

CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE PARA PROBLEMAS DE
MULTIPARAMETRIZAÇÃO: APLICAÇÃO NA DETER-
MINAÇÃO DA RAÇÃO DE CUSTO MÍNIMO

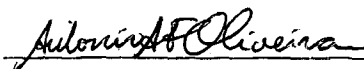
Paulo Fábio Bregalda do Carmo

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO
DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

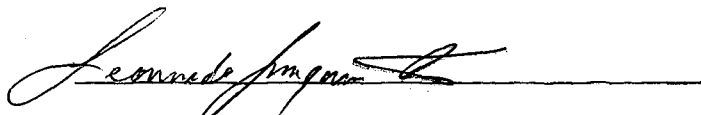
Aprovada por:



Prof. Claudio Thomás Bornstein
(Presidente)



Prof. Antonio A.F. de Oliveira



Prof. Leonardo Junqueira Lustosa

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JANEIRO DE 1980

I N D I C E

FICHA CATALOGRÁFICA	i
AGRADECIMENTOS	ii
RESUMO	iii
ABSTRACT	iv

CAPÍTULO I

HISTÓRICO E OBJETIVO	1
--------------------------------	---

CAPÍTULO II

ALGUMAS IDÉIAS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE
PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIPARAMÉTRICA, PARA A DE
TERMINAÇÃO DA RAÇÃO DE CUSTO MÍNIMO CONSIDERANDO-SE A VARIACÃO DO VETOR DE CUSTOS

2.1. APRESENTAÇÃO INTUITIVA DO MÉTODO	7
2.2. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO DO MÉTODO	
2.2.1. DETERMINAÇÃO DOS CONES DOS VÉRTICES V_i	13
2.2.2. JUSTIFICATIVA DO MÉTODO	15

CAPÍTULO III

PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIPARAMÉTRICA

3.1. INTRODUÇÃO	24
3.2. MULTIPARAMETRIZAÇÃO LINEAR PARA O LADO DIREITO DAS RESTRIÇÕES - MLP - RHS	

3.2.1.	APRESENTAÇÃO	25
3.2.2.	NOTAÇÃO	27
3.2.3.	TEOREMAS BÁSICOS E DEFINIÇÕES	30
3.3.	MULTIPARAMETRIZAÇÃO LINEAR PARA OS COEFICI <u>ENT</u> ENTES DAS VARIÁVEIS DA FUNÇÃO OBJETIVO - MLP - OFC	
3.3.1.	INTROUÇÃO	86
3.3.2.	NOTAÇÃO	86
3.3.3.	TEOREMAS BÁSICOS E DEFINIÇÕES	91
	CONCLUSÕES E APLICAÇÕES	121
	APÊNDICE	124
	BIBLIOGRAFIA	145

DO CARMO, PAULO FÁBIO BREGALDA

Condições de Otimalidade para Problemas de Multiparametrização: Aplicação na Determinação da Razão de Custo Mínimo (Rio de Janeiro) 1980.

VI, 147p. 29,7cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1980)

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro. Fac. Engenharia

I. Programação Paramétrica I.COPPE/UFRJ II.Título (série)

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Cláudio Thomas Bornstein pela competên
cia, seriedade e sobretudo a amizade com que conduziu a orientaç
ção desse trabalho. Muito mais que um orientador é um amigo.

Aos Professores do Programa, em particular, ao Prof.
Antonio Alberto de Oliveira pelas críticas e sugestões que con
tribuíram não só para a valorização desse trabalho mas, princi
palmente, para a minha aprendizagem.

Ao Professor Nelson Maculan, extraordinária pessoa hu
mana, pelo apoio e ensinamentos.

À minha amiga Maria Christina dos Santos pelo incentiv
vo que sempre me deu.

Ao Professor Leonardo Lustosa pelas críticas e suges
tões.

RESUMO

Neste trabalho, principalmente, damos um enfoque geométrico para o problema:

MIN $w = c^T(\lambda)x$ sujeito a $Ax = b$, $x \geq 0$; onde $c^T(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ é um vetor-parâmetro, $A_{m \times n}$ e $b_{m \times 1}$ são matrizes de constantes reais e $x_{n \times 1}$ é a matriz das variáveis. Associamos a cada VÉRTICE V_i do politopo definido por $Ax = b$, $x \geq 0$, um CONE POLIÉDRICO C_i tal que se $-\nabla w \in C_i$, então V_i é solução ótima para o problema.

A seguir, analisamos o PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIPARAMÉTRICA (MLP) PARA O LADO DIREITO DAS RESTRIÇÕES (RHS):

MAX $Z = c^T x$ sujeito a $Ax = b(\lambda)$, $x \geq 0$, onde $A_{m \times n}$ e $c_{1 \times n}^T$ são matrizes de constantes reais, $x_{n \times 1}$ é a matriz das variáveis e $b(\lambda)_{m \times 1}$ um vetor-parâmetro. Determinamos as regiões R_i , definidas pelas bases ótimas i_B , tal que $\forall \lambda \in R_i$; a base i_B é ótima e de tal forma que as regiões R_i não se sobreponham.

Finalizando, em analogia ao MLP-RHS, apresentamos o PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIPARAMÉTRICA PARA OS COEFICIENTES DA FUNÇÃO OBJETIVO (MLP-OF), quando parâmetros aparecem somente nos coeficientes da função objetivo.

ABSTRACT

First we give a geometric treatment to the problem $\text{Min } w = c^T(\lambda)x$ subject to $Ax = b, x \geq 0$, where $c^T(\lambda) \in \mathbb{R}^n$ is a parameter vector, $A_{m \times n}$ and $b_{m \times 1}$ are constant matrices and $x_{n \times 1}$ is the vector of variables. To each vertex V_i of the polytope defined by $Ax = b, x \geq 0$ we associate a polyedric cone C_i . If $-\nabla w \in C_i$ then V_i is optimal solution of the problem.

Next we examine the MULTIPARAMETRIC LINEAR PROGRAMMING PROBLEM FOR THE RIGHT HAND SIDES (MLP-RHS) using the Simplex Algorithm:

$\text{MAX } Z = c^T x$ subject to $Ax = b(\lambda), x \geq 0$ where $b(\lambda)$ is now the parameter vector. To each base i_B we associate a region R_i so that $\forall \lambda \in R_i$ i_B is the optimal base. We show some properties of the regions R_i .

Finally, similarly to the MLP-RHS, we examine the MULTIPARAMETRIC LINEAR PROGRAMMING PROBLEM FOR THE OBJECTIVE FUNCTION COEFFICIENTS (MLP-OFC).

CAPÍTULO I
HISTÓRICO E OBJETIVO

Com a intenção de fazer uma Tese que tivesse aplicação à realidade Brasileira, fomos em 1977 ao Centro Nacional de Pesquisa - Gado de Leite - da EMBRAPA (Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária) em Coronel Pacheco, Minas Gerais. Lá nos apresentaram o problema do "Cálculo da ração de custo mínimo para vacas em lactação". Esse problema é conhecido na literatura de Programação Linear como "Feed Mix Problem": Dada uma série de exigências dietéticas, determinar a ração que satisfaz todas essas exigências e tenha o menor custo possível.

No APÊNDICE encontra-se os dados fornecidos pela EMBRAPA num total de 21 programas (9 para o inverno e 12 para o verão), bem como o equacionamento, a título de exemplo, de um desses programas (VERÃO/ALTERNATIVA 1/VACAS DE 5 LITROS) e a seguir sua resolução pelo MPS/360 (IBM).

O equacionamento e resolução desses problemas são bastante simples como pode-se observar no exemplo dado no APÊNDICE. No entanto, a EMBRAPA pediu (ver no APÊNDICE a observação no final da página dos dados), além da solução ótima dos 21 programas, a resolução dos seguintes problemas:

- 1º) Dada a composição de custo mínimo, informar qual o limite máximo no preço de cada componente para continuar integrando a ração de custo mínimo.
- 2º) Dada a composição de custo mínimo, informar a que preço cada componente que não entrou na ração, passaria a entrar numa nova ração de mínimo custo.

A solução desses dois problemas consta da literatura clássica de Programação Linear, na parte que trata de "Análise de Pós-otimização". Comentaremos, a seguir, brevemente cada um dos casos.

1º) Seja a função objetivo do problema dado pela EMBRAPA:

$$\text{MIN.}W = 0 \cdot x_1 + 0,02 x_2 + 0,05 x_3 + \dots + x_{16}$$

Suponha que x_j ($j \in \{1,2,\dots,16\}$) faça parte da ração de custo mínimo de um dado problema, isto é, $x_j > 0$.

Queremos saber qual o limite máximo do coeficiente da variável x_j , na função objetivo, para ela continuar integrando a ração de custo mínimo. Para verificar qual a variação permitida para o coeficiente de x_j na função objetivo, vamos exprimir este coeficiente como função de um parâmetro θ , escrevendo $(c_j + \theta)$. Mantemos constantes os demais coeficientes.

Utilizando o quadro Simplex referente à solução ótima, podemos agora verificar qual a variação permissível de θ , para que x_j continue VB, ou seja, em que intervalo podemos permitir a variação de θ para que seja mantida a condição de viabilidade do dual. Esta nos garante que a solução continua sendo ótima.

Vejamos, como ilustração, um exemplo numérico desse caso.

EXEMPLO 1.1

Seja o PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR (PPL)

$$\text{MIN.}W = x_1 - 2x_2$$

SUJEITO A

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Suponhamos aplicado o método Simplex, obtendo o seguinte quadro, referente à solução ótima:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0	1	0	2
x_1	1	0	-1	1	0	1
x_5	0	0	1	-2	1	2
	0	0	1	1	0	$w+3$

(I)

Solução ótima:

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 2$$

$$\text{MIN.W} = -3$$

Vejamos, por exemplo, qual a variação permissível para o coeficiente da variável x_2 , na função objetivo, para que essa variável continue integrando a solução ótima, isto é, para que continue a ser VB.

Introduzindo um parâmetro " θ " no coeficiente de x_2 a função objetivo passa a ser $\text{MIN.W} = x_1 + (-2+\theta)x_2$. Como consequência altera-se a última linha do quadro (I) de modo que obtemos o quadro:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0	1	0	2
x_1	1	0	-1	1	0	1
x_5	0	0	1	-2	1	2
	0	0	1	$1-\theta$	0	$w+6-2\theta$

(II)

Para que o quadro (II) seja ótimo é necessário que todos os coeficientes das variáveis na função objetivo sejam não negativos. Logo, $1 - \theta \geq 0 \rightarrow \theta \leq 1$.

Nesse caso, para manter a solução do quadro (I) ótima o coeficiente de x_2 , na função objetivo, pode variar de 1 a $-\infty$. Portanto, o limite máximo do coeficiente da variável x_2 , na função objetivo, para ela continuar integrando a solução ótima é 1.

2º) Suponha que x_i ($i \in \{1, 2, \dots, 16\}$) não entre na composição da ração de custo mínimo de um dado problema, isto é, $x_i = 0$. Essa situação é inversa a do 1º caso.

Fariamos uma "Análise de Pós-Otimização" para o coeficiente de x_i , na função objetivo, variando em função de um único parâmetro θ e mantendo os demais coeficientes constantes. A variável x_i passaria a integrar a ração de custo mínimo quando entrasse para a base, ou seja, quando x_i passasse de VNB a VB. Poderíamos assim determinar a variação necessária do parâmetro θ , isto é, a variação do preço de x_i .

Vamos passar a analisar, a seguir, as proposições da EMBRAPA vinculadas com a nossa realidade.

Suponha que os 21 programas foram resolvidos. Isto é, calculamos a razão de custo mínimo considerando os preços atuais dos alimentos. Esses programas terão validade por um espaço de tempo muito pequeno, pois o que se verifica na prática é uma frequente variação nos preços dos alimentos, em proporções variadas e impossíveis de serem previstas, devido ao grande número de variáveis que influem, tais como inflação, variações sazonais, flutuações da demanda e oferta, especulação, armazenamento, transporte etc...

Os programas somente permaneceriam válidos se os preços dos alimentos permanecessem constantes ou variassem numa mesma proporção.

Tampouco parece realista a suposição que admite a variação de somente um preço. Foi esta suposição que nos conduziu aos dois casos que acabamos de examinar. Da mesma forma é irreal assumir que os preços dos n alimentos são função, exclusivamente, de um, dois ou mesmo tres parâmetros. Para estes últimos casos a literatura existente desenvolveu uma série de procedimentos.

O que fizemos, portanto, no presente trabalho, foi examinar o caso mais geral possível, admitindo que os coeficientes das n variáveis na função objetivo sejam funções lineares de s parâmetros distintos. Este problema se encaixa na teoria denominada PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIPARAMÉTRICA.

Analizamos não só o problema da multiparametrização da função objetivo (multiparametric linear programming problem for the objective function coefficients - MLP - OFC), como também o problema de multiparametrização do lado direito das restrições $Ax = b$, ou seja, a multiparametrização do vetor

b (multiparametric linear programming problem for the right hand sides MLP-RHS).

No CAPÍTULO II, damos uma visão geométrica da resolução de problemas de Programação Linear multiparamétrica, considerando-se a variação do vetor de custos.

No CAPÍTULO III, apresentamos uma exposição detalhada de Programação Linear Multiparamétrica a partir das idéias de TOMAS GAL E JOSEF NEDOMA expostas no artigo "MULTIPARAMETRIC LINEAR PROGRAMMING", publicado na revista MANAGEMENT SCIENCE, VOL.18, N° 7, March 1972.

No item 3.1, do CAPÍTULO III, apresentamos a Programação linear multiparamétrica para o lado direito das restrições chamado, abreviadamente, de MLP-RHS. No item 3.2, a Programação linear multiparamétrica para o vetor de custos, abreviadamente, chamado de MLP-OFC.

Após o CAPÍTULO IV, colocamos um APÊNDICE, onde são apresentados os dados fornecidos pela EMBRAPA dos 21 programas e, a título de exemplo, o equacionamento de um desses programas, seguido pela listagem do computador com a respectiva solução feita pelo MPS/360 da IBM.

CAPÍTULO II

ALGUMAS IDÉIAS PARA A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIPARAMÉTRICA, PARA A DETERMINAÇÃO DA RAÇÃO DE CUSTO MÍNIMO, CONSIDERANDO-SE A VARIAÇÃO DO VETOR DE CUSTOS

2.1. APRESENTAÇÃO INTUITIVA DO MÉTODO

Faremos neste item uma apresentação das idéias básicas do método. Não nos preocuparemos com a formalização porque ela será feita nos próximos ítems. Nesse momento nossa intenção é apenas a de dar uma visão intuitiva do método.

DEFINIÇÃO 2.1

Um conjunto $C \subseteq \mathbb{R}^n$ é um CONE se $x \in C \rightarrow \lambda x \in C$,
 $\forall \lambda \geq 0$ (λ é um escalar)

DEFINIÇÃO 2.2

O cone cujos hiperplanos geradores passam pela origem é chamado de CONE POLIÉDRICO.

Citaremos, a seguir, quatro propriedades dos cones poliédricos, que usaremos na apresentação das idéias básicas do método.

Para maiores detalhes ver APÊNDICE B DO LIVRO LINEAR PROGRAMMING DE M. SIMONNARD.

- i) Como o cone poliédrico é gerado por hiperplanos, então ele pode ser definido a partir das suas arestas ou definido por quaisquer vetores contidos nessas arestas (RAIOS VETORES).
- ii) Qualquer aresta do cone poliédrico pode ser expressa em função dos ângulos (ÂNGULOS DIRETORES) que esta aresta faz com os eixos coordenados.

iii) Qualquer ponto (ou vetor) que puder ser obtido como combinação linear positiva das arestas (RAIOS VETORES) pertence ao interior do cone.

Passaremos agora a descrever o método.

Seja um politopo no \mathbb{R}^n . Seja A um ponto extremo (ou vértice) desse politopo. Tomando-se os vetores normais aos hiperplanos que determinam o vértice A, e cujos sentidos apontam para fora do politopo, determinamos um cone poliédrico que chamaremos CONE DO VÉRTICE A. Toda função objetivo f , de minimização, onde $-\text{GRAD}.f$ pertence ao cone do vértice A tem como ponto ótimo esse vértice.

ILUSTRAÇÃO NO \mathbb{R}^2

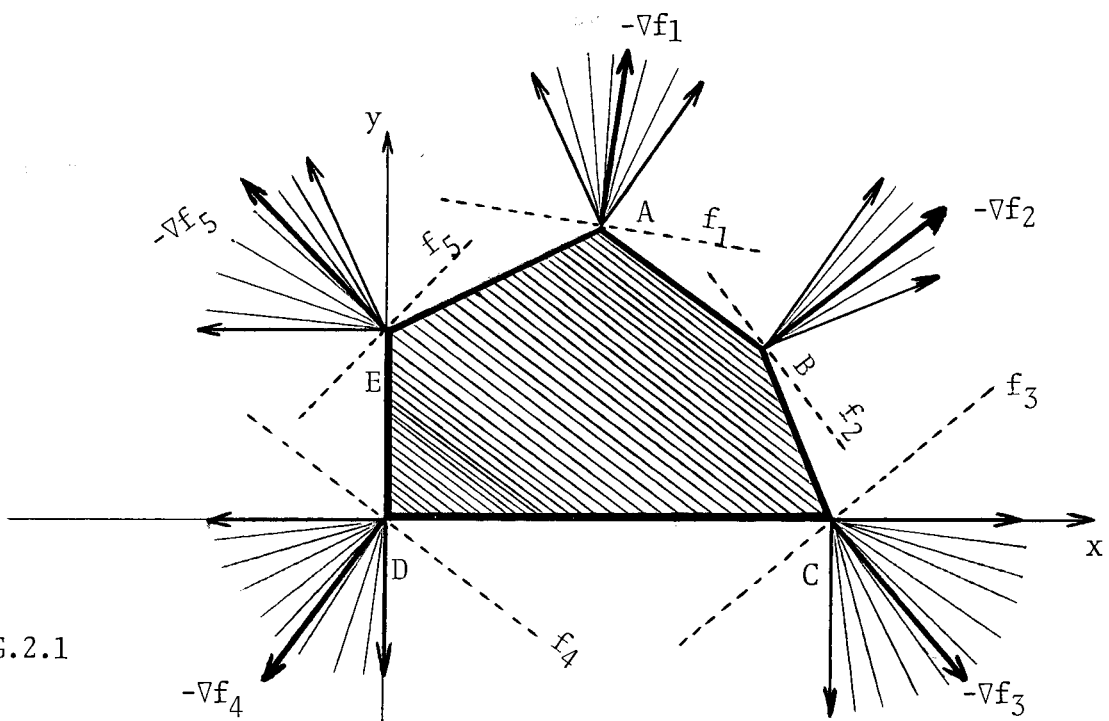


FIG.2.1

Assim, pela figura, temos:

FUNÇÃO OBJETIVO (MINIM.)	PONTO ÓTIMO
f_1	A
f_2	B
f_3	C
f_4	D
f_5	E

Daremos agora um exemplo numérico, onde ilustraremos o método.

EXEMPLO 2.1

Seja um PPL de minimização cujo conjunto das soluções viáveis é representado pelo politopo.

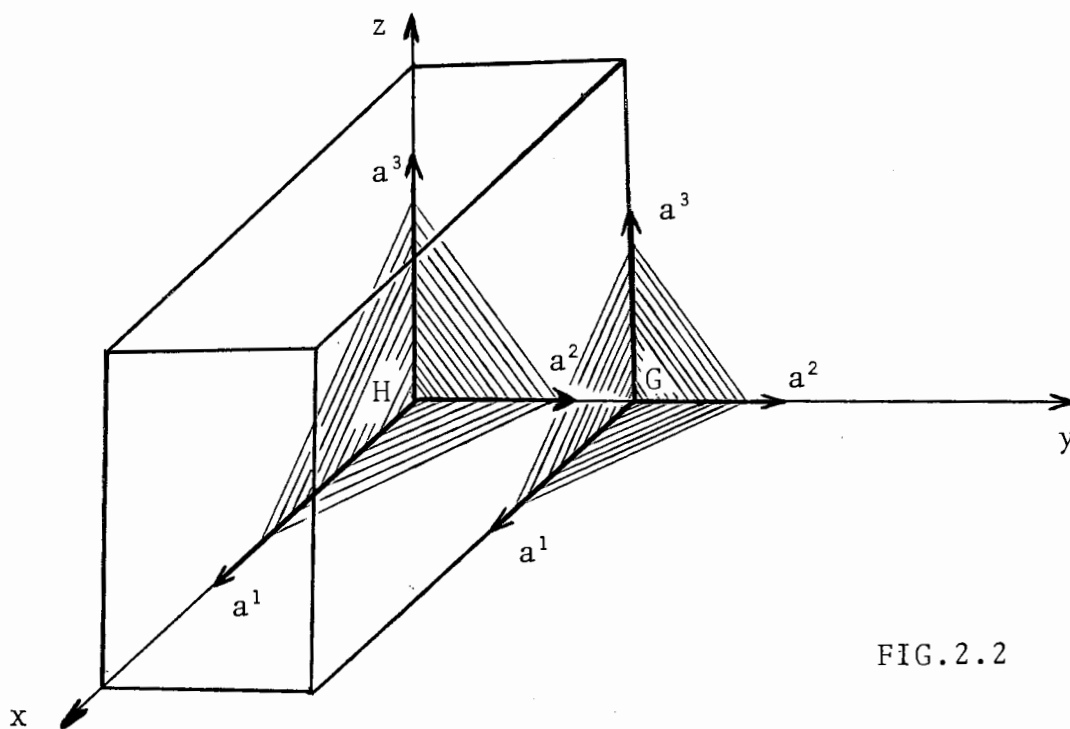


FIG.2.2

Consideremos o vértice G. O cone do vértice G fica inteiramente determinado através dos vetores a^1 , a^2 e a^3 , on

de, as direções desses vetores são dadas pelas arestas do cone e o sentido é para fora do conjunto viável.

Assim, podemos dizer que os vetores $a^1 = (1,0,0)$, $a^2 = (0,1,0)$ e $a^3 = (0,0,1)$, por exemplo, determinam o cone do vértice G.

Dada uma função objetivo de minimização $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$, essa função objetivo terá como ponto ótimo o vértice G se, e somente se, $-\nabla f(x) = (-c_1, -c_2, -c_3)$ pertencer ao cone. Convém ressaltar que se o simétrico do gradiente da função objetivo pertence a fronteira do cone, então o PPL admite múltiplas soluções, pois o hiperplano da função objetivo é paralelo a uma região da fronteira do politopo, e se $-\nabla f(x)$ pertence ao interior do cone, então o PPL admite somente o vértice G como solução ótima.

Esse fato corresponde, analiticamente, a dizer que toda função objetivo cujo simétrico do gradiente pode ser escrito como combinação linear, não negativa, dos vetores a^1 , a^2 e a^3 tem como ponto ótimo o vértice G, e se $-\nabla f(x)$ puder ser escrito como combinação linear positiva de a^1 , a^2 , a^3 , então $f(x)$ tem, como solução ótima somente o vértice G.

Assim, escrevendo $-\nabla f(x) = (-c_1, -c_2, -c_3)$ como combinação linear de $a^1 = (1,0,0)$, $a^2 = (0,1,0)$ e $a^3 = (0,0,1)$, temos:

$$-\nabla f(x) = k_1 a^1 + k_2 a^2 + k_3 a^3 \rightarrow$$

$$(k_1, 0, 0) + (0, k_2, 0) + (0, 0, k_3) = (-c_1, -c_2, -c_3) \rightarrow$$

$$(k_1, k_2, k_3) = (-c_1, -c_2, -c_3) \rightarrow \begin{cases} k_1 = -c_1 \\ k_2 = -c_2 \\ k_3 = -c_3 \end{cases}$$

Portanto, se $c_1 < 0$, $c_2 < 0$, $c_3 < 0$ então $f(x)$ tem como ponto ótimo somente o vértice G . E se ao menos um c_j ($i = 1, 2, 3$) for nulo e os outros negativos, então $f(x)$ tem múltiplas soluções ótimas, onde uma delas é o vértice G .

Para justificação desses fatos ver o livro LINEAR PROGRAMMING de M. SIMONNARD, APENDICE B, LEMA B.2 (O TEOREMA DE H. WEYL), TEOREMA B.4 e TEOREMA B.5.

FORMALIZAÇÃO DO MÉTODO

Seja o problema:

$$\text{MIN. } W = c^T(\lambda)x$$

SUJEITO A

$$(I) \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Onde, $c^T(\lambda)$ é uma matriz $1 \times n$ (ou vetor linha), x é uma matriz $n \times 1$ (ou vetor coluna), $A = (a_{ij})$ é uma matriz $m \times n$, b uma matriz $m \times 1$ (ou vetor coluna) e $\lambda \in \mathbb{R}^n$ um vetor-parâmetro.

DEFINIÇÃO 2.3

Seja o politopo determinado pelas restrições do problema (I). Seja V_i um ponto extremo (ou vértice) desse politopo. Tomando-se os vetores normais aos hiperplanos que definem o vértice V_i , e cujos sentidos apontam para fora do politopo, determinamos um cone poliédrico C_i que chamamos de CONE DO VÉRTICE V_i .

Para verificarmos analiticamente se $-\nabla w \in C_i$ procedemos da seguinte maneira (para simplificar consideramos o vértice não degenerado, isto é, somente n restrições passam pelo

2.2. DESENVOLVIMENTO TEÓRICO DO MÉTODO

Veremos a seguir como determinar analiticamente o CONE DE UM VÉRTICE DO CONJUNTO DAS SOLUÇÕES VIÁVEIS, formalizar as idéias expostas anteriormente e provar as afirmações feitas na SEÇÃO 2.1 desse CAPÍTULO.

2.2.1. DETERMINAÇÃO DOS CONES DOS VÉRTICES V_i

O conjunto das soluções viáveis do problema

$$\text{MIN. } W = c^T(\lambda)x$$

SUJEITO A

$$(I) \quad \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}$$

independe de λ , portanto o polítopo definido por ele é constante.

Vamos nessa seção mostrar como dado um determinado vértice V_i , do conjunto das soluções viáveis, determinar analiticamente o cone desse vértice. Como foi dito na seção 2.1, o cone do vértice V_i é definido por vetores normais aos hiperplanos das restrições que determinam esse vértice e cujos sentidos apontam para fora da região viável. Para sabermos, no entanto, como determinar os sentidos desses raios vetores, que definem o cone, devemos levar em consideração o tipo de desigualdade da restrição: \leq ou \geq .

a) Seja a restrição:

$$g_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j \leq b_i$$

$\nabla g_i(x) = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ é um vetor normal ao hiperplano $\sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i$ e cujo sentido aponta para fora do semi-espaço definido por $g_i(x) \leq b_i$. A verificação desse fato é imediata, pois basta observar que a função $g_i(x)$ cresce para valores fora da região definida por $g_i(x) \leq b_i$. Portanto, a direção e sentido desse raio vetor do cone são dados por $\nabla g_i(x)$.

b) Seja a restrição:

$$g_r(x) = \sum_{j=1}^n a_{rj} \cdot x_j \geq b_r$$

$\nabla g_r(x) = (a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn})$ é normal ao hiperplano $\sum_{j=1}^n a_{rj} \cdot x_j = b_r$ e o sentido aponta para dentro do semi-espaço definido por $g_r(x) \geq b_r$. Pois, analogamente ao que foi dito em (a), a função $g_r(x)$ cresce para valores que pertencem a região definida por $g_r(x) \geq b_r$. Logo, a direção e sentido desse raio vetor do cone são dados por $-\nabla g_r(x)$.

EXEMPLO 2.2

Seja um problema cujo conjunto das soluções viáveis é definido por:

$$\begin{cases} g_1(x) = -2x_1 + x_2 \leq 2 \\ g_2(x) = 2x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ g_3(x) = 2x_1 + x_2 \leq 8 \end{cases}$$

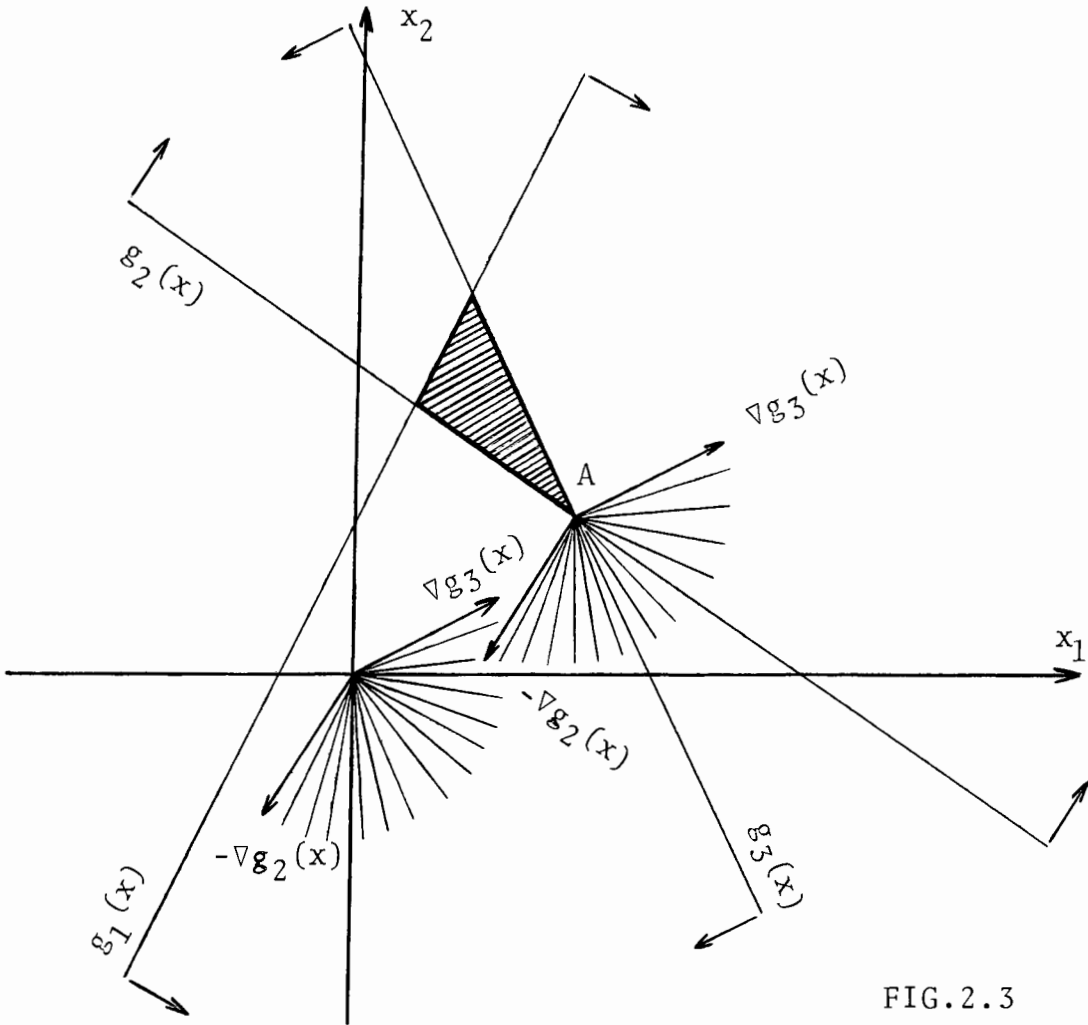


FIG.2.3

O cone do vértice A é determinado pelos raios vetores:

$$\nabla g_3(x) = (2,1) \quad \text{e} \quad -\nabla g_2(x) = (-2,-3)$$

2.2.2. JUSTIFICATIVA DO MÉTODO

Nessa seção demonstraremos as condições de otimalidade do método bem como alguns fatos importantes relativos a ele.

DEFINIÇÃO 2.4

Denominamos **CONE POLIÉDRICO CONVEXO** a interseção de um número finito de semi-espacos fechados cujos hiperplanos geradores passam pela origem.

TEOREMA 2.1

Seja M o conjunto das soluções viáveis de um PPL de minimização. Consideremos todas as funções objetivos $f_i(x)$ cuja solução ótima é o vértice $x^* \in M$. Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ o lugar geométrico de $-\nabla f_i(x)$. Então, C é um CONE.

DEMONSTRAÇÃO

Seja um PPL de minimização e seja $f_i(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ uma função objetivo tal que $f_i(x^*) \leq f_i(x)$, $\forall x \in M$. Então, por definição, $-\nabla f_i(x) \in C$.

Para provar que C é um cone basta mostrar que se $-\nabla f_i(x) \in C \rightarrow \lambda(-\nabla f_i(x)) \in C$, $\forall \lambda \geq 0$.

$$\text{Seja } f_{i'}(x) = \sum_{j=1}^n \lambda c_j x_j = \lambda \sum_{j=1}^n c_j x_j = \lambda f_i(x).$$

Como os hiperplanos relativos a $f_i(x)$ e $f_{i'}(x) = \lambda f_i(x)$ são paralelos $\rightarrow f_{i'}(x)$ tem como ponto ótimo o vértice $x^* \rightarrow f_{i'}(x^*) \leq f_{i'}(x)$, $\forall x \in M$. Logo, $-\nabla f_{i'}(x) = \lambda(-\nabla f_i(x)) \in C$.

OBSERVAÇÃO

Na verdade, podemos mostrar que o CONE das funções objetivo, que têm como ponto ótimo o vértice $x^* \in M$, é um CONE POLIÉDRICO. Basta, para isso, que representemos os raios vetores, que definem o cone, na origem.

