

MATRÓIDES E ALGORITMOS GREEDY

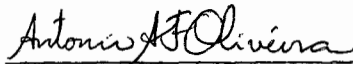
Geraldo Robson Mateus

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE
JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

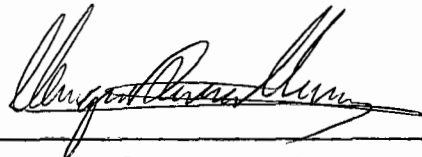
Aprovada por:



Cláudio Thomás Bornstein



Antonio Alberto F. de Oliveira



Henrique Pacca L. Luna

RIO DE JANEIRO - BRASIL

SETEMBRO DE 1980

MATEUS, GERALDO ROBSON

Matr̄oides e Algoritmos Greedy |Rio de Janeiro| 1980.

ix, 249 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas, 1980)

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro, Programa de Engenharia de Sistemas.

1. Matr̄oides e Algoritmos Greedy I. COPPE/UFRJ II. T̄itulo(S̄erie).

AGRADECIMENTOS

A todos que de algum modo colaboraram na execução deste trabalho. Em especial ao Professor Cláudio Thomás Bornstein pelo incentivo e excelente orientação e aos Professores Antonio Alberto F. Oliveira e Nelson Maculan Filho pelo apoio e sugestões.

RESUMO

No trabalho são apresentados os algoritmos greedy ou gulosos bem como seu embasamento teórico. Estes algoritmos visam a resolução de problemas em Combinatória e podem ser aplicados de forma bastante eficiente a problemas de matrôides. Devido a este fato é apresentado num capítulo alguns conceitos básicos da teoria de matrôides. Em seguida é mostrada a aplicação dos algoritmos gulosos a problemas de matrôides sendo também abordados suas extensões como polimatrôides e conjuntos gulosos. Para estes problemas os algoritmos determinam a solução ótima. Finalmente é apresentado um capítulo de problemas onde os algoritmos gulosos funcionam como heurística, possibilitando o desenvolvimento de limites para a solução ótima.

ABSTRACT

Greedy algorithms are presented as well as the basic theory involved. These algorithms aim solving problems in Combinatorics and may be applied in a very efficient way to matroids. For that reason a chapter on elements of matroid theory is presented. Then we introduce the greedy algorithm and its application to matroids and extensions such as polimatroids and greedy sets. For these problems the greedy algorithm determines an exact optimal solution. At last, we present a chapter with problems where the greedy algorithm works as a heuristic, allowing also to establish limits for the optimal solution.

ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO</u>	1
<u>CAPÍTULO II - MATRÕIDE</u>	10
1 - Introdução.....	10
2 - Definições.....	16
2.1 - Posto de $S - r(S)$	16
2.2 - Base do Matrõide.....	23
2.3 - Circuitos.....	28
2.4 - Fecho.....	32
3 - Definições de Matrõides.....	35
3.1 - Definição em Termos de Posto.....	35
3.2 - Definição em Termos de Base.....	42
3.3 - Outras Definições.....	48
3.3.1 - Definição em Termos de Circuitos.....	48
3.3.2 - Definição em Termos de Fecho.....	48
4.- Exemplo.....	49
5 - Conclusão.....	55
<u>CAPÍTULO III - ALGORITMOS GULOSOS APLICADOS A MATRÕIDES E POLIMATRÕIDES</u>	56
1 - Introdução.....	56
2 - Algoritmos Gulosos Aplicados a Matrõides.....	64

	<u>Pág.</u>
2.1 - Um Algoritmo Guloso Geral para Matr̄oides.....	64
2.2 - Alguns Algoritmos Gulosos Específicos para Matr̄oides.....	73
2.3 - Matr̄oide como Modelo de Otimização.....	78
3 - Algoritmos Gulosos Aplicados a Polimatr̄oides.....	92
3.1 - Introdução.....	92
3.2 - Definição de Polimatr̄oides.....	94
3.3 - Algoritmos Gulosos Aplicados a Polimatr̄oides.....	118
4 - Um Algoritmo Guloso Heurístico.....	121
4.1 - Introdução.....	121
4.2 - O Algoritmo Heurístico.....	124
4.3 - O Cone Guloso.....	129
4.4 - Caracterização dos Conjuntos Gulosos.....	138
4.5 - Comparação entre Algoritmos.....	158
4.6 - Conclusão.....	159
<u>CAPÍTULO IV - ALGORITMOS GULOSOS HEURÍSTICOS.....</u>	<u>161</u>
1 - Introdução.....	161
2 - Problema da Mochila.....	163
3 - Problema de Recobrimento.....	169
3.1 - Apresentação do Problema.....	169
3.2 - Algoritmo Guloso Heurístico.....	172
4 - Problemas com Funções Objeto Submodulares.....	178
4.1 - Introdução.....	178
4.2 - Definição de Modelos.....	179

	<u>Pág.</u>
4.3 - Um Algoritmo Guloso Heurístico.....	192
4.4 - Aplicações.....	194
5 - Conclusão.....	202
<u>APÊNDICE A - RETICULADOS.....</u>	<u>203</u>
1 - Ordem Parcial.....	203
2 - Conjunto Parcialmente Ordenado.....	206
3 - Reticulados.....	210
4 - Reticulados de Matrôides.....	214
<u>APÊNDICE B - UM ALGORITMO GULOSO PARA MATRÔIDES GRÁFI-</u> <u>COS.....</u>	<u>222</u>
<u>APÊNDICE C - INTERSEÇÃO DE MATRÔIDES.....</u>	<u>229</u>
<u>APÊNDICE D - SUBMODULARIDADE.....</u>	<u>235</u>
<u>BIBLIOGRAFIA.....</u>	<u>246</u>

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O objetivo deste texto é introduzir os elementos básicos da teoria de matrôides e algoritmos greedy. Como ramo da combinatória esta teoria tem sido destacada com muita frequência nos últimos anos.

Após contatos no exterior, com breves informações a respeito da teoria, essa pesquisa tinha como objetivo inicial abrir uma nova frente de estudos para os problemas de localização de armazéns. Dado um conjunto finito de ℓ centros de produção, n centros de demanda, queremos escolher alguns dentre os m locais candidatos dados, localizando e dimensionando os armazéns correspondentes, de modo a minimizar custos de transporte e armazenagem. Figura (I-1).

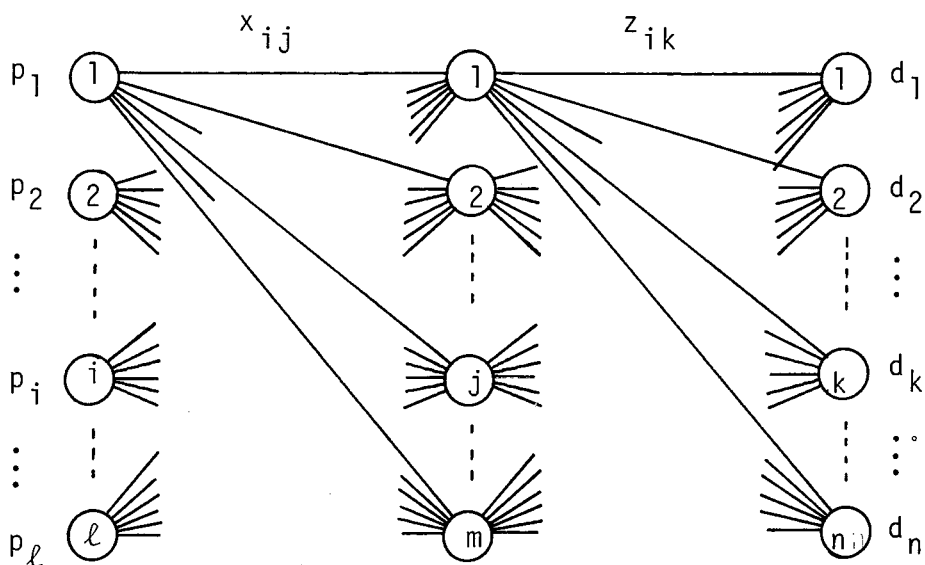


Fig. I-1. Problema de localização

O modelo consiste em:

$$\min \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^m f(x_{ij}) + \sum_{j=1}^m g(t_j) + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n h(z_{jk})$$

$$\text{s.a.} \sum_{j=1}^m x_{ij} = p_i, \quad i = 1, \dots, \ell$$

$$\sum_{j=1}^m z_{jk} = d_k, \quad k = 1, \dots, n$$

$$\sum_{i=1}^{\ell} x_{ij} - \sum_{k=1}^n z_{jk} = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1, \dots, \ell; \quad j = 1, \dots, m$$

$$z_{jk} \geq 0, \quad j = 1, \dots, m; \quad k = 1, \dots, n$$

onde:

x_{ij} = fluxo do centro de produção i ao armazém j

p_i = produção no centro i

z_{jk} = fluxo do armazém j ao centro de demanda k

d_k = demanda no centro k

$t_j = \sum_{i=1}^{\ell} x_{ij}$ = fluxo total passando pelo armazém j

$f(x_{ij})$ = função custo do centro de produção i ao armazém j

$g(t_j)$ = função custo de armazenagem para o armazém j

$h(z_{ik})$ = função custo do armazém j ao centro de demanda k .

As abordagens utilizadas na resolução desses problemas incluem métodos heurísticos, Branch-and-Bound, método de Benders, programação inteira, côncava, etc. O objetivo inicial desta tese era fazer dos algoritmos greedy mais uma opção de tratamento do problema de localização. Além de ser um novo enfoque, a pesquisa se daria em uma teoria até então desconhecida em nosso meio. Com isso, o trabalho consistia não só em tentar resolver problemas de localização, bem como elaborar um texto didático e introdutório do assunto.

O total desconhecimento do assunto e de bibliografia específica tornou-se um problema inicial. Foi feita uma seleção de bibliografia de modo que esta tivesse um encadeamento lógico, sequencial, com uma visão global. Como o assunto é muito vasto e existem limitações da teoria, que ressaltaremos posteriormente, não atingimos o objetivo inicial que era encontrar um algoritmo eficiente para problemas gerais de localização. Resolvemos o problema de localização, porém sem atingir o problema geral definido anteriormente.

A teoria de matr̄oides surgiu da tentativa de unificar, de certa maneira a álgebra e a teoria dos grafos. Hassler Whitney após vários anos de estudos sobre teoria dos grafos notou similaridades entre as idéias de independência e posto em teoria dos grafos a independência linear e dimensão no estudo de espaços vetoriais. Em seu paper básico, [25], Whitney usa o conceito de matr̄oides para formalizar essas similaridades.

Sejam A_1, A_2, \dots, A_n colunas de uma matriz A . Qualquer subconjunto dessas colunas é linearmente independente ou dependente. Notamos que os subconjuntos independentes satisfazem as seguintes propriedades:

- (a) Qualquer subconjunto de um conjunto independente é independente.
- (b) Se S_p e S_{p+1} são conjuntos independentes com p e $p+1$ elementos respectivamente então S_p com alguma coluna de S_{p+1} forma um conjunto independente com $p+1$ elementos.

Whitney verificou que outros sistemas, não representados por matrizes, satisfaziam as propriedades. Com isto, aos sistemas algébricos que satisfazem as propriedades (a) e (b) ele denominou um matr̄oide. Trata-se portanto de uma generalização das propriedades de matriz. Assim, um matr̄oide é essencialmente um conjunto sobre o qual é definido uma "estrutura de independência". Essa "estrutura de independência" é uma generalização

da noção de independência e dependência linear. Ao mesmo tempo, B. L. van der Waerden também encontrou a idéia de matrôides enquanto formalizava as definições de independência linear e algébrica.

Com exceção de trabalhos isolados e as publicações de Rado sobre aplicações de matrôides [20] e matrôides in finitos [21], o assunto permaneceu ignorado por longo período. Novo impulso foi dado por Tutte com sua publicação fundamental sobre matrôides e grafos [22] e Rado que estudou o problema de representação de matrôides [19]. Desde então, o interesse em matrôides e suas aplicações em combinatória tem acelerado. Em 1965, Edmonds e Fulkerson descobrem uma importante classe de matrôides, os matrôides transversais, responsáveis por mais re sultados [7].

Os matrôides estão intimamente ligados aos algoritmos Greedy ou Gloutons e que denominaremos de gulosos. Estes algoritmos serão objeto de estudos em grande parte do texto. Dado um conjunto finito E e uma função de conjuntos f definida sobre os subconjuntos de E , os problemas a serem resolvidos consistem em selecionar um subconjunto $S^* \subseteq E$ tal que

$$f(S^*) = \max_{S \subseteq E} f(S)$$

onde S^* satisfaz a uma "condição" definida sobre E . Muitos pro blemas práticos encaixam-se neste modelo. A idéia intuitiva bã

sica do guloso é selecionar os elementos de E em ordem decrescente de pesos obtendo um conjunto S^* . Seleciona a cada passo um elemento i de maior peso que anexado a S^i forneça S^{i+1} mantendo satisfeita uma "condição".

O maior interesse dessa teoria concentra-se no grande número de problemas combinatórios enfocados. Fornece algoritmos geralmente eficientes para problemas em teoria dos grafos, fluxos em redes, coloração de arcos, programação linear, etc. Estes algoritmos podem ser exatos ou heurísticos.

Para o caso específico de matrôides, estes algoritmos são exatos e fornecem soluções ótimas. Neste caso a "condição" a ser satisfeita pelo subconjunto ótimo S^* é dada pela "estrutura de independência" definida sobre o matrôide.

Em geral, no entanto, estes algoritmos são heurísticos sendo bastante flexíveis e se aplicam a problemas tais como: problema da mochila, problema de recobrimento, problema de localização não-capacitado, problemas de interseção de matrôides, etc.

É uma teoria recente onde muito está para ser feito, tendo já sido obtidos alguns resultados bons. Porém, devemos ressaltar que provavelmente devido a estrutura matemática de matrôides, que é pouco flexível, existem poucas aplicações no campo prático. Os exemplos práticos encontrados na literatura são normalmente pouco interessantes. E os algoritmos gulosos talvez por serem de estrutura excessivamente simples,

forneem soluções ótimas para problemas bastante restritos, dentro de estruturas bem definidas. Consequentemente, para problemas maiores o guloso é um algoritmo heurístico. Para estes casos são definidos limites permitindo verificar quão distante está a solução do guloso da solução ótima.

O texto é dividido basicamente em três partes. Na primeira parte, capítulo II, é tratada a teoria de matrôides, conceitos, definições, teoremas, tipos e exemplos de matrôides. Sem o intuito de fechar o assunto trata-se apenas de uma introdução onde apresentamos os principais resultados sendo que nem todos são utilizados posteriormente.

Na segunda parte, capítulo III, é apresentado a idéia intuitiva do guloso, os primeiros teoremas e suas aplicações. O capítulo se resume em três modelos e três algoritmos. O primeiro, um modelo de otimização para matrôides e um algoritmo guloso exato correspondente. O segundo, um modelo de otimização para polimatrôides e um algoritmo guloso exato correspondente. Esta nova estrutura será vista como uma extensão de matrôides, englobando o primeiro modelo. O terceiro modelo consiste em:

$$\begin{aligned} \max \quad & c \cdot x \\ & x \in U \end{aligned}$$

onde U é um conjunto compacto.

O algoritmo guloso para este modelo, dependendo das características do conjunto compacto U pode ser exato ou heurístico. Apesar de desvinculado das estruturas anteriores, este algoritmo é exato para todos os problemas que nelas se encaixam, englobando os dois primeiros problemas.

Basicamente a concepção dos três algoritmos é a mesma. O que se pode notar neste capítulo é que o que se faz é procurar um modelo ou uma estrutura (matróide, polimatróide, ...) que foi cada vez mais sendo sofisticada, para a qual esta concepção básica do algoritmo desse resultados satisfatórios. Os três algoritmos são somente uma adaptação da mesma concepção básica a diversas estruturas.

A terceira parte, capítulo IV, é dedicada aos algoritmos gulosos heurísticos. Neste capítulo serão enfocados alguns algoritmos heurísticos aplicados a problemas específicos tais como: problema da mochila, recobrimento, localização e problemas com funções submodulares. Também um capítulo introdutório para o assunto que é bastante vasto e muito está em aberto.

Finalmente, são apresentados os apêndices para complementar o texto. Destaque aos apêndices A e D sobre reticulados e submodularidade. Em ambos os casos temos uma introdução da teoria suficiente para sua utilização no texto.

Procuraremos na medida do possível associar es
ta teoria a modelos usuais em Pesquisa Operacional.

CAPÍTULO IIMATRÓIDES1 - INTRODUÇÃO

Um ramo da combinatória, a teoria de matrôides surgiu da tentativa de unificar, de uma certa forma, a álgebra e a teoria dos grafos. Consiste, essencialmente, na generalização dos conceitos de dependência e independência linear.

A teoria teve sua origem em 1930 quando B. L. van der Waerden em seu "Moderne Algebra" forneceu os primeiros axiomas relativos a dependência linear e algébrica. Hassler Whitney, em 1935, [20], após estudos em teoria dos grafos, notou similaridades entre as idéias de independência e posto na teoria dos grafos a independência linear e dimensão em espaços vetoriais. Whitney fez a primeira utilização do conceito de matrôide, formalizando essas similaridades.

Uma generalização abstrata de matriz, um matrôide é um conjunto sobre o qual está definida uma "estrutura de independência". O trabalho se prende apenas a matrôides finitos ou definidos sobre conjuntos finitos.

MATRÓIDE $M = (E, F)$ é uma estrutura em que E é um conjunto finito de elementos e F é uma família de partes de E que verificam:

(I1) $\emptyset \in F$

(I2) $S \in F$ e $R \subseteq S$ então $R \in F$

(I3) Se R e S são membros de F com $|S| = |R| + 1$ então existe $s \in (S - R)$ tal que $(R \cup \{s\}) \in F$.

Por analogia a álgebra linear, os elementos de F são denominados subconjuntos independentes de E . Estes elementos satisfazem a uma "estrutura de independência" definida sobre E . Uma noção de independência geral que pode ser bastante diferente da clássica independência linear.

EXEMPLO 1.1

Seja E um espaço vetorial finito e seja F a família de subconjuntos linearmente independentes de vetores de E . Então (E, F) é um matrôide. Este matrôide cuja "estrutura de independência" consiste da independência linear é um MATRÔIDE VETORIAL sobre E . Seja $E = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ um conjunto de vetores no \mathbb{R}^2 :

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, e_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$F = \{\{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_3\}, \{e_2, e_4\}, \{e_3, e_4\}, \emptyset\}$$

A definição (I1-I3) de matrõide é facilmente verificada. F é o conjunto de subconjuntos linearmente independentes (LI) de E em união com o conjunto vazio (I1). Todo subconjunto de um conjunto LI é LI (I2). A condição (I3) é satisfeita uma vez que se $S \in F$ e $R \in F$, $|S| = |R| + 1$, se não existe $s \in (S-R)$ tal que $R \cup \{s\} \in F$, todo elemento $e \in (S-R)$ pode ser obtido por uma combinação linear dos elementos de R , ou, é linearmente dependente (LD) em R . Portanto são LD's entre si, o que contradiz o fato de $S \in F$.

EXEMPLO 1.2

Seja E o conjunto de colunas de uma matriz. Seja F uma família correspondente aos subconjuntos de colunas LI's da matriz. Então (E, F) é um MATRÕIDE MATRICIAL. Seja a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

de colunas $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$.

O matrõide matricial $M = (E, F)$ é definido:

$$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$$

$$F = \{\{e_1\}, \{e_2\}, \dots, \{e_5\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \dots, \{e_4, e_5\}, \\ \{e_1, e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_4\}, \dots, \{e_3, e_4, e_5\}, \emptyset\}$$

Na matriz os conjuntos LD's são todos os subconjuntos de quatro colunas e o próprio conjunto E.

Este matrôide \bar{e} é um caso particular de matrôide vetorial, uma vez que uma interpretação geométrica pode ser obtida. Consideramos uma matriz A (mxn) no espaço euclidiano de dimensão m. A cada coluna de A corresponderá um ponto do espaço de coordenadas $(a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi})$.

EXEMPLO 1.3

Seja um grafo G. Seja $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ o conjunto de arcos de G. Seja F o conjunto de subconjuntos de E tal que para todo $S \subseteq E$, $S \in F$ se e só se S não contém um ciclo de G. F é o conjunto de subconjuntos independentes (não formam ciclos) de um matrôide sobre E, denominado MATRÔIDE GRÁFICO. Seja o grafo G, dado pela figura (II.1). O conjunto de arcos é dado por $E = \{e_1, \dots, e_6\}$

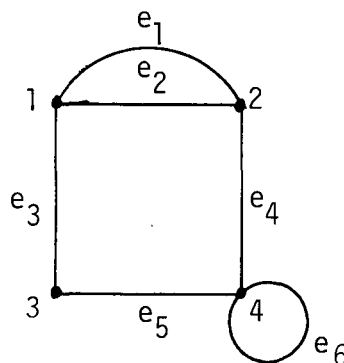


Fig. II.1 - Exemplo 1.3

$$F = \{\{e_1\}, \{e_2\}, \dots, \{e_5\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_1, e_5\}, \{e_2, e_3\}, \\ \{e_2, e_4\}, \{e_2, e_5\}, \{e_3, e_4\}, \{e_3, e_5\}, \{e_4, e_5\}, \{e_1, e_3, e_4\}, \dots, \\ \{e_2, e_3, e_4\}, \dots, \{e_3, e_4, e_5\}\}$$

Os subconjuntos $\{e_6\}$, $\{e_1, e_2\}$, $\{e_1, e_3, e_4, e_5\}$, $\{e_2, e_3, e_4, e_5\}$ e todos os subconjuntos contendo $\{e_6\}$ ou $\{e_1, e_2\}$ não são independentes, pois contêm ciclos.

Podemos verificar que cada elemento de F corresponde a uma floresta em G .

EXEMPLO 1.4

Seja E um conjunto de cardinalidade n , $|E| = n$. Seja F o conjunto de todos os subconjuntos de E com cardinalidade menor ou igual a $k < n$. Então $M = (E, F)$ é um MATRÓIDE UNIFORME, $U_{k,n}$. $F = \{S \subseteq E \mid |S| \leq k\}$. Neste caso a "estrutura de independência" consiste em cardinalidade inferior ou igual a k .

A definição (I1-I3) é facilmente verificada.

Um exemplo de matrôide uniforme é o $U_{2,4}$ sobre $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $k = 2$, $n = 4$, $F = \{S \subseteq E \mid |S| \leq 2\}$.
 $F = \{\{e_1\}, \dots, \{e_4\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \dots, \{e_3, e_4\}, \emptyset\}$

Este matrôide é também um exemplo de matrôide não-gráfico. Pois se E é o conjunto de arcos, três representações gráficas são pos

síveis (figura II.2),

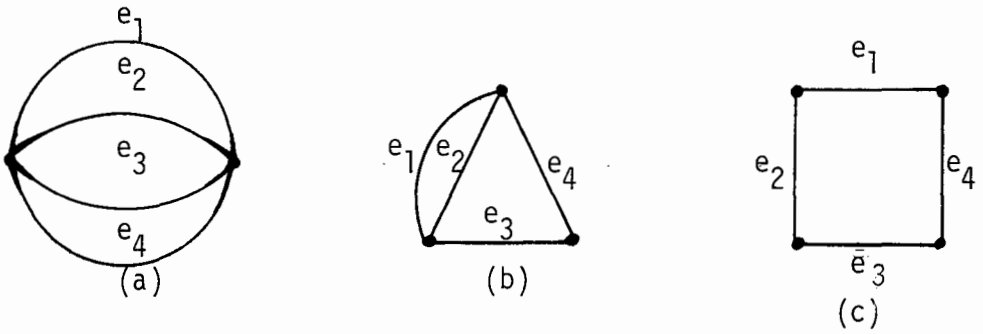


Fig. II.2 - Exemplo 1.4

onde nenhuma satisfaz as condições de um matrõide uniforme, $U_{2,4}$. No caso (a) os elementos de F possuem cardinalidade unitária. No caso (b), o conjunto de cardinalidade dois $\{e_1, e_2\}$ forma um ciclo. No caso (c) os conjuntos de três elementos são independentes no grafo G .

Em todos os exemplos \tilde{e} definido um conjunto finito E e a "estrutura de independência" atuando sobre ele. Com isto conceitos, definições e teoremas podem ser anunciados em analogia a álgebra e a teoria dos grafos.

2 - DEFINIÇÕES

Definido o matrôide $M = (E, F)$ alguns conceitos podem ser caracterizados.

Seja um conjunto E , um conjunto sobre o qual definimos uma propriedade. Seja o MÁXIMO (MÍNIMO) ou MÁXIMAL (MINIMAL) subconjunto $R \subseteq E$ aquele tal que não existe um outro subconjunto $R' \subseteq E$ que contém (contido em) R propriamente, satisfazendo a mesma propriedade. Seja $E = \{0, 2, \dots, 10\}$ conjunto dos pares menores ou iguais a 10. O subconjunto maximal (minimal) $R \subseteq E$ contendo pares menores que 7 é $R = \{0, 2, 4, 6\}$ ($R = \{0\}$, $R = \{2\}$, $R = \{4\}$, $R = \{6\}$, todos minimais)

2.1 - Posto de S - $r(S)$

Seja o matrôide $M = (E, F)$. A função posto de um subconjunto $S \subseteq E$, é a cardinalidade do máximo subconjunto independente de S . Ou seja:

$$r(S) = \max(|R| \mid R \subseteq S, R \in F) = \max_{R \in F} |R \cap S|$$

EXEMPLO 2.1.1

Para o matrôide matricial, o posto de um subconjunto $S \subseteq E$ coincide com o posto da matriz composta pelas colunas contidas em S . Assim no exemplo (1.2):

$$r(\{e_1\}) = \dots = r(\{e_5\}) = 1$$

$$r(\{e_1, e_2\}) = \dots = r(\{e_4, e_5\}) = 2$$

$$r(\{e_1, e_2, e_3\}) = \dots = r(\{e_3, e_4, e_5\}) = r(\{e_1, e_2, e_3, e_4\}) = \dots =$$

$$r(\{e_2, e_3, e_4, e_5\}) = 3$$

$$r(\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}) = r(E) = 3.$$

EXEMPLO 2.1.2

Para o matrõide gráfico o posto de um subconjunto $S \subseteq E$ é a cardinalidade da máxima floresta contida em S . Para o exemplo (1.3):

$$r(\{e_1\}) = \dots = r(\{e_5\}) = 1$$

$$r(\{e_1, e_3\}) = \dots = r(\{e_4, e_5\}) = 2$$

$$r(\{e_1, e_3, e_4\}) = \dots = r(\{e_3, e_4, e_5\}) = 3$$

$$r(\{e_6\}) = 0$$

$$r(\{e_1, e_2\}) = r(\{e_1, e_2, e_6\}) = r(\{e_1, e_6\}) = \dots = r(\{e_5, e_6\}) = 1$$

$$r(\{e_1, e_2, e_3\}) = \dots = r(\{e_1, e_2, e_5\}) = 2$$

$$r(\{e_1, e_3, e_4, e_5\}) = r(\{e_2, e_3, e_4, e_5\}) = 3$$

EXEMPLO 2.1.3

Para o matrõide uniforme $U_{k,n}$, temos:

$$r(S) = \begin{cases} |S|, & |S| \leq k \\ k, & |S| > k \end{cases}, \quad \forall S \subseteq E$$

ou seja $r_k(S) := \min(k, |S|)$, $\forall S \subseteq E$

Para o exemplo (1.4) temos:

$$r(\{e_1\}) = \dots = r(\{e_4\}) = 1$$

$$r(\{e_1, e_2\}) = \dots = r(\{e_3, e_4\}) = 2$$

$$r(\{e_1, e_2, e_3\}) = \dots = r(\{e_2, e_3, e_4\}) = 2$$

$$r(\{e_1, e_2, e_3, e_4\}) = r(E) = 2$$

TEOREMA 2.1.1

Se R e S são membros de F com $|S| = |R| + k$, $k \geq 0$, então existe $s_1, s_2, \dots, s_k \in (S-R)$ tal que $(R \cup \{s_1\} \cup \dots \cup \{s_k\}) \in F$

Demonstração: Seja $R \in F$ e $S \in F$ tal que $|S| = |R| + k$, $k \geq 0$.

Seja $S_1 \subseteq S$ tal que $|S_1| = |R| + 1$. Por (I2) S_1 é independente, $S_1 \in F$. Logo, por (I3), então existe $s_1 \in (S_1 - R)$ tal que $(R \cup \{s_1\}) \in F$. Por outro lado, como $s_1 \notin R$ então $|R \cup \{s_1\}| = |R| + 1$.

A demonstração prossegue por indução.

Seja $S_{j-1} \subseteq S$ tal que $|S_{j-1}| = |R| + j-1$ para $j \leq k$.

Suponhamos existe $s_1, \dots, s_{j-1} \in (S_{j-1}-R)$ de modo que:

$$(R \cup \{s_1\} \cup \dots \cup \{s_{j-1}\}) \in F \quad (\text{II.1})$$

e onde

$$|R \cup \{s_1\} \cup \dots \cup \{s_{j-1}\}| = |R| + j-1 \quad (\text{II.2})$$

Seja agora $S_j \subseteq S$ tal que $|S_j| = |R| + j$, o que é sempre possível pois $|S| = |R| + k$ e $j \leq k$. Então por (I2) $S_j \in F$.

Devido a (II.1), (II.2), por (I3), então existe

$$s_j \in (S_j - (R \cup \{s_1\} \cup \dots \cup \{s_{j-1}\})) \quad (\text{II.3})$$

tal que $(R \cup \{s_1\} \cup \dots \cup \{s_j\}) \in F$.

Como, por suposição, $s_1, \dots, s_{j-1} \in (S_{j-1}-R) \subseteq (S-R)$ e devido a (II.3) $s_j \in (S_j-R) \subseteq (S-R)$ então $s_1, \dots, s_j \in (S-R)$, o que completa a demonstração. ■

TEOREMA 2.1.2

Se $M = (E, F)$ é um matrôide, a função posto, r , de subconjuntos de E , verifica:

(a) $r(\emptyset) = 0$

$$(b) \forall R \subset S \subseteq E, r(R) \leq r(S)$$

$$(c) \forall R, S \subseteq E, r(R) + r(S) \geq r(R \cup S) + r(R \cap S)$$

Demonstração: As propriedades (a) e (b) são evidentes pela definição de posto. Basta mostrar (c).

Seja o matrôide $M = (E, F)$ e os conjuntos $R \subseteq E$ e $S \subseteq E$. Seja F_1 o máximo conjunto independente em $(R \cap S)$ tal que $|F_1| = r(R \cap S)$. Seja F_2 o máximo subconjunto independente em $(R \cup S)$ tal que $|F_2| = r(R \cup S)$.

