PROGRAMAÇÃO FRACIONÁRIA LINEAR EM VARIÁVEIS BIVALENTES: UMA CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DE ALGORITMOS

Marcone Jamilson Freitas Souza

Tese submetida ao Corpo Docente da Coordenação dos Programas de Pós-Graduação de Engenharia da Universidade Federal do Rio de Janeiro como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Ciências em Engenharia de Sistemas e Computação.

Aprovada por:

Prof. Nelson Maculan Filho, Ph.D.
(Presidente)

Profª. Dina Feigenbaum Cleiman, Ph.D.

Prof. Geraldo Galdino de Paula Júnior, D.Sc.

Rio de Janeiro, RJ - Brasil
Outubro de 1989

SOUZA, MARCONE JAMILSON FREITAS

Programação Fracionária Linear em variáveis bivalentes: uma contribuição ao estudo de algoritmos. [Rio de Janeiro] 1989.

VIII, 80 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1989).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Programação Fracionária Linear; Programação Inteira

I. COPPE/UFRJ. II. Título (Série).

À Cássia,
minha esposa.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Nelson Maculan, pela proposição do tema e orientação no desenvolvimento deste trabalho.

Ao Prof. Marcos Augusto dos Santos, pela concessão de seu *kit* de Programação Linear (PROLIN), permitindo-nos alterá-lo livremente.

Ao Departamento de Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto, pela oportunidade concedida e pelo voto de confiança em mim depositado.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Mestre em Ciências (M. Sc.).

PROGRAMAÇÃO FRACIONÁRIA LINEAR
EM VARIÁVEIS BIVALENTES: UMA CONTRIBUIÇÃO
AO ESTUDO DE ALGORITMOS

Marcone Jamilson Freitas Souza
Outubro de 1989

Orientador: Nelson Maculan Filho
Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Este trabalho pesquisa algoritmos que solucionam problemas de Programação Fracionária Linear em variáveis 0-1, quer diretamente, quer indiretamente. É dada ênfase aos procedimentos pertencentes a essa primeira classe. Um algoritmo de enumeração implícita é apresentado e restrições substitutas são introduzidas visando acelerar o processo de enumeração das soluções parciais. Todos os algoritmos analisados são implementados. Algumas comparações de desempenho são feitas.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Master of Science (M.Sc).

0-1 LINEAR FRACTIONAL PROGRAMMING:
A CONTRIBUITION TO THE ALGORITHMS' STUDY

Marcone Jamilson Freitas Souza
October, 1989

Thesis Supervisor: Nelson Maculan Filho
Departament: Systems Engineering and Computing

This work researches algorithms that solves 0-1 Fractional Linear Programming, either directly or indirectly. Special emphasis is given to the procedures belonging to this first class. An Implicit Enumeration Algorithm is presented and surrogate constraints are introduced aiming to speed up the process of the partial solutions' enumeration. All the analized algorithms are implemented. Some performance comparisons are made.

ÍNDICE

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

I.1) Motivação

Em Pesquisa Operacional, sobretudo na área de Programação Inteira, busca-se, constantemente, para a solução dos problemas, métodos mais eficientes. Este trabalho vai de encontro a essa aspiração, investigando algoritmos em Programação Fracionária Linear em variáveis 0-1.

Na Literatura pesquisada observou-se que a maioria dos procedimentos existentes solucionam o problema fracionário via uma sequência de problemas lineares auxiliares e poucos o atacam diretamente. Motivado por este tratamento diferenciado, uma ênfase maior foi dada à essa última classe de algoritmos.

I.2) Organização do Trabalho

O Capítulo II apresenta, de forma geral, o problema, mostra algumas de suas aplicações e relata sobre os algoritmos existentes.

O Capítulo III aborda o caso contínuo e colhe os principais resultados a respeito das propriedades da função objetivo fracionária, bem como das condições de otimalidade do problema. Visando dar subsídios aos algoritmos do caso bivalente, dois métodos para solucionar o problema contínuo são descritos.

O Capítulo IV estuda o problema em variáveis bivalentes. Dois algoritmos que solucionam o problema indiretamente são analisados. Um algoritmo enumerativo, seguindo a linha do de GRANOT e GRANOT (1976), é apresentado. Restrições substitutas, uma no sentido de BALAS (1967), outra no sentido de GEOFFRION (1969), são introduzidas com o objetivo de acelerar o processo de enumeração das soluções parciais.

O Capítulo V mostra alguns resultados computacionais obtidos e faz uma análise comparativa entre os algoritmos implementados.

CAPÍTULO II - HISTÓRIA DA ARTE E APLICAÇÕES

II.1) Preliminares

O Problema de maximizar ou minimizar a razão entre duas funções a valores reais n(.) e d(.) sobre um subconjunto S de $\mathbb{R}^n$ é chamado comumente de Programação Fracionária ou Programação Hiperbólica.

Dado que a função objetivo n(x)/d(x) é não-linear o problema em questão poderia estar inserido no contexto da programação matemática não-linear. Contudo, as suas propriedades particulares, não comuns a programas não-lineares em geral, motivam a um estudo próprio, separado daquele.

Problemas de programação fracionária apresentam-se nas mais variadas formas. Uma delas é quando n(.) é côncavo e d(.) é convexo ou n(.) é não negativo quando d(.) não é afim sob um conjunto convexo S. Assim são os denominados programas fracionários côncavo-convexos. Outros modelos que merecem uma atenção especial devido à sua estrutura particular são os programas fracionários lineares e os programas fracionários quadráticos. Em ambos as restrições do conjunto S são afins, sendo que no primeiro n(.) e d(.) são funções afins e no segundo, quadráticas. Programas fracionários côncavo-côncavo, convexo-côncavo e convexo-convexo são exemplos de outros modelos que também aparecem. Para estes, entretanto, poucos resultados têm sido obtidos.

Programas fracionários aparecem em vários campos da ciência. A seção II.2 mostra algumas dessas aplicações. O modelo de VON NEUMANN de uma economia em expansão, formulado em 1937, é a primeira aplicação conhecida, conforme citado em SCHAIBLE (1981a). Neste modelo deseja-se maximizar o mínimo entre várias razões. Problemas que se enquadram neste formato são chamados de problemas de programação fracionária generalizada. Mesmo sendo a mais antiga aplicação conhecida, só há bem pouco tempo atrás, CROUZEIX *et alii* (1981, 1985, 1988), o problema vêm sendo exaustivamente estudado.

II.2) Aplicações

Problemas tais como a minimização da razão entre o custo total de produção e a quantidade de material produzido (ou número total de objetos produzidos), a maximização da porcentagem de ganhos em investimentos ou diversos problemas que relacionam o benefício adquirido com o custo de investimento são algumas aplicações práticas de programas fracionários. Abaixo estão ressaltados, em áreas diversas, alguns desses problemas práticos os quais, de acordo com a natureza da variável envolvida no modelo, podem ser contínuos, inteiros ou 0-1:

(i) O problema de minimizar o custo de carbono efetivo do coque, obtido a partir de uma mistura de carvões de determinada composição, considerando um horizonte com vários períodos de planejamento e restrições definidas quanto ao abastecimento de carvão, produção e consumo de coque metalúrgico, como formulado em MONNERAT (1979).

(ii) O problema dos cortes (*Cutting Stock Problem*), como mostrado em GILMORE e GOMORY (1963), quando se deseja minimizar a razão entre a quantidade desperdiçada e a usada de material;

(iii) O problema de determinar a melhor combinação de cargas a serem transportadas em um navio, em termos de maximizar a razão entre o lucro por jornada e o tempo total da jornada, como especificado em BITRAN e NOVAES (1973);

(iv) O problema do retorno do investimento em mineração, como descrito em WILLIAMS (1974), onde levando-se em consideração o custo de extração e venda, após beneficiamento, de minérios deseja-se maximizar a razão entre o lucro obtido e o investimento aplicado;

(v) O problema, aplicado à otimização de rotas de navios e aviões, de determinar um ciclo em um grafo com razão custo por tempo mínima, citado em SCHAIBLE (1981a);

(vi) O problema da otimização de consultas a Banco de Dados Bibliográficos, como discutido em ARAGÃO (1988), onde o interesse é recuperar informações (documentos) de um BDB a partir de um certo número de palavras-chave, maximizando uma certa medida de relevância, que leva em consideração o número de informações relevantes à consulta recuperadas, as não relevantes recuperadas, as relevantes não recuperadas e o total de informações armazenadas no BDB.

A programação fracionária pode aparecer também como subproblema em programação matemática. É este o caso numa variante do Método de Decomposição Principal de DANTZIG-WOLFE, vide LASDON (1970, p.193-197), para programas lineares de grande porte. Nesses programas, quando se aplica o método primal dual ao programa principal, aparecem envolvidos na determinação do critério de saída da base, como subproblemas em cada iteração, um número finito de problemas de menor porte com função objetivo fracionária linear.

Uma lista mais exaustiva de aplicações, em áreas tais como em Teoria dos Jogos, Programação Estocástica, etc., pode ser encontrada em CRAVEN (1988), SCHAIBLE (1981a), e referências, dentre outros.

II.3) Algoritmos

Um dos primeiros algoritmos propostos para a resolução de programas fracionários foi o de ISBELL e MARLOW (1956). Nele o problema em questão, em que as funções n(.) e d(.) são afins, e as variáveis do modelo são contínuas, é solucionado através de uma sequência finita de programas com função objetivo linear em função de um certo parâmetro, sob o mesmo conjunto de restrições originais. Uma extensão para o caso de programas fracionários côncavo-convexos foi proposta por DINKELBACH (1967), reduzindo-os a uma sequência de programas côncavos.

Outro algoritmo clássico é o de CHARNES e COOPER (1962). Neste, o problema fracionário linear é transformado em um problema linear equivalente com uma restrição e uma variável adicionais. Esta transformação foi estendida por SCHAIBLE (1976a) para uma subclasse de programas fracionários côncavo-convexos, reduzindo-os à programas côncavos equivalentes.

O método de CHARNES e COOPER (1962) tem a vantagem de exigir apenas a resolução de um único programa linear ao invés de, possivelmente, vários do de ISBELL e MARLOW (1956). Sua desvantagem é que, devido à transformação efetuada, a região viável é modificada. Assim, por exemplo, se usado na resolução dos subproblemas que aparecem na variante do Método da Decomposição Principal de DANTZIG-WOLFE; faz-se necessário a aplicação da 1ª fase do método SIMPLEX, para cada subproblema. Esta perda da estrutura do programa principal não ocorreria se o método usado fosse o de ISBELL e MARLOW (1956), já que, nesse método, usado nessas circunstâncias, uma solução viável inicial está sempre disponível. Outro exemplo no qual esta desvantagem se manifesta é quando a matriz das restrições do problema é unimodular.

Similares ao de ISBELL e MARLOW (1956) e que se inspiram nas propriedades da função objetivo do problema auxiliar do programa fracionário são os procedimentos BINARY, DIRECT TRACE, INTBIN, MODBIN e OUTER descritos em IBARAKI (1981, 1983) e o algoritmo de MEGGIDO (1979), dentre outros. Esses algoritmos diferem entre si, basicamente, pela forma de determinação do parâmetro do problema auxiliar. IBARAKI (1983) destaca o método de pesquisa binária modificado, MODBIN, por causa de sua convergência superlinear e de sua capacidade de fornecer um intervalo explícito para o valor ótimo do problema.

O algoritmo de FRANK e WOLFE (1956), que originalmente destinava-se a programas não lineares convexos, é outro que também pode ser utilizado, vide MARTOS (1975, p.240-245) e CRAVEN (1988, p.95-98), para resolver programas fracionários côncavo convexos os quais têm função objetivo pseudomonotônica. Nesse algoritmo o ótimo é determinado iterativamente através da linearização sucessiva do problema, sendo que os coeficientes da função objetivo linear dos problemas gerados representam o gradiente da função objetivo fracionária no ponto (vértice) gerado na iteração anterior.

BITRAN e NOVAES (1974) propõem, com um tratamento diferente, um interessante algoritmo iterativo finito para programas fracionários lineares similar ao de FRANK e WOLFE (1956), diferindo deste na determinação de uma solução viável inicial e na forma da função objetivo dos problemas auxiliares. A solução viável inicial nesse algoritmo não é um vértice qualquer da região viável, como naquele, mas sim um ponto extremo pertencente aos hiperplanos que são paralelos ao hiperplano ortogonal àquele definido pelos pontos cujo denominador, da função objetivo fracionária, são nulos. Espera-se com isso, segundo eles, a obtenção de um vértice próximo do ótimo e consequentemente, uma diminuição do número de iterações (problemas auxiliares) necessários à obtenção do ótimo.

Tanto nos algoritmos de FRANK e WOLFE (1956), BITRAN e NOVAES (1974), ISBELL e MARLOW (1956) e similares quanto no de CHARNES e COOPER (1962) o problema fracionário é resolvido indiretamente, no sentido de que sua solução é obtida por intermédio de problemas auxiliares. Há, no entanto, algoritmos que atacam o programa fracionário diretamente. Este é o caso dos métodos de GILMORE e GOMORY (1963), MARTOS (1964) e SWARUP (1965), os quais são baseados no método SIMPLEX de programação linear. WAGNER e YUAN (1968) observam, entretanto, que esses métodos são algoritmicamente equivalentes ao de CHARNES e COOPER (1962), resolvido pelo SIMPLEX, no sentido em que eles guiam a uma sequência idêntica de operações de pivotação.

No âmbito das variáveis inteiras alguns dos algoritmos existentes derivam, com poucas modificações, daqueles do caso contínuo. Assim são os algoritmos de ANZAI (1974) e GRUNSPAN e THOMAS (1973), baseados em ISBELL e MARLOW (1956), e o de MICHELON e MACULAN (1988), adaptado de FRANK e WOLFE (1956).

ISHII *et alii* (1977) trabalham com uma classe especial de problemas, os programas fracionários da mochila. O algoritmo apresentado explora o fato de que boas soluções viáveis são facilmente obtidas tanto para o programa fracionário da mochila quanto para os programas lineares da mochila auxiliares e se preocupa apenas em obter soluções subótimas, em lugar das ótimas, nos problemas intermediários. O algoritmo tem uma eficiência computacional, segundo eles, não inferior ao de ISBELL e MARLOW (1956) aplicado diretamente a problemas inteiros.

BITRAN e MAGNANTI (1976) desenvolveram um algoritmo primal dual o qual, como eles observaram, pode ser empregado na resolução de programas fracionários lineares com um método *branch and bound* quando condições de integralidade são impostas às variáveis do modelo.

Já GRANOT e GRANOT (1977) usaram o método de MARTOS (1964) e desenvolveram um algoritmo primal finito semelhante ao de YOUNG de programação linear inteira. Adicionalmente, usando a transformação de CHARNES e COOPER (1962), construíram, também, dois algoritmos de planos de corte, onde cortes da forma do de GOMORY de programação linear inteira, vide MACULAN (1978), são sistematicamente gerados e aplicados durante suas execuções.

Poucos são os trabalhos voltados exclusivamente para o caso específico de variáveis 0-1. WILLIAMS (1974) faz uso de uma mudança de variáveis e, inclusive, introduz algumas delas para transformar o problema fracionário linear 0-1 em um problema linear equivalente com variáveis contínuas e bivalentes. Nessa transformação o problema linear resultante apresenta-se com 3n restrições e n+1 variáveis contínuas a mais que o problema original, do qual n é seu número de variáveis bivalentes.

FLORIAN e ROBILLARD (1971) baseiam-se em ISBELL e MARLOW (1956) e apresentam um algoritmo iterativo que otimiza uma sequência de programas lineares 0-1. Assim também procedem HASHIZUME *et alii* (1987) mas com um algoritmo aproximado, dado o grande esforço computacional, normalmente frequente, envolvido na determinação exata dos problemas auxiliares. Eles propõem um algoritmo ε-aproximado que resolve os problemas auxiliares apenas aproximadamente e obtêm uma solução ótima com função objetivo diferindo da ótima em um valor inferior a uma constante positiva ε.

GRANOT e GRANOT (1976) desenvolvem um método de enumeração implícita que, ao contrário dos anteriores, se aplica diretamente ao programa fracionário linear bivalente. O algoritmo usa restrições substitutas tal como em BALAS (1967) e GEOFFRION (1969) para fortificar os testes de viabilidade binária e de *poda* das várias soluções parciais.

SAIPE (1975) propõe um método do tipo *branch and bound* para o caso em que a função objetivo é a soma de várias razões lineares. ARAGÃO (1988) estuda um problema análogo, porém sem restrições, e apresenta, também, algoritmos do tipo *branch and bound*. Nesses algoritmos aparecem como subproblemas gerados os problemas fracionários com uma única razão. ARAGÃO (1988) propõe um algoritmo para resolvê-los e objetivando economia de esforço computacional, já que nos algoritmos de pesquisa arborescentes apresentados os subproblemas *diferem entre si somente pela fixação de* variáveis, faz um estudo de análise de sensibilidade do ótimo à fixação de variáveis, propondo um algoritmo para restabelecer o ótimo quando este é modificado.

CAPÍTULO III - PROGRAMAÇÃO FRACIONÁRIA LINEAR EM VARIÁVEIS CONTÍNUAS

III.1) Preliminares

Objetiva-se neste capítulo estudar as condições de otimalidade do problema fracionário linear ressaltando suas propriedades básicas. Além disso, faz-se um estudo, dentre os métodos existentes para o caso contínuo, apenas daqueles que são de interesse aos algoritmos analisados no CAP.IV, que retrata o caso bivalente.

III.2) Definição do Problema

O problema de programação fracionária linear, algumas vezes aqui chamado simplesmente de programação hiperbólica, em variáveis contínuas, pode ser formulado como:

$$(\overline{PH}) \quad \begin{array}{ll} \text{maximizar} & f(x) = \dfrac{c_0 + c^t x}{d_0 + d^t x} \\ \text{sujeito a :} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

onde $c_0, d_0 \in \mathbb{R}$; $c, d, x \in \mathbb{R}^n$; $b \in \mathbb{R}^m$ e $A = (a_{ij})_{m\times n}$.

<u>Hipótese</u> <u>III.1</u>: O conjunto $S = \{ x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0 \}$ é limitado, não vazio e tal que: $S \cap \{x \in \mathbb{R}^n : d_0 + d^t x = 0\} = \emptyset$.

Excluem-se de análise, portanto, os pontos para os quais f não está definida. Assim, como $S \neq \emptyset$ e limitado, uma solução ótima finita existe.

<u>Definição</u> <u>III.1</u>: Seja $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$. Um conjunto X diz-se convexo se, para cada $x_1, x_2 \in X$ tem-se : $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \in X$ com $0 \leq \alpha \leq 1$.

<u>Proposição</u> <u>III.1</u>: O conjunto $S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}$ é convexo.

Prova:

Sejam x_1, $x_2 \in S$ e $0 \leq \alpha \leq 1$. Logo $Ax_1 \leq b$, $Ax_2 \leq b$ e x_1, $x_2 \geq 0$. Deve ser provado que $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ com $0 \leq \alpha \leq 1$ também pertence a S.

De fato, $Ax = A(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha Ax_1 + (1 - \alpha)Ax_2 \leq \alpha b + (1 - \alpha)b = b$, ou seja, $Ax \leq b$. Observe também que $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2 \geq 0$ dado que x_1, x_2, α, $1 - \alpha \geq 0$. ∎

O resultado seguinte mostra que há unicidade de sinal do denominador de f se este não se anular em S.

Proposição III.2: No problema $(\overline{PH})$, sob hipótese III.1, tem-se: $d_o + d^t x > 0 \;\; \forall x \in S$ ou $d_o + d^t x < 0 \;\; \forall x \in S$.

Prova: BAZARAA e SHETTY (1979, p - 472)

Observe inicialmente que, pela Proposição III.1, S é convexo, o que garante que qualquer combinação convexa de pontos de S também pertence a S.

A demonstração é feita por absurdo, isto é, supõe-se que se $d_o + d^t x \neq 0 \;\; \forall x \in S$ então $d_o + d^t x > 0 \;\; \forall x \in S$ ou $d_o + d^t x < 0 \;\; \forall x \in S$ não se verifica. Logo, existem $x_1, x_2 \in S$ tais que $d_o + d^t x_1 > 0$ e $d_o + d^t x_2 < 0$ e, portanto, para alguma combinação convexa x de x_1 e x_2, $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$ com $0 \leq \alpha \leq 1$, deve-se ter, por continuidade, $d_o + d^t x = 0$, o que é uma contradição. ∎

Seja $(\overline{PH}^+)$ o problema $(\overline{PH})$ com denominador estritamente positivo em S e $(\overline{PH}^-)$ o com denominador estritamente negativo.