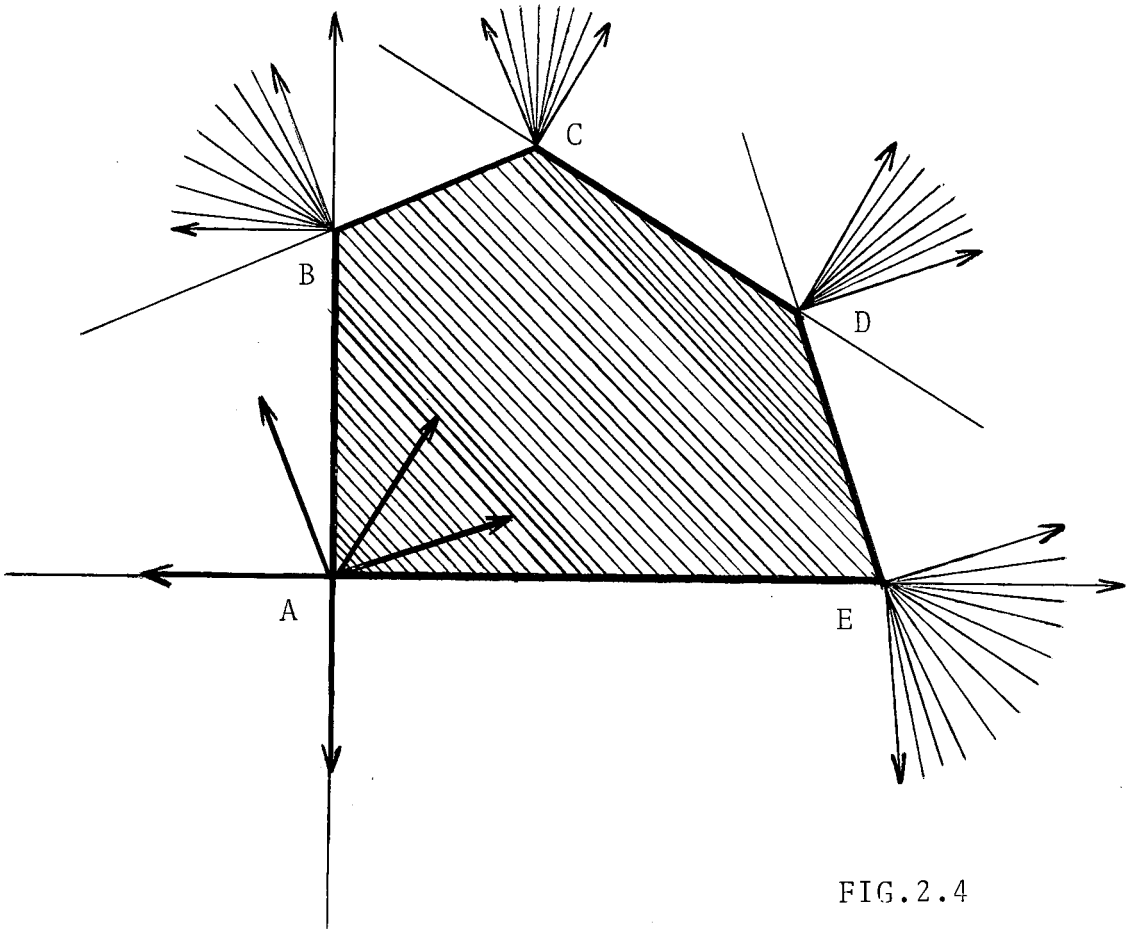


FIG.2.4

TEOREMA 2.2

Sejam M o conjunto das soluções viáveis de um PPL de minimização e x^* um vértice de M . O cone do vértice x^* é CONVEXO.

DEMONSTRAÇÃO

Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ o cone do vértice x^* de M .

Sejam $-\nabla f_1(x)$ e $-\nabla f_2(x)$ dois pontos de C .

Vamos mostrar que $-\nabla f(x) = -|\alpha \nabla f_1(x) + (1-\alpha) \nabla f_2(x)| \in C$ ($0 \leq \alpha \leq 1$), ou seja que qualquer combinação linear convexa de $-\nabla f_1(x)$ e $-\nabla f_2(x)$ pertence a C e, portanto, C é convexo.

Como $f_1(x^*) \leq f_1(x)$ e $f_2(x^*) \leq f_2(x)$, $\forall x \in M$ e como $0 \leq \alpha \leq 1$, temos:

$$\begin{cases} \alpha f_1(x^*) \leq \alpha f_1(x) \\ (1 - \alpha) f_2(x^*) \leq (1 - \alpha) f_2(x) \end{cases} \rightarrow$$

$\alpha f_1(x^*) + (1 - \alpha)f_2(x^*) \leq \alpha f_1(x) + (1 - \alpha)f_2(x) \rightarrow$
 $f(x^*) \leq f(x), \forall x \in M \rightarrow x^* \text{ é um ponto ótimo de } f(x) \rightarrow -\nabla f(x) \in C.$

TEOREMA 2.3

Sejam M o conjunto viável de um PPL de minimização e x^* um vértice desse conjunto. Sejam C o cone do vértice x^* e $f(x)$ a função objetivo.

Se $-\nabla f(x) \in C$, então x^* é solução ótima de $f(x)$.

DEMONSTRAÇÃO

Sem perda de generalidade, seja $g_i(x) = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i$
 $(i = 1, 2, \dots, n)$ as restrições atuantes em $x^* \in M$, isto é
 $g_i(x^*) = b_i.$

Logo, os raios vetores do Cone C são $\nabla g_i(x) = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$.

Seja $f(x) = \sum_{j=1}^n c_j x_j$ uma função objetivo tal que
 $-\nabla f(x) \in C.$

Como C é um cone convexo, qualquer ponto de C pode ser obtido como combinação linear não negativa dos raios vetores de C (SIMONNARD - APENDICE B - SEÇÃO B.8), logo temos:

$$\begin{aligned}
 -\nabla f(x) &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \nabla g_i(x) \quad (\alpha_i \geq 0) \rightarrow \\
 -(c_1, c_2, \dots, c_n) &= \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i a_{i1}, \sum_{i=1}^n \alpha_i a_{i2}, \dots, \sum_{i=1}^n \alpha_i a_{in} \right) \\
 \rightarrow -c_j &= \sum_{i=1}^n \alpha_i a_{ij} \quad ; \quad (\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}) \quad (2.1).
 \end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned}
 g_i(x^*) &= b_i \quad \text{e} \quad g_i(x) \leq b_i \rightarrow \\
 g_i(x^*) &\geq g_i(x) \quad ; \quad \forall x \in M \quad \text{e} \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \alpha_i g_i(x^*) &\geq \alpha_i g_i(x) ; \alpha_i \geq 0 \rightarrow \\ \sum_{i=1}^n \alpha_i a_{ij} x_j^* &\geq \sum_{i=1}^n \alpha_i a_{ij} x_j \\ \forall j \in \{1, 2, \dots, n\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

De (2.1) e (2.2), vem :

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^n c_j x_j^* &\geq - \sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \\ \sum_{j=1}^n c_j x_j &\leq \sum_{j=1}^n c_j x_j^* \rightarrow f(x) \leq f(x^*), \end{aligned}$$

$\forall x \in M \rightarrow x^*$ é solução ótima de $f(x)$.

Definiremos, a seguir as condições de Kuhn-Tucker e mostraremos que o método satisfaz essas condições e, portanto, compatível com o que foi demonstrado no TEOREMA 2.6 .

AS CONDIÇÕES DE KUHN-TUCKER

Sejam X^0 um conjunto aberto no \mathbb{R}^n , $\theta(x): X^0 \rightarrow \mathbb{R}$ funcional linear e $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x))$ uma função vetorial com os $g_i(x)$ ($\forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$) definidos em X^0 .

$$\theta(\bar{x}) = \text{MIN}_{x \in X} \theta(x) \quad \text{e} \quad \bar{x} \in X = \{x/x \in X^0, g(x) \leq 0\}$$

As condições de Kuhn-Tucker são satisfeitas, se existirem $\bar{x} \in X^0$ e $\bar{u} \in \mathbb{R}^m$, tais que:

$$\left\{ \begin{array}{l} g(\bar{x}) \leq 0 \\ \bar{u} \geq 0 \\ \bar{u} \cdot g(\bar{x}) = 0 \\ \nabla \theta(\bar{x}) + \bar{u} \cdot \nabla g(\bar{x}) = 0 \end{array} \right.$$

OBSERVAÇÃO

$\theta(x)$ e $g(x)$ diferenciáveis em \bar{x} .

TEOREMA 2.4 - AS CONDIÇÕES DE KUHN-TUCKER SÃO SUFICIENTES PARA PROBLEMAS CONVEXOS

Sejam $\bar{x} \in X^0$, $X^0 \subseteq \mathbb{R}^n$ aberto, $\theta(x)$ e $g(x)$ convexas e diferenciáveis em \bar{x} . Se (\bar{x}, \bar{u}) satisfaz as condições de Kuhn-Tucker, então \bar{x} é uma solução do problema de minimização.

DEMONSTRAÇÃO

Seja (\bar{x}, \bar{u}) satisfazendo as condições de Kuhn-Tucker. Então, pela convexidade e diferenciabilidade de $\theta(x)$ em \bar{x} , temos $\forall x \in X$:

$$\begin{aligned} \theta(x) - \theta(\bar{x}) &\geq \nabla \theta(\bar{x})(x - \bar{x}) \\ &= -\bar{u} \nabla g(\bar{x})(x - \bar{x}), (\nabla \theta(x) = -\bar{u} \nabla g(\bar{x})) \\ &\geq \bar{u} [g(\bar{x}) - g(x)], (\text{pela convexidade e diferenciabilidade de } g \text{ em } \bar{x} \text{ e porque } \bar{u} \geq 0) \\ &= -\bar{u} g(x), (\text{pois } \bar{u} g(\bar{x}) = 0) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Logo, temos:

$$\theta(x) - \theta(\bar{x}) \geq 0 \rightarrow \theta(x) \geq \theta(\bar{x}) (\forall x \in X)$$

Como $g(\bar{x}) \leq 0$ e $\bar{x} \in X^0$, então

$$\theta(\bar{x}) = \min_{x \in X} \theta(x) \quad \text{e} \quad \bar{x} \in X.$$

TEOREMA 2.5 - O MÉTODO SATISFAZ AS CONDIÇÕES DE KUHN-TUCKER

Sejam $g_1(x) = g_2(x) = \dots = g_n(x) = 0$ os hiperplanos que determinam o vértice $x^* \in \mathbb{R}^n$, do conjunto das soluções viáveis M , determinado por $g(x) = (g_1(x), g_2(x), \dots, g_m(x)) \leq 0$ ($m \geq n$). Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ o cone do vértice $x^* \in M$. Então, qualquer função objetivo $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de minimização, tal que

$-\nabla f(x) \in C$ tem como ponto ótimo o vértice x^* de M .

DEMONSTRAÇÃO

O cone C , do vértice $x^* \in M$, definido pelos gradientes de $g_i(x) = 0$ ($i=1,2,\dots,n$) está inteiramente contido num mesmo semi-espço do \mathbb{R}^n . Então, qualquer função objetivo $f(x)$, de minimização, cujo simétrico do gradiente pertence a C pode ser escrito como combinação linear não negativa dos gradientes dos $g_i(x)$ ($i=1,2,\dots,n$) no vértice x^* .

Portanto, as condições de K-T estão satisfeitas, pois:

$$g(x^*) = (g_1(x^*), g_2(x^*), \dots, g_m(x^*)) \leq 0$$

$\exists \bar{u} \geq 0$, tal que:

$$-\nabla f(x^*) = \bar{u}_1 \cdot \nabla g_1(x^*) + \bar{u}_2 \cdot \nabla g_2(x^*) + \dots + \bar{u}_n \cdot \nabla g_n(x^*)$$

Ou seja, $\nabla f(x^*) + \bar{u} \cdot \nabla g(x^*) = 0$ e $\bar{u} \cdot g(x^*) = 0$, pois $g_i(x^*) = 0$ ou $u_j = 0$; $\forall i \in \{1,2,\dots,n\}$ e $\forall j \in \{n+1,\dots,m\}$.

Logo, se $-\nabla f(x^*) \in C \rightarrow x^*$ é ponto ótimo de $f(x)$.

ILUSTRAÇÃO NO \mathbb{R}^2

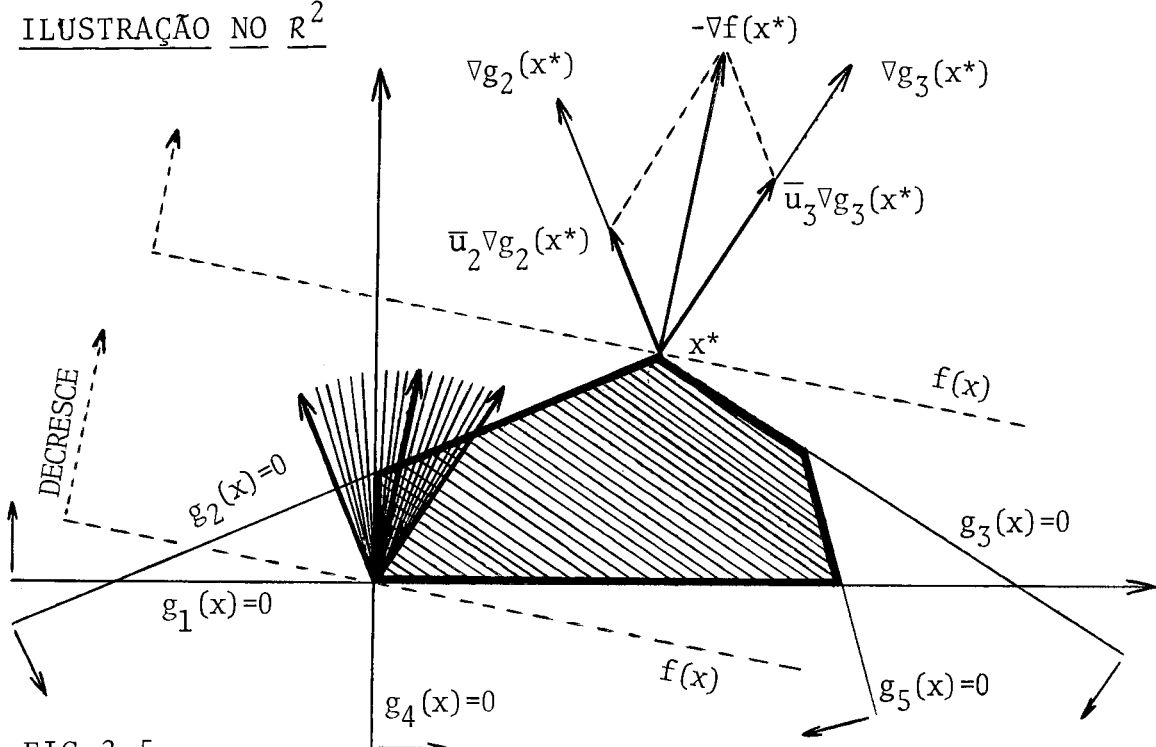


FIG. 2.5

O cone C , do vértice x^* , é determinado por $\nabla g_2(x^*)$ e $\nabla g_3(x^*)$. O ponto ótimo da função objetivo $f(x)$, de minimização, é o vértice x^* , pois $-\nabla f(x) \in C$.

As condições de K-T são satisfeitas:

- i) $g_i(x^*) \leq 0$; $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- ii) $\bar{u}_i \geq 0$; $\forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- iii) $\bar{u}_1 g_1(x^*) + \bar{u}_2 g_2(x^*) + \bar{u}_3 g_3(x^*) + \bar{u}_4 g_4(x^*) + \bar{u}_5 g_5(x^*) = 0$,
pois $g_2(x^*) = g_3(x^*) = 0$ e $\bar{u}_1 = \bar{u}_4 = \bar{u}_5 = 0$
- iv) $\nabla f(x^*) + \bar{u}_1 \nabla g_1(x^*) + \bar{u}_2 \nabla g_2(x^*) + \bar{u}_3 \nabla g_3(x^*) + \bar{u}_4 \nabla g_4(x^*) + \bar{u}_5 \nabla g_5(x^*) = 0$

Fazendo $\bar{u}_1 = \bar{u}_4 = \bar{u}_5 = 0$, vemos que $\exists \bar{u}_2, \bar{u}_3 > 0$ tal que:

$$\nabla f(x^*) + \bar{u}_2 \nabla g_2(x^*) + \bar{u}_3 \nabla g_3(x^*) = 0$$

Portanto, as condições de K-T são satisfeitas. Basta considerar (x^*, \bar{u}) onde $\bar{u} = (0, \bar{u}_2, \bar{u}_3, 0, 0)$.

OBSERVAÇÕES

a) seja C o cone do vértice x^* , do conjunto das soluções viáveis M de um PPL. Sejam $\overset{\circ}{C}$ e $\text{Fr.}(C)$, respectivamente, o interior do cone C e a fronteira de C .

Se $-\nabla f(x) \in \overset{\circ}{C} \rightarrow f(x^*) < f(x)$, $\forall x \in M$, ou seja, o PPL admite como solução ótima somente o vértice x^* .

Se $-\nabla f(x) \in \text{Fr.}(C) \rightarrow f(x^*) \leq f(x)$, $\forall x \in M$. Nesse caso $f(x)$ admite soluções múltiplas.

Maiores detalhes destes fatos serão dados no CAPÍTULO III.

b) Sejam x^1, x^2, \dots, x^m os vértices do conjunto das soluções viáveis

veis M . Sejam C_1, C_2, \dots, C_m , respectivamente, os cones desses v\u00e9rtices. Mostraremos no CAP\u00cdTULO III que, se considerarmos os conjuntos C_i ou $\overset{0}{C}_i$ ($i \in \{1, 2, \dots, m\}$), existe uma disposi\u00e7\u00e3o conveniente tal que esses conjuntos determinam uma PARTI\u00c7\u00c3O no \mathbb{R}^n (ver TEOREMA 3.11).

CAPÍTULO III
PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIPARAMÉTRICA

3.1. INTRODUÇÃO

Seja um Problema de Programação Linear, onde os termos independentes das variáveis variam em função dos parâmetros $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$. Fazendo $\lambda^T = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)$, o Problema de Programação Linear

$$\text{MÁXIMO } z = c^T x \quad (3.1)$$

SUJEITO A

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax = b(\lambda) \end{array} \right. \quad (3.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Onde, $b(\lambda)$ pode ser escrito na forma:

$b(\lambda) = b^* + F\lambda$ (os elementos das matrizes b^* , e F são constantes), é chamado de PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIPARAMÉTRICA PARA O LADO DIREITO (OU TERMOS INDEPENDENTES). Abreviadamente chamado de MLP-RHS (MULTIPARAMETRIC LINEAR PROGRAMMING (MLP) PROBLEM FOR THE RIGHT-HAND SIDES (RHS)).

Analogamente, seja um Problema de Programação Linear, onde os coeficientes da função objetivo variam em função dos parâmetros v_1, v_2, \dots, v_s . Fazendo $v^T = (v_1, v_2, \dots, v_s)$, dizemos que o Problema de Programação Linear

$$\text{MÁXIMO } z = c^T(v)x \quad (3.4)$$

SUJEITO A

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax = b \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Onde, $c(v)$ pode ser escrito na forma:

$c(v) = c^* + Hv$ (os elementos das matrizes c^* e H são constantes) é chamado de PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIPARAMÉTRICA PARA OS COEFICIENTES DAS VARIÁVEIS DA FUNÇÃO OBJETIVO. Abreviadamente chamado de MLP-OFC (MULTIPARAMETRIC LINEAR PROGRAMMING (MLP) PROBLEM FOR THE PRICES OR OBJECTIVE FUNCTION COEFFICIENTS (OFC)).

Nesta seção, mostraremos que dado o MLP-RHS (3.1-3.3) podemos definir para cada base ótima i_B uma região R_i determinada pela condição $i_B^{-1} (b^* + F\lambda) \geq 0$, tal que $\forall \lambda \in R_i$ a base i_B é ótima e, portanto, representa uma solução ótima viável. Seja $K = \bigcup R_i$. A intenção dessa SEÇÃO 2.2 é apresentar um método efetivo para achar todas as regiões R_i que cobrem K e não se sobrepõe. Mostraremos também como gerar essas bases ótimas.

Em analogia ao MLP-RHS estudaremos o MLP-OFC.

3.2. MULTIPARAMETRIZAÇÃO LINEAR PARA O LADO DIREITO DAS RESTRIÇÕES - MLP-RHS

3.2.1. APRESENTAÇÃO

Seja o PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO LINEAR MULTIPARAMÉTRICA PARA O LADO DIREITO DAS RESTRIÇÕES (MLP-RHS):

$$\text{MÁXIMO } z = c^T x \quad (3.2.1)$$

SUJEITO A

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax = b^* + F\lambda \\ x \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.2.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.2.3)$$

$b(\lambda)$ pode ser expresso na forma:

$$b(\lambda) = b^* + F\lambda$$

Onde, $F_{m \times 1}$, $b_{m \times 1}^*$ e $A_{m \times n}$ são matrizes de termos constantes, $\lambda_{1 \times 1}$ é um vetor-parâmetro e os elementos de $C_{n \times 1}$ são os coeficientes das variáveis de $x_{n \times 1}$ na função objetivo.

3.2.2. NOTAÇÃO

Seja o MLP-RHS

$$\text{MÁXIMO } Z = c^T x \quad (3.2.1)$$

SUJEITO A

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax = b^* + F\lambda \end{array} \right. \quad (3.2.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq \bar{0} \end{array} \right. \quad (3.2.3)$$

em relação (de variável) a $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$. Onde, $A_{m \times n} = (a_{ij})$ é uma matriz de elementos reais como foi explicitada anteriormente.

$c, \bar{0} \in \mathbb{R}^n$ são vetores-colunas (ou matrizes) expressos da seguinte maneira:

$$c = \begin{array}{|c|} \hline c_1 \\ \hline c_2 \\ \hline \vdots \\ \hline \vdots \\ \hline c_n \\ \hline \end{array} ; \quad \bar{0} = \begin{array}{|c|} \hline 0 \\ \hline 0 \\ \hline \vdots \\ \hline \vdots \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

$b^* \in \mathbb{R}^m$ é um vetor-coluna (ou matriz), $F_{m \times s} = (f_{ik})$ matriz de elementos reais e $\lambda \in \mathbb{R}^s$ é um vetor-coluna (ou matriz) parâmetro. b^*, F e λ como explicitados anteriormente.

Convem notar que os elementos das matrizes A, F, c e b^* são números reais constantes, os elementos de λ são parâmetros e os elementos x são as variáveis do problema.

Introduziremos, nesse ponto, algumas notações que serão usadas no decorrer dessa seção. Elas visam uma melhor compreensão do funcionamento do algoritmo simplex. Como o simplex trabalha sempre em função de uma base, com a inversa dessa base e notadamente com produto de matrizes colocaremos, pri

meiramente, alguns conceitos básicos.

DEFINIÇÃO 3.1

Dizemos que uma matriz R é REGULAR À ESQUERDA (respectivamente, À DIREITA) para a operação de multiplicação de matrizes se, e somente se, a seguinte condição é verdadeira:

Quaisquer que sejam as matrizes A e B , se $R.A = R.B$ (respectivamente, $A.R = B.R$), então $A = B$. Uma matriz REGULAR À ESQUERDA e REGULAR À DIREITA é chamada de REGULAR.

Uma MATRIZ REGULAR também é chamada de MATRIZ CANCELÁVEL e a condição dada na DEFINIÇÃO 3.1 é denominada LEI RESTRIITA DO CANCELAMENTO À ESQUERDA (respectivamente, À DIREITA).

TEOREMA 3.1

Toda matriz inversível é REGULAR para a operação de multiplicação de matrizes.

DEMONSTRAÇÃO

Seja R uma matriz inversível e sejam A e B duas matrizes quaisquer tais que $R.A = R.B$. Multiplicando à esquerda por R^{-1} , temos:

$$R^{-1} RA = R^{-1} RB \rightarrow IA = IB \rightarrow A = B$$

Portanto, R é REGULAR À ESQUERDA.

Analogamente, podemos demonstrar que R é REGULAR À DIREITA. Logo, R é regular.

COROLÁRIO 3.1

Toda matriz que é uma base é REGULAR.

DEMONSTRAÇÃO

Seja B uma base.

A matriz B é formada por vetores-colunas linearmente

independentes. Logo, B é inversível. Pelo TEOREMA 3.1, B é REGULAR

Sejam $I = \{i/i = 1, 2, \dots, m\}$ e $J = \{j/j = 1, 2, \dots, n\}$.

Seja $\rho = (j_1, j_2, \dots, j_m)$, $j \in J$, uma m -upla consistindo dos sub-índices das variáveis básicas. A m -upla ρ será chamada de ÍNDICE DA BASE. Seja o RANK da matriz A igual a m ($m \leq n$). Sejam ${}^\rho B$ a matriz REGULAR (BASE) correspondente a ρ e ${}^\rho B^{-1}$ a matriz inversa de ${}^\rho B$. Além disso, sejam $J_1^{(\rho)} \subset J$ e $J_2^{(\rho)} \subset J$ os conjuntos de índices das variáveis básicas e não básicas, respectivamente, que correspondem a base com o índice ρ . É claro que $J_1^{(\rho)} \cup J_2^{(\rho)} = J$ e $J_1^{(\rho)} \cap J_2^{(\rho)} = \emptyset$

O quadro-simplex, correspondente a base ${}^\rho B$, pode ser escrito na seguinte forma:

De (3.2.2), temos que:

$Ax = b^* + F\lambda$. Como ${}^\rho B$ é regular à esquerda, multiplicando-se à esquerda, ambos os membros de (3.2.2) por ${}^\rho B^{-1}$, obtemos:

$${}^\rho B^{-1} \cdot (Ax) = {}^\rho B^{-1} (b^* + F\lambda) \rightarrow$$

$$({}^\rho B^{-1} \cdot A)x = ({}^\rho B^{-1} \cdot b^*) + ({}^\rho B^{-1} \cdot F)\lambda$$

Fazendo: ${}^\rho A = {}^\rho B^{-1} \cdot A$, ${}^\rho F = {}^\rho B^{-1} \cdot F$ e ${}^\rho b^* = {}^\rho B^{-1} \cdot b^*$, temos:

$${}^\rho Ax = {}^\rho b^* + {}^\rho F\lambda \rightarrow \boxed{{}^\rho Ax - {}^\rho F\lambda = {}^\rho b^*} \quad (3.2.7)$$

Por outro lado de (3.2.1), temos:

$$Z = c^T x \rightarrow Z - c^T x = 0$$

Seja $c_B^T = (c_{j_1}^T, c_{j_2}^T, \dots, c_{j_m}^T)$ a parte de c^T que está na base.

Somando $Z - c^T x = 0$ com a equação (3.2.7) multipli-

cada à esquerda por c_B^T , obtemos:

$$Z + (c_B^T \cdot \rho_A)x - (c_B^T \cdot \rho_F)\lambda - c^T x = c_B^T \cdot \rho b^* \quad \rightarrow$$

$$Z + (c_B^T \cdot \rho_A - c^T)x - (c_B^T \cdot \rho_F)\lambda = c_B^T \cdot \rho b^*$$

Fazendo: $\rho_c^T = c_B^T \cdot \rho_A - c^T$, $\rho_p^T = c_B^T \cdot \rho_F$ e $Z^{(\rho)} = c_B^T \cdot \rho b^*$, temos:

$$\boxed{Z + \rho_c^T x - \rho_p^T \lambda = Z^{(\rho)}} \quad (3.2.8)$$

Para distinguir as diferentes bases, usaremos $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k, \dots$ e os elementos correspondentes a ρ_k por $k_B, k_B^{-1}, k_A, k_F, k_{b^*}, J_1^{(k)}, J_2^{(k)}$ etc...

Finalmente, chamaremos de $Z^{(\rho)}(\lambda)$ (ou $Z^k(\lambda)$) o valor da função objetivo, em função de λ , relativo a base com o índice ρ (ou ρ_k). Chamaremos de $Z_{\max}(\lambda)$ o valor máximo da função objetivo, em função de λ , em relação a todas as bases. Isto é, $Z^{(\rho)}(\lambda)$ é usado para expressar o valor relativo a base de índice ρ e $Z_{\max}(\lambda)$ para expressar o valor máximo global.

3.2.3. TEOREMAS BÁSICOS E DEFINIÇÕES

Para resolver o problema (3.2.1-3.2.3) necessitamos de alguns conceitos básicos que apresentaremos nesse item.

DEFINIÇÃO 3.2

Se existe um vetor-parâmetro λ tal que o problema (3.2.1-3.2.3) tem uma solução ótima FINITA, em relação a esse λ , ele é chamado de VETOR-PARÂMETRO VIÁVEL.

O conjunto de todos os vetores parâmetros viáveis é chamado de K .

Isto é:

$$K = \{\lambda \in \mathbb{R}^S / \lambda \text{ é vetor-parâmetro viável}\}$$

Antes de enunciar e demonstrar o próximo TEOREMA vamos relembrar alguns conceitos de DUALIDADE.

Seja o par de problemas:

<u>PRIMAL</u>	<u>DUAL</u>
MAX. $Z = cx$	MIN. $W = yb$
(I) SUJEITO A	(II) SUJEITO A
$\left\{ \begin{array}{l} Ax \leq b \\ x \geq 0 \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} yA \geq c \\ y \geq 0 \end{array} \right.$

De (I) e (II) vemos imediatamente que, $\forall x$ viável para o primal e $\forall y$ viável para o dual, $cx \leq yAx \leq yb \rightarrow cx \leq yb$ ($\forall x, y$ viáveis).

De $cx \leq yb$, vemos que se $\exists y^0$ viável (finito) para o dual, então o conjunto das soluções viáveis do primal é limitado, pois $cx \leq y^0 b$ para todo x .

Portanto, se o dual possui solução finita viável, somente dois casos, mutuamente exclusivos, podem ocorrer:

- o primal possui solução ótima finita
- o primal não possui solução viável. Isto é, o conjunto das soluções viáveis é vazio.

OBSERVAÇÃO

Na formalização do dual, colocamos yA ao invés de $A^T y$ e yb ao invés de $b^T y$ para facilitar a compreensão da explicação que veio a seguir. No nosso caso y é um vetor-linha e x é um vetor-coluna.

TEOREMA 3.2

Se para um dado $\lambda^0 \in R^S$, existe um ótimo finito para o problema (3.2.1 - 3.2.3), então, $\forall \lambda \in R^S$, o problema (3.2.1-

3.2.3) tem uma solução ótima finita ou não tem solução viável

DEMONSTRAÇÃO

O DUAL do problema (3.2.1-3.2.3) é:

$$\text{MÍNIMO } w = u^T b(\lambda) \quad (3.2.1')$$

SUJEITO A

$$\left\{ \begin{array}{l} A^T u \geq c \\ u \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.2.2')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} u \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.2.3')$$

DO TEOREMA BÁSICO DA DUALIDADE (TEOREMA DA EXISTÊNCIA), temos que: dado um par de problemas duais uma, e somente uma, das três afirmações abaixo é verdadeira:

- Nenhum dos problemas tem solução viável.
- Um dos problemas não tem solução viável e o outro tem $\text{MIN.} w = -\infty$ (ou $\text{MAX.} z = \infty$), isto é, não tem solução ótima.
- Os problemas têm soluções ótimas.

Logo, se para $\lambda = \lambda^0$, existe um ótimo finito para o problema (3.2.1-3.2.3), então pelo teorema básico da dualidade (3.2.1'-3.2.3') tem para $\lambda = \lambda^0$ uma solução viável u_0 . Por outro lado, como A e c não dependem de λ , a solução u_0 é viável $\forall \lambda \in R^S$. Pelo que foi exposto anteriormente (PAG.38) se u^0 é solução viável (finita) do dual, então novamente pelo teorema básico da dualidade o primal (Problema 3.2.1-3.2.3) ou tem solução ótima finita, ou então não possui solução viável. ■

DEFINIÇÃO 3.3

Dizemos que a base P_B é uma base ótima se, e somente se, $\exists \lambda \in K$ tal que P_B é ótima (primal e dual viável) em rela-

ção a esse λ .

EXEMPLO 3.1

Seja o MLP-RHS

$$\text{MAX. } Z = 2x_1 - 3x_2$$

SUJEITO A

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 \leq 1 + \lambda_1 \\ x_1 + x_2 \leq 2 + \lambda_2 \\ x_1 \leq \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Colocando o problema na forma padrão e aplicando o simplex, temos:

$$\text{MIN. } Z' = -2x_1 + 3x_2$$

SUJEITO A

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 + \lambda_1 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 2 + \lambda_2 \\ x_1 + x_5 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_j \geq 0 ; j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{array} \right.$$

	↓	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3		-1	1	1	0	0	$1 + \lambda_1$
x_4		1	1	0	1	0	$2 + \lambda_2$
← x_5		1	0	0	0	1	$\lambda_1 + \lambda_2$
Z'		-2	3	0	0	0	0

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_3	0	1	1	0	1	$1 + 2\lambda_1 + \lambda_2$
x_4	0	1	0	1	-1	$2 - \lambda_1$
x_1	1	0	0	0	1	$\lambda_1 + \lambda_2$
Z'	0	3	0	0	2	$2\lambda_1 + 2\lambda_2$

Fazendo $\rho = (j_1, j_3, j_4)$ a base $\rho_B = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

é uma base ÓTIMA, pois $\exists \lambda \in k$, por exemplo $\lambda = (1, 2)^T$, tal que ρ_B é base ótima (Primal e dual viável).

OBSERVAÇÃO

Como $b_i = x(\lambda)$, a regra do simplex para a escolha do pivô não se aplica. Basta que escolhamos, na coluna da VNB que vai entrar na base, um elemento não nulo para pivô.

DETERMINAÇÃO DA REGIÃO DEFINIDA POR ρ_B

Seja ρ_B uma base ótima no sentido da DEFINIÇÃO 3.3. Como a solução do Dual não depende de λ , ela permanece viável $\forall \lambda \in \mathbb{R}^S$ (VEJA A DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.2).

Uma base ρ_B permanece primal viável se exigirmos que o 2º membro de (3.2.2), relativo a essa base, seja não-negativo.

Isto é:

A base ρ_B permanece primal viável, se

$$\rho_B^{-1}(b^* + F\lambda) \geq 0 \rightarrow \rho_B^{-1}b^* + \rho_B^{-1}F\lambda \geq 0$$

Fazendo: $\rho_B^{-1}b^* = \rho_{b^*}$ e $\rho_B^{-1}F = \rho_F$, vem:

$$\rho_{b^*} + \rho_{F\lambda} \geq 0 \quad \rightarrow \quad -\rho_{F\lambda} \leq \rho_{b^*} \quad (3.2.9)$$

A condição (3.2.9) determina uma única região $R_\rho \subset R^S$ tal que $\forall \lambda \in R_\rho$ a base ρ_B é ótima e $\forall \lambda \in K - R_\rho$ a base ρ_B é primal inviável.

As DEFINIÇÕES 3.4 a 3.7 e o TEOREMA 3.3 são secundários e são colocados apenas para formalizar e servir de embasamento para a DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.4.

DEFINIÇÃO 3.4

Chamamos de HIPERPLANO ao conjunto de pontos da forma (x_1, x_2, \dots, x_n) tais que $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ com $b, a_1, a_2, \dots, a_n \in R$.

Isto é:

Chamamos de HIPERPLANO ao conjunto $\{x \in R^n / ax = b\}$.

Podemos entender a equação $ax = b$ como sendo o produto escalar entre os vetores-linhas $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

DEFINIÇÃO 3.5

Chamamos de SEMI-ESPAÇO ao conjunto de pontos $x \in R^n$ tais que $ax > b$ ou $ax < b$ ($ax \geq b$ ou $ax \leq b$).

Portanto, o HIPERPLANO $ax = b$ divide o R^n em dois SEMI-ESPAÇOS representados pelas inequações lineares $ax > b$ e $ax < b$ ($ax \geq b$ e $ax \leq b$).

TEOREMA 3.3

O conjunto $\{x \in R^n / ax \geq b\}$ é FECHADO.

DEMONSTRAÇÃO

A prova pode ser encontrada em [3] BREGALDA, P.F.C; OLIVEIRA, A.A.F. e BORNSTEIN, C.T.

DEFINIÇÃO 3.6

Chamamos de POLITOPO a interseção finita de semi-espaços fechados.