Como $(R \cap S) \subseteq (R \cup S)$, de (b), $r(R \cap S) \leq r(R \cup S)$.

$$\text{Suponhamos } r(R \cap S) = |F_1| = p$$

$$r(R \cup S) = |F_2| = p+k, \quad k \geq 0 \quad (\text{II.4})$$

Então pelo teorema (2.1.1) podemos tomar k elementos

$$e_1, e_2, \dots, e_k \in (F_2 - F_1) \quad (\text{II.5})$$

de maneira que

$$F_3 = F_1 \cup \{e_1\} \cup \dots \cup \{e_k\} \quad (\text{II.6})$$

é independente.

Como $|F_3| = p+k$, então de (II.4):

$$r(R \cup S) = p+k = |F_3| \quad (\text{II.7})$$

De (II.5) $e_1, e_2, \dots, e_k \in F_2 \subseteq (R \cup S)$ e $e_1, \dots, e_k \notin F_1 \subseteq (R \cap S)$. Por outro lado se existe $e_i \in (R \cap S)$, como todo subconjunto de um conjunto independente é independente (por (I2)), teríamos de (II.6) que $F_1 \cup \{e_i\} \subseteq R \cap S$ seria independente. Mas isto é um absurdo pois F_1 é máximo de $(R \cap S)$. Logo não existe $e_i \in (R \cap S)$ ou seja $e_1, \dots, e_k \notin (R \cap S)$.

Logo $e_1, e_2, \dots, e_k \in (R-S) \cup (S-R)$. Seja

$$A \subseteq (R-S) \text{ e } B \subseteq (S-R) \quad (\text{II.8})$$

tal que $\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \dots \cup \{e_k\} = A \cup B$. De (II.6)

$$F_3 = F_1 \cup A \cup B \quad (\text{II.9})$$

Como $F_1 \subseteq R \cap S$ e de (II.8), $A \subseteq R$ e $B \subseteq S$ então $(F_1 \cup A) \subseteq R$ e $(F_1 \cup B) \subseteq S$. Logo por (b) temos:

$$r(F_1 \cup A) \leq r(R) \text{ e } r(F_1 \cup B) \leq r(S) \quad (\text{II.10})$$

Utilizando a propriedade (I2), como F_3 é independente, qualquer subconjunto de F_3 é independente. Logo de (II.9) $(F_1 \cup A)$ e $(F_1 \cup B)$ são independentes e pela definição de posto

$$\begin{aligned} r(F_1 \cup A) &= |F_1 \cup A| \\ r(F_1 \cup B) &= |F_1 \cup B| \end{aligned} \quad (\text{II.11})$$

Por outro lado, de (II.8) e como $F_1 \subseteq (R \cap S)$, F_1 , A e B são conjuntos disjuntos. Portanto

$$\begin{aligned} |F_1 \cup A| &= |F_1| + |A| \\ |F_1 \cup B| &= |F_1| + |B| \\ |F_1 \cup A \cup B| &= |F_1| + |A| + |B| \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

De (II.10), (II.11) e (II.12)

$$\begin{aligned} r(R) + r(S) &\geq r(F_1 \cup A) + r(F_1 \cup B) \\ &= |F_1 \cup A| + |F_1 \cup B| \\ &= |F_1| + |A| + |F_1| + |B| \end{aligned} \quad (\text{II.13})$$

De (II.7), (II.9) e (II.12)

$$r(R \cup S) = |F_3| = |F_1 \cup A \cup B| = |F_1| + |A| + |B| \quad (\text{II.14})$$

De (II.4), $|F_1| = r(R \cap S)$. Logo, de (II.13) e (II.14)

$$r(R) + r(S) \geq r(R \cap S) + r(R \cup S). \blacksquare$$

Com as propriedades acima a função posto r é uma função não-negativa, não-decrescente e submodular.

2.2 - Base do Matrôide

Definido posto, em analogia a álgebra, define-se base do matrôide $M = (E, F)$: \bar{e} o máximo subconjunto independente em E .

EXEMPLO 2.2.1

Para o matrôide matricial uma base de M coincide com uma base da matriz. No exemplo (1.2) as bases de M são todos os subconjuntos de E com três elementos.

$$\hat{B} = \{\{e_1, e_2, e_3\}, \dots, \{e_3, e_4, e_5\}\}.$$

EXEMPLO 2.2.2

Para o matrôide gráfico uma base de M é uma floresta contendo uma única árvore máxima ou uma árvore geradora de G . Uma árvore geradora contém $(n-1)$ arcos, onde n é o número de nós. Para o exemplo (1.3), $n = 4$, as bases de G são todos os conjuntos independentes com cardinalidade 3. Bases,

$$\hat{B} = \{\{e_1, e_3, e_4\}, \dots, \{e_3, e_4, e_5\}\}.$$

EXEMPLO 2.2.3

Para o matrôide uniforme, $U_{k,n}$, as bases de M serão todos os subconjuntos de E com cardinalidade igual a k .

$$\hat{B} = \{S \subseteq E \mid |S| = k\}. \text{ Para o exemplo (1.4), matrôide uniforme } U_{2,4}, \hat{B} = \{S \subseteq E \mid |S| = 2\} = \{\{e_1, e_2\}, \dots, \{e_3, e_4\}\}.$$

TEOREMA 2.2.1

Seja F um conjunto de subconjuntos independente de um matrôide $M = (E, F)$. Para qualquer $S \subseteq E$, se F_1 e F_2 são os máximos subconjuntos independentes de S , então $|F_1| = |F_2|$.

Demonstração: Utilizando a condição (I3) mostraremos que $|F_1| = |F_2|$. Seja o matrôide definido sobre $S \subseteq E$, $M = (S, F')$, onde F' é o conjunto de subconjuntos independentes de S . Seja $F_1 \in F'$ e $F_2 \in F'$ os máximos subconjuntos independentes de S . Suporemos que $|F_1| < |F_2|$. Seja $F_3 \in F'$, tal que $F_3 \subseteq F_2$ e $|F_3| = |F_1| + 1$. Por (I3), existe um elemento $e \in (F_3 - F_1)$ tal que $(F_1 \cup \{e\}) \in F'$, o que contradiz o fato de F_1 ser maximal em S . Logo $|F_1| = |F_2|$. ■

TEOREMA 2.2.2

Toda base de um matrôide $M = (E, F)$, contém o mesmo número de elementos.

Demonstração: Seja o matrôide $M = (E, F)$, $B_1 \in F$ e $B_2 \in F$ bases de M . Pela definição de base B_1 e B_2 são máximos subconjuntos independentes de E . Portanto pelo teorema (2.2.1), $|B_1| = |B_2|$.

No exemplo (2.2.2) vimos que uma base de matrôide gráfico é uma árvore geradora do grafo G . Assim uma consequência direta do teorema (2.2.2) é anunciada.

COROLÁRIO 2.2.1

Toda árvore geradora de um grafo conexo contém o mesmo número de arcos.

O resultado pode ser particularizado para os demais tipos de matrôides.

TEOREMA 2.2.3

Seja o matrôide $M = (E, F)$. $B \in F$ é uma base do matrôide se e só se $r(B) = r(E)$.

Demonstração: Seja o matrôide $M = (E, F)$ e $B \in F$

(\leftarrow) Se $r(E) = r(B)$ então B é uma base

Pela definição de posto como $B \in F$ então $r(B) = |B|$. Por hipótese $r(E) = r(B) = |B|$.

Pela definição de posto e base de um matrôide, B é uma base.

(\rightarrow) Se B é uma base então $r(B) = r(E)$.

B é uma base então $r(B) = |B|$. Como $B \subseteq E$, pela definição de base e posto $r(E) = |B| = r(B)$. ■

TEOREMA 2.2.4

Seja o matrõide $M = (E, F)$. $S \subseteq E$ é um conjunto independente, $S \in F$, se e somente se está contido em uma base do matrõide.

Demonstração: Seja o matrõide $M = (E, F)$ e $S \subseteq E$.

(\leftarrow) S está contido em uma base então $S \in F$.

Seja B uma base do matrõide e seja $S \subseteq B$. Como $B \in F$, pela propriedade (I2) de matrõides, então $S \in F$.

(\rightarrow) $S \in F$ então S está contido em uma base do matrõide.

Seja $S \in F$ e $B \in F$ uma base do matrõide. Pela definição de posto $S \in F$ então $r(S) = |S|$. $B \in F$ uma base do matrõide então pela definição de posto e base.

$$r(B) = |B| = r(E) \quad (\text{II.15})$$

Pela definição de base, B é maximal e portanto $|S| \leq |B|$. Seja

$$|B| = |S| + k, \quad k \geq 0 \quad (\text{II.16})$$

Então pelo teorema (2.1.1) existe

$$e_1, \dots, e_k \in (B-S) \quad (\text{II.17})$$

tal que

$$(S \cup \{e_1\} \cup \dots \cup \{e_k\}) \in F \quad (\text{II.18})$$

De (II.17) $\{e_1, \dots, e_k\} \subseteq B$. Como $B \in F$, utilizando a propriedade (I2), então

$$\{\{e_1\} \cup \{e_2\} \cup \dots \cup \{e_k\}\} \in F \text{ e } |\{e_1\} \cup \dots \cup \{e_k\}| = k \quad (\text{II.19})$$

De (II.17) $e_1, \dots, e_k \notin S$. Logo S e $\{\{e_1\} \cup \dots \cup \{e_k\}\}$ são disjuntos e portanto

$$|S \cup \{e_1\} \cup \dots \cup \{e_k\}| = |S| + |\{e_1\} \cup \dots \cup \{e_k\}| \quad (\text{II.20})$$

De (II.20), (II.19) e (II.16) temos:

$$|S \cup \{e_1\} \cup \dots \cup \{e_k\}| = |S| + k = |B| \quad (\text{II.21})$$

Por (II.18) temos que $(S \cup \{e_1\} \cup \dots \cup \{e_k\}) \in F$ é independente. Logo pela definição de posto

$$r(S \cup \{e_1\} \cup \dots \cup \{e_k\}) = |S \cup \{e_1\} \cup \dots \cup \{e_k\}| \quad (\text{II.22})$$

Então podemos escrever devido a (II.22), (II.21) e (II.15):

$$r(S \cup \{e_1\} \cup \dots \cup \{e_k\}) = |S \cup \{e_1\} \cup \dots \cup \{e_k\}| = |B| = r(B) = r(E)$$

Portanto, pelo teorema (2.2.3) $(S \cup \{e_1\} \cup \dots \cup \{e_k\})$ é uma base.

Seja B' uma base do matrõide tal que $B' = S \cup \{e_1\} \cup \dots \cup \{e_k\}$. Logo $S \subseteq B'$.

2.3 - Circuitos

Seja o matrõide $M = (E, F)$ onde F é o conjunto de subconjuntos independentes de E . Seja $S \subseteq E$. Pela definição de posto, $S \in F$, S é um conjunto independente se e somente se $r(S) = |S|$. Um conjunto $S \subseteq E$ que não pertence a F denominamos conjunto DEPENDENTE. Evidentemente S é dependente, isto é, $S \notin F$ se e somente se $r(S) < |S|$.

De maneira semelhante, um elemento $e \in E$ é DEPENDENTE EM $S \subseteq E$ se $r(S \cup \{e\}) = r(S)$. Caso contrário é INDEPENDENTE.

No exemplo (1.2) $e_4 \in E$ e $e_5 \in E$ são dependentes em $S = \{e_1, e_2, e_3\}$. Ao passo que e_4 e e_5 são independentes em $S = \{e_1, e_2\}$.

CIRCUITO EM $S \subseteq E$ é um m̃nimo subconjunto dependente de S . Se $C \subseteq E$, é um circuito, então $r(C) = |C| - 1$.

EXEMPLO 2.3.1

Para o matrõide matricial, um circuito corresponde a um conjunto de colunas LD tal que ao retirar qualquer coluna temos um conjunto LI. No exemplo (1.2) para $S = E = \{e_1, e_2, \dots, e_5\}$ temos os circuitos em S : $\hat{C} = \{\{e_1, e_2, e_3, e_4\}, \{e_1, e_2, e_3, e_5\}, \dots, \{e_2, e_3, e_4, e_5\}\}$. O conjunto E apesar de dependente não é um circuito. Para $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ um circuito em S é o prõprio conjunto. Os conjuntos de cardinalidade menor que quatro não pos-

suem circuitos, são LI.

EXEMPLO 2.3.2

Para o matrôide gráfico um circuito corresponde a um ciclo no grafo G , de forma que, ao retirar um arco do ciclo, temos uma árvore em G . No exemplo (1.3), $S = E = \{e_1, \dots, e_6\}$ temos os circuitos em S :

$$\tilde{C} = \{\{e_6\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3, e_4, e_5\}, \{e_2, e_3, e_4, e_5\}\}.$$

Subconjuntos dependentes tais como: $\{e_1, e_2, e_3\}$, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, $\{e_5, e_6\}$, $\{e_3, e_4, e_5, e_6\}$ e o próprio conjunto E , apesar de dependentes não são circuitos em E . Para $S = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ um circuito em S é o conjunto $C = \{e_1, e_2\}$. O conjunto $S = \{e_1, e_3, e_4\}$ não contém circuito, pois é independente.

EXEMPLO 2.3.3

Para o matrôide uniforme, $U_{k,n}$, os circuitos em E são todos os subconjuntos de E com cardinalidade $k+1$.

$$\tilde{C} = \{S \subseteq E \mid |S| = k+1\}.$$

No exemplo (1.4), no matrôide uniforme $U_{2,4}$, temos os circuitos em E , $\tilde{C} = \{\{e_1, e_2, e_3\}, \{e_1, e_2, e_4\}, \dots, \{e_2, e_3, e_4\}\}$. O conjunto E é dependente mas não é um circuito. Os conjuntos de cardinalidade menor que três não possuem circuitos, são independentes.

TEOREMA 2.3.1

Seja o matrõide $M = (E, F)$. $S \subseteq E$ é um conjunto independente, $S \in F$; se e somente se não contém nenhum circuito do matrõide.

Demonstração: Seja o matrõide $M = (E, F)$ e $S \subseteq E$.

(\leftarrow) Se não existe nenhum circuito contido em S então $S \in F$.

Suponhamos que não existe nenhum circuito contido em S , mas que $S \notin F$. Logo S é um conjunto dependente e $r(S) < |S|$. Consequentemente pela definição de circuito, existe um subconjunto dependente mínimo $C \subseteq S$, onde C é um circuito por definição. Logo, contradiz a hipótese inicial. Portanto $S \in F$.

(\rightarrow) Se $S \in F$ então S não contém nenhum circuito do matrõide.

Seja $S \in F$. Suponhamos existe $C \subseteq S$, onde C é um circuito do matrõide.

Por (I2), se $C \subseteq S \in F$ então $C \in F$, o que é impossível pois C é um conjunto dependente. Logo não existe C tal que $C \subseteq S$. ■

TEOREMA 2.3.2

Seja o matrõide $M = (E, F)$ e $C \subseteq E$ um circuito do matrõide. Cada elemento $e \in C$ é dependente sobre todo o resto do circuito, $(C - \{e\})$.

Demonstração: Seja o matrõide $M = (E, F)$ e $C \subseteq E$ um circuito do matrõide. Pela definição de circuito

$$r(C) = |C| - 1 \quad (\text{II.23})$$

Seja $e \in C$ e seja $S = (C - \{e\})$. Como C é um conjunto dependente minimal então todo subconjunto de C é independente. Logo S é independente e pela definição de posto

$$r(S) = |S| = |C - \{e\}| = |C| - 1 \quad (\text{II.24})$$

Como $C = S \cup \{e\}$ de (II.24) e (II.23)

$$r(S) = |C| - 1 = r(C) = r(S \cup \{e\})$$

Ou seja $r(S) = r(S \cup \{e\})$ e pela definição de dependência e é dependente em $S = (C - \{e\})$. Como a demonstração é válida $\forall e \in C$, demonstramos o teorema. ■

No exemplo (1.2) vimos que $C = \{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subset E$ é um circuito no matrõide matricial. Assim e_4 é dependente em $S = \{e_1, e_2, e_3\}$. e_2 é dependente em $S = \{e_1, e_3, e_4\}$, etc.

2.4 - Fecho

O FECHO de um subconjunto $R \subset E$ no matrõide $M=(E,F)$, $SP(R)$, é o máximo subconjunto $S \subseteq E$ contendo R tal que $r(S)=r(R)$.

Se B é uma base do matrõide, pelo teorema (2.2.3) $r(B) = r(E)$, portanto $SP(B) = E$.

Um subconjunto R tal que $SP(R) = R$ é chamado subconjunto FECHADO.

EXEMPLO 2.4.1

Para o matrõide matricial do exemplo (1.2) o fecho dos conjuntos de cardinalidade três, quatro e cinco é o próprio conjunto E . Todos possuem posto igual a três. Os conjuntos de cardinalidade menor que três são fechados, o fecho é o próprio conjunto.

EXEMPLO 2.4.2

Para o matrõide gráfico do exemplo (1.3) temos:

$$SP(\{e_1\}) = SP(\{e_2\}) = \{e_1, e_2, e_6\}$$

$$SP(\{e_3\}) = \{e_3, e_6\}, \dots, SP(\{e_5\}) = \{e_5, e_6\}$$

$$SP(\{e_1, e_3\}) = \{e_1, e_2, e_3, e_6\}, \dots, SP(\{e_4, e_5\}) = \{e_4, e_5, e_6\}$$

$$SP(\{e_1, e_3, e_4\}) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_6\}, \dots, SP(\{e_3, e_4, e_5\}) = \{e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

$$SP(\{e_1, e_3, e_4, e_5\}) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$$

EXEMPLO 2.4.3

Para o matrõide uniforme $U_{k,n}$, temos primeiro os subconjunto $S \subseteq E$ tal que $|S| < k$. Neste caso todos os subconjuntos são fechados, $SP(S) = S$. Pois, se existir um subconjunto $S' \supset S$, $|S'| < k$, então $r(S) = |S| < |S'| = r(S')$. Logo $r(S) < r(S')$ e S' não é fecho de S .

Segundo, para os subconjuntos $S \subseteq E$ tal que $|S| \geq k$. Neste caso, para todo $S \subseteq E$, $r(S) = k = r(E)$. Portanto o fecho é o conjunto E .

TEOREMA 2.4.1

Seja o matrõide $M = (E, F)$ e seja $S \subseteq E$ o fecho de um subconjunto $R \subseteq E$ então todo elemento $e \in (S-R)$ é dependente em R .

Demonstração: Seja o matrõide $M = (E, F)$ e $S \subseteq E$ o fecho de um subconjunto $R \subseteq E$. Logo $r(R) = r(S)$.

Suponhamos existe $e \in (S-R)$. Pela definição de fecho $R \subseteq S$ e como $e \in S$ então $(R \cup \{e\}) \subseteq S$.

Como $R \subseteq R \cup \{e\} \subseteq S$, temos aplicando teorema (2.1.2(b))

$$r(R) \leq r(R \cup \{e\}) \leq r(S)$$

Mas como $r(R) = r(S)$ então:

$$r(R) = r(R \cup \{e\})$$

o que prova pela definição que e é dependente em R . ■

TEOREMA 2.4.2

Seja o matrôide $M = (E, F)$ e $S \subseteq E$. O fecho $SP(S)$ é único.

Demonstração: Seja o matrôide $M = (E, F)$ e $S \subseteq E$. Por absurdo suponha exista $S_1 \subseteq E$ e $S_2 \subseteq E$, distintos, tal que $SP(S) = S_1$ e $SP(S) = S_2$. Como S_1 e S_2 são fechados de S então são subconjuntos maximais distintos de E contendo S . Pela definição de fecho, $r(S) = r(S_1) = r(S_2) = p$.

Podemos supor sem perda de generalidade que existe $e_2 \in (S_2 - S_1)$. Como $S \subseteq S_1$, necessariamente

$$r(S_1 \cup \{e_2\}) > r(S) = p \quad (\text{II.25})$$

pois caso contrário S_1 não seria fecho de S . $e_2 \in S_2$ e portanto $(S_1 \cup \{e_2\}) \subseteq S_1 \cup S_2$. Logo, aplicando o teorema (2.1.2(b)) e de (II.25)

$$r(S_1 \cup S_2) \geq r(S_1 \cup \{e_2\}) \geq p+1 \quad (\text{II.26})$$

Por outro lado como $S \subseteq S_1$ e $S \subseteq S_2$ temos $S \subseteq S_1 \cap S_2$. Aplicando novamente o teorema (2.1.2(b))

$$r(S_1 \cap S_2) \geq r(S) = p \quad (\text{II.27})$$

Adicionando (II.26) e (II.27)

$$r(S_1 \cup S_2) + r(S_1 \cap S_2) \geq 2p+1 > 2p = r(S_1) + r(S_2)$$

$$r(S_1 \cup S_2) + r(S_1 \cap S_2) > r(S_1) + r(S_2)$$

o que contradiz o teorema (2.1.2(c)). Logo a suposição de que S_1 e S_2 são distintos não pode ser verdadeira. $S_2 = S_1$, o fecho é único. ■

3 - DEFINIÇÕES DE MATRÓIDES

Na seção (II.1) foi dada uma definição de matróide, (II-13), utilizando o conceito de independência. Utilizando os conceitos apresentados nas seções anteriores, novas definições, equivalentes a primeira, podem ser obtidas, fixando novas propriedades.

3.1 - Definição em Termos de Posto

TEOREMA 3.1.1

Seja E um conjunto finito. Seja r uma função de

subconjuntos de E e F um conjunto de subconjuntos de E tal que $F = \{S \subseteq E \mid r(S) = |S|\}$. A função r satisfaz:

$$(R1) \quad r(\emptyset) = 0;$$

$$(R2) \quad \text{para qualquer } S \subseteq E \text{ e qualquer elemento } e \in E \\ r(S) \leq r(S \cup \{e\}) \leq r(S) + 1;$$

$$(R3) \quad \text{para qualquer } S \subseteq E \text{ e } e_1, e_2 \in E, \text{ se} \\ r(S \cup \{e_1\}) = r(S \cup \{e_2\}) = r(S) \text{ então } r(S \cup \{e_1\} \cup \{e_2\}) = r(S).$$

Se $M = (E, F)$ é um matróide e a função r é a função posto do matróide.

Demonstração: Seja E um conjunto finito e r uma função de subconjuntos de E .

(\rightarrow) (R1-R3) $\rightarrow M = (E, F)$ é um matróide e r a função posto de M .

Seja F um conjunto de subconjuntos de E tal que $F = \{S \subseteq E \mid r(S) = |S|\}$. Aplicando (R1-R3), mostraremos que F satisfaz (I1-I3) e portanto $M = (E, F)$ é um matróide sobre E .

a) De (R1), $r(\emptyset) = 0 = |\emptyset| \rightarrow \emptyset \in F$. (I1) é satisfeita.

b) Seja $S \in F$ e $R \subseteq S$. A propriedade (I2) somente será satisfeita se $R \in F$. Suponha $R \notin F$.

Pela definição de F , $R \notin F \rightarrow r(R) < |R|$. Seja $(S-R) = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$. Por (R2), $r(R \cup \{s_1\}) \leq r(R) + 1 < |R| + 1$.

Aplicando (R2) repetidas vezes:

$r(S) = r(R \cup \{s_1\} \cup \dots \cup s_k) < |R| + k = |S| \rightarrow r(S) < |S|$, isto contradiz o fato de $S \in F$. Portanto $R \in F$ e (I2) é satisfeita.

c) Seja $R \in F$ e $S \in F$ tal que $|S| = |R| + 1$

$$R = \{r_1, \dots, r_q, s_{q+1}, \dots, s_k\}$$

$$S = \{r_1, \dots, r_q, t_{q+1}, \dots, t_k, t_{k+1}\}, \text{ com } s_i \neq t_j, \\ q+1 \leq i, j \leq k$$

Se mostrarmos que existe $t \in (S-R)$ tal que $(R \cup \{t\}) \in F$ a propriedade (I3) é satisfeita.

Suponha que $(R \cup \{t_i\}) \notin F$ para $q+1 \leq i \leq k+1$.

Por (R2),

$$r(R \cup \{t_i\}) \geq r(R) = |R| \quad (\text{II.28})$$

Como

$$(R \cup \{t_i\}) \notin F \text{ então } r(R \cup \{t_i\}) < |R| + 1 \quad (\text{II.29})$$

De (II.28) e (II.29), $r(R \cup \{t_i\}) = |R| = r(R)$

$$\forall i \mid q+1 \leq i \leq k+1$$

Logo, por (R3) temos que $r(R \cup \{t_i\} \cup \{t_j\}) = r(R) = |R|$, $q+1 \leq i, j \leq k+1$.

Aplicando (R3) sucessivamente:

$r(S) \leq r(R \cup \{t_{q+1}\} \cup \dots \cup \{t_{k+1}\}) = r(R) = |R| < |S|$. Logo $r(S) < |S|$, contradiz o fato de $S \in F$. Assim $(R \cup \{t_i\}) \in F$ para algum i e (I3) é satisfeita. Como F satisfaz (I1-I3), F é um conjunto de subconjuntos independentes de um matrõide $M = (E, F)$ e conseqüentemente a função posto r é a função posto de M .

(\leftarrow) Se $M = (E, F)$ é um matrõide e r a função posto de $M \rightarrow$ (R1-R3)

Seja $M = (E, F)$ um matrõide sobre E e r a função posto de M .

Aplicando as propriedades de matrõide mostraremos que a função posto do matrõide, r , satisfaz (R1-R3)

a) Por (I1), $\emptyset \in F$, logo pela definição de posto $r(\emptyset) = 0$. (R1).

b) Seja $S \subseteq E$. Para mostrarmos (R2) dois casos são possíveis.

b1) $e \in S$, Logo $r(S) = r(S \cup \{e\}) \leq r(S) + 1$.

b2) $e \notin S$. Utilizando o teorema (2.1.2(b)), como $S \subset (S \cup \{e\})$

$$r(S) \leq r(S \cup \{e\}) \tag{II.30}$$

Utilizando o teorema (2.1.2(c))

$$r(S \cup \{e\}) \leq r(S) + r(\{e\}) - r(S \cap \{e\}) \tag{II.31}$$

Mas $(S \cap \{e\}) = \emptyset$ e pela definição de posto $r(\{e\}) \leq |e| = 1$. Logo, de (II.31)

$$r(S \cup \{e\}) \leq r(S) + r(\{e\}) = r(S) + 1 \quad (\text{II.32})$$

De (II.30) e (II.32)

$$r(S) \leq r(S \cup \{e\}) \leq r(S) + 1. \quad (\text{R2})$$

c) Seja $S \subseteq E$. Da mesma maneira, para mostrar (R3) dois casos são possíveis:

c1) Se $e_1 \in S$ e $e_2 \in S$ então (R3) é evidente

c2) Seja

$$e_1 \in (E-S) \text{ e } e_2 \in (E-S) \quad (\text{II.33})$$

Seja

$$r(S \cup \{e_1\}) = r(S \cup \{e_2\}) = r(S) \text{ e } R = S \cup \{e_1\} \cup \{e_2\} \quad (\text{II.34})$$

Do teorema (2.1.2(b)), como $S \subset R$ então $r(S) \leq r(R)$

Suponhamos que

$$r(S) < r(R) \quad (\text{II.35})$$

Por absurdo, mostraremos que esta suposição é im-

possível.

Seja $S' \subseteq S$ tal que $S' \in F$ o máximo subconjunto independente de S . Pela definição de posto:

$$r(S') = |S'| = r(S) \quad (\text{II.36})$$

Seja $R' \subseteq R$ tal que $R' \in F$ é o máximo subconjunto independente de R . Pela definição de posto

$$r(R') = |R'| = r(R) \quad (\text{II.37})$$

De (II.35), (II.36) e (II.37)

$$r(S) = |S'| < r(R) = |R'|$$

$$|S'| < |R'| \quad (\text{II.38})$$

Logo $|R'| = |S'| + k$, $k > 0$. Portanto pelo teorema (2.1.1) existe

$$r_1, \dots, r_k \in (R' - S') \quad (\text{II.39})$$

tal que

$$(S' \cup \{r_1\} \cup \dots \cup \{r_k\}) \in F \quad (\text{II.40})$$

De (II.40) e pela propriedade (I2)

$$(S' \cup \{r_i\}) \in F, \quad 1 \leq i \leq k \quad (\text{II.41})$$

Evidentemente $r_i \notin S$, pois se tivéssemos $r_i \in S$ então $(S' \cup \{r_i\}) \subseteq S$ e devido a (II.41) $(S' \cup \{r_i\})$ seria independente, o que contradiz a maximalidade de S' em S .

Logo $r_1, \dots, r_k \in (R'-S) \subseteq (R-S)$. Mas de (II.34) $(R-S) = \{e_1, e_2\}$. Sem perda de generalidade, podemos fazer $r_i = e_1$. De (II.41), aplicando a definição de posto

$$r(S' \cup \{r_i\}) = r(S' \cup \{e_1\}) = |S' \cup \{e_1\}| \quad (\text{II.42})$$

De (II.33) $e_1 \notin S \supseteq S'$. Consequentemente $\{e_1\}$ e S' são disjuntos e

$$|S' \cup \{e_1\}| = |S'| + |\{e_1\}| = |S'| + 1 \quad (\text{II.43})$$

Logo, de (II.42), (II.43) e (II.36)

$$r(S' \cup \{e_1\}) = |S' \cup \{e_1\}| = |S'| + 1 = r(S) + 1 \quad (\text{II.44})$$

Como $S' \subseteq S$, evidentemente pelo teorema (2.1.2(b))

$$r(S \cup \{e_1\}) \geq r(S' \cup \{e_1\}) \quad (\text{II.45})$$

De (II.44) e (II.45), $r(S \cup \{e_1\}) > r(S)$, o que contradiz a hipótese inicial que $r(S \cup \{e_1\}) = r(S)$. Logo a suposição feita de que $r(S) < r(R)$ é impossível. Temos então:

$$r(R) = r(S \cup \{e_1\} \cup \{e_2\}) = r(S). \quad (\text{R3})$$

Pela definição de posto se $S \subseteq E$, S é independente então $r(S) = |S|$. Logo $F = \{S \subseteq E \mid r(S) = |S|\}$.

Com isto completamos a demonstração. ■

3.2 - Definição em Termos de Base

TEOREMA 3.2.1

Seja E um conjunto finito de elementos e \hat{B} um conjunto de subconjuntos de E . \hat{B} satisfaz

(B1) $\hat{B} \neq \emptyset$ e seus elementos não estão estritamente contidos uns aos outros;

(B2) Se $B_1 \in \hat{B}$, $B_2 \in \hat{B}$ e $e_1 \in (B_1 - B_2)$ então existe $e_2 \in (B_2 - B_1)$ tal que $(B_1 - \{e_1\} \cup \{e_2\}) \in \hat{B}$;

se e somente se \hat{B} é o conjunto de bases de um matrôide $M = (E, F)$ onde $F = \{F' \mid F' \subseteq B \text{ para } B \in \hat{B}\}$

Demonstração: Seja E um conjunto finito e \hat{B} um conjunto de subconjuntos de E .