Assim, como mostrado em ZIONTS (1968), se $(\overline{PH})$ tem solução finita então basta verificar se uma solução viável do problema tem o denominador positivo ou negativo e resolver somente $(\overline{PH}^+)$ ou $(\overline{PH}^-)$, respectivamente.

Observe, entretanto, que quando $d_o + d^t x < 0 \;\; \forall x \in S$ então multiplicar numerador e denominador de f por -1 reduz o problema $(\overline{PH}^-)$ a $\max \{-(c_o + d^t x) / -(d_o + d^t x) \; ; \; x \in S\}$ onde $-(d_o + d^t x) > 0$.

Portanto, sem perda de generalidade, será assumido que:

Hipótese III.2: $d_0 + d^t x > 0 \ \forall x \in S$.
e que, portanto, $(\overline{PH}^+)$ é o problema hiperbólico em estudo.

III.3) Propriedades da Função Objetivo Fracionária

O estudo das condições de otimalidade de $(\overline{PH}^+)$ requer, preliminarmente, certas definições, bem como o conhecimento de algumas propriedades de f.

Definição III.2: Seja $g : X \to \mathbb{R}$ onde $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto convexo. A função g diz-se estritamente quasiconvexa em X se cada $x_1, x_2 \in X$ com $g(x_1) \neq g(x_2)$ for tal que: $g(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < \text{máx}\ \{ g(x_1), g(x_2) \}$ para $0 < \alpha < 1$.
Uma função g diz-se estritamente quasicôncava se $-g$ for estritamente quasiconvexa.

Proposição III.3: A função objetivo fracionária linear do problema $(\overline{PH}^+)$ é estritamente quasiconvexa e estritamente quasicôncava em S.

Prova:

A prova é feita por contradição. Para mostrar que f é estritamente quasiconvexa supõe-se que, dados $x_1, x_2 \in S$ com $f(x_1) < f(x_2)$ tem-se $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \geq f(x_2) \ \forall \alpha \in (0,1)$.

Assim sendo, pode-se escrever:

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \frac{c_0 + c^t(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)}{d_0 + d^t(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)} \geq \frac{c_0 + c^t x_2}{d_0 + d^t x_2}$$

E como $d_0 + d^t x > 0 \ \forall x \in S$:

$$c_0 d_0 + d_0 c^t(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) + c^t(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)d^t x_2 + c_0 d^t x_2 \geq c_0 d_0 + c_0 d^t(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) + d_0 c^t x_2 + c^t x_2 d^t(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2).$$

Desenvolvendo-se cada membro da desigualdade anterior e simplificando, obtém-se:

$$\alpha d_0 c^t x_1 - \alpha d_0 c^t x_2 + \alpha c^t x_1 d^t x_2 \geq \alpha c_0 d^t x_1 - \alpha c_0 d^t x_2 + \alpha c^t x_2 d^t x_1.$$

Dado que $0 < \alpha < 1$ então dividir a desigualdade anterior por $\alpha > 0$ não altera seu sentido. Têm-se, então:

$$d_0 c^t x_1 - d_0 c^t x_2 + c^t x_1 d^t x_2 \geq c_0 d^t x_1 - c_0 d^t x_2 + c^t x_2 d^t x_1$$

Reordenando e adicionando $c_o d_o$ a cada membro da desigualdade acima, vem:

$c_o d_o + d_o c^t x_1 + c_o d^t x_2 + c^t x_1 d^t x_2 \geq c_o d_o + c_o d^t x_1 + d_o c^t x_2 + c^t x_2 d^t x_1$.

ou seja: $(c_o + c^t x_1)(d_o + d^t x_2) \geq (c_o + c^t x_2)(d_o + d^t x_1)$

Após dividir a desigualdade anterior por $(d_o + d^t x_1)(d_o + d^t x_2) > 0$, obtêm-se:

$$\frac{c_o + c^t x_1}{d_o + d^t x_1} \geq \frac{c_o + c^t x_2}{d_o + d^t x_2},$$

isto é, $f(x_1) \geq f(x_2)$. Mas esta conclusão é absurda pois assumiu-se $f(x_1) < f(x_2)$. Logo, dado $f(x_1) < f(x_2)$ tem-se $f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) < f(x_2)$ e, portanto, f é estritamente quasiconvexa.

A demonstração de que f é também estritamente quasicôncava é análoga e, portanto, omitida. ■

<u>Definição</u> <u>III.3</u>: Seja $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e $g: X \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em X. Uma função g diz-se pseudoconvexa se, para cada $x_1, x_2 \in X$ com $(x_2 - x_1)^t \nabla g(x_1) \geq 0$ a relação $g(x_2) \geq g(x_1)$ mantiver-se.
Uma função g diz-se pseudocôncava em X se $-g$ for pseudoconvexa.

<u>Proposição</u> <u>III.4</u>: A função objetivo fracionária linear do problema $(\overline{PH}^+)$ é pseudoconvexa e pseudocôncava sobre S.

<u>Prova</u>: BAZARAA e SHETTY (1979, p - 472)

Para mostrar que f é pseudoconvexa, observe, inicialmente, que f é contínua e diferenciável em S. Então, pela definição III.3, dados x_1, $x_2 \in S$ têm-se, sucessivamente:

$$(x_2 - x_1)^t \nabla f(x_1) = (x_2 - x_1)\frac{(d_o + d^t x_1)c - (c_o + c^t x_1)d}{(d_o + d^t x_1)^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad (x_2 - x_1)^t \cdot [(d_o + d^t x_1)c - (c_o - c^t x_1)d] \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad (c_o + c^t x_2)(d_o + d^t x_1) - (d_o + d^t x_2)(c_o + c^t x_1) \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad (c_o + c^t x_2)(d_o + d^t x_1) \geq (d_o + d^t x_2)(c_o + c^t x_1)$$

Como $d_o + d^t x \geq 0 \ \forall x \in S$, resulta, finalmente:

$$\frac{c_o + c^t x_1}{d_o + d^t x_1} \geq \frac{c_o + c^t x_2}{d_o + d^t x_2} \text{, ou seja, } f(x_2) \geq f(x_1).$$

De uma forma análoga pode-se mostrar que f também é pseudocôncava sobre S. ■

III.4) Características de Otimalidade em $(\overline{PH}^+)$

Conhecidas as propriedades básicas da função fracionária linear faz-se, agora, um estudo caracterizando o ótimo em $(\overline{PH}^+)$. Estes resultados darão pistas sobre a forma de como resolver o problema em questão.

<u>Proposição</u> <u>III.5</u>: Se $x^* \in S$ é um ótimo local de $(\overline{PH}^+)$ então x^* é também um ótimo global.

<u>Prova</u>: BAZARAA e SHETTY (1979, p - 104)

Assuma, por contradição, que se x^* é um ótimo local de $(\overline{PH}^+)$, isto é, $f(x^*) > f(x^o)$ para algum ponto $x^o \in S$ numa vizinhança de x^*, então x^* não é um ótimo global.

Neste caso, $\exists \hat{x} \in S$ com $f(\hat{x}) > f(x^*)$. De acordo com a proposição III.1, tem-se: $\alpha\hat{x} + (1 - \alpha)x^* \in S \ \forall \alpha \in (0,1)$, já que S é convexo.

Por outro lado, pela proposição III.3, f é estritamente quasicôncava. Assim, sendo $f(\hat{x}) > f(x^*)$, deve-se ter: $f(\alpha\hat{x} + (1 - \alpha)x^*) > f(x^*)$ para cada $\alpha \in (0,1)$ e, em particular, para $x^o = \alpha\hat{x} + (1 - \alpha)x^*$. Mas isto é um absurdo pois, por hipótese, x^* é um ótimo local.

Esta contradição mostra que o tal $\hat{x}$ não existe, estando a prova, portanto, completa. ■

<u>Proposição</u> <u>III.6</u>: No problema $(\overline{PH}^+)$ a função objetivo f toma seu valor ótimo em um ponto extremo (vértice) do conjunto S, se este for limitado.

<u>Prova</u>: BAZARAA e SHETTY (1979, p - 101)

De $d_o + d^t x > 0 \ \forall x \in S$ segue-se que f é contínua em S. E como este conjunto é limitado resulta, pelo conhecido Teorema de WEIERSTRASS (vide LIMA (1982, p-187)), que f tem um máximo em S.

Suponha, agora, que f atinge seu máximo, no conjunto S, no ponto x^*. Deve ser mostrado que x^* é um vértice desse conjunto.

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_k$ pontos extremos de S e assuma que $f(x^*) > f(x_j)$ para $j = 1, \ldots, k$.

É sabido, vide LASDON (1970, p - 146), que x^* pode ser representado como:

$$x^* = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j \quad ; \quad \sum_{j=1}^{k} \alpha_j = 1 \quad ; \quad \alpha_j \geq 0 \ , \ j = 1, \ldots, k.$$

Como $f(x^*) > f(x_j)$ para cada j, então:

$$f(x^*) > \max_{1 \leq j \leq k} f(x_j) = \beta$$

Considere, agora, o conjunto $S_\beta = \{x \in S : f(x) \leq \beta\}$. Já que $\max_{1 \leq j \leq k} f(x_j) = \beta$ então $f(x_j) \leq \beta \ \forall j$. Logo $x_j \in S_\beta$ para $j = 1, \ldots, k$.

S_β é convexo. De fato, sejam x_1, $x_2 \in S_\beta$. Pela definição de S_β, x_1, $x_2 \in S$, $f(x_1) \leq \beta$, $f(x_2) \leq \beta$ e, é claro, $\max\{ f(x_1), f(x_2) \} \leq \beta$. Por outro lado, sejam $\alpha \in (0,1)$ e o ponto $x = \alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2$. Pela convexidade de S, garantida pela proposição III.1, $x \in S$. Além disso, pela proposição III.3, decorre que:

$$f(x) = f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \max\{ f(x_1), f(x_2) \} \leq \beta,$$

já que f é quasiconvexa. Logo, $x \in S_\beta$ e, portanto, S_β é convexo.

Dada a convexidade do conjunto S_β então qualquer combinação convexa de pontos de S_β também pertence a S_β. Em particular,

$$x^* = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j \in S_\beta.$$

O resultado anterior implica que $f(x^*) \leq \beta$, contradizendo a hipótese. Esta contradição mostra que $f(x^*) = f(x_j)$ para algum ponto extremo x_j, $j = 1, \ldots, k$. ■

<u>Proposição III.7</u>: No problema $(\overline{PH}^+)$ seja $y \in S$ e r uma direção dada. Assuma que:

(i) $y + \lambda r \in S$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $0 < \lambda < \delta$, $\delta > 0$;

(ii) $g(0) = \left.\dfrac{df(y + \lambda r)}{d\lambda}\right|_{\lambda=0} > 0.$

Então $h(\lambda) = f(y + \lambda r)$ é uma função crescente no intervalo $0 < \lambda \leq \delta$.

<u>Prova</u>: LASDON (1970, p - 191)

De (i) e $d_o + d^t x > 0 \ \forall x \in S$, conclui-se que $h(\lambda)$ é contínua e diferenciável em $(0,\delta)$. Para h ser crescente em $(0,\delta)$ é suficiente mostrar que $g(\lambda) = dh(\lambda)/d\lambda$ é positiva nesse intervalo (LIMA (1981, p-215)).

Diferenciando g vêm:

$$g(\lambda) = \frac{df(y + \lambda r)}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda}\,\frac{c_o + c^t(y + \lambda r)}{d_o + d^t(y + \lambda r)} =$$

$$\frac{[d_o + d^t(y + \lambda r)](c_c + c^t r) - [c_o + c^t(y + \lambda r)](d_o + d^t r)}{[d_o + d^t(y + \lambda r)]^2} =$$

$$\frac{(d_o + d^t y)(c_o + c^t r) - (c_o + c^t y)(d_o + d^t r)}{[d_o + d^t(y + \lambda r)]^2}$$

Assim: $g(0) = \dfrac{(d_o + d^t y)(c_o + c^t r) - (c_o + c^t y)(d_o + d^t r)}{[d_o + d^t y]^2}$

e, portanto: $\dfrac{g(\lambda)}{g(0)} = \dfrac{(d_o + d^t y)^2}{[d_o + d^t(y + \lambda r)]^2} > 0.$

Sendo, por (ii), $g(0) > 0$, resulta, finalmente que $g(\lambda) > 0 \ \forall \lambda \in (0,\delta)$.

■

A proposição III.7 mostra que, dado um ponto extremo y e uma direção r tal que $g(0) > 0$, nenhuma maximização de f ao longo de r é necessária. Portanto, para melhorar o valor da função objetivo em $(\overline{PH}^+)$ basta mover ao longo de r tanto quanto possível, isto é, até que se encontre um ponto extremo adjacente. Evidentemente que se, em algum vértice, todas as derivadas direcionais forem não positivas então esse vértice é ótimo.

Um procedimento que faz percorrer os pontos extremos do conjunto S parece, então, indicado para resolver o problema em questão. As propriedades precedentes evidenciam, portanto, a estreita relação existente entre os programas lineares e os fracionários lineares. Desta forma, uma rotina semelhante à do SIMPLEX, com poucas modificações, pode ser usada. Nesta linha fundamentam-se os algoritmos de GILMORE e GOMORY (1963), MARTOS (1964) e SWARUP (1965). Existem, no entanto, algoritmos que atacam o problema numa outra linha, resolvendo-o indiretamente, quer transformando-o num problema linear equivalente (CHARNES e COOPER (1962)), quer solucionando-o otimizando uma sequência de problemas lineares (ISBELL e MARLOW (1956)).

Dado os objetivos desse estudo, somente esta última classe de algoritmos será analisada.

III.5) O Método de CHARNES e COOPER (1962)

Este método consiste em reduzir $(\overline{PH}^{+})$ em um problema de programação linear equivalente com uma variável e uma restrição adicionais.

A seguinte transformação de variáveis é introduzida:

$$y = tx \quad ; \quad t = \frac{1}{d_o + d^t x} \quad ; \quad t \geq 0$$

Multiplicando numerador e denominador da função objetivo fracionária por t e levando em conta a transformação acima, obtêm-se o problema de programação linear:

$$(\overline{LP}^{+}) \qquad \begin{array}{ll} \max & c^t y + c_o t \\ \text{s.a:} & Ay - bt \leq 0 \\ & d^t y + d_o t = 1 \\ & y,\ t \geq 0 \end{array}$$

$(\overline{LP}^{+})$ está relacionado a $(\overline{PH}^{+})$ por intermédio dos resultados seguintes:

<u>Proposição III.7</u>: Se em $(\overline{PH}^{+})$ o conjunto S for limitado então todo ponto viável (y,t) de $(\overline{LP}^{+})$ é tal que $t > 0$.

<u>Prova</u>: CHARNES e COOPER (1962)

Suponha, por absurdo, que $(\hat{y},0)$ satisfaz as restrições de $(\overline{LP}^{+})$. Sejam $\hat{x} \in S$, $x = \hat{x} + \mu\hat{y}$ e $\mu \geq 0$. Então $x \in S$

pois $Ax = A(\hat{x} + \mu\hat{y}) = A\hat{x} + \mu A\hat{y} \leq b$, dado que $A\hat{x} \leq b$ e $A\hat{y} \leq 0$. Além disso, $x = \hat{x} + \mu\hat{y} \geq 0$ já que $\hat{x}, \hat{y}, \mu \geq 0$. Isto significa, então, que S é ilimitado, o que contradiz a hipótese imposta a S.

■

Proposição III.8: Se (y^*, t^*) é uma solução ótima de $(\overline{LP}^+)$ então $x^* = y^*/t^*$ é uma solução ótima de $(\overline{PH}^+)$.

Prova: BAZARAA e SHETTY (1979, p - 478)

Observe que x^* é viável para $(\overline{PH}^+)$. De fato, sendo $x^* = y^*/t^*$, $y^* \geq 0$ e, conforme proposição III.7, $t > 0$, resulta que $x^* \geq 0$. Por outro lado, $Ax^* \leq b$ pois (y^*, t^*) satisfaz $Ay^* - bt \leq 0$.

Para mostrar a otimalidade de x^*, seja x tal que $Ax \leq b$ e $x \geq 0$. Se (y^*, t^*) é uma solução ótima de $(\overline{LP}^+)$ então para todo (y,t) viável têm-se:

$$c^t y^* + c_o t^* \geq c^t y + c_o t$$

Dado que $y = \dfrac{x}{d_o + d^t x}$ e $t = \dfrac{1}{d_o + d^t x}$ $\forall x \in S$,

então a desigualdade anterior resulta em:

$$c^t\left[\frac{x^*}{d_o + d^t x^*}\right] + c_o\left[\frac{1}{d_o + d^t x^*}\right] \geq c^t\left[\frac{x}{d_o + d^t x}\right] + c_o\left[\frac{1}{d_o + d^t x}\right]$$

D'onde: $\dfrac{c_o + c^t x^*}{d_o + d^t x^*} \geq \dfrac{c_o + c^t x}{d_o + d^t x}$ $\forall x \in S$, ou seja,

$f(x^*) \geq f(x)$ $\forall x \in S$. Logo, $x^* = y^*/t^*$ é solução ótima de $(\overline{PH}^+)$.

■

A proposição III.8 mostra que uma solução x^* de $(\overline{PH}^+)$ pode ser encontrada resolvendo-se o problema linear $(\overline{LP}^+)$, de solução (y^*, t^*), e fazendo-se $x^* = y^*/t^*$.

III.6) O Método de ISBELL e MARLOW (1956)

Este método consiste em resolver $(\overline{PH}^+)$ através da otimização iterativa de uma sequência de problemas lineares. Para tanto, seja o problema de programação linear auxiliar de parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\overline{Q}^{+}(\lambda) \quad : \quad \begin{array}{ll} \text{maximize } z(\lambda) = c_o - \lambda d_o + (c - \lambda d)^t x \\ \text{sujeito a:} \quad Ax \leq b \\ \qquad\qquad\qquad x \geq 0 \end{array}$$

$\overline{Q}^{+}(\lambda)$ está relacionado a $(\overline{PH}^{+})$ através dos resultados subsequentes:

<u>Proposição III.9</u>: Suponha que $(\overline{PH}^{+})$ tem uma solução ótima x^* com:

$$\lambda^* = \frac{c_o + c^t x^*}{d_o + d^t x^*}$$

Seja $z(\lambda)$ o valor ótimo de $\overline{Q}^{+}(\lambda)$. Então:

(i) $z(\lambda) > 0 \iff \lambda < \lambda^*$;

(ii) $z(\lambda) = 0 \iff \lambda = \lambda^*$;

(iii) $z(\lambda) < 0 \iff \lambda > \lambda^*$.

<u>Prova</u>: IBARAKI (1981)

(i) $\Rightarrow$

Se $z(\lambda) > 0$ então $\exists \hat{x} \in S$ satisfazendo $c_o - \lambda d_o + (c - \lambda d)^t \hat{x} > 0$. Rearranjando e levando em conta que $d_o + d^t x > 0 \ \forall x \in S$ vem:

$$c_o + c^t \hat{x} - \lambda (d_o + d^t \hat{x}) > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda < \frac{c_o + c^t \hat{x}}{d_o + d^t \hat{x}}$$

Como x^* é, por hipótese, solução ótima de $(\overline{PH}^{+})$ e $\hat{x}$ é um ponto viável de S, naturalmente:

$$\frac{c_o + c^t \hat{x}}{d_o + d^t \hat{x}} \leq \frac{c_o + c^t x^*}{d_o + d^t x^*} = \lambda^*$$

De onde se conclui: $\lambda < \lambda^*$.

$\Leftarrow$

$\lambda < \lambda^*$ implica que existe uma solução $\overline{x} \in S$ de (PH^{+}) satisfazendo:

$$\frac{c_o + c\,\overline{x}}{d_o + d^t \overline{x}} > \lambda$$

e, dado a positividade do denominador:

$$z(\lambda) \geq c_o + c^t \overline{x} - \lambda (d_o + d^t \overline{x}) > 0$$

As provas dos casos (ii) e (iii) são similares. ∎

<u>Proposição</u> <u>III.10</u>: Se, nas condições da proposição III.9, $z(\lambda^*) = 0$ então uma solução ótima de $\overline{Q}^+(\lambda^*)$ é também solução ótima de $(\overline{PH}^+)$.