DEFINIÇÃO 3.7

Dizemos que um conjunto C é CONVEXO se, e somente se, $x^1 \in C$ e $x^2 \in C \rightarrow (\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2) \in C \quad \forall \alpha_1 \geq 0, \forall \alpha_2 \geq 0$ com $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Ou, na forma equivalente:

$$(\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2) \in C \quad \text{com} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

TEOREMA 3.4

A região R_ρ determinada pela condição $-\rho_F \lambda \leq \rho_{b^*}$ é um POLITOPO CONVEXO em R^S .

DEMONSTRAÇÃO

Segue imediatamente da DEFINIÇÃO 3.6 que R_ρ é um POLITOPO, pois é formado pela interseção finita de semi-espaços fechados.

Basta, portanto, provar que R_ρ é CONVEXO.

Sejam $\lambda^1, \lambda^2 \in R_\rho$. Então, temos:

$$\begin{cases} -\rho_F \lambda^1 \leq \rho_{b^*} \\ -\rho_F \lambda^2 \leq \rho_{b^*} \end{cases}$$

Temos que mostrar que $(\alpha_1 \lambda^1 + \alpha_2 \lambda^2) \in R_\rho$ com $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$ e $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$

$$-\rho_F(\alpha_1 \lambda^1 + \alpha_2 \lambda^2) = -\rho_F \cdot \alpha_1 \lambda^1 - \rho_F \cdot \alpha_2 \lambda^2$$

Como $\alpha_1 \geq 0$ e $\alpha_2 \geq 0$, temos:

$$- \rho_F \lambda^1 \leq \rho_{b^*} \rightarrow -\rho_F \cdot \alpha_1 \lambda^1 \leq \alpha_1 \cdot \rho_{b^*}$$

$$- \rho_F \lambda^2 \leq \rho_{b^*} \rightarrow -\rho_F \cdot \alpha_2 \lambda^2 \leq \alpha_2 \cdot \rho_{b^*}$$

Logo:

$$-\rho_F(\alpha_1 \lambda^1 + \alpha_2 \lambda^2) = -\rho_F \cdot \alpha_1 \lambda^1 - \rho_F \cdot \alpha_2 \lambda^2 \leq \alpha_1 \cdot \rho_{b^*} + \alpha_2 \cdot \rho_{b^*} =$$

$$= \rho_{b^*} \underbrace{(\alpha_1 + \alpha_2)}_1 = \rho_{b^*}$$

$$\text{Portanto, } -\rho_F(\alpha_1 \lambda^1 + \alpha_2 \lambda^2) \leq \rho_{b^*} \rightarrow (\alpha_1 \lambda^1 + \alpha_2 \lambda^2) \in R_\rho.$$

Logo R_ρ é um POLÍTOPO CONVEXO

OBSERVAÇÃO

Poderíamos demonstrar que R_ρ é CONVEXO partindo da demonstração que é um POLÍTOPO. Da convexidade dos semi-espacos fechados e da demonstração de que "a interseção de um conjunto (finito ou infinito) de conjuntos convexos é um conjunto convexo", segue que se um conjunto é um POLÍTOPO, então ele é CONVEXO.

EXEMPLO 3.2

Seja o seguinte MLP-RHS DO EXEMPLO 3.1

$$\text{MAX. } Z = 2x_1 - 3x_2$$

SUJEITO A

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 \leq 1 + \lambda_1 \\ x_1 + x_2 \leq 2 + \lambda_2 \\ x_1 \leq \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Fazendo $\rho = (j_1, j_3, j_4)$ a base ótima

$$\rho_B = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

permanecerá primal viável se

$$\begin{cases} x_3(\lambda) = 1 + 2\lambda_1 + \lambda_2 \geq 0 \\ x_4(\lambda) = 2 - \lambda_1 \geq 0 \\ x_1(\lambda) = \lambda_1 + \lambda_2 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2\lambda_1 - \lambda_2 \leq 1 \\ \lambda_1 \leq 2 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 \leq 0 \end{cases} +$$

$$- \underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}_{-\rho_F} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{vmatrix}}_{\lambda} \leq \underbrace{\begin{vmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix}}_{\rho_{b^*}}$$

Logo, a representação gráfica do politopo convexo

R_ρ é:

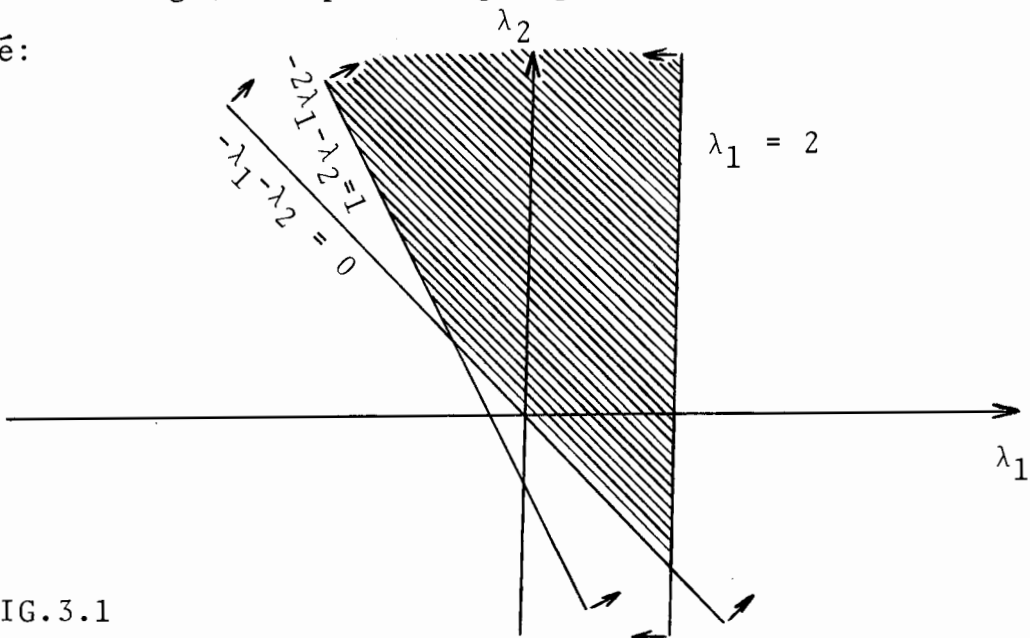


FIG. 3.1

OBSERVAÇÕES

a) A região R_ρ determinada pela condição $-\rho_F \lambda \leq \rho_{b^*}$ NÃO É NECESSARIAMENTE UM CONE e também NÃO É NECESSARIAMENTE UM POLIEDRO CONVEXO.

Chamamos um POLÍTOPO CONVEXO LIMITADO de POLIEDRO CONVEXO.

Para mostrar esses dois fatos basta dar como contra-exemplo o EXEMPLO 3.2 .

Vemos claramente pela FIGURA 3.1 que R_ρ não é limitado, logo NÃO É um POLIEDRO CONVEXO.

Por outro lado, $\lambda = (1, 1)^T \in R_\rho$ e $5\lambda \notin R_\rho$ ($5\lambda \in K - R_\rho$), logo R_ρ NÃO É um CONE.

A rigor R_ρ somente será um CONE quando $\rho_{b^*} = \bar{0}$, pois se $\rho_F \lambda \leq \bar{0} \rightarrow \rho_F \cdot \alpha \lambda \leq \bar{0}$, $\forall \alpha \geq 0$. E, é claro, R_ρ será um POLIEDRO CONVEXO quando for LIMITADO.

b) Para vários ρ , isto é, $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_k, \dots$, nós notaremos as regiões por $R_1, R_2, \dots, R_k, \dots$

Demonstraremos a seguir que K é um POLÍTOPO CONVEXO.

TEOREMA 3.5

A região K é um POLÍTOPO CONVEXO EM R^S .

DEMONSTRAÇÃO

Pela DEFINIÇÃO 3.2 se λ é vetor-parâmetro viável, então o problema (3.2.1 - 3.2.3) tem uma solução ótima finita. Mostraremos primeiramente que K é CONVEXO.

$$K = \{\lambda \in R^S / \lambda \text{ é vetor-parâmetro viável}\}$$

$$\text{Vamos mostrar que se } \lambda^1, \lambda^2 \in K \rightarrow (\alpha_1 \lambda^1 + \alpha_2 \lambda^2) \in K \quad (\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1)$$

$$\text{Se } \lambda^1 \in K \rightarrow \begin{cases} Ax = b^* + F\lambda^1 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{n\~{a}o \acute{e} vazio}$$

$$\rightarrow \exists x^1 \in \mathbb{R}^n, x^1 \geq 0, \text{ tal que } Ax^1 = b^* + F\lambda^1$$

Analogamente, se $\lambda^2 \in K \rightarrow$

$$\begin{cases} Ax = b^* + F\lambda^2 \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{n\~{a}o \acute{e} vazio} \rightarrow$$

$$\exists x^2 \in \mathbb{R}^n, x^2 \geq 0, \text{ tal que } Ax^2 = b^* + F\lambda^2$$

Como $\alpha_1 > 0$ (se $\alpha_1 = 0$ a demonstra\~{c}o\~{e} \acute{e} trivial, pois $\alpha_1 = 0 \rightarrow \alpha_2 = 1$ e nesse caso $\alpha_1\lambda^1 + \alpha_2\lambda^2 = \lambda^2$), temos:

$$A(\alpha_1 x^1) = \alpha_1 b^* + F(\alpha_1 \lambda^1) \quad (a)$$

Como $\alpha_2 > 0$, temos:

$$A(\alpha_2 x^2) = \alpha_2 b^* + F(\alpha_2 \lambda^2) \quad (b)$$

Somando (a) e (b), membro a membro, vem:

$$\begin{aligned} A(\alpha_1 x^1) + A(\alpha_2 x^2) &= \alpha_1 b^* + \alpha_2 b^* + F(\alpha_1 \lambda^1) + F(\alpha_2 \lambda^2) \\ \rightarrow A(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2) &= (\alpha_1 + \alpha_2) b^* + F(\alpha_1 \lambda^1 + \alpha_2 \lambda^2) \rightarrow \\ A(\alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2) &= b^* + F(\alpha_1 \lambda^1 + \alpha_2 \lambda^2) \end{aligned}$$

Fazendo $x^* = \alpha_1 x^1 + \alpha_2 x^2$, temos:

$$Ax^* = b^* + F(\alpha_1 \lambda^1 + \alpha_2 \lambda^2)$$

Logo, $\exists x^* \in \mathbb{R}^n, x^* \geq 0$, tal que

$$Ax^* = b^* + F(\alpha_1 \lambda^1 + \alpha_2 \lambda^2) \rightarrow$$

$$\begin{cases} Ax = b^* + F(\alpha_1 \lambda^1 + \alpha_2 \lambda^2) \\ x \geq 0 \end{cases} \quad \text{não é vazio.}$$

Pelo TEOREMA 3.2, como (3.2.2-3.2.3) não é vazio, o problema (3.2.1-3.2.3) admite solução ótima finita para $\alpha_1 \lambda^1 + \alpha_2 \lambda^2$ ($\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$) $\rightarrow \alpha_1 \lambda^1 + \alpha_2 \lambda^2$ é vetor-parâmetro viável $\rightarrow (\alpha_1 \lambda^1 + \alpha_2 \lambda^2) \in K \rightarrow K$ é CONVEXO.

A demonstração de que K é um polítopo pode ser encontrada em [4] CHARNES, A. AND COOPER, W.W. (ver BIBLIOGRAFIA)

As DEFINIÇÕES 3.8 e 3.9 a seguir servem para demonstrar os TEOREMAS 3.6 e 3.7.

DEFINIÇÃO 3.8

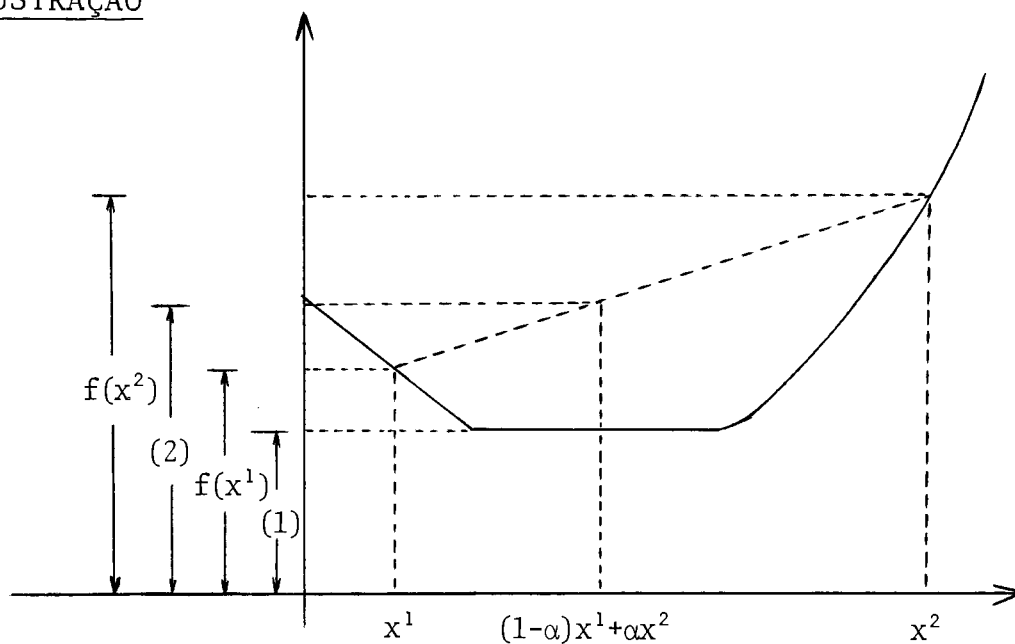
Uma função $f: T \rightarrow R$ é CONVEXA, no conjunto convexo T , se, e somente se,

$$\begin{array}{l} \forall x^1, x^2 \in T \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \rightarrow (1 - \alpha)f(x^1) + \alpha f(x^2) \geq f[(1 - \alpha)x^1 + \alpha x^2]$$

Analogamente, dizemos que f é CONCAVA se, e somente se,

$$\begin{array}{l} \forall x^1, x^2 \in T \\ 0 \leq \alpha \leq 1 \end{array} \rightarrow (1 - \alpha)f(x^1) + \alpha f(x^2) \leq f[(1 - \alpha)x^1 + \alpha x^2]$$

ILUSTRAÇÃO

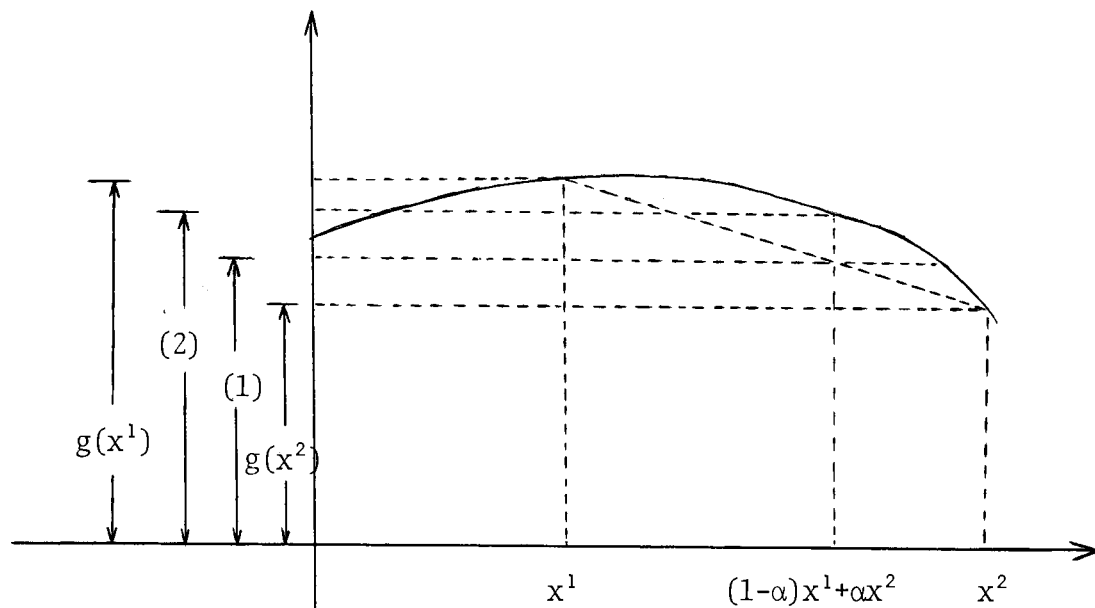


$$(1) f((1-\alpha)x^1 + \alpha x^2)$$

$$(2) (1-\alpha)f(x^1) + \alpha f(x^2)$$

FIG. 3.2

A função f é CONVEXA em \mathbb{R}



$$(1) (1-\alpha)g(x^1) + \alpha g(x^2)$$

$$(2) g((1-\alpha)x^1 + \alpha x^2)$$

FIG. 3.3

A função g é CONCAVA em \mathbb{R} .

DEFINIÇÃO 3.9

Seja $x(\lambda')$ $\in \mathbb{R}^n$ a solução ótima do problema, para um dado $\lambda' \in K$,

$$\text{MAX. } Z = c^T x$$

SUJEITO A

$$\begin{cases} Ax = b^* + F\lambda' \\ x \geq 0. \end{cases}$$

A função que associa ao vetor-parâmetro viável λ' um número real $Z(x(\lambda'))$ é chamada de Z_{\max}

ISTO É:

$Z_{\max} : K \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$Z_{\max}(\lambda) = \text{MAX } Z(x(\lambda)), = c^T x(\lambda) \quad (\lambda \in K)$$

TEOREMA 3.6

A função $Z_{\max}(\lambda)$, definida sobre K , é uma FUNÇÃO CÔNCAVA.

DEMONSTRAÇÃO

Sejam $x(\lambda^1)$ e $x(\lambda^2)$ soluções ótimas dos problemas (I) e (II), respectivamente, onde $\lambda^1, \lambda^2 \in K$ são dois vetores dados.

$$\text{MAX. } Z = c^T x$$

SUJEITO A

$$(I) \begin{cases} Ax = b^* + F\lambda^1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{MAX. } Z = c^T x$$

SUJEITO A

$$(II) \begin{cases} Ax = b^* + F\lambda^2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Logo, } \begin{cases} Ax(\lambda^1) = b^* + F\lambda^1 \\ Ax(\lambda^2) = b^* + F\lambda^2 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} Z_{\max}(\lambda^1) = c^T x(\lambda^1) \\ Z_{\max}(\lambda^2) = c^T x(\lambda^2) \end{cases}$$

Seja o problema:

$$\text{MAX. } Z = c^T x$$

SUJEITO A

$$(III) \quad \begin{cases} Ax = b^* + F\bar{\lambda} \\ x \geq 0 \end{cases}$$

onde $\bar{\lambda} = (1 - \alpha)\lambda^1 + \alpha\lambda^2$. Evidentemente $\bar{\lambda} \in K$, pois K é convexo ($0 \leq \alpha \leq 1$). Vamos mostrar, primeiramente, que $x(\lambda^1, \lambda^2) = (1 - \alpha)x(\lambda^1) + \alpha x(\lambda^2)$ é solução viável para o problema (III), $\forall \alpha \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} &\text{Como } (1 - \alpha) \geq 0, \alpha \geq 0, x(\lambda^1) \geq 0, x(\lambda^2) \geq 0 \rightarrow \\ &x(\lambda^1, \lambda^2) = (1 - \alpha)x(\lambda^1) + \alpha x(\lambda^2) \geq 0 \end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$\begin{aligned} Ax(\lambda^1, \lambda^2) &= A[(1 - \alpha)x(\lambda^1) + \alpha x(\lambda^2)] \\ &= (1 - \alpha) \cdot Ax(\lambda^1) + \alpha \cdot Ax(\lambda^2) \\ &= (1 - \alpha)(b^* + F\lambda^1) + \alpha(b^* + F\lambda^2) \\ &= b^* + F\lambda^1 - \alpha b^* - F \cdot \alpha \lambda^1 + \alpha b^* + F \cdot \alpha \lambda^2 = \\ &= b^* + F[(1 - \alpha)\lambda^1 + \alpha\lambda^2] = \\ &= b^* + F\bar{\lambda} \end{aligned}$$

Como $x(\lambda^1, \lambda^2) \geq 0$ e $Ax(\bar{\lambda}) = b^* + F\bar{\lambda}$, então $x(\lambda^1, \lambda^2)$ é viável para (III).

Mostremos, agora, que:

$$Z_{\max} [(1 - \alpha)\lambda^1 + \alpha\lambda^2] \geq (1 - \alpha) Z_{\max} (\lambda^1) + Z_{\max} (\lambda^2)$$

$Z_{\max} (\bar{\lambda}) = \text{MAX } Z(x) \geq c^T x$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ é viável para o problema (III). Utilizando-se do fato que $x(\lambda^1, \lambda^2)$ é viável para o problema (III), temos:

$$\begin{aligned}
z_{\max}(\bar{\lambda}) &\geq c^T \cdot x(\lambda^1, \lambda^2) = \\
&= c^T [(1 - \alpha)x(\lambda^1) + \alpha x(\lambda^2)] = \\
&= (1 - \alpha)c^T x(\lambda^1) + \alpha c^T x(\lambda^2) = \\
&= (1 - \alpha)z_{\max}(\lambda^1) + \alpha z_{\max}(\lambda^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Portanto, } z_{\max}(\bar{\lambda}) &= z_{\max}[(1 - \alpha)\lambda^1 + \alpha\lambda^2] \geq \\
&\geq (1 - \alpha)z_{\max}(\lambda^1) + \alpha z_{\max}(\lambda^2) \rightarrow z_{\max}(\lambda) \quad \tilde{e}
\end{aligned}$$

FUNÇÃO CÔNCAVA.

OBSERVAÇÕES

- a) Toda função θ de \mathbb{R}^n em \mathbb{R} da forma $\theta(x) = cx + a$ ($x \in \mathbb{R}^n$) representa uma família de hiperplanos. Portanto, é fácil visualizar que esse tipo de função é côncava e convexa.
- b) Para uma dada base ótima ρ_B temos $Z^{(\rho)}(\lambda) = c^T x(\lambda)$, onde $x(\lambda)$ é claramente da forma expressa no item (a) dessa observação. Logo $\forall \lambda^1, \lambda^2 \in R_\rho$ (politopo convexo definido por ρ_B), temos $Z^{(\rho)}[(1 - \alpha)\lambda^1 + \alpha\lambda^2] = (1 - \alpha) \cdot Z^{(\rho)}(\lambda^1) + \alpha Z^{(\rho)}(\lambda^2)$.

A desigualdade surge quando tomamos $\lambda^1 \in R_\rho$ e $\lambda^2 \in R_{\rho'}$, pois a função z_{\max} tem uma forma como a que está ilustrada a seguir.

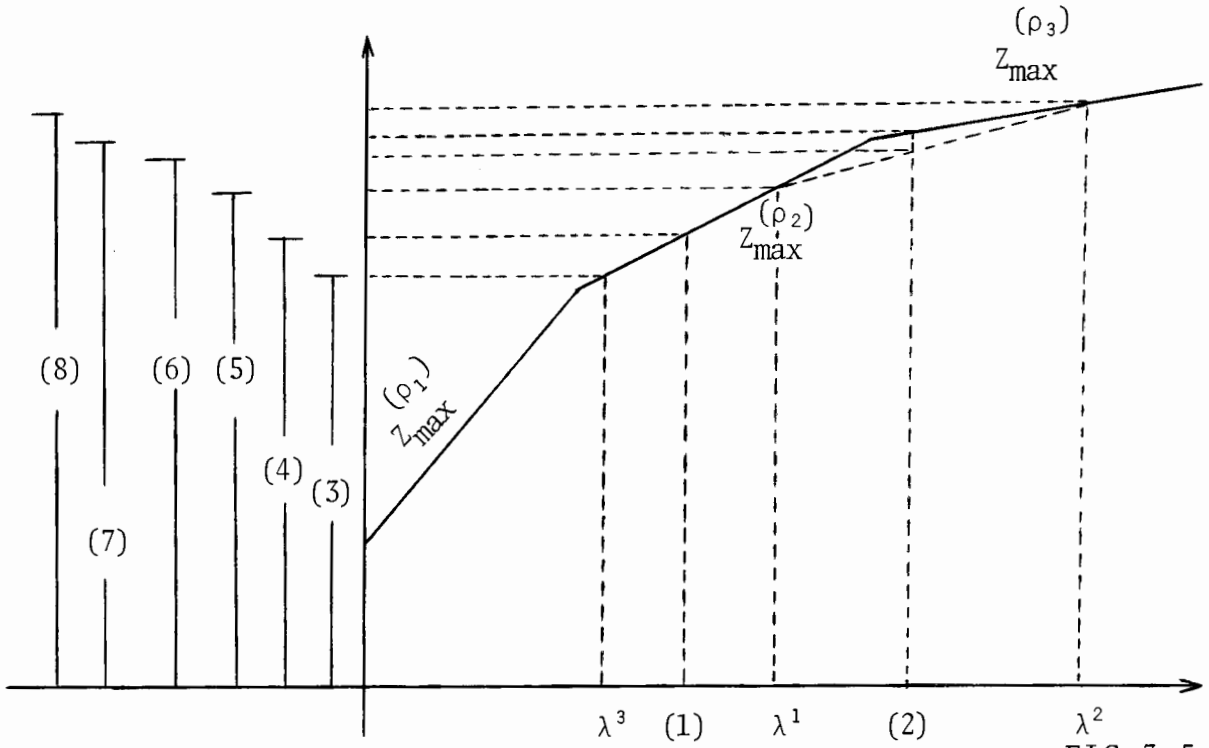


FIG.3.5

$$(1) (1-\alpha)\lambda^3 + \alpha\lambda^1$$

$$(2) (1-\alpha)\lambda^1 + \alpha\lambda^2$$

$$(3) Z_{\max}(\lambda^3)$$

$$(4) Z_{\max} [(1-\alpha)\lambda^3 + \alpha\lambda^1] = (1-\alpha)Z_{\max}(\lambda^3) + \alpha Z_{\max}(\lambda^1)$$

$$(5) Z_{\max}(\lambda^1)$$

$$(6) (1-\alpha)Z_{\max}(\lambda^1) + \alpha Z_{\max}(\lambda^2)$$

$$(7) Z_{\max} [(1-\alpha)\lambda^1 + \alpha\lambda^2]$$

$$(8) Z_{\max}(\lambda^2)$$

Veja, também, o EXEMPLO 3.1 (PAG.40), onde $Z^{(\rho)}(\lambda)$ é da forma exposta no item (a) dessa observação: $Z^{(\rho)}(\lambda) = 2\lambda_1 + 2\lambda_2$.

Vemos pela FIGURA 3.5 que $\lambda^3, \lambda^1 \in R_2$

$$\rightarrow Z_{\max} [(1-\alpha)\lambda^3 + \alpha\lambda^1] = (1-\alpha)Z_{\max}(\lambda^3) + \alpha Z_{\max}(\lambda^1)$$

Vemos, também, que $\lambda^1 \in R_2$ e $\lambda^2 \in R_3 \rightarrow$

$$\rightarrow Z_{\max} [(1 - \alpha)\lambda^1 + \alpha\lambda^2] > (1 - \alpha) Z_{\max} (\lambda^1) + \alpha Z_{\max} (\lambda^2)$$

DEFINIÇÃO 3.10

Sejam duas bases 1B e 2B com índices ρ_1 e ρ_2 (m-uplas consistindo de índices de variáveis básicas), respectivamente. As bases 1B e 2B são chamadas de BASES VIZINHAS se, e somente se, as duas condições abaixo são satisfeitas:

- i) $\exists \lambda^* \in K$ tal que 1B e 2B são AMBAS BASES ÓTIMAS para o problema

$$\text{MAX. } Z = c^T x$$

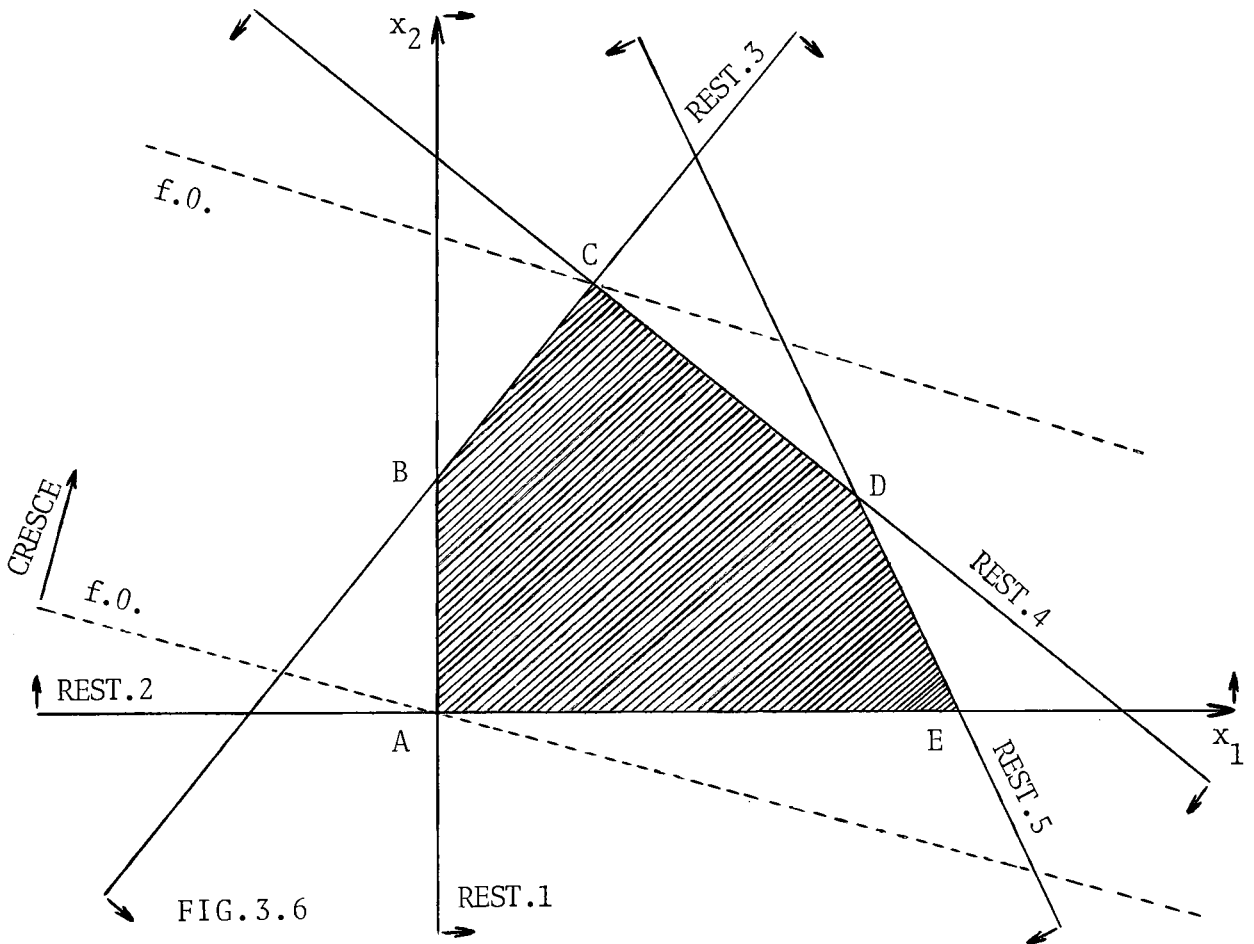
SUJEITO A

$$\begin{cases} Ax = b^* + F\lambda^* \\ x \geq 0 \end{cases}$$

- ii) É possível PASSAR de 1B para 2B (e vice-versa) através de UM PASSO do ALGORITMO DUAL-SIMPLEX. Isto é, é possível passar da base 1B para a base 2B (e vice-versa) com apenas a troca de uma variável da base no algoritmo DUAL-SIMPLEX. Ou seja, uma iteração do algoritmo DUAL-SIMPLEX.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO CONCEITO DE BASES VIZINHAS

Seja o MLP-RHS, para um dado λ , representado graficamente por:



Vamos supor que o gráfico anterior seja a representação do seguinte problema:

$$\text{MAX. } Z = \sum_{j=1}^2 c_j \cdot x_j \quad (c_1, c_2 \in \mathbb{R})$$

SUJEITO A:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^2 a_{1j} \cdot x_j \leq b_1 \quad \rightarrow \text{REST.3} \\ \sum_{j=1}^2 a_{2j} \cdot x_j \leq b_2 \quad \rightarrow \text{REST.4} \\ \sum_{j=1}^2 a_{3j} \cdot x_j \leq b_3 \quad \rightarrow \text{REST.5} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad \rightarrow \text{REST.1, REST.2} \end{array} \right.$$

Colocando o problema na forma padrão, temos:

$$\text{MIN. } Z' = - \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

SUJEITO A

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^2 a_{1j} \cdot x_j + x_3 = b_1 \quad \rightarrow \text{REST.3} \\ \sum_{j=1}^2 a_{2j} \cdot x_j + x_4 = b_2 \quad \rightarrow \text{REST.4} \\ \sum_{j=1}^2 a_{3j} \cdot x_j + x_5 = b_3 \quad \rightarrow \text{REST.5} \\ x_1, x_2 \geq 0 \quad \rightarrow \text{REST.1, REST.2} \\ x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array} \right.$$

Vamos mostrar agora que a DEFINIÇÃO 3.10, de BASES VIZINHAS, implica em DEGENERACÃO para o problema PRIMAL (ou SOLUÇÕES MÚLTIPLAS para o problema DUAL).

Sejam os vetores b e c correspondentes, respectivamente, ao lado direito das restrições e aos coeficientes da função objetivo. Sabemos do método simplex que se temos duas BASES ÓTIMAS 1B e 2B diferentes (condição (i) da DEFINIÇÃO 3.10) um dos dois casos seguintes ocorre:

- a) Existe uma DEGENERACÃO para o problema PRIMAL (ou SOLUÇÕES MÚLTIPLAS para o problema DUAL), isto é $\exists b_i^k = 0$. As bases ótimas 1B e 2B referem-se ao mesmo vértice ótimo V . Onde, b_i^k representa o termo independente na iteração k .
- b) O problema PRIMAL admite SOLUÇÕES MÚLTIPLAS (ou o problema DUAL é DEGENERADO), isto é $\exists c_j^k = 0$. As bases ótimas 1B e 2B referem-se a vértices diferentes.

Por outro lado, se 1B e 2B são bases ótimas e se é possível passar de 1B para 2B através de um passo do algoritmo DUAL-SIMPLEX, então $\exists b_i = 0$ o que implica em DEGENERAÇÃO para o problema PRIMAL. E essa degeneração ocorre no vértice ótimo, pois as bases 1B e 2B são ambas ótimas.

É claro que as bases 1B e 2B correspondem ao mesmo vértice ótimo, pois fazendo as operações de pivoteamento vemos que o vetor b não é alterado. Entretanto, só é possível passar da base ótima 1B para a base ótima 2B , através do DUAL-SIMPLEX, se o pivô for negativo.

Vamos ilustrar este fato através de quadros Dual-simplex.