(\leftarrow) Se \hat{B} é o conjunto de bases de um matrôide $M = (E, F) \rightarrow (B1-B2)$

Seja \hat{B} o conjunto de bases de um matrôide $M = (E, F)$.

- a) De (I1) temos que $\emptyset \in F$. Então, pelo teorema (2.2.4), $\emptyset \subseteq B$, onde B é uma base do matrõide. Logo, existe $B \in \widehat{B}$ e portanto $\widehat{B} \neq \emptyset$. Pelo teorema (2.2.2) todas as bases de um matrõide contêm o mesmo número de elementos. Logo nenhuma está contida estritamente em outra (B1).
- b) Seja $B_1 \in \widehat{B}$, $B_2 \in \widehat{B}$ e $e_1 \in (B_1 - B_2)$. Utilizando as propriedades de matrõides mostraremos que existe $e_2 \in (B_2 - B_1)$ tal que $(B_1 - \{e_1\} \cup \{e_2\}) \in \widehat{B}$.

Da definição de base temos que $B_1 \in F$ e $B_2 \in F$. De (I2) $(B_1 - \{e_1\}) \in F$. Por outro lado, da definição de posto, teorema (2.2.2) e o teorema (2.2.3):

$$r(B_1) = |B_1| = |B_2| = r(B_2) = r(E) \quad (\text{II.46})$$

De (II.46)

$$|B_1| = |B_2| = |B_1 - \{e_1\}| + 1$$

Aplicando (I3) temos que existe $e_2 \in (B_2 - (B_1 - \{e_1\}))$ tal que $(B_1 - \{e_1\} \cup \{e_2\}) \in F$. Mas como $e_1 \notin B_2$ temos que $(B_2 - (B_1 - \{e_1\})) = B_2 - B_1$. Portanto existe $e_2 \in (B_2 - B_1)$ tal que

$$(B_1 - \{e_1\} \cup \{e_2\}) \in F \quad (\text{II.47})$$

De (II.47), aplicando a definição de posto

$$\begin{aligned}
r(B_1 - \{e_1\} \cup \{e_2\}) &= |B_1 - \{e_1\} \cup \{e_2\}| \\
&= |B_1 - \{e_1\}| + |\{e_2\}| \\
&= |B_1| - 1 + 1 = |B_1| \qquad (II.48)
\end{aligned}$$

De (II.48) e (II.46), $r(B_1 - \{e_1\} \cup \{e_2\}) = |B_1| = r(E)$.

Logo, pelo teorema (2.2.3), $(B_1 - \{e_1\} \cup \{e_2\}) \in \widehat{B}$ e (B2) é satisfeita.

(\Rightarrow) $(B1.B2) \rightarrow \widehat{B}$ é o conjunto das bases de um matróide $M = (E, F)$.

Seja

$$F = \{F' \mid F' \subseteq B \text{ para } B \in \widehat{B}\} \qquad (II.49)$$

Aplicando as propriedades (B1-B2) mostraremos que F satisfaz (I1-I3) e portanto $M = (E, F)$ é um matróide sobre E e \widehat{B} o conjunto de bases do matróide.

a) (I1-I2) são trivialmente satisfeitos.

b) Para mostrarmos (I3) faremos em duas partes. A primeira (b1), utilizando as propriedades (B1-B2) demonstraremos que para $B_1 \in \widehat{B}$ e $B_2 \in \widehat{B}$ então $|B_1| = |B_2|$. A segunda parte, (b2), supondo R e S elementos distintos de F tal que $R \subseteq B_1$ e $S \subseteq B_2$, $|S| = |R| + 1$, mostraremos que existe $s \in (S-R)$ tal que $(R \cup \{s\}) \in F$ e (I3) é satisfeita.

b1) Seja $B_1 \in \widehat{B}$ e $B_2 \in \widehat{B}$ então $|B_1| = |B_2|$.

Sem perda de generalidade, suponha por absurdo que

$$|B_1| \neq |B_2|. \text{ Seja } B_1 = \{e_1, \dots, e_k, b_1, \dots, b_p\}$$

$$B_2 = \{e_1, \dots, e_k, c_1, \dots, c_p, \dots, c_q\}$$

Tomando $b_1 \in (B_1 - B_2)$, por (B2), existe $c_i \in (B_2 - B_1)$ tal que $(B_1 - \{b_1\} \cup \{c_i\}) \in \widehat{B}$. Sem perda de generalidade seja $c_i = c_1$.

Temos então: $B_1^1 = \{e_1, \dots, e_k, c_1, b_2, \dots, b_p\} \in \widehat{B}$.

Repetindo o processo, tomando $b_2 \in (B_1^1 - B_2)$, por (B2) existe $c_i \in (B_2 - B_1^1)$ (evidente $c_i \neq c_1$) tal que $(B_1^1 - \{b_2\} \cup \{c_i\}) \in \widehat{B}$.

Seja $c_i = c_2$. Temos então

$$B_1^2 = \{e_1, \dots, e_k, c_1, c_2, b_3, \dots, b_p\} \in \widehat{B}.$$

Repetindo o processo, teremos no p° passo

$$B_1^p = \{e_1, \dots, e_k, c_1, \dots, c_p\} \in \widehat{B}$$

Mas $B_1^p \subset B_2$, o que contraria a propriedade (B1). Logo a suposição inicial de que $|B_1| < |B_2|$ é impossível. Portanto $|B_1| = |B_2|$.

b2) Seja $B_1 \in \widehat{B}$ e $B_2 \in \widehat{B}$. De (b1), $|B_1| = |B_2|$. Seja $R \in F$ e $S \in F$, distintos, tal que $R \subset B_1$, $S \subseteq B_2$ e $|S| = |R| + 1$:

$$R = \{r_1, \dots, r_k\} \quad B_1 = \{r_1, \dots, r_k, b_1, \dots, b_p\}$$

$$S = \{s_1, \dots, s_k, s_{k+1}\} \quad B_2 = \{s_1, \dots, s_k, s_{k+1}, c_1, \dots, c_{p-1}\}$$

Tomando $b_1 \in (B_1 - B_2)$, por (B2), existe $e_i \in (B_2 - B_1)$ tal que

$$(B_1 - \{b_1\} \cup \{e_i\}) \in \widehat{B} \quad (\text{II.50})$$

Duas hipóteses podem ser feitas:

$$(i) \quad e_i = s_i \in S \text{ e } (ii) \quad e_i = c_i \notin S$$

$$(i) \quad e_i = s_i \in S$$

Sem perda de generalidade, seja $e_i = s_i = s_1$. Temos então de (II.50) $B_1^1 = \{r_1, \dots, r_k, s_1, b_2, \dots, b_p\} \in \widehat{B}$

Mas $(R \cup s_1) = \{r_1, \dots, r_k, s_1\} \subseteq B_1^1$ e portanto por (II.49) $(R \cup \{s_1\}) \in F$. Como $s_1 \in (S - R)$ então (I3) é satisfeita.

$$(ii) \quad e_i = c_i \notin S$$

Sem perda de generalidade, seja $e_i = c_i = c_1$. Temos então de (II.50):

$$B_1^1 = \{r_1, \dots, r_k, c_1, b_2, \dots, b_p\} \in \widehat{B} \quad (\text{II.51})$$

Repetindo o processo tomando $b_2 \in (B_1^1 - B_2)$, por (B2) existe $e_i \in (B_2 - B_1^1)$ (evidente $e_i \neq c_1$) tal que

$$(B_1^1 - \{b_2\} \cup \{e_i\}) \in \widehat{B} \quad (\text{II.52})$$

Se $e_i = s_i \in S$ temos a repetição da hipótese (i). Logo (I3) é satisfeita.

Se $e_i = c_i \notin S$, sem perda de generalidade seja $e_i = c_i = c_2$. Temos então de (II.51) e (II.52)

$$B_1^2 = (r_1, \dots, r_k, c_1, c_2, b_3, \dots, b_p) \in \widehat{B}$$

Repetindo o processo geramos $B_1^1, B_1^2, \dots, B_1^p$ onde $B_1^i = (B_1^{i-1} - \{b_i\} \cup \{e_i\}) \in \widehat{B}$

Como temos p elementos b_i , mas somente $(p-1)$ elementos c_i , obrigatoriamente para algum $i = 1, \dots, p$ temos $e_i = s_i \in S$. Recaimos então na hipótese (i). Portanto (I3) é satisfeita.

Como F satisfaz (I1-I3) então $M = (E, F)$ é um matrôide sobre E . Por (II.49), para todo $B \in \widehat{B}$ então $B \in F$. Se $B \in F$ pelo teorema (2.2.4) B está contido em uma base do matrôide. Como B é um subconjunto máximo de F então B é uma base de M . Como é válido para todo $B \in \widehat{B}$ então \widehat{B} é o conjunto de bases do matrôide. ■

3.3 - Outras Definições

3.3.1 - Definição em Termos de Circuitos

TEOREMA 3.3.1

Seja E um conjunto finito e \hat{C} um conjunto de subconjuntos de E . \hat{C} satisfaz:

- (C1) $\emptyset \in \hat{C}$ e nenhum elemento de \hat{C} está contido propriamente em outro;
- (C2) Se $C_1 \in \hat{C}$, $C_2 \in \hat{C}$, distintos e $e \in (C_1 \cap C_2)$ então existe $C_3 \in \hat{C}$ tal que $C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - \{e\}$;
se e somente se \hat{C} é o conjunto de circuitos de um matróide $M = (E, F)$ onde $F = \{F' \subseteq E \mid \forall S \in \hat{C}, F' \not\subseteq S\}$.

A definição em forma de teorema (C1-C2) equivale as anteriores. A demonstração pode ser vista, juntamente com o teorema (3.3.2) em [19].

3.3.2 - Definição em Termos de Fecho

TEOREMA 3.3.2

Seja E um conjunto finito e a função SP de subconjuntos de E . A função SP satisfaz:

$$(F1) R \subseteq S \subseteq E \rightarrow SP(R) \subseteq SP(S);$$

$$(F2) \forall S \subseteq E \rightarrow S \subseteq SP(S) = SP(SP(S));$$

$$(F3) e_1 \in E, e_2 \in E \text{ se } e_1 \in SP(S \cup \{e_2\}) \text{ e } e_1 \in SP(S) \quad \text{então} \\ e_2 \in SP(S \cup \{e_1\});$$

se e somente se SP é a função fecho de um matrõide $M = (E, F)$ onde:

$$F = \{F' \subseteq E \mid \text{se } e \in F' \text{ então } e \notin SP(F' - \{e\})\}$$

A definição (F1-F3) \leftrightarrow (C1-C2) \leftrightarrow (B1-B2) \leftrightarrow (R1-R3) \leftrightarrow (I1-I3). |19||20|.

4 - EXEMPLO

Um outro tipo de matrõide que será utilizado nas seções posteriores são os matrõides transversais. Para caracterizá-los definiremos alguns elementos básicos.

Seja E um conjunto finito e $Q = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_m\}$ um conjunto de (não necessariamente distintos) subconjuntos de E . Um TRANSVERSAL DE Q é um conjunto formado tomando-se um único elemento de cada subconjunto Q_1, Q_2, \dots, Q_m , de maneira que todos estes elementos sejam distintos. Um PARCIAL TRANSVERSAL DE Q é um transversal de algum subconjunto de Q .

EXEMPLO 4.1

Seja $Q = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ um conjunto de subconjuntos de $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ onde $Q_1 = \{e_2, e_3, e_4\}$ e $Q_2 = Q_3 = \{e_1\}$. Não temos um transversal pois $Q_2 = Q_3$, mas $\emptyset, \{e_1\}, \{e_2\}, \{e_3\}, \{e_4\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}$ e $\{e_1, e_4\}$ são parciais transversais.

O exemplo pode ser representado através de um grafo bipartido em que cada arco liga um subconjunto Q_i a um de seus elementos, figura (II.3)

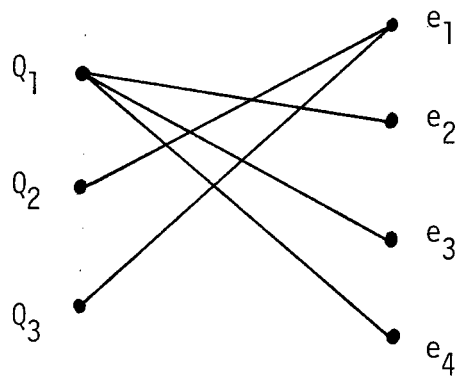


Fig. II.3 - Exemplo 4.1

Com essa representação um parcial transversal corresponde a um conjunto de arcos tal que nenhum par tenha um vértice em comum.

TEOREMA 4.1

Q tem um transversal se e somente se para cada k tal que $1 \leq k \leq |E|$, a união de quaisquer k subconjuntos Q_i contém pelo menos k elementos.

A demonstraco pode ser vista em [15].

Com as definies acima, $M = (E, F)$  um MATRIDE TRANSVERSAL sobre E se F  o conjunto de parciais transversais de Q , ou seja, as parciais transversais de Q so os subconjuntos independentes de E . As propriedades (I1-I3) so facilmente verificadas.

Entre os subconjuntos independentes de E temos o MAXIMAL PARCIAL TRANSVERSAL DE Q , que  o parcial transversal tal que no existe nenhum outro parcial transversal contendo-o.

Da definio de um matride transversal podemos caracterizar alguns de seus elementos.

Pela definio de posto temos que para todo $S \subseteq E$, o posto de S no matride transversal, $r(S)$,  a cardinalidade do maximal parcial transversal de Q contido em S . A funo posto satisfaz a todas as propriedades anteriores. De forma semelhante, pela definio de base: o mximo subconjunto independente de E , temos que uma base de um matride transversal  um maximal parcial transversal de Q .

Logo, como consequncia de (B1-B2) podemos enunciar os teoremas:

TEOREMA 4.2

Nenhum maximal parcial transversal de Q contém propriamente um outro.

TEOREMA 4.3

Se B_1 e B_2 são maximais transversais de Q e $e_1 \in B_1$ então existe um elemento $e_2 \in B_2$ tal que $(B_1 - \{e_1\} \cup \{e_2\})$ é um maximal parcial transversal de S .

Como os teoremas acima podemos demonstrar uma extensão do teorema (2.2.2).

TEOREMA 4.4

Seja $Q = (Q_1, \dots, Q_m)$ um conjunto de subconjuntos de E . Quaisquer par de maximais parciais transversais de Q contém o mesmo número de elementos.

Demonstração: Seja $Q = (Q_1, \dots, Q_m)$ um conjunto de subconjuntos de E , e seja $B_1 \subseteq E$ e $B_2 \subseteq E$ distintos maximais parciais transversais de Q . Queremos mostrar que $|B_1| = |B_2|$. Para isto, sem perda de generalidade, suponha $|B_1| < |B_2|$.

Seja

$$B_1 = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$$

$$B_2 = \{c_1, c_2, \dots, c_k, \dots, c_q\} \quad (\text{II.53})$$

Pelo teorema (4.3), $b_i \in B_1$, $1 \leq i \leq k$ então existe $c_j \in B_2$, $1 \leq j \leq q$ tal que $(B_1 - \{b_i\} \cup \{c_j\})$ é um maximal parcial transversal. Sem perda de generalidade, seja $b_i = b_1$ e $c_j = c_1$, então $B_1^1 = (B_1 - \{b_1\} \cup \{c_1\})$ é um maximal parcial transversal.

Repetindo o processo, seja $b_i = b_2, \dots, b_k$ então pelo teorema (4.3) existe $c_j = c_2, \dots, c_k$ tal que

$$B_1^k = (B_1 - \{b_1\} \cup \{c_1\} - \dots - \{b_k\} \cup \{c_k\}) \quad (\text{II.54})$$

é um maximal parcial transversal.

De (II.53) e (II.54)

$$B_1^k = \{c_1, c_2, \dots, c_k\} \subset B_2$$

Portanto pelo teorema (4.2) B_2 não é um maximal parcial transversal, contrariando a hipótese inicial. Logo $|B_1| = |B_2|$. ■

Os demais teoremas podem ser estendidos para o caso particular de matrôide transversal. Da mesma maneira os conceitos de circuito e fecho.

EXEMPLO 4.2

Seja $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ e $Q = \{Q_1, Q_2, Q_3\}$ onde
 $Q_1 = \{e_1\}$, $Q_2 = \{e_2, e_3\}$ e $Q_3 = \{e_4\}$. Seja o matróide $M = (E, F)$
sobre E . O conjunto de parciais transversais \bar{e} é dado por:
 $F = \{\{e_1\}, \dots, \{e_4\}, \{e_1, e_2\}, \{e_1, e_3\}, \{e_1, e_4\}, \{e_2, e_4\}, \{e_3, e_4\},$
 $\{e_1, e_2, e_4\}, \{e_1, e_3, e_4\}\}$. As bases de M , $\bar{B} = \{\{e_1, e_2, e_4\},$
 $\{e_1, e_3, e_4\}\}$

Os circuitos são os subconjuntos de E dependentes tais que ao retirar um elemento temos um parcial transversal. Os circuitos em E , $\bar{C} = \{\{e_2, e_3\}\}$.

Fecho: $SP(\{e_1\}) = \{e_1\}$, $SP(\{e_2\}) = SP(\{e_3\}) = SP(\{e_2, e_3\}) =$
 $\{e_2, e_3\}$, $SP(\{e_4\}) = \{e_4\}$
 $SP(\{e_1, e_2\}) = SP(\{e_1, e_3\}) = \{e_1, e_2, e_3\}$
 $SP(\{e_1, e_2, e_4\}) = SP(\{e_1, e_3, e_4\}) = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$.

Para os matróides transversais tal que $Q = \{Q_1, \dots, Q_m\}$, $Q_i \cap Q_j = \emptyset$, $\forall i, j \mid i \neq j$, temos um MATRÓIDE PARTIÇÃO. O exemplo (4.2) é também um exemplo de matróide partição, pois $Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 = \emptyset$.

Outros resultados podem ser obtidos [21], bem como a demonstração dos teoremas acima [15].

5 - CONCLUSÃO

Após apresentar as definições e os elementos básicos de um matrõide, verificamos através de exemplos que inicialmente é definido o conjunto E . O passo seguinte consiste em definir uma "estrutura de independência" que gerará F . Este passo nem sempre evidente faz com que a estrutura de matrõide torne pouco prática. Daí os trabalhos na área voltarem em geral para o campo teórico enquanto os exemplos práticos encontrados na literatura são normalmente pouco interessantes. Porém essa estrutura assume uma importância relevante para aplicação de algoritmos úteis. Estes serão visto no capítulo seguinte onde problemas maiores serão estudados.

CAPÍTULO IIIALGORITMOS GULOSOS APLICADOS A
MATRÓIDES E POLIMATRÓIDES1. INTRODUÇÃO

Até recentemente a grande maioria dos trabalhos voltava-se para algoritmos que buscam uma solução ótima exata, algoritmos exatos. Apesar da variedade de técnicas utilizadas, estes algoritmos, muitas vezes esbarram no tempo de processamento e às vezes no excesso de memória. Em geral são algoritmos NP-completos, tornando-se impraticáveis para problemas maiores. Daí, a necessidade de algoritmos heurísticos, em geral, polinomiais e eficientes. Fornecem soluções viáveis que podem ser ótimas ou aproximadas, atuando como limites inferiores (ou superiores) para algoritmos exatos. Para essas soluções aproximadas podemos utilizar critérios que possibilitem medir as suas qualidades. Classifica-se uma heurística como boa ou ruim conforme a mesma se aproxima bastante ou não da solução ótima.

Os algoritmos heurísticos, muitas vezes intuitivos, não possuindo uma justificativa no plano teórico, são plenamente justificados pela prática. Procuram obter, rapidamente, uma boa solução aproximada. Entre os algoritmos heurísticos, visamos os algoritmos gulosos (Greedy, gloutons), os quais estão estreitamente ligados aos problemas matroidais, para as quais fornecem soluções ótimas. Porém, as aplicações se estendem a problemas combina

tórios de grandes dimensões, como: otimização em redes, localização de centros, inteligência artificial, coloração de grafos, etc., para os quais, em geral, os algoritmos gulosos fornecem soluções aproximadas.

Introduziremos os algoritmos gulosos através de três problemas simples que se assemelham quanto ao processo utilizado para resolvê-los:

PROBLEMA 1

Seja $C = (c_{ij})$ uma matriz de pesos, $m \times n$, não negativa. Desejamos escolher um subconjunto em C de peso máximo, de forma a não ocorrer dois elementos na mesma linha. O problema pode ser modelado como:

$$\max Z = \sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.a. } \sum_{j=1}^n x_{ij} \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, m$$

$$x_{ij} \in [0, 1] \text{ inteiro}$$

Um fácil processo de resolução consiste em: "escolha os elementos (i, j) em ordem de grandeza decrescente, rejeitando um elemento somente se um outro já foi escolhido na mesma linha".

EXEMPLO 1.1

Seja a matriz de pesos:

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 4 & \textcircled{10} & 3 \\ 4 & 0 & \textcircled{7} & 2 \\ \textcircled{9} & 6 & 0 & 0 \\ 1 & \textcircled{5} & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Aplicando o processo acima o subconjunto em C de p̄eso m̄aximo \bar{e} composto pelos elementos envolvidos com um c̄irculo em C . Temos ent̄ao: $Z = 10 + 9 + 7 + 5 = 31$.

PROBLEMA 2

Um certo n̄umero de trabalhos ser̄ao executados por uma ũnica m̄aquina. Todos requerem o mesmo tempo de processamento, uma hora. Est̄ao associados a um tempo para entrega, o qual n̄ao satisfeito, implica em uma penalidade fixa c_j , independente do atraso. Determinar a seqūencia para execuç̄ao dos trabalhos de forma que o total das penalidades seja m̄inimo. A resoluç̄ao deste problema implica na seguinte regra: "Ordene os trabalhos segundo tempo de entrega crescente e no caso de empate segundo penalidades decrescentes. A seguir, escolha os trabalhos na ordem assim determinada, descartando um trabalho somente se o mesmo n̄ao pode ser executado, obedecendo o tempo de entrega. Os trabalhos descartados ser̄ao executados ap̄os o ũltimo escolhido, n̄ao importando a ordem destes".

EXEMPLO 1.2

Seja os trabalhos:

Trabalhos	1	2	3	4	5	6
T. Entrega	1	3	2	1	3	6
Penalidade	9	7	6	10	4	2

Ordenando segundo critério acima temos:

Trabalhos	4	1	3	2	5	6
T. Entrega	1	1	2	3	3	6
Penalidade	10	9	6	7	4	2

Com esta ordenação: escolha trabalho 4, descarte 1, escolha 3 e 2, descarte 5, escolha 6. Executados os escolhidos, execute os descartados. Assim uma sequência ótima para execução dos trabalhos é: 4, 3, 2, 6, 1, 5 com um total de penalidades $Z = c_1 + c_5 = 9 + 4 = 13$. Uma outra sequência ótima é: 4, 3, 2, 6, 5, 1, também $Z = 13$.

PROBLEMA 3

Deseja-se construir uma rede de comunicação entre várias cidades a custo mínimo. Sabe-se que o custo de qualquer ligação é dado por c_{ij} .

Temos que, dada uma rede representada por um grafo conexo $G(N,A)$,

N cidades e A ligações entre elas, associamos a cada par $(i,j) \in A$ o custo c_{ij} . O problema consiste em determinar o menor grafo parcial conexo de custo mínimo ou a árvore geradora mínima de G .

Podemos resolvê-lo: "escolha os arcos em ordem de grandeza crescente dos c_{ij} , rejeitando um arco somente se o mesmo forma um ciclo com os já selecionados".

EXEMPLO 1.3

Seja o grafo $G(N, A)$, figura (III.1), para $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

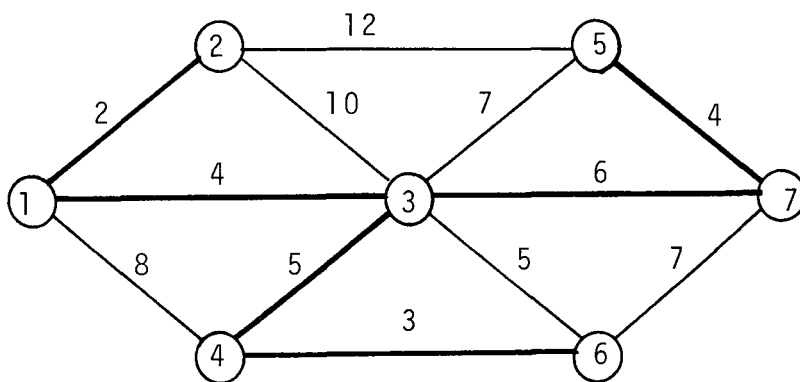


Fig. III.1 - Exemplo 1.3.

A solução ótima é representada por traços cheios na figura: $(1,2)$, $(4,6)$, $(1,3)$, $(5,7)$, $(3,4)$, $(3,7)$. Um conjunto de seis arcos, pois a árvore geradora deve conter $|N|-1$ arcos.

Esses problemas serão discutidos posteriormente, quanto à otimalidade das soluções obtidas.

Nos três problemas acima, o algoritmo de resolução utilizado caracterizou-se por escolher, a cada passo, um elemento de peso máximo ou mínimo que anexado aos elementos até então selecionados forneça o maior ou menor acréscimo possível, até que seja encontrado um conjunto de elementos solução do problema. Volta-se para o acréscimo relativo e não para o valor absoluto do objetivo. A esses algoritmos denominamos de Gulosos.

Seja um conjunto finito $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ e uma função de conjuntos f , definida sobre os subconjuntos de E . Os algoritmos gulosos procuram um subconjunto $S^* \subseteq E$, tal que:

$$f(S^*) = \max(\min)_{S \subseteq E} f(S)$$

Nos exemplos (1.1), (1.2) e (1.3) o conjunto E corresponde respectivamente aos elementos da matriz C , ao conjunto de trabalhos e ao conjunto de arcos A .

Com o problema apresentado acima, podemos enunciar um algoritmo guloso geral, que será particularizado no decorrer do texto.

ALGORITMO 1 - GULOSO GERAL

PASSO 0. Seja $k = 0$, $S^k = \emptyset$

PASSO 1. Seja $n = |E|$ e ordene os elementos de E de modo que $c(e_1) \geq c(e_2) \geq \dots \geq c(e_n)$.

PASSO 2. Dado S^k , faça $S^{k+1} = \begin{cases} S^k \cup \{e_{k+1}\} & \text{se } S^k \cup \{e_{k+1}\} \text{ satisfaz} \\ & \text{"CONDIÇÃO"}. \\ S^k & \text{caso contrário.} \end{cases}$

PASSO 3. $k = k+1$

PASSO 4. Se $k < n$, repita PASSO 2

Se não PARE.

A solução ótima do guloso é dada por $S^* = S^n$.

Ao anexarmos um elemento e_{k+1} a S^k uma "CONDIÇÃO" deve ser atendida. Nos exemplos (1.1), (1.2) e (1.3) essa condição apresenta-se como:

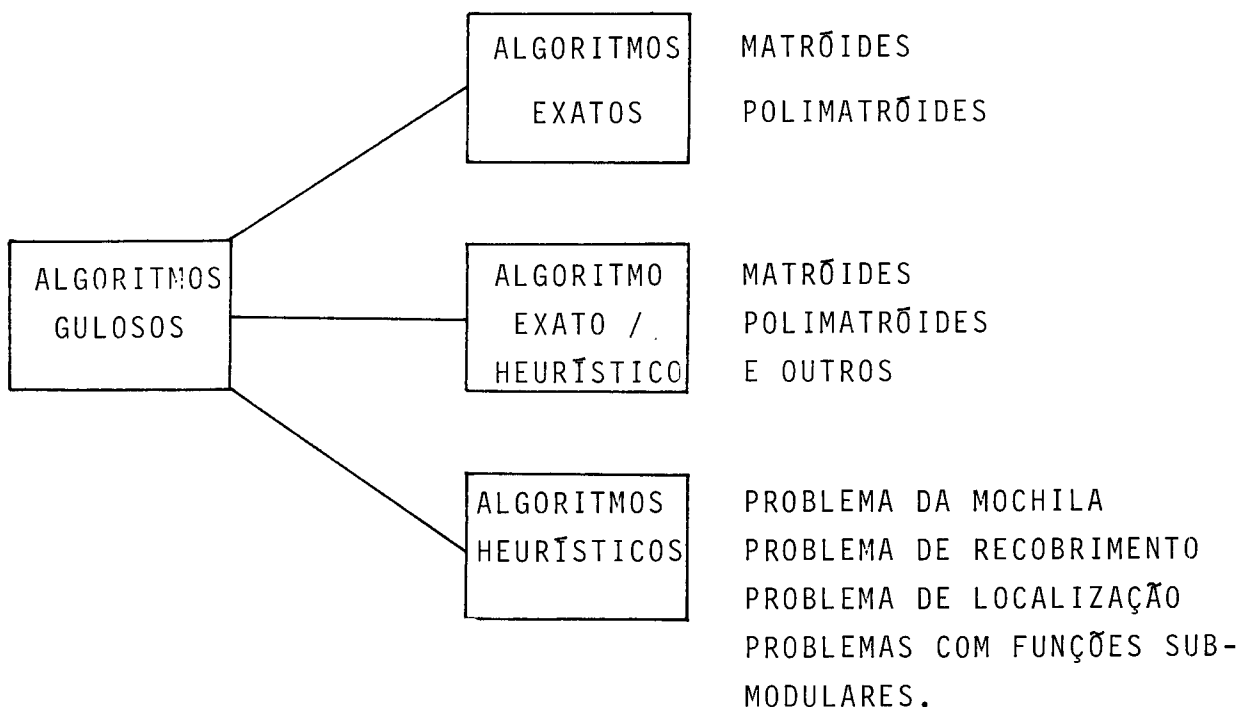
(1) Seja $e_{k+1} = (i, j)$ na matriz $m \times n$ do exemplo (1.1). $S^k \cup \{e_{k+1}\}$ satisfaz "condição" somente se (i, j) é o primeiro elemento escolhido na linha i .

(2) Seja $e_{k+1} = j$ um trabalho a ser executado. $S^k \cup \{e_{k+1}\}$ satisfaz "condição" somente se o trabalho j pode ser executado dentro do tempo de entrega previsto, após executar os traba-

thos em S^k . Nota-se que a solução do guloso $S^* = S^n$ conterá apenas os elementos escolhidos, uma vez que a ordem de execução dos atrasados não importa.

- (3) Seja $e_{k+1} = (i, j) \in A$, um arco de G . $S^k \cup \{e_{k+1}\}$ satisfaz "condição" somente se não contém ciclo.

Os algoritmos gulosos serão apresentados em três partes. Na primeira parte apresentaremos os algoritmos gulosos atuando como algoritmos exatos aplicados a estruturas de matrõides e polimatrõides. Na segunda parte apresentaremos um algoritmo guloso que se comporta ora como exato ora como heurístico, dependendo das características do problema. Na terceira parte (capítulo IV) apresentaremos os algoritmos gulosos heurísticos aplicados a problemas específicos.