<u>Prova</u>: IBARAKI (1981)

Seja x^* solução ótima de $\overline{Q}^+(\lambda^*)$. Então, dado que $z(\lambda^*) = 0$, tem-se:

$$c_0 + c^t x^* - \lambda^*(d_0 + d^t x^*) = 0$$

E como $d_0 + d^t x > 0 \ \forall x \in S$:

$$\frac{c_0 + c^t x^*}{d_0 + d^t x^*} = \lambda^*$$

e, daí segue que x^* é também solução ótima do problema fracionário. ■

Pelos resultados anteriores $(\overline{PH}^+)$ pode ser resolvido determinando $\lambda = \lambda^*$ satisfazendo $z(\lambda) = 0$ e uma solução ótima de $\overline{Q}^+(\lambda^*)$ é também ótima em $(\overline{PH}^+)$. A curva $z(\lambda)$ possui, felizmente, boas propriedades para esse propósito:

<u>Proposição</u> <u>III.11</u>: z é contínua em $\mathbb{R}$.

<u>Prova</u>: Imediata.

<u>Proposição</u> <u>III.12</u>: z é estritamente decrescente em $\mathbb{R}$

<u>Prova</u>: DINKELBACH (1967)

Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ de sorte que $\lambda_1 < \lambda_2$. Deve ser provado que $z(\lambda_1) > z(\lambda_2)$.

Considere x_{λ_2} maximizante de $z(\lambda_2)$. Logo:

$$z(\lambda_2) = \max_{x \in S}\left[c_0 + c^t x - \lambda_2(d_0 + d^t x)\right] = c_0 + c^t x_{\lambda_2} - \lambda_2(d_0 + d^t x_{\lambda_2}) < c_0 + c^t x_{\lambda_2} - \lambda_1(d_0 + d^t x_{\lambda_2}) \leq \max_{x \in S}\left[c_0 + c^t x - \lambda_1(d_0 + d^t x)\right] = z(\lambda_1),$$

isto é, dado $\lambda_1 < \lambda_2$ têm-se $z(\lambda_1) > z(\lambda_2)$. ■

<u>Proposição</u> <u>III.13</u>: z é convexa em $\mathbb{R}$.

<u>Prova</u>: JAGANNATHAN (1966)

Sejam $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ com $\lambda_1 < \lambda_2$ e x^* solução ótima de $\overline{Q}^+(\lambda)$, sendo $\lambda = \alpha\lambda_1 + (1 - \alpha\lambda_2)$ e $0 \leq \alpha \leq 1$.

Para simplificação da notação, sejam: $N(x) = c_0 + c^t x$

e $D(x) = d_o + d^t x$. Assim sendo, $z(\lambda) = N(x) - \lambda D(x)$.

Deve ser provado que:

$$z(\alpha\lambda_1 + (1 - \alpha\lambda_2)) \leq \alpha z(\lambda_1) + (1 - \alpha) z(\lambda_2)$$

De fato:

$$\begin{aligned} z(\alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_2) = {} & N(x^*) - (\alpha\lambda_1 + (1 - \alpha)\lambda_2)D(x^*) = N(x^*) \\ & + \alpha N(x^*) - \alpha\lambda_1 D(x^*) - \lambda_2 D(x^*) + \\ & \alpha\lambda_2 D(x^*) - \alpha N(x^*) = \alpha(N(x^*) - \lambda_1 D(x^*)) \\ & + (1 - \alpha)(N(x^*) - \lambda_2 D(x^*)) \leq \alpha z(\lambda_1) \\ & + (1 - \alpha) z(\lambda_2), \end{aligned}$$

já que:

$$N(x^*) - \lambda_1 D(x^*) \leq N(x_{\lambda_1}) - \lambda_1 D(x_{\lambda_1})$$

$$N(x^*) - \lambda_2 D(x^*) \leq N(x_{\lambda_2}) - \lambda_2 D(x_{\lambda_2})$$

onde x_{λ_1} e x_{λ_2} são soluções ótimas de $z(\lambda_1)$ e $z(\lambda_2)$, respectivamente. ∎

<u>Proposição</u> <u>III.14</u>: Seja $\lambda^* \in \mathbb{R}$ e x^* solução ótima de $\overline{Q}^+(\lambda^*)$. Então $-(d_o + d^t x^*)$ é um subgradiente de z em λ^*.

<u>Prova</u>: CROUZEIX *et alii* (1988)

Dado $\lambda \in \mathbb{R}$ e lembrando que z é, pela proposição III.13, uma função convexa, deve ser provado que:

$$z(\lambda) \geq z(\lambda^*) + \xi^t(\lambda - \lambda^*) \quad \forall\lambda \in \mathbb{R} \quad \text{onde } \xi = -(d_o + d^t x^*)$$

Com efeito, dado a convexidade de z:

$$\begin{aligned} z(\lambda) \geq {} & c_o + c^t x^* - \lambda(d_o + d^t x^*) = c_o + c^t x^* - \lambda(d_o + d^t x^*) - \\ & \lambda^*(d_o + d^t x^*) + \lambda^*(d_o + d^t x^*) = c_o + c^t x^* - \\ & \lambda^*(d_o + d^t x^*) - (d_o + d^t x^*)^t(\lambda - \lambda^*) = z(\lambda^*) - \\ & (d_o + d^t x^*)^t(\lambda - \lambda^*) \end{aligned}$$

e, portanto: $\xi = -(d_o + d^t x^*)$. ∎

Das propriedades precedentes é facil concluir que, existindo uma solução $\lambda \in \mathbb{R}$ de $z(\lambda) = 0$, esta é única. Observe, entretanto, que podem existir mais de uma solução ótima x^* em $(\overline{PH}^+)$.

Baseado no exposto e explorando as características da curva $z(\lambda)$ um método do tipo NEWTON é usado para identificar a raiz de $z(\lambda) = 0$. Portanto, gera-se uma sequência $\{ \lambda_k \}_{k \in \mathbb{N}}$, onde:

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k - \frac{z(\lambda_k)}{-(d_o + d^t x^k)} = \lambda_k + \frac{c_o + c^t x^k}{d_o + d^t x^k} - \lambda_k = \frac{c_o + c^t x^k}{d_o + d^t x^k}$$

A figura III.1 ilustra uma situação típica. A reta obtida resolvendo $\overline{Q}^+(\lambda)$, $z(\lambda) = c_o + c^t x^k - \lambda(d_o + d^t x^k)$, é tangente a $z(\lambda)$ em $\lambda = \lambda_k$. Verifica-se, facilmente, que $z(\lambda)$ intercepta o eixo-λ em:

$$\lambda_k = \frac{c_o + c^t x^k}{d_o + d^t x^k} .$$

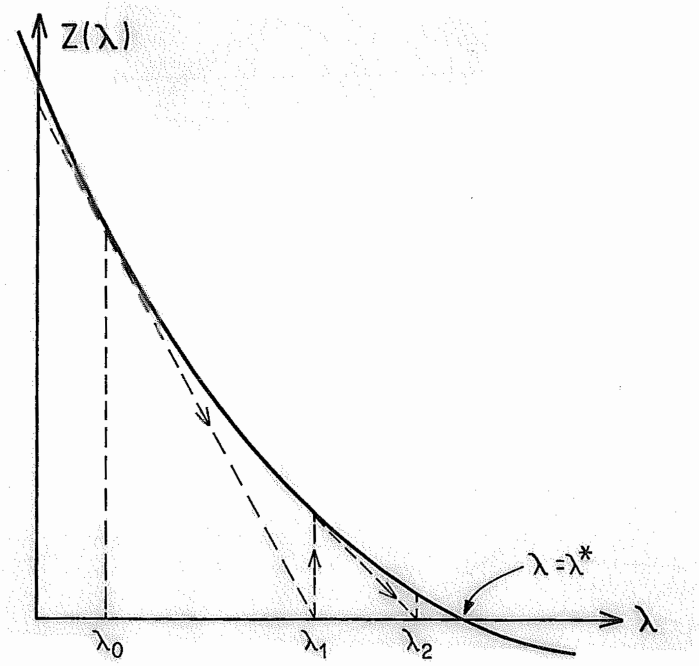


FIGURA III.1: Ilustração da curva $z(\lambda)$ e da sequência $\{\lambda_i\}$ gerada pelo método.

Na apresentação do algoritmo, que é feita a seguir, a seguinte notação é introduzida:

λ^* : valor ótimo de $(\overline{PH}^+)$;

x^* : solução ótima de $(\overline{PH}^+)$.

<u>ALGORITMO DE ISBELL e MARLOW (1956)</u>

PASSO 0 : Tome $x^o \in S$.

Faça $\lambda_k = \dfrac{c_o + c^t x^o}{d_o + d^t x^o}$ com $k = 1$.

PASSO 1 : Determine uma solução ótima x^k de:

$$z(\lambda_k) = \max_{x \in S} \; [\, c_o - \lambda_k d_o + (c - \lambda_k d)^t x \,]$$

PASSO 2 : Se $z(\lambda_k) = 0$

então PARE: $x^* := x^k$;
$\lambda^* := \lambda_k$;

senão faça: $\lambda_{k+1} = \dfrac{c_o + c^t x^k}{d_o + d^t x^k}$;

$k := k + 1$;
Retorne ao PASSO 1.

Em termos práticos, o teste $z(\lambda_k) = 0$, no passo 2, é substituído por $|z(\lambda_k)| \leq \varepsilon$ onde $\varepsilon > 0$ é um número real arbitrariamente pequeno.

A convergência deste algoritmo pode ser facilmente verificada. Inicialmente atente-se para o fato de que dado um ponto viável x^k do conjunto S então $\lambda_{k+1} = f(x^k)$ satisfaz $\lambda_{k+1} \leq \lambda^*$ pois sendo x^* a solução ótima de (PH^+), a relação

$$\frac{c_o + c^t x^k}{d_o + d^t x^k} \leq \frac{c_o + c^t x^*}{d_o + d^t x^*}\,.$$

é satisfeita $\forall k = 0,1,\ldots$.

Em vista disso, pela proposição III.9, garante-se $z(\lambda) \geq 0$ para $\lambda = \lambda_{k+1}$; $k = 0,1,2,\ldots$. Observe, por outro lado, que $\lambda_{k+1} \geq \lambda_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$ pois resulta da definição de λ_{k+1} que: $c_o + c^t x^k = \lambda_{k+1} \cdot (d_o + d^t x^k)$ e, assim sendo:

$$z(\lambda_k) = c_o + c^t x^k - \lambda_k \cdot (d_o + d^t x^k) = \lambda_{k+1} \cdot (d_o + d^t x^k) - \lambda_k \cdot (d_o + d^t x^k) = (\lambda_{k+1} - \lambda_k)(d_o + d^t x^k).$$

Como $z(\lambda_k) \geq 0$ $\forall k \in \mathbb{N}$ e $d_o + d^t x^k > 0$ $\forall x^k \in S$ resulta, finalmente: $\lambda_{k+1} \geq \lambda_k$.

Por outro lado, as iterações terminam, isto é, $\exists x^k \in \mathbb{R}$

tal que:

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda^*$$

já que a solução de cada problema linear $\overline{Q}(\lambda)$ é um vértice de S, e há um número finito deles.

SCHAIBLE (1976b) e CROUZEIX *et alii* (1988) mostram que a sequência $\{ \lambda_k \}_{k\in N}$ gerada pelo algoritmo converge, para cada $\lambda_k < \lambda^*$, superlinearmente para λ^*, isto é:

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\lambda^* - \lambda_{k+1}}{\lambda^* - \lambda_k} = 0.$$

SCHAIBLE (1976b) mostra, ainda, que uma estimativa de erro no cálculo de λ^* pode ser obtida com base no resultado seguinte:

<u>Proposição</u> <u>III.15</u>: Assuma $\lambda_1 < \lambda^*$ tal que $d_o + d^t x^1 < 2\cdot(d_o + d^t x^*)$. Então, para cada $r < 1$, $r \geq \dfrac{d_o + d^t x^1}{d_o + d^t x^*} - 1$ e $k = 1,2,\ldots$, tem-se:

$$\lambda^* - \frac{c_o + c^t x^k}{d_o + d^t x^k} \leq (\lambda_2 - \lambda_1)\cdot\frac{r}{1 - r}$$

Em termos práticos, como x^* não é conhecido a priori, ele é substituído por x^u, solução ótima de $z(\lambda)$ para $\lambda = \lambda^u > \lambda^*$. Desta forma, tomando-se

$$r = \frac{d_o + d^t x^1}{d_o + d^t x^u} - 1$$

garante-se, como demonstrado em SCHAIBLE (1976b), que:

$$r \geq \frac{d_o + d^t x^1}{d_o + d^t x^*} - 1.$$

Por outro lado $r < 1$ é garantido se x^1 for escolhido de sorte que $(d_o + d^t x^1)/(d_o + d^t x^u) < 2$.

SCHAIBLE (1976b) sugere, ainda, alterar no passo 2 do algoritmo em questão o teste $|z(\lambda_k)| \leq \varepsilon$, dado que $z(\lambda_k)$ pode ser pequeno embora $[\lambda^* - (c_o + c^t x^k)/(d_o + d^t x^k)]$ não o seja. O teste sugerido é:

$$(\lambda_k^u - \lambda_k)\left[1 - \frac{c_o + c^t x^k}{d_o + d^t x^k}\right] \leq \varepsilon$$

onde λ_k^u é, como mostra a figura III.2, o ponto onde a reta que passa pelos pontos $(\lambda_k, z(\lambda_k))$ e $(\lambda^u, z(\lambda^u))$ intercepta o eixo-λ.

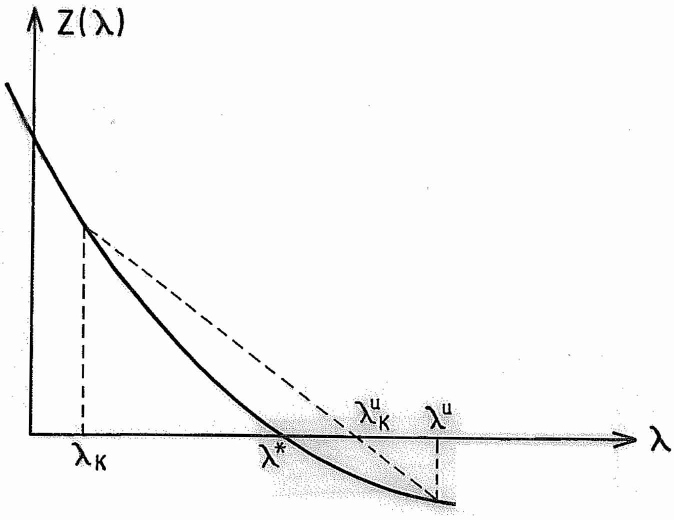


FIGURA III.2: Ilustração da determinação de λ_k^u

CAPÍTULO IV - PROGRAMAÇÃO FRACIONÁRIA LINEAR EM VARIÁVEIS BIVALENTES

IV.1) Definição do Problema

O problema de programação fracionária linear em variáveis 0-1 pode ser formulado como abaixo:

$$(PH) \qquad \begin{array}{ll} \text{maximizar } f(x) = \dfrac{c_o + c^t x}{d_o + d^t x} \\ \text{sujeito a:} \quad Ax \leq b \\ \qquad\qquad\quad x \in \{0,1\}^n \end{array}$$

onde c_o, $d_o \in \mathbb{R}$; $c, d \in \mathbb{R}^n$; $b \in \mathbb{R}^m$ e $A = (a_{ij})_{m \times n}$ com $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Seja $S = \{ x \in \{0,1\}^n : Ax \leq b \}$. Observe que S é um conjunto finito, de cardinalidade inferior ou igual a 2^n.

<u>Hipótese</u> <u>IV.1</u>: $d_o > 0$ e $d_j \geq 0 \ \forall j = 1,\dots,n$.

Os problemas nos quais o denominador da função objetivo hiperbólica satisfaz a hipótese IV.1 serão denominados (PH^+).

Observe que podem se reduzir a (PH^+) os problemas nos quais as seguintes condições são satisfeitas:

(i) $d_o + d^t x > 0 \quad \forall x \in \{0,1\}^n$

Neste caso, substituir todo x_j com $d_j < 0$ por $(1 - \bar{x}_j)$ e fazer $d_o \leftarrow d_o + d_j$.

(ii) $d_o + d^t x < 0 \quad \forall x \in \{0,1\}^n$

Neste caso, multiplicar numerador e denominador de f por -1 e proceder como no caso (i)

(iii) $d_o < 0$ e $d_j \leq 0 \quad \forall j = 1,2,\dots,n$

Neste caso, basta apenas multiplicar numerador e denominador da função objetivo fracionária por -1.

IV.2) O Problema Fracionário Linear Irrestrito

Esta seção apresenta dois algoritmos que solucionam o problema fracionário linear 0-1, sob hipótese IV.1, sujeito apenas à condição $x \in \{0,1\}^n$, e aqui denominado (PHI$^+$).

Na maioria dos algoritmos descritos neste capítulo (PHI$^+$) aparece como subproblema. Daí a importância de estudar problemas que se enquadram nesse formato.

<u>Proposição IV.1</u>: Sejam $s > q > 0$ e $p/q < r/s$. Então:

$$\frac{r - p}{s - q} > \frac{r}{s}$$

<u>Prova</u>:

De $p/q < r/s$ e $s > q > 0$ têm-se, sucessivamente:

$ps < rq \Rightarrow -ps > -rq \Rightarrow rs - ps > rs - rq \Rightarrow (r - p)s > (s - q)r \Rightarrow (r - p)/(s - q) > r/s.$ ■

A proposição IV.1 afirma que uma razão r/s cresce sempre que se subtrai de r e s, respectivamente, o numerador e denominador de outra razão $p/q < r/s$, desde que $s > q > 0$.

<u>Proposição IV.2</u>: Seja $d_j > 0$ para $j = 0,1,\dots,n$. x^* é um ótimo global de (PHI$^+$) se e somente se:

(i) $f(x^*) > c_j/d_j \Rightarrow x_j^* = 0$

(ii) $f(x^*) < c_j/d_j \Rightarrow x_j^* = 1$

(iii) $f(x^*) = c_j/d_j \Rightarrow x_j^* = 0$ ou 1.

<u>Prova</u>: ARAGÃO (1988)

Sejam $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_{k-1}^*, x_k^*, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*)$ solução ótima de (PHI$^+$) e

$x^*(k) = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_{k-1}^*, \bar{x}_k, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*)$. Então:

$$f(x^*) = \frac{c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*}{d_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j x_j^*} \quad \text{e}$$

$$f(x^*(k)) = \frac{c_0 + c_1 x_1^* + \dots + c_{k-1} x_{k-1}^* + c_k \bar{x}_k + c_{k+1} x_{k+1}^* + \dots + c_n x_n^*}{d_0 + d_1 x_1^* + \dots + d_{k-1} x_{k-1}^* + d_k \bar{x}_k + d_{k+1} x_{k+1}^* + \dots + d_n x_n^*}$$

$$= \frac{c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* + c_k(\bar{x}_k - x_k^*)}{d_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j x_j^* + d_k(\bar{x}_k - x_k^*)} = \frac{c^* + c_k(\bar{x}_k - x_k^*)}{d^* + d_k(\bar{x}_k - x_k^*)}$$

onde: $c^* = c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^*$ e $d^* = d_0 + \sum_{j=1}^{n} d_j x_j^*$.

Atente-se para o fato de que tanto o denominador de $f(x^*)$ quanto o de $f(x^*(k))$ são estritamente positivos, dado que $d_j > 0$ para $j = 0,\ldots,n$. Considerada esta observação e lembrando que todo máximo local de $f(x)$ é global e, evidentemente, um máximo global é também local, então são válidas as afirmações:

x^* é um máximo global de $f(x)$ $\Longleftrightarrow$ x^* é um máximo local de $f(x)$ $\Longleftrightarrow$ $f(x^*) \geq f(x^*(k))$ para qualquer k, $1 \leq k \leq n$,

$$\Longleftrightarrow \frac{c^*}{d^*} \geq \frac{c_k^* + c_k(\bar{x}_k - x^*)}{d_k^* + d_k(\bar{x}_k - x^*)} \Longleftrightarrow d_k(\bar{x}_k - x_k^*)c^* \geq c_k(\bar{x}_k - x_k^*)d^*$$

$$\Longleftrightarrow (\bar{x}_k - x_k^*)\cdot\frac{c^*}{d^*} \geq (\bar{x}_k - x_k^*)\cdot\frac{c_k}{d_k} \Longleftrightarrow (\bar{x}_k - x_k^*)f(x^*) \geq (\bar{x}_k - x_k^*)\cdot\frac{c_k}{d_k}$$

$$\Longleftrightarrow (\bar{x}_k - x_k^*)\cdot\left[f(x^*) - \frac{c_k}{d_k} \right] \geq 0.$$

$\Longleftrightarrow$ (i) Se $f(x^*) > c_k/d_k$ então $\bar{x}_k - x_k^* \geq 0$. Como esta desigualdade deve permanecer válida para qualquer $\bar{x}_k \in \{0,1\}$ então $x_k^* = 0$;

(ii) Se $f(x^*) < c_k/d_k$ então $\bar{x}_k - x_k^* \leq 0$ e, analogamente, pode-se concluir que $x_k^* = 1$;

(iii) Se $f(x^*) = c_k/d_k$ então $\bar{x}_k - x_k^* = 0$ e, portanto, $x_k^* = 0$ ou 1. ■

Para o caso em que $\exists j : d_j = 0$ é evidente que, em maximizando $f(x)$, têm-se:

$$x_j^* = \begin{cases} 1 & \text{se } c_j > 0 \\ 0 & \text{se } c_j < 0 \end{cases}$$

Os algoritmos apresentados a seguir são capazes de fornecer um ótimo local de (PHI^+) que, como já visto, é também global. Como pode ser observado diretamente da proposição IV.2 este ótimo pode não ser único.

