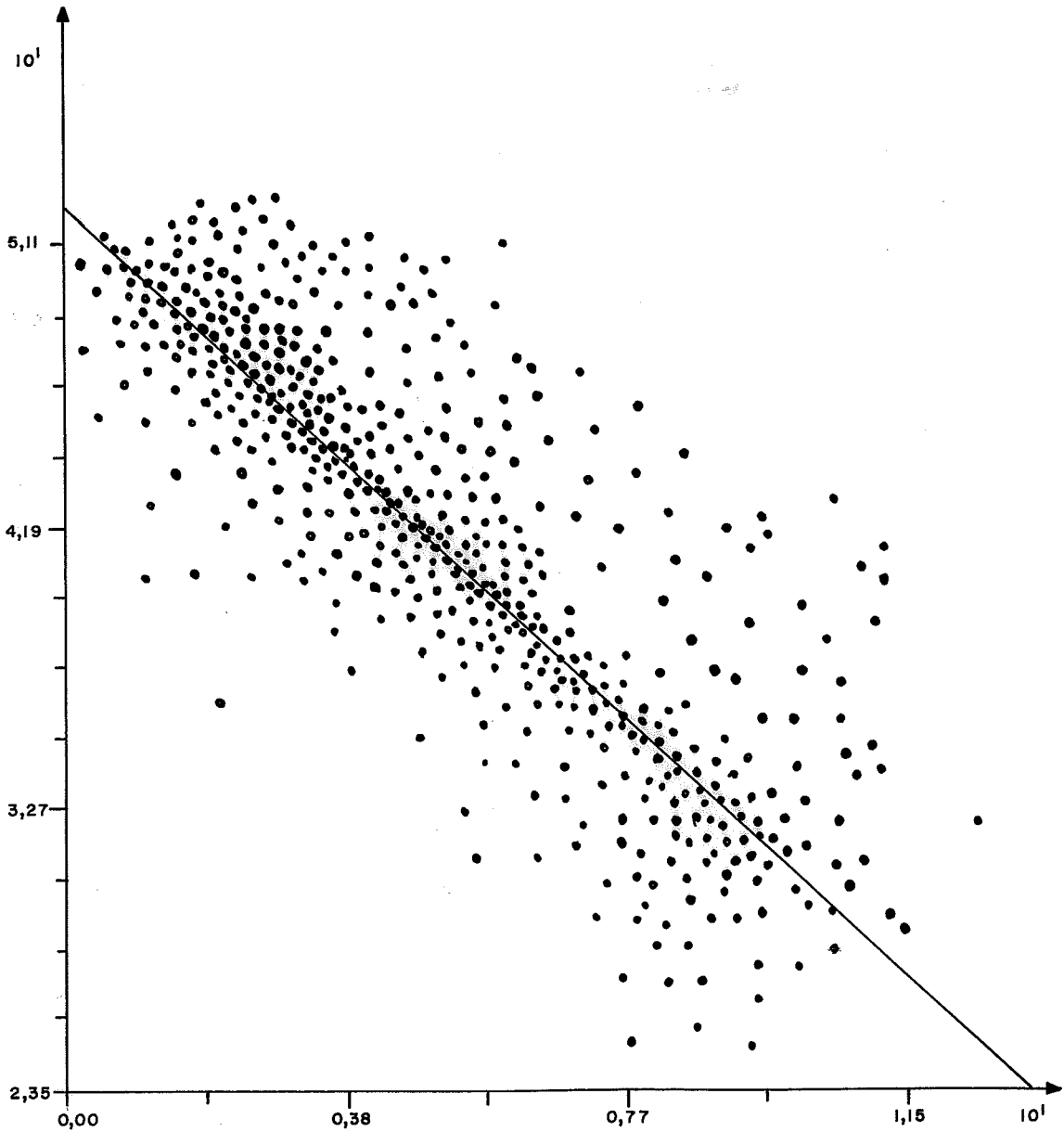
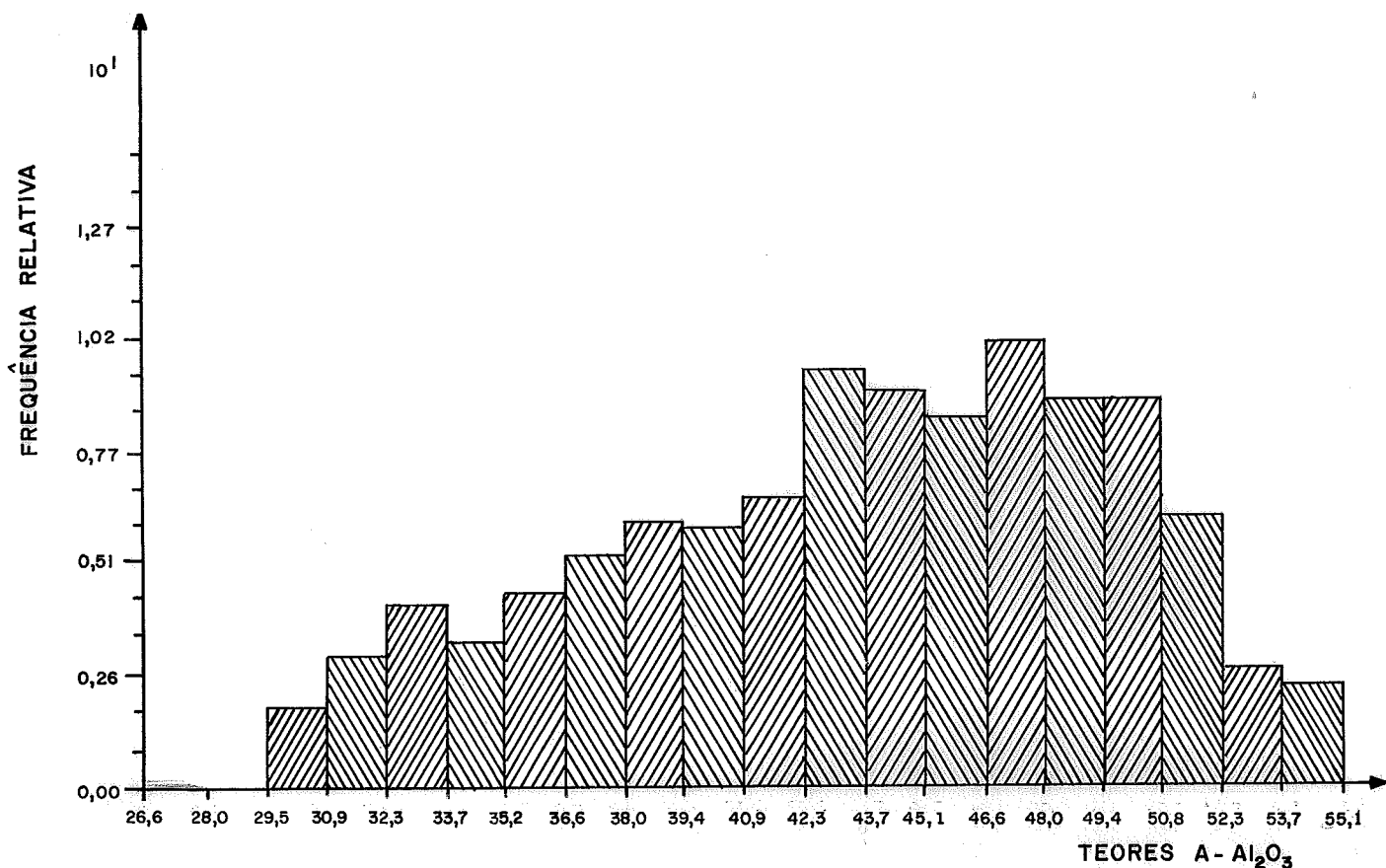


FIGURA (IV.1)

### HISTOGRAMA EXPERIMENTAL A - Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>



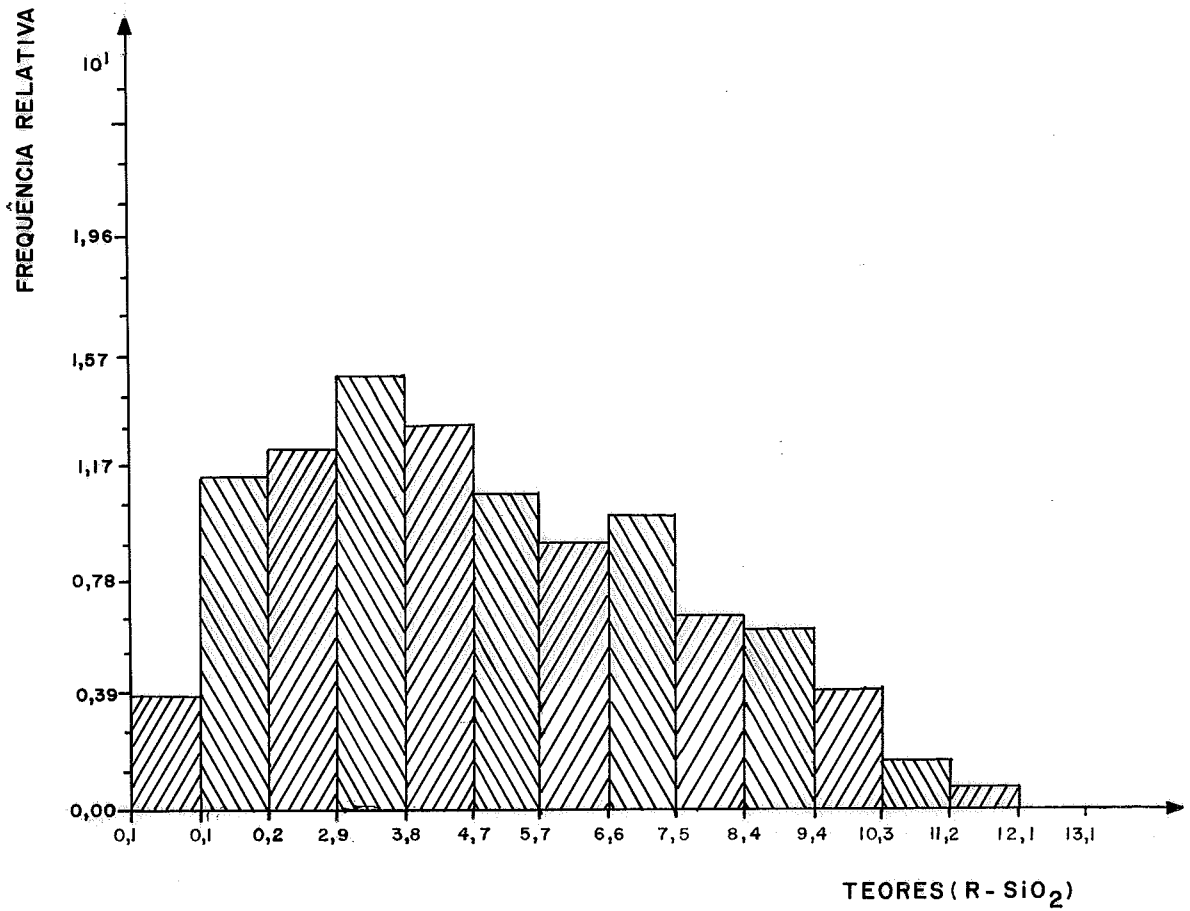
#### PARÂMETROS RELATIVOS A ALUMINA

Média	: 43.3711%
Variância	: 36.1101% <sup>2</sup>
Desvio Padrão	: 6.0092%
Menor Valor	: 26.6000%
Maior Valor	: 55.1000%
Número de dados	: 729

FIGURA (IV.2)



### HISTOGRAMA EXPERIMENTAL ( R - SiO<sub>2</sub> )



#### PARÂMETROS RELATIVOS A (R - SiO<sub>2</sub>)

Média	: 4.8957
Variância	: 7.0451
Desvio Padrão	: 2.6543
Menor Valor	: 0.1000
Maior Valor	: 14.0000
Número de dados	: 729

FIGURA ( IV.3 )

### IV.3 - ANÁLISE ESTRUTURAL

#### IV.3.1 - Semi-Variogramas Experimentais

A pesquisa da estrutura espacial das variáveis,  $A-Al_2O_3$  e  $R-SiO_2$ , no espaço bi-dimensional foi, inicialmente, efetuada para todos os níveis da jazida. Esta pesquisa mostrou a insuficiência de dados para definir a estrutura espacial para os níveis inferiores da jazida, limitando-se, portanto, os estudos ao primeiro nível, representado por 729 amostras, dispostas em malha regular de 25 x 25 m.