2. ALGORITMOS GULOSOS APLICADOS A MATRÓIDES

2.1 - Um Algoritmo Guloso Geral para Matróides

O primeiro algoritmo guloso surgiu da demonstração do teorema (*):

"Se a um grafo conexo finito associamos um número real positivo, um peso, a cada arco e se estes números são todos distintos, então existe uma única árvore geradora cuja soma dos pesos em seus arcos é mínima dentre todas as árvores geradoras possíveis".

Este teorema é demonstrado em termos da "matriz de comprimentos" (a_{ij}) , onde a_{ij} é o comprimento do arco conectando os vértices i e j . O método de construção de árvore geradora mínima utilizado é bastante complexo. Utilizando a teoria dos grafos, Kruskal demonstrou este teorema apresentando um método construtivo enunciado no problema 3 seção (III.1). [13]. O mesmo teorema é mais tarde demonstrado para o caso específico de matróides. [23]

Da teoria de matróides, capítulo II, temos que, dado um grafo conexo finito $G(N, A)$, podemos definir uma estrutura de matróides $M = (E, F)$ em G denominada matróide gráfico. Seja

(*) Otakar Boruvka - On a minimal problem, Práce Moravské Pridovedecké Spolecnosti, Vol. 3, 1926.

$E = A$, conjunto de arcos. Seja F o conjunto de todos os subconjuntos de E não contendo um ciclo. F é o conjunto de todas as florestas de G . Associando pesos aos elementos de E , pelo teorema enunciado acima, se estes pesos são reais positivos e distintos, então existe uma árvore geradora mínima ou uma base do matrõide gráfico de peso mínimo.

Resultado semelhante pode ser obtido se aplicarmos o algoritmo 1. A obtenção de uma árvore corresponde a obtenção de um subconjunto $S \subseteq E$, $S \in F$, independente no matrõide $M = (E, F)$. Assim a "CONDIÇÃO" a ser satisfeita é definida pela "estrutura de independência".

Generalizando este resultado podemos enunciar um algoritmo guloso geral para matrõides obedecendo a estrutura do algoritmo 1.

ALGORITMO 2 - GULOSO GERAL PARA MATRÕIDES

PASSO 0. Seja $k = 0$, $S^k = \emptyset$

PASSO 1. Seja $n = |E|$ e ordene os elementos de E de modo que $c(e_1) \geq c(e_2) \geq \dots \geq c(e_n)$.

PASSO 2. Dado S^k , faça $S^{k+1} = \begin{cases} S^k \cup \{e_{k+1}\} & \text{se } (S^k \cup \{e_{k+1}\}) \in F \\ S^k & \text{caso contrário.} \end{cases}$

PASSO 3. $k = k+1$

PASSO 4. Se $k < n$, repita PASSO 2.

Se Não PARE.

A solução do guloso dada por $S^* = S^n \subseteq E$, $S^* \in F$ é um conjunto independente de peso máximo, ou seja, uma base do matrõide de peso máximo.

EXEMPLO 1.4

No exemplo (1.3) podemos definir um matrõide gráfico $M = (E, F)$ pelo grafo $G(N, A)$ da figura (III.1). Aplicando o algoritmo guloso encontraremos entre todas as árvores de G , a árvore geradora de peso mínimo. Assim, o processo de resolução anunciado para o problema 3 é semelhante ao algoritmo guloso geral onde a não formação de ciclos é definida em F e testada no PASSO 2.

TEOREMA 2.1.1

Seja o conjunto finito E e F um conjunto de subconjuntos de E . Se $M = (E, F)$ é um matrõide então para toda função de pesos não negativa $c: E \rightarrow \mathbb{R}$ o guloso encontra uma base de peso máximo do matrõide, (S^*) .

Demonstração: Primeiro mostraremos que $S^* \in F$ encontrado pelo guloso é uma base do matrõide $M = (E, F)$. Segundo, supondo B_0 uma base de peso máximo, mostraremos que a base encontrada pelo guloso, $B_G = S^*$, é uma base de peso máximo, $c(B_G) = \sum_{j \in B_G} c_j = \sum_{j \in B_0} c_j = c(B_0)$.

Seja o matrõide $M = (E, F)$ e a função de pesos não negativa $c: E \rightarrow \mathbb{R}$.

Seja $S \subseteq E$, $S \in F$. Então pelo teorema (II-2.2.4), $S \subseteq B$ onde B é uma base do matrõide. Como c é não negativa $c(B) \geq c(S)$ para todo $S \subseteq B$. Logo, como $B \in F$, um elemento de peso máximo em F é uma base do matrõide.

Seja B_G uma base do matrõide selecionada pelo guloso e seja B_0 uma base do matrõide de peso máximo:

$$B_G = \{a_1, \dots, a_j, \dots, a_p\}$$

$$B_0 = \{b_1, \dots, b_j, \dots, b_p\}$$

Sem perda de generalidade, suponhamos os elementos de B_G e B_0 em ordem decrescente de pesos. (III.1)

Demonstração por indução finita.

PASSO 1. O guloso seleciona o elemento a_1 . Mostraremos que $c(a_1) = c(b_1)$ e que $c(B_0^1) = c(B_0)$ onde $B_0^1 = \{a_1, b_1, \dots, b_p\}$ é uma base do matrõide de peso máximo.

Pelo guloso, temos que $c(a_1) \geq c(e_i)$, $\forall e_i \in E$ (III.2)

(i) Se $a_1 = b_j$, para algum $1 \leq j \leq p$, então $c(a_1) = c(b_j)$ e de (III.2), $c(b_j) \geq c(e_i) \forall e_i \in E$ e em particular

$$c(b_j) \geq c(b_i), 1 \leq i \leq p \quad (\text{III.3})$$

De (III.3) e (III.1), $b_j = b_1$ e portanto $c(a_1) = c(b_1)$.

(ii) Se $a_1 \neq b_j$ para todo $1 \leq j \leq p$ então $a_1 \in (B_G - B_0)$. Logo, pelo teorema (II-3.2.1(B2)) existe $b_1 \in (B_0 - B_G)$ tal que

$$\bar{B}_0^1 = (B_0 - b_j \cup \{a_1\}) \bar{e} \text{ uma base} \quad (\text{III.4})$$

Se (III.2) temos que:

$$c(a_1) \geq c(b_i)$$

Se $c(a_1) > c(b_i)$ então de (III.4), $c(\bar{B}_0^1) > c(B_0)$ o que contradiz a hipótese de B_0 ser uma base de peso máximo. Logo $c(a_1) = c(b_i)$.

De forma semelhante, de (III.2) $c(a_1) = c(b_i) > c(e_i)$, $\forall e_i \in E$. Como $b_i \in B_0$ então de (III.1), $b_i = b_1$ e portanto $c(a_1) = c(b_1)$.

De (i) e (ii), $c(a_1) = c(b_1)$ então $c(B_0^1) = c(B_0)$ onde, de (III.4)

$$B_0^1 = \{a_1, b_2, \dots, b_p\}$$

é uma base e de peso máximo, pois $c(B_0^1) = c(B_0)$.

PASSO k-1. Seja $c(a_i) = c(b_i)$, $i = 1, 2, \dots, k-1$, $c(B_0^{k-1}) = c(B_0)$

onde

$$B_0^{k-1} = \{a_1, \dots, a_{k-1}, b_k, \dots, b_p\} \quad (\text{III.5})$$

é uma base do matrõide de peso máximo.

PASSO k. O guloso seleciona o elemento a_k . Mostraremos que $c(a_k) = c(b_k)$ e portanto $c(B_0^k) = c(B_0)$ onde $B_0^k = \{a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_p\}$ é uma base do peso máximo.

De (III.5) como B_0^{k-1} é uma base, $B_0^{k-1} \in F$, e pela definição de matrõide (I2), todo subconjunto de B_0^{k-1} é independente. Logo,

$$\{a_1, \dots, a_{k-1}, b_i\}, \text{ para todo } k \leq i \leq p, \text{ é independente} \quad (\text{III.6})$$

$$\text{Pelo guloso: } c(a_k) \geq c(b_i), \quad k \leq i \leq p \quad (\text{III.7})$$

(i_k) Se $a_k = b_j$, para algum $k \leq j \leq p$ então $c(a_k) = c(b_j)$ e de (III.7), (III.6) e (III.1), $b_j = b_k$ e $c(a_k) = c(b_k)$.

(ii_k) Se $a_k \neq b_j$ para todo $k \leq j \leq p$ então $a_k \in (B_G - B_0^{k-1})$. Logo pelo teorema (II-3.2.1(B2)) existe $b_i \in (B_0^{k-1} - B_G)$ tal que $\bar{B}_0^k = B_0^{k-1} - b_i \cup \{a_k\}$ é uma base (III.8)

De (III.7) $c(a_k) \geq c(b_i)$, $k \leq i \leq p$.

Se $c(a_k) > c(b_i)$ então de (III.8), (III.5), $c(\bar{B}_0^k) > c(B_0^{k-1}) = c(B_0)$. Contrariando o fato de B_0 ser uma base de peso máximo. Logo $c(a_k) = c(b_i)$.

De (III.7), (III.6) e (III.1), $b_i = b_k$ e portanto $c(a_k) = c(b_k)$.

De (i_k) e (ii_k) , $c(a_k) = c(b_k)$ então $c(B_0^k) = c(B_0)$, onde, de (III.8),

$$B_0^k = \{a_1, \dots, a_k, b_{k+1}, \dots, b_p\}$$

é uma base de peso máximo, pois $c(B_0^k) = c(B_0)$. Portanto para $k = p$, temos que

$$B_0^p = \{a_1, \dots, a_p\} = B_G$$

é uma base de peso máximo. ■

Para exemplificar a utilização do teorema, voltaremos aos problemas 1, 2 e 3 seção (III.1). Mostraremos que nos três problemas os algoritmos gulosos, lá apresentados, fornecem soluções ótimas, pois todos os problemas encaixam-se em uma estrutura de matrõide.

EXEMPLO 2.1.1

No problema 1 dado uma matriz de pesos $c(m \times n)$, não negativa, desejamos escolher um subconjunto de peso máximo tal que não ocorram dois elementos na mesma linha. Seja $E = \{(i,j) \mid i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n\}$, uma matriz de posições $(m \times n)$ associada a C . Desejamos um conjunto $S \subseteq E$ tal que $c(S) = \sum_{(i,j) \in S} c_{ij}$ seja máximo. Este conjunto S conterá no máximo um elemento de cada linha de E . Assim podemos formalizar o problema como uma estrutura de matrõide transversal, $M = (E, F)$,

visto na seção (II.4). Seja $Q = (Q_1, Q_2, \dots, Q_m)$ onde $Q_i = E_i = \{(i,j) | j = 1, \dots, n\}$ corresponde aos elementos da linha i em E . F é o conjunto de subconjuntos independentes de E , ou seja, o conjunto de parciais transversais de Q . Os parciais transversais de Q contêm no máximo um elemento por linha (no máximo um elemento de Q_i). Assim o conjunto independente de máximo peso $S \subseteq E$ é um parcial transversal de máximo peso do matrõide.

Associando a matriz de pesos C , não negativa, aos elementos de E , podemos aplicar o algoritmo 2 obtendo $S^* \subseteq E$. Pelo teorema (2.1.1) encontramos uma base de peso máximo ou seja, um transversal de peso máximo, S^* , contendo um elemento de cada Q_i ou de cada linha.

Para o exemplo (1.1) temos $E = \{(1,1), (1,2), \dots, (4,4)\}$ e $Q = (Q_1, \dots, Q_4)$ onde $Q_1 = \{(1,1), \dots, (1,4)\}$, $Q_2 = \{\dots\}$, $Q_3 = \{\dots\}$, $Q_4 = \{(4,1), \dots, (4,4)\}$. Aplicando o guloso obtemos $S^* = \{(1,3), (2,3), (3,1), (4,2)\}$ um transversal de Q .

O problema 1 pode ser visto dentro do contexto de um problema de localização. Escolher para cada cliente $i \in I = \{1, \dots, m\}$ um único armazém $j \in J = \{1, \dots, n\}$ de forma a maximizar o retorno.

EXEMPLO 2.1.2

No problema 2 um conjunto de trabalhos serão executados. Seja $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ este conjunto de trabalhos. A cada

trabalho está associado um tempo de entrega e uma penalidade. Podemos assim separar os trabalhos em conjuntos por tempo de entrega. Seja $Q = (Q_1, \dots, Q_m)$ onde Q_i contém todos os trabalhos a serem entregues no tempo $t = i$. Definimos assim um matróide transversal $M = (E, F)$ sobre E . F é o conjunto dos parciais transversais de Q , ou seja, o conjunto de sequências para execução dos trabalhos. Como a cada elemento de E está associada uma penalidade, uma função de pesos não negativa, aplicando o algoritmo 2, obtemos um transversal $S^* \subseteq E$ de peso máximo. Consequentemente S^* é uma sequência para execução dos trabalhos com um total mínimo de penalidade. S^* contém apenas os trabalhos selecionados pelo guloso, os descartados ou atrasados serão executados porém não importando a ordem de execução.

Para o exemplo (1.2), $E = \{e_1, \dots, e_6\}$, $Q = (Q_1, Q_2, Q_3, Q_6)$ onde $Q_1 = \{1, 4\}$, $Q_2 = \{3\}$, $Q_3 = \{2, 5\}$, $Q_6 = \{6\}$. Aplicando o guloso obtemos $S^* = \{4, 3, 2, 6\}$ um transversal de Q .

EXEMPLO 2.1.3

Conforme visto anteriormente, dado um grafo $G(N, A)$ podemos definir um matróide gráfico $M = (E, F)$, onde $E = A$ e F o conjunto de florestas de G . No problema 3 temos associado a cada elemento de E um custo de ligação, não negativo. Aplicando o algoritmo 2 ao matróide gráfico obtemos $S^* \subseteq E$, uma árvore de peso mínimo. Pelo teorema (2.1.1), S^* é uma base do matróide ou uma árvore geradora mínima de G .

2.2 - Alguns Algoritmos Gulosos Específicos para Matrôides

Pelos exemplos anteriores, a utilização do algoritmo 2 exige a definição clara de um matrôide sobre E e da "estrutura de independência". Pois, no PASSO 2 deste algoritmo é testada a independência dos subconjuntos de E , ou seja, se $(S^k \cup \{e_{k+1}\}) \in F$. Assim, dependendo do tipo de matrôide ou da estrutura de independência definida sobre E , a operacionalização do PASSO 2 é variável. Portanto, vários algoritmos gulosos podem ser apresentados diferenciando basicamente no PASSO 2, conforme o método utilizado na determinação de conjuntos independentes. Em geral estes algoritmos procuram atingir um tipo específico de matrôide: gráfico, matricial, transversal, etc.

Seja $M = (E, F)$ um matrôide matricial definido sobre $E = \{e_1, \dots, e_n\}$. E é o conjunto de colunas de uma matriz. F é o conjunto de subconjuntos LI de E . A cada coluna, $e_j \in E$, associamos um peso c_j . Aplicando o algoritmo 2, no PASSO 2 testaremos a independência linear entre colunas da matriz. Para isto, um método prático bastante simples é a eliminação gaussiana. Assim um algoritmo guloso é apresentado com a eliminação gaussiana embutida no PASSO 2 do algoritmo 2.

ALGORITMO 3 - GULOSO PARA MATRÔIDES MATRICIAIS

PASSO 0. $k = 1$

PASSO 1. Seja $n = |E|$ e ordene os elementos de E de modo que

$$c(e_1) \geq c(e_2) \geq \dots \geq c(e_n).$$

PASSO 2. Se coluna k é nula, vá para PASSO 3.

Se não escolha qualquer $a_{ik} \neq 0$ na coluna k .

$$\text{Faça } a_j = a_j - \frac{a_{ij}}{a_{ik}} a_k, \quad \forall j > k \text{ e } a_{ij} \neq 0.$$

PASSO 3. $k = k + 1$.

PASSO 4. Se $k < n$, repete PASSO 2.

Se não PARE.

As colunas não nulas resultantes formam uma base $S^* \subseteq E$, do matrõide matricial de posto igual ao número delas.

Esta base, pelo teorema (2.1.1) é uma base de peso máximo.

EXEMPLO 2.2.1

Seja o matrõide matricial $M = (E, F)$ definido sobre $E = \{e_1, e_2, \dots, e_5\}$, onde e_i corresponde a i^{a} coluna da matriz A ($m \times n$) abaixo. F é o conjunto de subconjuntos LI de E . Seja $c = (c_1, \dots, c_5) = (9, 4, 8, 10, 1)$ o vetor de pesos associados a E .

$$E = \{e_1 \quad e_2 \quad e_3 \quad e_4 \quad e_5\}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 8 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 5 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$c = (9 \quad 4 \quad 8 \quad 10 \quad 1)$$

Aplicando o guloso para o matrõide matricial temos:

$$P0. \quad k = 1$$

$$P1. \quad n = |E| = 5$$

$$c(e_4) \geq c(e_1) \geq c(e_3) \geq c(e_2) \geq c(e_5)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 8 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

P2. Seja $a_{ik} = a_{11} = 1$, $a_{ij} = a_{13} = 2$, $a_{ij} = a_{15} = 1$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P3. k = k + 1 = 2$$

$$P4. k < n$$

$$P2. a_{ik} = a_{22} = -1, a_{ij} = a_{23} = -1, a_{ij} = a_{24} = 1, a_{ij} = a_{25} = 1$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P3. k = k + 1 = 3$$

$$P4. k < n$$

P2. columna k \bar{e} nula

$$P3. k = k + 1 = 4$$

$$P4. k < n$$

$$P2. a_{ik} = a_{34} = 3, a_{ij} = a_{35} = 3$$

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

P3. $k = k + 1 = 5$

P4. $k = n$, PARE

Assim, as três colunas não nulas são independentes, ou seja, o conjunto $S^* = \{e_4, e_1, e_2\} \subseteq E$ é independente e de peso máximo.

O algoritmo primeiro ordena os elementos de E em ordem decrescente de pesos. A cada iteração (PASSO 2) selecionamos uma coluna de peso máximo e trabalhamos nas demais (a direita). Assim procura-se fixar primeiro as colunas de maior peso.

A eliminação gaussiana apesar de sua simplicidade é bastante ineficiente. Outros algoritmos gulosos para matrôides matriciais podem ser encontrados, bem como para os demais tipos de matrôides.

Para os matrôides gráficos, a determinação da árvore geradora mínima pode ser obtida pelo algoritmo guloso de Prim. Este é apresentado como algoritmo B no apêndice B. Separa os nós do grafo em dois conjuntos: P , o conjunto de nós pesquisados e \bar{P} conjunto dos nós não pesquisados. Iniciando por um nó qualquer a cada passo procura anexar um elemento de \bar{P} ligado a um elemento de P por um arco de peso mínimo entre todas as ligações de \bar{P} a P . Com isto garante a formação de uma árvore geradora mínima. É um algoritmo guloso que mantém as características do algoritmo 2, porém com uma sequência de operações diferentes deste.

2.3 - Matrõide como Modelo de Otimizaçãõ

Seja o matrõide $M = (E, F)$ sobre $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ e a funçãõ de pesos $c = (c_1, \dots, c_n)$, $c: E \rightarrow \mathbb{R}$. Atẽ entãõ, o problema foi:

"encontrar um subconjunto $S \subseteq E$ tal que S ẽ independente e de peso mÃximo".

Na seçãõ anterior foi visto que dependendo do tipo de matrõide ou da "estrutura de independẽncia" o algoritmo guloso 2 sofre variações. Os algoritmos gulosos especĩficos, apesar de manterem as caracterĩsticas do algoritmo 2, diferenciam basicamente no PASSO 2, conforme o mẽtodo utilizado na determinaçãõ de conjuntos independentes. Assim, estãõ voltados para matrõides especĩficos.

O objetivo desta seçãõ ẽ englobar em um modelo de otimizaçãõ a estrutura de matrõides e a funçãõ de pesos c . Com isto, podemos aplicar um algoritmo guloso ẽnico utilizando da estrutura do modelo e determinar um subconjunto independente $S \subseteq E$ de peso mÃximo.

Um modelo de otimizaçãõ que englobe o problema acima consiste em duas partes:

FUNÇÃõ OBJETIVO \leftrightarrow FUNÇÃõ DE PESOS c
(PESO MÃXIMO)

RESTRICõES \leftrightarrow ESTRUTURA DE MATRõIDE
(INDEPENDẽNCIA)

Para montagem do modelo definiremos alguns elementos básicos.

Conforme visto anteriormente os elementos de E são bem definidos. e_i pode representar uma posição (i,j) de uma matriz $(m \times n)$ (Exemplo 2.1.1), um trabalho a ser executado (Exemplo 2.1.2), um arco no grafo G (Exemplo 2.1.3), uma coluna de uma matriz (Matrõide Matricial, Exemplo (2.2.1)), etc.

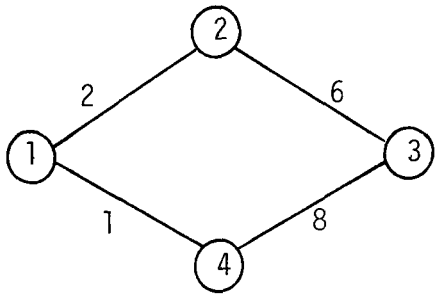
Por simplicidade, faremos $E = \{1, 2, \dots, n\}$ um conjunto de índices, onde podemos supor esses índices associados a identidades bem definidas.

Seja \mathbb{R}^E (\mathbb{R}_+^E) o espaço de vetores com componentes reais (não-negativas) indexados por E . Para $x \in \mathbb{R}^E$ e $j \in E$, x_j é a j^a coordenada de x .

Como estamos interessados em identificar subconjuntos $S_i \subseteq E$, definimos o vetor $x^i = (x_1^i, \dots, x_n^i)$, $x^i \in \mathbb{R}_+^E$, onde $x_j^i = 1$ se $j \in S_i$ e $x_j^i = 0$ se $j \notin S_i$. A esse vetor de componentes 0/1 denominamos VETOR $[0, 1]$ ou INCIDENTE.

EXEMPLO 2.3.1

Seja o grafo $G(N, A)$ da figura (III.2), onde a cada arco (i,j) está associado o peso c_{ij} .



Arcos	-	c_{ij}
1-(1,2)		2
2-(1,4)		6
3-(2,3)		8
4-(3,4)		1

Figura III.2. Exemplo 2.3.1

Seja o matrõide gráfico $M = (E, F)$ onde $E = A = \{(1,2), (1,4), (2,3), (3,4)\}$ e F o conjunto de florestas de G . Considerando E como um conjunto de índices associados aos arcos de G temos $E = \{1, 2, 3, 4\}$. Para os subconjuntos $S_i \subseteq E$ temos os $x^i \in \mathbb{R}^E$:

$$\begin{array}{ll}
 S_i = \{1\} \rightarrow x^i = (1, 0, 0, 0) & S_i = \{1, 2, 3\} \rightarrow x^i = (1, 1, 1, 0) \\
 S_i = \{1, 3\} \rightarrow x^i = (1, 0, 1, 0) & S_i = \{2, 3, 4\} \rightarrow x^i = (0, 1, 1, 1) \\
 S_i = \{2, 3\} \rightarrow x^i = (0, 1, 1, 0) & S_i = \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow x^i = (1, 1, 1, 1)
 \end{array}$$

De forma a atingir o modelo proposto, procuraremos tentar garantir através de um conjunto de restrições a geração de um conjunto independente $S_i \subseteq E$, $S_i \in F$. Seja o conjunto $S_i \subseteq E$ e seja $x^i = (x_1^i, \dots, x_n^i)$ o vetor relativo a S_i . Pela definição de x^i temos que:

$$\sum_{j \in S_i} x_j^i = |S_i| \quad (\text{III.9})$$

Por outro lado como $x^i \in \mathbb{R}^E$ está associado ao conjunto de índices E , podemos tomar um subconjunto $S_k \subseteq E$ destes índices. 0

somatório das componentes de x^i relativas a esse subconjunto S_k de índices \bar{e} evidentemente:

$$\sum_{j \in S_k} x_j^i = |S_i \cap S_k| \quad (\text{III.10})$$

Como estamos com um subconjunto $S_i \subseteq E$ qualquer, faremos duas considerações: (a) S_i é um conjunto dependente e (b) S_i é um conjunto independente. De (III.9) e (III.10) e as considerações (a) e (b) montaremos um conjunto de restrições que garantirá a obtenção de $S_i \subseteq E$ como um conjunto independente. Seja,

(a) S_i é um conjunto dependente.

Da definição de conjunto dependente, capítulo II, sabemos que

$$r(S_i) < |S_i|$$

$$\text{Logo, de (III.9), } |S_i| = \sum_{j \in S_i} x_j^i > r(S_i) \quad (\text{III.11})$$

Para os demais subconjuntos $S_k \subseteq E$ que podem ser ou não independentes temos:

$$r(S_k) \leq |S_k|$$

Mas como $r(S_k) \underset{<}{\geq} |S_i \cap S_k|$

isto é, nenhuma afirmativa pode ser feita com relação a (III.10). Assim

$$\sum_{j \in S_k} x_j^i = |S_i \cap S_k| \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} r(S_k) \quad (\text{III.12})$$

(b) S_i é um conjunto independente.

Da definição de posto de um conjunto em um matróide temos:

$$r(S_i) = |S_i|$$

Logo,
$$\sum_{j \in S_i} x_j^i = r(S_i) \quad (\text{III.13})$$

Para os demais subconjuntos $S_k \subseteq E$, como os elementos de S_i são independentes, também serão os elementos da interseção $(S_i \cap S_k)$. Logo, existem pelo menos tantos elementos independentes em S_k quantos forem os elementos da interseção $(S_i \cap S_k)$. Isto é

$$r(S_k) \geq |S_i \cap S_k|$$

Logo, de (III.10)
$$\sum_{j \in S_k} x_j^i = |S_i \cap S_k| \leq r(S_k) \quad (\text{III.14})$$

Com o objetivo de gerar conjuntos S_i independentes, podemos concluir de (III.11), (III.12), (III.13) e (III.14) que é suficiente termos:

$$\sum_{j \in S} x_j^i \leq r(S), \forall S \subseteq E \quad (\text{III.15})$$

Assim um vetor x^i solução viável do conjunto de restrições (III.15), corresponde a um subconjunto $S_i \subseteq E$ tal que S_i é independente.

Por simplicidade, façamos $x^i = x = (x_1, \dots, x_n)$ podendo finalmente escrever

$$\sum_{j \in S} x_j \leq r(S), \forall S \subseteq E \quad (\text{III.16})$$

O modelo estará completo com a determinação de uma função objetivo. A função de pesos c está associada a E e procuramos um vetor x satisfazendo (III.16), de peso máximo. Logo, queremos o vetor $x \in \mathbb{R}^E$ que maximiza a função:

$$Z = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \quad (\text{III.17})$$

De (III.16) e (III.17) o modelo de otimização consiste em:

$$\max Z = \sum_{j \in E} c_j x_j$$

$$(M1) \quad \text{s.a.} \quad \sum_{j \in S} x_j \leq r(S), \forall S \subseteq E \quad (\text{III.18})$$

$$x_j \in [0, 1], j \in E, \text{ inteiro} \quad (\text{III.19})$$

Como a matriz de restrições, gerada pelas restrições tipo (III.18), é unimodular e a função posto em um matrõide assume somente valores inteiros, as soluções viáveis do problema (M1) são inteiras, independente das restrições de intericidade em (III.19). Logo, podemos trabalhar com o problema relaxado, ou seja:

$$\max Z = \sum_{j \in E} c_j x_j$$

(M2)

$$\text{s.a. } \sum_{j \in S} x_j \leq r(S), \forall S \subseteq E \quad (\text{III.20})$$

$$x_j \geq 0, j \in E \quad (\text{III.21})$$

Do conjunto de restrições (III.20) e (III.21) temos a interseção de semi-espacos formando um politopo. Como este politopo é limitado, temos, um poliedro o qual denominamos POLIEDRO DO MATRÕIDE ou POLIEDRO P.

EXEMPLO 2.3.2

Utilizando o exemplo (2.3.1) temos que $E = \{1, 2, 3, 4\}$ e a função custo $c: E \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por $c = (2, 1, 6, 8)$. O problema (M2) pode ser escrito como:

$$\max Z = 2x_1 + x_2 + 6x_3 + 8x_4$$

POLIEDRO P OU
POLIEDRO DO
MATRÓIDE

$$\left\{ \begin{array}{ll} x_1 & \leq 1 \quad S = \{1\} \\ & x_2 & \leq 1 \quad S = \{2\} \\ & & x_3 & \leq 1 \quad S = \{3\} \\ & & & x_4 & \leq 1 \quad S = \{4\} \\ x_1 + x_2 & \leq 2 \quad S = \{1,2\} \\ x_1 & & x_3 & \leq 2 \quad S = \{1,3\} \\ x_1 & & & + x_4 & \leq 2 \quad S = \{1,4\} \\ & x_2 + x_3 & \leq 2 \quad S = \{2,3\} \\ & x_2 & & + x_4 & \leq 2 \quad S = \{2,4\} \\ & & x_3 + x_4 & \leq 2 \quad S = \{3,4\} \\ x_1 + x_2 + x_3 & \leq 3 \quad S = \{1,2,3\} \\ x_1 + x_2 & & + x_4 & \leq 3 \quad S = \{1,2,4\} \\ x_1 + & & x_3 + x_4 & \leq 3 \quad S = \{1,3,4\} \\ & x_2 + x_3 + x_4 & \leq 3 \quad S = \{2,3,4\} \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & \leq 3 \quad S = \{1,2,3,4\} \\ x_1, x_2, x_3, x_4 & \geq 0 \end{array} \right.$$

EXEMPLO 2.3.3

No \mathbb{R}^2 , os problemas (M2) são da forma apresentadas abaixo e a representação geométrica é dada pela figura (III-3). Seja $E = \{1,2\}$ e a função de pesos $c = (c_1, c_2)$.

(a) 1 e 2 são dependentes

(b) 1 e 2 são independentes

$$\text{Max } c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{max } c_1 x_1 + c_2 x_2$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_2 \leq 1$$

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

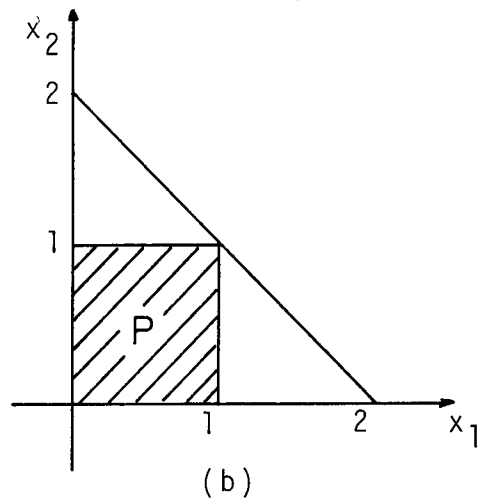
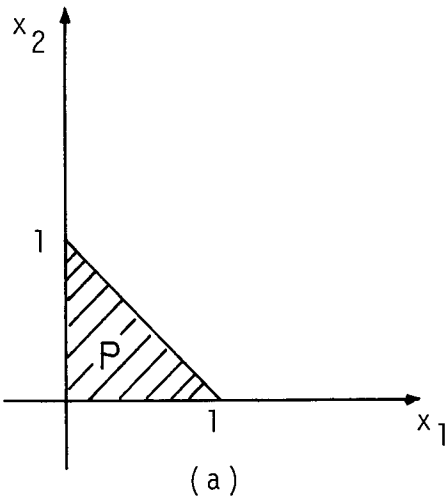


Figura III.3. Exemplo (2.3.3)

Com o modelo de otimização para um matrõide definido, (M2), resta-nos a obtenção de uma solução ótima $x^* \in \mathbb{R}^E$, ou seja $S^* \subseteq E$, $S^* \in F$.