Esses algoritmos forçam, a cada iteração, a aplicação das condições de otimalidade especificadas na proposição IV.2.

A notação utilizada é a seguinte:

x : solução corrente;

$\bar{c}$: valor do numerador da função f no ponto x;

$\bar{d}$: valor do denominador da função f no ponto x;

L : variável booleana que indica modificação em x;

K : conjunto dos índices das variáveis nulas de x;

K_1: conjunto dos índices das variáveis não-nulas de x;

λ : valor de $f(x)$ para a solução x corrente.

IV.2.1) O Algoritmo de ROBILLARD (1971)

A aplicação desse algoritmo supõe que as razões c_j/d_j $(j = 1,2,\ldots,n)$ estejam em ordem não-crescente, isto é:

$$c_1/d_1 \geq c_2/d_2 \geq \ldots \geq c_n/d_n.$$

O algoritmo inicializa com $x = (0,0,\ldots,0)$ e verifica, a cada iteração, se o valor da razão c_k/d_k supera o de $f(x)$ corrente. Isto ocorrendo, faz-se, de acordo com a proposição IV.2, $x_k = 1$, recalcula-se $f(x)$ e repete-se o procedimento. Este termina quando, para um dado k, $1 \leq k \leq n$, a relação $f(x) \geq c_k/d_k$ for satisfeita visto que, estando as razões c_j/d_j em ordem não-crescente, então $f(x) \geq c_k/d_k \geq c_{k+1}/d_{k+1} \geq \ldots \geq c_n/d_n$ e por construção $f(x) \leq c_{k-1}/d_{k-1} \leq c_{k-2}/d_{k-2} \leq \ldots \leq c_1/d_1$. Desta forma, a solução x assim definida ($x_j = 1$ para $j = 1,\ldots,k-1$ e $x_j = 0$ para $j = k,\ldots,n$) é, fundamentado na proposição IV.2, uma solução ótima.

<u>ALGORITMO DE ROBILLARD (1971)</u>

PASSO 0 : Faça $K \leftarrow \{1,2,\dots,n\}$;
$x_j \leftarrow 0$, $j = 1,2,\dots,n$;
$\bar{c} \leftarrow c_o$;
$\bar{d} \leftarrow d_o$;
$L. \leftarrow$ .Falso. ;
$k \leftarrow 1$;

PASSO 1 : Se $\dfrac{\bar{c}}{\bar{d}} < \dfrac{c_k}{d_k}$ então faça: $\bar{c} \leftarrow \bar{c} + c_k$;
$\bar{d} \leftarrow \bar{d} + d_k$;
$L \leftarrow$ .Verdadeiro. ;
$x_k \leftarrow 1$;
$K \leftarrow K - \{k\}$;

PASSO 2 : Se $L =$ .Verdadeiro.
então faça: $L \leftarrow$ .Falso. ;
Retorne ao PASSO 1 ;
senão PARE: $x^* = (x_1,\dots,x_n)$ é uma solução ótima com valor $f(x^*) = \bar{c}/\bar{d}$.

Uma observação pertinente é que, da forma como apresentado, o algoritmo de ROBILLARD (1971) apresenta a solução ótima com o maior número possível de elementos nulos.

IV.2.2) O Algoritmo de ARAGÃO (1988)

Este algoritmo tem a vantagem de não exigir, para a sua aplicação, uma pré-ordenação das razões c_j/d_j.

Nos testes computacionais realizados por ARAGÃO (1988, p.50-56), o algoritmo mostrou-se, em termos de tempo médio e tempo máximo de processamento (CPU), superior ao de ROBILLARD (1971) para problemas no formato (PHI$^+$).

O algoritmo inicializa com $x = (1,1,\dots,1)$ e analisa, a cada iteração, a condição de otimalidade $f(x) > c_j/d_j$ da proposição IV.2. Sendo esta satisfeita, faz-se $x_j = 0$, recalcula-se $f(x)$ e repete-se o procedimento até que $f(x)$ não se altere. A fundamentação desse procedimento está baseada na proposição IV.1. Desta forma, quando x_j assume o valor ZERO, é este o seu valor no ótimo.

ALGORITMO DE ARAGÃO (1988)

PASSO 0 : Faça $K_1 \leftarrow \{1,2,\dots,n\}$;

$\bar{c} \leftarrow c_0 + \sum_{j \in K_1} c_j$;

$\bar{d} \leftarrow d_0 + \sum_{j \in K_1} d_j$;

$\lambda \leftarrow \bar{c}/\bar{d}$;

$L \leftarrow$ .Falso. ;

PASSO 1 : Para todo $j \in K_1$:

Se $\lambda > c_j/d_j$ então faça: $K_1 \leftarrow K_1 - \{j\}$;

$\bar{c} \leftarrow \bar{c} - c_j$;

$\bar{d} \leftarrow \bar{d} - d_j$;

$L \leftarrow$ .Verdadeiro. ;

PASSO 2 : Se $L =$ .Verdadeiro.

então faça: $L \leftarrow$ .Falso. ;

$\lambda \leftarrow \bar{c}/\bar{d}$;

Retorne ao PASSO 1 ;

senão PARE: A solução ótima de valor

$f(x^*) = \lambda$ é:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se } j \in K_1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A solução ótima proporcionada por este algoritmo, da forma como apresentado, é, dentre todas as possíveis soluções, aquela que apresenta o maior número de componentes não nulos.

IV.3) Algoritmos Indiretos

Os algoritmos desta classe resolvem (PH^+) através de uma sequência de problemas de programação linear 0-1 auxiliares, onde o conjunto de restrições é o mesmo do problema original e somente a função objetivo de tais problemas é atualizada a cada iteração.

Como, pela proposição III.6, o problema (PH^+) é equivalente a $(\tilde{\tilde{PH}}^+)$ onde $(\tilde{\tilde{PH}}^+) = \max \{ f(x) \text{ s.a: } x \in Co(S) \}$ e $Co(S)$ a envoltória convexa de S, então nesses algoritmos os pontos gerados são, pois, vértices de $Co(S)$ e, portanto, consistem em caminhar ao longo dos pontos extremos deste politopo.

IV.3.1) O Método de GRUNSPAN e THOMAS (1973)

Este algoritmo pode ser visto como uma generalização do algoritmo de ISBELL e MARLOW (1956) que resolve o problema hiperbólico contínuo.

Considera-se o problema:

$$(PHG^+) \quad \begin{array}{l} \max f(x) = \dfrac{c_o + c^t x}{d_o + d^t x} \\ \text{s.a:} \quad x \in F \end{array}$$

onde F é um conjunto que consiste de um número finito de pontos e $d_o + d^t x > 0 \ \forall x \in F$.

Seja $x_\alpha \in F$ e o seguinte problema de programação linear associado a (PHG^+):

$$(LPHG^+) \begin{cases} \max g(x) = (d_o + d^t x_\alpha)(c_o + c^t x) - (c_o + c^t x_\alpha)(d_o + d^t x) \\ \text{s.a:} \quad x \in F \end{cases}$$

A proposição IV.3 dá as condições necessárias e suficientes para que x_α seja solução ótima de (PHG^+):

<u>Proposição IV.3</u>: O ponto $x_\alpha \in F$ maximiza a função objetivo hiperbólica de (PHG^+) se e somente se x_α maximiza a função objetivo linear de $(LPHG^+)$.

<u>Prova</u>: GRUNSPAN e THOMAS (1973)

(i) A condição é necessária

Deve-se provar que se $x_\alpha \in F$ é solução ótima de (PHG^+) então x_α também é solução ótima de $(LPHG^+)$.

Com efeito, se $x_\alpha \in F$ maximiza (PHG^+) então:

$$\max_{x \in F} f(x) = f(x_\alpha) \quad \Rightarrow \quad \frac{c_o + c^t x}{d_o + d^t x} \leq \frac{c_o + c^t x_\alpha}{d_o + d^t x_\alpha} \quad \forall x \in F$$

Como assume-se $d_o + d^t x > 0 \ \forall x \in F$ segue-se que:

$$(d_o + d^t x_\alpha)(c_o + c^t x) - (c_o + c^t x_\alpha)(d_o + d^t x) \leq 0 \ \forall x \in F$$

Mas o primeiro membro da desigualdade anterior é a função objetivo em (LPHG$^+$) e, portanto, $g(x) \leq 0 \ \forall x \in F$ e, claramente, $\max\limits_{x \in F} g(x) = 0 = g(x_\alpha)$. Logo, x_α é também solução ótima de (LPHG$^+$).

(ii) A condição é suficiente

Deve-se provar que se $x_\alpha \in F$ é solução ótima de (LPHG$^+$) então x_α também otimiza (PHG$^+$).

De fato, se $x_\alpha \in F$ maximiza (LPHG$^+$) então:

$\max\limits_{x \in F} g(x) = g(x_\alpha) = 0$ e isto implica que:

$$g(x) = (d_o + d^t x_\alpha)(c_o + c^t x) - (c_o + c^t x_\alpha)(d_o + d^t x) \leq 0 \ \forall x \in F$$

Obtêm-se, após dividir a desigualdade anterior por $(d_o + d^t x_\alpha)(d_o + d^t x) > 0$:

$f(x) \leq f(x_\alpha) \ \forall x \in F$, isto é, x_α maximiza (PHG$^+$). ■

O resultado subsequente é consequência imediata da prova dada para a proposição IV.3.

<u>Corolário</u> <u>IV.1</u>: O ponto $x^* \in F$ que maximiza (LPHG$^+$) é ótimo para (PHG$^+$) se e somente se $g(x^*) = 0$.

Baseado no exposto, o algoritmo a seguir resolve o problema (PHG$^+$) através de uma sequência finita de problemas de programação linear.

<u>ALGORITMO DE GRUNSPAN e THOMAS (1973)</u>

PASSO 0 : Seja $x_o \in F$ e $j = 1$

PASSO 1 : Seja x_j uma solução ótima do problema linear:

$$\max_{x \in F} g(x) = (d_o + d^t x_{j-1})(c_o + c^t x) - (c_o + c^t x_{j-1})(d_o + d^t x)$$

PASSO 2 : Se $\max\limits_{x \in F} g(x) = 0$

então PARE: $x^* = x_j$;

senão faça: $j \leftarrow j + 1$;

Retorne ao PASSO 1 ;

Se um ponto viável x_0 não estiver disponível pode-se obtê-lo resolvendo-se, sobre F, um programa linear com uma função objetivo qualquer, interrompendo-se o procedimento quando uma solução viável for encontrada ou, como sugerido em BITRAN (1979), maximizando o numerador de f ou minimizando seu denominador.

Mesmo que x_0 não seja viável para (PHG^+), a solução do primeiro programa linear, x_1, será viável e o algoritmo prossegue normalmente.

A convergência do algoritmo é consequência da existência de um número finito de pontos à considerar. Por conveniência, assume-se que existem k pontos viáveis. Por construção o algoritmo gera uma sequência de pontos viáveis tais que $f(x_1) \leq f(x_2) \leq \ldots \leq f(x_j)$ onde j = k no pior caso. Como gera-se pontos cada vez melhores e tais que $g(x_j) \leq 0$ $\forall j$ e o conjunto de pontos de F é finito, haverá um momento em que não será possível melhorar o valor da função objetivo, isto é, deve existir um índice j tal que $f(x_{j-1}) = f(x_j)$. Isto implica em $g(x_j) = 0$ e, invocando o corolário IV.1, x_j é solução ótima. Como F tem um número finito de pontos então a solução ótima de (PHG^+) é obtida pelo algoritmo após um número finito de passos.

A utilização desse algoritmo para o caso de variáveis bivalentes, (PH^+), é imediata. Como o número de pontos 0-1 viáveis do conjunto S é inferior a 2^n, portanto finito, o algoritmo de GRUNSPAN e THOMAS (1973) aplicado a (PH^+) termina, também, após um número finito de passos.

Este algoritmo também pode ser aplicado inclusive na solução de ($\overline{PH}^+$), a versão contínua de (PH^+). Como a região viável de ($\overline{PH}^+$), assumindo-se S limitado, tem um número finito de vértices e sua solução ótima deve ocorrer em pelo menos num desses pontos, determinar a solução ótima de ($\overline{PH}^+$) é equivalente a resolver um problema hiperbólico com um número finito de pontos viáveis, isto é, é suficiente maximizar a função objetivo sobre o conjunto de vértices da região viável de ($\overline{PH}^+$).

IV.3.2) O Algoritmo de FLORIAN e ROBILLARD (1971)

Este algoritmo é uma adaptação direta, para o caso bivalente, do método iterativo de ISBELL e MARLOW (1956), descrito na seção III.6. Assim, ao invés de resolver (PH^{+}) diretamente, o algoritmo resolve uma sequência de programas lineares 0-1 os quais diferem entre si somente pelos coeficientes da função objetivo.

Este procedimento difere do de GRUNSPAN e THOMAS (1973) na determinação de uma solução inicial x^{o} e na forma da função objetivo dos problemas lineares auxiliares.

Neste algoritmo o ponto inicial x^{o} é o vetor que minimiza a função objetivo fracional $f(x)$ sem restrições e, desta forma, garante-se $f(x^{o}) \leq f(x^{*})$. Mais precisamente, $f(x^{o}) \leq f(x^{k})$ $\forall k$. Visa-se, com isto, obter uma convergência superlinear para o método. (Observe que o método de ISBELL e MARLOW (1956) gera pontos tais que $f(x^{1}) \leq f(x^{2}) \leq \ldots \leq f(x^{k}) \leq \ldots \leq f(x^{*})$).

Como a determinação de x^{o} envolve a resolução de um problema de minimização, os algoritmos descritos na seção IV.2 devem ser ligeiramente modificados para se adaptarem a esse novo formato. Todavia, observe que um problema hiperbólico, com denominador com coeficientes não negativos, não todos nulos, pode ser transformado em um problema equivalente onde todos os coeficientes do numerador são não negativos, não todos nulos. Isto deriva do fato de que:

$$f(x) = \frac{c_o + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{d_o + \sum_{j=1}^{n} d_j x_j} = \frac{c_o + \ell d_o + \sum_{j=1}^{n} (c_j + \ell d_j) x_j}{d_o + \sum_{j=1}^{n} d_j x_j} - \ell$$

Sendo $d_o > 0$ e $d_j \geq 0$ $\forall j = 1,2,\ldots,n$ então pode-se sempre escolher ℓ suficientemente grande para tornar $c_o + \ell d_o > 0$ e $c_j + \ell d_j \geq 0$ $\forall j = 1,2,\ldots,n$. Assim sendo, pode-se escrever:

$$\min \frac{c_o + \sum_{j=1}^{n} c_j x_j}{d_o + \sum_{j=1}^{n} d_j x_j} = \left[\text{máx} \frac{d_o + \sum_{j=1}^{n} d_j x_j}{c_o + \ell d_o + \sum_{j=1}^{n} (c_j - \ell d_j) x_j} \right]^{-1} - \ell$$

e, agora, um dos algoritmos apresentados na seção IV.2 pode ser aplicado.

(PH^{+}) é, então, resolvido pelo seguinte procedimento, onde a notação adotada é a mesma dos algoritmos precedentes:

<u>ALGORITMO DE FLORIAN e ROBILLARD (1971)</u>

PASSO 0 : Seja x^{o} uma solução ótima do problema hiperbólico irrestrito:

$$\min f(x) = \frac{c_o + c^t x}{d_o + d^t x}$$

Faça $k = 1$ e tome $\lambda_k = \dfrac{c_o + c^t x^o}{d_o + d^t x^o}$

PASSO 1 : Seja x^k uma solução ótima do problema linear em variáveis 0-1:

$$\text{máx } z(\lambda_k) = c_o - \lambda_k d_o + (c - \lambda_k d)^t x$$

$$\text{s.a:} \quad Ax \leq b$$
$$x \in \{0,1\}^n$$

PASSO 2 : Se $z(\lambda_k) = 0$

então PARE: $x^* = x^k$;

$\lambda^* = \lambda^k$.

senão FAÇA: $\lambda_{k+1} := \dfrac{c_o + c^t x^k}{d_o + d^t x^k}$;

$k := k + 1$;

Retorne ao PASSO 1 ;

Devido aos erros de arredondamento embutidos nos cálculos, na prática o teste $z(\lambda_k) = 0$, no passo 2, é substituído por $|z(\lambda_k)| \leq \varepsilon$, onde $\varepsilon > 0$ é um número real arbitrariamente pequeno.

O exemplo abaixo ilustra a execução, passo a passo, do algoritmo anterior.

<u>Exemplo IV.1</u>:

Seja resolver o seguinte problema hiperbólico:

$$\max \frac{1 + 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4}{2 + x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4}$$

$$\begin{aligned} \text{s.a:}\quad & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 4 \\ & -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 \leq 3 \\ & 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq 3 \\ & x_j \in \{0,1\} \quad \forall j = 1,2,3,4. \end{aligned}$$

Aplicando-se o algoritmo de ARAGÃO (1988), no PASSO 0, obtêm-se $x^0 = (0,0,0,0)$ e, então, $\lambda_1 = 0,50$.

A função a maximizar, no PASSO 1, sobre o conjunto S de pontos definidos pelas restrições do problema, é:

$$z(\lambda_1) = 2,5x_1 + 4x_2 + 1,5x_3$$

cujo máximo é atingido em $x^1 = (1,1,1,1)$. Como $z(\lambda_1) = 8 \neq 0$ faz-se $\lambda_2 = f(x^1) = 1,5$ e maximiza-se, agora, sobre S, a função:

$$z(\lambda_2) = -2 + 1,5x_1 + 2x_2 + 0,5x_3 - 2x_4$$

cujo máximo é atingido no ponto $x^2 = (1,1,0,0)$. Sendo $z(\lambda_1) = 1,5 \neq 0$, o procedimento iterativo continua tomando-se, desta vez, $\lambda_3 = f(x^2) = 1,8$.

Para a nova função a maximizar,

$$z(\lambda_3) = -2,6 + 1,2x_1 + 1,4x_2 + 0,5x_3 - 2,6x_4$$

têm-se: $x^3 = (1,1,0,0)$ com $z(\lambda_3) = 0$. Portanto, o algoritmo termina apresentando como solução ótima:

$$x^* = x^3 = (1,1,0,0)$$
$$\lambda^* = \lambda_3 = 1,8$$

IV.4) Algoritmos Diretos

O desenvolvimento desta seção é baseado nos trabalhos de BALAS (1965, 1967), GEOFFRION (1967, 1969), GRANOT e GRANOT (1976) e PAULA Jr. (1978). Os algoritmos apresentados tratam-se de métodos de enumeração implícita, aplicados diretamente a (PH^+).

IV.4.1) O Esquema de Enumeração

Para o entendimento do procedimento de enumeração algumas definições fazem-se necessárias:

Definição IV.1: Por *solução* de (PH^+) entende-se toda n-upla cujos componentes assumem valores binários, isto é, $\forall x = (x_1, \ldots, x_n)$ tal que $x_j \in \{0,1\}$ para $j = 1,2,\ldots,n$.

Definição IV.2: Por *solução viável* do problema (PH^+) entende-se toda *solução* que satisfaz as restrições do mesmo.

Como há um número finito de *soluções* a considerar, 2^n, por um processo exaustivo de enumeração pode-se determinar uma solução ótima viável de (PH^+), se esta existir. Evidentemente que esse procedimento não seria indicado para valores mais elevados de n.

A idéia da enumeração implícita é desenvolver uma arborescência que garanta a enumeração de todas as 2^n *soluções*, muitas das quais, e este é o objetivo, de maneira implícita.