A computação dos semi-variogramas diretos e semi-variogramas cruzados foi realizada, em microcomputador do tipo IBM-PC, pelo programa GAMM2, desenvolvido pelo Dr. James R. Carr da Universidade de Missouri, de propriedade do Dr. Luis Paulo Vieira Braga. Este programa é destinado ao cálculo e plotagem de semi-variogramas direcionais (4 direções) no plano.

Com a finalidade de gerar uma base de dados para os vários testes de simulação efetuados, foi realizada várias corridas do programa GAMM2 para a variogramas seguintes conjuntos de dados:

- dados originais;
- dados normalizados;
- dados com distribuição lognormal;
- dados gaussianos.

A variografia, para dados normalizados e a específica para dados com distribuição lognormal, é executada pelo programa GAMM2 (opções na entrada de dados). Os vários testes realizados acusaram a existência de estruturas de transição, modeláveis ao esquema esférico com efeito de pepita, e presença de estruturas embricadas para as variáveis estudadas. A anisotropia geométrica também persiste, sendo mais acentuada para a sílica. O efeito de pepita em todos os casos foi acentuado.

A variografia efetuada para os níveis inferiores, embora com dados insuficientes para conclusões, mostrou uma tendência de permanecer a estrutura do primeiro nível estudado. Salienta-se que estes resultados são compatíveis com os obtidos por ERRICO (22).

Os semi-variogramas cruzados, também, revelam a existência de estruturas de transição modeláveis ao esquema esférico, com a anisotropia geométrica e efeito de pepita alto. As derivas observadas foram baixas o que permite concluir, a validade de hipótese de estacionaridade de segunda ordem, para os fenômenos mineralizantes do depósito de bauxita. Isto possibilita a passagem, com segurança, para as etapas posteriores.

Os semi-variogramas direcionais, relativos às quatro direções, (NS, EW, NW-SE, NE-SW), e a análise dos efeitos geológicos, permitiram definir as direções, (EW) e (NS), como preferenciais da jazida e tomá-las com base para a simulação.

#### IV.3.2 - Ajuste dos Modelos Teóricos

As Tabelas (IV.2), (IV.3), (IV.4) e (IV.5) sumarizam os resultados da análise estrutural efetuada.

O modelo teórico que melhor se ajusta aos modelos experimentais, tanto para os semi-variogramas diretos como para os semi-variogramas cruzados, é o esférico com efeito de pepita. Os outros modelos foram testados, mas, de maneira geral, o esférico é mais consistente.

Os semi-variogramas diretos e semi-variogramas cruzados experimentais, relativos aos dados originais e normalizados, e respectivos ajustes, estão expostos nos gráficos das Figuras (IV.3) e (IV.4).

Observa-se que, entre todas as realizações simuladas,  $Z_S(x)$  e  $Z_{SC}(x)$ , foi selecionada a simulação gerada a partir dos parâmetros estruturais normalizados, por apresentar maior conformidade com as características dos dados experimentais.

#### IV.4 - ANAMORFOSE GAUSSIANA

Conforme detalhes de cálculo e justificativas apresentadas no Capítulo II (item 2.2) a transformação Hermitiana, foi efetuada, gerando os coeficientes dos polinômios de Hermite, relativos às populações da alumina e da sílica. Estes coeficientes compõem os arquivos de dados para o programa de simulação. As Tabelas (IV.6) e (IV.7) sumarizam os resultados obtidos.

TABELA IV.2 - Variografia dos dados originais (da Figura IV.3)

VARIÁVEL/DIREÇÃO	PARÂMETROS VARIOGRÁFICOS						MÉDIA (%)
	$a_m$	$c$ (%)	$c_0$ (%) <sup>2</sup>	$A_x$	$A_y$	$\sigma^2$ (%) <sup>2</sup>	
A-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> /(EW)	231,0	20,3	16,2	1,0	1,0	36,5	43,3
A-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> /(NS)	171,0	20,3	16,2	1,0	1,35	36,5	
R-SiO <sub>2</sub> /(EW)	230,0	4,4	2,2	1,0	1,0	7,18	4,91
R-SiO <sub>2</sub> /(NS)	148,0	4,4	2,2	1,0	1,55	7,18	
Cruzado/(EW)	174,0	8,7	7,6	1,0	1,0	16,3	48,3
Cruzado/(NS)	145,0	8,7	7,6	1,0	1,2	16,3	

TABELA IV.3 - Variografia dos dados normalizados (da Figura IV.4)

VARIÁVEL/DIREÇÃO	PARÂMETROS VARIOGRÁFICOS						MÉDIA (%)
	$a_m$	$c$ (%)	$c_0$ (%) <sup>2</sup>	$A_x$	$A_y$	$\sigma^2$ (%) <sup>2</sup>	
A-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> /(EW)	210,0	0,007	0,005	1,0	1,0	0,0119	0,787
A-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> /(NS)	150,0	0,007	0,005	1,0	1,4	0,0119	
R-SiO <sub>2</sub> /(EW)	280,0	0,023	0,012	1,0	1,0	0,036	0,350
R-SiO <sub>2</sub> /(NS)	155,5	0,023	0,012	1,0	1,8	0,036	
Cruzado/(EW)	290,0	0,008	0,004	1,0	1,0	0,012	1,14
Cruzado/(NS)	170,5	0,008	0,004	1,0	1,7	0,012	

VARIOGRAFIA DOS DADOS ORIGINAIS

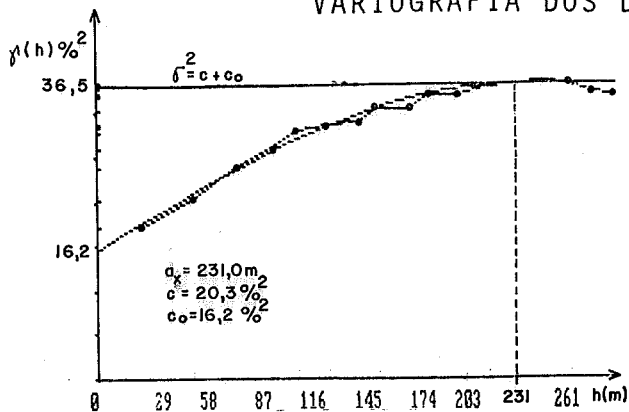


Gráfico-1 (A-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>)/(E-W)

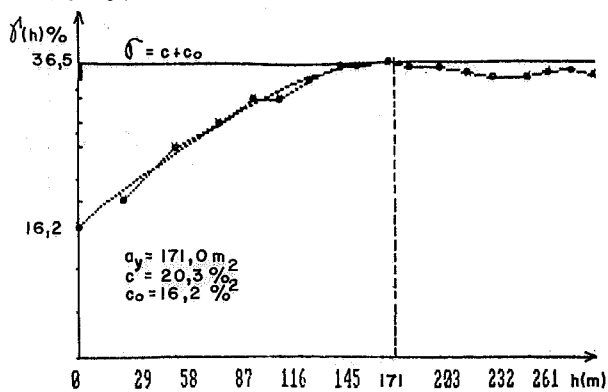


Gráfico-2 (A-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>)/(N-S)

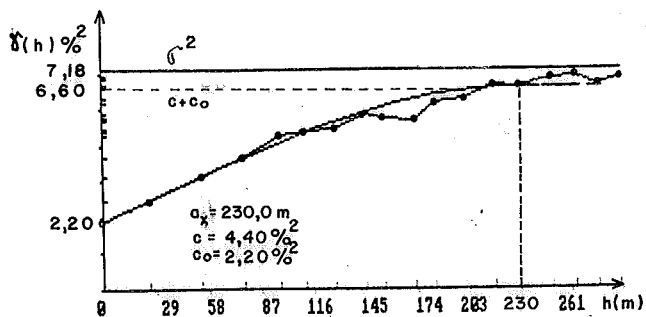


Gráfico-3 (R-SiO<sub>2</sub>)/(E-W)

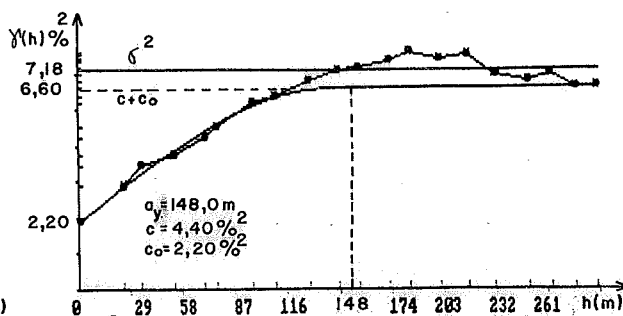


Gráfico-4 (R-SiO<sub>2</sub>)/(N-S)

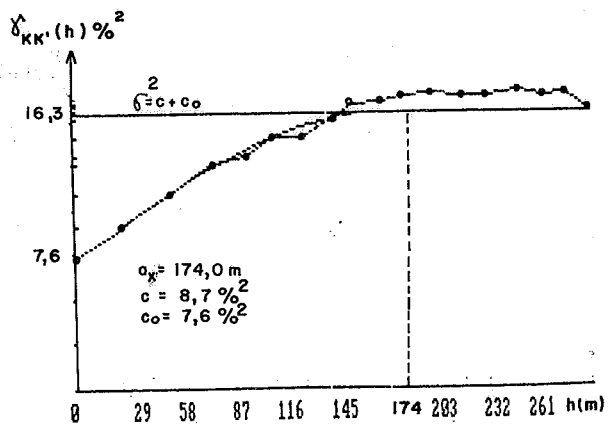


Gráfico-5 (γ<sub>kk'</sub>(h))/(E-W)

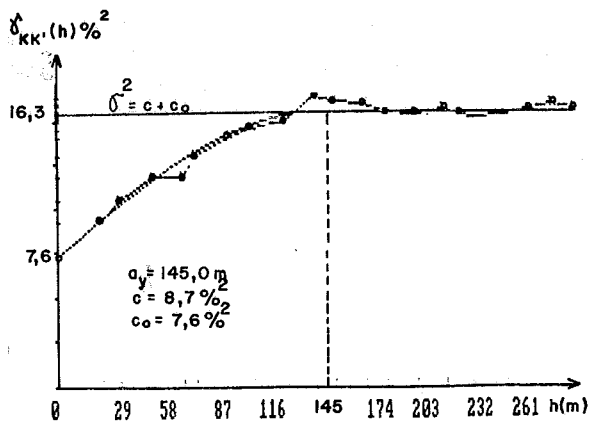


Gráfico-6 (γ<sub>kk'</sub>(h))/(N-S)