Antes porém, garantiremos que x^* é um vértice do poliedro do matrõide.

TEOREMA 2.3.1

Seja um matrõide $M = (E, F)$. O conjunto de vrtices do poliedro do matrõide  precisamente o conjunto de vetores $[0, 1]$ dos conjuntos independentes do matrõide.

Demonstrao: |8|

Portanto, um vrtice do poliedro P de $(M2)$  um conjunto independente do matrõide. Basta determinar no poliedro do matrõide o vrtice de peso máximo, o que  feito pelo algoritmo guloso, utilizando a funo posto r que gerou o poliedro.

ALGORITMO 4 - GULOSO PARA MATRIDES

PASSO 0. Seja $E = \{1, 2, \dots, n\}$ e $c: E \rightarrow \mathbb{R}$. Seja $\pi(c) = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ uma permutao dos elementos de E tal que

$$c_{i_1} \geq c_{i_2} \geq \dots \geq c_{i_k} > 0 \geq c_{i_{k+1}} \geq \dots \geq c_{i_n}, \quad k \leq n$$

Para $j = 1, 2, \dots, k$ seja $S_j = \{i_1, i_2, \dots, i_j\}$

PASSO 1. Para $j = 1$, faa $x_{i_1}^* = r(S_1)$

PASSO 2. Para $j = 2, 3, \dots, k$

$$\text{Faa } x_{i_j}^* = r(S_j) - r(S_{j-1})$$

PASSO 3. Para $j = k + 1, \dots, n$

$$\text{Faa } x_{i_j}^* = 0$$

O vetor $[0, 1] x^* \in \mathbb{R}^E$ está associado a um conjunto independente $S^* \subseteq E$ de peso máximo.

No passo o ordenamos os elementos de E em ordem decrescente de pesos. A partir do passo 1 um elemento j de peso máximo é adicionado a um conjunto S_{j-1} . Se eles forem independentes temos $x_j^* = 1$, pois $r(S_j) = r(S_{j-1}) + 1$, caso contrário $x_j^* = 0 = r(S_j) - r(S_{j-1})$.

EXEMPLO 2.3.4

Utilizando o exemplo (2.3.2), aplicando o algoritmo 4, temos:

P0. $E = \{1, 2, 3, 4\}$, $c = (2, 1, 6, 8) \rightarrow \pi(c) = (4, 3, 1, 2)$. Logo, $c_4 \geq c_3 \geq c_1 \geq c_2 > 0$, $k = n = 4$

P1. Para $j = 1$, $x_4^* = r(S_1) = r(\{4\}) = 1$

P2. Para $j = 2$, $x_3^* = r(S_2) - r(S_1) = r(\{4, 3\}) - 1 = 2 - 1 = 1$

$j = 3$, $x_1^* = r(S_3) - r(S_2) = r(\{4, 3, 1\}) - 2 = 3 - 2 = 1$

$j = 4$, $x_2^* = r(S_4) - r(S_3) = r(\{4, 3, 1, 2\}) - 3 = 3 - 3 = 0$

$x^* = (1, 0, 1, 1)$ é solução ótima e $Z^* = 2 + 6 + 8 = 16$. A x^* corresponde a $S^* = \{1, 3, 4\} \subseteq E$. Temos assim que S^* é uma árvore geradora de peso máximo do grafo G da figura (III.2).

TEOREMA 2.3.2

A solução x^* obtida pelo guloso, é ótima.

Demonstração: Consideremos o problema a ser resolvido, o primal e o seu dual:

PRIMAL		DUAL
$\max Z = cx$ $\sum_{j \in S} x_j \leq r(S), \forall S \subseteq E \quad (\text{III.20})$ $x_j \geq 0, j \in E \quad (\text{III.21})$	$\left. \begin{array}{l} \min W = ry = \sum_{S \subseteq E} r(S) \cdot y_S \\ \sum_{S \ni j \in S} y_S \geq c_j, \forall j \in E \quad (\text{III.22}) \\ y_S \geq 0, \forall S \subseteq E \quad (\text{III.23}) \end{array} \right\}$	

Sem perda de generalidade, seja $\pi(c) = (i_1, \dots, i_n) = (1, \dots, n)$ tal que $c_1 \geq c_2 \geq c_k > 0 \geq c_{k+1} \geq \dots \geq c_n$

Seja x^* a solução do algoritmo guloso para o primal:

$$\begin{aligned} x_1^* &= r(S_1) \\ x_2^* &= r(S_2) - r(S_1) \\ &\vdots \\ x_k^* &= r(S_k) - r(S_{k-1}) \\ x_{k+1}^* &= \dots = x_n^* = 0 \end{aligned}$$

Temos que $x_j^* = 0/1$, caso seja o elemento j dependente ou independente em S_{j-1} . Assim, as restrições (III.20) e (III.21) do pri-

mal são satisfeitas e x^* é uma solução viável. Para mostrar que x^* é uma solução ótima utilizaremos a teoria da dualidade

Seja y^* dado por:

$$y_{S_1}^* = c_1 - c_2, \quad S_1 = \{i_1\} = \{1\}$$

$$y_{S_2}^* = c_2 - c_3, \quad S_2 = \{i_1, i_2\} = \{1, 2\}$$

⋮

$$y_{S_j}^* = c_j - c_{j+1}, \quad S_j = \{i_1, \dots, i_j\} = \{1, 2, \dots, j\}$$

⋮

$$y_{S_k}^* = c_k, \quad S_k = \{i_1, \dots, i_k\} = \{1, 2, \dots, k\}$$

$$y_S^* = 0, \text{ para as demais } S \subseteq E$$

Pela ordenação dos pesos c_j , $y_S^* \geq 0$, $\forall S \subseteq E$ e é uma solução viável do dual satisfazendo (III.22) e (III.23).

Para x^* viável no primal temos $Z^* = c x^*$. Logo

$$\begin{aligned} Z^* = c x^* &= \sum_{j \in E} c_j x_j^* = c_1 \cdot r(S_1) + c_2 (r(S_2) - r(S_1)) + \dots + c_k (r(S_k) - r(S_{k-1})) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} (c_j - c_{j+1}) \cdot r(S_j) + c_k \cdot r(S_k) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} y_{S_j}^* \cdot r(S_j) + y_{S_k}^* \cdot r(S_k) \\ &= \sum_{S \subseteq E} r(S) \cdot y_S^* = W^* \end{aligned}$$

Como x^* e y^* são soluções viáveis do primal e dual respectivamente e $Z^* = W^*$ então pela teoria da dualidade em Programação Linear x^* e y^* são soluções ótimas. ■

Com o teorema (2.3.2) o objetivo da seção é atingido: determinar um modelo de otimização englobando a estrutura de matrõide. Porém, não chega a ser um resultado muito prático para aplicação do conceito de matrõide, uma vez que ainda envolve a função posto e conseqüentemente o conceito de independência.

Mas é um passo inicial em termos de modelo que será expandido na próxima seção. Além disso, o enfoque poliedrico dado a um matrõide permite tratar problemas de interseção de matrõides, onde x representará um subconjunto $S \subseteq E$ independente em todos os matrõides $M_i = (E, F_i)$, $i = 1, \dots, k$. (Apêndice C).

Um outro problema a ser ressaltado é quanto ao grande número de restrições em (M2). Temos uma restrição para cada subconjunto $S \subseteq E$. Porém, como podemos observar no exemplo (2.3.2) muitas restrições são redundantes, (as restrições 11^a, 12^a, 13^a e 14^a são redundantes com relação a 15^a restrição). Este problema pode ser contornado reduzindo o número de restrições. Para isto, definemos o conceito de reticulado L do matrõide $M = (E, F)$ e (M2) na forma:

$$\begin{aligned} \max Z &= c \cdot x \\ \text{s.a.} \quad \sum_{j \in S} x_j &\leq r(S), \quad \forall S \in (L - \emptyset) \\ x_j &\geq 0, \quad j \in E \end{aligned}$$

Os subconjuntos $S \in L$ são os subconjuntos $S \subseteq E$ fechados (seção II-2.4) no matrôide $M = (E, F)$. (Veja apêndice A).

3. ALGORITMOS GULOSOS APLICADOS A POLIMATRÓIDES

3.1 - Introdução

Na seção anterior foi desenvolvido um modelo de otimização (M2) para matrôides $M = (E, F)$, $E = \{1, 2, \dots, n\}$, como:

$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ (M2) \quad & \sum_{j \in S} x_j \leq r(S), \quad \forall S \subseteq E \\ & x_j \geq 0, \quad j \in E \end{aligned}$$

onde os vetores $x = (x_1, \dots, x_n)$ possuem componentes 0/1 e a função r de subconjuntos de E é a função posto para o matrôide M . Ao conjunto de soluções viáveis de (M2) denominamos poliedro do matrôide.

O objetivo desta seção é a partir de (M2) obter um modelo de otimização mais abrangente. Modelo este que dentro de condições particulares represente o próprio (M2). Para isto, sejam os vetores $x = (x_1, \dots, x_n)$ vetores de componentes reais (não necessariamente 0/1). Pelo teorema (II-2.1.2) a função r é uma função não-negativa, não-decrescente e submodular. Seja g uma função de subconjuntos de E , com valores reais, satisfa-

zendo também as propriedades não-negativa, não-decrescente e submodular. Com estes elementos, o modelo mais abrangente que visamos obter é da forma:

$$\begin{aligned}
 & \max \quad cx \\
 (M3) \quad & \sum_{j \in S} x_j \leq g(S), \quad \forall S \subseteq E \\
 & x_j \geq 0, \quad j \in E
 \end{aligned}$$

Conseqüentemente, o modelo de otimização para um matrõide é um caso particular de (M3) onde g é uma função posto para este matrõide e os vetores x são vetores $[0, 1]$.

Ao conjunto de soluções viáveis de (M3) denominamos POLIEDRO DO POLIMATRÕIDE. Portanto definiremos uma nova estrutura denominada POLIMATRÕIDE. Procuraremos nesta seção caracterizar esta estrutura que também será utilizada na próxima seção.

Fazendo um paralelo entre (M2) e (M3) temos:

$$\begin{aligned}
 x \text{ vetor } [0,1] & \leftrightarrow x \text{ vetor de componentes reais} \\
 r(S) & \leftrightarrow g(S)
 \end{aligned}$$

$$\text{POLIEDRO DO MATRÕIDE} \leftrightarrow \text{POLIEDRO DO POLIMATRÕIDE}$$

Da mesma maneira que a seção anterior, apresentaremos um algoritmo guloso exato para o modelo (M3).

3.2 - Definição de Polimatróides

Seja $E = \{1, 2, \dots, n\}$ um conjunto de índices associados a identidades bem definidas (arcos, colunas, etc). Seja \mathbb{R}^E (\mathbb{R}_+^E) o espaço de vetores com componentes reais (não-negativas) indexadas por E . Seja $c : E \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de pesos.

Seja $x \in \mathbb{R}^E$ e $y \in \mathbb{R}^E$,

. escrevemos $x \geq y$ se $x_j \geq y_j, \forall j \in E$. Denominamos y um SUB-VETOR de x ;

. escrevemos $x > y$ se existe pelo menos um $j \in E$ tal que $x_j > y_j$ e as demais componentes são iguais, $x_j = y_j$;

. de forma semelhante, temos $x \leq y, x < y$.

Para $S \subseteq E$ definimos $x(S) = \sum_{j \in S} x_j$ e denominamos MÓDULO de x , $|x| = x(E) = \sum_{j \in E} x_j$.

Seja $x, y, z \in \mathbb{R}^E$, definimos

$z = (x \wedge y)$ se $z_j = \min(x_j, y_j), \forall j \in E$

$z = (x \vee y)$ se $z_j = \max(x_j, y_j), \forall j \in E$

Um vetor x é MÁXIMO DE (ou MAXIMAL EM) um conjunto P se não existe $y \in P$ tal que $y > x$.

POLIMATRÓIDE \mathbb{P} é um par (E, P) onde E é um conjunto finito e P é um subconjunto compacto de \mathbb{R}_+^E tal que:

(P1) vetor nulo pertence a P , $0 \in P$

(P2) se $x \in P$ e $0 \leq y \leq x$ então $y \in P$;

(P3) se $x, y \in P$ e $|x| > |y|$ então existe um vetor $z \in P$ tal que $y < z \leq y \vee x$.

Por analogia a matróide, os elementos de P são denominados vetores independentes de \mathbb{P} .

EXEMPLO 3.2.1

Seja $E = \{1, 2\}$. Os subconjuntos P de \mathbb{R}_+^2 na figura (III-4) satisfazem (P1 - P3). Logo temos exemplos de polimatróides (E, P) no \mathbb{R}_+^2 .

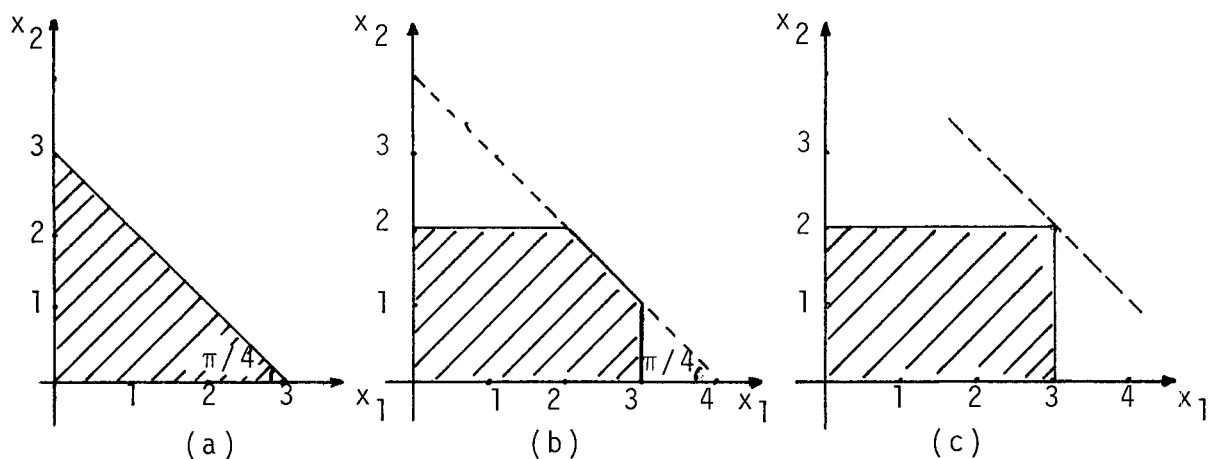


Fig. III-4. Exemplo 3.2.1

EXEMPLO 3.2.2

Seja $E = \{1, 2\}$ e seja os subconjuntos compactos P de \mathbb{R}_+^2 na figura (III-5).

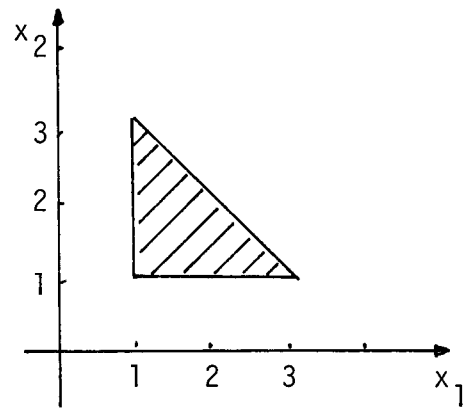
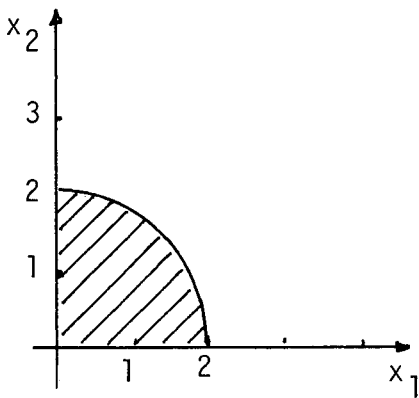
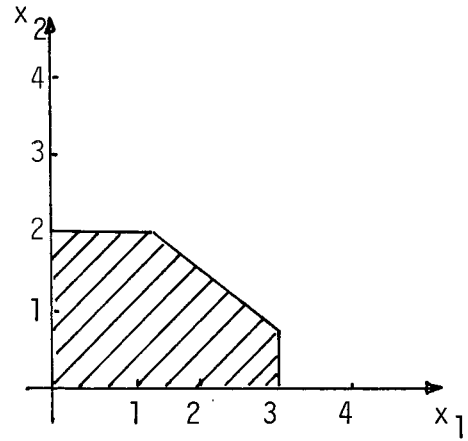
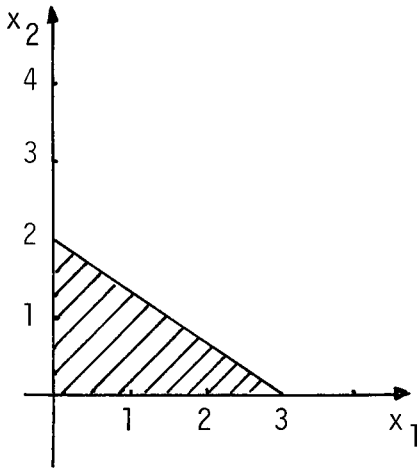


Fig. III-5. Exemplo 3.2.2

Em (a), (b) e (c) temos que (P1) e (P2) são satisfeitas, porém (P3) não é satisfeita, logo não temos um polimatróide. Seja $x = (3, 0)$ e $y = (0, 2)$ em (a). Temos $|x| = 3 > 2 = |y|$, no entanto não existe $z \in P$ tal que $z > y$.

Seja $x = (3, 3/4)$ e $y = (4/3, 2)$ em (b). Temos $|x| = 15/4 > 10/3 = |y|$ no entanto não existe $z \in P$ tal que $z > y$.

Seja $x = (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ e $y = (1, \sqrt{3})$ em (c). Temos $|x| \approx 2,82 > 2,73 \approx |y|$, no entanto não existe $z \in P$ tal que $z > y$.

Em (d) temos que (P3) é satisfeita porém (P1) e (P2) não são satisfeitas.

Pela definição, P é um subconjunto compacto de \mathbb{R}_+^E , portanto, como verificaremos posteriormente, P é um poliedro interseção de semi-espacos que contém suas faces. Pelos exemplos podemos verificar que para obtermos um polimatróide as faces do poliedro P devem interceptar em ângulos de 0° , 45° ou 90° , caso contrário (P3) não é satisfeita. A esse poliedro P denominamos POLIEDRO DO POLIMATRÓIDE.

EXEMPLO 3.2.3

Um polimatróide no \mathbb{R}_+^3 pode ser visto na figura (III-6).

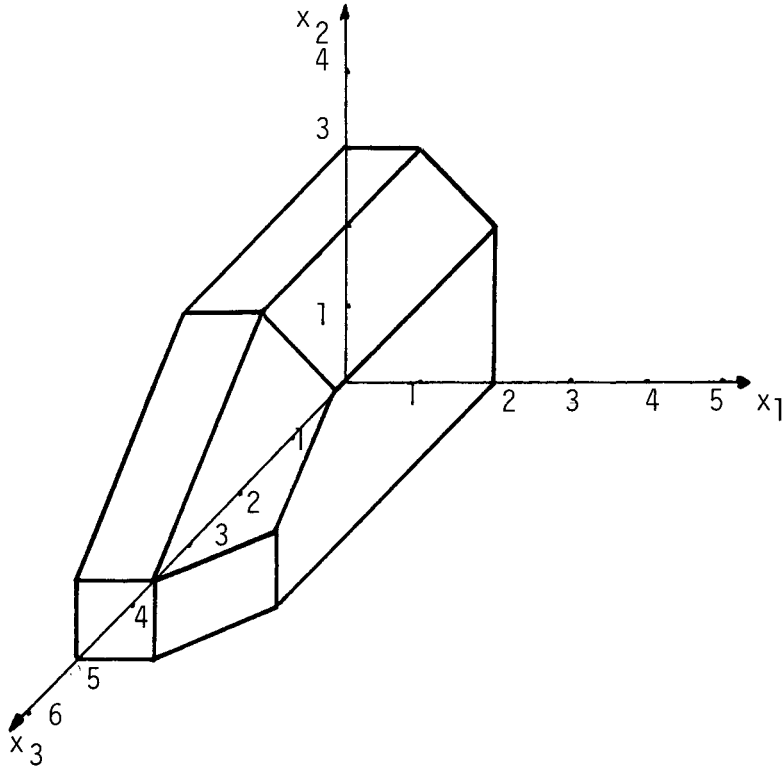


Fig. III-6. Exemplo 3.2.3

Pelas propriedades (P1 - P3) podemos verificar a semelhança com as propriedades (I1-I3) da definição de matrôides. Para isto, basta fazer um paralelo:

CONJUNTO	↔	VETOR
SUBCONJUNTO	↔	SUBVETOR
CARDINALIDADE	↔	MÓDULO

Da mesma forma como fizemos para matrôides, apresentaremos alguns conceitos que caracterizarão melhor a estrutura de polimatrôide.

Seja $x \in \mathbb{R}_+^E$. POSTO de x - $r(x)$ - é o subvetor in

dependente de x de máximo módulo.

$$r(x) = \max (|y| \mid y \leq x \text{ e } y \in P)$$

EXEMPLO 3.2.4

Seja o polimatróide (E, P) onde P é dado pela figura (III-4(b)) do exemplo (3.2.1). Seja os vetores $x \in \mathbb{R}_+^E$ na figura (III-7).

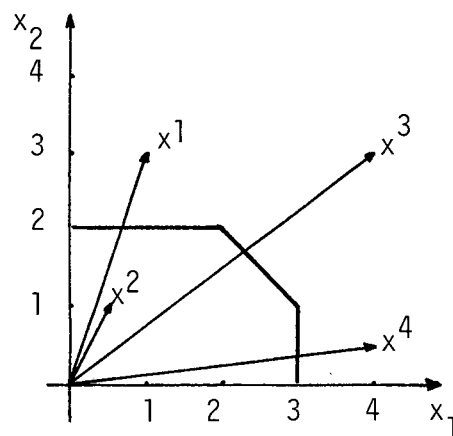


Fig. III-7. Exemplo 3.2.4

Dado $x \in \mathbb{R}_+^E$, seja então $r(x) = |y| = \sum_{j \in E} y_j$ onde $y \leq x$ e $y \in P$.

$$x^1 = (1, 3) \rightarrow \begin{cases} y \leq (1, 3) \\ y \in P \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 \leq 1, y_2 \leq 3 \\ y_1 \leq 3, y_2 \leq 2, y_1 + y_2 \leq 4 \end{cases}$$

$$\text{Logo } y_1 = 1, y_2 = 2 \rightarrow r(x^1) = |y| = 3$$

$$x^2 = (0,5; 1) \rightarrow \begin{cases} y \leq (0,5; 1) \\ y \in P \end{cases} \left[\begin{array}{l} \text{Como } x^2 \in P \rightarrow y=x^2, r(x^2)=|x^2|=1,5 \\ \end{array} \right.$$

$$x^3 = (4,3) \rightarrow \begin{cases} y \leq (4,3) \\ y \in P \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 \leq 4, y_2 \leq 3 \\ y_1 \leq 3, y_2 \leq 2, y_1 + y_2 \leq 4 \end{cases}$$

Logo $r(x^3) = |y|$ para todo y tal que $y_1 + y_2 = 4$, $y_1 \leq 3$, $y_2 \leq 2$. Seja $y = (2,5; 1,5) \rightarrow r(x^3) = |y| = 4$

$$x^4 = (4; 0,5) \rightarrow \begin{cases} y \leq (4; 0,5) \\ y \in P \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y_1 \leq 4, y_2 \leq 0,5 \\ y_1 \leq 3, y_2 \leq 2, y_1 + y_2 \leq 4 \end{cases}$$

Logo $y_1 = 3, y_2 = 0,5 \rightarrow r(x^4) = |y| = 3,5$

De forma semelhante a matrôides, podemos enunciar o teorema:

TEOREMA 3.2.1

Se $IP = (E, P)$ é um polimatrôide, a função posto r de vetores de \mathbb{R}_+^E verifica:

(a) $r(0) = 0$

(b) $\forall x \leq y \in \mathbb{R}_+^E, r(x) \leq r(y)$

(c) $\forall x, y \in \mathbb{R}_+^E, r(x) + r(y) \geq r(x \vee y) + r(x \wedge y)$ (SUBMODULARIDADE)

Demonstração: Veja |24|

Seja $P \subseteq \mathbb{R}_+^E$. b é uma BASE DE P se é um máximo valor de P .

Seja $P = (E, P)$ um polimatróide e seja o vetor $x \in \mathbb{R}_+^E$. Seja o conjunto dos subvetores independentes de x , $P_x = \{y \in P, y \leq x\}$. BASE DE x é o máximo vetor de P_x .

BASE DO POLIMATRÓIDE é um máximo vetor de P no polimatróide $P = (E, P)$.

EXEMPLO 3.2.5

No exemplo (3.2.1) temos que:

Figura (III-4(a)) - todos os vetores $x \in P$ tal que $|x| = 3$ são bases do polimatróide, pois não existe um outro vetor $y \in P$ tal que $y > x$.

Figura (III-4(b)) - todos os vetores $x \in P$ tal que $|x| = 4$ são bases do polimatróide

Figura (III-4(c)) - o máximo vetor de P é $x = (3, 2)$ tal que $|x| = 5$. Temos uma única base para o polimatróide.

Uma extensão do teorema (II-2.2.2) pode ser enunciada.

TEOREMA 3.2.2

Toda base de um polimatróide (E, P) possui o mesmo módulo.

Demonstração: Seja o polimatróide (E, P) . Seja $b_1 \in P$ e $b_2 \in P$ bases do polimatróide. Suponhamos por absurdo que $|b_1| > |b_2|$. Então por (P3) existe $z \in P$ tal que $b_2 < z \leq b_1 \vee b_2$, o que contradiz a maximalidade de b_2 . Portanto $|b_1| = |b_2|$. ■

Outros resultados podem ser obtidos semelhantes aos obtidos para matrôides. Faremos aqui um paralelo entre os resultados apresentados:

MATRÔIDES	POLIMATRÔIDES
1. $r(S) = \max(R \mid R \subseteq S, R \in F)$	1. $r(x) = \max(y \mid y \leq x, y \in P)$
2. Função posto r satisfaz teorema (II-2.1.2)	2. Função posto r satisfaz teorema (III-3.2.1)
3. Base do matrôide é o máximo subconjunto independente em E	3. Base do polimatróide é o máximo vetor independente em $P = (E, P)$
4. Toda base possui a mesma cardinalidade	4. Toda base possui o mesmo módulo.

Até então, caracterizamos o polimatróide através do conjunto de vetores independentes P , o poliedro do polimatróide. Agora, definiremos uma função g que nos possibilite definir este poliedro de um polimatróide de modo a finalmente obter um modelo de otimização mais abrangente (M3).

TEOREMA 3.2.3

Seja E um conjunto finito não vazio. Seja g uma função de subconjuntos de E , com valores reais e $P = \{x \in \mathbb{R}_+^E \mid x(S) \leq g(S), \forall S \subseteq E\}$. Se g satisfaz:

$$(a) \quad g(\emptyset) = 0$$

$$(b) \quad R \subseteq S \subseteq E \rightarrow g(R) \leq g(S)$$

$$(c) \quad R, S \subseteq E \rightarrow g(R) + g(S) \geq g(R \cup S) + g(R \cap S), \quad \text{então}$$

$IP = (E, P)$ é um polimatróide.

Demonstração: Seja E um conjunto finito e g uma função de subconjuntos de E . Seja $P = \{x \in \mathbb{R}_+^E \mid x(S) \leq g(S), \forall S \subseteq E\}$. Mostraremos que P satisfaz (P1 - P3) e portanto $IP = (E, P)$ é um polimatróide.

Como P é o conjunto interseção dos semi-espacos da forma $x(S) \leq g(S), \forall S \subseteq E$, então P é um conjunto fechado e limitado. Portanto é um subconjunto compacto de \mathbb{R}_+^E . As propriedades (P1) e (P2) são facilmente verificadas.

Para mostrar (P3), seja $x \in P$ e $y \in P$ tal que $|x| > |y|$. Suponhamos que (P3) não é satisfeita, ou seja, não existe $z \in P$ tal que

$$y < z \leq x \vee y$$

Como $|x| > |y|$ então existe $j \in E$ tal que $x_j > y_j$. Seja

$$J = \{j \in E \mid x_j > y_j\} \quad (\text{III.24})$$

Logo, para $j \in J$ existe um conjunto $A \subseteq E$ tal que $j \in A$ e $y(A) = g(A)$, pois, caso contrário poderia aumentar y_j sem violar as restrições $\{y(S) \leq g(S), \forall S \subseteq E\}$. Sem perda de generalidade. Seja $A = \{j\}$. Então, temos:

$$y_j = y(\{j\}) = g(\{j\}) \quad (\text{III.25})$$

Seja R um subconjunto máximo de E tal que

$$y(R) = \sum_{j \in R} y_j = g(R) \quad (\text{III.26})$$

Como $\{j\} \subseteq E$ e $R \subseteq E$, então pela submodularidade de g , propriedade (c), temos que:

$$g(\{j\} \cup R) + g(\{j\} \cap R) \leq g(\{j\}) + g(R) \quad (\text{III.27})$$

De (III.25) e (III.26) temos que

$$g(\{j\}) = y(\{j\}) \text{ e } g(R) = y(R) \quad (\text{III.28})$$

Pela teoria de conjuntos temos que

$$y(\{j\}) + y(R) = y(\{j\} \cup R) + y(\{j\} \cap R) \quad (\text{III.29})$$

Logo, de (III.27), (III.28) e (III.29) temos que:

$$\begin{aligned}
 g(\{j\} \cup R) + g(\{j\} \cap R) &\leq g(\{j\}) + g(R) \\
 &= y(\{j\}) + y(R) \\
 &= y(\{j\} \cup R) + y(\{j\} \cap R)
 \end{aligned}
 \tag{III.30}$$

Como $y \in P$ então $y(\{j\} \cup R) \leq g(\{j\} \cup R)$

$$y(\{j\} \cap R) \leq g(\{j\} \cap R) \tag{III.31}$$

Logo, de (III.30) e (III.31), temos que:

$$\begin{aligned}
 g(\{j\} \cup R) + g(\{j\} \cap R) &\leq y(\{j\} \cup R) + y(\{j\} \cap R) \\
 &\leq g(\{j\} \cup R) + g(\{j\} \cap R)
 \end{aligned}
 \tag{III.32}$$

Portanto a inequação é satisfeita na igualdade. De (III.32) e (III.31) temos:

$$\begin{aligned}
 y(\{j\} \cup R) &= g(\{j\} \cup R) \\
 y(\{j\} \cap R) &= g(\{j\} \cap R)
 \end{aligned}
 \tag{III.33}$$

Seja $j \notin R$ então de (III.33) temos uma contradição a maximalidade de R . Logo, $j \in R$. Mas, desde que o resultado é válido para um j arbitrário, $j \in J$, então $J \subseteq R$. Logo, de (III.24) e (III.26) temos

$$g(R) = y(R) < x(R)$$

o que contradiz a suposição inicial $x \in P$. Logo, para $x \in P$ e $y \in P$, $|x| > |y|$ então existe $z \in P$ tal que $y < z \leq x \vee y$ e (P3) é satisfeita. Portanto P é o poliedro de um polimatróide e $\mathbb{P} = (E, P)$ é um polimatróide. ■

Pela definição, um conjunto P interseção de semi-espacos $x(S) \leq g(S)$, $\forall S \subseteq E$, é o POLIEDRO DO POLIMATRÓIDE (E, P) se g é uma função de subconjuntos de E não-negativa, não-decrescente e submodular.