Definição IV.3: Uma solução parcial de (PH^+), denotada por W, é um conjunto onde cada um de seus elementos é um inteiro não nulo compreendido entre $-n$ e n, que representa uma atribuição de valores binários a uma variável x_j. Convenciona-se que $x_j = 0$ se $-j \in W$ e $x_j = 1$ se $j \in W$.

Definição IV.4: Uma variável x_j é dita *livre* se $j \notin W$ e $-j \notin W$.

Definição IV.5: O complemento lógico da variável binária x_j é $(1 - x_j)$.

Definição IV.6: Um complemento de uma solução parcial W é uma *solução* definida pelos valores das variáveis cujos índices estão em W mais uma dada especificação binária dos valores das variáveis livres.

Exemplificando, seja $n = 4$ e $W = \{3, -2\}$. Então nessa solução parcial $x_3 = 1$, $x_2 = 0$ e as variáveis x_1 e x_4 são livres. As *soluções* associadas a W são, portanto, da forma $(x_1, 0, 1, x_4)$, ou seja, os possíveis complementos de W são: $(0,0,1,0)$, $(0,0,1,1)$, $(1,0,1,0)$ e $(1,0,1,1)$. Logo, dada uma solução parcial W com cardinalidade k, há $n - k$ variáveis livres e, portanto, 2^{n-k} diferentes complementos de W.

<u>Definição IV.7</u>: O melhor complemento de uma solução parcial W é aquele, dentre todos os seus possíveis complementos, que produz o maior valor da função objetivo do problema fracionário linear associado a W.

Desta forma, se para o exemplo anterior, a função objetivo fracionária for a mesma do problema do exemplo IV.1, então $(1,0,1,0)$ é o melhor complemento da solução parcial W em questão já que, chamando de $v[x]$ o valor da função objetivo fracionária no ponto x, tem-se:

$v[(1,0,1,0)] = 3/2 \;>\; v[(1,0,1,1)] = 7/6 \;>$
$v[(0,0,1,0)] = 1 \;>\; v[(0,0,1,1)] = 4/5.$

O esquema de enumeração adotado é aquele proposto por GEOFFRION (1967), ligeiramente modificado, para adequar-se ao formato do problema em estudo.

O procedimento de enumeração envolve a geração, em arborescência, de uma sequência de soluções parciais (W^k) considerando, simultaneamente, todos os complementos de cada uma dessas soluções parciais.

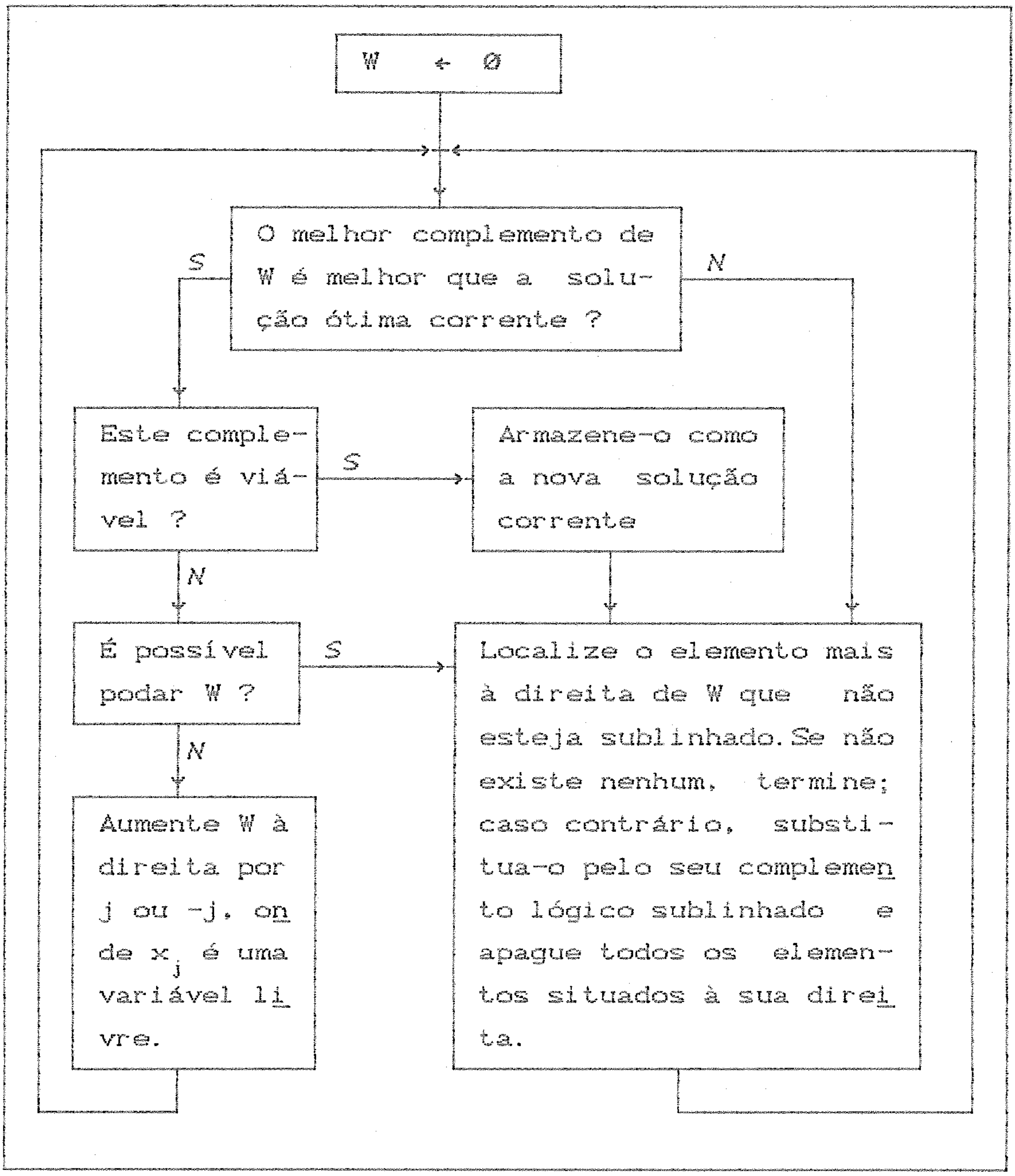


FIGURA IV.1 : Esquema de Enumeração

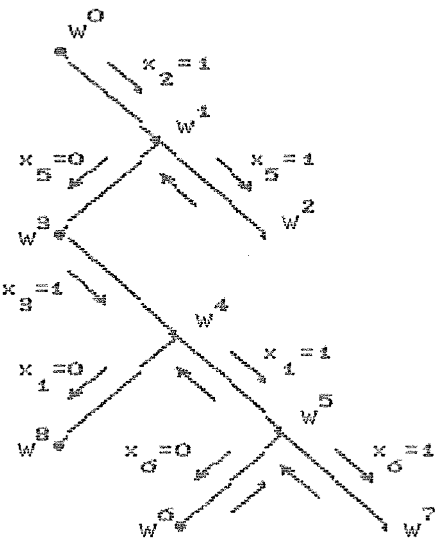
Como demonstrado em GEOFFRION (1967) a sequência de soluções parciais geradas pelo seu esquema de enumeração é não redundante, no sentido de que ela não guia a repetições de soluções parciais previamente podadas, e termina somente quando todas as 2^n *soluções* de S *forem* explicita ou implicitamente enumeradas.

A cada iteração o procedimento indica apenas um dos dois casos seguintes com relação à solução parcial W:

(i) Incrementá-la com a eleição de uma variável livre;

(ii) Complementar logicamente seu último elemento ainda não complementado, liberando as variáveis cujos índices figuram imediatamente à direita dele. Esse elemento complementado deve ser também sublinhado, para indicar que o outro valor de sua variável já foi considerado.

A figura IV.2, abaixo, ilustra parte de uma árvore gerada pelas soluções parciais de um dado problema de programação em variáveis 0-1.



$W^0 = \emptyset$
$W^1 = \{2\}$
$W^2 = \{2,5\}$
$W^3 = \{2,-\underline{5}\}$
$W^4 = \{2,-\underline{5},3\}$
$W^5 = \{2,-\underline{5},3,1\}$
$W^6 = \{2,-\underline{5},3,1,-6\}$
$W^7 = \{2,-\underline{5},3,1,\underline{6}\}$
$W^8 = \{2,-\underline{5},3,-\underline{1}\}$
$\vdots$

FIGURA IV.2: Parte de uma árvore gerada pelas soluções parciais de um dado problema de programação inteira bivalente.

Observe a lei de formação da sequência de soluções parciais. Veja que é um conjunto ordenado, no sentido de que a ordem de seus elementos reflete a ordem em que foram gerados. Quando se passa de um membro para outro dessa sequência pelo acréscimo de mais um elemento, o procedimento provoca um avanço nos ramos da árvore, isto é, cria um descendente. Quando, no entanto, a passagem para o próximo membro da sequência se faz pela complementação lógica do último elemento ainda não complementado, todos os elementos situados à direita do último elemento complementado são abandonados, isso correspondendo a um retorno aos ramos da árvore e consequente *poda* da mesma.

Os *nós* definidos pelas soluções parciais W^1, W^2, W^4, W^5, W^6 e W^7 são ditos *fechados*, no sentido em que seus dois possíveis descendentes já foram, implicitamente ou não, gerados e analisados. Já os *nós* W^o, W^a e W^e são *abertos*, no sentido de que não são *fechados*. Desta forma, os *nós* a pesquisar são os *abertos* e, pelo esquema estabelecido, o próximo é sempre o último *nó* gerado ainda *aberto*.

Este esquema estabelece, portanto, um mecanismo dinâmico de avanço e retorno sobre os ramos da árvore em cujos *nós* estão as soluções parciais. A *poda* de uma solução parcial evita percorrer exaustivamente a árvore por ela gerada.

Ao se produzir uma solução parcial, determina-se seu melhor complemento. Caso este produza uma cota sobre a função objetivo pior (menor) do que a da solução ótima corrente, a solução parcial em questão é podada, já que, baseado na definição IV.7, não há necessidade de testar os outros complementos de W, ficando estes implicitamente enumerados. Caso contrário, duas situações são possíveis:

(i) O complemento é viável. Então ele deve substituir a solução ótima corrente e a solução parcial deve ser podada, ficando todos os seus outros complementos implicitamente enumerados;

(ii) O complemento não é viável. Neste caso deve-se procurar vencer a inviabilidade, buscando-se uma solução parcial descendente desta, procedendo-se como segue: coleciona-se as variáveis livres que fixadas com determinado valor binário ajudariam na obtenção de uma cota sobre a função objetivo melhor que a corrente e cooperariam para vencer a inviabilidade, elegendo-se uma delas por um critério a ser mostrado posteriormente. O índice dessa variável livre é acrescentado àqueles da solução parcial em questão, formando-se assim, uma nova solução parcial descendente daquela.

Obviamente que, se não existem variáveis livres ou todos os complementos de W não são viáveis, a atual solução parcial deve ser podada.

IV.4.2) Critério para Obtenção do Melhor Complemento de uma Solução Parcial

Associado a uma solução parcial W está um problema, denotado por (PH_w^+), envolvendo somente as variáveis livres, da forma:

$$(PH_w^+) \quad \begin{array}{ll} \text{máx} & \dfrac{c_o + \sum\limits_{j\in W} c_j x_j + \sum\limits_{j\notin W} c_j x_j}{d_o + \sum\limits_{j\in W} d_j x_j + \sum\limits_{j\notin W} d_j x_j} \\ \text{s.a:} & \sum\limits_{j\in W} a_{ij} x_j + \sum\limits_{j\notin W} a_{ij} x_j \le b_i \quad ; \; i = 1,\dots,m \\ & x_j \in \{0,1\} \quad ; \quad j \notin W \end{array}$$

onde $j \in W$ simboliza que x_j é uma variável fixa e $j \notin W$ que x_j é livre.

O conjunto de pontos definidos pelas restrições de (PH_w^+) será denotado por S_w. Evidentemente, S_w é um conjunto finito, de cardinalidade não superior a 2^{n-nw}, onde nw é o número de elementos de W.

O melhor complemento de W é, em acordo com a definição IV.7, a solução ótima do problema hiperbólico irrestrito, (PHI_w^+), associado a W.

Observe que, contrariamente ao caso linear (vide BALAS (1965) e GEOFFRION (1967), dentre outros), em que a determinação do melhor complemento de W é trivial (basta tomar, no caso de problemas de maximização, $x_j = 0$ se $c_j < 0$ e $x_j = 1$ se $c_j > 0$, onde c_j é o coeficiente de x_j na função objetivo), para a obtenção desse complemento no problema (PH_w^+), exige-se a resolução de (PHI_w^+). Isto pode ser feito, naturalmente, por um dos algoritmos descritos na seção IV.2. Na verdade, o algoritmo mais indicado para tal, e não considerado neste estudo, é o desenvolvido em ARAGÃO (1988, p.61-65), especial para procedimentos de pesquisa arborescente. O algoritmo proposto restabelece o ótimo quando este é modificado pela fixação de variáveis.

IV.4.3) Critérios de Poda de uma Solução Parcial

Esta seção resume os critérios, discutidos anteriormente, para os quais uma solução parcial deve ser podada, quais sejam:

(i) O melhor complemento de W produz uma cota da função objetivo fracionária pior (menor) do que a da solução ótima corrente;

(ii) O melhor complemento de W produz uma cota sobre a função objetivo melhor (maior) do que a da solução ótima corrente e é viável;

(iii) não existem variáveis livres;

(iv) não existe nenhum complemento viável.

Quando o caso (iv) ocorre, diz-se que existe uma restrição binária inviável. Para detectá-la o seguinte teste é aplicado:

<u>TESTE DE INVIABILIDADE BINÁRIA</u>

A restrição $b_i - \sum_{j \in W} a_{ij} x_j - \sum_{j \notin W} a_{ij} x_j \geq 0 \quad (> 0)$

é binária inviável se e somente se:

$b_i - \sum_{j \in W} a_{ij} x_j - \sum_{j \notin W} \min \{0,\ a_{ij}\} < 0 \quad (\leq 0)$

<u>Prova</u>:

Para simplificação da notação, sejam: $L = \{j : j \notin W\}$, $\alpha_j = a_{ij}$ e $\beta = b_i - \sum_{j \in W} a_{ij} x_j$. Como $W \subset \mathbb{N}$ e é finito, também o é o conjunto L.

(i) $\Rightarrow$

Será mostrado, por indução finita, que, $\forall j \in L$ tal que $x_j \in \{0,1\}$ tem-se:

$$\sum_j \min \{0,\ \alpha_j\} \leq \sum_j \alpha_j x_j \qquad \text{(IV.1)}$$

De fato, $\min \{0,\ \alpha_1\} \leq \alpha_1 x_1$ para $x_1 \in \{0,1\}$. Supondo válida para $j = 1,2,\ldots,n$:

$$\sum_{j=1}^{n} \min \{0,\ \alpha_j\} \leq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \qquad \text{(IV.2)}$$

deve ser mostrado que esta relação também se verifica para

$j = 1,2,\dots,n+1$.

Com efeito, de IV.2 e levando-se em conta que $\min\{0, \alpha_{n+1}\} \leq \alpha_{n+1} x_{n+1}$ para $x_{n+1} \in \{0,1\}$, vem:

$\sum_{j=1}^{n+1} \min\{0, \alpha_j\} \leq \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j$, de onde se conclui a validade da relação IV.1.

Multiplicando a desigualdade IV.1 por -1 e adicionando β a cada um de seus membros, obtem-se:

$$\beta - \sum_{j \in L} \min\{0, \alpha_j\} \geq \beta - \sum_{j \in L} \alpha_j x_j$$

Como, por hipótese, $\beta - \sum_{j \in L} \min\{0, \alpha_j\} < 0$ (≤ 0), resulta, finalmente, que: $\beta - \sum_{j \in L} \alpha_j x_j < 0$ (≤ 0), ou seja, a restrição em questão é binária inviável.

(ii) $\Leftarrow$

Se $\beta - \sum_{j \in L} \alpha_j x_j < 0$ (≤ 0) $\forall x$ com elementos binários seja, sem perda de generalidade, x tal que, para cada um de seus componentes:

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad \alpha_j > 0 \\ 0 & \text{se} \quad \alpha_j < 0 \end{cases}$$

Então, nesse caso, $\sum_{j \in L} \alpha_j x_j = \sum_{j \in L} \min\{0, \alpha_j\}$, implicando o resultado desejado, isto é: $\beta - \sum_{j \in L} \min\{0, \alpha_j\} < 0$ (≤ 0). ■

IV.4.4) Critério para Incremento de uma Solução Parcial

Como discutido anteriormente uma solução parcial deve ser incrementada em mais um elemento quando o seu melhor complemento produzir uma cota sobre a função objetivo hiperbólica superior à da solução ótima corrente e não for viável. Assume-se aqui, naturalmente, que existem variáveis livres, pois, de outra forma, a solução parcial deve ser podada.

Assume-se, também, que não existe uma restrição binária inviável pois, se assim for, a solução parcial corrente deve ser também podada, uma vez que não há como eliminar sua inviabilidade.

Chamando de $x[(PHI_w^+)]$ a solução ótima de (PHI_w^+), o algorítmo cria os conjuntos de índices das variáveis livres que, se fixadas, ajudariam na obtenção de uma cota sobre a função objetivo melhor que a corrente:

$$W_1 = \{ j : j \notin W, x_j = 1 \text{ em } x[(PHI_w^+)] \}$$

$$W_2 = \{ j : j \notin W, x_j = 0 \text{ em } x[(PHI_w^+)] \}$$

Dentre as variáveis livres o algoritmo elege um índice $j \in (W_1 \cup W_2)$ que contribui para a redução da inviabilidade da atual solução parcial. GRANOT e GRANOT (1976) sugere dois critérios para se calcular tal índice. Um deles (o que nos testes realizados produziu melhores resultados) é o seguinte:

Sejam $A_1 = \max\limits_{k \in W_1} \{ \sum\limits_{i=1}^{m} \min \{ 0, b_i - a_i(W) + a_{ik} \} \}$ e

$A_2 = \max\limits_{k \in W_2} \{ \sum\limits_{i=1}^{m} \min \{ 0, b_i - a_i(W) - a_{ik} \} \}$ onde:

$a_i(W) = \sum\limits_{j \in W} a_{ij} x_j^w + \sum\limits_{j \in W_1} a_{ij}$.

Chamando de $k_1 \in W_1$ o maior índice de W_1 envolvido na determinação de A_1 e de $k_2 \in W_2$ o menor índice envolvido no cálculo de A_2, então:

(i) Se $A_1 \geq A_2$ aumente W por $-k_1$;

(ii) Se $A_1 < A_2$ aumente W por k_2.

IV.4.5) O Algoritmo Enumerativo

Apresenta-se, agora, o algoritmo de enumeração implícita discutido anteriormente, o qual segue o esquema de enumeração proposto em GEOFFRION (1967) e utiliza-se da heurística de incremento da solução parcial sugerida em GRANOT e GRANOT (1976).

A notação utilizada é a seguinte:

$x^*[(PHI_w^+)]$: solução ótima do problema hiperbólico irrestrito associado à solução parcial W;

x^* : solução ótima corrente;

$\bar{v}$: valor da função objetivo fracionária relativo à solução ótima corrente;

$v[(PHI_w^+)]$: valor ótimo de (PHI_w^+).

ALGORITMO ENUMERATIVO

PASSO 0 : Faça: $\bar{v} \leftarrow -M$, onde M é um número real positivo arbitrariamente grande;

$W \leftarrow \emptyset$;

PASSO 1 : Resolva (PHI_v^+)

Se $v[(PHI_v^+)] \leq \bar{v}$

então vá para o PASSO 4

senão Se $x^*[(PHI_v^+)]$ é viável para (PH_v^+)

então FAÇA: $x^* \leftarrow x^*[(PHI_v^+)]$;

$\bar{v} \leftarrow v[(PHI_v^+)]$;

Vá para o PASSO 4 ;

PASSO 2 : (a) Se não existem variáveis livres

então Vá para o PASSO 4;

(b) Se existe uma restrição binária inviável

então Vá para o PASSO 4;

PASSO 3 : Aumente W à direita por $\pm j$ para uma variável livre x_j , de acordo com a seção IV.4.4, e retorne ao PASSO 1 ;

PASSO 4 : Localize o elemento mais à direita de W ainda não sublinhado. Se não existe nenhum, termine. Caso contrário, troque-o pelo seu complemento lógico sublinhado, abandone todos os elementos à sua direita e retorne ao PASSO 1;

Tal como discutido no capítulo III uma solução viável inicial para o conjunto S pode ser obtida resolvendo-se, por exemplo, como testado no trabalho de BITRAN (1979), $\min_{x \in S} (d_o + d^t x)$ ou $\max_{x \in S} (c_o + c^t x)$. Desta forma, conhecida essa solução viável, $\bar{v}$ pode ser inicializado, no passo 0, como sendo o valor da função objetivo fracionária relativa a essa solução, fornecendo, assim, um limite inferior do valor ótimo de (PH^+). Neste caso, pode-se, também, inicializar W, ao invés do conjunto vazio, pelos elementos não sublinhados associados à referida solução ou, então, a uma permutação destes.