VARIOGRAFIA DOS DADOS NORMALIZADOS

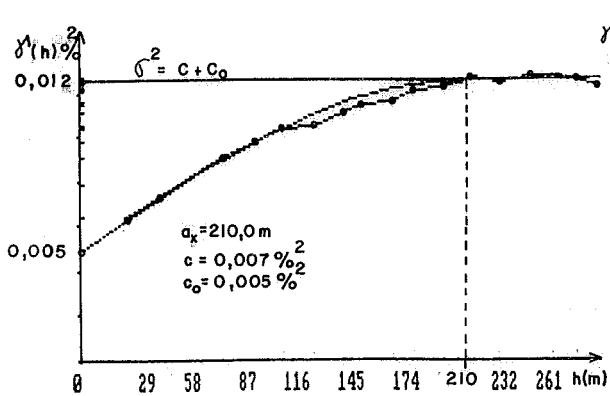


Gráfico-7 (A-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>)/(E-W)

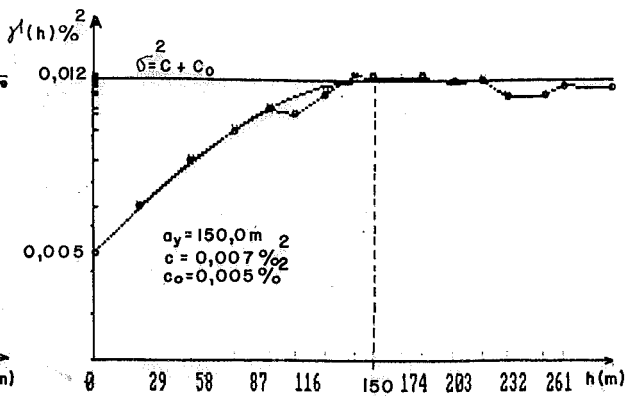


Gráfico-8 (A-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>)/(N-S)

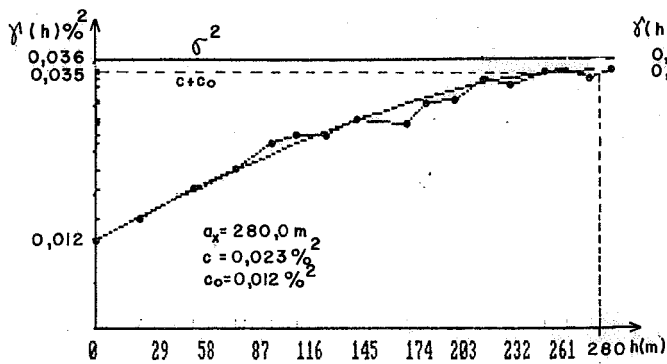


Gráfico-9 (R-SiO<sub>2</sub>)/(E-W)

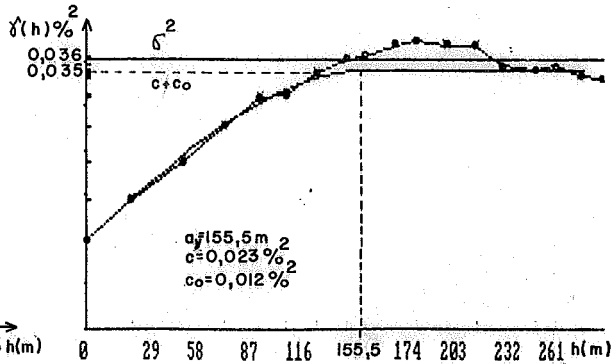


Gráfico-10 (R-SiO<sub>2</sub>)/(N-S)

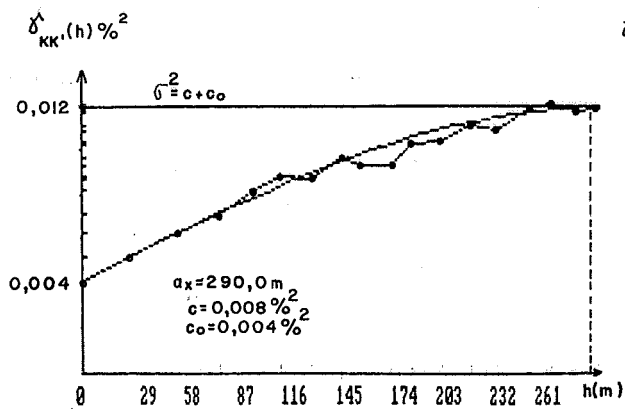


Gráfico-11 (γ<sub>kk'</sub>(h))/(E-W)

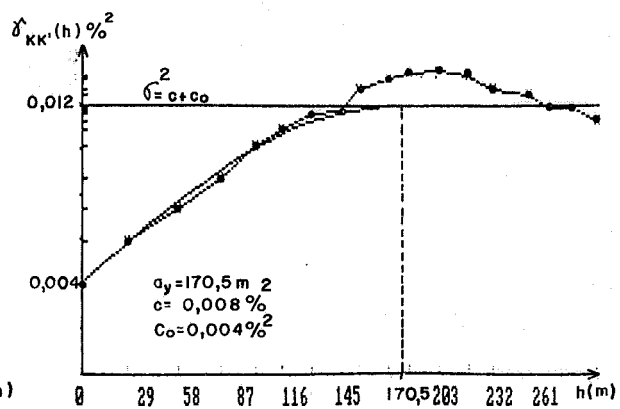


Gráfico-12 (γ<sub>kk'</sub>(h))/(N-S)

TABELA IV.4 - Variografia para os dados lognormal

VARIÁVEL/DIREÇÃO	PARÂMETROS VARIOGRÁFICOS						MÉDIA (%)
	a <sub>m</sub>	c (%)	c <sub>0</sub> (%) <sup>2</sup>	A <sub>x</sub>	A <sub>y</sub>	σ <sup>2</sup> (%) <sup>2</sup>	
A-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> /(EW)	180,00	18,00	16,0	1,0	1,0	37,50	43,3
A-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> /(NS)	128,6	18,0	16,0	1,0	1,4	37,50	
R-SiO <sub>2</sub> /(EW)	210,0	4,0	2,3	1,0	1,0	7,30	4,92
R-SiO <sub>2</sub> /(NS)	123,50	4,0	2,3	1,0	1,7	7,30	
Cruzado/(EW)	155,00	8,0	8,0	1,0	1,0	16,8	48,2
Cruzado/(NS)	144,86	8,0	8,0	1,0	1,07	16,8	

TABELA IV.5 - Variografia dos dados gaussianos

VARIÁVEL/DIREÇÃO	PARÂMETROS VARIOGRÁFICOS						MÉDIA (%)
	a <sub>m</sub>	c (%)	c <sub>0</sub> (%) <sup>2</sup>	A <sub>x</sub>	A <sub>y</sub>	σ <sup>2</sup> (%) <sup>2</sup>	
A-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> /(EW)	205,0	0,5	0,44	1,0	1,0	1,0	0,0041
A-Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub> /(NS)	146,4	0,5	0,44	1,0	1,4	1,0	
R-SiO <sub>2</sub> /(EW)	210,0	0,55	0,27	1,0	1,0	1,0	0,0041
R-SiO <sub>2</sub> /(NS)	127,3	0,55	0,27	1,0	1,65	1,0	
Cruzado/(EW)	180,0	0,17	0,2	1,0	1,0	0,424	0,0088
Cruzado/(NS)	180,0	0,17	0,2	1,0	1,0	0,424	



TABELA IV.6

(ALUMINA)			
COEFICIENTES DE HERMITE			
43,76	- 6,0365	- 0,997	1,213
0,9363	- 0,1087	- 0,4935	15,633
8,641	- 88,00		
PARÂMETROS ESTATÍSTICOS	AMOSTRAS	MODELO DE HERMITE	DIFERENÇA (%)
Média %	43.37	43.312	- 0,136
Variância % <sup>2</sup>	36.11	37.46	3,66
Desvio padrão %	6.01	6.12	1,85

TABELA IV.7

(SÍLICA)			
COEFICIENTES DE HERMITE			
4,889	- 2,608	0,576	0,6425
- 0,085	- 0,04142	0,02232	0,5050
- 10,042	- 31,504		
PARÂMETROS ESTATÍSTICOS	AMOSTRAS	MODELO DE HERMITE	DIFERENÇA (%)
Média %	4,896	4,889	- 0,1368
Variância % <sup>2</sup>	7,045	6,973	- 1,0234
Desvio padrão %	2,654	2,641	- 0,513

## IV.5 - SIMULAÇÃO

### IV.5.1 - Considerações Gerais

A simulação foi executada em microcomputador tipo IBM-PC, pelo programa COSIM, desenvolvido por CARR e MYERS (8), de propriedade do Dr. Luis Paulo Vieira Braga.

O programa COSIM é destinado à simulação multivariável pontual, no plano. Numa primeira etapa efetua a simulação não condicional, uma para cada variável considerada. Na segunda etapa efetua a simulação cocondicional para N variáveis simultaneamente, recorrendo ao procedimento de cokrigagem no processo de condicionamento. Se  $N = 1$  o programa executa a simulação condicional padrão (condicionamento realizado por krigagem).

Por várias razões, inerentes às condições de realização deste trabalho, a simulação das variáveis regionalizadas ( $A-Al_2O_3$  e  $R-SiO_2$ ), foi executada para o primeiro nível da jazida, considerando os dados correspondentes à primeira amostra de cada juro. Desta forma, os valores simulados correspondem a uma superfície paralela à superfície topográfica, no primeiro nível.

A localização da superfície simulada e o dimensionamento da malha é a seguinte:

origem: (1925 N; 1000 E);

malha regular: 40 linhas x 25 colunas

espaçamento: 25 x 25 m

A seguir serão apresentados os resultados simulados a partir dos parâmetros variográficos provenientes da Tabela (IV.3), conforme justificativa em (IV.3.2).

#### IV.5.2 - Simulação Não Condicional

Teoricamente, a simulação não condicional gera, através da equação (III.61), uma população gaussiana com média zero e variância unitária. Na prática, procura-se aproximar o mais possível destes valores, variando o número aleatório (semente) iniciante do processo gerador do número aleatório. CARR e MYERS (8) indicam um intervalo prático para a média ( $- 0,3 < m < 0,3$ ) e consideram aceitáveis, valores próximos de um para a variância.

Neste trabalho os valores obtidos foram:

A -  $Al_2O_3$

média = - 0,09%

variância = 1,44%<sup>2</sup>

R -  $SiO_2$

média = - 0,208%

variância = 0,827%<sup>2</sup>

Uma transformação hermitiana, efetuada sobre essa população gaussiana, gerou os resultados finais da simulação não condicional.

Nas Figuras (IV.5) e (IV.6) mostram os histogramas e parâmetros estatísticos simulados relativos à alumina e a sílica, respectivamente. Estes resultados podem ser comparados com aqueles das Figuras (IV.2) e (IV.3), relativos aos dados experimentais.

Os semi-variogramas simulados, segundo a direção E-W, estão esquematizados na Figura (IV.7).