Seja o MLP-RHS, dado através de seu QUADRO ÓTIMO, para um dado $\lambda^* \in K$

			↓ x_3				

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0	*	*	b_2^i
x_1	1	0	0	*	*	b_1^i
x_3	0	0	1	*	*	0
	0	0	0	*	c_5^{i+1}	$Z + b_0^i$

(II)

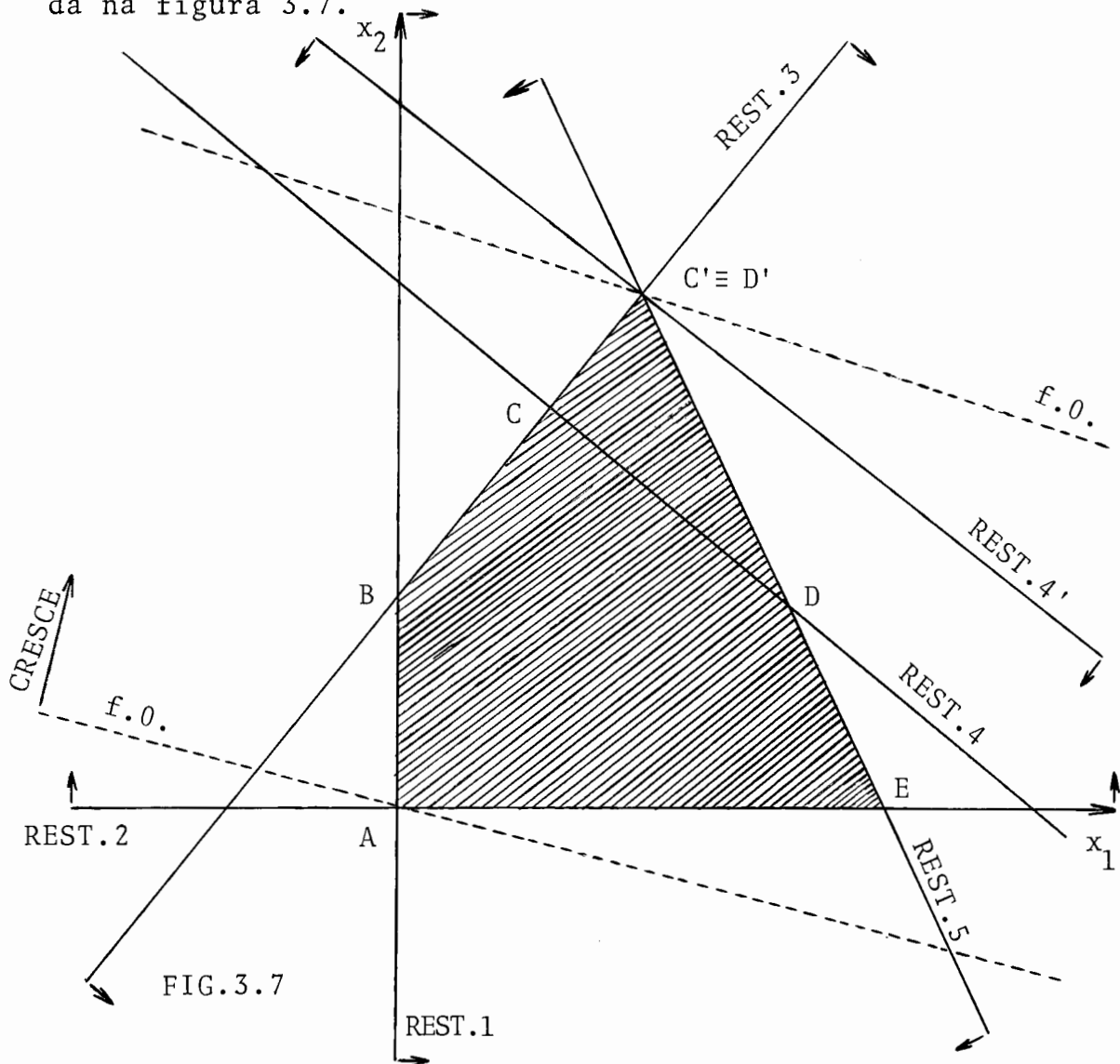
Se o quadro (I) é ótimo, então $c_3^i > 0$ ($c_3^i = 0$ somente no caso de SOLUÇÕES MÚLTIPLAS que é o mesmo que DEGENERAÇÃO DO DUAL). Suponha que θ seja o valor que devemos multiplicar a linha do pivô e subtrair da linha da função objetivo para anular o coeficiente de x_3 na função objetivo. Logo, $c_3^i + \theta \cdot a_{53}^i = 0$. Como $c_3^i > 0$ e $a_{53}^i > 0 \rightarrow \theta < 0$. Por outro lado, $c_5^{i+1} = 0 + \theta \cdot 1 \rightarrow c_5^{i+1} = \theta \rightarrow c_5^{i+1} < 0$. Mas, se $c_5^{i+1} < 0$, então a base ${}^{\rho}B$ de índice $\rho = \{j_1, j_2, j_3\}$, não é DUAL VIÁVEL e, portanto, não é base ótima, apesar da solução $(b_1^i, b_2^i, 0, 0, 0)$ do primal ter sido mantida.

Sabendo agora que as bases ótimas 1B e 2B correspondem ao mesmo vértice degenerado, vamos interpretar geometricamente A DEFINIÇÃO 3.10 .

Analiticamente, esse fato corresponde a determinar $\lambda^* \in K$ tal que provoque esse tipo de degeneração.

Conforme a DEFINIÇÃO 3.10, para que haja BASES VIZINHAS, deve existir $\lambda^* \in K$ tal que ambas as bases seja ótimas para esse valor de λ^* . Mas, atribuir valores a λ significa fazer uma translação das restrições (deslocar as restrições paralelamente a si mesma). Logo, graficamente a DEFINIÇÃO 3.10 faz com que o gráfico da figura 3.6 assumira a forma representa-

da na figura 3.7.



Graficamente, trasladamos a REST.4 para o ponto de interseção das RESTRIÇÕES 3 e 5 e assim, fizemos com que os pontos C e D, do primeiro gráfico, DEGENERASSEM num único ponto $C' \equiv D'$. Ficamos com 3 restrições, no \mathbb{R}^2 , determinando o vértice ótimo $C' \equiv D'$.

Vamos agora dar um exemplo numérico, onde ilustraremos como passar de uma base ótima para uma outra base ótima vizinha.

EXEMPLO 3.3

Seja O MLP-RHS

$$\text{MAX. } Z = x_1 + 5x_2$$

SUJEITO A

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 \leq 3 + \lambda_1 \\ 3x_1 + 7x_2 \leq 15 + 2\lambda_2 \\ 3x_1 + x_2 \leq 13 - \lambda_1 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Colocando o problema na forma padrão, temos:

$$\text{MIN. } Z' = -x_1 - 5x_2$$

SUJEITO A

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 + x_3 = 3 + \lambda_1 \\ 3x_1 + 7x_2 + x_4 = 15 + 2\lambda_2 \\ 3x_1 + x_2 + x_5 = 13 - \lambda_1 \\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1, 2, 3, 4, 5\} \end{array} \right.$$

Resolvendo pelo primal-simplex, temos:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
$\leftarrow x_3$	-1	1	1	0	0	$3 + \lambda_1$
x_4	3	7	0	1	0	$15 + 2\lambda_2$
x_5	3	1	0	0	1	$13 - \lambda_1$
z'	-1	-5	0	0	0	0

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	-1	1	1	0	0	$3 + \lambda_1$
$\leftarrow x_4$	10	0	-7	1	0	$-6 - 7\lambda_1 + 2\lambda_2$
x_5	4	0	-1	0	1	$10 - 2\lambda_1$
z'	-6	0	5	0	0	$15 + 5\lambda_1$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	$3/10$	$1/10$	0	$\frac{24 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2}{10}$
x_1	1	0	$-7/10$	$1/10$	0	$\frac{-6 - 7\lambda_1 + 2\lambda_2}{10}$
$\leftarrow x_5$	0	0	$9/5$	$-2/5$	1	$\frac{62 + 4\lambda_1 - 4\lambda_2}{5}$
z'	0	0	$4/5$	$3/5$	0	$\frac{57 + 4\lambda_1 + 6\lambda_2}{5}$

Façamos, por exemplo, $\lambda^* = \begin{vmatrix} -2 \\ 27/2 \end{vmatrix}$. Temos, então:

$$x_1(\lambda) = \frac{-6 - 7\lambda_1 + 2\lambda_2}{10} \rightarrow x_1(\lambda^*) = \frac{7}{2}$$

$$x_2(\lambda) = \frac{24 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2}{10} \rightarrow x_2(\lambda^*) = \frac{9}{2}$$

$$x_5(\lambda) = \frac{62 + 4\lambda_1 - 4\lambda_2}{5} \rightarrow x_5(\lambda^*) = 0$$

$$z^{(1)}(\lambda) = \frac{57 + 4\lambda_1 + 6\lambda_2}{5} \rightarrow z^{(1)}(\lambda) = 26$$

Determinamos esses valores tomando um $\lambda^* \in K$ tal que $x_1(\lambda^*) \geq 0$, $x_2(\lambda^*) \geq 0$ e $x_5(\lambda^*) = 0$. Para isso basta resolver o sistema assim formado ($x_5(\lambda^*) = 0$ é arbitrário. Também poderíamos ter tomado um $\lambda^* \in K$ tal que $x_1(\lambda^*) = 0$ ou $x_2(\lambda^*) = 0$).

$$\text{A base } {}^1B = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{é ótima (primal e dual}$$

viável) com o índice $\rho_1 = (j_1, j_2, j_5)$.

Tirando a VB $x_5 = 0$ da base e aplicando o dual-simplex a esse último quadro, vemos que o único elemento que pode ser pivô é $A_{54} = -2/5$. Logo, temos:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	3/4	0	1/4	$\frac{11 + \lambda_1}{2}$
x_1	1	0	-1/4	0	1/4	$\frac{5 - \lambda_1}{2}$
x_4	0	0	-9/2	1	-5/2	$-31 - 2\lambda_1 + 2\lambda_2$
z'	0	0	7/2	0	3/2	$30 + 2\lambda_1$

$$x_1(\lambda) = \frac{5 - \lambda_1}{2} \rightarrow x_1(\lambda^*) = \frac{7}{2}$$

$$x_2(\lambda) = \frac{11 + \lambda_1}{2} \rightarrow x_2(\lambda^*) = \frac{9}{2}$$

$$x_4(\lambda) = -31 - 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \rightarrow x_4(\lambda^*) = 0$$

$$z^{(2)}(\lambda) = 30 + 2\lambda_1 \rightarrow z^{(2)}(\lambda^*) = 26$$

$$\text{A base } {}^2B = \left| \begin{array}{ccc} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{array} \right| \text{ é ótima (primal e dual viável)}$$

vel) com o índice $\rho_2 = (j_1, j_2, j_4)$.

Como $\exists \lambda^* \in K$ tal que 1B e 2B são ambas bases ótimas e é possível passar de 1B para 2B (e vice-versa) através de um passo do algoritmo dual-simplex, então 1B e 2B são BASES VIZINHAS.

Faremos a representação gráfica do MLP-RHS dado para

$$\lambda^1 = \left| \begin{array}{c} -2 \\ 3 \end{array} \right| \in K \text{ e a seguir para } \lambda^* = \left| \begin{array}{c} -2 \\ 27/2 \end{array} \right|. \text{ Note que fazer } \lambda = \lambda^* \text{ no MLP-RHS é o mesmo que provocar uma degeneração-primal para o quadro ótimo do simplex.}$$

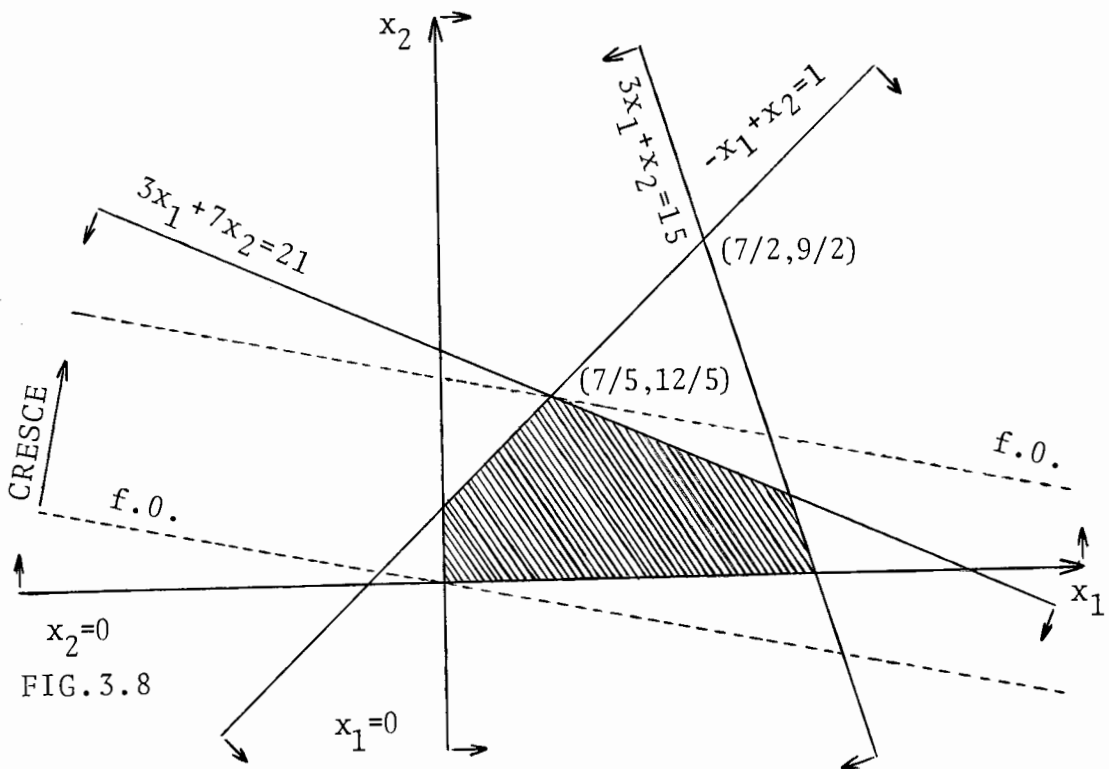
zer $\lambda = \lambda^*$ no MLP-RHS é o mesmo que provocar uma degeneração-primal para o quadro ótimo do simplex.

$$\text{Para } \lambda^1 = \left| \begin{array}{c} -2 \\ 3 \end{array} \right|, \text{ temos:}$$

$$\text{MAX. } Z = x_1 + 5x_2$$

SUJEITO A

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + 7x_2 \leq 21 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$



Para $\lambda^* = \begin{vmatrix} -2 \\ 27/2 \end{vmatrix}$, temos:

$$\text{MAX. } Z = x_1 + 5x_2$$

SUJEITO A

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 3x_1 + 7x_2 \leq 42 \\ 3x_1 + x_2 \leq 15 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

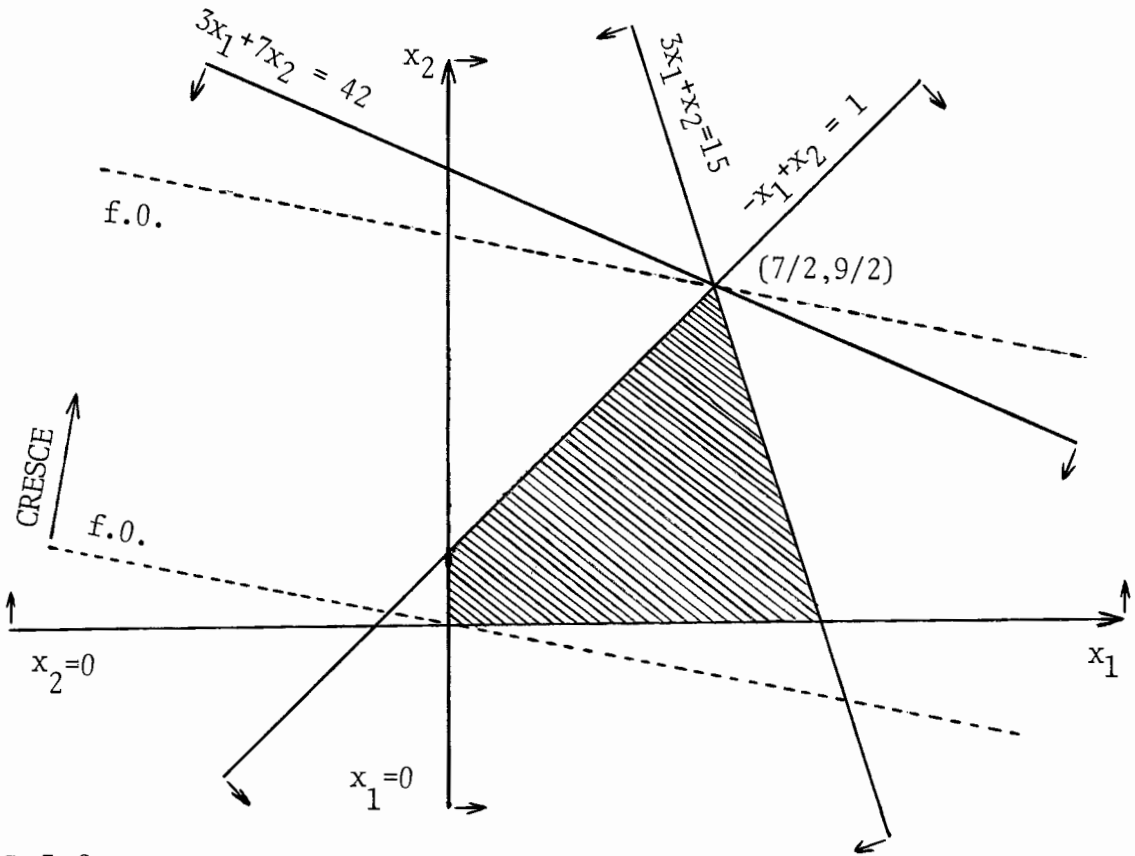


FIG. 3.9

Façamos agora o gráfico dos politopos convexos R_1 e R_2 , determinados pelas bases 1B e 2B , respectivamente.

R_1 é determinado por:

$$\begin{cases} x_1(\lambda) = \frac{-6 - 7\lambda_1 + 2\lambda_2}{10} \geq 0 \\ x_2(\lambda) = \frac{24 + 3\lambda_1 + 2\lambda_2}{10} \geq 0 \\ x_5(\lambda) = \frac{62 + 4\lambda_1 - 4\lambda_2}{5} \geq 0 \end{cases}$$

Isto é:

$$R_1 : \begin{cases} 7\lambda_1 - 2\lambda_2 \leq -6 \\ -3\lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 24 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 31 \end{cases}$$

R_2 é determinado por:

$$\begin{cases} x_1(\lambda) = \frac{5 - \lambda_1}{2} \geq 0 \\ x_2(\lambda) = \frac{11 + \lambda_1}{2} \geq 0 \\ x_4(\lambda) = -31 - 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 0 \end{cases}$$

Isto é:

$$R_2: \begin{cases} \lambda_1 \leq 5 \\ -\lambda_1 \leq 11 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 31 \end{cases}$$

Logo, temos que o gráfico de R_1 e R_2 no plano definido por λ_1 e λ_2 é

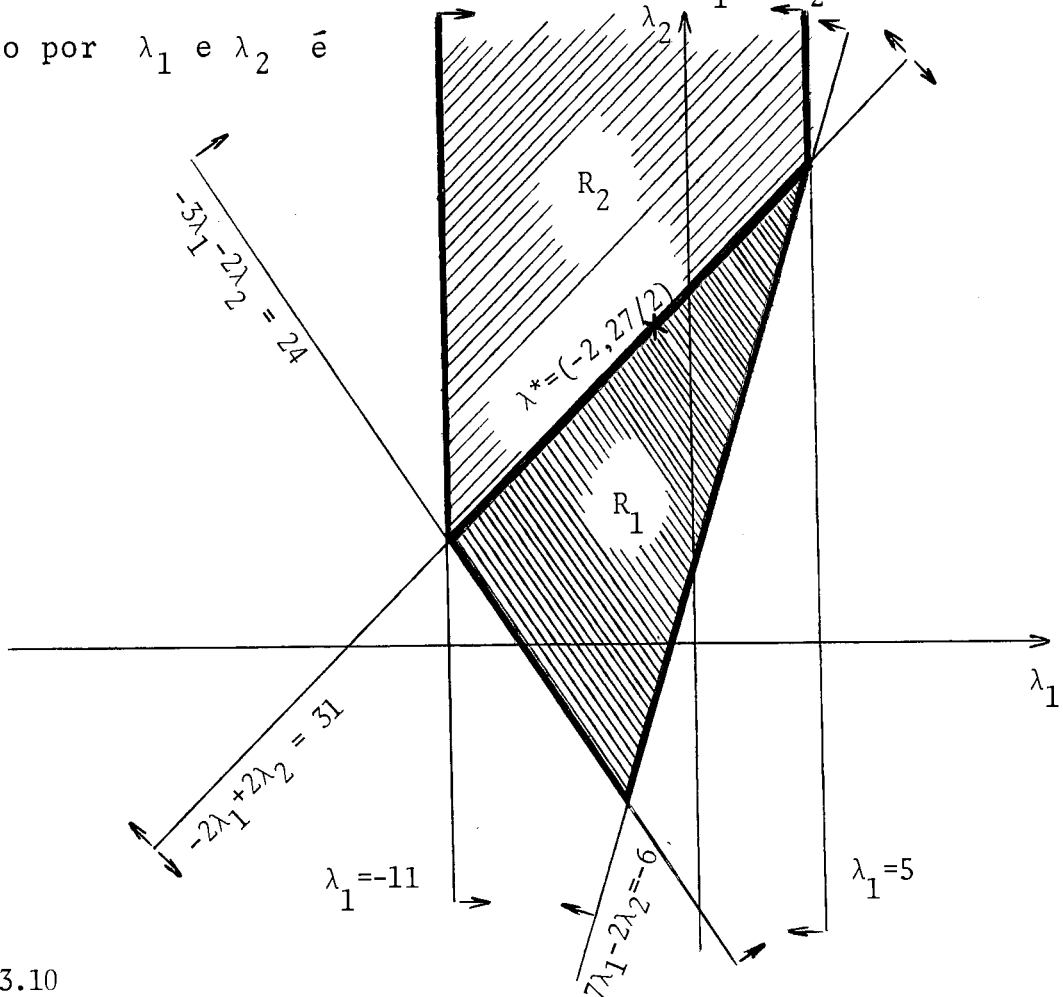


FIG. 3.10

Observe que $R_1 \cap R_2 = \{(\lambda_1, \lambda_2) / -2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 31 \text{ e } -11 \leq \lambda_1 \leq 5\}$. Isto é, R_1 e R_2 tem uma fronteira em comum que é uma parte do hiperplano $-2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 31$. Observe, também, que R_1 está contido no semi-espaço $-2\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 31$ e R_2 está contido no semi-espaço $-2\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 31$. Isto é, R_1 e R_2 estão em semi-espaços opostos.

O vetor $\lambda^* = \begin{vmatrix} -2 \\ 27/2 \end{vmatrix}$ pertence a fronteira de R_1

e R_2 como era de se esperar, pois $-2 \cdot (-2) + 2 \cdot \frac{27}{2} = 31$.

Graficamente notamos que as regiões R_1 e R_2 não se sobrepõe tendo, portanto, somente um hiperplano em comum. Qualquer vetor pertencente a $R_1 \cap R_2$ nos possibilita passar de R_1 para R_2 (e vice-versa) através de um passo do algoritmo dual-simplex, pois são esses vetores $\lambda^* \in R_1 \cap R_2$ que provocam a degeneração do primal.

OBSERVAÇÕES

a) Poderíamos resumir, de maneira formal, o conceito de BASES VIZINHAS da seguinte forma:

Suponha que $\exists \lambda^* \in K$ satisfazendo a DEFINIÇÃO 3.10.

Então, fazendo $\lambda = \lambda^*$, teríamos resolvendo pelo primal-simplex, relativo a base ótima 1_B , ${}^1_B^{-1}Ax = {}^1_B^{-1}b^* + {}^1_B^{-1}F\lambda^* \rightarrow$
 $\rightarrow {}^1_{Ax} = {}^1_{b^*} + {}^1_{F\lambda^*}$, onde:

$$1_b^* + 1_{F\lambda^*} = \begin{vmatrix} 1_{b_1^*} + \sum_{k=1}^s 1_{f_{1k} \cdot \lambda_k^*} \\ 1_{b_2^*} + \sum_{k=1}^s 1_{f_{2k} \cdot \lambda_k^*} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 1_{b_r^*} + \sum_{k=1}^s 1_{f_{rk} \cdot \lambda_k^*} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ 1_{b_m^*} + \sum_{k=1}^s 1_{f_{mk} \cdot \lambda_k^*} \end{vmatrix}$$

Por outro lado, se $\exists \lambda^* \in K$ satisfazendo a definição 3.10, então $\exists r \in I$ (índice das variáveis básicas) tal que

$$x_r(\lambda^*) = 1_{b_r^*} + \sum_{k=1}^s 1_{f_{rk} \cdot \lambda_k^*} = 0.$$

Se $\exists 1_{a_{rj}} < 0$, para $j \in J_2^{(1)}$ (conjunto de índices das VNB que correspondem a base 1_B), é possível passar para uma base ótima vizinha 2_B através de um passo do algoritmo dual-simplex.

Suponha que retirando-se a VB x_r da base entre no seu lugar a VNB x_j . Fazendo o pivoteamento no algoritmo dual-simplex, teremos:

$$x_j(\lambda^*) = \frac{x_r(\lambda^*)}{1_{a_{rj}}} = \frac{0}{1_{a_{rj}}} = 0. \quad \text{Logo,}$$

$$1_{b_r} + \sum_{k=1}^s 1_{f_{rk} \cdot \lambda_k^*} = 2_{b_r} + \sum_{k=1}^s 2_{f_{rk} \cdot \lambda_k^*} = 0 \quad \text{e, então,}$$

$$z^{(1)}(\lambda^*) = z^{(2)}(\lambda^*).$$

b) Suponha que exista uma DUAL-DEGENERAÇÃO para a base ótima

1B . Isto é, $\exists c_s = 0, s \in J_2^{(1)}$ (uma VNB cujo coeficiente, na função objetivo, é nulo). Esta degeneração não depende de λ (a função objetivo é $Z = c^T x$), pois os coeficientes das variáveis da função objetivo são números reais. Se $\exists a_{is} > 0, i \in I$, é possível passar para outra base ótima 3B através de um passo do algoritmo PRIMAL-SIMPLEX. A base ótima 3B NÃO É CONSIDERADA base vizinha de 1B no sentido da DEFINIÇÃO 3.10.

Como já vimos anteriormente, usamos o DUAL-SIMPLEX para gerar bases vizinhas e não o PRIMAL-SIMPLEX, pois $c_j \geq 0$ e devemos mantê-los assim.

Vamos ilustrar essa situação.

Seja o MLP-RHS, dado através do seu QUADRO-ÓTIMO, para um dado $\lambda^* \in K$.

VB	x_1	x_2	\downarrow x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	*	*	0	$b_2^1 \geq 0$
x_1	1	0	*	*	0	$b_1^1 \geq 0$
$\leftarrow x_5$	0	0	a_{53}^1	*	1	$b_5^1 \geq 0$
	0	0	c_3^1	*	0	$Z + b_0^1$

(I)

A base 1B , de índice $\rho_1 = \{j_1, j_2, j_5\}$, é a base ótima (primal e dual viável)

Fazendo x_3 entrar na base no lugar da VB x_5 ($x_5 \geq 0$) o elemento pivô é a_{53}^1 . Suponha que $a_{53}^1 > 0$ e que $c_3^1 = 0$ (dual degeneração ou soluções múltiplas para o primal). Então,

aplicando o algoritmo primal-simplex, o próximo quadro seria:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
x_2	0	1	0	*	*	$b_2^1 \geq 0$
x_1	1	0	0	*	*	$b_1^1 \geq 0$
x_3	0	0	1	*	*	$\frac{b_5^1}{A_{53}^1} \geq 0$
	0	0	0	*	0	$Z + b_0^1$

(II)

A base ótima 3B , de índice $\rho_3 = \{j_1, j_2, j_3\}$, NÃO É BASE VIZINHA de 1B no sentido da DEFINIÇÃO 3.10 .

DEFINIÇÃO 3.11

Considere duas bases ótimas 1B e 2B . Sejam R_1 e R_2 , respectivamente, as correspondentes regiões viáveis de λ definidas, de maneira única, por $-{}^1F\lambda \leq {}^1b^*$ e $-{}^2F\lambda \leq {}^2b^*$.

As regiões R_1 e R_2 são chamadas de VIZINHAS se, e so mente se, 1B e 2B são bases vizinhas.

OBSERVAÇÃO

Se R_1 e R_2 são VIZINHOS, então $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$.

Isto é claro, pois se R_1 e R_2 são vizinhos, então $\exists \lambda^* \in K$ tal que 1B e 2B são ambas bases ótimas. Como $\lambda^* \in R_1$ e $\lambda^* \in R_2 \rightarrow R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$.

EXEMPLO 3.4

As regiões R_1 e R_2 do EXEMPLO 3.3 são VIZINHAS. Note a coerência do nome "REGIÕES VIZINHAS" observando a representação geométrica de R_1 e R_2 (PAG.67).

DEFINIÇÃO 3.12

Sejam $f: M \rightarrow N$ uma função de um espaço métrico M num espaço métrico N e " a " um ponto de M . Dizemos que f é CONTÍNUA NO PONTO " a " quando, dado arbitrariamente um número $\epsilon > 0$, for sempre possível determinar $\delta > 0$ tal que $d(x, a) < \delta \rightarrow d(f(x), f(a)) < \epsilon$.

$f: M \rightarrow N$ é CONTÍNUA se f for CONTÍNUA $\forall a \in M$.

Os conjuntos onde tem sentido falar em DISTÂNCIA são chamados de ESPAÇOS MÉTRICOS. $d(x, a)$, le-se: "distância de x a a ".

TEOREMA 3.8

A função $Z_{\max.}(\lambda)$ é CONTÍNUA.

DEMONSTRAÇÃO

Para um dado λ , seja $Z_{\max}(\lambda) = Z^{(\rho)}(\lambda) \cdot Z^{(\rho)}(\lambda)$ é da forma $a \cdot \lambda + a_0$, onde $a = (a_1, a_2, \dots, a_s)$ e $a_0, a_1, a_2, \dots, a_s \in \mathbb{R}$. Isto é claro, pois se $Ax = f^* + F\lambda$ e $Z = c^T x$, pelas iterações do método simplex, vimos que a função objetivo correspondente a base ρ_B pode ser escrita, de acordo com (3.2.8), na forma $Z = c_B^T \rho_B^* - \rho_C^T x + c_B^T \rho_F \cdot \lambda$, onde x é expresso em função de λ .

$Z^{(\rho)}: R_\rho \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $Z^{(\rho)}(\lambda) = a\lambda + a_0$ é CONTÍNUA.

DE FATO:

Sejam $\lambda' \in R_\rho$ ($R_\rho \subset \mathbb{R}^s$) e $\epsilon > 0$.

$$\begin{aligned} d(\lambda, \lambda') &= d((\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s), (\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_s)) = \\ &= \sqrt{(\lambda_1 - \lambda'_1)^2 + (\lambda_2 - \lambda'_2)^2 + \dots + (\lambda_s - \lambda'_s)^2} \end{aligned}$$

$$d(f(\lambda), f(\lambda')) = |a\lambda + a_0 - (a\lambda' + a_0)| = |a\lambda - a\lambda'| =$$

$$\begin{aligned}
&= |a(\lambda - \lambda')| \leq \|a\| \cdot \|\lambda - \lambda'\| = \\
&= \|a\| \cdot \sqrt{(\lambda_1 - \lambda'_1)^2 + (\lambda_2 - \lambda'_2)^2 + \dots + (\lambda_s - \lambda'_s)^2} < \varepsilon \\
\|a\| \cdot \sqrt{(\lambda_1 - \lambda'_1)^2 + (\lambda_2 - \lambda'_2)^2 + \dots + (\lambda_s - \lambda'_s)^2} < \varepsilon &\rightarrow \\
\rightarrow \sqrt{(\lambda_1 - \lambda'_1)^2 + (\lambda_2 - \lambda'_2)^2 + \dots + (\lambda_s - \lambda'_s)^2} < \frac{\varepsilon}{\|a\|}
\end{aligned}$$

Logo dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ (basta tomar $\delta = \frac{\varepsilon}{\|a\|}$)

tal que $d(\lambda, \lambda') < \delta \rightarrow d(f(\lambda), f(\lambda')) < \varepsilon$.

Como a demonstração é válida $\forall \lambda' \in R_s$, então $Z^{(\rho)}(\lambda)$ é CONTÍNUA.

Como $Z^{(\rho)}(\lambda)$ é contínua, basta mostrar que $Z_{\max}(\lambda)$ é contínua $\forall \lambda' \in R_k \cap R_{k+1}$. Isto é, basta mostrar que a função $Z_{\max}(\lambda)$ permanece contínua na passagem da base ótima ${}^k B$ para a base ótima vizinha ${}^{k+1} B$.

Segue imediatamente que, se $\exists \lambda^* \in K$ tal que é possível passar da base ótima ${}^k B$ para a base ótima ${}^{k+1} B$, então

$$Z^{(k)}(\lambda^*) = Z^{(k+1)}(\lambda^*) \quad (\text{VER PAG.69})$$

OBSERVAÇÕES

a) Os conjuntos R^S e R são ESPAÇOS MÉTRICOS, pois tem sentido falar em distância. Nesse caso, a métrica usada é a norma Euclidiana usual. Isto é, $d(\lambda, \lambda') = \|(\lambda - \lambda')\|$.

b) Pelo o que foi provado nos TEOREMAS 3.6 e 3.8 podemos afirmar que a função Z_{\max} é CÔNCAVA E CONTÍNUA.

TEOREMA 3.9

Duas REGIÕES VIZINHAS R_1 e R_2 estão em SEMI-ESPAÇOS OPOSTOS DE R^S .

DEMONSTRAÇÃO

Vimos, na DEFINIÇÃO 3.5 (PAG.42), que o hiperplano $ax = b$, contido no \mathbb{R}^S , divide o mesmo em dois SEMI-ESPAÇOS OPOSTOS $ax \geq b$ e $ax \leq b$.

Sejam 1B e 2B as bases ótimas vizinhas relativas as regiões vizinhas R_1 e R_2 , respectivamente. O quadro-simplex correspondente a essas duas bases é da forma:

$$z + \rho_C^T x - \rho_P^T \lambda = z^{(\rho)} \quad (3.2.8)$$

$$\rho_{Ax} = \rho_{b^*} + \rho_{F\lambda} \quad (3.2.7)$$

Suponha que ${}^1A_{rk}$ é o elemento pivô usado no quadro-simplex de índice ρ_1 , para gerar a base ótima 2B , vizinha de 1B .