EXEMPLO 3.2.6

Seja $E = \{1, 2\}$. Temos os subconjuntos de E :

$$S_1 = \{1\}, S_2 = \{2\}, S_3 = \{1, 2\} \text{ e } \emptyset.$$

(a) Seja g tal que $g(\emptyset) = 0$, $g(S_1) = g(S_2) = g(S_3) = 3$. Podemos verificar que g satisfaz as propriedades (a), (b) e (c) (teorema 3.2.3). P é dado por:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 3 \\ x_2 &\leq 3 \\ x_1 + x_2 &\leq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Este poliedro de polimatróide corresponde ao poliedro da figura (III-4(a)).

(b) Seja g tal que $g(\emptyset) = 0$, $g(S_1) = 3$, $g(S_2) = 2$, $g(S_3) = 4$.
Também satisfaz (a), (b) e (c) e temos um polimatróide (E, P)
onde P :

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

\bar{E} é representado geometricamente na figura (III-4(b)).

(c) Seja g tal que $g(\emptyset) = 0$, $g(S_1) = 3$, $g(S_2) = 2$, $g(S_3) = 5$.
Temos um polimatróide (E, P) , onde P :

$$x_1 \leq 3$$

$$x_2 \leq 2$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

\bar{E} é representado geometricamente na figura (III-4(c)).

(d) Seja g tal que: (d_1) $g(\emptyset) = 0$, $g(S_1) = 4$, $g(S_2) = 3$, $g(S_3) = 3$;
 (d_2) $g(\emptyset) = 0$, $g(S_1) = 3$, $g(S_2) = 2$, $g(S_3) = 6$.

Temos em (d_1) que a propriedade (b) não é satisfeita, pois
 $S_1 = \{1\} \subseteq \{1, 2\} = S_3$, mas $g(S_1) > g(S_3)$.

Em (d_2) a propriedade (c) não é satisfeita pois

$$g(S_1) + g(S_2) = 5 < g(S_1 \cup S_2) = g(S_3) = 6$$

Os poliedros definidos por g em (d_1) e (d_2) são apresentados na figura (III-8(a)) e (III-8(b)), respectivamente.

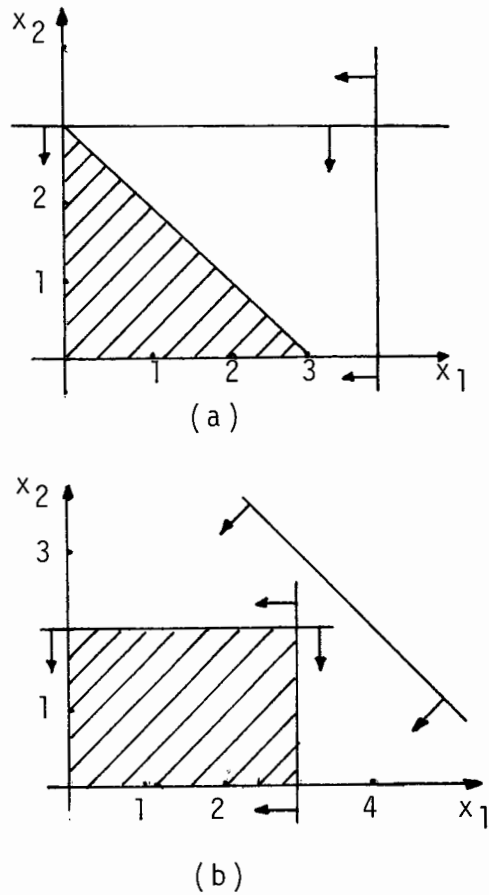


Fig. III-8. Exemplo 3.2.6(d)

Pela figura (III-8) temos que os poliedros gerados satisfazem as propriedades (P1 - P3) e são portanto poliedros de polimatróides. Porém, pelo teorema (3.2.3) nada podemos afirmar uma vez que g não satisfaz as propriedades (a), (b) e (c).

EXEMPLO 3.2.7

Seja $E = \{1, 2, 3\}$ e o poliedro definido por uma função g dada abaixo:

$$\begin{aligned}
 x_1 &\leq 2 = g(\{1\}) \\
 x_2 &\leq 3 = g(\{2\}) \\
 x_3 &\leq 5 = g(\{3\}) \\
 x_1 + x_2 &\leq 4 = g(\{1, 2\}) \\
 x_1 + x_3 &\leq 6 = g(\{1, 3\}) \\
 x_2 + x_3 &\leq 6 = g(\{2, 3\}) \\
 x_1 + x_2 + x_3 &\leq 7 = g(\{1, 2, 3\}) \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Podemos verificar que g satisfaz as propriedades (a), (b) e (c) do teorema (3.2.3) e portanto este poliedro é o poliedro de um polimatróide (E, P) . Sua representação geométrica aparece na figura (III-6).

Pelo teorema (3.2.3), dada uma função g que satisfaz as propriedades (a), (b) e (c) então temos um polimatróide $IP = (E, P)$. Agora, procuraremos mostrar o que corresponderia a volta (\leftarrow) para o teorema (3.2.3). Dado um polimatróide, encontrar uma função g que o caracteriza. Obviamente esta função g satisfaz as propriedades (a), (b) e (c). Antes, porém, apresentaremos um teorema auxiliar.

TEOREMA 3.2.4

Seja o polimatróide $IP = (E, P)$ sobre $E = \{i_1, \dots, i_n\}$ e uma função g definida sobre o conjunto de subconjuntos de E tal que para $S \subseteq E$

$$g(S) = \max_{x \in P} \left\{ \sum_{i \in S} x_i \right\}$$

Seja para $S \subseteq E$ o conjunto de vetores

$X^S = \{x \in P \mid \sum_{i \in S} x_i = g(S)\}$. Então para $R \subseteq S \subseteq E$ existe ao menos um $x \in X^S$ e $x \in X^R$, isto é, $x \in (X^S \cap X^R)$.

Demonstração: Seja o polimatróide $IP = (E, P)$ sobre $E = \{i_1, \dots, i_n\}$ e uma função g definida sobre os subconjuntos de E tal que para $S \subseteq E$

$$g(S) = \max_{x \in P} \left\{ \sum_{i \in S} x_i \right\} \quad (\text{III.34})$$

Seja $x^1 \in P$, $x^1 = (x_{i_1}^1, \dots, x_{i_s}^1, \dots, x_{i_n}^1)$, $s = |S|$, tal que $x^1 \in X^S$. Logo, de (III.34) temos que:

$$g(s) = \max_{x \in P} \left\{ \sum_{i \in S} x_i \right\} = \sum_{i=i_1}^{i_s} x_i^1 \quad (\text{III.35})$$

Pela propriedade (P2) de polimatróides temos que todo subvetor de x^1 pertence a P . Logo existe um vetor x^1 que satisfaz (III.35)

e tal que $x_{i_{s+1}}^1 = \dots = x_{i_n}^1 = 0$. Portanto seja

$x^1 = (x_{i_1}^1, \dots, x_{i_s}^1, 0, \dots, 0)$. Logo de (III.35) temos que:

$$g(S) = \sum_{i=i_1}^{i_s} x_i^1 = |x^1| \quad (\text{III.36})$$

Da mesma forma para $R \subseteq S \subseteq E$, seja $x^2 \in P$, $x^2 = (x_{i_1}^2, \dots, x_{i_r}^2, 0, \dots, 0)$
 $r = |R|$, $x^2 \in X^R$ e

$$g(R) = \max_{x \in P} \left\{ \sum_{i \in R} x_i \right\} = \sum_{i=i_1}^{i_r} x_i^2 = |x^2| \quad (\text{III.37})$$

Para demonstrar o teorema faremos duas suposições quanto aos módulos de x^1 e x^2 .

(a) $|x^2| > |x^1|$

Como $R \subseteq S$ então contradiz a maximalidade de x^1 . Logo
 $|x^2| \leq |x^1|$

(b) $|x^2| \leq |x^1|$

(b1) Se $|x^2| = |x^1|$ então temos de (III.36) que $x^2 \in X^S$. Portanto $x^2 \in X^R$ e $x^2 \in X^S$, isto é, $x^2 \in (X^S \cap X^R)$.

(b2) Se $|x^2| < |x^1|$ então aplicando a propriedade (P3) de polimatróides temos que existe $x \in P$ tal que $x^2 < x \leq x^1$ v x^2 . Este vetor terá a forma forma

$x = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}, 0, \dots, 0\}$. Evidentemente

$$x_{i_1} = x_{i_1}^2$$

\vdots

$$x_{i_r} = x_{i_r}^2$$

pois $x_j > x_j^2$ para $j \in \{i_1, \dots, i_r\}$ seria uma contradição a maximalidade de x^2 . Logo, $x \in X^R$. Por outro lado, como $x > x^2$ então existe $x_j > x_j^2$, $j \in \{i_{r+1}, \dots, i_s\}$. Sem perda de generalidade seja $x_{i_{r+1}} > x_{i_{r+1}}^2$. Temos então:

$$x_{i_1} = x_{i_1}^2$$

\vdots

$$x_{i_r} = x_{i_r}^2$$

$$x_{i_{r+1}} > x_{i_{r+1}}^2$$

$$x_{i_{r+2}} = \dots = x_{i_n} = 0$$

Se $|x| = |x^1|$ por raciocínio semelhante a (b1) mostramos que $x \in (X^R \cap X^S)$.

Se $|x| < |x^1|$ voltamos a aplicar o raciocínio de (b2) aumentando ainda mais uma das coordenadas x_j , $j \in \{i_{r+1}, \dots, i_s\}$. Procedemos assim até que obtemos $|x| = |x^1|$.

Logo, como sempre temos $|x| = |x^1|$ então de (III.36) resulta que $x \in X^S$. Como $x \in X^R$ temos $x \in (X^S \cap X^R)$.

TEOREMA 3.2.5

Seja o polimatróide $IP = (E, P)$. Então é possível definir uma função g definida sobre o conjunto de subconjuntos de E , tal que para $S \subseteq E$

$$g(S) = \max_{x \in P} \left\{ \sum_{i \in S} x_i \right\}$$

e g satisfaz as propriedades:

(a) $g(\emptyset) = 0$;

(b) $R \subseteq S \subseteq E \rightarrow g(R) \leq g(S)$;

(c) $R, S \subseteq E \rightarrow g(R) + g(S) \geq g(R \cup S) + g(R \cap S)$.

Demonstração: Seja o polimatróide $IP = (E, P)$ e a função g de subconjuntos de E tal que para $S \subseteq E$

$$g(S) = \max_{x \in P} \left\{ \sum_{i \in S} x_i \right\} \quad (\text{III.38})$$

Para $S \subseteq E$, seja o conjunto de vetores

$$X^S = \{x \in P \mid \sum_{i \in S} x_i = g(S)\} \quad (\text{III.39})$$

Utilizando o teorema (3.2.4) mostraremos que a função g definida para o polimatróide satisfaz (a), (b) e (c).

(a) $g(\emptyset) = 0$ é trivial

(b) Seja $R \subseteq S \subseteq E$. Pelo teorema (3.2.4) existe um vetor $x \in X^S$ e $x \in X^R$. Logo, de (III.38), como $R \subseteq S$ então $g(R) \leq g(S)$.

(c) Seja $R, S \subseteq E = \{i_1, \dots, i_n\}$. Sem perda de generalidade seja

$$R = \{i_1, \dots, i_t, i_{t+1}, \dots, i_k\}$$

$$S = \{i_1, \dots, i_t, i_{k+1}, \dots, i_p\}$$

Denominamos: $A = \{i_1, \dots, i_t\}$, $B = \{i_{t+1}, \dots, i_k\}$,

$C = \{i_{k+1}, \dots, i_p\}$. Temos que $(R \cap S) \subseteq R \cup S$. Portanto pe

lo teorema (3.2.4) existe um vetor $x \in (X^{R \cup S} \cap X^{R \cap S})$. Se-

ja $x^1 = (x_{i_1}^1, \dots, x_{i_p}^1, 0, \dots, 0)$ este vetor tal que:

$$\therefore x^1 \in X^{R \cup S} \text{ e } x^1 \in X^{R \cap S} \quad (\text{III.40})$$

Logo, de (III.40) e (III.39) temos que:

$$g(R \cup S) = \sum_{i \in (R \cup S)} x_i^1 = \sum_{i \in A} x_i^1 + \sum_{i \in B} x_i^1 + \sum_{i \in C} x_i^1 \quad (\text{III.41})$$

$$g(R \cap S) = \sum_{i \in (R \cap S)} x_i^1 = \sum_{i \in A} x_i^1 \quad (\text{III.42})$$

Seja $x^2 \in X^R$ e $x^3 \in X^S$. Portanto de (III.39) temos que:

$$g(R) = \sum_{i \in A} x_i^2 + \sum_{i \in B} x_i^2 \quad (\text{III.43})$$

$$g(S) = \sum_{i \in A} x_i^3 + \sum_{i \in C} x_i^3 \quad (\text{III.44})$$

Pela definição da função g temos que:

$$\sum_{i \in A} x_i^2 + \sum_{i \in B} x_i^2 \geq \sum_{i \in A} x_i^1 + \sum_{i \in B} x_i^1 \quad (\text{III.45})$$

$$\sum_{i \in A} x_i^3 + \sum_{i \in C} x_i^3 \geq \sum_{i \in A} x_i^1 + \sum_{i \in C} x_i^1 \quad (\text{III.46})$$

pois caso contrário $x^2 \notin X^R$, $x^3 \notin X^S$ e $x^1 \in X^R$, $x^1 \in X^S$. Adicionando (III.45) e (III.46) temos que:

$$\sum_{i \in A} x_i^2 + \sum_{i \in B} x_i^2 + \sum_{i \in A} x_i^3 + \sum_{i \in C} x_i^3 \geq \sum_{i \in A} x_i^1 + \sum_{i \in B} x_i^1 + \sum_{i \in C} x_i^1 + \sum_{i \in A} x_i^1$$

Logo, de (III.41), (III.42), (III.43) e (III.44) temos que:

$$g(R) + g(S) \geq g(R \cup S) + g(R \cap S)$$

Portanto g satisfaz a propriedade (c) e o teorema está demonstrado. ■

EXEMPLO 3.2.8

Seja o exemplo (3.2.6(d)). Temos que as funções:

$$(i) \quad g(\emptyset) = 0, g(S_1) = 4, g(S_2) = 3, g(S_3) = 3;$$

$$(ii) \quad g(\emptyset) = 0, g(S_1) = 3, g(S_2) = 2, g(S_3) = 6;$$

não satisfazem as propriedades (a), (b) e (c) do teorema (3.2.3) e portanto nada pode ser dito quanto aos poliedros $P = \{x \in \mathbb{R}_+^E \mid x(S) \leq g(S), \forall S \subseteq E\}$. Os poliedros gerados pelas funções g definidas em (i) e (ii) são apresentados na figura (III-8(a)) e (III-8(b)), respectivamente. Podemos verificar, pelas figuras, que estes poliedros satisfazem (P1 - P3) e são portanto poliedros de polimatróides. Portanto, aplicando o teorema (3.2.5) podemos definir uma função g que satisfaz as propriedades (a), (b) e (c) e caracteriza os poliedros dos polimatróides.

Seja $E = \{1, 2\}$, $S_1 = \{1\}$, $S_2 = \{2\}$, $S_3 = \{1, 2\}$ e \emptyset . Seja

$$g(S) = \max_{x \in P} \left\{ \sum_{i \in S} x_i \right\}, S \subseteq E$$

Figura (III-8(a)) - $S = \emptyset \rightarrow x = (0, 0)$. Logo, $g(\emptyset) = 0$

$S = S_1 \rightarrow x = (3, x_2)$. Logo, $g(S_1) = 3$

$S = S_2 \rightarrow x = (x_1, 3)$. Logo, $g(S_2) = 3$

$S = S_3 \rightarrow x$ tal que $x_1 + x_2 = 3$. Logo, $g(S_3) = 3$

Figura (III-8(b)) - $S = \emptyset \rightarrow x = (0, 0)$. Logo, $g(\emptyset) = 0$

$S = S_1 \rightarrow x = (3, x_2)$. Logo, $g(S_1) = 3$

$S = S_2 \rightarrow x = (x_1, 2)$. Logo, $g(S_2) = 2$

$S = S_3 \rightarrow x = (3, 2)$. Logo, $g(S_3) = 5$

Pelo teorema (3.2.5) podemos caracterizar o poliedro de um polimatróide e portanto obter um vetor independente, $x \in P$, de peso máximo. Este problema se resume em maximizar $c \cdot x$ tal que $x \in P$, ou seja:

$$\max c \cdot x$$

$$\sum_{j \in S} x_j \leq g(S), \forall S \subseteq E$$

$$x_j \geq 0, j \in E$$

Como g é uma função de subconjuntos de E satisfazendo as propriedades (a), (b) e (c) do teorema (3.2.5) obtemos um modelo de otimização mais abrangente que contém o modelo (M2).

Comparando o teorema (II-2.1.2) com o teorema (3.2.3) vemos que a função posto $r(S)$ de um matróide satisfaz as propriedades (a), (b) e (c) do teorema (3.2.3). Deste modo

$$\sum_{j \in S} x_j \leq r(S), \forall S \subseteq E$$

$$x_j \geq 0, j \in E, j \in E$$

o poliedro do matróide é também o poliedro de um polimatróide.

O inverso no entanto não é verdadeiro. Uma função $g(S)$ satisfazendo o teorema (3.2.3) não obrigatoriamente satisfaz as propriedades (R1 - R3) do teorema (II-3.1.1). Isto é, não é uma função posto de um matróide, pois em cima desta função não pode ser definido um matróide. Basta ver que podemos ter:

$$g(S) \leq g(S \cup \{e\}) > g(S) + 1, S \subseteq E \text{ e } e \in E.$$

Portanto uma contradição em (R2).

Resta apresentar um algoritmo guloso que forneça uma solução ótima para (M3).

3.3 - Algoritmos Gulosos Aplicados a Polimatróides

Seja $E = \{1, 2, \dots, n\}$ e a função de pesos $c: E \rightarrow \mathbb{R}$. Seja, g uma função de subconjuntos de E não negativa, não-decrescente e submodular. Resolver o modelo:

$$(M3) \quad \begin{aligned} \max \quad & c \cdot x \\ \sum_{j \in S} x_j & \leq g(S), \quad \forall S \subseteq E \\ x_j & \geq 0, \quad j \in E \end{aligned}$$

O problema consiste em determinar $x^* \in P$ tal que x^* é um vetor independente de peso máximo no polimatróide (E, P) . Resolver este problema é semelhante a resolução de (M2) vista anteriormente. Determinar no poliedro do polimatróide um vértice de peso máximo.

ALGORITMO 5 - GULOSO PARA POLIMATRÓIDES

PASSO 0. Seja $E = \{1, 2, \dots, n\}$ e $c: E \rightarrow \mathbb{R}$. Seja $\pi(c) = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ uma permutação dos elementos de E

tal que $c_{i_1} \geq c_{i_2} \geq \dots \geq c_{i_k} > 0 \geq c_{i_{k+1}} \geq \dots \geq c_{i_n}$.
 $0 \leq k \leq n$. Para $j = 1, 2, \dots, k$ seja $S_j = \{i_1, i_2, \dots, i_j\}$

PASSO 1. Para $j = 1$ faça $x_{i_1}^* = g(S_1)$

PASSO 2. Para $j = 2, 3, \dots, k$

Faça $x_{i_j}^* = g(S_j) - g(S_{j-1})$

PASSO 3. Para $j = k+1, \dots, n$

Faça $x_{i_j}^* = 0$

EXEMPLO 3.3.1

Seja o polimatróide do exemplo (3.2.7) apresentado na figura (III-6). Seja a função de pesos $c: E \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_k > 0 \geq c_{k+1} \geq \dots \geq c_n$. Aplicando o algoritmo 5 temos:

$$k = 0 \rightarrow 0 \geq c_1 \geq c_2 \geq c_3 \rightarrow x^* = (0, 0, 0)$$

$$k = 1 \rightarrow c_1 > 0 \geq c_2 \geq c_3 \rightarrow x_1^* = g(S_1) = g(\{1\}) = 2$$

$$x_2^* = x_3^* = 0 \rightarrow x^* = (2, 0, 0)$$

$$k = 2 \rightarrow c_1 \geq c_2 > 0 \geq c_3 \rightarrow x_1^* = g(S_1) = 2$$

$$x_2^* = g(S_2) - g(S_1) = g(\{1, 2\}) - g(\{1\}) = 4 - 2 = 2$$

$$x_3^* = 0 \rightarrow x^* = (2, 2, 0)$$

$$k = 3 \rightarrow c_1 \geq c_2 \geq c_3 > 0 \rightarrow x_1^* = g(S_1) = 2$$

$$x_2^* = g(S_2) - g(S_1) = 2$$

$$x_3^* = g(S_3) - g(S_2) = g(\{1, 2, 3\}) - g(\{1, 2\}) = 7 - 4 = 3$$

$$\rightarrow x^* = (2, 2, 3)$$

Assim atingimos o objetivo desta seção, um modelo de otimização, mais abrangente. É um modelo que engloba o anterior, porém é um modelo amarrado a uma estrutura de polimatróide. Uma estrutura bastante rígida sendo necessário definir uma função g sobre E e então definir o poliedro por um conjunto de restrições, uma para cada subconjunto de E . A rigidez destes modelos está vinculada aos algoritmos gulosos que devido a excessiva simplicidade perdem na capacidade de resolver problemas mais complexos. Assim a definição de modelos que possam ser resolvidos por gulosos exatos é um caminho bastante restrito. No capítulo IV, apresentaremos alguns modelos práticos para então definir algoritmos gulosos heurísticos.

Na seção seguinte apresentaremos um problema geral desvinculado das estruturas anteriores, porém englobando os problemas até então solucionados. Um novo algoritmo guloso, que poderá ser exato ou aproximado dependendo das características do problema, será apresentado.

Da mesma forma que no modelo (M2), o modelo (M3) é definido em cima de um grande número de restrições, uma para cada subconjunto $S \subseteq E$. No entanto, podemos verificar que algumas restrições são redundantes. Essa redundância é evitada se definirmos g sobre um reticulado L de subconjuntos de E (APÊNDICE A), mantendo os resultados obtidos.

4. UM ALGORITMO GULOSO HEURÍSTICO

4.1 - Introdução

Na seção anterior apresentamos um algoritmo geral para matrôides, algoritmo 2. A seguir, determinamos um modelo de otimização para matrôides (M2) e então um modelo de otimização para polimatrôides (M3). Em ambos os casos apresentamos algoritmos gulosos específicos para os modelos (M2) e (M3). Estes modelos amarrados a estruturas bem definidas são bastante rígidos nas suas formulações, com aplicações restritas.

Seja $E = \{1, 2, \dots, n\}$ um conjunto de índices e a função de pesos $c: E \rightarrow \mathbb{R}$. O modelo (M3), englobando (M2) consiste em:

$$(M3) \quad \max_{x \in P} c \cdot x$$

onde P é o poliedro do polimatrôide $\mathbb{P} = (E, P)$, ou seja, P é um subconjunto compacto de \mathbb{R}_+^E .

O modelo proposto nesta seção consiste em:

$$(M4) \quad \max_{x \in U} c \cdot x$$

onde U é um subconjunto compacto do \mathbb{R}^n e $c \in \mathbb{R}^n$.

É um modelo desvinculado das estruturas anteriores, porém engloba todos os problemas em (M3) e conseqüentemente em (M2).

O objetivo desta seção é apresentar um algoritmo guloso heurístico para (M4) e definir em que condições este algoritmo se comporta como um algoritmo exato fornecendo solução ótima para (M4).

É um algoritmo semelhante aos algoritmos (4) e (5) aplicados a (M2) e (M3) respectivamente, porém, ao invés de operarmos com as funções r e g , associadas as estruturas de matrôides e polimatrôides respectivamente, operaremos com os termos independentes (b_i) das restrições que compõem o subconjunto U em (M4).

Apresentaremos algumas definições que serão utilizadas nesta seção.

Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Denotamos $co(U)$ o FECHO CONVEXO ou ENVOLTÓRIA CONVEXA de U , ao menor conjunto conexo contendo U ou a interseção de todos conjuntos convexos contendo U .

Seja $U \subseteq \mathbb{R}_+^n$, definimos o FECHAMENTO HEREDITÁRIO de U por $H(U) = \{x \mid x \geq 0, x \leq y \text{ para todo } y \in U\}$.

Utilizaremos $U + y$ para denotar TRANSLAÇÃO de U por um vetor y , isto é, $U + y = \{x \mid x = z + y, z \in U\}$

Por se tratar de um algoritmo heurístico, não necessariamente exato, convencionaremos chamar:

x^0 - a solução do guloso para o problema

x^* - a solução ótima do problema

$Z^0 = cx^0$ - o valor da função objetiva para a solução do guloso

$Z^* = cx^*$ - o valor da função objetiva para a solução ótima do problema.

EXEMPLO 4.1.1

Sejam os conjuntos $U \subset \mathbb{R}^n$ na figura (III-9). Para cada subconjunto U apresentamos uma das definições anteriores.

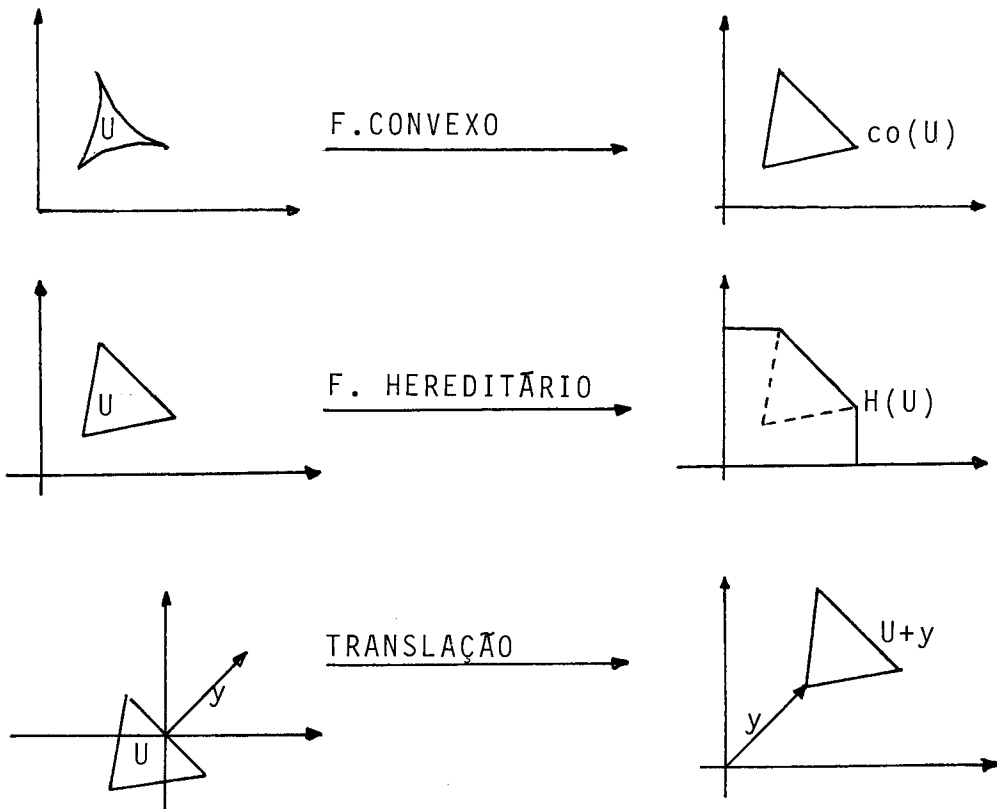


Fig. III-9. Exemplo 4.1.1

4.2 - O Algoritmo Heurístico

Seja $E = \{1, 2, \dots, n\}$ e a função de pesos $c: E \rightarrow \mathbb{R}$. Seja $\pi(c) = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ a única permutação dos elementos de E tal que:

$$|c_{i_1}| \geq |c_{i_2}| \geq \dots \geq |c_{i_n}| \text{ onde se } |c_{i_j}| = |c_{i_k}| \text{ e } j < k \text{ então } i_j < i_k.$$

EXEMPLO 4.2.1

Seja a função de pesos $c = (-2, -2, 7, 1, -4) \in \mathbb{R}^5$.

Temos que $\pi(c) = (3, 5, 1, 2, 4)$

$$|c_3| \geq |c_5| \geq |c_1| \geq |c_2| \geq |c_4|$$

Para simplicidade de notação suporemos a permutação $\pi(c) = (i_1, i_2, \dots, i_n) = (1, 2, \dots, n)$ sempre que facilitar.

Para qualquer subconjunto $S = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ tal que $S \subset E$, escrevemos $(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) \in U$ se existe $y \in U$ tal que $y_{i_j} = x_{i_j}$, $i \leq j \leq k$.

Seja o problema:

$$(M4) \quad \max_{x \in U} c \cdot x$$

onde U é um subconjunto compacto de \mathbb{R}^n e a função $c: E \rightarrow \mathbb{R}$.

De forma semelhante a solução dos modelos anteriores, solucionar (M4) consiste em encontrar $x \in U$ tal que $Z = cx$ seja máximo. Uma vez que U é compacto, apresentaremos um algoritmo guloso heurístico que seleciona uma única solução $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, $x^0 \in U$.

ALGORITMO 6 - GULOSO HEURÍSTICO

PASSO 0. Seja $E = \{1, 2, \dots, n\}$ e a função de pesos $c: E \rightarrow \mathbb{R}$.

Seja $\pi(c) = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ a permutação dos elementos de E .