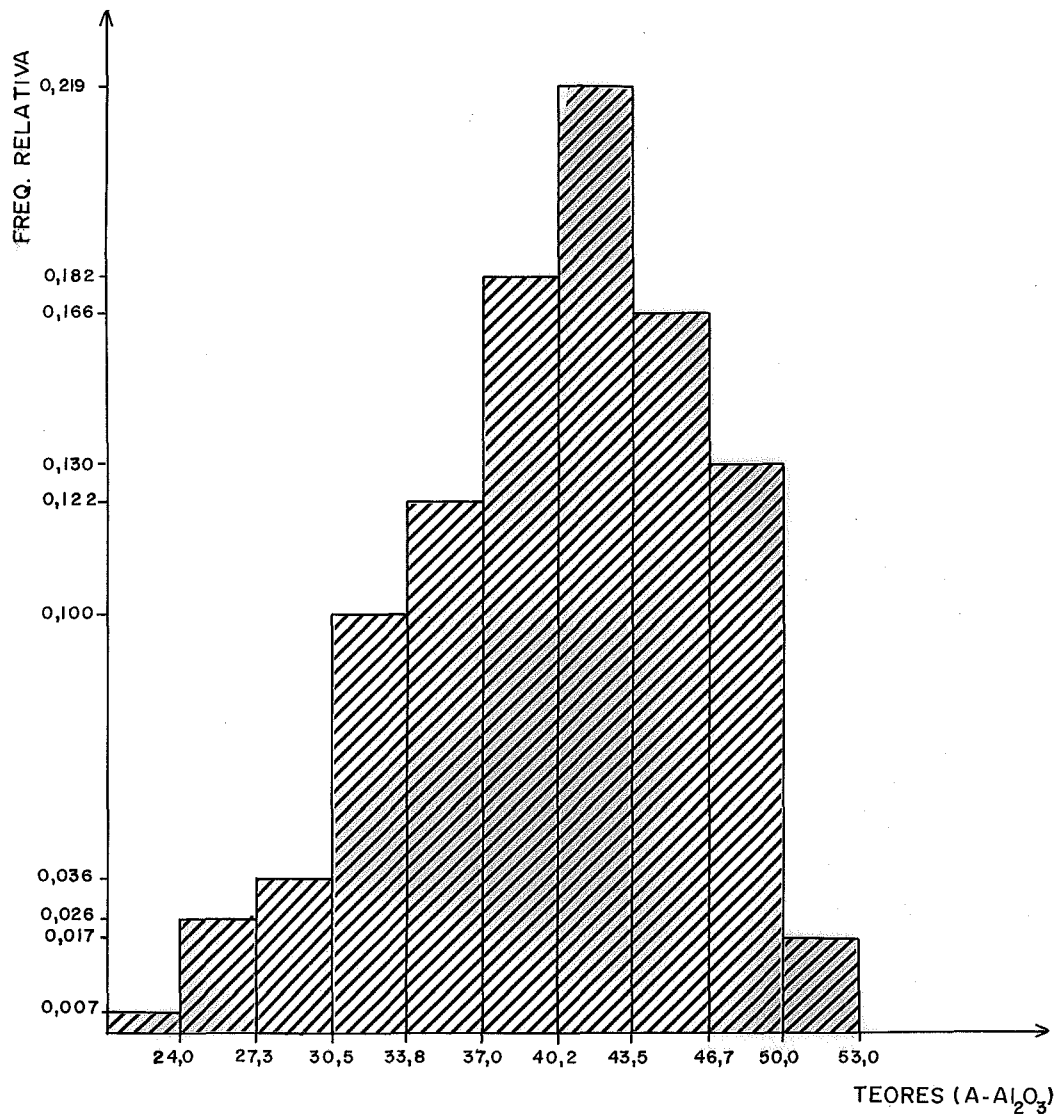
As regiões achuradas, nos mapas simulados, apresentados nas Figuras (IV.8) e (IV.9), correspondem, respectivamente, a teores  $\geq 40\%$  de A -  $Al_2O_3$  e  $\leq 5,5\%$  de R -  $SiO_2$ . Estes valores em destaque referem-se ao teor de corte praticado pela ALCOA ALUMINIO S/A.

#### IV.5.3 - Simulação Cocondicional

O método de simulação proposto por CARR e MYERS (8), descrito no Capítulo III (item III.2) é denominado cocondicional por realizar o condicionamento através da cokrigagem. A partir dos dados condicionantes e resultados da simulação não condicional, simula-se o erro  $|Z(x) - Z^*(x)|$  cometido, por cokrigagem, na avaliação de  $Z(x)$ , conforme a equação (III.77).

A utilização de tal método na realização deste trabalho, gerou os resultados apresentados a seguir. Como dados condicionantes tomou-se valores pertencentes à área considerada.

HISTOGRAMA SIMULADO  
(SIMULAÇÃO NÃO CONDICIONAL)

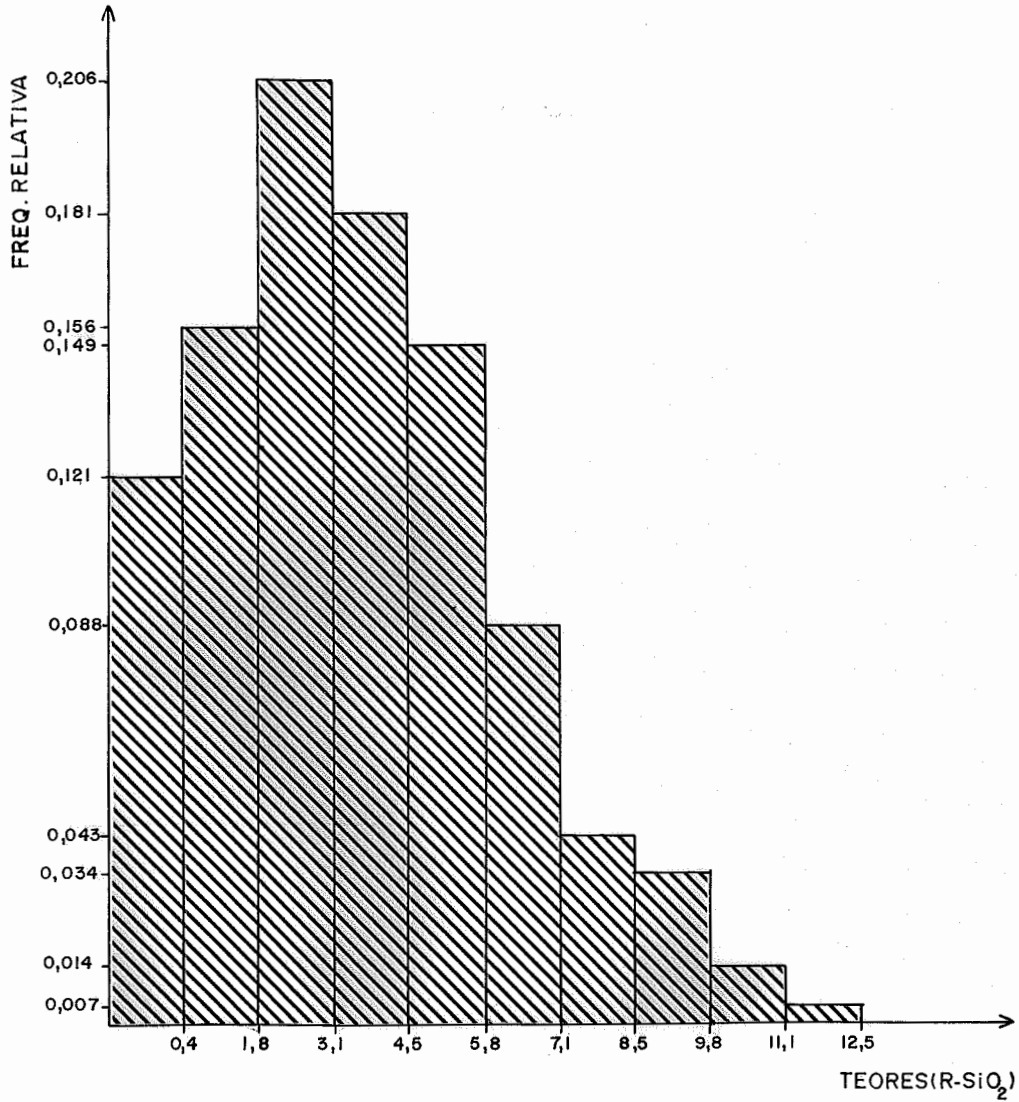


PARÂMETROS RELATIVOS A (A-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>)

MÉDIA : 43,3 %  
VARIÂNCIA : 37,0 %<sup>2</sup>  
DESVIO PADRÃO : 6,08 %  
MENOR VALOR : 24,0 %  
MAIOR VALOR : 56,0 %

FIGURA (IV.5)

HISTOGRAMA SIMULADO  
(SIMULAÇÃO NÃO CONDICIONAL)



PARÂMETROS RELATIVOS A (R-SiO<sub>2</sub>)

MÉDIA	: 4,89 %
VARIÂNCIA	: 6,91% <sup>2</sup>
DESVIO PADRÃO	: 2,63 %
MENOR VALOR	: 0,44 %
MAIOR VALOR	: 14,0 %

FIGURA ( IV.6)