Sabemos que a r -ésima linha do quadro-simplex, relativo a ρ_2 , é obtido dividindo-se a r -ésima linha do quadro-simplex, de índice ρ_1 , pelo pivô ${}^1a_{rk}$.

Por outro lado, R_1 é definido por ${}^1b_r^* + {}^1F\lambda \geq 0 \rightarrow R_1$ está contido no semi-espaço ${}^1b_r^* + \sum_{k=1}^S {}^1f_{rk} \cdot \lambda_k \geq 0$.

R_2 é definido por ${}^2b_r^* + {}^2F\lambda \geq 0 \rightarrow R_2$ está contido no semi-espaço ${}^2b_r^* + \sum_{k=1}^S {}^2f_{rk} \cdot \lambda_k \geq 0$

Dividindo pelo pivô ${}^1a_{rk} < 0$, vem:

$${}^2b_r^* + \sum_{k=1}^S {}^2f_{rk} \cdot \lambda_k = \frac{{}^1b_r^* + \sum_{k=1}^S {}^1f_{rk} \cdot \lambda_k}{{}^1a_{rk}}$$

Logo, podemos concluir que R_1 está contido em

$${}^1b_r^* + \sum_{k=1}^S {}^1f_{rk} \cdot \lambda_k \geq 0.$$

Como $1_{a_{rk}} < 0$, então R_2 está contido em

$$1_{b_r^*} + \sum_{k=1}^s 1_{f_{rk}} \cdot \lambda_k \leq 0.$$

Logo, as regiões vizinhas R_1 e R_2 estão contidas

nos semi-espacos opostos $1_{b_r^*} + \sum_{k=1}^s 1_{f_{rk}} \cdot \lambda_k \geq 0$ e

$1_{b_r^*} + \sum_{k=1}^s 1_{f_{rk}} \cdot \lambda_k \leq 0$, respectivamente, separadas pelo hiper-

plano $1_{b_r^*} + \sum_{k=1}^s 1_{f_{rk}} \cdot \lambda_k = 2_{b_r^*} + \sum_{k=1}^s 2_{f_{rk}} \cdot \lambda_k = 0$.

EXEMPLO 3.5

No EXEMPLO 3.3 (PAG.61) vemos que $R_1 \subset \{(\lambda_1, \lambda_2) / -2\lambda_1 + 2\lambda_2 \leq 31\}$ e $R_2 \subset \{(\lambda_1, \lambda_2) / -2\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq 31\}$. R_1 e R_2 estão em semi-espacos opostos e separadas pelo hiperplano $-2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 31$.

DEFINIÇÃO 3.13

Considere que a numeração das variáveis básicas em $\rho_{Ax} = \rho_{b^*} + \rho_{F\lambda}$ (3.2.7), relativa ao índice ρ , é a mesma que a numeração das linhas no quadro simplex. Denominamos

$$b_i^* + \sum_{k=1}^s f_{ik} \cdot \lambda_k = 0 \text{ de } i\text{-ésima face de } R_\rho.$$

A região R_ρ tem um VIZINHO AO LONGO DA i -ÉSIMA FACE se é possível passar para este vizinho excluindo a i -ésima variável básica da base.

Se nós queremos excluir a i -ésima variável básica da base, usando um passo do algoritmo dual-simplex como exige a DEFINIÇÃO 3.10, então deve existir $\lambda^* \in R_\rho$ tal que

$\rho b_i^* + \sum_{k=1}^s \rho f_{ik} \cdot \lambda_k = 0$ e, simultaneamente, deve existir um elemento negativo na i -ésima linha de ρA .

Assim, a região R_ρ tem um VIZINHO AO LONGO DA i -ÉSIMA FACE ($i \in I$) se:

i) $\exists \lambda^* \in R_\rho$ tal que

$$\rho b_i^* + \sum_{k=1}^s \rho f_{ik} \cdot \lambda_k^* = 0$$

ii) $\exists \rho a_{ij} < 0$, $j \in J_2^{(\rho)}$

OBS.: $\rho b_j^* + \sum_{k=1}^s \rho f_{jk} \cdot \lambda_k^* \geq 0$, $\forall j \in I$

EXEMPLO 3.6

No EXEMPLO 3.3, a região R_1 tem um VIZINHO AO LONGO DA 3ª FACE (3ª linha do quadro dual-simplex: $-2\lambda_1 + 2\lambda_2 = 31$).

EXEMPLO 3.7

Daremos agora um exemplo completo mostrando como passar de uma base ótima para uma outra base ótima vizinha. Mostraremos, também como determinar todos os R_i que cobrem K , isto é, $K = \bigcup_i R_i$. Determinaremos a função $Z_{\max.}(\lambda)$. Finalizando faremos o gráfico de todos os R_i que cobrem K e o gráfico de $Z_{\max.}(\lambda)$.

Seja o MLP-RHS

$$\text{MAX. } Z = x_1 + 2x_2$$

SUJEITO A:

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 \leq 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ x_2 \leq 3 - \lambda_1 \\ x_1 \leq 5 + \lambda_2 \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 17 + \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Colocando o problema na forma padrão, temos:

$$\text{MIN. } Z' = -x_1 - 2x_2$$

SUJEITO A

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ & x_2 + & x_4 & = & 3 - \lambda_1 \\ x_1 + & & & x_5 & = & 5 + & \lambda_2 \\ 3x_1 + x_2 & & & & + x_6 & = & 17 + \lambda_1 + \lambda_2 \\ x_j \geq 0, \forall j \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \end{cases}$$

Resolvendo o problema pelo algoritmo primal-simplex,

temos:

		↓					
VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$b^* + F\lambda$
← x_3	-1	1	1	0	0	0	$1 + \lambda_1 + 2\lambda_2$
x_4	0	1	0	1	0	0	$3 - \lambda_1$
x_5	1	0	0	0	1	0	$5 + \lambda_2$
x_6	3	1	0	0	0	1	$17 + \lambda_1 + \lambda_2$
z'	-1	-2	0	0	0	0	0

$$\downarrow$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$b^* + F\lambda$
x_2	-1	1	1	0	0	0	$1 + \lambda_1 + 2\lambda_2$
$\leftarrow x_4$	1	0	-1	1	0	0	$2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2$
x_5	1	0	0	0	1	0	$5 + \lambda_2$
x_6	4	0	-1	0	0	1	$16 - \lambda_2$
z'	-3	0	2	0	0	0	$2 + 2\lambda_1 + 4\lambda_2$

$$\downarrow$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$b^* + F\lambda$
x_2	0	1	0	1	0	0	$3 - \lambda_1$
x_1	1	0	-1	1	0	0	$2 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2$
$\leftarrow x_5$	0	0	1	-1	1	0	$3 + 2\lambda_1 + 3\lambda_2$
x_6	0	0	3	-4	0	1	$8 + 8\lambda_1 + 7\lambda_2$
z'	0	0	-1	3	0	0	$8 - 4\lambda_1 - 2\lambda_2$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	${}^0b^* + {}^0F\lambda$
x_2	0	1	0	1	0	0	$3 - \lambda_1$
x_1	1	0	0	0	1	0	$5 + \lambda_2$
x_3	0	0	1	-1	1	0	$3 + 2\lambda_1 + 3\lambda_2$
x_6	0	0	0	-1	-3	1	$-1 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2$
z'	0	0	0	2	1	0	$11 - 2\lambda_1 + \lambda_2$

(I)

A base 0B , de índice $\rho_0 = (j_1, j_2, j_3, j_6)$ é ótima. A região R_0 é determinada por:

$$R_0 \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \leq 3 \\ \lambda_2 \geq -5 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \geq -3 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \geq 1 \end{array} \right. \quad z^{(0)}(\lambda) = 11 - 2\lambda_1 + \lambda_2$$

Como o sistema determina uma região não vazia, então pelo que foi exposto na PAG.71 e observando o quadro (I), vemos que R_0 possui um vizinho R_1 ao longo da 3.^a face ($2\lambda_1 + 3\lambda_2 = -3$) e um vizinho R_2 ao longo da 4.^a face ($2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 1$).

DETERMINAÇÃO DE R_1

Retirando $x_3(\lambda) = 3 + 2\lambda_1 + 3\lambda_2$ da base (Quadro(I)), colocando no seu lugar a variável x_4 , e aplicando o dual-simplex, vem:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$1_{b^*} + 1_{F\lambda}$
x_2	0	1	1	0	1	0	$6 + \lambda_1 + 3\lambda_2$
x_1	1	0	0	0	1	0	$5 + \lambda_2$
x_4	0	0	-1	1	-1	0	$-3 - 2\lambda_1 - 3\lambda_2$
x_6	0	0	-1	0	-4	1	$-4 - 5\lambda_2$
z'	0	0	2	0	3	0	$17 + 2\lambda_1 + 7\lambda_2$

(I.1)

A região R_1 , de índice $\rho_1 = (j_1, j_2, j_4, j_6)$, é deter-

minada por:

$$R_1 \begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 \geq -6 \\ \lambda_2 \geq -5 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \leq -3 \\ -5\lambda_2 \geq 4 \end{cases}$$

$$z^{(1)}(\lambda) = 17 + 2\lambda_1 + 7\lambda_2$$

Observando o quadro (I.1), vemos que R_1 possui o vizinho R_0 ao longo da 3.^a face ($-2\lambda_1 - 3\lambda_2 = 3$) e um vizinho R_3 ao longo da 4.^a face ($-5\lambda_2 = 4$).

DETERMINAÇÃO DE R_2

Retirando $x_6(\lambda) = -1 + 2\lambda_1 - 2\lambda_2$ da base (Quadro (I)), colocando no seu lugar a variável x_5 , pois

$\min\{\frac{2}{1}, \frac{1}{3}\} = \frac{1}{3}$, e aplicando o dual-simplex, vem:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$z_{b^*} + z_{F\lambda}$
x_2	0	1	0	1	0	0	$3 - \lambda_1$
x_1	1	0	0	$-1/3$	0	$1/3$	$-\frac{1}{3}(14 + 2\lambda_1 + \lambda_2)$
x_3	0	0	1	$-4/3$	0	$1/3$	$-\frac{1}{3}(8 + 8\lambda_1 + 7\lambda_2)$ (I.2)
x_5	0	0	0	$1/3$	1	$-1/3$	$-\frac{1}{3}(1 - 2\lambda_1 + 2\lambda_2)$
z'	0	0	0	$5/3$	0	$1/3$	$-\frac{1}{3}(32 - 4\lambda_1 + \lambda_2)$

A região R_2 , de índice $\rho_2 = (j_1, j_2, j_3, j_5)$, é determinada por:

$$R_2 \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \leq 3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \geq -14 \\ 8\lambda_1 + 7\lambda_2 \geq -8 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq -1 \end{array} \right.$$

$$z^{(2)}(\lambda) = \frac{1}{3}(32 - 4\lambda_1 + \lambda_2)$$

Observando o quadro (I.2), vemos que R_2 tem um vizinho R_4 ao longo da 2.^a face ($2\lambda_1 + \lambda_2 = -14$), o vizinho R_3 ao longo da 3.^a face ($8\lambda_1 + 7\lambda_2 = -8$) e o vizinho R_0 ao longo da 4.^a face ($-2\lambda_1 + 2\lambda_2 = -1$).

DETERMINAÇÃO DE R_3

Retirando $x_6(\lambda) = -4 - 5\lambda_2$ da base (Quadro (I.1)), colocando no seu lugar a variável x_5 , pois $\min. \left\{ \frac{2}{1}, \frac{3}{4} \right\} = \frac{3}{4}$, e aplicando o dual-simplex, vem:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	${}^3b^* + {}^3F\lambda$
x_2	0	1	3/4	0	0	1/4	$\frac{1}{4}(20+4\lambda_1+7\lambda_2)$
x_1	1	0	-1/4	0	0	1/4	$\frac{1}{4}(16-\lambda_2)$
x_4	0	0	-3/4	1	0	-1/4	$\frac{1}{4}(-8-8\lambda_1-7\lambda_2)$
x_5	0	0	1/4	0	1	-1/4	$\frac{1}{4}(4+5\lambda_2)$
z'	0	0	5/4	0	0	3/4	$\frac{1}{4}(56+8\lambda_1+13\lambda_2)$

(I.3)

A região R_3 , de índice $\rho_3 = (j_1, j_2, j_4, j_5)$, é determinada por:

$$R_3 \left\{ \begin{array}{l} 4\lambda_1 + 7\lambda_2 \geq -20 \\ \lambda_2 \leq 16 \\ -8\lambda_1 - 7\lambda_2 \geq 8 \\ 5\lambda_2 \geq -4 \end{array} \right.$$

$$z^{(3)}(\lambda) = \frac{1}{4} (56 + 8\lambda_1 + 13\lambda_2)$$

Observando o quadro (I.3), vemos que R_3 tem o vizinho R_4 ao longo da 2.^a face ($\lambda_2 = 16$), o vizinho R_2 ao longo da 3.^a face ($-8\lambda_1 - 7\lambda_2 = 8$) e o vizinho R_1 ao longo da 4.^a face ($\lambda_2 = -\frac{4}{5}$)

DETERMINAÇÃO DE R_4

Retirando $x_1(\lambda)$ da base (Quadro (I.2)), colocando no seu lugar a variável x_4 , e aplicando o dual-simplex, vem:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	${}^4b^* + {}^4F\lambda$
x_2	3	1	0	0	0	1	$17 + \lambda_1 + \lambda_2$
x_4	-3	0	0	1	0	-1	$-14 - 2\lambda_1 - \lambda_2$
x_3	-4	0	1	0	0	-1	$-16 + \lambda_2$
x_5	1	0	0	0	1	0	$5 + \lambda_2$
z'	5	0	0	0	0	2	$34 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2$

(I.4)

A região R_4 , de índice $\rho_4 = (j_2, j_3, j_4, j_5)$, é determinada por:

$$R_4 \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 \geq -17 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq -14 \\ \lambda_2 \geq 16 \\ \lambda_2 \geq -5 \end{array} \right.$$

$$z^{(4)}(\lambda) = 34 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2$$

Observando o quadro (I.4), vemos que R_4 tem o vizinho R_2 ao longo da 2.^a face ($2\lambda_1 + \lambda_2 = -14$) e o vizinho R_3 ao longo da 3.^a face ($\lambda_2 = 16$).

Como não há nenhum vizinho que não foi determinado, temos $K = R_0 \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$, onde

$$R_0 \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \leq 3 \\ \lambda_2 \geq -5 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \geq -3 \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \geq 1 \end{array} \right.$$

$$R_1 \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + 3\lambda_2 \geq -6 \\ \lambda_2 \geq -5 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \leq -3 \\ -5\lambda_2 \geq 4 \end{array} \right.$$

$$R_2 \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 \leq 3 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \geq -14 \\ 8\lambda_1 + 7\lambda_2 \leq -8 \\ -2\lambda_1 + 2\lambda_2 \geq -1 \end{array} \right.$$

$$R_3 \left\{ \begin{array}{l} 4\lambda_1 + 7\lambda_2 \geq -20 \\ \lambda_2 \leq 16 \\ -8\lambda_1 - 7\lambda_2 \geq 8 \\ 5\lambda_2 \geq -4 \end{array} \right.$$

$$R_4 \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 \geq -17 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq -14 \\ \lambda_2 \geq 16 \\ \lambda_2 \geq -5 \end{array} \right.$$

Temos, também, que:

$$Z_{\max.}(\lambda) = \left\{ \begin{array}{ll} 11 - 2\lambda_1 + \lambda_2 & \text{se } \lambda \in R_0 \\ 17 + 2\lambda_1 + 7\lambda_2 & \text{se } \lambda \in R_1 \\ \frac{32 - 4\lambda_1 + \lambda_2}{3} & \text{se } \lambda \in R_2 \\ \frac{56 + 8\lambda_1 + 13\lambda_2}{4} & \text{se } \lambda \in R_3 \\ 34 + 2\lambda_1 + 2\lambda_2 & \text{se } \lambda \in R_4 \end{array} \right.$$

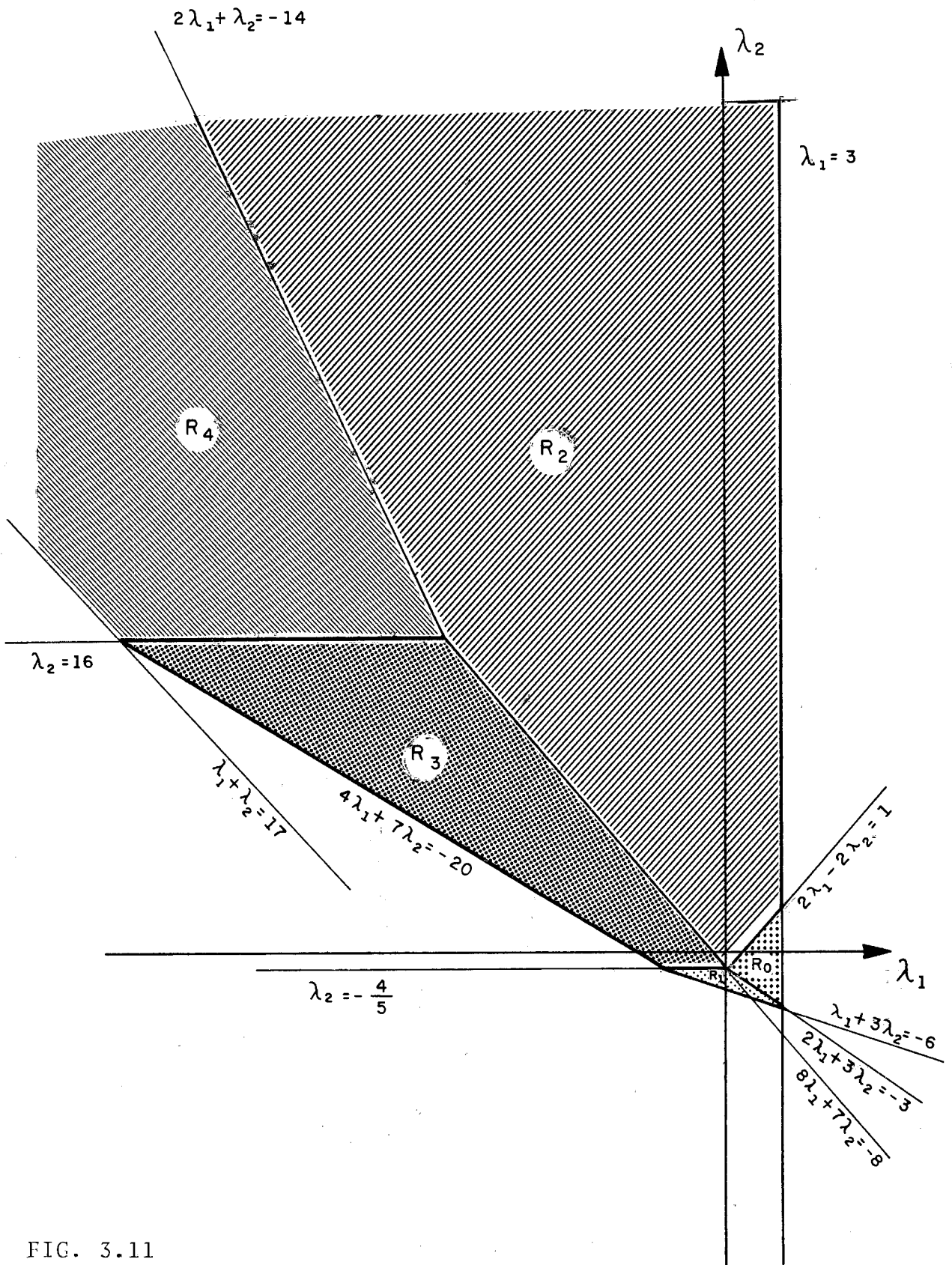


FIG. 3.11

TEOREMA 3.10

Sejam R_p e R_q duas regiões distintas.

$$R_p \cap R_q = \emptyset \quad \text{ou} \quad R_p \cap R_q = F_r \cdot (R_p) \cap F_r \cdot (R_q)$$

OBSERVAÇÃO:

$$F_r \cdot (R_p) = \text{Fronteira de } R_p$$

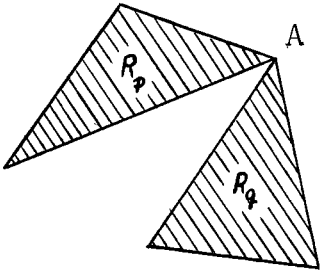
DEMONSTRAÇÃO

Ver |¹⁰|.

OBSERVAÇÕES

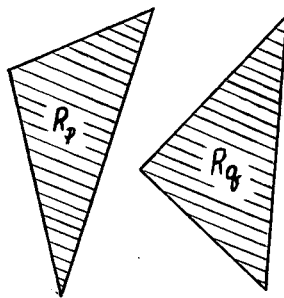
a) Por esse TEOREMA 3.10 garantimos que duas regiões distintas ou não têm interseção ou a interseção são pontos da fronteira. Isto é, duas regiões distintas R_p e R_q admitem interseção somente na fronteira, ou seja, não se SOBREPÕEM.

Ilustrando, graficamente no R^2 , podemos notar que duas regiões distintas R_p e R_q assumem uma das seguintes configurações:

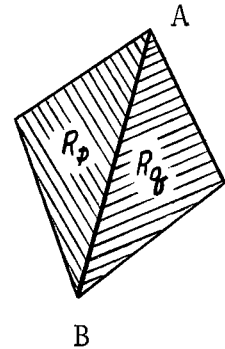


$$R_p \cap R_q = \{A\}$$

R_p e R_q admitem interseção mas não são vizinhos



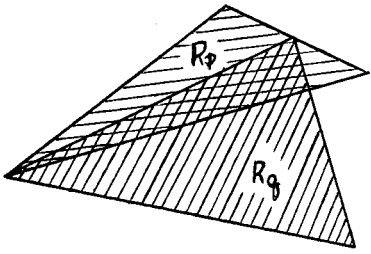
$$R_p \cap R_q = \emptyset$$



$$R_p \cap R_q = \overline{AB}$$

R_p e R_q admitem interseção e são vizinhos

A seguinte configuração nunca acontece



R_p e R_q nunca
se sobrepõem

b) Vejamos graficamente como seria a determinação de dois vértices vizinhos para um problema que admitisse soluções múltiplas (Degeneração dual).

Seja o problema:

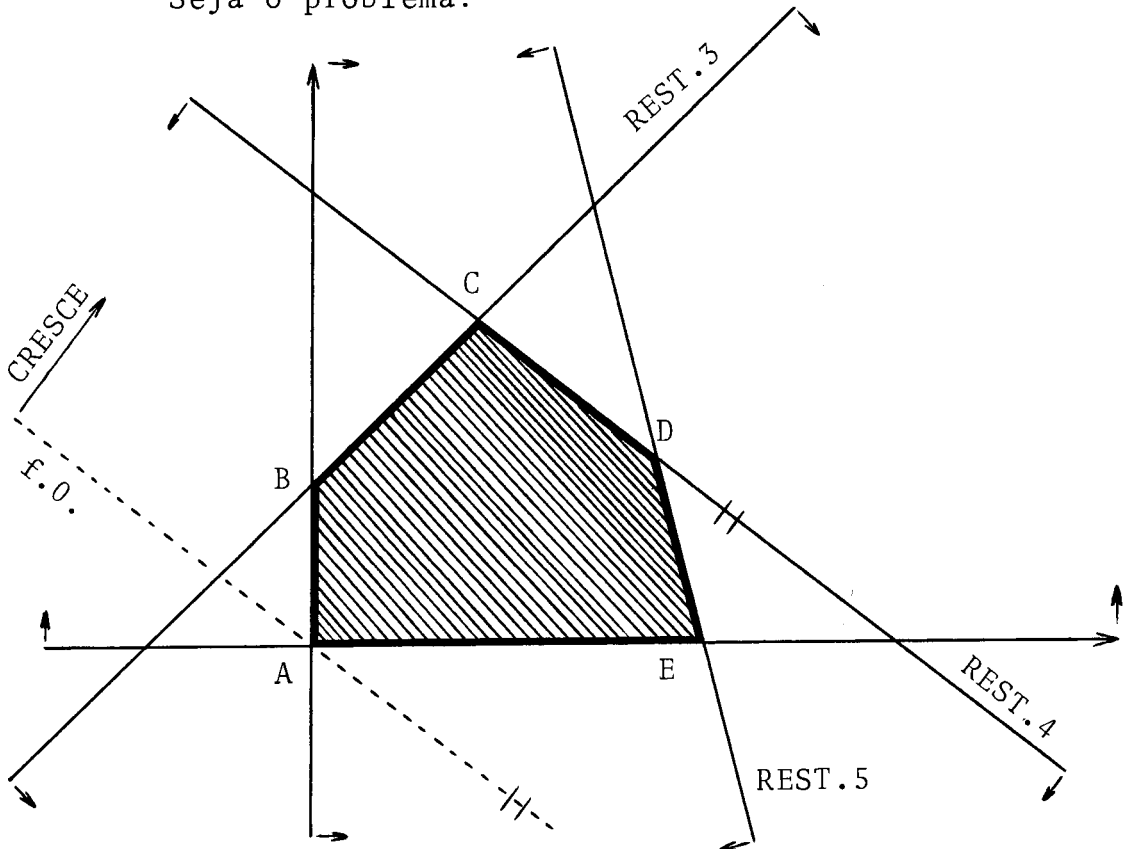


FIG.3.13

Vemos que C e D são soluções ótimas. Deslocando, paralelamente, a REST.4 até o ponto de interseção das RESTRIÇÕES 3 e 5, temos:

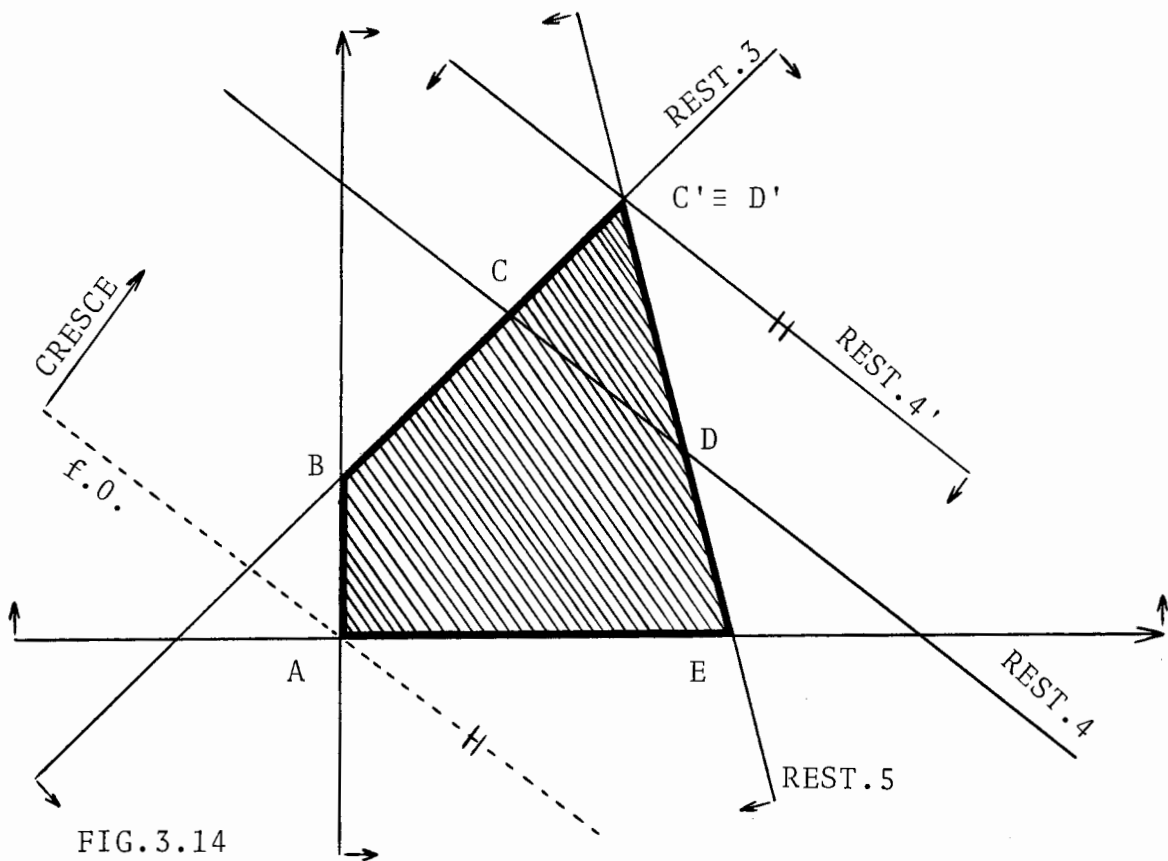


FIG.3.14

Observe que não alteramos nosso procedimento. Agora, o problema tem uma degeneração-primal e é possível passar da base ótima de C' para a base ótima de D' através de um passo do algoritmo dual-simplex. Note que determinamos o vizinho D do vértice C (e vice-versa), exatamente, da mesma forma que fazemos para determinar vértices vizinhos de um problema que não tem soluções múltiplas.

c) Não consideramos vizinhas duas regiões determinadas por bases ótimas dual-degeneradas, porque o nosso propósito é achar todas as regiões R_i que cobrem K e não se sobrepõe.

Se há uma dual degeneração em 1B , é possível passar de 1B para outra base 3B através de um passo do algoritmo primal-simplex, se $a_{ij} > 0$. Mas, as regiões \bar{R}_1 e \bar{R}_3 geradas por este algoritmo, se sobrepõe, pois \bar{R}_1 e \bar{R}_3 não estão em semi-espacos opostos (é fácil mostrar esse fato).

Se tentássemos achar todas as regiões viáveis existentes encontraríamos sérias dificuldades computacionais. Por isso, também, determinamos as regiões que cobrem K e não se sobrepõe.

Se \bar{R}_3 é obtido de \bar{R}_1 através de um passo do algoritmo primal-simplex é fácil ver que \bar{R}_1 e \bar{R}_3 não obrigatoriamente estão em semi-espacos opostos de R^S e, portanto, podem se sobrepôr.

De fato:

$$\bar{R}_1 \text{ está contido no semi-espaco } 1_{b_r^*} + \sum_{k=1}^S 1_{f_{rk}} \cdot \lambda_k \geq 0.$$

Dividindo pelo pivô $1_{a_{rk}} > 0$, vem:

\bar{R}_3 está contido no semi-espaco:

$$\frac{1_{b_r^*} + \sum_{k=1}^S 1_{f_{rk}} \cdot \lambda_k}{1_{a_{rk}}} \geq 0 \rightarrow 1_{b_r^*} + \sum_{k=1}^S 1_{f_{rk}} \cdot \lambda_k \geq 0$$

Logo, \bar{R}_1 e \bar{R}_3 estão contidos no mesmo semi-espaco

$1_{b_r^*} + \sum_{k=1}^S 1_{f_{rk}} \cdot \lambda_k \geq 0$ e, portanto, se sobrepõe.

Podemos observar que \bar{R}_1 e \bar{R}_3 , além de estarem contidos no mesmo semi-espaco, têm uma fronteira em comum que é uma parte do hiperplano $1_{b_r^*} + \sum_{k=1}^S 1_{f_{rk}} \cdot \lambda_k \geq 0$. Portanto, \bar{R}_1 e \bar{R}_3 se SOBREPÕE no sentido que admitem interseção além dessa fronteira comum.

TEOREMA 3.11

Sejam $R_0, R_1, R_2, \dots, R_K$ uma enumeração qualquer das regiões obtidas pelo método a partir de R_0 .

$$\text{Seja } R'_i = R_i - \bigcup_{j < i} \text{fr.}(R_j) ; \forall i \in \{0, 1, \dots, K\}$$

Os conjuntos $R'_0, R'_1, R'_2, \dots, R'_K$, determinam uma partição em K .

DEMONSTRAÇÃO

Dizemos que os conjuntos A_1, A_2, \dots, A_n determinam uma PARTIÇÃO em A se, somente se, as três condições abaixo são verdadeiras:

- i) $A_i \neq \emptyset, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$
- ii) $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$
- iii) $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$

Logo, para os conjuntos R'_0, R'_1, \dots, R'_K , temos:

- i) $R'_i \neq \emptyset, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$
- ii) $R'_i \cap R'_j = \emptyset, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$

De fato: se $R_i \cap R_j \neq \emptyset$, consideramos a fronteira comum pertencente a R'_i ou R'_j e como as regiões R_i e R_j , não se sobrepõe segue que $R'_i \cap R'_j = \emptyset$

- iii) $\bigcup_{i=1}^k R'_i = K$

Sejam $\lambda_0 \in R_0$ e $\lambda_1 \in K, \lambda_1$ qualquer.

Seja \underline{r} a reta definida pelos pontos (ou vetores) λ_0 e λ_1 . Como λ_0 e λ_1 pertencem a K e K é convexo, então qualquer ponto λ de \underline{r} , entre λ_0 e λ_1 é da forma $\lambda = \lambda_0 + t(\lambda_1 - \lambda_0)$,

Seja o problema

$$\text{Max. } Z = c^T x$$

SUJEITO A

$$(I) \begin{cases} Ax = b^* + F\lambda \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Fazendo $\lambda = \lambda_0 + t(\lambda_1 - \lambda_0)$ em (I), temos:

$$\text{MAX. } Z = c^T x$$

SUJEITO A

$$(P') \begin{cases} Ax = b^* + F\lambda_0 + F(\lambda_1 - \lambda_0)t \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Observemos agora que a aplicação do método indicado, a partir da base B_0 , ao problema (P') é equivalente a aplicação do método a (I) com a restrição de só se considerarem bases vizinhas aquelas tais que além, de serem acessíveis uma a outra através de um passo do dual-simplex, possuírem um $\lambda \in \underline{r}$ tal que para esse λ as bases estão associadas a mesma solução. Assim, podemos dizer que se uma base é acessível a partir de B_0 , pela aplicação do método a (P'), ela será também acessível a partir de B_0 se o método for aplicado a (I).

Mas (P') é uma PPL com um só parâmetro e sabemos que, nesse caso, o método coincide com a forma clássica de resolução

(ver 34) que se sabe atingir, a partir de uma base inicial qualquer, todos os pontos da reta para os quais o problema te nha solução finita, como é o caso de $t=1$.

Considerando, então a base B_1 , ótima para $t=1$, obtida pelo método aplicado a (P') , partindo de B_0 , temos que $\lambda_1 \in R_1$.

Como λ_1 é qualquer em K , temos imediatamente que

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^k R_i = \bigcup_{i=1}^k R'_i$$

OBSERVAÇÃO

Observe o grafico das regiões R_0, R_1, R_2, R_3, R_4 (FIG. 3.11). Note que os conjuntos $R'_0, R'_1, R'_2, R'_3, R'_4$, como defini dos no enunciado do TEOREMA 3.11, determinam uma partição em $K = R_0 \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4$.

3.3. MULTIPARAMETRIZAÇÃO LINEAR PARA OS COEFICIENTES DAS VARIÁVEIS DA FUNÇÃO OBJETIVO - MLP-OFC

3.3.1. INTRODUÇÃO

O processo descrito para o MLP-RHS pode, com certas modificações, também ser usado para o MLP-OFC (parametrização dos custos ou coeficientes da função objetivo). Portanto, descreveremos esse processo resumidamente e nos prenderemos mais detalhadamente às partes diferentes e que consideramos de maior importância.