Por simplicidade, seja $\pi(c) = (1, 2, \dots, n)$.

PASSO 1. Escolha $x_1^0 = \begin{cases} \max \{x_1 \mid x_1 \in U\} & \text{se } c_1 > 0 \\ \min \{x_1 \mid x_1 \in U\} & \text{se } c_1 \leq 0 \end{cases}$

PASSO 2. Para $j = 2, 3, \dots, n$

Escolha $x_j^0 = \begin{cases} \max \{x_j \mid (x_1^0, x_2^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j) \in U\} & \text{se } c_j > 0 \\ \min \{x_j \mid (x_1^0, x_2^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j) \in U\} & \text{se } c_j \leq 0 \end{cases}$

EXEMPLO 4.2.2

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ a área hachurada da figura (III-10)

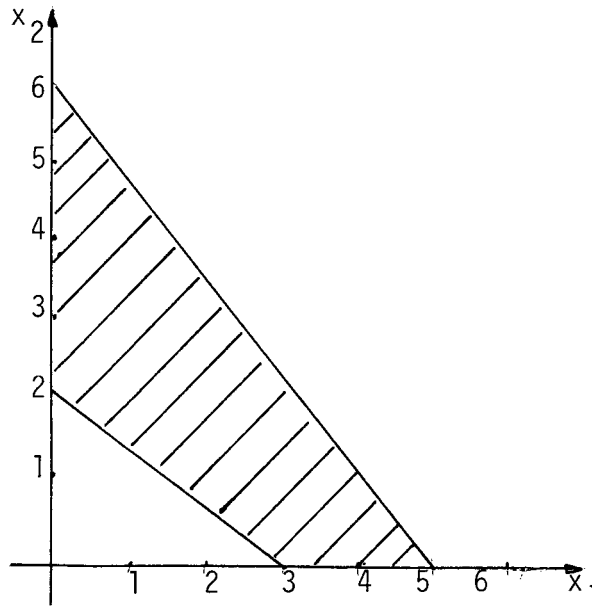


Fig. III-10. Exemplo 4.2.2

(a) Seja $c = (3, 5)$

$$P0. \pi(c) = (2, 1)$$

$$P1. x_{i_1}^0 = x_2^0 = \max \{x_2 \mid x_2 \in U\} \rightarrow x_2^0 = 6$$

$$P2. x_{i_2}^0 = x_1^0 = \max \{x_1 \mid (x_1, 6) \in U\} \rightarrow x_1^0 = 0$$

A solução do guloso é $x^0 = (0, 6)$.

(b) Seja $c = (-4, -4)$

$$P0. \pi(c) = (1, 2)$$

$$P1. x_{i_1}^0 = x_1^0 = \min \{x_1 \mid x_1 \in U\} \rightarrow x_1^0 = 0$$

$$P2. x_{i_2}^0 = x_2^0 = \min \{x_2 \mid (0, x_2) \in U\} \rightarrow x_2^0 = 2$$

A solução do guloso é $x^0 = (0, 2)$.

Primeiro, o algoritmo 6 ordena os elementos de E

em ordem decrescente de pesos. A cada passo seleciona um elemento de peso máximo (peso mínimo) e faz com que obtenha o máximo (mínimo) valor em U . Assim, o algoritmo caminha na fronteira do subconjunto U buscando uma solução $x^0 \in U$ tal que cx^0 é máximo. Portanto, podemos verificar que este algoritmo é semelhante aos algoritmos (4) e (5). Primeiro, porque os algoritmos (4) e (5) também selecionam os elementos em ordem decrescente de pesos e depois, ao fazer $x_{ij}^* = g(S_j) - g(S_{j-1})$ o algoritmo 5 também caminha na fronteira do poliedro do polimatróide gerado pela função g , fazendo com que x_{ij}^* atinga o máximo valor em P .

TEOREMA 4.2.1

O ponto x^0 , solução do guloso, é um ponto extremo de U .

Demonstração: Seja $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$ a solução do guloso. Mostremos que x^0 não pode ser uma combinação linear convexa de dois pontos distintos de U e portanto x^0 é ponto extremo de U .

Seja $x \in U$ e $y \in U$ distintos. Suponhamos $\pi(c) = (1, 2, \dots, n)$

Seja $x^0 = \lambda x + (1-\lambda)y, 0 \leq \lambda \leq 1$ (III.47)

Se $c_1 \geq 0$ então pelo algoritmo guloso: $x_1^0 \geq x_1$ e $x_1^0 \geq y_1$.

Logo de (III.47), para $0 \leq \lambda \leq 1$ temos

$$x_1^0 = x_1 = y_1.$$

Se $c_1 \leq 0$ então pelo algoritmo guloso $x_1^0 \leq x_1$ e $x_1^0 \leq y_1$. Logo de (III.47), para $0 \leq \lambda \leq 1$ temos $x_1^0 = x_1 = y_1$.

Passando a segunda iteração do guloso, aplicando raciocínio semelhante para c_2 , temos $x_2^0 = x_2 = y_2$. Aplicando o mesmo raciocínio sucessivamente temos:

$$x_j^0 = x_j = y_j, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Logo $x^0 = x = y$ e portanto x^0 é um ponto extremo de U . ■

TEOREMA 4.2.2

A solução do guloso em U , $x^0(c, U)$ é igual, a solução do guloso em $\text{co}(U)$, $y^0(c, \text{co}(U))$. Isto é, $x^0(c, U) = y^0(c, \text{co}(U))$.

Demonstração: Seja $x^0(c, U)$ e $y^0(c, \text{co}(U))$ as soluções do guloso para todo $x \in U$ e $y \in \text{co}(U)$ respectivamente,

$$x^0(c, U) = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$$

$$y^0(c, \text{co}(U)) = (y_1^0, y_2^0, \dots, y_n^0)$$

Pelo teorema (4.2.1), $y^0(c, \text{co}(U))$ é um ponto extremo em $\text{co}(U)$. Da análise convexa temos que:

"todo ponto extremo da envoltória convexa de U é um ponto extremo de U ".

Então, $y^0(c, \text{co}(U))$ é também um ponto extremo de U . Logo

$$y^0(c, \text{co}(U)) \in U \quad (\text{III.48})$$

Suponhamos $\pi(c) = (1, 2, \dots, n)$ onde $|c_1| \geq |c_2| \geq \dots \geq |c_n|$.

Como $x^0(c, U)$ é solução do guloso em U , de (III.48) e aplicando o algoritmo guloso em U temos:

$$x_1^0 \geq y_1^0 \quad (\text{III.49})$$

Por outro lado, $U \subseteq \text{co}(U)$ por definição. Logo

$$x_1^0 \leq y_1^0 \quad (\text{III.50})$$

De (III.49) e (III.50) temos que $x_1^0 = y_1^0$

Repetindo o raciocínio para $x_2^0, x_3^0, \dots, x_n^0$ temos:

$$x^0(c, U) = y^0(c, \text{co}(U)). \blacksquare$$

4.3 - O Cone Guloso

Definimos o CONE GULOSO U^* de U por:

$$U^* = \{c \mid c \in \mathbb{R}^n \text{ e } Z^0 = Z^*\}$$

O cone guloso de U é o conjunto de pesos c para

os quais o algoritmo guloso fornece a solução ótima, ou seja, o algoritmo guloso heurístico comporta-se como um algoritmo exato.

Os conjuntos U tais que $U^* = \mathbb{R}^n$ denominamos CONJUNTO GULOSO.

Para $\lambda \geq 0$ e $c \in \mathbb{R}^n$ temos que $Z^0(\lambda c, U) = \lambda Z^0(c, U)$ e $Z^*(\lambda c, U) = \lambda \cdot Z^*(c, U)$. Portanto U^* é um cone, não vazio, pois sempre contém o vetor nulo.

Apresentaremos alguns exemplos onde dado um conjunto U obteremos o correspondente conjunto guloso U^* . Porém gostaríamos de ressaltar que são exemplos didáticos, no \mathbb{R}^2 , onde é fácil visualizar estes conjuntos. Para um conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ a obtenção de U^* torna-se trabalhosa. A operacionalização para determinação de U^* está em aberto, não impedindo no entanto o desenvolvimento da teoria. Porém, a definição de cone guloso é de grande importância para os resultados que serão apresentados.

EXEMPLO 4.3.1

Seja $U \subset \mathbb{R}^2$ figura (III-11(a)). Para as infinitas funções de pesos c , faremos uma comparação entre as soluções obtidas pelo guloso e as soluções obtidas por um algoritmo de programação linear, o Simplex. Todas as funções para as quais $x^0 = x^*$, e então $Z^0 = Z^*$, pertencem ao cone guloso. Para isto, dada uma função de pesos $c = (c_1, c_2)$, basta aplicar em U o al

goritmo guloso 6 para obter a solução do guloso e através do gradiente $\nabla c = (c_1, c_2)$ verificar qual é a solução ótima. Determinamos $x^0 \in U$ e $x^* \in U$ tal que $Z^0 = cx^0$ e $Z^* = cx^*$ sejam máximas.

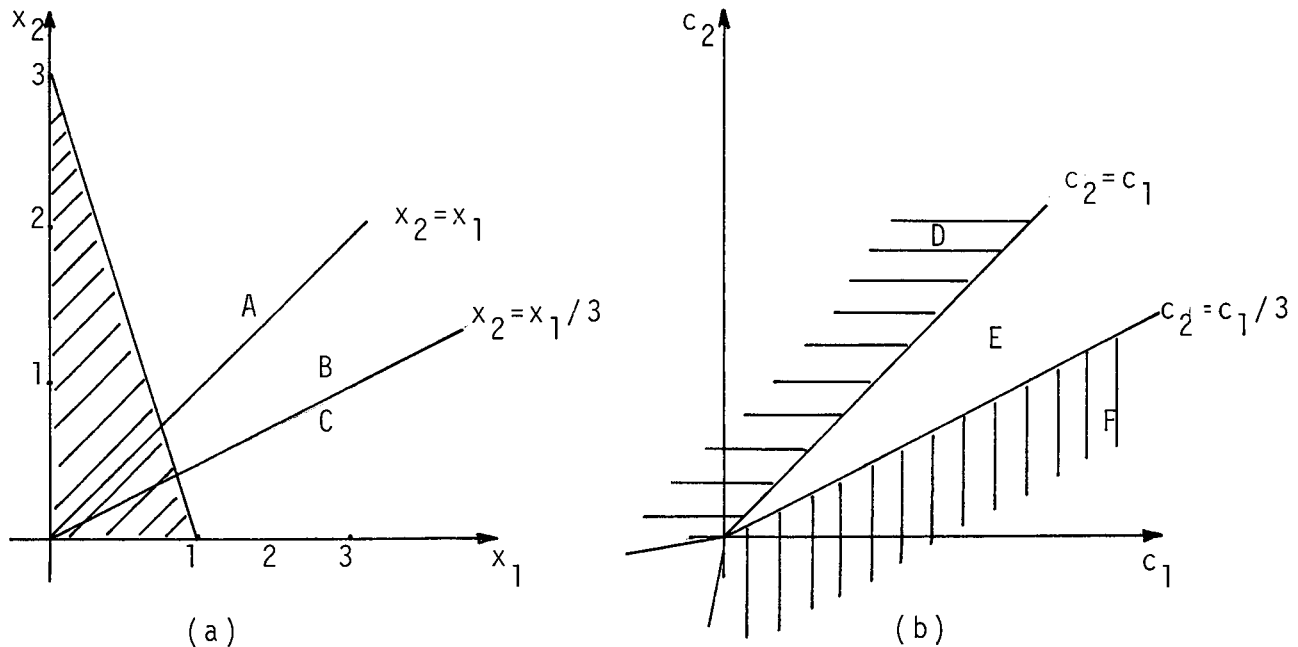


Fig. III-11. Exemplo 4.3.1

Seja $c_1 \geq 0$ e $c_2 \geq 0$

(1) Se $c_1 < c_2$, então $\nabla c = (c_1, c_2)$ aponta em uma direção com ângulo superior a 45° (com o eixo x_1). ∇c varre o cone A da figura (III-11(a)). Logo a solução ótima é $x^* = (0, 3)$. Aplicando o guloso obteremos a mesma solução $x^0 = (0, 3)$.

(2) Se $c_1 = c_2$, então $\nabla c = (c_1, c_2)$ aponta em uma direção com ângulo igual a 45° . ∇c coincide com a aresta interseção dos cones A e B. Logo a solução ótima ainda é $x^* = (0, 3)$. Apli

cando o gulo, como $|c_1| = |c_2|$ a soluao  $x^0 = (1, 0)$.

(3) Se $c_1 > c_2$, aplicando o gulo obtemos $x^0 = (1, 0)$. Para $\nabla c = (c_1, c_2)$ temos três condioes:

(3.1) ∇c varre o cone B. A soluao ótima  $x^* = (0, 3)$.

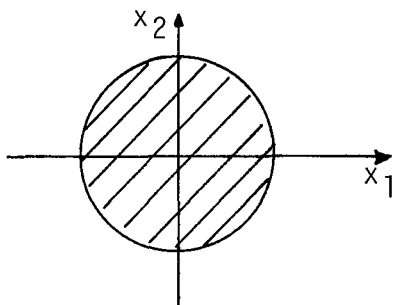
(3.2) ∇c coincide com a aresta $B \cap C$. A soluao ótima pode ser tanto $x^* = (0, 3)$ como $x^* = (1, 0)$.

(3.3) ∇c varre o cone C. A soluao ótima  $x^* = (1, 0)$.

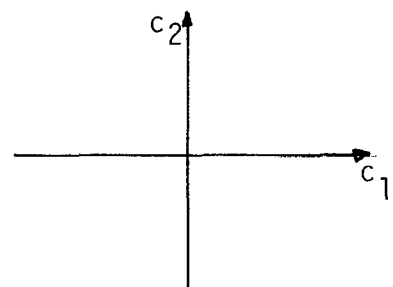
De (1), (2) e (3) temos que D, F na figura (III-11(b)) fazem parte do cone gulo. Para as demais funoes de custo ($c_1 < 0$ ou $c_2 < 0$ ou $c_1 < 0$ e $c_2 < 0$) podemos verificar que $x^0 = x^*$. Assim o cone gulo  o \mathbb{R}^2 a menos do cone E. $U^* = \mathbb{R}^2 - E$.

EXEMPLO 4.3.2

Seja $U = \{x | x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ na figura (III-12(a)).



(a)



(b)

Fig. III-12. Exemplo 4.3.2

Seja a função de pesos $c = (c_1, c_2)$. Repetindo o processo utilizado no exemplo (4.3.1), o gradiente $\nabla c = (c_1, c_2)$ aponta para um ponto x^* na fronteira em U , que é a solução ótima para esta função de pesos. Enquanto, ao aplicarmos o guloso as soluções possíveis são as interseções da fronteira de U com os eixos coordenadas ($x^0 = (1, 0)$ ou $x^0 = (0, 1)$ ou $x^0 = (-1, 0)$ ou $x^0 = (0, -1)$). Assim as soluções do guloso serão soluções ótimas para as funções de peso $c = (c_1, c_2)$ tal que $\nabla c = (c_1, c_2)$ aponta na direção dos eixos, ou seja, U^* é representado pelos eixos coordenados figura (III-12(b)).

TEOREMA 4.3.1

Seja $y \in \mathbb{R}^n$ então $(U + y)^* = U^*$. Consequentemente U é um conjunto guloso se e somente se $(U + y)$ é um conjunto guloso para algum $y \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Seja $y \in \mathbb{R}^n$ e $c \in \mathbb{R}^n$. Seja $x^0(c, U)$ a solução do guloso em U e $x^0(c, U + y)$ a solução do guloso em $U + y$. Pela translação

$$x^0(c, U + y) = x^0(c, U) + y \quad (\text{III.51})$$

$$x^*(c, U + y) = x^*(c, U) + y \quad (\text{III.52})$$

Temos que $Z^0(c, U + y) = c x^0(c, U + y)$. Logo de (III.51) temos

$$Z^0(c, U + y) = c x^0(c, U) + c y = Z^0(c, U) + c y \quad (\text{III.53})$$

Temos que $Z^*(c, U+y) = cx^*(c, U+y)$. Logo de (III.52) temos

$$Z^*(c, U+y) = cx^*(c, U) + cy = Z^*(c, U) + cy \quad (\text{III.54})$$

Portanto de (III.53) e (III.54) $Z^0(c, U) = Z^*(c, U)$ se e somente se $Z^0(c, U+y) = Z^*(c, U+y)$. Logo $(U+y)^* = U^*$. ■

TEOREMA 4.3.2

$U^* = (\text{co}(U))^*$. Consequentemente U é um conjunto guloso se e somente se $\text{co}(U)$ é um conjunto guloso.

Demonstração: Seja $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\text{co}(U)$ a envoltória convexa de U . Seja $c \in \mathbb{R}^n$. Como $U \subseteq \text{co}(U)$ por definição, então

$$Z^*(c, U) \leq Z^*(c, \text{co}(U)) \quad (\text{III.55})$$

Da análise convexa temos que:

"todo ponto extremo de $\text{co}(U)$ é um ponto extremo de U ";

"todo ponto de $\text{co}(U)$ pode ser uma combinação linear convexa dos pontos extremos de $\text{co}(U)$ ".

Consequentemente, todo ponto de $\text{co}(U)$ pode ser uma combinação linear convexa dos pontos extremos de U . Com este resultado, seja $y \in \text{co}(U)$ tal que:

$$y = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^i, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geq 0 \quad (\text{III.56})$$

onde $x^i \in U$ é um ponto extremo de U . Isto é, y é uma combinação linear convexa de k pontos $x \in U$. Portanto

$$cy = \sum_{i=1}^k \lambda_i c x^i \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot Z^*(c, U)$$

De (III.56), $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$. Logo

$$cy \leq Z^*(c, U) \quad (\text{III.57})$$

Como (III.57) é válido $\forall y \in \text{co}(U)$, em particular é válido para $y = x^*(c, \text{co}(U))$. Logo, de (III.57)

$$Z^*(c, \text{co}(U)) = cx^*(c, \text{co}(U)) \leq Z^*(c, U) \quad (\text{III.58})$$

De (III.55) e (III.58) temos:

$$Z^*(c, U) = Z^*(c, \text{co}(U)) \quad (\text{III.59})$$

Do teorema (4.2.2) temos $x^0(c, U) = x^0(c, \text{co}(U))$ e portanto

$$Z^0(c, U) = Z^0(c, \text{co}(U)) \quad (\text{III.60})$$

De (III.59) e (III.60), $Z^*(c, U) = Z^0(c, U)$ se e somente se $Z^*(c, \text{co}(U)) = Z^0(c, \text{co}(U))$. Logo $U^* = (\text{co}(U))^*$. ■

TEOREMA 4.3.3

Se $U \subseteq \mathbb{R}_+^n$ e se $c \geq 0$ então $c \in U^*$ se e somente se $c \in (H(U))^*$.

Demonstração: Seja $U \subseteq \mathbb{R}_+^n$ e $c \geq 0$. Demonstraremos em duas partes.

$$(a) Z^0(c, U) = Z^0(c, H(U))$$

$$(b) Z^*(c, U) = Z^*(c, H(U))$$

(a) Seja $\pi(c) = (1, 2, \dots, n)$. Aplicando o guloso em U , como $c \geq 0$ temos $x_1^0(c, U) = \max \{x_1 \mid x_1 \in U\}$. Seja

$$x_1^1 = \max_{x_1} \{x \in U\} \tag{III.61}$$

então o guloso faz $x_1^0(c, U) = x_1^1$.

Aplicando o guloso em $H(U)$, como $c \geq 0$ temos

$$x_1^0(c, H(U)) = \max \{x_1 \mid x_1 \in H(U)\}.$$

Seja agora $x_1^1 = \max_{x_1} \{x \in H(U)\}$ então o guloso faz

$$x_1^0(c, H(U)) = \hat{x}_1^1. \text{ Evidentemente}$$

$$\hat{x}_1^1 \leq x_1^1 \tag{III.62}$$

pois se $\hat{x}_1^1 > x_1^1$ então pela definição de fechamento hereditário existe $x \in U$ tal que $x \geq \hat{x}_1^1$ o que contraria (III.61).

Como $U \subseteq H(U)$ temos que:

$$x_1^1 \in H(U) \quad (\text{III.63})$$

De (III.62) e (III.63) segue $\hat{x}_1^1 = x_1^1$. De forma semelhante podemos demonstrar para as demais componentes. Portanto $x^0(c, H(U)) = x^0(c, U)$. Consequentemente,

$$Z^0(c, U) = Z^0(c, H(U)) \quad (\text{III.64})$$

(b) Como $U \subseteq H(U)$ então

$$Z^*(c, U) \leq Z^*(c, H(U)) \quad (\text{III.65})$$

Seja $x^*(c, H(U))$ a solução ótima de $H(U)$. Pela definição de hereditário existe $x \in U$ tal que

$$x \geq x^*(c, H(U)) \quad (\text{III.66})$$

Com $c \geq 0$,

$$Z^*(c, U) \geq cx, \quad \forall x \in U \quad (\text{III.67})$$

De (III.66) e (III.67), $Z^*(c, U) \geq cx^*(c, H(U))$. Logo

$$Z^*(c, U) \geq Z^*(c, H(U)) \quad (\text{III.68})$$

De (III.65) e (III.68) temos:

$$Z^*(c, U) = Z^*(c, H(U)) \quad (\text{III.69})$$

Logo de (III.64) e (III.69), $Z^0(c, U) = Z^*(c, U)$ se e somente se $Z^0(c, H(U)) = Z^*(c, H(U))$. Portanto $c \in U^*$ se e somente se $c \in (H(U))^*$. ■

4.4 - Caracterização dos Conjuntos Gulosos

Dado um conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ e uma função de pesos c , vimos nas seções anteriores que o algoritmo guloso heurístico se comporta como um algoritmo exato, fornecendo soluções ótimas se $c \in U^*$, o cone guloso de U . Nesta seção procuraremos caracterizar os subconjuntos $U \subseteq \mathbb{R}^n$ para os quais o algoritmo guloso heurístico sempre fornece a solução ótima. Ou seja, os conjuntos gulosos U tais que $U^* = \mathbb{R}^n$.

LEMA 4.4.1

Seja $IP = (E, P)$ um polimatróide no \mathbb{R}^n . Seja $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c = (c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0)$, onde $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_k > 0$. Se $x^0(c, P) = (x_1^0, \dots, x_k^0, 0, \dots, 0)$ é uma solução do guloso então para qualquer vetor $y \in P$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

$$\sum_{i=1}^k x_i \geq \sum_{i=1}^k y_i$$

Demonstração: Seja $IP = (E, P)$ um polimatróide no \mathbb{R}^n e $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $c = (c_1, c_2, \dots, c_k, 0, \dots, 0)$ onde $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_k > 0$. Seja $x^0(c, P) = (x_1^0, \dots, x_k^0, 0, \dots, 0)$ a solução do guloso em P . Seja $y \in P$ tal que $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$

Suponhamos por absurdo que

$$\sum_{i=1}^k x_i^0 < \sum_{i=1}^k y_i \quad (\text{III.70})$$

Como $y \in P$ e $P \subseteq \mathbb{R}_+^n$ então de (III.70)

$$|x^0| = \sum_{i=1}^n x_i^0 < \sum_{i=1}^n y_i = |y| \quad (\text{III.71})$$

De (III.71), pela propriedade (P3) da definição de polimatróides temos que existe $z \in P$ tal que

$$x^0 < z < x^0 \vee y \quad (\text{III.72})$$

De (III.72), $z > x^0$, então existe pelo menos um elemento $1 \leq j \leq k$ tal que $z_j > x_j^0$. Seja z_p a primeira componente de z diferente de x_p^0 , isto é, $p = \min \{j | z_j > x_j^0\}$. Logo

$$x_1^0 = z_1, x_2^0 = z_2, \dots, x_{p-1}^0 = z_{p-1} \text{ e}$$

$$x_p^0 < z_p$$

o que contradiz a escolha de x_p^0 pelo guloso. Portanto

$$\sum_{i=1}^k x_i^0 \geq \sum_{i=1}^k y_i. \blacksquare$$

LEMA 4.4.2

Seja o polimatróide $IP = (E, P)$ e a função de pesos $c: E \rightarrow \mathbb{R}$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_j, \dots, c_n)$. Se $c^+: E \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que

$$c_j^+ \begin{cases} = c_j & \text{se } c_j > 0 \\ = 0 & \text{se } c_j \leq 0 \end{cases}$$

então:

$$(a) \ x^0(c^+, P) = x^0(c, P) \text{ e } Z^0(c^+, P) = Z^0(c, P)$$

$$(b) \ Z^*(c^+, P) = Z^*(c, P)$$

Demonstração: Seja o polimatróide $IP = (E, P)$. Suponhamos a função de peso $c = (c_1, c_2, \dots, c_j, \dots, c_n)$ tal que $|c_1| \geq |c_2| \geq \dots \geq |c_n|$.

(a) Aplicando o algoritmo guloso heurístico em P temos que se $c_j \leq 0$ então:

$$x_j^0 = \min \{x_j \mid (x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j) \in P\}$$

Logo, pela definição de polimatróides, $(P1 - P2)$, então $x_j^0 = 0$.

Portanto $x^0(c^+, P) = x^0(c, P)$ e $Z^0(c^+, P) = Z^0(c, P)$.

(b) Seja $x^*(c, P)$ a solução ótima em P tal que:

$$x_i^* > 0 \text{ para } c_i < 0$$

Pela propriedade (P2) de polimatróides, se $0 \leq x \leq x^*$ então $x \in P$. Seja x tal que:

$$x_i = 0 < x_i^* \text{ e } x_j = x_j^*, \quad \forall j \neq i \quad (\text{III.73})$$

De (III.73), $\sum_{j=1}^n c_j x_j > \sum_{j=1}^n c_j x_j^*$, pois $c_i x_i = 0$ e

$$c_i x_i^* < 0.$$

Portanto uma contradição, pois x^* é a solução ótima em P . Logo, para $c_i < 0$ então $x_i^* = 0$ e portanto

$$Z^*(c^+, P) = Z^*(c, P). \blacksquare$$

O objetivo destes resultados é simplificar a demonstração do próximo teorema.

TEOREMA 4.4.1

Se $IP = (E, P)$ é um polimatróide em \mathbb{R}^n então P é um conjunto guloso, isto é, $P^* = \mathbb{R}^n$.

Demonstração: Seja $P = (E, P)$ um polimatróide em \mathbb{R}^n e c^+ uma função de pesos $c: E \rightarrow \mathbb{R}$ definida no Lema (4.4.2). Para mostrar que $P^* = \mathbb{R}^n$, pelo Lema (4.4.2), basta mostrar que $Z^0(c, P) = Z^*(c, P)$ para todo $c \geq 0$.

Seja c^+ tal que $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_k > 0 = c_{k+1} = \dots = c_n$.

Demonstraremos por indução finita

$k = 0$, então $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$. Logo $Z^0 = Z^*$

$k = 1$, então $c_1 > 0 = c_2 = \dots = c_n$. Considere o problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & c_1 x_1 \\ & x \in P \end{aligned}$$

Aplicando o guloso em P temos $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$. Suponhamos que existe $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in P$ tal que $cx > cx^0$. Então evidentemente $x_1 > x_1^0$ o que contradiz a escolha de x_1^0 pelo guloso. Portanto

$$x_1^0 = x_1^* \text{ e } Z^0 = Z^*.$$

$k = 2, \dots, p-1$, seja $x^0(c, P) = (x_1^0, \dots, x_k^0, 0, \dots, 0) = x^*(c, P)$ e $Z^0 = Z^*$.

$k = p$, então $c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_p > 0 = c_{p+1} = \dots = c_n$. Considere o problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & c_1 x_1 + \dots + c_p x_p \\ & x \in P \end{aligned}$$

Seja $x^0(c, P) = (x_1^0, \dots, x_p^0, 0, \dots, 0)$ a solução do guloso. Mostraremos que $x^0(c, P) = x^*(c, P)$ e $Z^0 = Z^*$

Suponhamos existe $x = (x_1, \dots, x_p, 0, \dots, 0)$, $x \in P$, tal que

$$\sum_{j=1}^p c_j x_j > \sum_{j=1}^p c_j x_j^0 \quad (\text{III.74})$$

Mostraremos é impossível e portanto $Z^0 = Z^*$.

Como $c_p > 0$, podemos dividir ambos os lados de (III.74) por c_p . Temos então:

$$\sum_{j=1}^p \frac{c_j}{c_p} x_j > \sum_{j=1}^p \frac{c_j}{c_p} x_j^0 \quad (\text{III.75})$$

Pelo lema (4.4.1)

$$\sum_{j=1}^p x_j \leq \sum_{j=1}^p x_j^0 \quad (\text{III.76})$$

Subtraindo (III.76) de (III.75) temos:

$$\sum_{j=1}^{p-1} \left(\frac{c_j}{c_p} - 1 \right) x_j > \sum_{j=1}^{p-1} \left(\frac{c_j}{c_p} - 1 \right) x_j^0 \quad (\text{III.77})$$

Pois, para $j = p$ temos $(\frac{c_p}{c_p} - 1) = 0$. Como $c_j \geq c_p$, para todo

$1 \leq j \leq p$, fazendo $c'_j = (\frac{c_j}{c_p} - 1)$ temos $c'_1 \geq c'_2 \geq \dots \geq c'_{p-1} \geq 0$.

Logo o problema a ser resolvido abaixou de ordem.

Seja

$c'_1 \geq c'_2 \geq \dots \geq c'_t > 0 = c'_{t+1} = \dots = c'_{p-1}$ onde $t \leq p-1$. Considere o problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & c'_1 x_1 + \dots + c'_t x_t \\ & x \in P \end{aligned}$$

Seja $x^{0'} = (x_1^{0'}, x_2^{0'}, \dots, x_n^{0'})$ a solução do guloso para este problema. Pelas próprias características do guloso temos:

$$x_1^{0'} = x_1^0, x_2^{0'} = x_2^0, \dots, x_t^{0'} = x_t^0$$

Portanto, de (III.77) podemos escrever

$$\sum_{j=1}^t c'_j x_j > \sum_{j=1}^t c'_j x_j^{0'} = \sum_{j=1}^t c'_j x_j^0 \quad \text{o que contradiz a hipótese}$$

feita na indução. Logo,

$$\sum_{j=1}^p c_j x_j^0 \geq \sum_{j=1}^p c_j x_j, \quad \forall x \in P$$

Consequentemente $x^0(c, P) = x^*(c, P)$. Portanto por indução, o algoritmo guloso fornece a solução ótima para todo c e $P^* = \mathbb{R}^n$.

Podemos verificar que o sentido inverso do teore-

ma é falso. Mostraremos por um exemplo.

EXEMPLO 4.4.1

Seja os conjuntos U_1 , U_2 , U_3 , subconjuntos do \mathbb{R}^2 , na figura (III-13).