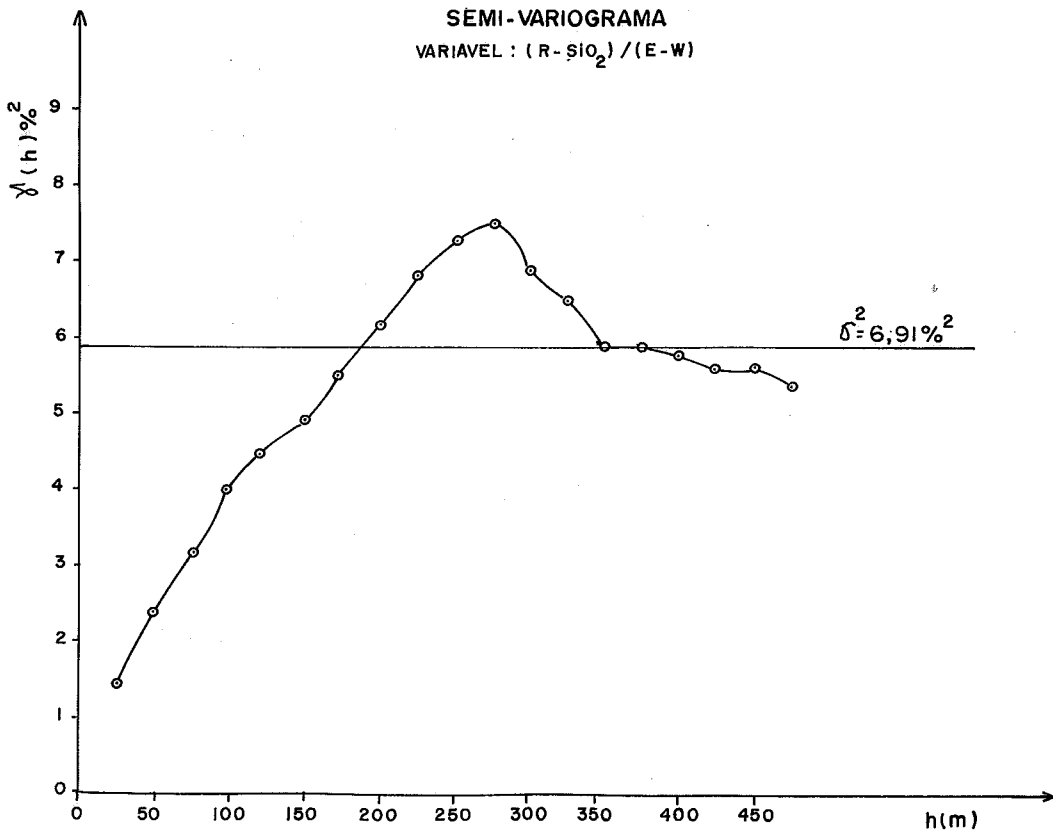
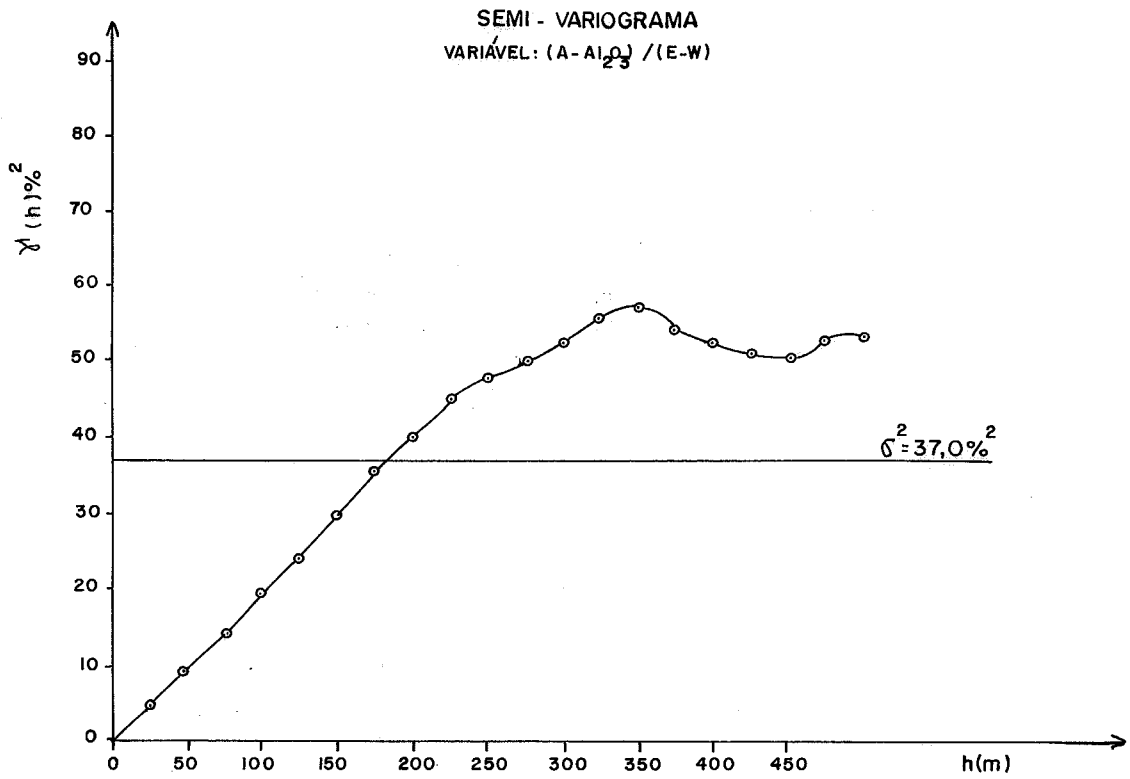
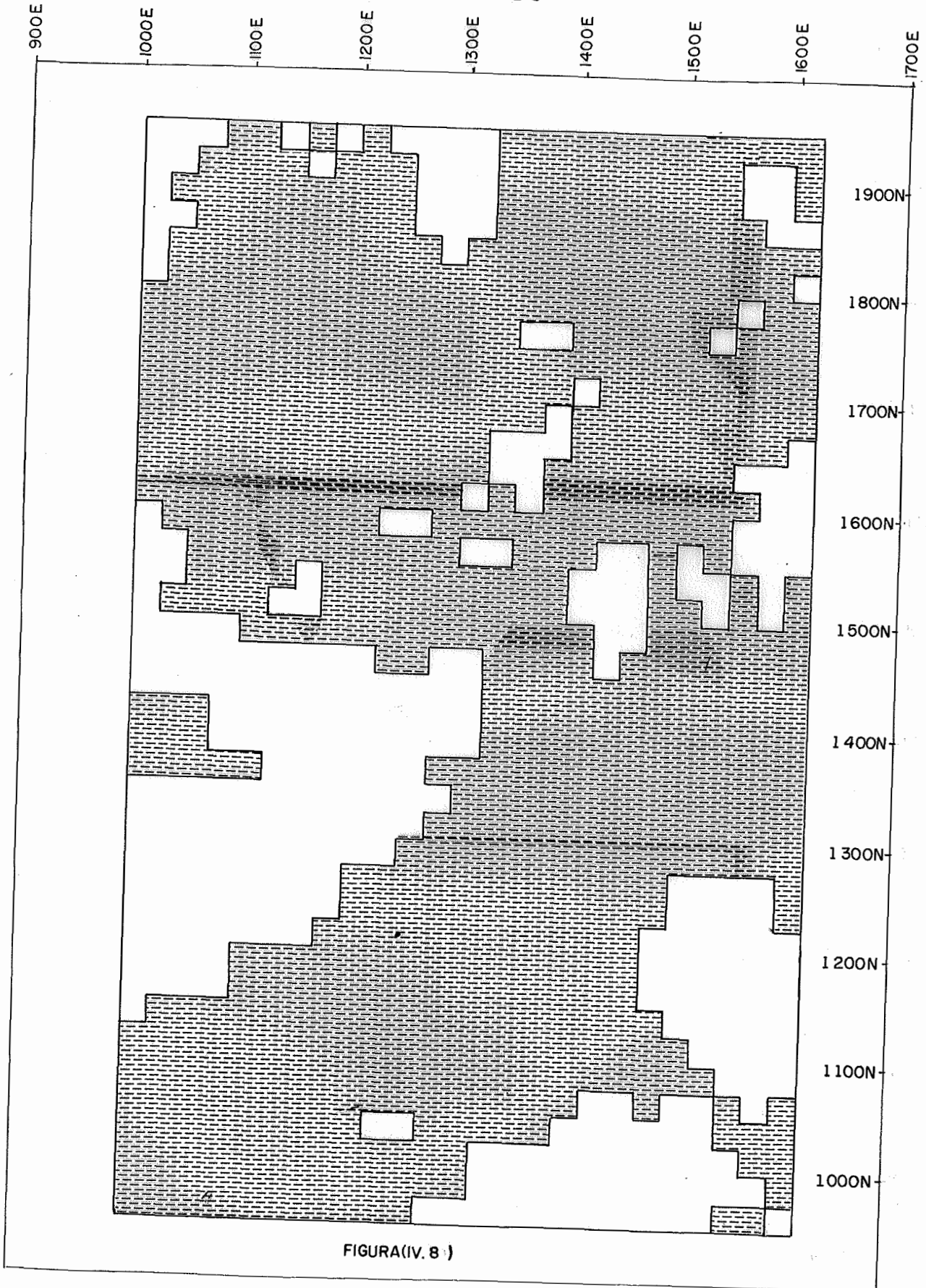


FIGURA (IV.7) - SIMULAÇÃO NÃO CONDICIONAL

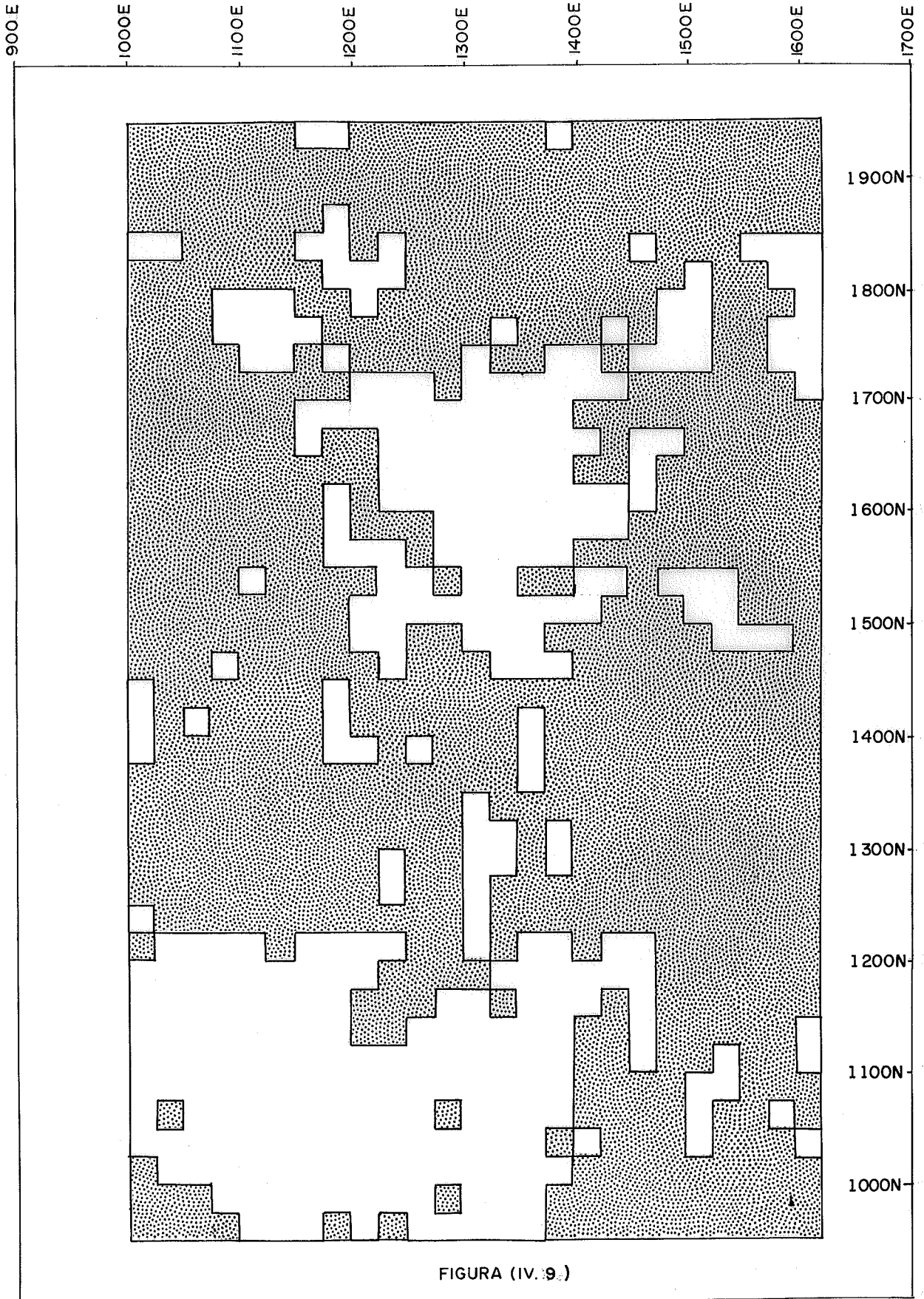
SIMULAÇÃO NÃO CONDICIONAL  
MAPA DE CONTORNO (A-  $Al_2O_3 \geq 40\%$ )



FIGURA(IV. 8 )



SIMULAÇÃO NÃO CONDICIONAL  
MAPA DE CONTORNO (R-SiO<sub>2</sub> ≤ 5,5%)



Os histogramas e parâmetros estatísticos simulados estão apresentados nas Figuras (IV.10) e (IV.11).

Os semi-variogramas simulados relativos à alumina e a sílica estão esquematizados nas Figuras (IV.12.a) e (IV.12.b) respectivamente. O semi-variograma cruzado simulado está representado na Figura (IV.12.c).