3.3.2. NOTAÇÃO

O problema de PARAMETRIZAÇÃO DOS CUSTOS OU COEFICIENTES DA FUNÇÃO OBJETIVO, chamado resumidamente de MLP-OFC, é:

$$\text{MÁXIMO } w = c^T(v).x \quad (3.4)$$

SUJEITO A

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax = b \end{array} \right. \quad (3.5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

Onde, $c(v) = c^* + Hv$; $v \in R^S$ é um vetor (ou matriz coluna) explicitado por:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_s \end{pmatrix}$$

$A_{m \times n} = (a_{ij})$ é uma matriz de elementos reais

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

$H_{n \times s} = (h_{ik})$ é uma matriz de elementos reais

$$H = \begin{vmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1s} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{n1} & h_{n2} & \dots & h_{ns} \end{vmatrix}$$

$b \in \mathbb{R}^m$ e $c^* \in \mathbb{R}^n$ são vetores (ou matrizes coluna) de elementos reais

$$b = \begin{vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{vmatrix} \quad c^* = \begin{vmatrix} c_1^* \\ c_2^* \\ \vdots \\ c_n^* \end{vmatrix}$$

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ é a variável.

$c^T(v) \cdot x = c^{*T}x + v^T \cdot H^T x$, então, fazendo $y = H^T x$ e $z = c^{*T}x$ o problema (3.4-3.6) pode ser escrito na forma equivalente:

Poderíamos, também, escrever o problema (3.3.10 - 3.3.15) numa forma um pouco mais condensada da seguinte maneira:

$$\begin{array}{l}
 \text{MAXIMO } w = \sum_{k=1}^s v_k \cdot y_k + z \\
 \text{SUJEITO A} \\
 \left\{ \begin{array}{l}
 \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \\
 y_k - \sum_{j=1}^n h_{jk} \cdot x_j = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, s) \\
 z - \sum_{j=1}^n c_j \cdot x_j = 0 \\
 x_j \geq 0 \quad (\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}) \\
 z, y_k \text{ qualquer} \quad (\forall k \in \{1, 2, \dots, s\})
 \end{array} \right. \quad \text{(II)}
 \end{array}$$

Como os elementos de y e z são ilimitados (variáveis livres) eles sempre permanecerão na base. Portanto, toda base pode ser inteiramente caracterizada pelos índices das variáveis básicas x_j (VER OBSERVAÇÃO NO FINAL DESSA SEÇÃO).

Da mesma forma que notamos para o MLP-RHS, $\rho = (j_1, j_2, \dots, j_m)$ será o índice da base.

O quadro-simplex, correspondente a base ρ_B , pode ser escrito na seguinte forma:

De (3.3.11), temos que $Ax = b$. Multiplicando, à esquerda, pela inversa da base, obtemos:

$$\rho_B^{-1}(Ax) = \rho_B^{-1}b \rightarrow (\rho_B^{-1}A)x = \rho_B^{-1}b$$

Fazendo $\rho_A = \rho_B^{-1}A$ e $\rho_b = \rho_B^{-1}b$, temos que

$$\boxed{\rho_{Ax} = \rho_b} \quad (3.3.16)$$

Multiplicando a equação (3.3.16), à esquerda, por H_B^T (parte de H^T que corresponde as variáveis básicas em ρ_B) e somando com a equação (3.3.12), obtemos:

$$\begin{aligned} H_B^T \cdot (\rho_{Ax}) + y - H^T x &= H_B^T \cdot \rho_b \quad \rightarrow \\ y + (H_B^T \cdot \rho_A - H^T) x &= H_B^T \cdot \rho_b \end{aligned}$$

Fazendo: $\rho_{H^T} = H_B^T \cdot \rho_A - H^T$ e $\rho_q = H_B^T \cdot \rho_b$, temos

que $\boxed{y + \rho_{H^T} x = \rho_q}$ (3.3.17)

Multiplicando a equação (3.3.16), à esquerda, por c_B^{*T} (parte de c^{*T} que corresponde as variáveis básicas em ρ_B) e somando com a equação (3.3.13), obtemos:

$$c_B^{*T} (\rho_{Ax}) + z - c^{*T} x = c_B^{*T} \cdot \rho_b \quad \rightarrow \quad z + (c_B^{*T} \cdot \rho_A - c^{*T}) x = c_B^{*T} \cdot \rho_b$$

Fazendo: $\rho_{c^{*T}} = c_B^{*T} \cdot \rho_A - c^{*T}$ e $z(\rho) = c_B^{*T} \cdot \rho_b$, temos

que $\boxed{z + \rho_{c^{*T}} x = z(\rho)}$ (3.3.18)

Logo, o sistema (3.3.11 - 3.3.13) transformado de ρ_B é:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{Ax} = \rho_b \quad (3.3.16) \\ y + \rho_{H^T} x = \rho_q \quad (3.3.17) \\ z + \rho_{c^{*T}} x = z(\rho) \quad (3.3.18) \end{array} \right.$$

Deduzimos as relações (3.3.16), (3.3.17) e (3.3.18) porque são fundamentais para os conceitos que serão vistos na próxima seção.

OBSERVAÇÃO

Vamos justificar por que as variáveis y_i e z permanecem sempre na base.

Seja I o conjunto das VB para uma dada solução básica viável k . Suponhamos que a VNB x_s seja a nova VB. O critério de saída da base do simplex faz

$$x_s = \min\left(\frac{b_i^k}{a_{is}^k}\right) = \frac{b_r^k}{a_{rs}^k}.$$

$x_s = \frac{b_r^k}{a_{rs}^k}$ é o maior valor que x_s pode assumir para que

x_r se anule, ou seja, passe a ser VNB. Como no simplex $x_i \geq 0$, então x_s não pode assumir um valor maior que $\min_{i \in I} \left(\frac{b_i^k}{a_{is}^k}\right)$, pois

se isso acontecesse teríamos $x_r < 0$ o que contrariaria as condições de não negatividade das variáveis.

No entanto, como y_i e z são variáveis livres, então elas podem assumir valores negativos. Portanto, x_s não tem limite superior determinado pelas variáveis livres y_i e z mas sim pelas variáveis x_j que não podem assumir valores negativos. Logo, na escolha da variável que vai sair da base não nos preocupamos com y_i e z por que elas podem assumir quaisquer valores reais. Assim sendo, escolhemos a variável $x_i (i \in I)$ que se anula primeiro quando x_s aumenta de valor garantindo, dessa forma, a compatibilidade do sistema. Portanto, as variáveis y_i e z permanecem sempre na base.

3.3.3. TEOREMAS BÁSICOS E DEFINIÇÕES

O conjunto viável do problema (3.3.10-3.3.15) não de

pende de v , pois o mesmo aparece somente na função objetivo.

Fazendo $v = v^0$, nós podemos obter $\rho_C(v^0)$, em relação a base ρ_B , através de uma combinação linear das equações (3.3.17) e (3.3.18).

Isto é:

De (3.3.10), temos para $v = v^0$, $w = v^{0T}y + z$.

$$\begin{aligned} & \text{Fazendo } y = \rho_q - \rho_H^T x \text{ (3.3.17) e } z = z^{(\rho)} - \rho_C^{*T} x \\ & \text{(3.3.18), obtemos } \rho_w = v^{0T}(\rho_q - \rho_H^T x) + (z^{(\rho)} - \rho_C^{*T} x) \rightarrow \\ \rho_w & = -(v^{0T} \cdot \rho_H^T + \rho_C^{*T})x + v^{0T} \cdot \rho_q + z^{(\rho)} \rightarrow \\ \rho_w & = -(\rho_H \cdot v^0 + \rho_C^*)^T x + v^{0T} \cdot \rho_q + z^{(\rho)} \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

A solução do primal não depende de v . Então, para manter a base ρ_B ótima (primal e dual viável) devemos manter a viabilidade do dual. Por (3.3.19), vemos que a condição de viabilidade do dual implica em:

$$\rho_C(v) \triangleq \rho_H \cdot v + \rho_C^* \geq 0 \quad \rightarrow$$

$$\boxed{-\rho_H \cdot v \leq \rho_C^*} \quad (3.3.20)$$

A condição (3.3.20) determina uma única região $R_\rho \subset \mathbb{R}^S$ tal que $\forall v \in R_\rho$ a base ρ_B é ótima (primal e dual viável). A base ρ_B , portanto, é ótima para o problema MLP-OFC se, e somente se, $R_\rho \neq \emptyset$.

OBSERVAÇÃO

A definição de VETOR-PARAMETRO VIÁVEL, para o MLP-OFC, é análoga a que foi dada na DEFINIÇÃO 3.2 (PAG.37), para o MLP-RHS.

A definição de BASE ÓTIMA é similar a DEFINIÇÃO 3.3 (PAG.39).

A região K é o conjunto de todos os vetores-parâmetro viáveis. Assim, $K = \bigcup_i R_i$. Ou seja, K é a união de todos os R_ρ que cobrem K e não se sobrepõe. R_ρ , como já vimos anteriormente, é definido pela base ótima ${}^{\rho}B$.

EXEMPLO 3.8

Seja o problema MLP-OFC

$$\text{MÁXIMO } w = (7 + v_1 + 2v_2)x_1 + (1 + 3v_1 + v_2)x_2$$

SUJEITO A

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Introduzindo as variáveis de folga e colocando o problema na forma (3.4-3.6), temos:

$$\text{MÁXIMO } w = (7x_1 + x_2) + [(v_1 + 2v_2)x_1 + (3v_1 + v_2)x_2]$$

SUJEITO A

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 \geq 0, \forall j \in \{1, 2, 3, 4\} \end{cases}$$

$$\text{Onde, } c^T \cdot x = \begin{vmatrix} 7 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = 7x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned} v^T \cdot H^T \cdot x &= \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \\ &= (v_1 + 2v_2)x_1 + (3v_1 + v_2)x_2 \end{aligned}$$

$$\text{Portanto, } c^T(v).x = \underbrace{|7 \quad 1|}_{c^{*T}} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}}_x +$$

$$+ |v_1 \quad v_2| \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}_{H^T} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix}}_x$$

$$\text{Fazendo } y = H^T \cdot x = \begin{vmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{vmatrix} \quad e$$

$z = c^{*T} \cdot x = 7x_1 + x_2$, colocamos o problema na forma (3.3.10-3.3.15)

$$\text{MÁXIMO } w = v_1 y_1 + v_2 y_2 + z$$

SUJEITO A

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 6 \\ y_1 - x_1 - 3x_2 = 0 \\ y_2 - 2x_1 - x_2 = 0 \\ z - 7x_1 - x_2 = 0 \\ x_j \geq 0 \quad (\forall j \in \{1, 2, 3, 4\}) ; y_1, y_2, z \text{ quaisquer} \end{array} \right.$$

Resolvendo pelo primal-simplex, temos:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	z	b_i	
	-1	1	1	0	0	0	0	1	(L ₁)
	2	3	0	1	0	0	0	6	(L ₂)
	-1	-3	0	0	1	0	0	0	(L ₃)
	-2	-1	0	0	0	1	0	0	(L ₄)
	-7	-1	0	0	0	0	1	0	(L ₅)
w'	0	0	0	0	$-v_1$	$-v_2$	-1	0	(L ₀)

(I)

Para obtermos uma base inicial basta fazermos

$$L_0 + (v_1 L_3 + v_2 L_4 + L_5)$$

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	z	b_i
x_3	-1	1	1	0	0	0	0	1
x_4	2	3	0	1	0	0	0	6
y_1	-1	-3	0	0	1	0	0	0
y_2	-2	-1	0	0	0	1	0	0
z	-7	-1	0	0	0	0	1	0
$^0 w'$	$-v_1 - 2v_2 - 7$	$-3v_1 - v_2 - 1$	0	0	0	0	0	0

(II.0)

A solução do Quadro II.0 é primal-viável. Logo, essa solução será ótima, ou seja dual-viável, se, e somente se,

$$\begin{cases} c_1(v) = -v_1 - 2v_2 - 7 \geq 0 \\ c_2(v) = -3v_1 - v_2 - 1 \geq 0 \end{cases} \quad \rightarrow$$

$$\begin{cases} v_1 + 2v_2 \leq -7 \\ 3v_1 + v_2 \leq -1 \end{cases}$$

Esse sistema determina a região R_0 , onde $^0 p_0 = (j_3, j_4)$, pois a base ótima $^0 B$ é inteiramente caracterizada pelos índices das variáveis básicas x_j (x_3 e x_4 nesse caso). Note que as variáveis y_1 , y_2 e z sempre permanecerão na base, pois independem de v e não são limitadas (podem variar de $-\infty$ a $+\infty$)

O gráfico de R_0 no plano definido por v_1 e v_2 é:

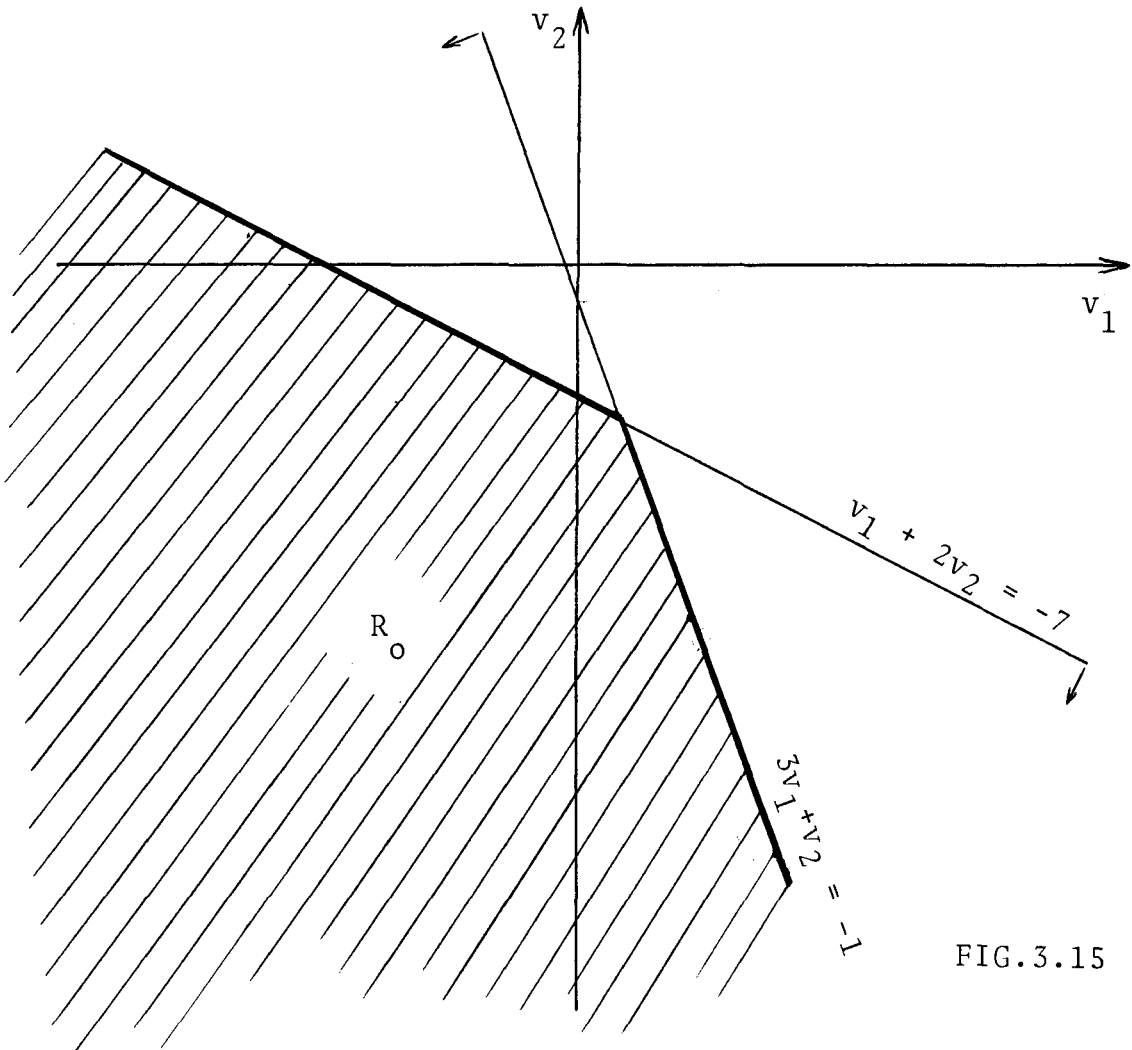


FIG.3.15

TEOREMA 3.12

O problema MLP-OFC tem uma solução ótima para cada $v \in \mathbb{R}^S$ ou não tem solução viável (supondo que o conjunto das soluções viáveis não seja ilimitado).

DEMONSTRAÇÃO

A demonstração é imediata, pois se $v^0 \in \mathbb{R}^S$ tal que o MLP-OFC possui solução ótima, então ele possui solução ótima $\forall v \in \mathbb{R}^S$, visto que a viabilidade não depende de v , ou seja o conjunto das soluções viáveis independe de v . Assim, ou o conjunto das soluções viáveis é vazio ou a função objetivo, em

função de v , possui máximo, $\forall v \in \mathbb{R}^S$, pois toda função (real e contínua) definida num conjunto fechado e limitado possui um máximo nesse conjunto.

OBSERVAÇÃO

Se o conjunto das soluções viáveis for ilimitado, então $\exists v^* \in \mathbb{R}^S$ tal que o MLP-OFC não tem solução ótima finita. Nesse caso $v^* \notin K$, pois v^* é vetor-parâmetro viável se, e somente se, o problema MLP-OFC possui solução ótima finita para v^* .

Por outro lado, também $\exists v' \in \mathbb{R}^S$ tal que o MLP-OFC possui solução ótima finita em relação a esse v' . Nesse caso, $v' \in K$. O TEOREMA anterior somente é válido para um MLP-OFC que tenha o conjunto das soluções viáveis limitado.

TEOREMA 3.13

A região R_ρ definida por $\rho_H v \leq \rho_C^*$ é um POLÍTOPO CONVEXO em \mathbb{R}^S .

DEMONSTRAÇÃO

Podemos demonstrar de acordo com a OBSERVAÇÃO da PAG. 44 .

R_ρ é definido pela interseção finita de semi-espacos fechados da forma $\rho_{c_j} + \rho_{h_{ij}} \cdot v \geq 0$. Logo, pela DEFINIÇÃO 3.6, R_ρ é um POLÍTOPO. Para demonstrar que R_ρ é convexo demonstraremos primeiramente a seguinte proposição:

"Se T é a interseção de conjuntos convexos $T_1, T_2, \dots, T_k, \dots$, contidos em \mathbb{R}^S , então T é convexo".

Isto é verdade, pois se $x^1, x^2 \in T$, x^1 e x^2 pertence a cada um dos conjuntos T_i ($i = 1, 2, \dots, k, \dots$). Seja

$0 \leq \alpha \leq 1$. Se $x^1, x^2 \in T_i$ ($\forall i \in \{1, 2, \dots\}$), $[\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2] \in T_i$, pois T_i é convexo. Logo $[\alpha x^1 + (1 - \alpha)x^2] \in T$.

Como um politopo é formado pela interseção de semi-espaços fechados, e esses são convexos, então um POLITOPO é um conjunto CONVEXO.

TEOREMA 3.14

A região K é um POLITOPO CONVEXO em R^d .

DEMONSTRAÇÃO

Seja $M = \{x/Ax=b, x \geq 0\}$ o conjunto das soluções viáveis do problema (3.4-3.6).

Sejam $P = \overline{CO} \{x_i/x_i \text{ é ponto extremo de } M\}$ o fecho convexo do conjunto dos pontos extremos de M e $Q = \{r/A.r = 0, r \geq 0\}$ um cone poliédrico.

Sabemos da teoria sobre cones que M pode ser escrito como $M = P + Q$.

Vamos mostrar que

$$\hat{K} = \underbrace{\{c(v) \in R^n / c(v) \cdot r \leq 0, \forall r \in Q\}}_{\hat{K}'}$$

Seja $c(v) \notin \hat{K}' \rightarrow \exists r \in Q$ tal que $c(v) \cdot r > 0$.

$$c(v) \cdot (x + \lambda r) = c(v) \cdot x + \lambda (c(v) \cdot r)$$

$(x + \lambda r) \in M$; $\forall \lambda > 0$. Fazendo $\lambda \rightarrow \infty$, temos que

$$c(v) \cdot (x + \lambda (c(v) \cdot r)) \rightarrow \infty. \text{ Logo, } c(v) \notin \hat{K} \rightarrow \hat{K} \subseteq \hat{K}'$$

Por outro lado, seja $c(v) \in \hat{K}$, então $\forall x \in M, x = u + r$ ($u \in P, r \in Q$).

$$c(v) \cdot x = c(v) \cdot u + \underbrace{c(v) \cdot r}_{\leq 0} \leq c(v) \cdot u \leq \max_{u \in P} c(v) \cdot u \quad (\text{finito})$$

Como P é compacto, então $c(v) \in \hat{K} \rightarrow \hat{K}' \subseteq \hat{K}$. Logo $\hat{K} = \hat{K}'$.

Como Q é um cone poliédrico, então pelo LEMA DE MINKOWSKI (ver [34]):

$$Q = \left\{ r / r = \sum_{i=1}^{m(Q)} \lambda_i \cdot r_i, \lambda_i \geq 0, r_i \in Q, \forall_i \right\} \rightarrow$$

$$\hat{K} = \left\{ c(v) \in \mathbb{R}^n / c(v) \cdot r_i \leq 0, i = 1, \dots, m(Q) \right\}$$

Por outro lado, temos:

$$c(v) \cdot r = c(v) \sum_{i=1}^{m(Q)} \lambda_i \cdot r_i = \sum_{i=1}^{m(Q)} \lambda_i (c(v) \cdot r_i) \leq 0$$

Então, temos:

$$K = \left\{ v \in \mathbb{R}^d / C(v) \in \hat{K} \right\} \rightarrow$$

$$K = \left\{ v \in \mathbb{R}^d / (C^* + Hv) r_i \leq 0; i = 1, \dots, m(Q) \right\}$$

$$(C^* + Hv) r_i \leq 0 \rightarrow Hv \cdot r_i < -C^* \cdot r_i$$

$$\text{Logo, } K = \left\{ v \in \mathbb{R}^d / v \cdot H^T r_i < -C^* \cdot r_i; i = 1, \dots, m(Q) \right\} \rightarrow K$$

é um POLÍTOPO $\rightarrow K$ é CONVEXO.

DEFINIÇÃO 3.14

Seja 1B e 2B duas bases ótimas de índices ρ_1 e ρ_2 , respectivamente. Essas duas bases são chamadas de VIZINHAS se, e somente se:

- i) $\exists v^* \in K$ tal que 1B e 2B são ambas bases ótimas em relação a v^*
- ii) É possível passar de 1B para 2B (e vice-versa) através de um passo do algoritmo PRIMAL-SIMPLEX.

INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO CONCEITO DE BASES VIZINHAS

Seja o MLP-OFC representado graficamente por:

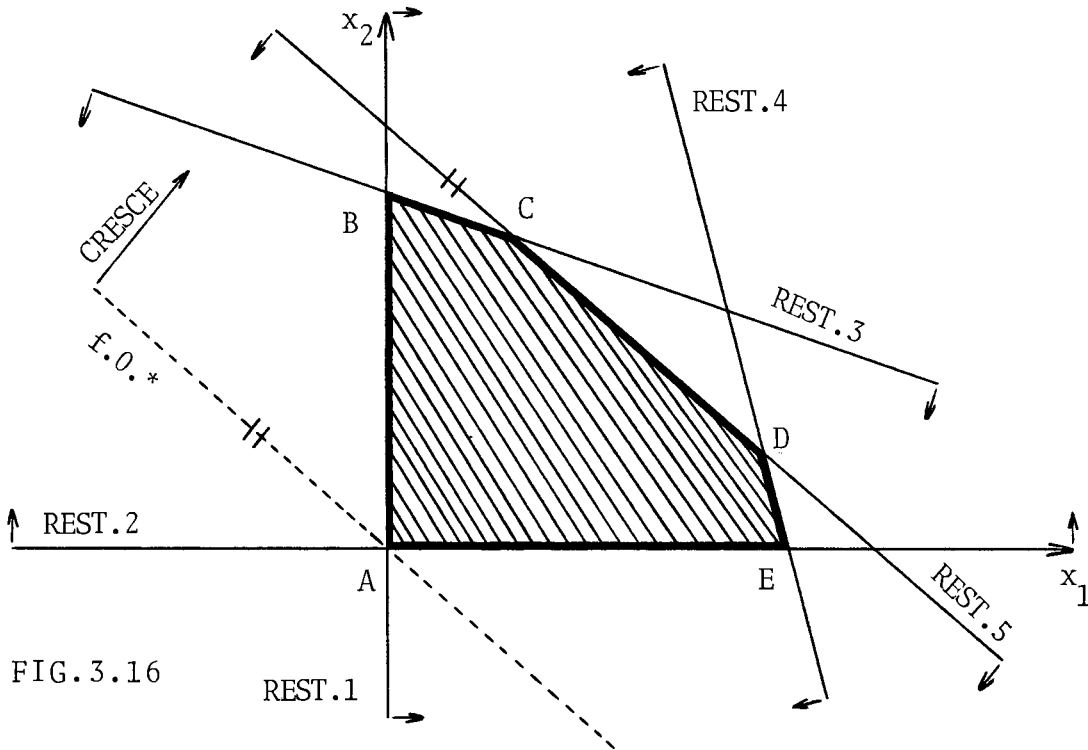


FIG. 3.16

A função objetivo é da forma $\text{MAX}.w = v_1x_1 + v_2x_2$.

Seja $v^* = \begin{vmatrix} v_1^* \\ v_2^* \end{vmatrix} \in K$ tal que $w = v_1^*x_1 + v_2^*x_2$ seja paralela

à RESTRIÇÃO 5.

Pelo gráfico vemos que o problema admite uma infinidade de soluções ótimas que são todas as combinações lineares convexas dos vértices C e D.

Suponhamos que 1B seja a base ótima relativa ao vértice C e 2B a base ótima relativa ao vértice D. Sejam x_3 e x_4 as variáveis de folga relativas as restrições 3 e 4, respectivamente.

Suponhamos que trocando a VB x_3 pela VNB x_4 , no quadro simplex, passamos da base ótima 1B para a base ótima 2B .

Analogamente ao que foi mostrado para o MLP-RHS, somente podemos efetuar a troca da variável x_3 pela variável x_4 se o pivô A_{34} for positivo, pois se o pivô A_{34} for negativo tornaremos o primal incompatível, apesar de termos $c_3=c_4=0$, e nesse caso as bases 1B e 2B não seriam ambas bases ótimas (primal e dual viável) o que contraria a DEFINIÇÃO 3.3 de base ótima. Para verificar esse fato basta notar que, na operação de pivoteamento, a linha do pivô será dividida pelo pivô e se esse for negativo, então a VB correspondente a essa linha ficará negativa o que implicaria em não viabilidade para o primal.

Por outro lado, pela DEFINIÇÃO 3.14, para que hajam BASES VIZINHAS, deve existir $v^* \in K$ tal que ambas as bases 1B e 2B sejam ótimas para esse valor de v^* , e seja possível passar de 1B para 2B (e vice-versa) por um passo do algoritmo PRIMAL-SIMPLEX. Mas, atribuir valores a v significa fazer uma rotação da função objetivo. Logo, geometricamente, a DEFINIÇÃO 3.14 faz com que consideremos uma função objetivo paralela a uma das restrições. Analíticamente, esse fato corresponde a determinarmos $v^* \in K$ tal que provoque uma DEGENERACÃO PARA O DUAL (que é o mesmo que SOLUÇÕES MÚLTIPLAS PARA O PRIMAL). Por outro lado, se o problema tem uma DEGENERACÃO-DUAL, então o PRIMAL admite SOLUÇÕES MÚLTIPLAS. E nesse caso, sabemos da teoria do simplex, o indicador de que há soluções múltiplas para o primal é o fato de existir no quadro ótimo do primal-simplex, uma VNB cujo coeficiente na função objetivo é ZERO. Para obtermos o VÉRTICE VIZINHO introduzimos essa VNB na base e aplicamos o PRIMAL-SIMPLEX. A VB que saiu da base também terá o

coeficiente ZERO na função objetivo, pois é possível passar de um vértice para outro (e vice-versa) através de um passo do algoritmo PRIMAL-SIMPLEX.

Vamos agora dar um exemplo numérico onde ilustraremos como passar de uma base ótima para uma outra base ótima vizinha.

EXEMPLO 3.9

Seja o problema MLP-OFC dado no EXEMPLO 3.8 .

Resolvendo o problema pelo algoritmo primal-simplex, determinamos o QUADRO (II.0). A base B^0 , onde $\rho_0 = (j_3, j_4)$, determinada por esse quadro, gera a região R_0 determinada por:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 \leq -7 \\ 3v_1 + v_2 \leq -1 \end{cases}$$

Como existe $v^* \in K$ tal que $-v_1^* - v_2^* - 7 = 0$ e $-3v_1^* - v_2^* - 1 \geq 0$, fazendo x_1 entrar na base no lugar de x_4 , pois $a_{41} > 0$ e aplicando o primal-simplex, obtemos:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	z	
x_3	0	5/2	1	1/2	0	0	0	4
x_1	1	3/2	0	1/2	0	0	0	3
y_1	0	-3/2	0	1/2	1	0	0	3
y_2	0	2	0	1	0	1	0	6
z	0	19/2	0	7/2	0	0	1	21
$1_{w'}$	0	$\frac{1}{2}(-3v_1 - 4v_2 + 19)$	0	$\frac{1}{2}(v_1 + 2v_2 + 7)$	0	0	0	$3v_1 + 6v_2 + 21$

(II.1)

A base ótima 1B , de índice $\rho_1 = (j_1, j_3)$, é vizinha de 0B . A região R_1 é determinada por:

$$\begin{cases} 3v_1 - 4v_2 \leq 19 \\ v_1 + 2v_2 \geq -7 \end{cases}$$

Fazendo o gráfico de R_0 e R_1 , temos:

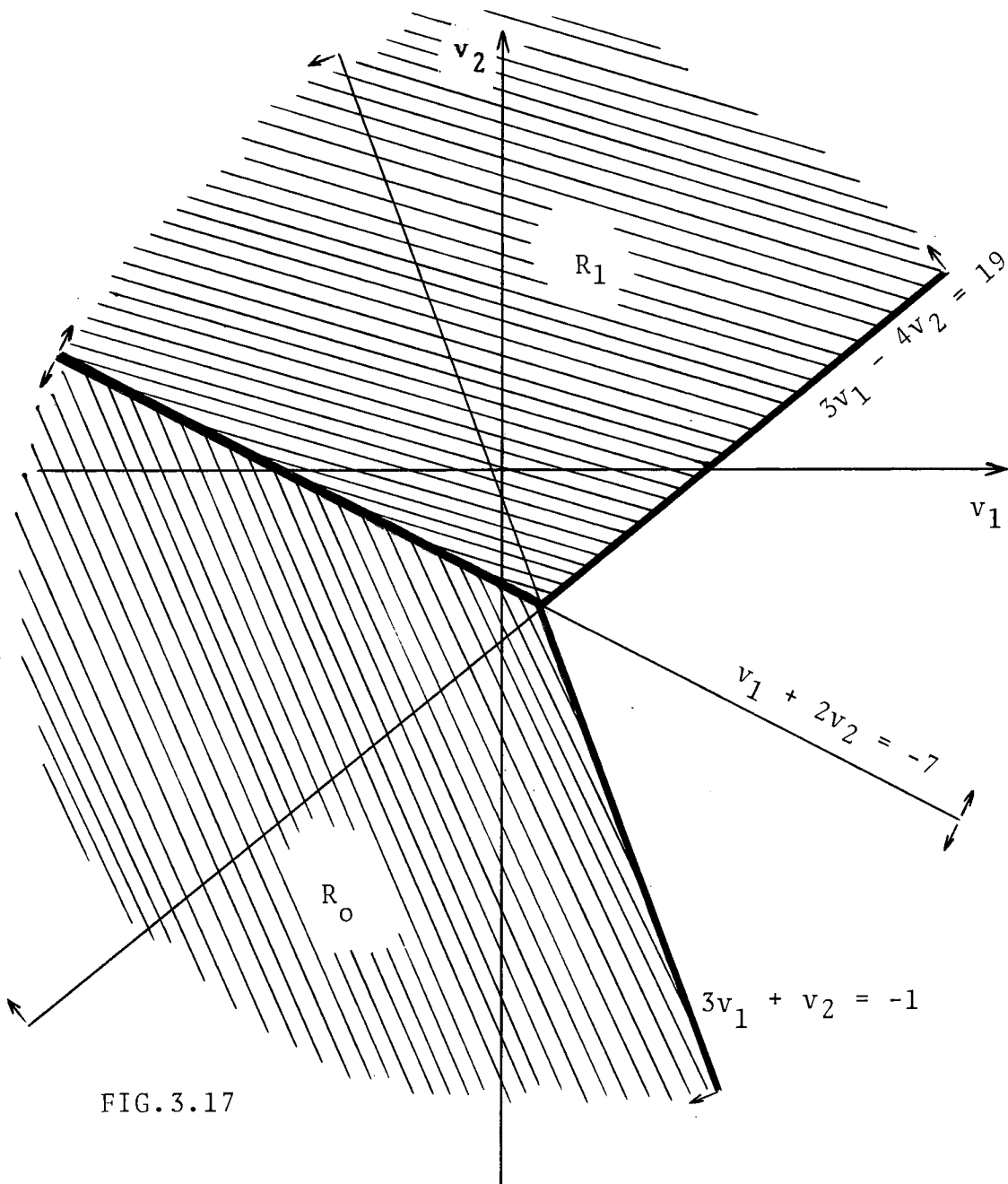


FIG.3.17

Observe, analogamente ao MLP-RHS, que as regiões R_0 e R_1 têm uma fronteira em comum e estão em semi-espacos opostos do \mathbb{R}^2 .

OBSERVAÇÕES

a) Podemos resumir de maneira mais formal o conceito de BASES VIZINHAS da seguinte forma:

Suponha que $\exists v^* \in K$ satisfazendo a DEFINIÇÃO 3.14 .
Então, fazendo $v = v^*$ teremos, relativamente a base ótima 1B :

$${}^1c^* + {}^1Hv^* = \begin{pmatrix} {}^1c_1^* + \sum_{k=1}^s {}^1h_{1k} \cdot v_k^* \\ {}^1c_2^* + \sum_{k=1}^s {}^1h_{2k} \cdot v_k^* \\ \dots \dots \dots \\ {}^1c_j^* + \sum_{k=1}^s {}^1h_{jk} \cdot v_k^* \\ \dots \dots \dots \\ {}^1c_n^* + \sum_{k=1}^s {}^1h_{nk} \cdot v_k^* \end{pmatrix}$$

Se $\exists v^*$ satisfazendo a DEFINIÇÃO 3.14, então
 $\exists j \in J_2^{(1)}$ tal que ${}^1c_j(v^*) = {}^1c_j^* + \sum_{k=1}^s {}^1h_{jk} \cdot v_k^* = 0$.