Quando, para uma dada solução parcial W, existe uma variável livre que esteja restrita a tomar um certo valor binário então, ao invés de aumentar W por um índice que reduz sua inviabilidade, deve-se aumentá-la pelo índice sublinhado daquela variável livre. Isto, naturalmente, simplifica o processo enumerativo, já que guia a soluções parciais podadas. Para se detectar variáveis livres nessas condições o seguinte teste pode ser aplicado:

<u>TESTE DE VIABILIDADE BINÁRIA CONDICIONAL</u>

Se em alguma solução binária da restrição:

$$b_i - \sum_{j \in W} a_{ij} x_j - \sum_{j \notin W} a_{ij} x_j \geq 0 \quad (> 0)$$

existe um índice j^* tal que:

$$b_i - \sum_{j \in W} a_{ij} x_j - \sum_{j \notin W} \min \{0, a_{ij}\} - |a_{ij}*| < 0 \quad (\leq 0)$$

então $x_j* = 0$ se $a_{ij}* > 0$ ou $x_j* = 1$ se $a_{ij}* < 0$ e W é aumentado à direita por $-\underline{j}^*$ ou $\underline{j}^*$ para a variável livre em questão que deve tomar o valor 0 ou 1, respectivamente.

<u>Prova</u>:

Tal como antes, sejam: $L = \{ j : j \notin W \}$, $\alpha_j = a_{ij}$ e $\beta = b_i - \sum_{j \in W} a_{ij} x_j$.

Assume-se, como condição implícita na proposição, que:

$$\beta - \sum_{j \in L} \min \{0, \alpha_j\} \geq 0 \qquad \text{(IV.3)}$$

pois, caso contrário, a restrição é inviável. Sendo:

$$\beta - \sum_{j \in L} \min \{0, \alpha_j\} - |\alpha_j*| < 0 \qquad \text{(IV.4)}$$

então dois casos, com respeito ao sinal de α_j, devem ser analizados:

(i) $\alpha_j* < 0$

Seja $- \sum_{j \in L} \min \{0, \alpha_j\} - |\alpha_j*| = - \sum_{j \in L^*} \min \{0, \alpha_j\}$, onde: $L^* = \{ j: j \in L, j \neq j^* \}$.

Então, de IV.3 e IV.4 tem-se:

$$\sum_{j\in L} \min\{0, \alpha_j\} \le \beta < \sum_{j\in L^*} \min\{0, \alpha_j\} < 0$$

Supondo $x_j^* = 0$, considerando a relação IV.1 e dado que $\alpha_j < 0$, têm-se, sucessivamente:

$$\beta < \sum_{j\in L^*} \min\{0, \alpha_j\} \le \sum_{j\in L^*} \alpha_j x_j < \sum_{j\in L} \alpha_j x_j,$$

implicando na inviabilidade da restrição supracitada. Desse absurdo conclui-se que: $x_j^* = 1$.

(ii) $\alpha_j^* > 0$

De IV.4: $\beta - |\alpha_j^*| < \sum_{j\in L} \min\{0, \alpha_j\}$. Supondo $x_j^* = 1$, têm-se:

$$\beta - \alpha_j^* - \sum_{j\in L^*} \alpha_j x_j < \sum_{j\in L} \min\{0, \alpha_j\} - \sum_{j\in L^*} \alpha_j x_j \le 0,$$

ou seja, $\beta - \alpha_j^* - \sum_{j\in L^*} \alpha_j x_j = \beta - \sum_{j\in L} \alpha_j x_j < 0$ e, portanto, a restrição é inviável. Logo: $x_j^* = 0$. ■

Para introduzir esse teste, o algoritmo enumerativo deve incluir, no PASSO 2, o caso (c) abaixo:

PASSO 2 : (c) Se existe uma variável x_j restrita a tomar um certo valor binário
então Aumente W à direita por $\underline{j}$ ($-\underline{j}$) se a variável livre em questão tomar o valor 1 (0), de acordo com o teste de Viabilidade Binária Condicional.
e retorne ao PASSO 1 ;

A seção seguinte introduz, relativamente a uma solução parcial, uma restrição chamada de "restrição substituta" que é mais forte no sentido de que tal teste bem como o de inviabilidade binária, descrito na seção IV.4.3, são mais eficazes quando aplicados à ela.

Como observação final vale ressaltar que nada impede que, ao se incrementar uma solução parcial W, esta o seja por vários elementos não sublinhados ou mesmo sublinhados desde que, nesse último caso, não se exclua um complemento viável de W melhor que a solução ótima corrente.

Soluções ótimas alternativas podem ser obtidas, bastando para isso, retirar a igualdade do teste que investiga se $v[(PHI^+_w)] \leq \bar{v}$, e armazenar as possíveis soluções ótimas alternativas correntes.

Apresenta-se, a seguir, um exemplo comentado da aplicação do Algoritmo Enumerativo.

Exemplo IV.2:

Seja resolver o problema fracionário linear do exemplo IV.1.

O Algoritmo Enumerativo inicia tomando $W^0 = \emptyset$ e $\bar{v} = -\infty$. Resolvendo-se $(PHI^+_w o)$, no PASSO 1, obtêm-se: $v[(PHI^+_w o)] = 1,833 > \bar{v}$, mas com $x[(PHI^+_w o)] = (1,1,1,0)$ inviável. Os testes de inviabilidade binária e viabilidade binária condicional aplicados a W^0 falham. Cria-se, então, um descendente de W^0 pela eleição da variável livre x_3, fixada no valor ZERO, como uma tentativa de vencer a inviabilidade.

Para a nova solução parcial gerada, $W^1 = \{-3\}$, tem-se: $v[(PHI^+_w 1)] = 1,8 > \bar{v}$ com $x[(PHI^+_w 1)] = (1,1,0,0)$ viável para o conjunto de restrições do problema. Essa *solução viável* é, então, armazenada como a solução corrente:

$$x^* \leftarrow (1,1,0,0)$$
$$\bar{v} \leftarrow 1,8$$

Sendo x^* o melhor complemento de W^1 não há necessidade de testar os seus outros complementos. Assim, $2^{4-1} = 8$ complementos de W^1 são implicitamente enumerados.

$W^2 = \{\underline{3}\}$ é, então, obtida. $v[(PHI^+_w 2)] = 1,833$ mas com $x[(PHI^+_w 2)] = (1,1,0,0)$ inviável. Os testes do PASSO 2 falham e, pela heurística estabelecida no PASSO 3, cria-se um descendente de W^2 pela eleição da variável livre x_2, fixada no valor 0.

Para $W^3 = \{\underline{3}, -2\}$, têm-se: $v[(PHI^+_w 3)] = 1,5 < \bar{v}$ sendo W^3, portanto, podada. (Os $2^{4-2} = 4$ complementos de W^3 são implicitamente enumerados).

$W^4 = \{\underline{3}, \underline{2}\}$ é formada e $v[(PHI^+_w 4)] = 1,833 > \bar{v}$ com $x[(PHI^+_w 4)] = (1,1,1,0)$ não viável. O teste de inviabilidade binária masca, mas o de viabilidade binária condicional indica que a variável x_4 deve ter seu valor fixado em 1 para que a próxima solução parcial, descendente de W^4, tenha pelo menos um complemento viável.

$W^5 = \{\underline{3}, \underline{2}, \underline{4}\}$ é, então, gerada. O melhor complemento dessa solução parcial, $x[(PHI_w^+5)] = (1,1,1,1)$, não produz um valor para a função objetivo melhor do que a corrente ($v[(PHI_w^+5)] = 1,5 < \bar{v}$) e, portanto, W^5 é podada. (2 complementos são implicitamente enumerados).

Como W^5 é podada e não existem elementos não sublinhados, dá-se por encerrado o processo enumerativo.

A solução ótima é a última solução que foi guardada como solução corrente e, assim sendo:

$$x^* = (1,1,0,0)$$
$$\bar{v} = 1,8$$

A árvore gerada pelas soluções parciais, com 6 *nós*, está na figura IV.3.

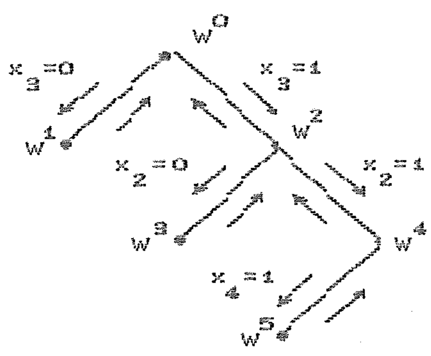


FIGURA IV.3: Árvore das soluções parciais geradas pelo Algoritmo Enumerativo aplicado ao problema do exemplo IV.1

IV.4.6) O Uso de Filtros

Informações adicionais, e eficazes, sobre viabilidade e otimalidade relativas às variáveis livres de (PH_w^+) podem ser obtidas mediante uma combinação criteriosa das restrições originais do problema, numa única restrição, chamada de filtro ou restrição substituta. Essas restrições substitutas visam capturar informações as quais não poderiam ser extraídas das restrições originais do problema, tomadas individualmente.

A definição que se segue é o ponto de partida para o estudo desses filtros:

<u>Definição</u> <u>IV.8</u>: Uma restrição substituta é uma combinação linear não negativa das restrições do problema original.

Como $b - Ax \geq 0$ descreve o conjunto de restrições do problema (PH^+) em questão então, pela definição acima, uma restrição substituta tem a forma:

$$u(b - Ax) \geq 0$$

onde $u \in \mathbb{R}^m$ é tal que $u_i \geq 0 \; \forall i = 1,\ldots,m.$

A partir dessa definição deduz-se, imediatamente, que:

(i) Se x^0 é uma solução viável do problema original ($b - Ax^0 \geq 0$) então x^0 é também uma solução viável de qualquer restrição substituta desse problema; o que mostra que uma restrição substituta é uma restrição redundante no sentido próprio da palavra;

(ii) Se uma restrição substituta não tem solução viável ($u(b - Ax) < 0$) então o problema original também não tem (Por construção $u_i \geq 0 \; \forall i = 1,\ldots,m$ e, portanto, para que a restrição substituta seja inviável deve existir pelo menos um índice k, $1 \leq k \leq m$, tal que: $b_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j < 0$). Para uma dada solução parcial, a existência de uma restrição nessas condições, implicaria em sua poda; o que sugere, com a intenção de apressar o processo enumerativo, a criação de testes que considerem esta possibilidade;

(iii) Se x^0 é uma solução viável para a restrição substituta ($u(b - Ax) > 0$), não necessariamente o é para o conjunto de restrições originais (Pode existir k, $1 \leq k \leq m$, com $b_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j < 0$ e, ainda assim, $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{m} u_i[b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j] + u_k[b_k - \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j] > 0$). Conclui-se daí, que toda *solução* gerada pelo algoritmo enumerativo deve ter sua viabilidade testada frente ao conjunto de restrições originais.

Dois tipos de filtros são apresentados: um baseado em BALAS (1967) e outro em GEOFFRION (1969). Esses filtros, como será visto, são gerados através de soluções produzidas por variáveis duais relativas às restrições de subproblemas do problema proposto e seu uso visa explorar aquelas referidas informações no sentido de fortificar a viabilidade e permitir que testes de poda mais eficazes sejam realizados nas várias soluções parciais.

Na discussão que se segue, assume-se que o teste de inviabilidade binária já foi aplicado à solução parcial corrente e que, portanto, pelo menos um complemento viável de W existe, ou seja, o conjunto, S_w, de pontos definidos pelas restrições do problema hiperbólico (PH_w^+) é não vazio.

IV.4.6.1) O Filtro no sentido do de GEOFFRION (1969)

Seja $\bar{v}$ o melhor valor corrente de (PH^+). Se o conjunto S contêm uma solução com um valor da função objetivo maior que $\bar{v}$ então essa solução deve satisfazer:

$$\frac{c_o + c^t x}{d_o + d^t x} > \bar{v}$$

ou, equivalentemente, tendo em vista que o denominador de f é estritamente positivo em S:

$$c_o + c^t x - \bar{v}(d_o + d^t x) > 0 \qquad \text{(IV.5)}$$

Uma restrição substituta, relativamente a uma solução parcial W, é agora obtida, tal como em GEOFFRION (1969), tomando-se uma combinação linear não negativa das restrições originais mais a restrição adicional acima. Objetiva-se com isso restringir a análise a apenas aqueles complementos viáveis de W que produzam um valor para a função objetivo melhor que a atual cota $\bar{v}$.

Como $b - Ax \geq 0$ representam as restrições originais do problema hiperbólico (PH^+) em estudo, então a restrição substituta tem a forma:

$$\mu(b - Ax) + (c_o + c^t x) - \bar{v}(d_o + d^t x) > 0 \qquad \text{(IV.6)}$$

O problema agora é a determinação de $\mu = (\mu_1,\ldots,\mu_m)$ onde $\mu_i \geq 0\ \forall i$.

<u>Definição</u> <u>IV.9</u>: Relativamente a uma solução parcial W a restrição substituta:

$\mu_1(b - Ax) + (c_o + c^t x) - \bar{v}(d_o + d^t x) > 0$,

com $\mu_1 \geq 0$, é mais forte do que a restrição substituta:

$\mu_2(b - Ax) + (c_o + c^t x) - \bar{v}(d_o + d^t x) > 0$,

com $\mu_2 \geq 0$, se:

$\max\limits_{x\in S}\{\mu_1(b - Ax) + (c_o + c^t x) - \bar{v}(d_o + d^t x)\} <$

$\max\limits_{x\in S}\{\mu_2(b - Ax) + (c_o + c^t x) - \bar{v}(d_o + d^t x)\}$,

onde os máximos são tomados sobre as variáveis livres, isto é, sobre as variáveis x_j tais que $j \notin W$.

O problema, então, de determinar a restrição substituta mais forte, no sentido de GEOFFRION (1976), é o de minimizar, sobre todos os $\mu \geq 0$, a expressão:

$$\max_{x\in S} \{\mu(b - Ax) + (c_o + c^t x) - \bar{v}(d_o + d^t x);\ x_j \in \{0,1\},$$
$$j \notin W,\ x_j = x_j^W \text{ para } j \in W\},$$

ou seja,

$$\min_{\mu\geq 0}\ \max_{x\in S}\{\sum_{i=1}^{m}\mu_i(b_i - \sum_{j\in W} a_{ij}x_j - \sum_{j\notin W} a_{ij}x_j) + c_o + \sum_{j\in W} c_j x_j +$$
$$\sum_{j\notin W} c_j x_j - \bar{v}(d_o + \sum_{j\in W} d_j x_j + \sum_{j\notin W} d_j x_j);\ x_j \in \{0,1\} \text{ e } j \notin W\}.$$

Mostra-se, agora, como encontrar $\mu^* = (\mu_1^*,\ldots,\mu_m^*)$, solução ótima do problema anterior. Desenvolvendo a parte de maximização deste, obtêm-se:

$$\max_{x\in S}\{\sum_{i=1}^{m}\mu_i(b_i - \sum_{j\in W} a_{ij}x_j) + (c_o - \bar{v}d_o) + \sum_{j\in W}(c_j - \bar{v}d_j)x_j -$$
$$\sum_{i=1}^{m}\mu_i(\sum_{j\notin W} a_{ij}x_j) + \sum_{j\notin W}(c_j - \bar{v}d_j)x_j\ ;\ x_j \in \{0,1\} \text{ e } j \notin W\}$$

ou, equivalentemente:

$$(c_o - \bar{v}d_o) + \sum_{j\in W}(c_j - \bar{v}d_j)x_j + \{\sum_{i=1}^{m}\mu_i(b_i - \sum_{j\in W}a_{ij}x_j) + \max_{x\in S}\{\sum_{j\notin W}(c_j - \bar{v}d_j - \sum_{i=1}^{m}\mu_i a_{ij})x_j \ ; \ x_j \in \{0,1\} \ e \ j \notin W\}.$$

Como o valor máximo da função objetivo do problema linear acima pode ser determinado tomando-se $x_j = 1$ se o coeficiente de x_j é positivo e $x_j = 0$ caso contrário, e este resultado não é alterado quando $x_j = 0$ ou 1 é substituído por $0 \le x_j \le 1$, o problema linear 0-1 acima é equivalente ao problema linear contínuo:

$$(c_o - \bar{v}d_o) + \sum_{j\in W}(c_j - \bar{v}d_j)x_j + \sum_{i=1}^{m}\mu_i(b_i - \sum_{j\in W}a_{ij}x_j) + \max_{x\in S}\{\sum_{j\notin W}(c_j - \bar{v}d_j - \sum_{i=1}^{m}\mu_i a_{ij})x_j \ ; \ 0 \le x_j \le 1 \ ; \ j \notin W\},$$

cuja parte de maximização é, pelo Teorema de Dualidade em programação linear, igual a:

$$\min\{\sum_{j\notin W}\omega_j \ : \ \omega_j \ge c_j - \bar{v}d_j - \sum_{i=1}^{m}\mu_i a_{ij} \ ; \ \omega_j \ge 0 \ ; \ j \notin W\}.$$

Reunindo os resultados precedentes tem-se, finalmente, a forma do problema que produzirá os coeficientes $\mu_i^* \ge 0 \ \forall i$ para a geração dos filtros:

$(\overline{LG}_W^+)$:

$$\min (c_o - \bar{v}d_o) + \sum_{j\in W}(c_j - \bar{v}d_j)x_j + \sum_{i=1}^{m}\mu_i(b_i - \sum_{j\in W}a_{ij}x_j) + \sum_{j\notin W}\omega_j$$

$$\text{s.a: } \omega_j \ge c_j - \bar{v}d_j - \sum_{i=1}^{m}\mu_i a_{ij} \ , \ j \notin W$$

$$\omega_j \ge 0 \ , \ j \notin W$$

$$\mu_i \ge 0 \ , \ i = 1,2,\ldots,m.$$

Observe que o dual do problema anterior é:

$(\overline{DLG}_v^+)$:

$$\max \{c_o + \sum_{j \in W} c_j x_j - \bar{v}(d_c + \sum_{j \in W} d_j x_j) + \sum_{j \notin W} (c_j - \bar{v} d_j) x_j\}$$

$$\text{s.a:} \quad \sum_{j \in W} a_{ij} x_j + \sum_{j \notin W} a_{ij} x_j \le b_i, \; i = 1, \ldots, m.$$

$$0 \le x_j \le 1, \; j \notin W.$$

onde $(\overline{DLG}_v^+)$ é um problema linear que está relacionado, através dos resultados da proposição III.9, com $(\overline{PH}_v^+)$, a versão contínua de (PH_v^+).

Resulta do Teorema da Dualidade de Programação Linear que, se as variáveis duais associadas à solução ótima de $(\overline{LG}_v^+)$ são todas inteiras (zeros's e/ou um's), elas formam uma solução ótima para o problema discreto, (DLG_v^+), associado a $(\overline{DLG}_v^+)$.

Seja $v[(\overline{LG}_v^+)]$ o valor ótimo de $(\overline{LG}_v^+)$. Então, ao se resolver o problema contínuo $(\overline{LG}_v^+)$, apenas um dos três casos a seguir pode ocorrer:

caso (a) $v[(\overline{LG}_v^+)] \le 0$.

Neste caso existe, com base na relação IV.6, uma restrição substituta binária inviável. Este resultado indica que não existe um vetor binário que satisfaça as restrições originais do problema e produza uma cota sobre a função objetivo fracionária melhor que a corrente. Portanto, a solução parcial em questão deve ser podada.

caso (b) $v[(\overline{LG}_v^+)] > 0$ e as variáveis duais de $(\overline{LG}_v^+)$ são inteiras (zero's e/ou um's).

Tendo em vista a proposição III.9, que relaciona $(\overline{DLG}_v^+)$ a $(\overline{PH}_v^+)$, conclui-se que soluções ótimas inteiras de $(\overline{DLG}_v^+)$ são subótimas para (PH_v^+). Assim, uma solução viável melhor para (PH^+) é dada por W e os valores dessas variáveis duais, as quais devem substituir a solução ótima corrente. W, pelas razões expostas, não pode ser podada e um novo problema $(\overline{LG}_v^+)$, com um valor atualizado para $\bar{v}$, deve ser resolvido e uma nova análise deve ser feita.

caso (c) $v[(\overline{LG}_v^+)] > 0$ e nem todas as variáveis duais do problema $(\overline{LG}_v^+)$ são inteiras.