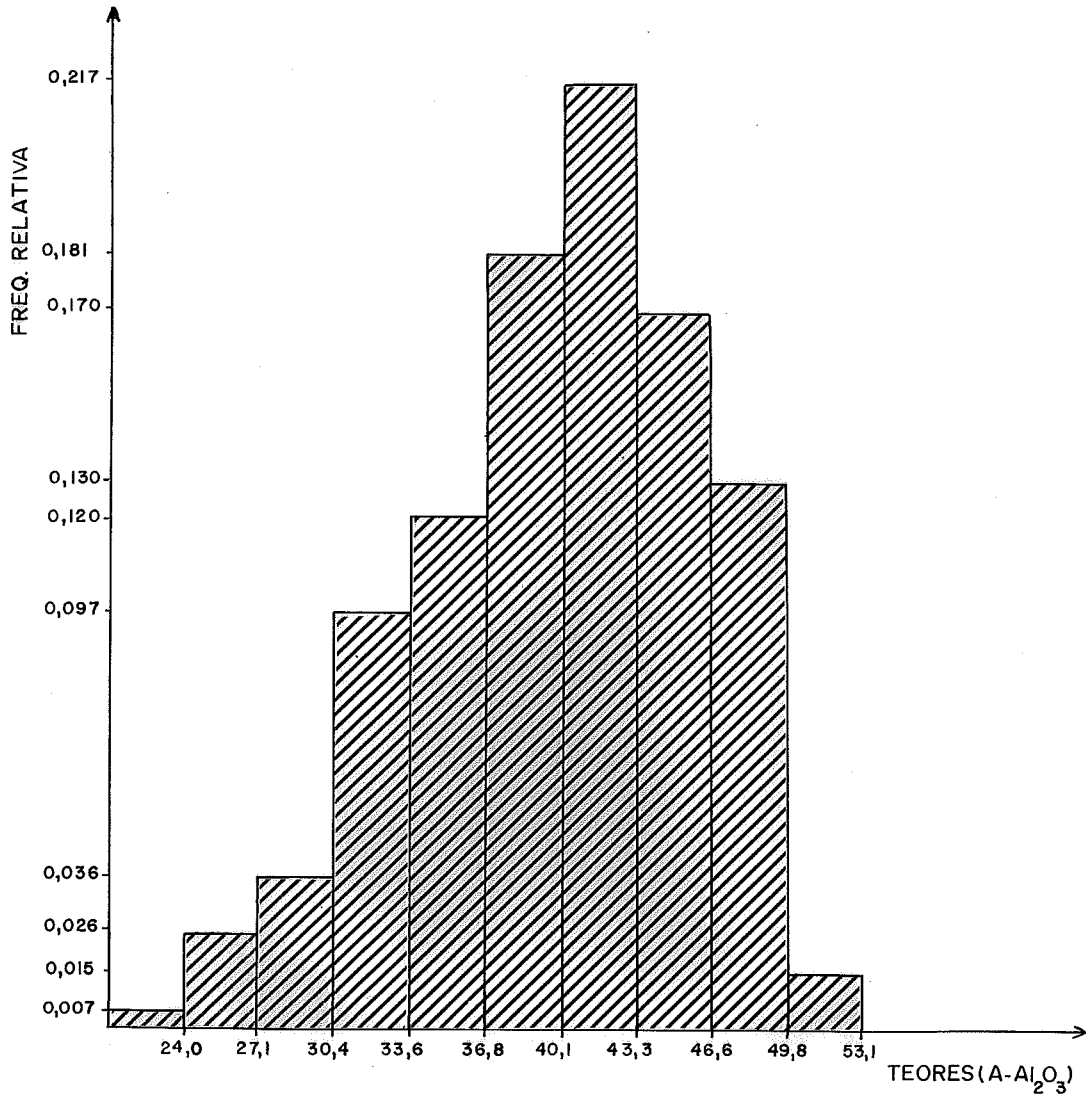
As regiões achuradas, nos mapas simulados no processo cocondicional, apresentados nas Figuras (IV.13) e (IV.14) correspondem, respectivamente, a teores de  $\geq 40\%$  de A -  $Al_2O_3$  e  $\leq 5,5\%$  de R -  $SiO_2$ .

#### IV.6 - ANÁLISE DOS RESULTADOS

Procurando estabelecer um equilíbrio entre os objetivos estabelecidos e o rigor dos resultados, foi realizado um extenso trabalho de pesquisa, permitindo gerar vários modelos numéricos para as variáveis regionalizadas em estudo e apresentar os resultados considerados mais consistentes.

As características estatísticas amostrais, apresentados em (IV.2), e as simuladas estão sintetizadas nas Tabelas (IV.8) e (IV.9). Observa-se a grande conformidade entre os valores relativos as amostras e os simulados.

HISTOGRAMA SIMULADO  
(SIMULAÇÃO COCONDICIONAL)

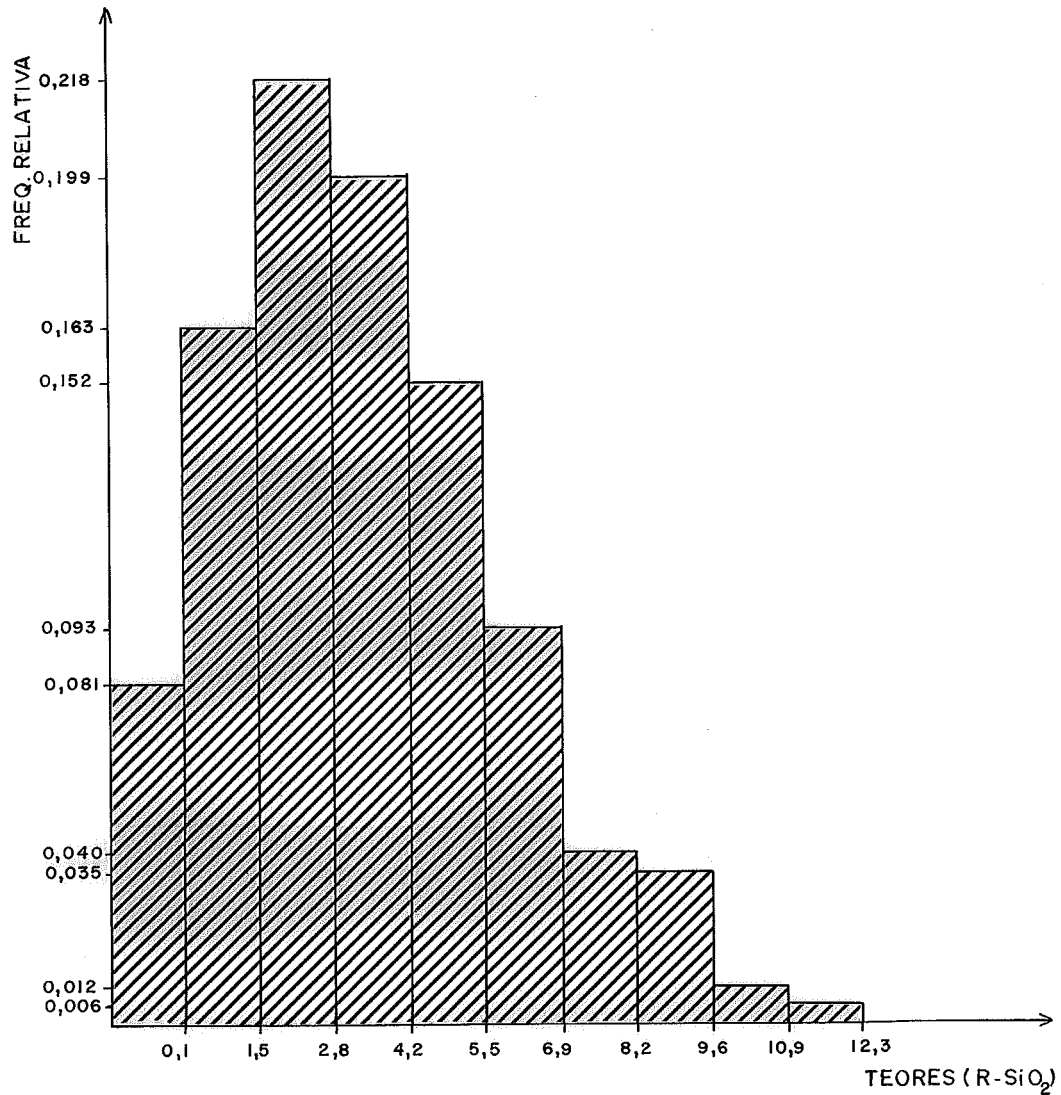


PARÂMETROS RELATIVOS A (A-Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub>)

MÉDIA : 43,2%  
VARIÂNCIA : 36,5%<sup>2</sup>  
DESVIO PADRÃO : 6,04%  
MENOR VALOR : 24,0%  
MAIOR VALOR : 56,0%

FIGURA (IV. 10)

HISTOGRAMA SIMULADO  
(SIMULAÇÃO COCONDICIONAL)



PARÂMETROS RELATIVOS A (R-SiO<sub>2</sub>)

- MÉDIA : 4,72 %
- VARIÂNCIA : 6,53%<sup>2</sup>
- DESVIO PADRÃO : 2,56%
- MENOR VALOR : 0,10 %
- MAIOR VALOR : 14,0 %

FIGURA (IV.11)

SIMULAÇÃO COCONDICIONAL  
VARIÁVEL : (A- $Al_2O_3$ ) / (E-W)

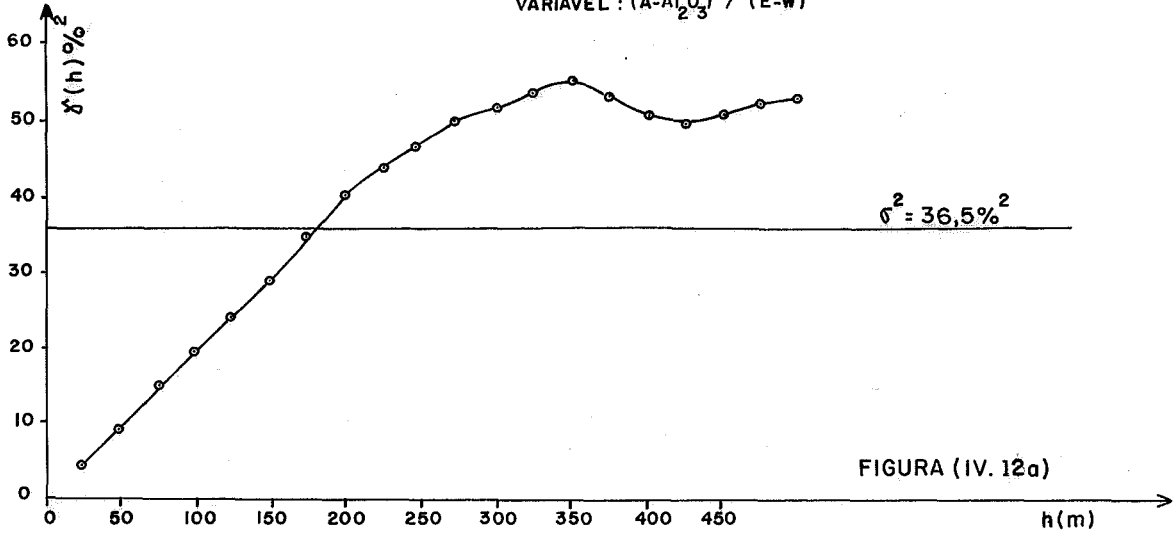


FIGURA (IV. 12a)

VARIÁVEL : (R- $SiO_2$ ) / (E-W)