Se existir ${}^1a_{ij} > 0$, para $i \in I$, então é possível passar de 1B para uma outra base ótima 2B (e vice-versa) através de um passo do algoritmo PRIMAL-SIMPLEX.

Suponha, então, que introduzimos a VNB x_j na base no lugar da VB x_i . Aplicando o algoritmo primal-simplex e efetu-

ando o pivoteamento, anularemos o coeficiente da nova VB na função objetivo, isto é, teremos $c_j(v) = 0$.

Por outro lado, como $c_j(v^*) = 0$ teremos $w^{(2)}(v^*) = w^{(1)}(v^*)$, pois a nova VB x_j nenhuma modificação trará no valor da função objetivo (evidentemente, isso é válido para $v = v^*$).

TEOREMA 3.15

A função $W_{\max}(v)$, definida sobre K , é uma função CONVEXA E CONTÍNUA.

DEMONSTRAÇÃO

A demonstração de que $W_{\max}(v)$ é CONTÍNUA é igual a demonstração do TEOREMA 3.8, feita para o MLP-RHS.

Resta provar que $W_{\max}(v)$ é CONVEXA. Isto é, temos que provar que $W_{\max}[(1-\alpha)v^1 + \alpha v^2] \leq (1-\alpha)W_{\max}(v^1) + \alpha W_{\max}(v^2)$, $\forall v^1, v^2 \in K$ e $0 \leq \alpha \leq 1$.

Sejam x^1 solução ótima do MLP-OFC para $v = v^1 \in K$, x^2 solução ótima para $v = v^2 \in K$ e x^* solução ótima para $v = v^*$.

Seja $v^* = \alpha v^1 + (1-\alpha)v^2$, para $0 \leq \alpha \leq 1$. É claro que $v^* \in K$, pois K é convexo.

$$\begin{aligned} W_{\max}(v^*) &= c^T(v^*)x^* = (c^* + Hv^*)^T x^* = \\ &= [c^* + H(\alpha v^1 + (1-\alpha)v^2)]^T x^* = (c^* + \alpha H v^1 + H v^2 - \alpha H v^2)^T x^* = \\ &= (c^* + \alpha H v^1 + H v^2 - \alpha H v^2 + \alpha c^* - \alpha c^*)^T x^* = \\ &= [(\alpha c^* + \alpha H v^1) + (c^* + H v^2 - \alpha c^* - \alpha H v^2)]^T x^* = \\ &= [\alpha(c^* + H v^1) + (1-\alpha)(c^* + H v^2)]^T x^* = \\ &= \alpha c^T(v^1)x^* + (1-\alpha)c^T(v^2)x^* \end{aligned}$$

Por outro lado, temos:

$$W_{\max}(v^1) = c^T(v^1)x^1 \geq c^T(v^1)x^*$$

$$W_{\max}(v^2) = c^T(v^2)x^2 \geq c^T(v^2)x^*$$

Logo:

$$\begin{aligned} W_{\max}(v^*) &= \alpha c^T(v^1)x^* + (1-\alpha)c^T(v^2)x^* \leq \\ &\leq \alpha c^T(v^1)x^1 + (1-\alpha)c^T(v^2)x^2 = \\ &= \alpha W_{\max}(v^1) + (1-\alpha)W_{\max}(v^2) \rightarrow \\ W_{\max}[\alpha v^1 + (1-\alpha)v^2] &\leq \alpha W_{\max}(v^1) + \\ + (1-\alpha)W_{\max}(v^2) &\rightarrow W_{\max}(v) \text{ é CONVEXA.} \end{aligned}$$

TEOREMA 3.16

Duas regiões vizinhas R_1 e R_2 estão em semi-espacos opostos de R^S .

DEMONSTRAÇÃO

Sejam 1B e 2B as bases ótimas vizinhas relativas as regiões vizinhas R_1 e R_2 , respectivamente.

As regiões R_1 e R_2 , de acordo com a relação 3.3.20, são definidas, respectivamente, por ${}^1c^* + {}^1H.v \geq \bar{0}$ e ${}^2c^* + {}^2H.v \geq \bar{0}$. Portanto, os coeficientes da função objetivo, correspondentes a base ótima ${}^\rho B$, são da forma ${}^\rho c_j(v) = {}^\rho c_j^* + \sum_{k=1}^s {}^\rho h_{jk} \cdot v_k$, $j \in J_2^{(\rho)}$.

Logo, R_1 está contido no semi-espaco fechado

$${}^1c_r(v) = {}^1c_r^* + \sum_{k=1}^s {}^1h_{rk} \cdot v_k \geq 0, \quad r \in J_2^{(1)}.$$

Como é possível passar de 1B para 2B através de um passo do algoritmo primal-simplex, então $\exists v^* \in K$ tal que

$${}^1c_r(v^*) = {}^1c_r^* + \sum_{k=1}^s {}^1h_{rk} \cdot v_k^* = 0.$$

Introduzindo a VNB x_r , cujo coeficiente na função objetivo é ${}^1c_r(v)$, suponha que o elemento pivô seja ${}^1a_{ir}$. Pelo algoritmo primal-simplex, evidentemente, ${}^1a_{ir}$ tem que ser positivo. A VNB x_r entra, portanto, no lugar da VB x_i para gerar a base ótima 2B .

Aplicando o primal-simplex, no quadro relativo a 1B , subtraímos a linha do pivô multiplicada por $\frac{{}^1c_r(v)}{{}^1a_{ir}}$ da linha referente a função objetivo para anular o coeficiente de x_r na função objetivo.

Logo, temos:

$${}^2c_i(v) = 0 - \frac{{}^1c_r(v)}{{}^1a_{ir}} \cdot 1 = - \frac{{}^1c_r(v)}{{}^1a_{ir}}$$

${}^2c_i(v)$ é o coeficiente da variável x_i , que passou a ser VNB, no quadro relativo a base ótima 2B , portanto $i \in J_2^{(2)}$

Assim, temos que a região R_2 está contida no semi-espaço fechado ${}^2c_i(v) = - \frac{{}^1c_r(v)}{{}^1a_{ir}} \geq 0 \rightarrow$

$$\rightarrow - \frac{{}^1c_r^* + \sum_{k=1}^s {}^1h_{rk} \cdot v_k}{{}^1a_{ir}} \geq 0 \rightarrow$$

$$l_{c_r^*} + \sum_{k=1}^s l_{h_{rk}} \cdot v_k \leq 0, \text{ pois } l_{a_{ir}} > 0.$$

Como R_1 está contido no semi-espaco fechado

$$l_{c_r^*} + \sum_{k=1}^s l_{h_{rk}} \cdot v_k \geq 0 \text{ e } R_2 \text{ está contido em}$$

$$l_{c_r^*} + \sum_{k=1}^s l_{h_{rk}} \cdot v_k \leq 0, \text{ então } R_1 \text{ e } R_2 \text{ estão em semi-espacos}$$

opostos de R^s .

OBSERVAÇÃO

Note na FIG.3.17, do EXEMPLO 3.9, que as regiões vizinhas R_0 e R_1 estão, respectivamente, contidas nos semi-espacos opostos $v_1 + 2v_2 \leq -7$ e $v_1 + 2v_2 \geq -7$. Separadas, portanto, pela fronteira comum $v_1 + 2v_2 = -7$.

DEFINIÇÃO 3.15

Considere que a numeração das variáveis não básicas em ${}^\rho c(v) = {}^\rho c^* + {}^\rho H v$, relativa ao índice ρ , é a mesma que a numeração das colunas no quadro simplex. Os elementos da j -ésima linha de ${}^\rho H$ são os coeficientes das variáveis v_k da equação do hiperplano ${}^\rho c_j^* + \sum_{k=1}^s {}^\rho h_{jk} \cdot v_k = 0$ o que representa a j -ésima face de R_ρ .

A região R_ρ , definida por 3.3.20, tem um VIZINHO AO LONGO DA J -ÉSIMA FACE, $j \in J_2^{(\rho)}$, se é possível passar para esse vizinho introduzindo a j -ésima variável não básica na base.

Isto é, se queremos introduzir a j -ésima variável não básica na base, usando um passo do algoritmo primal-simplex como exige a DEFINIÇÃO 3.14, então as seguintes condições

devem ser satisfeitas:

$$i) \exists v^* \in R_\rho \text{ tal que } \rho c_j(v^*) = 0$$

$$ii) \exists \rho a_{ij} > 0, \quad i \in I.$$

OBSERVAÇÃO

A j -ésima face corresponde a j -ésima VNB, na ordem em que aparecem no quadro-simplex, da esquerda para a direita.

EXEMPLO 3.10

No EXEMPLO 3.9 a região R_0 tem o vizinho R_1 ao longo de sua 1.^a face ($v_1 + 2v_2 = -7$), pois R_1 é obtido introduzindo-se a VNB x_1 na base.

OBSERVAÇÃO

Os TEOREMAS 3.10 e 3.11 permanecem válidos para o MLP-OFC. Para demonstrarmos o TEOREMA 3.10, para o MLP-OFC, basta ler DEGENERAÇÃO-DUAL onde está escrito DEGENERAÇÃO-PRIMAL (e vice-versa), algoritmo PRIMAL-SIMPLEX onde está escrito DUAL-SIMPLEX (e vice-versa), na demonstração feita para MLP-RHS (PAGS. 90 e 91). A demonstração do TEOREMA 3.11 permanece exatamente a mesma para o MLP-OFC.

EXEMPLO 3.11

Daremos agora um exemplo completo mostrando como achar todas as regiões R_i que cobrem K e não se sobrepõe. Mostraremos também como determinar $W_{\max}(v)$. Finalizando faremos o gráfico das regiões R_i no espaço $R^S = R^2$.

Seja o problema MLP-OFC, dado no EXEMPLO 3.8

$$\text{MÁXIMO } W = (7 + v_1 + 2v_2)x_1 + (1 + 3v_1 + v_2)x_2$$

SUJEITO A

$$\left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 \leq 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{array} \right.$$

Colocando o problema na forma (3.3.10-3.3.15), como foi visto anteriormente no EXEMPLO 3.3.8, temos:

$$\text{MÁXIMO } w = v_1 y_1 + v_2 y_2 + z$$

SUJEITO A

$$\left\{ \begin{array}{rcl} -x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 & = & 6 \\ y_1 - x_1 - 3x_2 & = & 0 \\ y_2 - 2x_1 - x_2 & = & 0 \\ z - 7x_1 - x_2 & = & 0 \\ x_j \geq 0 \quad (\forall j \in \{1,2,3,4\}); y_1, y_2, z \text{ quaisquer} \end{array} \right.$$

Resolvendo o problema pelo primal-simplex, como foi feito no EXEMPLO 3.3.8, obtemos o QUADRO (II.0) que nos dá a região inicial R_0 .

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	z	b_i
x_3	-1	1	1	0	0	0	0	1
x_4	2	3	0	1	0	0	0	6
y_1	-1	-3	0	0	1	0	0	0
y_2	-2	-1	0	0	0	1	0	0
z	-7	-1	0	0	0	0	1	0
${}^0w'$	$-v_1 - 2v_2 - 7$	$-3v_1 - v_2 - 1$	0	0	0	0	0	0

(II.0)

A base 0B , de índice $\rho_0 = (j_3, j_4)$ é ótima. A região R_0 é determinada por:

$$R_0 \quad \begin{cases} v_1 + 2v_2 \leq -7 \\ 3v_1 + v_2 \leq -1 \end{cases}$$

$$w^{(0)}(v) = 0$$

Observando o quadro ótimo (II.0), vemos que R_0 possui um vizinho R_1 ao longo da sua 1.^a face (1.^a VNB) ($v_1 + 2v_2 = -7$) (obtemos R_1 introduzindo x_1 na base no lugar de x_4 , pois ${}^0A_{41} = 2 > 0$) e um vizinho R_2 ao longo da sua 2.^a face (2.^a VNB) ($3v_1 + v_2 = -1$).

DETERMINAÇÃO DE R_1

Introduzindo x_1 na base (Quadro (II.0)), no lugar da variável x_4 , e aplicando o primal-simplex, vem:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	z	b_i
x_3	0	5/2	1	1/2	0	0	0	4
x_1	1	3/2	0	1/2	0	0	0	3
y_1	0	-3/2	0	1/2	1	0	0	3
y_2	0	2	0	1	0	1	0	6
z	0	19/2	0	7/2	0	0	1	21
$1_{w'}$	0	$\frac{1}{2}(-3v_1+4v_2+19)$	0	$\frac{1}{2}(v_1+2v_2+7)$	0	0	0	$3v_1+6v_2+21$

(II.1)

A região R_1 , de índice $\rho_1 = (j_1, j_3)$ é determinada por:

$$R_1 \begin{cases} 3v_1 - 4v_2 \leq 19 \\ v_1 + 2v_2 \geq -7 \end{cases}$$

$$w^{(1)}(v) = 3v_1 + 6v_2 + 21$$

Observando o quadro II.1, vemos que R_1 possui o vizinho R_0 ao longo da sua 2.^a face ($v_1 + 2v_2 = -7$) e um vizinho R_3 ao longo da sua 1.^a face ($3v_1 - 4v_2 = 19$)

DETERMINAÇÃO DE R_2

Introduzindo x_2 na base no lugar de x_3 (Quadro(II.0)),

pois $\min.\{\frac{1}{1}, \frac{6}{3}\} = 1$, e aplicando o primal-simplex, vem:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	z	b_i
x_2	-1	1	1	0	0	0	0	1
x_4	5	0	-3	1	0	0	0	3
y_1	-4	0	3	0	1	0	0	3
y_2	-3	0	1	0	0	1	0	1
z	-8	0	1	0	0	0	1	1
$2_{w'}$	$-4v_1 - 3v_2 - 8$	0	$3v_1 + v_2 + 1$	0	0	0	0	$3v_1 + v_2 + 1$

(II.2)

A região R_2 , de índice $\rho_2 = (j_2, j_4)$, é determinada por:

$$R_2 \quad \begin{cases} 4v_1 + 3v_2 \leq -8 \\ 3v_1 + v_2 \geq -1 \end{cases}$$

$$W^{(2)}(v) = 3v_1 + v_2 + 1$$

Observando o quadro (II.2), vemos que R_2 possui o vizinho R_0 ao longo da sua 2.^a face ($3v_1 + v_2 = -1$) e o vizinho R_3 ao longo da sua 1.^a face ($4v_1 + 3v_2 = -8$).

DETERMINAÇÃO DE R_3

Introduzindo x_2 na base no lugar de x_3 (Quadro(II.1)), pois $\min.\{4 \cdot \frac{2}{5}, 3 \cdot \frac{2}{3}\} = \frac{8}{5}$, e aplicando o primal-simplex,

vem:

VB	x_1	x_2	x_3	x_4	y_1	y_2	z	b_i
x_2	0	1	$2/5$	$1/5$	0	0	0	$8/5$
x_1	1	0	$-3/5$	$1/5$	0	0	0	$3/5$
y_1	0	0	$3/5$	$4/5$	1	0	0	$27/5$
y_2	0	0	$-4/5$	$3/5$	0	1	0	$14/5$
z	0	0	$-19/5$	$8/5$	0	0	1	$29/5$
${}^3_w'$	0	0	$\frac{1}{5}(3v_1 - 4v_2 - 19)$	$\frac{1}{5}(4v_1 + 3v_2 + 8)$	0	0	0	$\frac{1}{5}(27v_1 + 14v_2 + 29)$

(II.3)

A região R_3 , de índice $\rho_3 = (j_1, j_2)$, é determinada por:

$$R_3 \begin{cases} 3v_1 + 4v_2 \geq 19 \\ 4v_1 + 3v_2 \geq -8 \end{cases}$$

$$W^{(3)}(v) = \frac{1}{5}(27v_1 + 14v_2 + 29)$$

Observando o quadro (II.3), vemos que R_3 possui o vizinho R_1 ao longo da sua 1.^a face ($3v_1 - 4v_2 = 19$) e o vizinho R_2 ao longo da sua 2.^a face ($4v_1 + 3v_2 = -8$).

Como não há nenhum vizinho que não foi determinado, temos $K = R_0 \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3$, onde:

$$\begin{array}{ll}
 R_0 & \begin{cases} v_1 + 2v_2 \leq -7 \\ 3v_1 + v_2 \leq -1 \end{cases} & R_1 & \begin{cases} 3v_1 - 4v_2 \leq 19 \\ v_1 + 2v_2 \geq -7 \end{cases} \\
 R_2 & \begin{cases} 4v_1 + 3v_2 \leq -8 \\ 3v_1 + v_2 \geq -1 \end{cases} & R_3 & \begin{cases} 3v_1 - 4v_2 \geq 19 \\ 4v_1 + 3v_2 \geq -8 \end{cases}
 \end{array}$$

Temos, também que:

$$W_{\max}(v) = \begin{cases} 0 & \text{Se } v \in R_0 \\ 3v_1 + 6v_2 + 21 & \text{Se } v \in R_1 \\ 3v_1 + v_2 + 1 & \text{Se } v \in R_2 \\ \frac{1}{5} (27v_1 + 14v_2 + 29) & \text{Se } v \in R_3 \end{cases}$$

A seguir faremos o gráfico das regiões R_0, R_1, R_2, R_3 no espaço $R^S = R^2$.

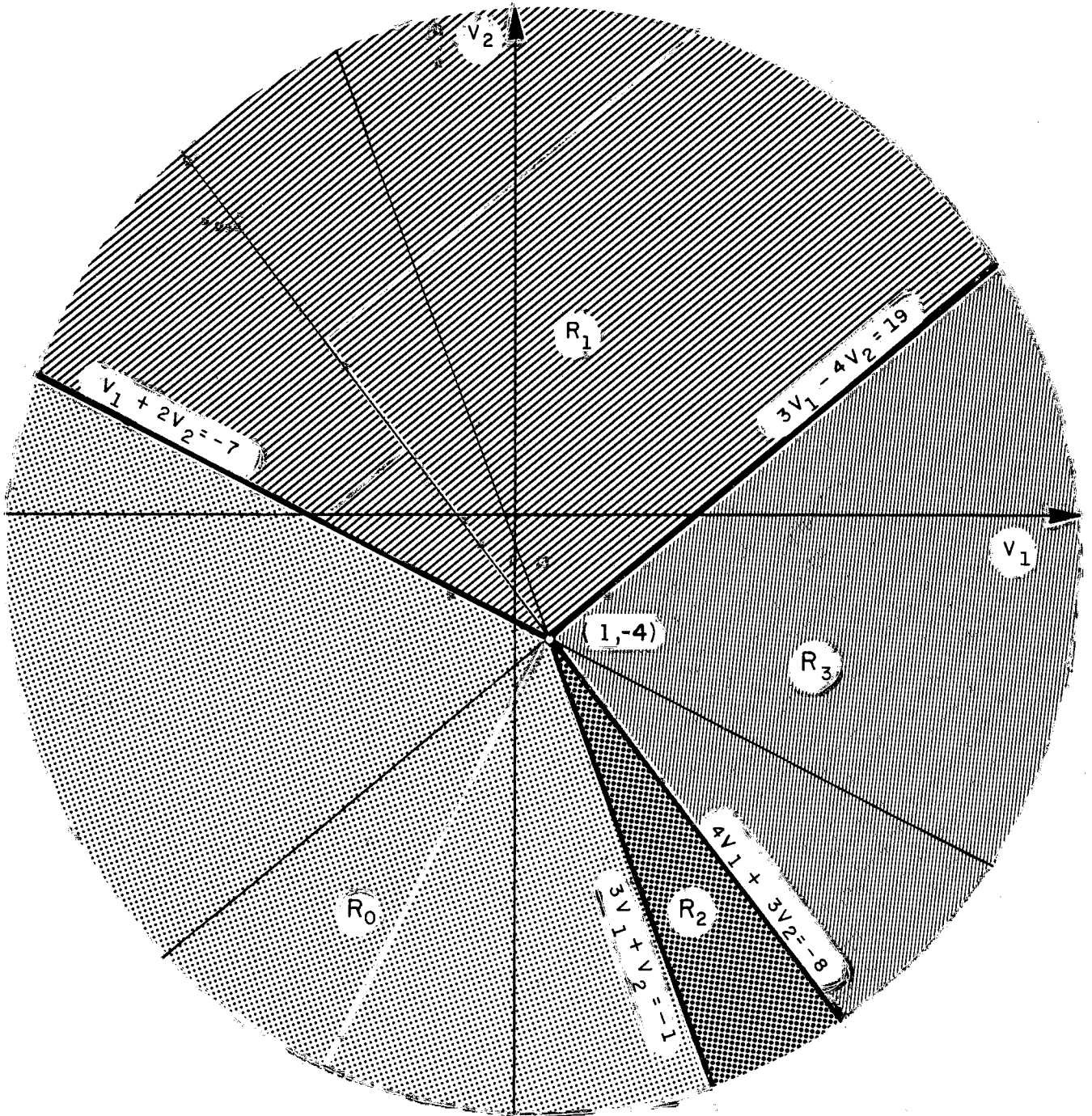


FIG. 3.18

ILUSTRAÇÃO

Como vimos anteriormente, se $v \in R_i$, então o problema tem o vértice V_i como solução ótima, ou seja, a função objetivo $w(v)$ atinge o máximo no vértice V_i .

Vamos tomar um ponto qualquer $v = (v_1, v_2)$ pertencente a cada uma das regiões R_0, R_1, R_2 e R_3 , do EXEMPLO 3.11, para ilustrar essa situação. Tomaremos também um ponto $v \in R_1 \cap R_3$ para ilustrar, que nesse caso, o problema admite soluções múltiplas.

Observando a FIG.3.18, vemos que podemos considerar os seguintes pontos e as respectivas funções objetivos:

$$(-3, -6) \in R_0 \rightarrow {}^0_w = -8x_1 - 14x_2$$

$$(0, 4) \in R_1 \rightarrow {}^1_w = 15x_1 + 5x_2$$

$$(4, -10) \in R_2 \rightarrow {}^2_w = -9x_1 + 3x_2$$

$$(6, -4) \in R_3 \rightarrow {}^3_w = 5x_1 + 15x_2$$

$$(9, 2) \in R_1 \cap R_3 \rightarrow {}^{1,3}_w = 20x_1 + 30x_2$$

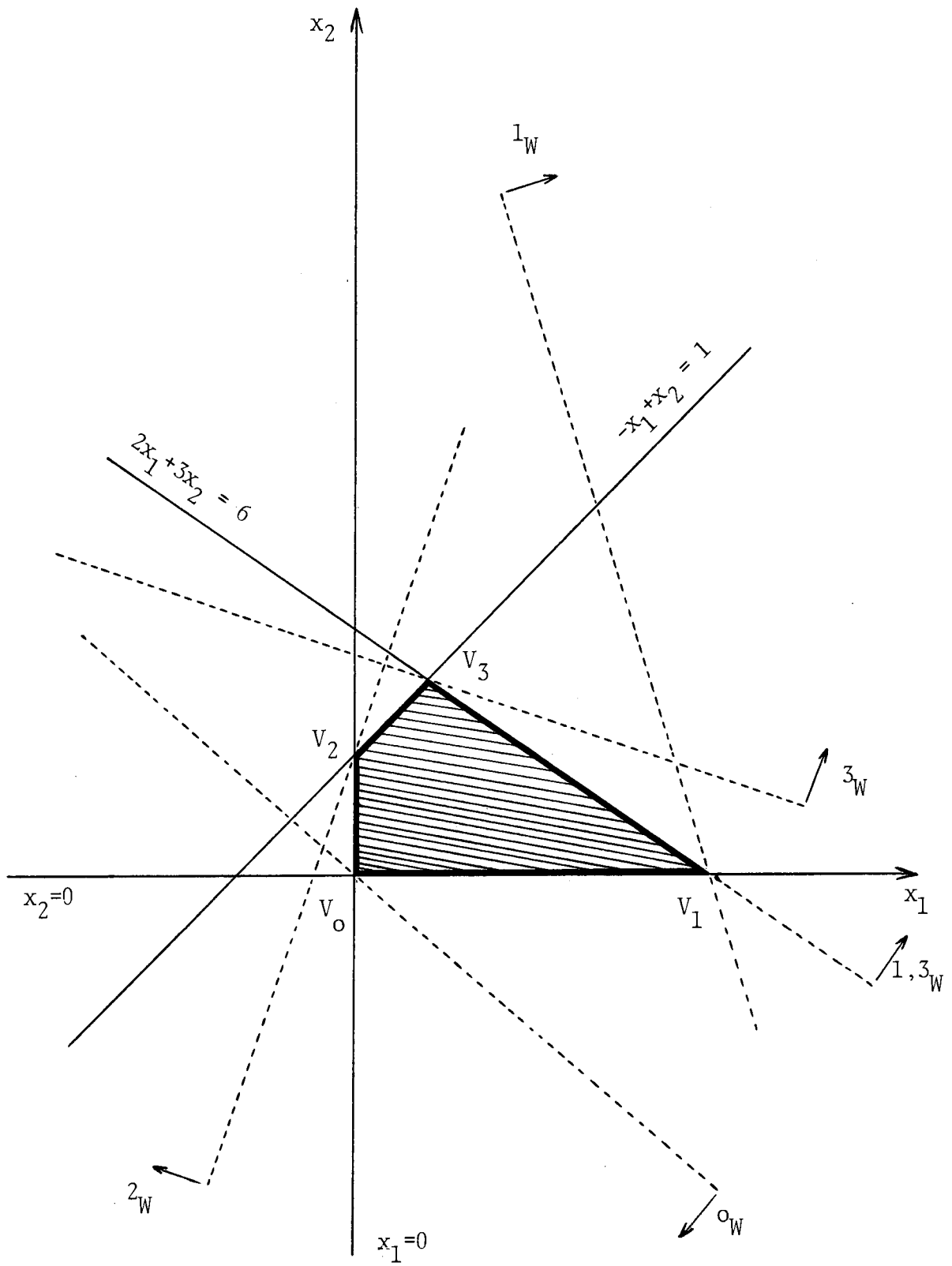
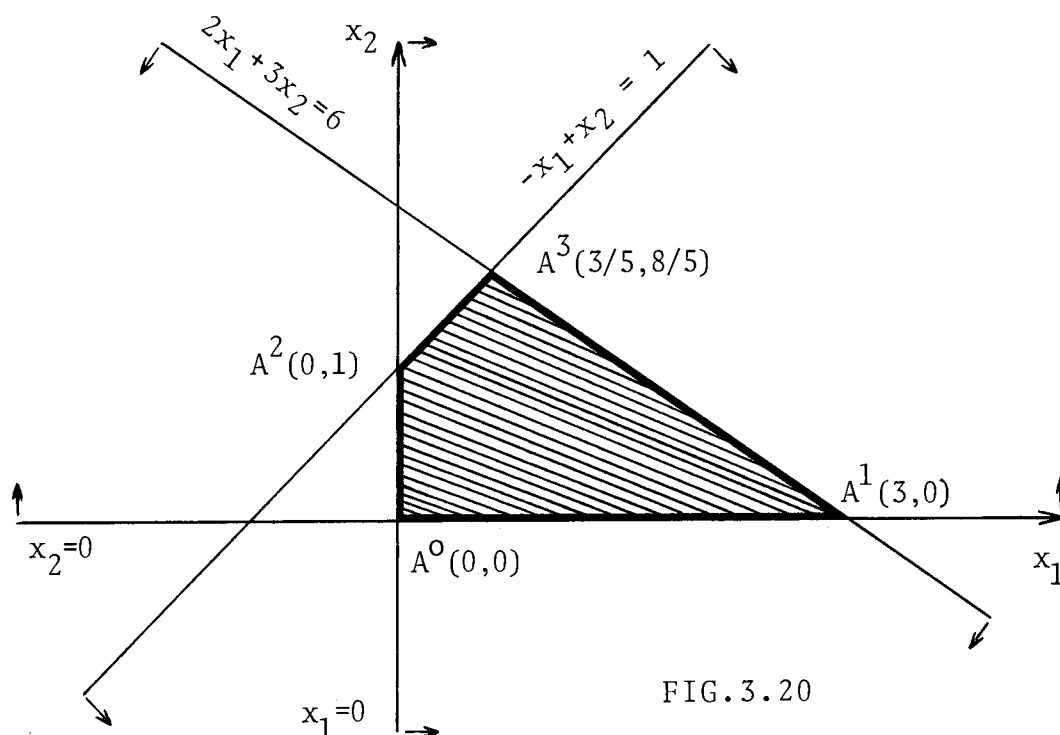


FIG. 3.19

OBSERVAÇÕES

a) O gráfico do conjunto das soluções viáveis do problema dado no EXEMPLO 3.11 é:



Resumindo, o que fizemos foi determinar o conjunto de todos os $v^i \in R_i$ tal que o MÁXIMO $w = c^T(v^i)x$ ocorre no vértice iA . Isto é, determinamos o conjunto de todos os $v^i \in R^S$ para os quais o vértice iA é ótimo. Assim, no nosso EXEMPLO, $\forall v^i \in R_i (i = 0, 1, 2, 3) \rightarrow \text{MÁX. } w = (7 + v_1^i + 2v_2^i)x_1 + (1 + 3v_1^i + v_2^i)x_2$ ocorre no vértice iA .

Por exemplo, $v^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix} \in R_1 \rightarrow \text{Máx. } w = (7 + 0 + 2 \cdot 8)x_1 + (1 + 3 \cdot 0 + 8)x_2 = 23x_1 + 9x_2$ ocorre no vértice ${}^1A = (3, 0)$.

b) Note que o vetor $v^* = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ pertence a todas as regiões.

Logo, qualquer vértice do conjunto das soluções viáveis é óti-

mo para o problema.

De fato: $\text{MÁX } w = 0x_1 + 0x_2$. Então, qualquer ponto do conjunto viável fornece o mesmo valor para a função objetivo.

c) Se v^* pertence a fronteira de duas ou mais regiões R_i , então a função objetivo $W = c^T(v^*)x$ é paralela ao hiperplano definido pelos vértices A^i . Nesse caso, o MLP-OFC tem soluções múltiplas e nos permite passar de uma base ótima para outra vizinha, ou seja de um vértice para outro vértice vizinho.

d) Note que, no EXEMPLO 3.11, $K = \mathbb{R}^2 = R_0 \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3$. Isto acontece porque o conjunto viável é limitado. Como foi visto na 2.^a hipótese da demonstração do TEOREMA 3.14 .

e) Podemos concluir que a região R_i nada mais é do que o LUGAR GEOMÉTRICO das funções objetivo para as quais o vértice A^i é ótimo.

CAPÍTULO IV

CONCLUSÕES E APLICAÇÕES

No CAPÍTULO I relatamos o fato que motivou esse estudo: O problema da razão de custo mínimo. Acreditamos, no entanto, que o conteúdo desse trabalho fornece subsídios para a elaboração de um algoritmo eficiente como o sugerido, em [34], por GAL E NEDOMA, através dos nós de um subgrafo S_0 , de um grafo orientado S , onde o conjunto de nós do grafo S é um subconjunto de m -uplas $\rho = (j_1, \dots, j_m)$ tal que $\rho \in S \leftrightarrow \rho \in B$ é uma base ótima para o MLP e um arco de T , conjunto dos arcos de G , representa que o nó ρ_i é vizinho do nó ρ_j .

Acreditamos que uma grande dificuldade para a elaboração de um algoritmo para o MLP é o número de vértices.

Damos a seguir algumas idéias para se obter os vértices de um politopo para o MLP-OFC:

1^a) Em [26], MANAS e NEDOMA, descreve um algoritmo para achar todos os vértices de um politopo. O algoritmo é descrito usando a terminologia da teoria dos grafos e apresentado de forma computacionalmente eficiente.

2^a) Se os coeficientes das variáveis da função objetivo representam preços, como é o caso da razão de custo mínimo, é razoável de se supor, que para um dado tempo, as soluções ótimas fiquem numa vizinhança do vértice correspondente ao ótimo de hoje. Quanto menor fossem as variações dos preços dos nutrientes no mercado menos bruscas seriam as mudanças dos vértices ótimos. Então, determinaríamos o vértice ótimo, correspondente aos preços de hoje, e pelo simplex calcularíamos todos os vértices

vizinhos do ótimo e a seguir todos os vizinhos desses. Garanti-
ríamos, assim, um conjunto de vértices que teriam validade para
um determinado horizonte.

A determinação desses vértices poderia ser feita a par-
tir do quadro ótimo do simplex desprezando a função objetivo. Es-
colhemos, inicialmente, a VNB x_s para entrar na base e como
critério de saída da base usamos $\text{MIN.}(\frac{b_i}{A_{is}})$ pivoteando a se-
guir.

O valor das variáveis que estão na base nos dá um vé-
rtice vizinho ao ótimo. Aplicando o mesmo procedimento para to-
das VNB do quadro ótimo, determinamos todos os vértices vizi-
nhos desse ótimo.

3^a) Levando em consideração que os coeficientes das
variáveis da função objetivo do problema da razão de custo míni-
mo são não negativos, pois representam preços, poderíamos, a pri-
ori, eliminar alguns vértices do conjunto das soluções viáveis,
por exemplo, da seguinte forma:

Sejam $V^p = (x_1^p, x_2^p, \dots, x_n^p)$ e $V^q = (x_1^q, x_2^q, \dots, x_n^q)$ dois
vértices do conjunto das soluções viáveis.

Se $x_j^p \leq x_j^q$, $\forall j \in \{1, 2, \dots, n\}$, então o vértice V^q po-
de ser eliminado, pois qualquer que seja a função objetivo, o
vértice V^p fornecerá um valor menor do que V^q .

4^a) Quando o problema é de minimização, o simplex
partindo de um vértice do conjunto das soluções viáveis, escolhe
o vértice seguinte baseado no menor ângulo que o gradiente da
função objetivo faz, com as restrições atuantes no vértice. Por-
tanto, partindo-se de um vértice qualquer e expandido em todas
as direções, e não apenas na direção ótima, determinaríamos to-

dos os vértices vizinhos do vértice considerado. Prosseguindo da mesma forma para os vértices subsequentes, tomando o cuidado de não repetí-los, obteríamos os vizinhos a esses. E assim sucessivamente até obter todos os vértices do politopo.

Convém ressaltar que demos, com esse trabalho, o primeiro passo. É necessário, portanto, a continuação do mesmo com a elaboração de um algoritmo eficiente que pode ser baseado no conteúdo por nós apresentado nesse estudo.

Apesar da motivação do trabalho ter sido a razão de custo mínimo, fizemos um estudo genérico e que pode ser aplicado a qualquer situação que exija o uso da programação linear multiparamétrica.

A P Ê N D I C E

Daremos a seguir os dados fornecidos pela EMBRAPA, num total de 21 programas (9 para o inverno e 12 para o verão).

Cálculo da Ração de Custo Mínimo para vacas em lactação utilizando Programação Linear (Dados para formulação da ração).