Neste caso, W não é podada, mas uma restrição substituta, dada por:

$$(\mu^* A + \bar{v}d^t - c^t)x < (\mu^* b + c_o - \bar{v}d_o)$$

está à disposição para a realização de testes de viabilidade binária condicional, como descrito na seção IV.4.5. Esta restrição pode ser incluída no conjunto de restrições originais, relativamente à solução parcial em questão, como mais uma condição para eliminar do espaço de soluções viáveis aquelas com cota sobre a função objetivo inferior à corrente. Deve ser observado, entretanto, que, em decorrência da definição IV.8 e conforme discutido na seção IV.4.6, se um complemento de uma solução parcial é viável para a restrição substituta, não necessariamente o é para o conjunto de restrições originais. Portanto, faz-se necessário testar sua viabilidade frente ao conjunto original de restrições do problema.

IV.4.6.2) O Filtro no sentido do de BALAS (1967)

Seja o seguinte problema fracionário linear, versão contínua de (PH^+), relativamente a uma dada solução parcial W:

$$(\overline{PH}^+) \qquad \max \quad \frac{c_o + c^t x}{d_o + d^t x}$$

$$\text{s.a:} \quad Ax \le b$$

$$x \in [0,1]^p$$

onde p é o número de variaveis livres.

Utilizando-se da transformação de CHARNES e COOPER (1962): $y = tx$ e $t = 1/(d_o + d^t x)$, o seguinte problema linear equivalente, associado à W, é obtido:

$$(\overline{LPH}^{+}) \qquad \begin{array}{ll} \text{máx} & c^t y + c_o t \\ \text{s.a:} & Ay - bt \le 0 \\ & d^t y + d_o t = 1 \\ & y - et \le 0 \\ & y,\ t \ge 0 \end{array}$$

onde $e = (1,1,\ldots,1)^t$ e cujo dual é:

$$(\overline{DLPH}^{+}) \qquad \begin{array}{ll} \text{min} & u_c \\ \text{s.a:} & A^t u + d^t u_o + \rho \ge c \\ & -b^t u + d_o u_o - \rho \ge c_o \\ & u \ge 0,\ u_o \text{ irrestrito},\ \rho \ge 0 \end{array}$$

Tal como em BALAS (1967) seja, relativamente a W, o seguinte problema filtro:

$$(\overline{PH}_f) \qquad \begin{array}{ll} \text{máx} & (c_o + c^t x)/(d_o + d^t x) \\ \text{s.a:} & uAx \le ub \\ & x \in [0,1]^p \end{array}$$

onde u é um peso não negativo.

Para se determinar uma restrição substituta mais forte uma definição, similar à de BALAS (1967), é adotada:

<u>Definição IV.10</u>: Relativamente a uma solução parcial W, a restrição substituta $u_1 Ax \le u_1 b$ é mais forte que uma outra restrição substituta $u_2 Ax \le u_2 b$ se:

$$\max_{x \ge o} \{(c_o + c^t x)/(d_o + d^t x) \text{ s.a: } u_1 Ax \le u_1 b,\ x \le 1\} < \max_{x \ge o} \{(c_o + c^t x)/(d_o + d^t x) \text{ s.a: } u_2 Ax \le u_2 b,\ x \le 1\}.$$

Então, o problema de determinar a restrição substituta mais forte, no sentido de BALAS (1967), é o de minimizar, sobre todos os $u \ge 0$, a expressão:

$$\max_{x \geq 0} \{(c_o + c^t x)/(d_o + d^t x) \text{ s.a: } uAx \leq ub,\ x_j \leq 1,\ j \notin W \text{ e } x_j = x_j^v \text{ para } j \in W\}$$

ou, aplicando a transformação de CHARNES e COOPER (1962):

$$(\overline{LPH}_f) \quad \min_{u \geq o} \ \max \ c^t y + c_o t$$
$$\text{s.a: } uAy - ubt \leq 0$$
$$d^t y + d_o t = 1$$
$$y - et \leq 0$$
$$y,\ t \geq 0$$

Para um melhor entendimento da discussão que se segue, os problemas $(\overline{LPH}^+)$, $(\overline{DLPH}^+)$ e $(\overline{LPH}_f)$ serão postos num formato mais adequado para tal:

$(\overline{LPH}_v^+)$:

$$\max \sum_{j \notin W} c_j y_j + (c_o + \sum_{j \in W} c_j x_j) t$$
$$\text{s.a: } \sum_{j \notin W} a_{ij} y_j + (\sum_{j \in W} a_{ij} x_j - b_i) t \leq 0 \ ; \ i = 1, \ldots, m$$
$$\sum_{j \notin W} d_j y_j + (\sum_{j \in W} d_j x_j + d_o) t = 1$$
$$y_j - t \leq 0 \ ; \ j \notin W$$
$$y_j \geq 0,\ j \notin W; \quad t \geq 0$$

$(\overline{DLPH}_v^+)$:

$$\min \ u_o$$
$$\text{s.a: } \sum_{i=1}^{m} u_i a_{ij} + u_o d_j + \rho_j \geq c_j \ ; \ j \notin W$$
$$\sum_{i=1}^{m} u_i (\sum_{j \in W} a_{ij} x_j - b_i) + u_o (\sum_{j \in W} d_j x_j + d_o) - \sum_{j \notin W} \rho_j \geq c_o + \sum_{j \in W} c_j x_j$$
$$u_i \geq 0 \ ; \ i = 1, 2, \ldots, m$$
$$\rho_j \geq 0 \ ; \ j \notin W \ ; \ u_o \text{ irrestrito}$$

$(\overline{LPH}_f)$:

$$\begin{array}{ll} \min\limits_{u \geq 0} \; \max & \sum\limits_{j \notin W} c_j y_j + (c_c + \sum\limits_{j \in W} c_j x_j)t \\ \text{s.a:} & \sum\limits_{j \notin W} (\sum\limits_{i=1}^{m} u_i a_{ij} y_j) + \sum\limits_{i=1}^{m} u_i (\sum\limits_{j \in W} a_{ij} x_j - b_i) t \leq 0 \\ & \sum\limits_{j \notin W} d_j y_j + (\sum\limits_{j \in W} d_j x_j + d_o) t = 1 \\ & y_j - t \leq 0 \; ; \; j \notin W \\ & t \geq 0, \quad u_i \geq 0, \; i = 1, \ldots, m. \end{array}$$

Seja (u^*, u_o^*, ρ^*) uma solução ótima de $(\overline{DLPH}_v^+)$. Como ressaltado em GRANOT e GRANOT (1976), empregando uma técnica semelhante àquela usada por BALAS (1967), pode ser mostrado que (u^*, u_o^*) também resolve $(\overline{LPH}_f)$. Portanto, de forma a obter uma restrição substituta, no sentido definido por BALAS (1967), faz-se necessário resolver o problema linear $(\overline{LPH}_v^+)$. As variáveis duais de $(\overline{LPH}_v^+)$, a saber: (u^*, u_o^*), são aqueles multiplicadores os quais produzem a restrição substituta mais forte:

$$\sum_{j \notin W} [\sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij}] x_j \leq \sum_{i=1}^{m} u_i^* (b_i - \sum_{j \in W} a_{ij} x_j)$$

Seja $\bar{v}$ o valor ótimo corrente de (PH^+), (y^*, t^*) solução ótima de $(\overline{LPH}_v^+)$ e $v[(\overline{LPH}_v^+)]$ seu valor ótimo. Então, na determinação da restrição substituta mais forte, no sentido de BALAS (1967), apenas um dos três casos possíveis pode ocorrer:

caso ($\bar{a}$): $v[(\overline{LPH}_v^+)] \leq \bar{v}$.

Neste caso a solução parcial W em questão deve ser podada, uma vez que nenhum de seus complementos produz uma solução melhor que a corrente;

caso ($\bar{b}$): $v[(\overline{LPH}_v^+)] > \bar{v}$ e, $\forall j \notin W$, têm-se $y_j^*/t^* \in \{0,1\}$

O complemento de W, definido por $x_j^* = y_j^*/t^*$ $\forall j \notin W$ é, obviamente, o melhor complemento viável de W. Logo, deve-se substituir $\bar{v}$ por $v[(\overline{LPH}_v^+)]$ e a solução ótima corrente pelo complemento ótimo de W, devendo ser esta solução parcial podada;

caso (c): $v[(\overline{LPH}_w^+)] > \bar{v}$ e $\exists j \notin W$ tal que $y_j^*/t^* \notin \{0,1\}$.

Neste caso, a solução parcial corrente não pode ser podada; contudo, uma restrição substituta, dada por:

$$\sum_{j \notin W} [\sum_{i=1}^{m} u_i^* a_{ij}] x_j \leq \sum_{i=1}^{m} u_i^* (b_i - \sum_{j \in W} a_{ij} x_j)$$

está à disposição para a realização de testes de viabilidade binária condicional, como citado na seção IV.4.5, e pode ser incluída no conjunto de restrições originais do problema.

IV.4.7) O Algoritmo Enumerativo com Filtro

Apresenta-se, a seguir, o algoritmo de enumeração implícita que utiliza-se de restrições substitutas, da forma desenvolvida na seção IV.4.6, com o objetivo de fortificar a viabilidade e os testes de poda realizados nas várias soluções parciais.

<u>ALGORITMO ENUMERATIVO COM FILTRO</u>

PASSO 0 : Seja $\bar{v}$ um limite inferior conhecido do valor ótimo de (PH^+) e W uma solução parcial sem elementos sublinhados.

PASSO 1 : Resolva (PHI_w^+)

Se $v[(PHI_w^+)] \leq \bar{v}$

então vá para o PASSO 6

senão Se $x^*[(PHI_w^+)]$ é viável para (PH_w^+)

então FAÇA: $x^* \leftarrow x^*[(PHI_w^+)]$;

$\bar{v} \leftarrow v[(PHI_w^+)]$;

Vá para o PASSO 6 ;

PASSO 2 : (a) Se não existem variáveis livres então vá para o PASSO 6;

(b) Se existe uma restrição binária inviável então vá para o PASSO 6;

(c) Se uma variável livre x_j está restrita a tomar um certo valor binário, então aumente W à direita por $\underline{j}$ ($-\underline{j}$) para a variável livre em questão que deve tomar o valor 1 (0) e retorne ao PASSO 1;

PASSO 3 : (a) Se (PH_v^+) não inclui uma solução viável melhor que a corrente vá para o PASSO 6;

(b) Se (PH_v^+) tem uma solução ótima com um valor maior que $\bar{v}$ então substitua $\bar{v}$ por aquele valor ótimo, armazene essa solução como a solução ótima corrente e vá para o PASSO 6;

(c) Aplique o item (c) do PASSO 2;

PASSO 4 : Adicione uma restrição substituta a (PH_v^+) ou apague uma ou não faça nada;

PASSO 5 : Aumente W à direita por $\pm$ j para uma variável livre x_j , de acordo com a seção IV.4.4, e retorne ao PASSO 1 ;

PASSO 6 : Localize o elemento mais à direita de W ainda não sublinhado. Se não existe nenhum, termine. Caso contrário, troque-o pelo seu complemento lógico sublinhado, abandone todos os elementos à sua direita e retorne ao PASSO 1;

Os casos descritos no PASSO 3 podem ocorrer durante a determinação de uma restrição substituta mais forte, como explanado na seção IV.4.6. Deve ser observado que, no caso (b), se o filtro analisado for aquele no sentido de GEOFFRION (1969), então, como discutido anteriormente, um novo problema $(\overline{LG}_v^+)$, com um valor atualizado para $\bar{v}$, deve ser resolvido, para certificar se realmente é possível ou não podar a solução parcial corrente.

Não estando uma solução viável inicial disponível, inicializa-se o algoritmo, no passo 0, com $W = \emptyset$ e $\bar{v} = -M$, onde $M > 0$ é um número real arbitrariamente grande. Neste caso, o PASSO 3 e o PASSO 4 só são ativados a partir do momento em que uma solução viável for encontrada.

Apresenta-se, a seguir, um exemplo comentado ilustrando a aplicação do Algoritmo Enumerativo com Filtro.

Exemplo IV.3:

Seja resolver o problema de programação fracionária linear do exemplo IV.1.

O procedimento inicializa com $W^0 = \emptyset$ e $\bar{v} = -\infty$. Resolvendo-se (PHI_w^+o) obtem-se: $v[(PHI_w^+o)] = 1,833 > \bar{v}$ mas $x[(PHI_w^+o)] = (1,1,1,0)$ não é viável.

Os testes de inviabilidade binária e viabilidade binária condicional são acionados, mas falham. Como ainda não há uma solução viável, os passos 3 e 4 não são acionados. A heurística estabelecida no PASSO 5 cria um descendente para a solução parcial corrente elegendo a variável livre x_3, fixando-a no valor ZERO.

Para a solução parcial gerada, $W^1 = \{-3\}$, $v[(PHI_w^+1)] = 1,5 > \bar{v}$ com $x[(PHI_w^+1)] = (1,1,0,0)$ viável. Os mesmos são, então, armazenados e W^1 é podada.

Para $W^2 = \{\underline{3}\}$, $v[(PHI_w^+2)] = 1,833 > \bar{v}$ com $x[(PHI_w^+2)] = (1,1,1,0)$ inviável. Os testes do PASSO 2 falham e, então, uma análise de restrição substituta é feita.

Se o filtro escolhido for o no sentido do de GEOFFRION (1969) então o seguinte problema linear deve ser resolvido:

$$
\begin{array}{lllllllll}
-2,4 + \min & 3\mu_1 & & + 4\mu_3 & + \omega_1 & + \omega_2 & + \omega_3 & & \\
\text{s.a:} & \mu_1 & - \mu_2 & + 2\mu_3 & + \omega_1 & & & \geq & 1,2 \\
 & \mu_1 & + 2\mu_2 & - \mu_3 & & + \omega_2 & & \geq & 1,4 \\
 & \mu_1 & - \mu_2 & + \mu_3 & & & + \omega_3 & \geq & -2,6 \\
 & \multicolumn{8}{l}{\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3 \geq 0}
\end{array}
$$

cujo valor ótimo é -0,32; o que indica que não existe uma solução binária viável com valor da função objetivo fracionária superior à corrente. Observe que uma informação dessa não era possível de ser obtida apenas com base nas restrições originais do problema. W^2 é, então, podada, e, como inexistem elementos não sublinhados, o processo enumerativo termina.

A mesma conclusão anterior poderia ter sido obtida se o filtro escolhido fosse o no sentido do de BALAS (1967). Neste caso, o programa linear a ser resolvido seria:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{máx} & 3y_1 & + & 5y_2 & + & y_4 & + & 3t & & \\
\text{s.a:} & y_1 & + & y_2 & + & y_4 & - & 3t & \leq & 0 \\
 & -y_1 & + & 2y_2 & - & 5y_4 & & & \leq & 0 \\
 & 2y_1 & - & y_2 & + & y_4 & - & 4t & \leq & 0 \\
 & y_1 & + & 2y_2 & + & 2y_4 & + & 3t & = & 1 \\
 & y_1 & & & & & - & t & \leq & 0 \\
 & & & y_2 & & & - & t & \leq & 0 \\
 & & & & & y_4 & - & t & \leq & 0 \\
 & \multicolumn{7}{l}{y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4,\ t \geq 0} & &
\end{array}
$$

cujo valor ótimo é: $1{,}75 < \bar{v}$.

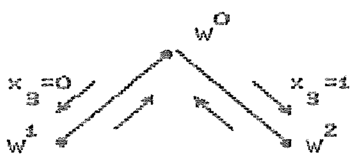


FIGURA IV.4 : Árvore das soluções parciais geradas pelo Algoritmo Enumerativo com Filtro, aplicado ao problema hiperbólico do exemplo IV.1.

Compare as figuras IV.3 e IV.4. Observe que a utilização de filtros reduziu, sensivelmente, o número de soluções parciais geradas para a obtenção do ótimo.

CAPÍTULO V - RESULTADOS NUMÉRICOS: CONCLUSÕES

IV.1) Considerações Iniciais

Os seguintes algoritmos foram implementados em TURBO PASCAL, versão 5.0, e testados utilizando-se um microcomputador de 16 bits compatível com IBM-PC/XT:

- AE : Algoritmo Enumerativo
- FR : Algoritmo de FLORIAN e ROBILLARD (1971)
- GT : Algoritmo de GRUNSPAN e THOMAS (1973)
- AEG : Algoritmo Enumerativo com Filtro no sentido de GEOFFRION (1969)
- AEB : Algoritmo Enumerativo com Filtro no sentido de BALAS (1967)

Para a coleta de resultados, 6 conjuntos de restrições (vide ANEXO I) foram considerados. Para cada um desses conjuntos, foram criadas 5 funções objetivo, todas com coeficientes positivos. Os problemas gerados enquadram-se no formato (PH^{+}).

Os algoritmos enumerativos AE, AEG e AEB foram inicializados com o conjunto solução parcial vazio e os subproblemas hiperbólicos por eles gerados foram resolvidos, dentre os dois algoritmos descritos na secção IV.2, pelo de ROBILLARD (1971). Nos pré-testes realizados este evidenciou-se, para o fim mencionado, superior ao de ARAGÃO (1988).

Para a resolução dos problemas lineares 0-1 auxiliares dos algoritmos FR e GT, implementou-se o Algoritmo Aditivo de BALAS (1965), seguindo o esquema de enumeração de GEOFFRION (1967), inicializando-o com o conjunto solução parcial vazio. A estrutura de dados utilizada é a mesma dos algoritmos AE e de suas versões com filtro. A determinação do ponto inicial x^o em FR é feita pelo Algoritmo de ARAGÃO (1988), o que se justifica pelas considerações feitas na secção IV.2.2, enquanto que em GT x^o é tomado como o vetor nulo.

Para a resolução dos problemas lineares contínuos, envolvidos na determinação de restrições substitutas nos algoritmos AEG e AEB, foi utilizado o *kit* de programação linear PROLIN. Esse *kit*, desenvolvido por SANTOS (1988), usa o método SIMPLEX, tratando a matriz inversa da base na forma produto e reinvertendo-a automaticamente no caso de ocorrência de erros de arredondamento. O Método permite também que sejam atribuidos limites inferiores e superiores às variáveis sem que o número de restrições seja aumentado. Explorando esta característica optou-se, em AEG, por resolver $(\overline{DLG}^{+}_{v})$, o dual do problema $(\overline{LG}^{+}_{v})$. A estratégia de *pricing*, originalmente adotada, foi substituída pela regra de Bland, uma vez que não se levava em consideração, no *kit*, a possibilidade de ocorrência de ciclagem.

Os algoritmos enumerativos com filtro foram testados armazenando-se apenas a última restrição substituta obtida. No algoritmo AEG, quando o item (c) do PASSO3 e/ou o PASSO 4 são acionados, a restrição substituta, ao invés de ser tomada como uma desigualdade estrita, foi considerada como uma desigualdade do tipo " $\leq$ ", igual às demais restrições originais do problema.

Primeiramente comparou-se os algoritmos com relação ao número de *nós* pesquisados mostrando, adicionalmente, o número de problemas lineares 0-1 (Algoritmos FR e GT) ou contínuos (Algoritmos AEG e AEB) requeridos para a obtenção do ótimo.

Uma segunda comparação foi feita, desta vez voltada para o desempenho dos algoritmos AE, FR e GT, com relação ao tempo de processamento. Não se incluiu os algoritmos AEG e AEB nessa comparação, dado às características do *kit*, que usa de uma estrutura de dados que faz o ocultamento dos dados do problema (grava-os em disco), acessando somente as informações necessárias durante cada iteração do SIMPLEX, tornando lenta sua execução.

V.2) Resultados

A notação utilizada, na apresentação dos resultados, resumidos nas tabelas IV.1 e IV.2, é a seguinte:

Tm - Tempo médio de processamento (em segundos).

TM - Tempo máximo de processamento (em segundos).

Nm - Número médio de *nós* pesquisados.

NM - Número máximo de *nós* pesquisados.

Lm - Número médio de programas lineares 0-1 (Algoritmos FR ou GT) ou contínuos (Algoritmos AEG ou AEB) requeridos.

LM - Número máximo de programas lineares 0-1 (Algoritmo FR ou GT) ou contínuos (Algoritmos AEG ou AEB) requeridos.

m - Número de restrições originais do problema

n - Número de variáveis do problema

O número de *nós* produzidos em FR e GT refere-se à soma do número de nós pesquisados em cada um dos problemas lineares auxiliares. Há de se observar que o esforço computacional envolvido na pesquisa desses *nós* é bem inferior ao dos algoritmos AE, AEG e AEB.