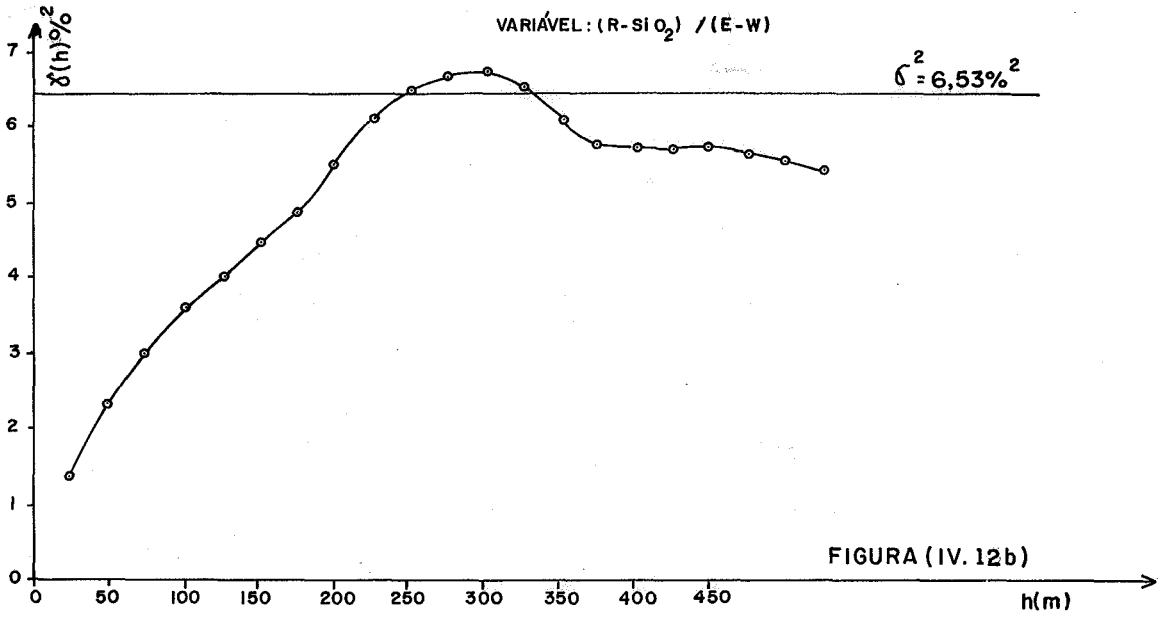


FIGURA (IV. 12b)

SEMI-VARIOGRAMA CRUZADO  
VARIÁVEIS : (A- $Al_2O_3$ ) x (R- $SiO_2$ ) / (E-W)

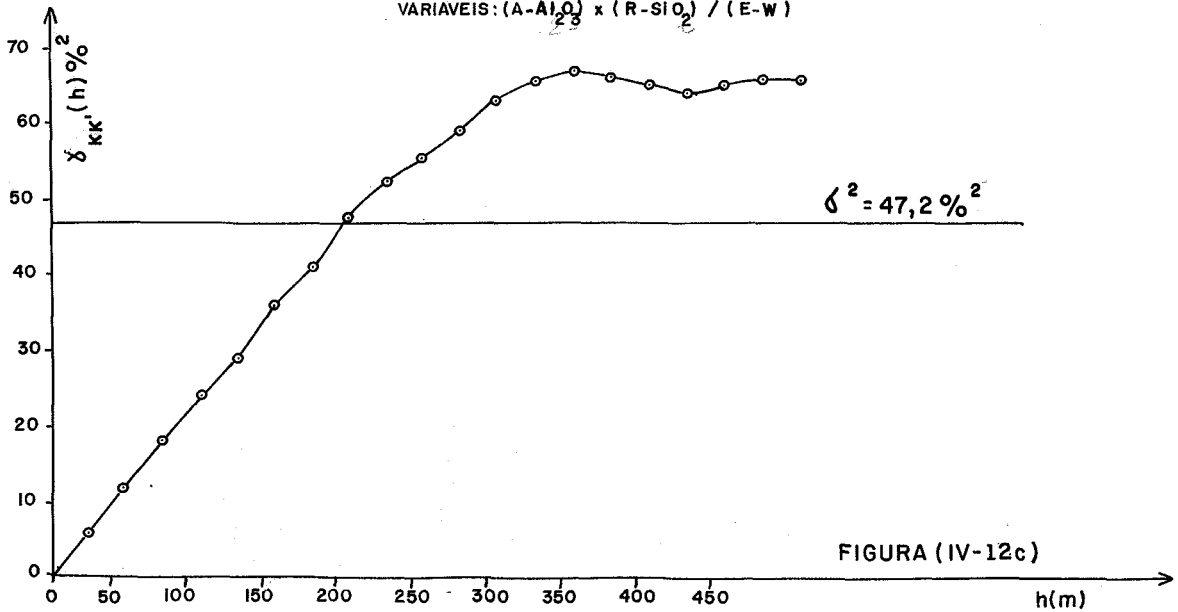


FIGURA (IV-12c)

SIMULAÇÃO COCONDICIONAL  
MAPA DE CONTORNO (A- $Al_2O_3 \geq 40\%$ )

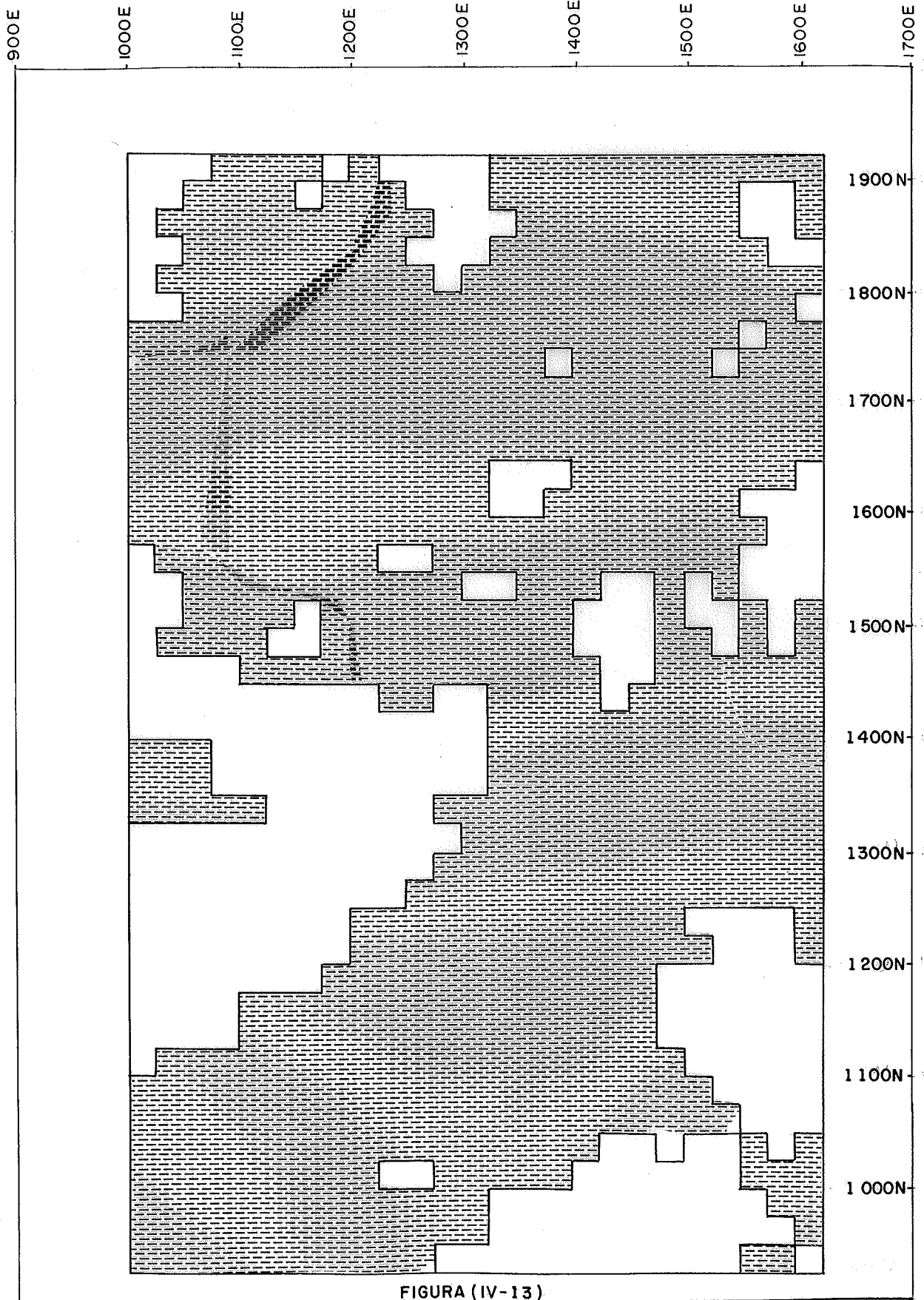


FIGURA (IV-13)

SIMULAÇÃO COCONDICIONAL  
MAPA DE CONTORNO (R-SiO<sub>2</sub> ≤ 5,5 %)

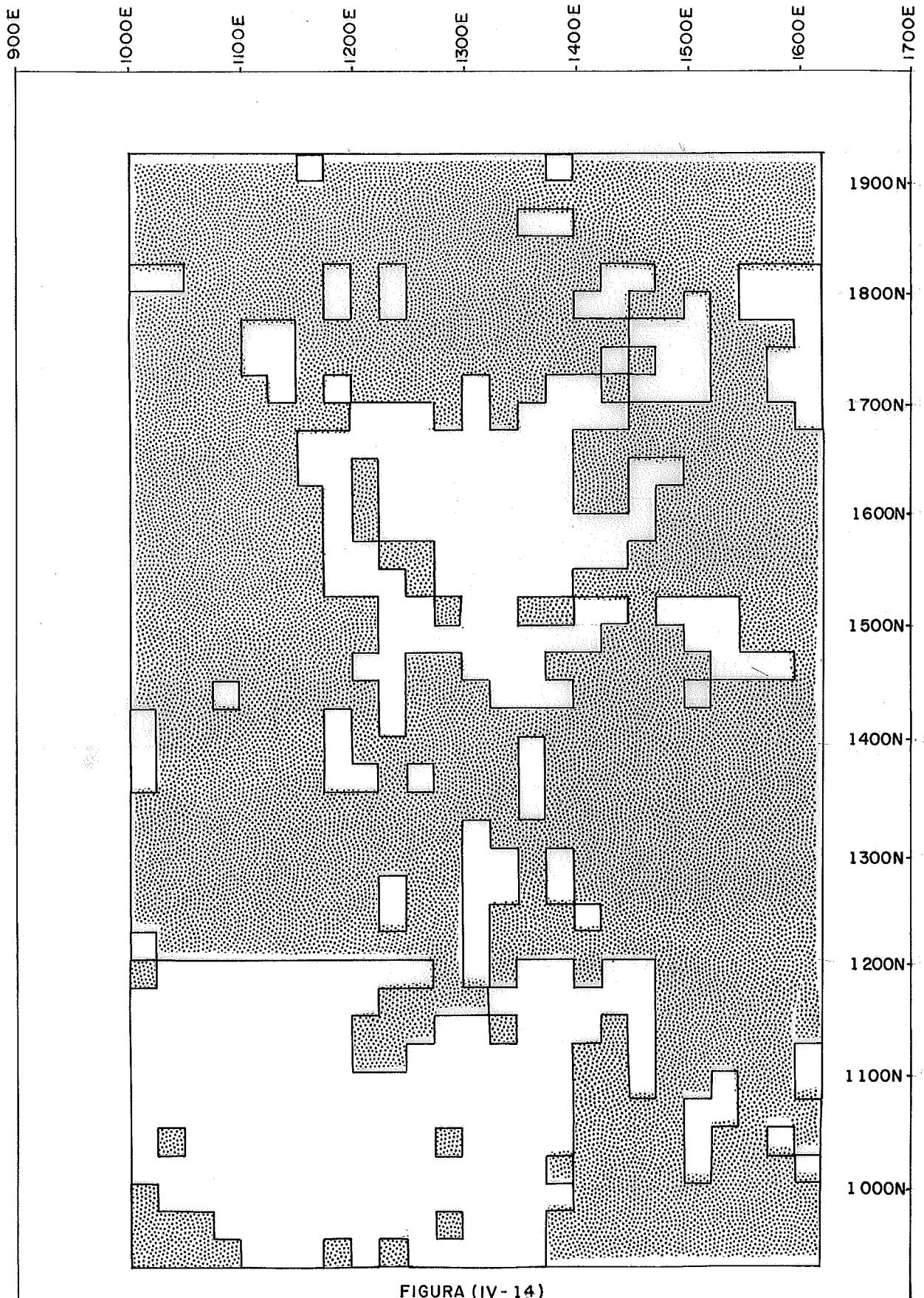


FIGURA (IV-14)