Alternativas de disponibilidade de alimentos na Fazenda para a época de INVERNO

ALTERNATIVA 1

Pasto gordura: ≤ 10 kg

Silagem milho: ≤ 20 kg

ALTERNATIVA 2

Pasto gordura: ≤ 10 kg

Capineira : ≤ 15 kg

Cana : ≤ 5 kg

ALTERNATIVA 3

Pasto gordura: ≤ 10 kg

Capineira : ≤ 30 kg

Cana : ≤ 10 kg

Alternativas de disponibilidade de alimentos na Fazenda para a época de VERÃO

ALTERNATIVA 1

Pasto gordura: ≤ 30 kg

Capineira : ≤ 15 kg

Cana : ≤ 5 kg

ALTERNATIVA 2

Pasto gordura: ≤ 30 kg

Capineira : ≤ 30 kg

Cana : ≤ 10 kg

ALTERNATIVA 3

Pasto gordura: ≤ 50 kg

Capineira : ≤ 15 kg

Cana : ≤ 5 kg

ALTERNATIVA 4

Pasto gordura: ≤ 50 kg

Capineira : ≤ 30 kg

Cana : ≤ 10 kg

Exigências		Níveis de produção/vaca/dia		
		5 litros	8 litros	11 litros
Mat.Seca	Máximo	14 kg	15 kg	16 kg
Proteína (450 kg)	Mínimo	1,10 kg	1,40 kg	1,70 kg
NDT	Mínimo	5,0 kg	6,0 kg	7,0 kg
Ca	Máximo	0,064 kg	0,080 kg	0,096 kg
	Mínimo	0,032 kg	0,040 kg	0,048 kg
P	Mínimo	0,024 kg	0,030 kg	0,036 kg
Fibra*	Mínimo	2,0 kg	2,1 kg	2,2 kg

* Ideal colocar como sendo mínimo de 14% da M.S. que terá na ração formulada.

Nota: Formular para cada alternativa de INVERNO e de VERÃO rações de custo mínimo e que atendam a cada nível de produção/vaca/dia, num total de 9 rações para o INVERNO e 12 para o VERÃO.

COMPOSIÇÃO E PREÇO DOS ALIMENTOS

NUTRIENTES	PASTO	CAPINEIRA	CANA	SIL.MILHO	FA.OSSOS	FOSTATO BICÁLCIO	CaCO ₃
Preço (Cr\$/kg)	0,0	0,02	0,05	0,15	1,80	18,00	0,30
Mat.Seca	0,23	0,26	0,23	0,27	0,90	0,90	0,90
Proteína	0,018	0,016	0,01	0,02	0,0	0,0	0,0
NDT	0,13	0,13	0,14	0,18	0,0	0,0	0,0
Ca	0,0002	0,001	0,0013	0,0010	0,30	0,23	0,38
P	0,0005	0,0007	0,0004	0,0006	0,14	0,18	0,0
Fibra	0,076	0,090	0,067	0,065	0,0	0,0	0,0

NUTRIENTES	MDPS	MILHO	Fº TRI- GO-COTA	Fº SO- JA	Fº AL- GODÃO	MELAÇO	PURINA	RASPA MAND.	FºTRIGO VAREJO
Preço (Cr\$/kg)	0,80	1,50	0,48	2,80	2,20	2,50	2,00	0,80	1,00
Mat.Seca	0,89	0,88	0,89	0,89	0,91	0,90	0,90	0,94	0,89
Proteína	0,078	0,085	0,15	0,40	0,28	0,038	0,22	0,028	0,15
NDT	0,69	0,80	0,63	0,73	0,63	0,826	0,68	0,80	0,63
Ca	0,0001	0,0002	0,0014	0,0032	0,0015	0,0106	0,0014	0,0009	0,0014
P	0,0025	0,0033	0,0124	0,0067	0,0110	0,0010	0,0006	0,0025	0,0124
Fibra	0,105	0,020	0,10	0,060	0,111	0,00	0,12	0,050	0,10

Nota: Colocar nas restrições: consumo máximo de "farelo de trigo - cota": 1,5/kg/vaca/dia.

OBSERVAÇÕES

- 1.^a) Dada a composição do custo mínimo, informar qual o limite máximo no preço de cada componente para continuar integrando a ração de custo mínimo.
- 2.^a) Dada a composição de custo mínimo, informar a que preço cada componente QUE NÃO ENTROU NA RAÇÃO, passaria a ENTRAR numa nova ração de mínimo custo.

Como podemos observar, temos um total de 21 programas, pois são dadas 3 ALTERNATIVAS para a época de INVERNO e 4 ALTERNATIVAS para a época de VERÃO, e além disso, 3 NÍVEIS DE PRODUÇÃO/VACA/DIA (5 litros, 8 litros, 11 litros).

Veremos a seguir, como exemplo, um desses programas: VERÃO/ALTERNATIVA 1/VACAS DE 5 LITROS.

Daremos o MODELO (equacionamento) como um Problema de Programação Linear e, a seguir, sua resolução, através da lista

gem do computador, usando o MPS/360 (IBM).

RESOLUÇÃO DE UM PROBLEMA PARA CÁLCULO DA RAÇÃO DE CUSTO MÍNIMO
PARA VACAS EM LACTAÇÃO UTILIZANDO PROGRAMAÇÃO LINEAR

VERÃO/ALTERNATIVA 1/VACAS DE 5 LITROS

FORAM FORNECIDOS PELA EMBRAPA DADOS RELATIVOS A VÁRIAS ALTERNATIVAS PARA INVERNO E VERÃO, BEM COMO PARA NÍVEIS DE PRODUÇÃO (5, 8 e 11 LITROS POR DIA). RESOLVEMOS AQUI UM MODELO PARA VERÃO COM A ALTERNATIVA 1 DE DISPONIBILIDADES DE ALIMENTOS E PARA VACAS DE 5 LITROS POR DIA, A TÍTULO DE ILUSTRAÇÃO. PARA RESOLVER OS OUTROS PROBLEMAS BASTA TROCAR ALGUNS CARTÕES DE DADOS.

VERÃO - ALTERNATIVA 1

PASTO GORDURA \leq 30 kg/VACA/DIA

CAPINEIRA \leq 15 kg/VACA/DIA

CANA \leq 5 kg/VACA/DIA

NÍVEIS DE PRODUÇÃO/VACA/DIA - 5 LITROS

EXIGÊNCIAS

MATÉRIA SECA	_____	MÁXIMO	_____	14 kg	
PROTEÍNA(450 kg)	_____	MÍNIMO	_____	1,10 kg	
NDT	_____	MÍNIMO	_____	5,0 kg	
CA	_____	}	MÁXIMO	_____	0,064 kg
			MÍNIMO	_____	0,032 kg
P	_____	MÍNIMO	_____	0,024 kg	
FIBRA*	_____	MÍNIMO	_____	2,0 kg	

* IDEAL COLOCAR COMO SENDO MÍNIMO DE 14% DE M.S. QUE TERÁ NA RAÇÃO FORMULADA

VER OS DADOS RELATIVOS A COMPOSIÇÃO E PREÇO DOS ALIMENTOS FORNECIDOS PELA EMBRAPA.

EQUACIONAMENTO DO PROBLEMA

X_1 : PASTO

X_2 : CAPINEIRA

X_3 : CANA

X_4 : SILHAGEM DE MILHO

X_5 : FARINHA DE OSSOS

X_6 : FOSFATO BICÁLCIO

X_7 : CaCO_3

X_8 : MDPS

X_9 : MILHO

X_{10} : FARELO TRIGO-COTA

X_{11} : FARELO DE SOJA

X_{12} : FARELO DE ALGODÃO

X_{13} : MELAÇO

X_{14} : PURINA

X_{15} : RASPA DE MANDIOCA

X_{16} : FARELO DE TRIGO VAREJO

X_1 = PASTO GORDURA \leq 30

X_2 = CAPINEIRA \leq 15

X_3 = CANA \leq 5

$$\begin{aligned} \text{M.S.} = & 0,23x_1 + 0,26x_2 + 0,23x_3 + 0,27x_4 + 0,90x_5 + 0,90x_6 + 0,90x_7 + 0,89x_8 + \\ & 0,88x_9 + 0,89x_{10} + 0,89x_{11} + 0,91x_{12} + 0,90x_{13} + 0,90x_{14} + 0,94x_{15} + \\ & 0,89x_{16} \leq 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{PROTEÍNA} = & 0,018x_1 + 0,016x_2 + 0,01x_3 + 0,02x_4 + 0,078x_8 + 0,085x_9 + 0,15x_{10} + \\ & 0,40x_{11} + 0,28x_{12} + 0,038x_{13} + 0,22x_{14} + 0,028x_{15} + 0,15x_{16} \geq 1,10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{NDT} = & 0,13x_1 + 0,13x_2 + 0,14x_3 + 0,18x_4 + 0,69x_8 + 0,80x_9 + 0,63x_{10} + 0,73x_{11} + \\ & 0,63x_{12} + 0,826x_{13} + 0,68x_{14} + 0,80x_{15} + 0,63x_{16} \geq 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0,32 \leq \text{Ca} = & 0,0002x_1 + 0,001x_2 + 0,0013x_3 + 0,0010x_4 + 0,30x_5 + 0,23x_6 + \\ & 0,38x_7 + 0,0001x_8 + 0,0002x_9 + 0,0014x_{10} + 0,0032x_{11} + 0,0015x_{12} + \\ & 0,0106x_{13} + 0,0014x_{14} + 0,0009x_{15} + 0,0014x_{16} \leq 0,064 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{P} = & 0,0005x_1 + 0,0007x_2 + 0,0004x_3 + 0,0006x_4 + 0,14x_5 + 0,18x_6 + 0,0025x_8 + \\ & 0,0033x_9 + 0,0124x_{10} + 0,0067x_{11} + 0,0110x_{12} + 0,0010x_{13} + 0,0006x_{14} + \\ & 0,0025x_{15} + 0,0124x_{16} \geq 0,024 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{FIBRA} = & 0,076x_1 + 0,090x_2 + 0,067x_3 + 0,065x_4 + 0,105x_8 + 0,020x_9 + 0,10x_{10} + \\ & 0,060x_{11} + 0,111x_{12} + 0,12x_{14} + 0,050x_{15} + 0,10x_{16} \geq 2 \end{aligned}$$

*Colocando como sendo mínimo de 14% da M.S. para a fibra

(FIBRA \geq 0,14 M.S.):

$$\begin{aligned} & 0,076x_1 + 0,090x_2 + 0,067x_3 + 0,065x_4 + 0,105x_8 + 0,020x_9 + \\ & 0,10x_{10} + 0,060x_{11} + 0,111x_{12} + 0,12x_{14} + 0,050x_{15} + 0,10x_{16} \\ & \geq 0,14(0,23x_1 + 0,26x_2 + 0,23x_3 + 0,27x_4 + 0,90x_5 + 0,90x_6 + 0,90x_7 + 0,89x_8 + \\ & 0,88x_9 + 0,89x_{10} + 0,89x_{11} + 0,91x_{12} + 0,90x_{13} + 0,90x_{14} + 0,94x_{15} + 0,89x_{16}) \end{aligned}$$

Colocando, também, como restrição: consumo máximo de "FARELO DE TRIGO-COTA": 1,5kg/VACA/DIA, temos:

$$x_{10} \leq 1,5$$

FUNÇÃO OBJETIVO:

$$\begin{aligned} \text{MÍNIMO DE } Z = & 0,02x_2 + 0,05x_3 + 0,15x_4 + 1,80x_5 + 18x_6 + 0,30x_7 + 0,80x_8 + \\ & 1,50x_9 + 0,48x_{10} + 2,80x_{11} + 2,20x_{12} + 2,50x_{13} + 2x_{14} + \\ & 0,80x_{15} + 1,00x_{16} \end{aligned}$$

O problema, portanto, compõe-se de 16 variáveis e 12 restrições.

SOLUÇÃO ÓTIMA DADA PELO MPS/360

PASTO	= 30 kg	MILHO	= 0
CAPINEIRA	= 15 kg	FAR.TRIGO	= 1,5 kg
CANA	= 5 kg	FARELO SOJA	= 0
SILH.MILHO	= 0	FARELO ALGODÃO	= 0
FAR.OSSOS	= 0	MELAÇO	= 0
FOSF.BI-CALCIO	= 0	PURINA	= 0
CaCO ₃	= 0,00521 kg	RASPA MANDIOCA	= 0
MDPS	= 0	FAR.TRIGO-VAREJO	= 0,3 kg
MIN.z = Cr\$ 1,57156			

VER O PROGRAMA RODADO A SEGUIR.

```

//FABIO JOB (6563,6897),'172',MSGLEVEL=(2,0)
ISS019I SEU SALDO AS 0:00 HORAS DE HOJE ERA CR$ 32400,00
//JOBLIB DD DSN=MP.S.SISTM360,DISP=OLD,UNIT=2314,
// VOL=SER=SSSBP1
//CPC EXEC PGM=COMPILER
//SCRATCH1 DD UNIT=2314,SPACE=(TRK,(10,10))
//SCRATCH2 DD UNIT=2314,SPACE=(TRK,(10,10))
//SCRATCH3 DD UNIT=2314,SPACE=(TRK,(10,10))
//SCRATCH4 DD UNIT=2314,SPACE=(TRK,(10,10))
//SYSMLCP DD UNIT=2314,SPACE=(TRK,(10,10)),DISP=(NEW,PASS)
//SYSPRINT DD SYSOUT=A,DCB=RECFM=FBA
//SYSIN DD *
//EXEC EXEC PGM=EXECUTOR,COND=(0,NE,CPC)
//SCRATCH1 DD UNIT=2314,SPACE=(TRK,(10,10))
//SCRATCH2 DD UNIT=2314,SPACE=(TRK,(10,10))
//PROBFILE DD UNIT=2314,SPACE=(TRK,(10,10))
//MATRIX1 DD UNIT=2314,SPACE=(TRK,(10,10))
//ETA1 DD UNIT=2314,SPACE=(TRK,(10,10))
//SYSMLCP DD UNIT=2314,DSNAME=*.CPC.SYSMLCP,DISP=(OLD,DELETE)
//SYSPRINT DD SYSOUT=A,DCB=RECFM=FBA
//SYSIN DD *
NUCLEO DE COMPUTACAO. ELETRONICA - TEMPO DO PROGRAMA FABIO

```

CONTROL PROGRAM COMPILER - MPS/360 V2-M9

```
0001 PROGRAM
0002 INITIALZ
0065 MOVE(XDATA, 'VEALL5')
0066 MOVE(XPHNAME, 'PBFILE')
0067 CONVERT('SUMMARY')
0068 BCDOUT
0069 SETUP('RANGE', 'AL1', 'BOUND', 'PRODL')
0070 MOVE(XOBJ, 'VALUE')
0071 MOVE(XRHS, 'ALDY1')
0072 PRIMAL
0073 SOLUTION
0074 EXIT
0075 PEND
```

EXECUTJR. MPS/360 V2-M9

CONVERT VEA1L5 TO PBFIL5

TIME = 0.03

SUMMARY

1- ROWS SECTION.

0 MINOR ERROR(S) - 0 MAJOR ERROR(S).

2- COLUMNS SECTION.

0 MINOR ERROR(S) - 0 MAJOR ERROR(S).

3- RHS'S SECTION.

AL0Y1

0 MINOR ERROR(S) - 0 MAJOR ERROR(S).

4- RANGES SECTION.

AL1

0 MINOR ERROR(S) - 0 MAJOR ERROR(S).

THE FOLLOWING ROWS ARE NOT USED,

IBRA

5- BOUNDS SECTION.

PROD1

0 MINOR ERROR(S) - 0 MAJOR ERROR(S).

EXECUTJR. MPS/360 V2-M9

NUMBER OF ELEMENTS BY COLUMN ORDER

13	PASTO8	CAPINEI9	CANA9
20	MDPS8	MILHO8	FARTRICO9
27	RASPAMAN8	FARTRIVA8		

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA



PAGE 2 - 77/031

SILMILHO.....8	FAOSSOS5	FOSBICAL.....5	CAC034
FARESUJA.....8	FAREALGO.....8	MELACO7	PURINA7

EXECUTOR. MPS/360 V2-M9

NAME VEA1L5
ROWS

N VALUE
L PAGOR
L CAP
L CAN
L MATSEC
G PROTEI
G NDT
G P
G FIBRA
G MS14
L FTC15
L CA

COLUMNS

PASTO	PAGOR	1.00000	MATSEC	.23000
PASTO	PROTEI	.01800	NDT	.13000
PASTO	P	.00050	FIBRA	.07600
PASTO	MS14	.04380	CA	.00020
CAPINEI	VALUE	.02000	CAP	1.00000
CAPINEI	MATSEC	.26000	PROTEI	.01600
CAPINEI	NDT	.13000	P	.00070
CAPINEI	FIBRA	.09000	MS14	.05360
CAPINEI	CA	.00100		
CANA	VALUE	.05000	CAN	1.00000
CANA	MATSEC	.23000	PROTEI	.01000
CANA	NDT	.14000	P	.00040
CANA	FIBRA	.06700	MS14	.03400
CANA	CA	.00130		
SILMILHO	VALUE	.15000	MATSEC	.27000
SILMILHO	PROTEI	.02000	NDT	.18000
SILMILHO	P	.00060	FIBRA	.06500
SILMILHO	MS14	.02720	CA	.00100
FAOSSOS	VALUE	1.80000	MATSEC	.90000
FAOSSOS	P	.14000	MS14	- .12600
FAOSSOS	CA	.30000		
FOSBICAL	VALUE	18.00000	MATSEC	.90000
FOSBICAL	P	.18000	MS14	- .12600
FOSBICAL	CA	.23000		
CACO3	VALUE	.30000	MATSEC	.90000
CACO3	MS14	- .12600	CA	.38000
MDPS	VALUE	.80000	MATSEC	.89000
MDPS	PROTEI	.07800	NDT	.69000
MDPS	P	.00250	FIBRA	.10500
MDPS	MS14	- .01960	CA	.00010
MILHO	VALUE	1.50000	MATSEC	.88000
MILHO	PROTEI	.08500	NDT	.80000
MILHO	P	.00330	FIBRA	.02000
MILHO	MS14	- .10320	CA	.00020
FARTRICO	VALUE	.48000	MATSEC	.89000
FARTRICO	PROTEI	.15000	NDT	.63000
FARTRICO	P	.01240	FIBRA	.10000
FARTRICO	MS14	- .02460	FTC15	1.00000
FARTRICO	CA	.00140		



EXECUTJR. MPS/360 V2-M9

FARESOJA	VALUE		2.80000	MATSEC	.89000	
FARESOJA	PROTEI		.40000	NDT	.73000	
FARESOJA	P		.00670	FIBRA	.06000	
FARESOJA	MS14	-	.06460	CA	.00320	
FARFALGO	VALUE		2.20000	MATSEC	.91000	
FARFALGO	PROTEI		.28000	NDT	.63000	
FAREALGO	P		.01100	FIBRA	.11100	
FAREALGO	MS14	-	.01640	CA	.00150	
MELACO	VALUE		2.50000	MATSEC	.90000	
MELACO	PROTEI		.03800	NDT	.82600	
MELACO	P		.00100	MS14	-	.12600
MELACO	CA		.01060			
PURINA	VALUE		2.00000	MATSEC	.90000	
PURINA	PROTEI		.22000	NDT	.68000	
PURINA	P		.00060	MS14	-	.00600
PURINA	CA		.00140			
RASPAMAN	VALUE		.80000	MATSEC	.94000	
RASPAMAN	PROTEI		.02800	NDT	.80000	
RASPAMAN	P		.00250	FIBRA	.05000	
RASPAMAN	MS14	-	.08160	CA	.00090	
FARTRIVA	VALUE		1.00000	MATSEC	.89000	
FARTRIVA	PROTEI		.15000	NDT	.63000	
FARTRIVA	P		.01240	FIBRA	.10000	
FARTRIVA	MS14	-	.02460	CA	.00140	
RHS						
ALOY1	PAGOR		30.00000	CAP	15.00000	
ALOY1	CAN		5.00000	MATSEC	14.00000	
ALOY1	PROTEI		1.10000	NDT	5.00000	
ALOY1	P		.02400	FIBRA	2.00000	
ALOY1	FTC15		1.50000	CA	.06400	
RANGES						
ALI	CA		.03200			
BOUNDS						
UP PRODI	PASTO		60.00000			
ENDATA						

EXECUTOR. MPS/360 V2-M9

SETUP PROFILE

TIME = 0.18

RANGE = ALL
BOUND = PRODI

MATRIX1 ASSIGNED TO MATRIX1

ETA1 ASSIGNED TO ETA1

SCRATCH1 ASSIGNED TO SCRATCH1
SCRATCH2 ASSIGNED TO SCRATCH2

MAXIMUM PRICING NOT REQUIRED - MAXIMUM POSSIBLE 7

NO CYCLING

POOLS	NUMBER	SIZE	CORE
H.REG-BITS MAP			64
WORK REGIONS	9	120	1080
MATRIX BUFFERS	2	992	1984
ETA BUFFERS	4	2288	9152

	TOTAL	NORMAL	.FREE.	FIXED	BOUNDED
ROWS (LOG.VAR.)	12	10	1	0	1
COLUMNS (STR.VAR.)	16	15	0	0	1

131 ELEMENTS - DENSITY = 38.98 - 2 MATRIX RECORDS (WITHOUT RHS'S)

PRIMAL OBJ = VALUE / RHS = ALOY1

TIME = 0.22 MINS. PRICING 7
SCALE = .

ITER	NUMBER	VECTOR	VECTOR	REDUCED	SUM
NUMBER	INFEAS	OUT	IN	COST	INFEAS
M 1	2	5	23	756.000-	28158.1
2		6	17	556.432-	28140.0
M 3	1	12	13	1875.00	28139.9
M 4	0	9	27	8651.43-	.

FEASIBLE SOLUTION

PRIMAL OBJ = VALUE RHS = ALOY1

TIME = 0.24 MINS. PRICING 7
SCALE = .
SCALE RESET TO 1.00000

ITER	NUMBER	VECTOR	VECTOR	REDUCED	FUNCTION
NUMBER	NONOPT	OUT	IN	COST	VALUE
M 5	8	12	12	3.30990-	10.7130

		EXECUTOR.		MPS/360 V2-M9		
ITER	NUMBER	VECTOR	VECTOR	REDUCED	FUNCTION	
NUMBER	NONOPT	OUT	IN	COST	VALUE	
	6		2	9	4.04520-	8.01560
	7		23	20	440.231-	6.41646
	8		11	22	727.160-	5.83474
	9		17	19	3342.81-	5.73699
M	10	5	12	12	1.17176	5.69949
	11		3	14	388.271-	2.59333
	12		4	15	275.677-	1.85819
	13		20	16	166.117-	1.66575
	14		27	5	1.04832-	1.63288
M	15	3	12	12	.78947-	1.60762
	16		16	28	225.345-	1.57156
OPTIMAL SOLUTION						

EXECUTJR. MPS/360 V2-M9

SOLUTION (OPTIMAL)

TIME = 0.28 MINS. ITERATION NUMBER = 16

...NAME...	...ACTIVITY...	DEFINED AS
FUNCTIONAL	1.57156	VALUE
RESTRAINTS		ALDY1
BOUNDS....		PROD1
RANGES..		ALL





SECTION 1 - ROWS		EXECUTOR.		MPS/360 V2-M9		PAGE 10 - 77/031		
NUMBER	..ROW..	AT	..ACTIVITY...	SLACK	ACTIVITY	..LOWER LIMIT.	..UPPER LIMIT.	..DUAL ACTIVITY
1	VALUE	BS	1.57156		1.57156-	NONE	NONE	1.00000
2	PAGDR	UL	30.00000		.	NONE	30.00000	.12003
3	CAP	UL	15.00000		.	NONE	15.00000	.08734
4	CAN	UL	5.00000		.	NONE	5.00000	.01762
5	MATSEC	BS	13.55669		.44331	NONE	14.00000	.
6	PROTEI	LL	1.10000		.	NONE	NONE	6.65930-
7	NDT	BS	7.68400		2.68400-	1.10000	NONE	.
8	P	BS	.04982		.02582-	.02400	NONE	.
9	FIBRA	BS	4.14500		2.14500-	2.00000	NONE	.
10	MS14	BS	2.24306		2.24306-	.	NONE	.52000
11	FTC15	UL	1.50000		.	NONE	1.50000	.78947-
12	CA	LL	.03200		.03200	.03200	.06400	.



SECTION 2 - COLUMNS

NUMBER	.COLUMN.	AT	..ACTIVITY...	..INPUT COST..	..LOWER LIMIT.	..UPPER LIMIT.	..REDUCED COST.
13	PASTO	BS	30.00000	.02000	.	50.00000	.
14	CAPINEI	BS	15.00000	.05000	.	NONE	.
15	CANA	BS	5.00000	.15000	.	NONE	.01602
16	SILMILHO	LL	.	1.80000	.	NONE	1.56316
17	FAOSSOS	LL	.	18.00000	.	NONE	17.91942
18	FOSBRICAL	LL	.	.30000	.	NONE	.
19	CACOD3	BS	.00521	.80000	.	NONE	.29050
20	MDPS	LL	.	1.50000	.	NONE	.93380
21	MILHO	LL	.	.48000	.	NONE	.
22	FARTRICO	BS	1.50000	2.80000	.	NONE	.13375
23	FARESQJA	LL	.	2.20000	.	NONE	.33421
24	FAREALGO	LL	.	2.50000	.	NONE	2.23858
25	MELACO	LL	.	2.00000	.	NONE	.53385
26	PURINA	LL	.	.80000	.	NONE	.61283
27	RASPAMAN	LL	.	1.00000	.	NONE	.
28	FARTRIVA	BS	.30000	.	.	NONE	.

BIBLIOGRAFIA

- |¹| ABADIE, J. - ON THE KUHN-TUCKER THEOREM NON LINEAR PROGRAMMING - NORTH HOLLAND PUBLISHING COMPANY, AMSTERDAM (1967), PAGES.21-36.
- |²| BARNETT, S. - A SIMPLE CLASS OF PARAMETRIC LINEAR PROGRAMMING PROBLEMS - LOUGHBOROUGH UNIV.OF TECHNOLOGY, LEICESTERSHIRE, ENGLAND (1968).
- |³| BREGALDA, P.F.C.; OLIVEIRA, A.A.F. e BORNSTEIN, C.T. - INTRODUÇÃO À PROGRAMAÇÃO LINEAR - UNIV.FED.DO RIO DE JANEIRO, COPPE/UFRJ, RIO DE JANEIRO(1979).
- |⁴| CHARNES, A. e COOPER, W.W. - SYSTEMS EVALUATION AND REPRICING THEOREMS - MANAGEMENT SCIENCE, VOL.9(1962), PAGES.209-228.
- |⁵| COURTILOT, M. - PROGRAMMATION LINÉAIRE.ETUDE DE LA MODIFICATION DE TOUS LES PARAMETERS - CR DE SÉANCES DE L'ACADEMIE DE SÉANCES, VOL.247, N° 7 (1958), PAGES.670-673.
- |⁶| DANTZIG G.B. - LINEAR PROGRAMMING AND EXTENSIONS - PRINCENTON UNIV.PRESS, PRINCENTON, NEW JERSEY (1963).
- |⁷| FENCHEL, W. - CONVEX CONES, SETS AND FUNCTIONS - LECTURE NOTES, PRINCENTON UNIV., ARMED SERVICES TECHNICAL INFORMATION AGENCY (1953).
- |⁸| FLAVELL, R. e SALKIN, G.R. - AN APPROACH TO SENSITIVITY ANALYSIS - OPERATION RESEARCH QUARTELEY, VOL.26, N° 4 (1975), PAGES.857-866.

- |⁹| GAL, T. - A METHOD FOR SISTEMATIC SIMULTANEOUS
PARAMETRIZATION OF VECTORS b and C IN LP-PROBLEMS -
EKONOMICKO MATEMATICKY OBZOR, VOL.6, N° 2 (1970), PÁGS.
161-175.
- |¹⁰| GAL, T. e NEDOMA, J. - MULTIPARAMETRIC LINEAR
PROGRAMMING - MANAGEMENT SCIENCE, VOL.18, N° 7(1972),
PÁGS.406-410.
- |¹¹| GERSTENHABER, M. - THEORY OF CONVEX POLYHEDRAL CONES -
COWLES COMISSION MONOGRAPH, VOL.13(1951), NEW YORK,
PÁGS.298-316.
- |¹²| GOLDMAN, G. e TUCKER, A.W. - POLYHEDRAL CONVEX CONES -
PROCEEDINGS OF THE PRINCENTON SYMPOSIUM ON MATHEMATICS
PROGRAMMING, UNIV.OF PRINCENTON, PÁG.20.
- |¹³| HADLEY, G. - ALGEBRA LINEAL - FONDO EDUCATIVO INTERAMERI-
CANO S.A. (1969).
- |¹⁴| HOFFMAN, A.J. - ON APROXIMATIVE SOLUTIONS OF SYSTEMS OF
LINEAR INEQUALITIES - J.RES.NAT.BUR.STANDARDS, VOL.49
(1952) - PÁGS.263-265.
- |¹⁵| HOFFMAN, K. e KUNZE, R. - ÁLGEBRA LINEAR - EDITORA DA
UNIV.DE SÃO PAULO, EDITORA POLÍGONO, SÃO PAULO (1971).
- |¹⁶| KLATZMANN, J. e MATTHYS, G. - A GRAPHICAL METHOD FOR
SOLVING CERTAIN TYPES OF LARGE LINEAR PROGRAMS -
ECONOMETRICA, VOL.34, N° 2 (1966), PÁGS.481-490.
- |¹⁷| KOHN, J.J. - LINEAR INEQUALITIES AND POLYHEDRAL CONVEX
CONES - OFFICE OF NAVAL RESEARCH LOGISTICS PROJECT REPORT,
DEPARTMENT OF MATHEMATIC, PRINCENTON UNIVERSITY (1956).

- |¹⁸| KORTANEK, K.O. e ROM, W.O. - CLASSIFICATION SCHEMES FOR THE STRONG DUALITY OF LINEAR PROGRAMMING OVER CONES - OPUS.RES., VOL.19, N° 7 (1971), PÁGS.1571-1585.
- |¹⁹| KUHN, H.W. - SOLVABILITY AND CONSISTENCY FOR SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS AND INEQUALITIES - AMER.MATH.MONTHLY, VOL.63 (1956), PÁGS.217-232.
- |²⁰| KUHN, H.W. e TUCKER, A.W. - LINEAR INEQUALITIES AND RELATED SYSTEMS - ANNALS OF MATHEMATICS STUDIES, N° 38, PRINCENTON UNIV.PRESS, PRINCENTON, NEW JERSEY (1956).
- |²¹| KUHN, H.W. e TUCKER, A.W. - NONLINEAR PROGRAMMING - PROCEEDINGS OF THE SECOND BERKELEY SYMPOSIUM ON MATHEMATICAL STATISTICS AND PROBABILITY, UNIV.OF CALIFORNIA PRESS, BERKELEY, CALIFORNIA(1951), PÁGS.481-492.
- |²²| KUN, C. - PARAMETERIZING AN ACTIVITY VECTOR IN LINEAR PROGRAMMING - OPUS.RES., VOL.19, N° 7 (1971), PÁGS.1632-1646.
- |²³| KURATA, R. - NOTES ON PARAMETRIC PROGRAMMING - J.OPER. RES.JAPAN, VOL.8, N° 3 (1966), PÁGS.150-153.
- |²⁴| LIMA, E.L. - ELEMENTOS DE TOPOLOGIA GERAL - AO LIVRO TÉCNICO EDITORA S.A. E EDITORA DA UNIV.DE SÃO PAULO, RIO DE JANEIRO (1970).
- |²⁵| MANGASARIAN, O.L. - NON LINEAR PROGRAMMING - TATA MCGRAW-HILL PUBLISHING COMPANY LTD., BOMBAY, NEW DELHI (1969).
- |²⁶| MANAS, J. e NEDOMA, J. - FINDING ALL VERTICES OF A CONVEX POLYHEDRON-NUMERISCHE MATH., VOL.12 (1968), PÁGS.226-229.

- |²⁷| MONTEIRO, L.H.J. - ELEMENTOS DE ÁLGEBRA - AO LIVRO TÉCNICO S.A., RIO DE JANEIRO (1969).
- |²⁸| MOTZKIN, T.S. e SCHOENBERG, I.J. - THE RELAXATION METHOD FOR LINEAR INEQUALITIES - CANAD.J.MATH., VOL.6 (1954) - PÁGS.393-404.
- |²⁹| OBANDO, F.E.V. - SISTEMA DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA (MPS/360) - COMPANHIA SIDERÚRGICA NACIONAL.
- |³⁰| SAATY, G. - PARAMETRIC OBJECTIVE FUNCTION - JOURNAL OF THE OPERATION RESEARCH SOCIETY OF AMERICA, VOL.3 (1955), PART.II.
- |³¹| SAATY, G. - THE NUMBER OF VERTICES OF A POLYHEDRON - AMERICAN MATHEMATICAL MONTHLY, VOL.62 (1955).
- |³²| SAKAROVITCH, M. - NOTES ON LINEAR PROGRAMMING - VAN NOSTRAND REINHOLD Co., NEW YORK (1972).
- |³³| SHISHA, O. - INEQUALITIES III - PROCEEDINGS OF THE THIRD SYMPOSIUM ON INEQUALITIES HELD AT THE UNIV.OF CALIFORNIA, ACADEMIC PRESS, NEW YORK (1972).
- |³⁴| SIMONNARD, M. - LINEAR PROGRAMMING - PRENTICE HALL INC., ENGLEWOOD, NEW YORK (1972).
- |³⁵| SIMONS, E. - A NOTE ON PARAMETRIC LINEAR PROGRAMMING - MANAGEMENT SCIENCE, VOL.8, Nº 3 (1962), PÁGS.355-358.
- |³⁶| STOKES, R.W. - A GEOMETRIC THEORY OF SOLUTION OF LINEAR INEQUALITIES - TRANS.AMER.MATH.SOC., VOL.33 (1931), PÁGS.782-805.
- |³⁷| TUCKER, A.W. - LINEAR INEQUALITIES AND CONVEX POLYHEDRAL SETS - PROCEEDINGS OF THE SECOND SYMPOSIUM IN LINEAR PROGRAMMING, VOL.12, U.S.AIR FORCE, WASHINGTON (1955).

- |³⁸| VAN DE PANNE, C. e WHINSTON, A. - AN ALTERNATIVE
INTERPRETATION OF THE PRIMAL-DUAL METHOD AND SOME
RELATED PARAMETRIC METHODS - INT.ECON.REV.,VOL.9, N° 1
(1968), PÁGS.87-99.
- |³⁹| YU, P.L. e ZELENY, M. - LINEAR MULTIPARAMETRIC
PROGRAMMING BY MULTICRITERIA SIMPLEX METHOD - MANAGEMENT
SCIENCE, VOL.23, N° 2 (1976), PÁGS.159-169.