TABELA V.1: RESULTADOS COM RELAÇÃO AO NÚMERO DE *NÓS* PESQUISADOS E DE PROBLEMAS LINEARES REQUERIDOS PARA A OBTENÇÃO DO ÓTIMO.

PROBLEMA	ALGORITMO					
		FR	GT	AE	AEG	AEB
1	Nm	23	31	9	9	9
m = 3	NM	27	39	15	15	15
n = 5	Lm	2	3	–	0	0
	LM	2	3	–	0	0
2	Nm	33	46	40	24	24
m = 7	NM	48	83	66	37	37
n = 10	Lm	3	4	–	2	2
	LM	4	5	–	4	4
3	Nm	49	38	34	23	26
m = 3	NM	77	82	71	45	38
n = 12	Lm	3	3	–	3	4
	LM	4	3	–	10	8
4	Nm	93	115	42	34	35
m = 6	NM	173	178	50	42	38
n = 12	Lm	3	3	–	3	2
	LM	3	4	–	5	4
5	Nm	98	140	1504	175	248
m = 3	NM	115	214	1899	211	337
n = 20	Lm	4	4	–	25	104
	LM	5	5	–	35	147
6	Nm	119	166	3591	265	> 350
m = 3	NM	151	353	4990	455	
n = 25	Lm	3	4	–	50	> 100
	LM	3	4	–	100	

TABELA V.2: RESULTADOS COM RELAÇÃO AO TEMPO DE PROCESSAMENTO (em segundos) ENTRE OS ALGORITMOS AE, FR e GT

PROBLEMA		ALGORITMO		
		FR	GT	AE
1 m = 3 n = 5	Tm	2,89	6,49	0,34
	TM	3,50	7,53	0,57
2 m = 7 n = 10	Tm	4,33	10,33	2,78
	TM	6,70	13,18	3,70
3 m = 3 n = 12	Tm	6,00	9,55	1,92
	TM	8,31	12,25	3,96
4 m = 6 n = 12	Tm	13,19	21,00	3,17
	TM	24,50	28,84	3,21
5 m = 3 n = 20	Tm	13,25	27,17	103,86
	TM	15,82	38,28	161,48
6 m = 3 n = 25	Tm	24,60	31,53	288,75
	TM	31,69	43,45	401,17

V.3) Conclusões

Pelos resultados das tabelas V.1 e V.2, observa-se:

a) a introdução de filtros reduz, como era de se esperar, o número de *nós* a pesquisar. Esta redução se torna mais sensível à medida que o número de variáveis do problema aumenta, e é exatamente para estas instâncias que acentua-se a superioridade do algoritmo AEG sobre AEB; sobretudo se se leva em conta que o número de restrições envolvido na determinação da restrição substituta mais forte em AEG (Problemas $(\overline{LG}_v^+)$ ou $(\overline{DLG}_v^+)$) é inferior ao de AEB (Problemas $(\overline{LPH}_v^+)$ ou $(\overline{DLPH}_v^+)$) e, consequentemente, os problemas lineares a resolver em AEG são sempre de menor porte;

b) Dentre os algoritmos analisados que resolvem (PH^+) indiretamente, FR mostra-se superior a GT em todos os casos;

c) Nos problemas 1, 2, 3 e 4 o algoritmo AE se sobressai, em termos de tempo de execução, a FR. O tempo de processamento em AE pode ainda ser melhorado, como comentado na secção IV.4.2, substituindo-se, para a resolução do problema fracionário linear irrestrito (PHI^+), o algoritmo de ROBILLARD (1971) pelo procedimento REOPT, descrito em ARAGÃO (1988, p.58-65). Entretanto, nem mesmo essa substituição fará superar, em termos de tempo, o algoritmo FR nos problemas 5 e 6, dado a elevada diferença entre o número de *nós* a analisar.

Pelo pequeno número de número de problemas considerados, não se permite maiores conclusões. Contudo, os resultados anteriores, ainda que escassos, fazem crer que, em geral, dentre os algoritmos analisados, FR é superior a todos os demais, avantajando-se quando o número de variáveis cresce e que, portanto, algoritmos desta classe devem ser melhor investigados. Além do mais, introduzindo filtros na resolução de cada um dos problemas lineares auxiliares, vide PAULA JR (1978), sua performance pode ser melhorada. Vale a pena ressaltar que na resolução do problema linear contínuo que produzirá o filtro *mais forte* (filtro no sentido de GEOFFRION (1969)) uma solução viável inicial (a origem) está sempre disponível, o que é uma vantagem adicional, pois dispensa a aplicação da 1ª fase do SIMPLEX. Observe que o mesmo não ocorre com os algoritmos AEG e AEB.

Finalmente, é importante mencionar que AE, AEG e AEB podem sofrer melhoras pesquisando-se heurísticas alternativas, e mais eficazes, de incremento da solução parcial, já que isso é um ponto crucial no desempenho desses algoritmos. Ademais, deve-se levar em consideração qual o problema linear ($\overline{DLG}_w^+$ ou $\overline{LG}_w^+$ em AEG e $\overline{DLPH}_w^+$ ou $\overline{LPH}_w^+$ em AEB) mais conveniente para a produção do filtro, em cada iteração na qual essa informação for requerida.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANZAI, Y. (1974), "On Integer Fractional Programming", *Journal of the Operations Research Society of Japan*, 17, 49-66.

ARAGÃO, M. V. S P (1988), *Programação Hiperbólica em Variáveis 0-1 e Otimização de Consultas a Banco de Dados Bibliográficos*, Tese de Mestrado, DEE/PUC, Rio de Janeiro.

BALAS, E. (1965), "An Additive Algorithm for Solving Linear Programs with Zero-One Variables", *Operations Research*, 13, 517-546.

BALAS, E. (1967), "Discrete Programming by the Filter Method", *Operations Research*, 15, 915-957.

BAZARAA, M. S. e SHETTY, C. M. (1979), *Nonlinear Programming : Theory and Algorithms*, Wiley, New York.

BECTOR, C. R. (1968), "Programming Problems with Convex Fractional Functions", *Operations Research*, 16, 383-391.

BITRAN, G. R. e NOVAES, A. G. (1973), "Linear Programming with a Fractional Objective Function", *Operations Research*, 21, 22-29.

BITRAN, G. R. e MAGNANTI, T. L. (1976), "Duality and Sensitivity Analysis for Fractional Programs", *Operations Research*, 24, 675-699.

BITRAN, G. R. (1979), "Experiments with Linear Fractional Problems", *Naval Research Logistic Quarterly*, 26, 689-693.

BORNSTEIN, C. T., BREGALDA, P. F. e OLIVEIRA, A. A. F. (1983), *Introdução à Programação Linear*, 2ª Edição, Editora Campus, Rio de Janeiro.

BRADLEY, S. P. e SHERWOOD C. F. Jr. (1974), "Fractional Programming with Homogeneous Functions", *Operations Research*, 22, 350-357.

CHARNES, A. e COOPER, W. W. (1962), "Programming with Linear Fractional Functionals", *Naval Research Logistic Quarterly*, 9, 181-186.

CRAVEN, B. D. (1988), *Fractional Programming*, Heldermann Verlag, Berlin.

CROUZEIX, J. P., FERLAND, J. A. e SCHAIBLE, S. (1983), "Duality in Generalized Linear Fractional Programming", *Mathematical Programming*, 27, 342-354.

CROUZEIX, J. P., FERLAND, J. A. e SCHAIBLE, S. (1985), "An Algorithm for Generalized Fractional Programs", *Journal of Optimization Theory and Aplications*, 47, 35-49.

CROUZEIX, J. P., FERLAND, J. A. e SCHAIBLE, S. (1986), "A note on an Algorithm for Generalized Fractional Programs", *Journal of Optimization Theory and Aplications*, 50, 183-187.

CROUZEIX, J. P. e FERLAND, J. A. (1988), "Algorithms for Generalized Fractional Programming", Paper presented at *Workshop on Mathematical Programming*, Catholic University of Rio de Janêiro, Brazil, october 10-14.

DINKELBACH, W. (1967), "On Nonlinear Programmning", *Management Science*, 13, 492-498.

FERLAND, J. A. e POTVIN, J. Y. (1985), "Generalized Fractional Programming : Algorithms and Numerical Experimentation", *European Journal of Operations Research*, 20, 92-101.

FLORIAN, M. e ROBILLARD, P. (1971), "Programmation Hyperbolique en Variables Bivalentes", *Revue Française D'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, 5, 3-9.

FRANK, M. e WOLFE, P. (1956), "An Algorithm for Quadratic Programming", *Naval Research Logistic Quarterly*, 3, 95-110.

GEOFFRION, A. M. (1967), "Integer Programming by Implicit Enumeration and Balas's Method", *SIAM Review*, 7, 178-190.

GEOFFRION, A. M. (1969), "An Improved Implicit Enumeration Approach for Integer Programming", *Operations Research*, 17, 437-454.

GILMORE, P. C. e GOMORY, R. E. (1963), "A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem - Part II", *Operations Research*, 11, 863-888.

GLOVER, F. (1975), "Surrogate Constraint Duality in Mathematical Programming", *Operations Research*, 23, 434-451.

GRANOT, D. e GRANOT, F. (1976), "On Solving Fractional (0-1) Programs by Implicit Enumeration", *INFOR*, 14, 241-249.

GRANOT, D. e GRANOT, F. (1977), "On Integer and Mixed Integer Fractional Programming Problems", *Annals of Discrete Mathematics*, 1, 221-231.

GRUNSPAN, M. e THOMAS, M. G. (1973), "Hyperbolic Integer Programming", *Naval Research Logistic Quarterly*, 20, 341-356.

HAMMER, P. e RUDEANU, S. (1968), *Boolean Methods in Operations Research and Related Areas*, Springer-Verlag, Heidelberg.

HANSEN, P. (1979), "Methods of Nonlinear 0-1 Programming", *Annals of Discrete Mathematics*, 5, 53-70.

HASHIZUME, S., FUKUSHIMA, M., KATOH, N. e IBARAKI, T. (1987), "Aproximation Algorithms for Combinatorial Fractional Programming Problems", *Mathematical Programming*, 37, 255-267.

IBARAKI, T. (1981), "Solving Mathematical Programming Problems with Fractional Objective Functions", in : SCHAIBLE, S. e ZIEMBA, W. T., *Generalized Concavity in Optimization and Economics*, Academic Press, New York, 441-472.

IBARAKI, T. (1983), "Parametric Approaches to Fractional Programs", *Mathematical Programming*, 26, 345-362.

ISBELL, J. R. e MARLOW, W. H. (1956), "Attrition Games", *Naval Research Logistic Quarterly*, 3, 71-93.

ISHII, H., IBARAKI, T. e MINE, H. (1977), "Fractional Knapsack Problems", *Mathematical Programming*, 13, 255-271.

JAGANNATHAN, R. (1966), "On some Properties of Programming Problems in Parametric Form pertaining to Fractional Programming", *Management Science*, 12, 609-615.

KORTANEK, K. O. e EVANS, J. P. (1967), "Pseudo-concave Programming and Lagrange Regularity", *Operations Research*, 15, 882-891.

KYDLAND, F. (1972), "Duality in Fractional Programming", *Naval Research Logistic Quarterly*, 19, 691-697.

LASDON, L. S. (1970), *Optimization Theory for Large Systems*, Macmillan, New York.

LIMA, E. (1981), *Curso de Análise : vol. II*, IMPA, Rio de Janeiro.

MACULAN, N. (1978), *Programação Linear Inteira*, Apostila, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

MARTOS, B. (1964), "Hyperbolic Programming", *Naval Research Logistic Quarterly*, 11, 135-155.

MARTOS, B. (1965), "The Direct Power of Adjacent Vertex Programming Methods", *Management Science*, 12, 241-252.

MARTOS, B. (1975), *Nonlinear Programming : Theory and Methods*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam, Oxford.

MEGIDDO, N. (1979), "Combinatorial Optimization with Rational Objective Functions", *Mathematics of Operations Research*, 4, 414-424.

MICHELON, P. e MACULAN, N. (1988), "An Algorithm for the Mixed or Integer Fractional Programming", Paper presented in *MP in Kyoto*, Kyoto, Japan, September.

MONNERAT, L. E. E. (1978), *Programação Linear Fracionária : uma Aplicação à Siderurgia*, Tese de Mestrado, Programa de Engenharia Metalúrgica, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

PAULA Jr.,G. G (1978), *Contribuição às Aplicações dos Modelos de Recobrimento e Particionamento em Programação Inteira*, Tese de Mestrado, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro.

ROBILLARD, P. (1971), "(0-1) Hyperbolic Programming Problems", *Naval Research Logistic Quarterly*, 18, 47-57.

SAIPE, A. L. (1975), "Solving a (0-1) Hyperbolic Program by Branch and Bound", *Naval Research Logistic Quarterly*, 22, 497-516.

SALKIN, H M (1975), *Integer Programming*, Addison-Wesley, California.

SANTOS, M. A. (1988), "Desenvolvimento de um Kit para Construção de Ferramentas Baseadas no Método Simplex", *XI Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional*, Ouro Preto.

SCHAIBLE, S. (1976a), "Fractional Programming I : Duality", *Management Science*, 858-867.

SCHAIBLE, S. (1976b), "Fractional Programming II : On Dinkelbach's Algorithm", *Management Science*, 22, 868-873.

SCHAIBLE, S. (1976c), "Duality in Fractional Programming : a Unified Approach", *Operations Research*, 24, 452-461.

SCHAIBLE, S. (1981a), "Fractional Programming : Applications and Algorithms", *European Journal of Operational Research*, 7, 111-120.

SCHAIBLE, S. (1981b), "A Survey of Fractional Programming", in SCHAIBLE, S. e ZIEMBA, W. T. , *Generalized Concavity in Optimization and Economics*, Academic Press, New York, 417-440.

SCHAIBLE, S. (1982), "Bibliography in Fractional Programming", *Zeitschrift für Operations Research*, 26, 211-241.

SCHAIBLE, S. (1983), "Fractional Programming", *Zeitschrift für Operations Research*, 27, 39-54.

SNIEDOVICH, M. (1988), "Fractional Programming Revisited", *European Journal of Operational Research*, 33, 334-341.

SYSLO, M M, DEO, N e KOWALIK, J S (1983), *Discrete Optimization Algorithms with Pascal Programs*, Prentice-Hall, New Jersey.

SWARUP, K. (1965), "Linear Fractional Functionals Programming", *Operations Research*, 13, 1029-1036.

WAGNER, H. M. e YUAN, J. S. C. (1968), "Algorithmic Equivalence in Linear Fractional Programming", *Management Science*, 14, 301-306.

WILLIAMS, H. P. (1974), "Experiments in the Formulation of Integer Programming Problems", *Mathematical Programming Study*, 2, 180-197.

ZIONTS, S. (1968), "Programming with Linear Fractional Functionals", *Naval Research Logistic Quarterly*, 15, 449-452.

ANEXO A

Transcreve-se, a seguir, os problemas-teste gerados para colher os resultados das tabelas IV.1 e IV.2.

O conjunto de restrições dos problemas 2, 3 e 4 é de FLORIAN e ROBILLARD (1971), enquanto o do problema 5 é de BALAS (1965).

PROBLEMA 1: (m = 7 e n = 10)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$c_o = 1 \quad d_o = 6$

c^1	d^1	c^2	d^2	c^3	d^3	c^4	d^4	c^5	d^5
7	4	9	5	10	7	71	14	1	1
2	1	1	2	1	2	1	10	9	10
3	5	7	2	5	1	4	1	4	5
1	2	3	3	2	4	20	11	1	2
6	7	2	4	6	3	13	5	1	7

PROBLEMA 2: (m = 7 e n = 10)

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -12 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 10 & 0 & 5 & -1 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ -5 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 5 & 1 & -9 & 2 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & -12 & 7 & -6 & 0 & 2 & 15 & 3 \\ 8 & 5 & -2 & -7 & 1 & 0 & -5 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$b^t = (\; 8 \quad 13 \quad 6 \quad -6 \quad 8 \quad 12 \quad 16 \;)$

$c_o = 1 \quad d_o = 3$

c^1	d^1	c^2	d^2	c^3	d^3	c^4	d^4	c^5	d^5
12	11	9	19	8	81	91	82	9	18
1	67	6	6	24	24	58	58	42	42
16	29	7	3	7	21	93	88	7	12
92	99	3	1	21	91	72	1	12	1
85	11	9	1	31	1	61	90	18	10
3	5	9	6	43	57	18	2	9	6
91	74	5	7	41	9	86	92	14	8
6	32	6	10	6	55	40	45	60	55
13	53	5	3	5	11	50	89	500	111
34	76	4	9	12	81	96	27	4	18

PROBLEMA 3: ($m = 3$ e $n = 12$)

Trata-se do Problema 4 com as três primeiras restrições.

PROBLEMA 4: ($m = 6$ e $n = 12$)

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 11 & 0 & -7 & -2 \\ 3 & -7 & 0 & 5 & -1 & 0 \\ -12 & 0 & 1 & 6 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 0 & 3 & -4 \\ -1 & 6 & 0 & -12 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & -1 & 7 & -8 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & -8 & 1 & 0 \\ -5 & 0 & 9 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 5 & -7 & 1 \end{pmatrix} \qquad b = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ -4 \\ 8 \\ -7 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$c_o = 6 \qquad d_o = 3$$

c^1	d^1	c^2	d^2	c^3	d^3	c^4	d^4	c^5	d^5
3	4	10	51	3	97	25	71	1	2
2	3	3	9	41	62	51	13	8	4
7	5	5	3	1	33	13	27	3	1
14	9	5	19	5	39	35	5	5	2
7	8	2	36	91	86	16	47	15	9
5	3	17	6	78	1	31	88	10	6
5	11	23	19	52	21	1	49	25	12
8	8	1	8	11	8	17	3	18	8
7	33	77	1	7	13	87	7	6	2
6	12	6	11	15	4	2	59	3	3
3	1	3	6	43	10	4	21	7	3
66	2	11	22	2	2	93	24	1	1

PROBLEMA 5: (m = 3 e n = 20)

$$A^t = \begin{bmatrix} -6 & -1 & 3 \\ 5 & 3 & 6 \\ -8 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 6 \\ -3 & 4 & -9 \\ -8 & -1 & 6 \\ -9 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & -9 \\ -8 & 8 & -6 \\ -6 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & -6 \\ -8 & -5 & -6 \\ -6 & -4 & 6 \\ 7 & -1 & 2 \\ 6 & -9 & -7 \\ -2 & -7 & -6 \\ 3 & 2 & 0 \\ 7 & 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} -21 \\ -10 \\ -14 \end{bmatrix}$$

$c_o = 6 \qquad d_o = 3$

c^1	d^1	c^2	d^2	c^3	d^3	c^4	d^4	c^5	d^5
10	3	24	1	1	9	65	21	1	1
6	32	5	22	17	91	1	4	1	2
8	83	3	3	6	36	6	94	3	3
41	19	25	2	7	9	6	89	15	9
11	6	17	6	1	6	12	6	10	6
78	12	9	24	17	4	8	9	8	14
53	12	13	121	3	11	15	12	25	21
49	7	73	3	19	71	8	16	18	3
5	29	7	3	5	42	3	12	6	2
6	32	56	7	8	2	30	42	65	1
32	1	5	11	5	1	3	1	23	7
66	77	18	3	18	37	7	1	16	12
23	92	13	2	5	13	1	2	12	5
9	4	56	15	21	51	27	5	8	8
13	58	1	3	1	48	13	3	3	3
1	17	2	3	16	69	7	16	2	2
61	1	8	21	1	22	1	1	1	2
27	43	11	3	7	15	7	3	17	13
7	77	98	7	12	31	15	56	8	87
43	43	3	39	2	11	23	12	3	43

<u>PROBLEMA</u> <u>6</u>: (m = 3 e n = 25)

$$A = \left(\begin{array}{c|ccccc} & 1 & -1 & 3 & 2 & -4 \\ \bar{A} & 2 & -3 & -1 & -5 & -5 \\ & -4 & -2 & 3 & 1 & -3 \end{array} \right)$$

onde $\bar{A}$ é a matriz do problema 5.

Os vetores c e d são os do problema 5, complementados com os seguintes componentes:

c^1	d^1	c^2	d^2	c^3	d^3	c^4	d^4	c^5	d^5
3	12	3	6	3	2	3	1	3	1
4	24	4	1	4	54	4	7	4	2
11	32	11	7	11	12	11	2	11	5
1	21	1	42	1	70	1	4	1	2
11	9	11	13	11	4	11	1	11	1