TABELA (IV.8)

PARÂMETROS RELATIVOS A A - Al <sub>2</sub> O <sub>3</sub>				
	MÉDIA (%)	VARIÂNCIA (% <sup>2</sup> )	TEOR (%)	
			MÍNIMO	MÁXIMO
Amostras	43,37	36,11	26,60	51,10
S. não condicional	43,30	37,00	24,00	56,00
S. cocondicional	43,20	36,5	24,00	56,00

TABELA (IV.9)

PARÂMETROS RELATIVOS A R - SiO <sub>2</sub>				
	MÉDIA (%)	VARIÂNCIA (% <sup>2</sup> )	TEOR (%)	
			MÍNIMO	MÁXIMO
Amostras	4,89	7,04	0,10	14,00
S. não condicional	4,91	6,91	0,44	14,00
S. cocondicional	4,72	6,53	0,10	14,00



Analisando os histogramas experimentais e os simulados, pode-se concluir que a simulação, para ambas as variáveis, tanto não condicional quanto cocondicional, retrata, de forma fiel, propriedades relevantes da realidade.

Comparando os semi-variogramas experimentais e os simulados (Figuras IV.4, IV.7, IV.12), nota-se que as estruturas espaciais não foram perfeitamente reproduzidas pelo modelo, porém, observou-se no decorrer do trabalho que existe uma tendência de reproduzir o modelo ajustado à realidade.

Do exposto, pode-se concluir que a simulação efetuada representa grande contribuição para a definição de um modelo final que retrate, fielmente, a jazida de bauxita da Alcoa Alumínio S. A. Para tal finalidade são necessárias investigações mais exaustivas, logicamente, considerando todas as informações.

Finalmente, remete-se ao leitor alguns textos, ALFARO (2), CHILES (12) e (13), DAGBEART (17), DAVID et alii. (19), DE-RAISME e FOUQUET (20), ISAAKS (24), JOURNEL (25), KRIGE (29), MYERS (33), SOUSA (30) e (40), destinados a solução de problemas complexos da indústria mineral, que detalham uma série de aspectos teóricos e práticos da metodologia da simulação geostatística.

BIBLIOGRAFIA

- (1) ABREU, S. F. - *Recursos Minerais do Brasil*. 2 ed., São Paulo, Editora Edgard Blucher Ltda., (1978).
- (2) ALFARO, M. e HUIJBREGTS, C. J. - Simulation of a Subhorizontal Sedimentary Deposit. In: *International Symposium, 16<sup>th</sup>*, Goden, Colo. p. F65-77, April (1976).
- (3) ALFARO, M. - Statistical Inference of the Semi-Variograma and the Quadratic Model. In: Verly, G.: ed. et alii. *Geostatistics for Natural Resources*, Dordrecht, Reidel, (1984).
- (4) ALMEIDA, E. - *Geology of the Bauxita Depósitos of Poços de Caldas District*. Ph.D. Thesis, Stanford, Stanford University, (1977).
- (5) BATEMAN, A. M. - *Economic Mineral Deposits*. 2.ed. New York, John Wiley, (1950).
- (6) BRAGA, L. P. V. - *Mapping Techniques Using Universal Kriging*. Montreal, Department d'Informatique et de Recherche Operationnelle, Université de Montreal, (1982). Publication , 453.
- (7) BRAGA, L. P. V. - *Aplicações das Teorias de Estimação e Interpolação em Cartografia: Um Programa Gerador de Curvas Isoladores*, Tese de Doutorado, Rio de Janeiro, COPPE/En-

nharia de Sistemas e Computação, (1984).

- (8) CARR, J. R. e MYERS, D. E. - A FORTRAN IV Program for Conditional Simulation, *Computers & Geosciences*, V. 11, nº 6, p. 675-705, (1985).
- (9) CARR, J., MYERS, D. E. e GLESS, C. H. - Cokrigagem: A Computer Program, *Computers & Geosciences*, V. 12, nº 2, p. 111-127, (1985).
- (10) CARR, J. R. e PREZBINDOWSKI, R. A. - An Application of Conditional Simulation of Petroleum Exploration, *Computers & Geosciences*, V. 12, nº 4B, p. 477-483, (1986).
- (11) CHAVES, H. A. F. - *Mapas Batimétricos, Problemas de Construção e Análise Automática*. Tese de Mestrado, Rio de Janeiro, PUC/Departamento de Informática, (1978).
- (12) CHILES, J. P. - *Geostatistique des Phénomènes non Stationnaires*. These Docteur-Ingenieur, Université de Nancy, (1977).
- (13) CHILES, J. P. - Simulation of a Nickel Deposit: Problems Encountered and Practical Solutions. In: Verly, G.: ed. *et alii. Geostatistic for Natural Resources Characterization*, Dordrecht, Reidel, (1984).

- (28) JOURNEL, A. G. e HUIJBREGTS, C. J. - *Mining Geostatistics*. London, Academic Press, (1978).
- (29) KRIGE, D. G. - *Lognormal-de Wijsian Geostatistics for One Avaluation*, Jo.annesburg, South Africa, Institute of Mining and Metallurgi, (1981).
- (30) LEINZ, V. e AMARAL, S. E. - *Geologia Geral*. 5 ed. São Paulo, Companhia Editora Nacional, (1973).
- (31) MATHERON, G. - *The Theory of Regionalized Variables and its Applications*. Paris, Les Cahiers du Centre de Morfholo-gie Matematique de Fontaineble, (1971).
- (32) MOSTELLER, F. e TUKEY, I. W. - *Data Analisis and Regression; a second course in statistics*. London, Addison-Wesley Publ. Co., (1977).
- (33) MYERS, D. E. - Estimation of Linear Combinations and Cokri-gin, *Mathematical Geology*, V. 15, p. 633-637, (1983).
- (34) NEYMAN, J. - *University of California Publication in Statis-tics*, University of California, (1954).
- (35) OLEA, R. A. - Optimal Contour Mapping Using Universal Kri-ging", *Journal Geophysical Research*, Vol. 79, nº 5, p. 695-702, (1974).

- (14) CHOU, Y. - *Statistical Analysis*. New York, Halt, Rinehart and Winston, (1975).
- (15) CORTEZ, L. P. e PEREIRA, H. G. - Interpretação Geo-Estrutural por Análise Variográfica de Jazigos Itabiríticos de Cassinga. In: CHILAGE, 2, Caracas, (1973).
- (16) DAGBERT, M. - The Use of Simulated Spatially Distributed Data in Geology, *Computers & Geosciences*, V. 6, p. 179-192, (1980).
- (17) DAGBERT, M. - Simulation and Mapping of Spaci-Dependent Data in Geology, *Bulletin of Canadian Petroleum Geology*, V. 29, nº 29, p. 267-276, June, (1981).
- (18) DAVID, M. - *Geostatistical Ore Reserve Estimation*. Amsterdam, Elsvier, (1977).
- (19) DAVID, M., DAGBERT, M., SERGERIE, G. e CUPCIC, F. - Complete Simulation of the Tonnage, Shape and Grape of a Saskatchewan Uranium Deposit, Methodology and Problem. In: International Geological Congress, Moscow, August, (1984).
- (20) DERAISME, J. e FOUQUET, C. - Recent and Future Developments of "Downstream" Geostatistics. In: Verly, G.: ed et alii. *Geostatistics for Natural Resources Characterization*, Dordrecht, Reidel, (1984).

- (21) DOWD, P. A. - The Conditional Simulation of Regionalized Variables. In: Seminário de Geomatemática, 1, Lisboa, CVRMUL, p. 225-234, (1977).
- (22) ÉRRICO, J. C. D. - Estimacão de Reservas de Bauxita por Mtos Geoestatísticos. In: Congresso de Minerao, 1, Brasília, Julho (1985). *Trabalhos Técnicos*. Brasília, IBRAM, julho, V. 1, p. 17-31.
- (23) GUERRA, P. A. G. e SALLES, J. J. C. - Amostragem e Cálculo de Reserva em Jazida de Baixo Teor. In: *Seminário sobre Geologia e Tecnologia Mineral do Ouro*, Salvador, DOCEGEO, (1985).
- (24) ISAACS, E. H. - Indicator Simulation: Application to the Simulation of a High Grade Uranium Mineralization. In: Verly, G.: ed et alii. *Geostatistics for Natural Resources*, Dordrecht, Reidel, (1984).
- (25) JOURNEL, A. G. - Simulation de Gisements Miniers, *Industrie Minerale-Mine*, p. 221-226, Novembre, (1973).
- (26) JOURNEL, A. G. - *Simulations Conditionnelles de Gisements Miniers*. These Docteur-Ingenieur, Universit de Nancy, (1974).
- (27) JOURNEL, A. G. - Geostatistics for Conditional Simulation of Ore Bodies, *Economic Geology*, V. 69, p. 673-687, (1974).

- (36) PEREIRA, H. J. F. G. - *Análise Estrutural e seus Reflexos na Avaliação Econômica de Recursos Minerais*, Tese de Doutorado, Lisboa, Instituto Superior Técnico, (1981).
- (37) RENDU, J. M. - *An Introduction to Geostatistical Methods of Mineral Evaluation*. Johannesburg, South African, Institute of Mining and Metallurgy, (1978).
- (38) SKINNER, B. J. - *Recursos Minerais da Terra*, São Paulo, editora Edgard Blucher Ltda., (1970). Série de textos básicos de Geociência.
- (39) SOUSA, J. - *Simulação de Funções Aleatórias Estacionárias*. In: *Encontros sobre Métodos Quantitativos Aplicados às Variáveis Regionalizadas*, Lisboa, INIC, (1983).
- (40) SOUSA, J. - *Aplicação da Simulação Condicional a uma Jazida de Ferro*. In: *Encontros sobre Métodos Quantitativos Aplicados às Variáveis Regionalizadas*, Lisboa, INIC, (1983).
- (41) TULCANAZA, E. - *Geostatistics for Block Caving*. E & MJ., p. 59-62, April, (1985).
- (42) VALENTE, J. M. G. P. - *Geomatemática*, Lições de Geoestatística, Ouro Preto, Fundação Gorceix, V. 1, (1982).
- (43) VALENTE, J. M. G. P. - *Geomatemática*, Lições de Geoestatística, Ouro Preto, Fundação Gorceix, V. 3, (1982).

(44) VALENTE, J. M. G. P. - *Geomatemática*, lições de Geoestatística, Ouro Preto, Fundação Gorceix, V. 4, (1982).

(45) VALENTE, J. M. G. P. - *Geomatemática*, lições de Geoestatística, Ouro Preto, Fundação Gorceix, V. 7, (1982).