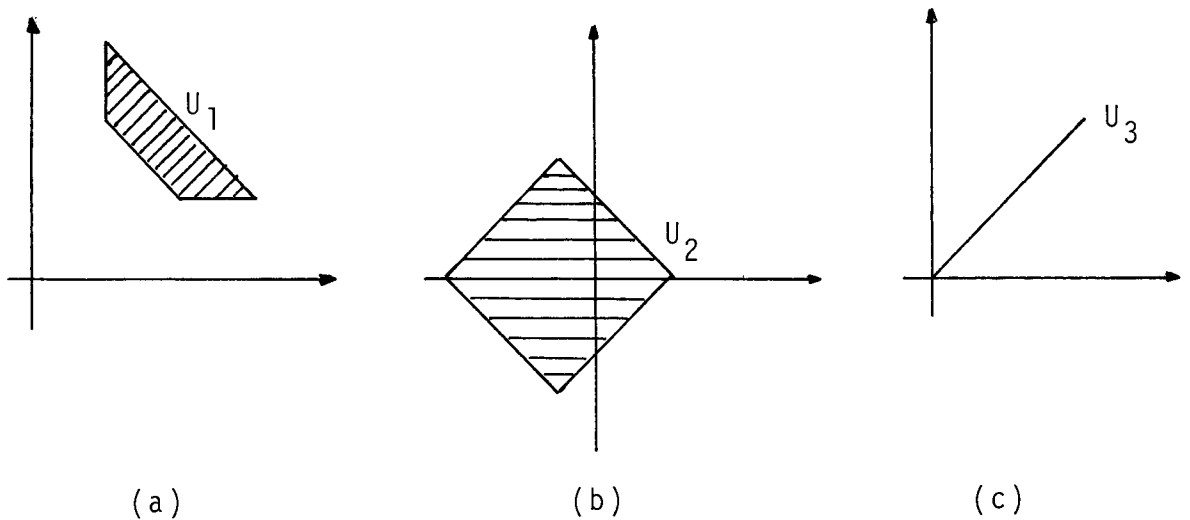


Fig. III-13. Exemplo 4.4.1

Nos três subconjuntos da figura (III-13), utilizando processo semelhante ao do exemplo (4.3.1) podemos verificar que $U_1^* = \mathbb{R}^2$, $U_2^* = \mathbb{R}^2$ e $U_3^* = \mathbb{R}^2$. Este mesmo resultado será mostrado posteriormente. Porém, também podemos verificar que não são polimatróides. U_1 na figura (III-13(a)) não satisfaz as propriedades (P1) e (P2). U_2 não satisfaz (P2) e U_3 não satisfaz (P2).

Com o teorema (4.4.1) podemos concluir que todos os problemas em (M2) e (M3) são resolvidos pelo algoritmo gulo-

so heurístico, atuando como algoritmo exato.

Caracterizaremos os conjuntos U onde o guloso atua como um algoritmo exato para todo $c > 0$.

LEMA 4.4.3

Seja $E = \{i_1, \dots, i_n\}$ um conjunto finito. Seja U um conjunto compacto e $(U + y)$ uma translação de U . Seja $V = H(\text{co}(U + y))$ tal que $V^* \supseteq \mathbb{R}_+^n$. Seja a função de conjunto g definida sobre o conjunto de subconjuntos de E tal que:

$$g(S) = \max_{x \in V} \left\{ \sum_{i \in S} x_i \right\}$$

então a função g é submodular. Isto é:

$$g(R) + g(S) \geq g(R \cup S) + g(R \cap S), \forall R, S \subseteq E$$

Demonstração: Seja $E = \{i_1, \dots, i_n\}$. Seja U um conjunto compacto e $(U + y)$ uma translação de U . Seja $V = H(\text{co}(U + y))$ tal que $V^* \supseteq \mathbb{R}_+^n$. Seja a função de conjunto g tal que:

$$g(S) = \max_{x \in V} \left\{ \sum_{i \in S} x_i \right\} \quad (\text{III.78})$$

Seja $R \subseteq E$ e $S \subseteq E$ tal que:

$$R = \{i_1, \dots, i_t, i_{t+1}, \dots, i_k\}$$

$$S = \{i_1, \dots, i_t, i_{k+1}, \dots, i_p\}$$

onde $i_j \neq i_\ell$ para $t+1 \leq j, \ell \leq p$.

Dado o conjunto V e a função g definida em V mostraremos que a função g é submodular. Para isto, uma vez que o cone guloso V^* de V contém \mathbb{R}_+^n , $V^* \supseteq \mathbb{R}_+^n$, então utilizaremos o algoritmo guloso. Seja o problema:

$$\begin{aligned} \max \quad & c \cdot x \\ & x \in V \end{aligned}$$

onde $c = (c_{i_1}, c_{i_2}, \dots, c_{i_t}, \dots, c_{i_p}, \dots, c_{i_n})$ tal que:

$$c_{i_1} = \dots = c_{i_t} = 1 + \varepsilon$$

$$c_{i_{t+1}} = \dots = c_{i_p} = 1$$

$$c_{i_{p+1}} = \dots = c_{i_n} = 0$$

Portanto temos que: $c_{i_1} \geq c_{i_2} \geq \dots \geq c_{i_n} \geq 0$. Aplicando o algoritmo guloso (6) a este problema, seja $x^0 = (x_{i_1}^0, \dots, x_{i_n}^0)$ a solução do guloso. Uma vez que $V^* \supseteq \mathbb{R}_+^n$ e $c \geq 0$ então x^0 é solução ótima para o problema acima.

De (III.78) é fácil verificar que:

$$g(R \cap S) = \max_{x \in V} \left\{ \sum_{i \in (R \cap S)} x_i \right\} =: \sum_{j=1}^t x_{i_j}^0 \quad (\text{III.79})$$

pois se existir $x \in V$ tal que $\sum_{j=1}^t x_{i_j} > \sum_{j=1}^t x_{i_j}^0$ teríamos que $cx > cx^0$ para $\epsilon \rightarrow +\infty$, isto é, a solução do guloso não seria ótima o que é impossível pela hipótese.

De maneira semelhante temos:

$$G(R \cup S) = \max_{x \in V} \left\{ \sum_{i \in (R \cup S)} x_i \right\} = \sum_{j=1}^p x_{i_j}^0 \quad (\text{III.80})$$

pois se existir $x \in V$ tal que $\sum_{j=1}^p x_{i_j} > \sum_{j=1}^p x_{i_j}^0$ teríamos que $cx > cx^0$ para $\epsilon \rightarrow 0$, isto é, a solução do guloso não seria ótima o que é impossível pela hipótese.

Da definição de g em (III.78) temos que:

$$\begin{aligned} g(R) &\geq \sum_{j=1}^k x_{i_j}^0 \\ g(S) &\geq \sum_{j=1}^t x_{i_j}^0 + \sum_{j=k+1}^p x_{i_j}^0 \end{aligned} \quad (\text{III.81})$$

Adicionando os resultados em (III.81) temos:

$$\begin{aligned} g(R) + g(S) &\geq \sum_{j=1}^t x_{i_j}^0 + \sum_{j=1}^k x_{i_j}^0 + \sum_{j=k+1}^p x_{i_j}^0 \\ &= \sum_{j=1}^p x_{i_j}^0 + \sum_{j=1}^t x_{i_j}^0 \end{aligned} \quad (\text{III.82})$$

Logo, de (III.82), (III.80) e (III.79) temos que:

$$g(R) + g(S) \geq g(R \cup S) + g(R \cap S). \blacksquare$$

TEOREMA 4.4.2

Seja $E = \{1, 2, \dots, n\}$ um conjunto finito. Seja U um conjunto compacto. O cone guloso U^* contém \mathbb{R}_+^n , $U^* \supseteq \mathbb{R}_+^n$, se e somente se existe uma translação $(U + y)$ de U tal que $H(\text{co}(U + y))$ é um polimatróide.

Demonstração: Seja $E = \{1, 2, \dots, n\}$ e um conjunto compacto U .

Seja U^* o cone guloso de U .

(\Leftarrow) Se $H(\text{co}(U + y))$ é um polimatróide então $U^* \supseteq \mathbb{R}_+^n$.

Seja $H(\text{co}(U + y))$ um polimatróide. Pela definição de fechamento hereditário temos que:

$$\text{co}(U + y) \subseteq \mathbb{R}_+^n \quad (\text{III.83})$$

e pelo teorema (4.4.1) temos que

$$(H(\text{co}(U + y)))^* \supseteq \mathbb{R}_+^n \quad (\text{III.84})$$

De (III.83) e (III.84) temos pelo teorema (4.3.3) que

$$(\text{co}(U + y))^* \supseteq \mathbb{R}_+^n \quad (\text{III.85})$$

Pelo teorema (4.3.2) e de (III.85) temos que

$$(U + y)^* \supseteq \mathbb{R}_+^n \quad (\text{III.86})$$

Logo, pelo teorema (4.3.1) e (III.86) temos finalmente

$$U^* \supseteq \mathbb{R}_+^n$$

(\rightarrow) Se $U^* \supseteq \mathbb{R}_+^n$ então existe uma translação $(U + y)$ de U tal que $H(\text{co}(U + y))$ é um polimatróide.

Seja $U^* \supseteq \mathbb{R}_+^n$. Como U é um conjunto compacto então existe $y \in \mathbb{R}^n$ tal que para todo $x \in U$ temos $x + y \geq 0$.

Portanto

$$(U + y) \subseteq \mathbb{R}_+^n \quad (\text{III.87})$$

De (III.87) e pela definição de fecho convexo temos que

$$\text{co}(U + y) \subseteq \mathbb{R}_+^n \quad (\text{III.88})$$

pois todo ponto extremo de $\text{co}(U + y)$ é ponto extremo de $(U + y)$. Ora, como todos os pontos extremos de $(U + y)$ estão em \mathbb{R}_+^n , então também os pontos extremos de $\text{co}(U + y)$ estão em \mathbb{R}_+^n e portanto segue (III.88).

Como $U^* \supseteq \mathbb{R}_+^n$ então pelo teorema (4.3.1) e (4.3.2) temos

$$\begin{aligned} (U + y)^* &\supseteq \mathbb{R}_+^n \\ (\text{co}(U + y))^* &\supseteq \mathbb{R}_+^n \end{aligned} \quad (\text{III.89})$$

De (III.88) e (III.89) e pelo teorema (4.3.3) temos que

$$(H(\text{co}(U + y)))^* \supseteq \mathbb{R}_+^n \quad (\text{III.90})$$

Seja $V = H(\text{co}(U + y))$. Se mostrarmos que V é um polimatróide completamos a demonstração. Para isto definiremos um polimatróide $IP = (E, P)$ e mostraremos que $V = P$. Seja a função de conjunto g definida sobre o conjunto de subconjuntos de E tal que:

$$g(S) = \max_{x \in V} \left\{ \sum_{i \in S} x_i \right\} \quad (\text{III.91})$$

De (III.90) e (III.91) e pelo lema (4.4.3) temos que a função g é submodular. Pela definição de fechamento hereditário $V \subseteq \mathbb{R}_+^n$ e portanto para todo $x \in V$ temos que $x \in \mathbb{R}_+^n$. Logo, a função g é não decrescente, pois é um somatório de constantes não-negativas. Portanto a função g é não-negativa, não-decrescente e submodular. Consequentemente, pelo teorema (3.2.3) temos que o poliedro P dado por:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in S} x_j &\leq g(S), \quad \forall S \subseteq E \\ x_j &\geq 0, \quad j \in E \end{aligned}$$

\bar{v} é um polimatróide. Mostraremos que $V = P$. Evidentemente, pela definição de g em (III.91) temos que $V \subseteq P$. Demonstraremos que $P \subseteq V$.

Seja z um ponto extremo de P . Mostraremos que $z \in V$, isto é, que todo ponto extremo de P pertence a V e portanto $P \subseteq V$.

Como z é um ponto extremo de P então existe uma função de pesos $c \in \mathbb{R}^n$ tal que z é a solução ótima obtida pelo algoritmo guloso (5) para o problema

$$c \cdot z = \max_{x \in P} c \cdot x$$

Seja $c \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$c_{i_1} \geq c_{i_2} \geq \dots \geq c_{i_k} > 0 \geq c_{i_{k+1}} \geq \dots \geq c_{i_n} \quad (\text{III.92})$$

Aplicando o algoritmo guloso (5) ao polimatróide seja $z \in P$ a solução do guloso:

$$\begin{aligned} z_{i_1} &= g(\{i_1\}) \\ z_{i_2} &= g(\{i_1, i_2\}) - g(\{i_1\}) \\ &\vdots \\ z_{i_k} &= g(\{i_1, \dots, i_k\}) - g(\{i_1, \dots, i_{k-1}\}) \\ z_{i_{k+1}} &= \dots = z_{i_n} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.93})$$

Aplicando o algoritmo guloso (6), para a mesma função de pesos $c \in \mathbb{R}^n$, sobre o conjunto V , seja $\tilde{z} \in V$ a solução do guloso. Portanto:

$$\begin{aligned} \tilde{z}_{i_1} &= \max \{x_{i_1} \mid x \in V\} \\ \tilde{z}_{i_2} &= \max \{x_{i_2} \mid x \in V, x_{i_1} = \tilde{z}_{i_1}\} \\ &\vdots \\ \tilde{z}_{i_k} &= \max \{x_{i_k} \mid x \in V, x_{i_1} = \tilde{z}_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}} = \tilde{z}_{i_{k-1}}\} \\ \tilde{z}_{i_{k+1}} &= \dots = \tilde{z}_{i_n} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.94})$$

Mostraremos por indução finita que $\tilde{z} = z$.

$p = 1$. De (III.91) e como $z_{i_1} = g(\{i_1\})$ então temos $\tilde{z}_{i_1} = z_{i_1}$.

$p = 2$. Sem perda de generalidade seja:

$$\begin{aligned} c_{i_1} = c_{i_2} = 1 \text{ e } c_{i_3} = \dots = c_{i_k} = 0 + \varepsilon \quad \text{e} \\ c_{i_{k+1}} = \dots = c_{i_n} = 0 \end{aligned} \quad (\text{III.95})$$

o que não altera a solução obtida pelo guloso uma vez que é mantida a sequência de escolha dos elementos de E pelo algoritmo. Como \tilde{z} é a solução do guloso e de (III.90) $V^* \supseteq \mathbb{R}_+^n$ então \tilde{z} é uma solução ótima para o problema

$$c \bar{z} = \max_{x \in V} c x = \max_{x \in V} \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (\text{III.96})$$

De (III.95), fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ temos que:

$$c \bar{z} = \bar{z}_{i_1} + \bar{z}_{i_2} = \max_{x \in V} \{x_{i_1} + x_{i_2}\} \quad (\text{III.97})$$

Logo, por definição de g em (III.91) e de (III.97) temos

$$\bar{z}_{i_1} + \bar{z}_{i_2} = g(\{i_1, i_2\})$$

$$\text{Portanto } \bar{z}_{i_2} = g(\{i_1, i_2\}) - \bar{z}_{i_1} = g(\{i_1, i_2\}) - g(\{i_1\})$$

$$\bar{z}_{i_2} = z_{i_2}$$

$p=k-1$. Suponhamos $\bar{z}_{i_j} = z_{i_j}$, $i \leq j \leq p$

$p = k$. Sem perda de generalidade seja:

$$c_{i_1} = \dots = c_{i_k} = 1 \text{ e } c_{i_{k+1}} = \dots = c_{i_n} = 0$$

Seja \bar{z} a solução do guloso. Como $V^* \supseteq \mathbb{R}_+^n$ então \bar{z} é uma solução ótima para o problema (III.96).

Logo

$$c \tilde{z} = \tilde{z}_{i_1} + \dots + \tilde{z}_{i_k} = \max_{x \in V} \{x_{i_1} + \dots + x_{i_k}\} \quad (\text{III.98})$$

Da definição da função g e de (III.98) temos:

$$\tilde{z}_{i_1} + \dots + \tilde{z}_{i_k} = g(\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}) \quad (\text{III.99})$$

Por suposição na indução e de (III.99) temos:

$$\tilde{z}_{i_k} = g(\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}) - g(\{x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}\})$$

Portanto $\tilde{z} = z$ e $z \in V$.

Ou seja, como todo ponto extremo de P pertence a V e como P é convexo então podemos dizer que para todo $z \in P$ então $z \in V$. Consequentemente $P \subseteq V$ e portanto $V = P$. Logo, V é um polimatróide e a demonstração está completa. ■

Com o teorema (4.4.2) temos que o algoritmo guloso heurístico (6) é um algoritmo exato para uma classe bem maior de problemas não enfocados pelos algoritmos anteriores.

EXEMPLO 4.4.2

Seja os conjuntos U_1 , U_2 e U_3 , subconjuntos do \mathbb{R}^2 no exemplo (4.4.1) apresentados na figura (III.13). Para esses conjuntos o $H(\text{co}(U_1 + y_1))$, $H(\text{co}(U_2 + y_2))$ e $H(\text{co}(U_3 + y_3))$

são apresentados na figura (III-14) em (a), (b) e (c) respectivamente.

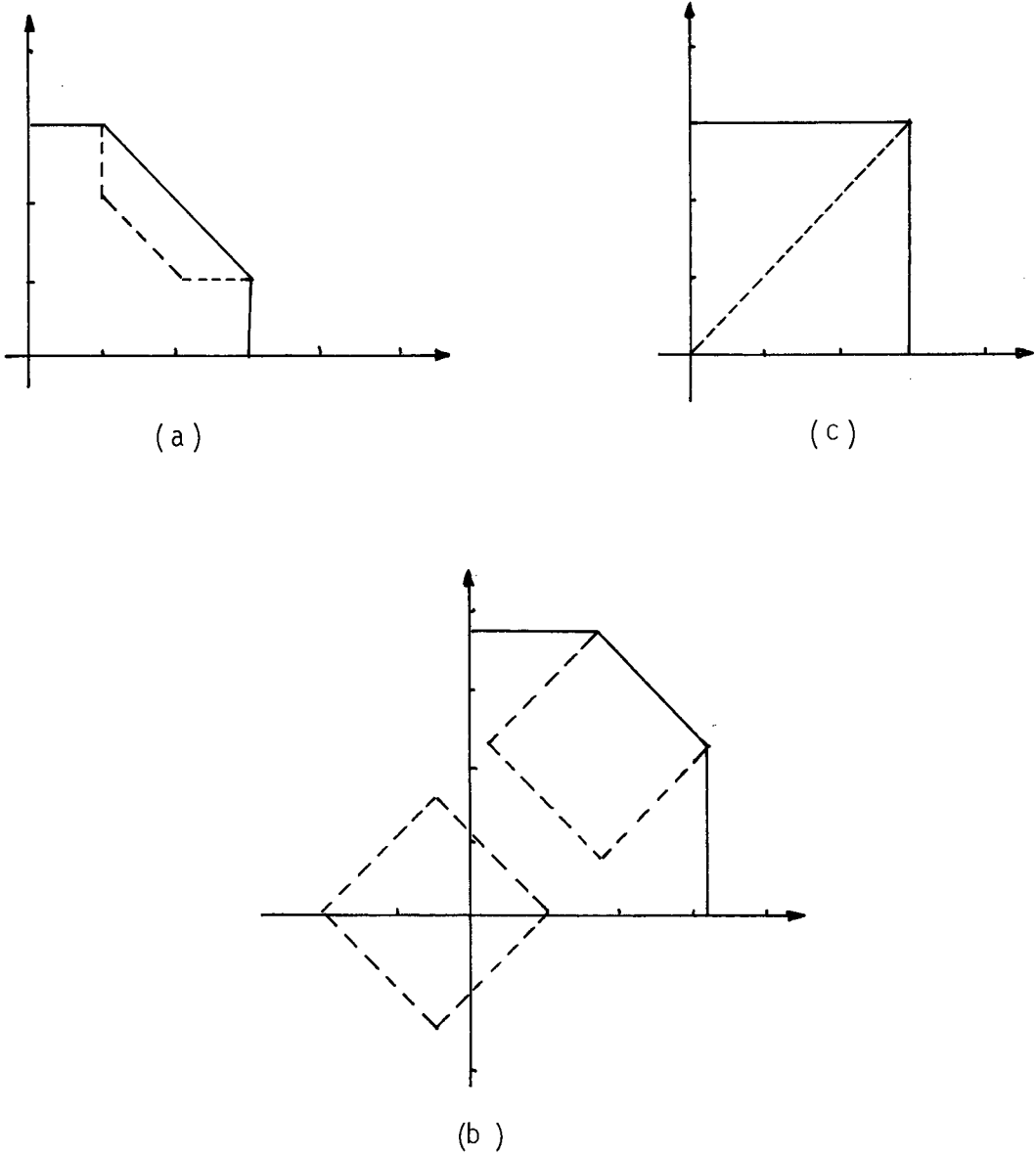


Fig. III-14. Exemplo 4.4.2.

Podemos verificar que os poliedros da figura (III-14) satisfazem as propriedades (P1 - P3) e são portanto poliedros de polimatróides. Logo, pelo teorema (4.4.2) temos que $U_1^* = \mathbb{R}_+^2$,

$U_2^* = \mathbb{R}_+^2$ e $U_3^* = \mathbb{R}_+^2$. Ou seja, os conjuntos U_1 , U_2 e U_3 são conjuntos gulosos em \mathbb{R}_+^2 e não são polimatróides, porém o $H(\text{co}(U + y))$ é um polimatróide para $U = U_1, U_2, U_3$.

EXEMPLO 4.4.3.

Na figura (III-15) temos conjuntos compactos U tais que $U^* \supseteq \mathbb{R}_+^n$.

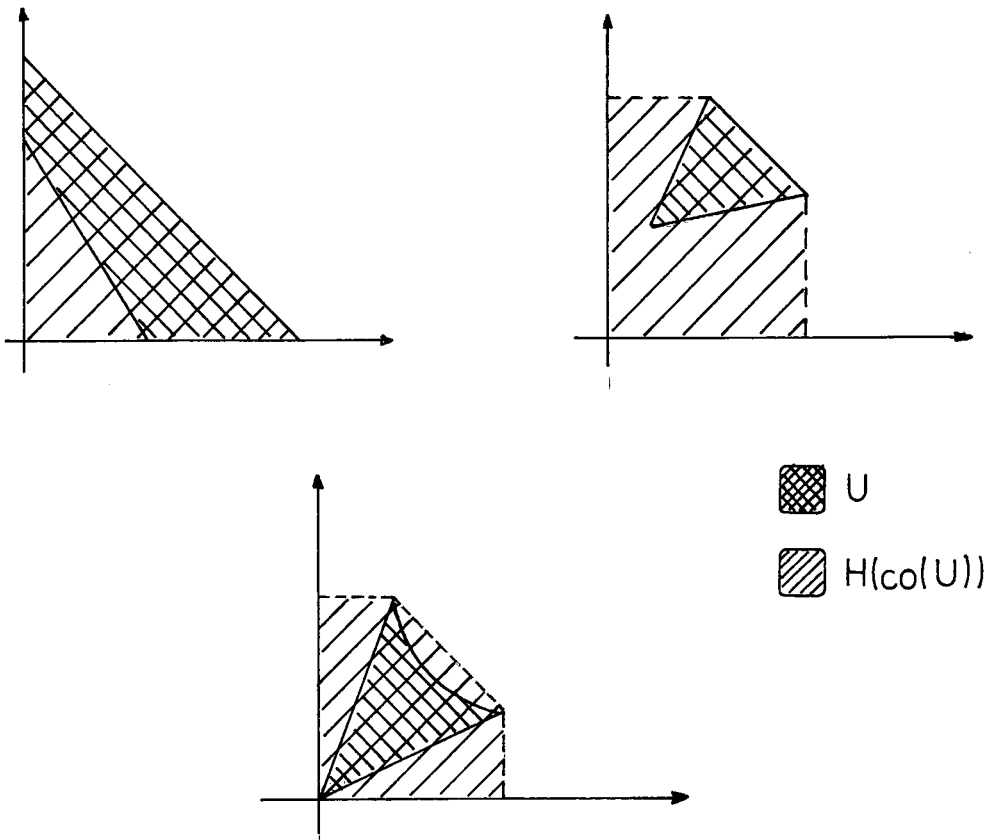


Fig. III-15. Exemplo 4.4.3

Podemos verificar que para todos os conjuntos U 's temos que os $H(\text{co}(U))$ são polimatróides.

4.5 - Comparação entre Algoritmos

Algumas comparações podem ser feitas entre os algoritmos (5) e (6).

(a) Ambos fornecem soluções ótimas para polimatróides. Porém, o algoritmo (5) exige a definição de uma função g e do problema em sua forma $x(S) \leq g(S)$, $\forall S \subseteq E$. Para problemas tais como, o politopo em \mathbb{R}^3 definido por:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

é resolvido pelo algoritmo (6) enquanto é indefinido para (5), pois é necessário conhecer $g(S)$, $\forall S \subseteq E$.

(b) O algoritmo (5) resolve um problema na forma padrão.

$$\max c x$$

$$x(S) \leq g(S), \forall S \subseteq E$$

$$x_j \geq 0, j \in E$$

Ao passo que o algoritmo (6) resolve um problema na forma

$$\max c x$$

$$Ax \leq b$$

$$x \geq 0$$

Se A é uma matriz de coeficientes 0/1, mas o politopo gerado por $Ax \leq b$, $x \geq 0$, não é um polimatróide, o algoritmo (6) sempre fornece uma solução viável, pois caminha dentro do conjunto de soluções viáveis.

Se A não é uma matriz de valores 0/1, o algoritmo (6) ainda fornece uma solução viável.

- (c) Para um problema de otimização sobre uma região não poliédrica, é impossível aplicar o algoritmo (5), enquanto o algoritmo (6) ainda produz uma solução viável embora dificilmente a ótima.

4.6 - Conclusão

Pela seção (III.4) muitos problemas permanecem em aberto. Por exemplo, caracterizar melhor, em termos de modelo, o polimatróide, ou então caracterizar os conjuntos U tais que o cone gulo contenha uma certa região de \mathbb{R}^n ou seja, como determinar o cone gulo de U . Também podíamos tentar caracterizar o modelo tal que c pertence ao cone. Caracterizar translação e fecho na prática. Mesmo a operacionalização do algoritmo é uma parte para estudos.

Outro problema que pode ser ressaltado é quanto aos problemas solucionados pelos algoritmos deste capítulo. O modelo (M3) ainda é bastante restrito. A excessiva simplicidade dos algoritmos gulosos restringe bastante os modelos, fa-

zendo com que a procura de um modelo que se adapte a um algoritmo guloso seja um procedimento restrito.

No próximo capítulo, ao invés de um modelo único, apresentaremos alguns problemas práticos para então apresentar os algoritmos gulosos específicos para cada problema. Porém, manteremos as características dos algoritmos gulosos até então apresentados.

CAPÍTULO IVALGORITMOS GULOSOS HEURÍSTICOS1. INTRODUÇÃO

Nas seções anteriores apresentamos os modelos (M2) e (M3) e os respectivos algoritmos gulosos exatos para matrôides e polimatrôides. Na seção (III.4) apresentamos o modelo (M4) e um algoritmo guloso heurístico. Procuramos definir condições em que este algoritmo se comporta como um algoritmo guloso exato.

Observamos que a definição de um modelo amarrado a um algoritmo guloso exato é um procedimento restrito onde modelos simples estão associados a algoritmos simples.

Neste capítulo, alguns problemas práticos serão apresentados e para cada problema apresentaremos um algoritmo guloso heurístico. Estaremos aqui não mais interessados em definir condições em que estes algoritmos se comportam como algoritmos gulosos exatos, mas definir um limite superior ou inferior para solução do guloso com relação à solução ótima. Este limite permitirá saber quão distante está a solução do guloso da solução ótima e poder julgar uma heurística como "boa" ou "ruim". Este julgamento, nem sempre trivial, depende do critério de medida adotado, bem como do tempo de processamento relativo a qualidade do limite encontrado.

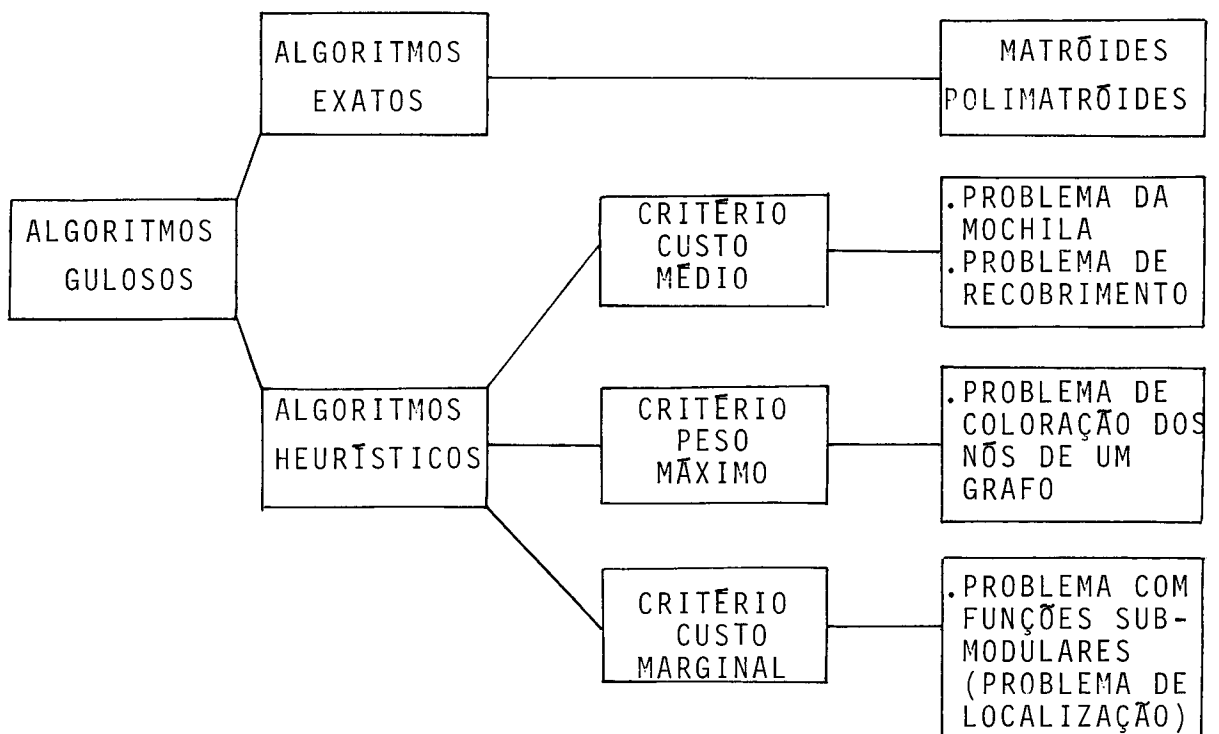
O problema inicial permanece. Seja um conjunto finito $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ e uma função de conjuntos f definida sobre os subconjuntos de E . Encontrar um subconjunto $S^* \subseteq E$ tal que:

$$f(S^*) = \max(\min) f(S)$$

$$S \subseteq E$$

Da mesma forma, os algoritmos gulosos mantêm as características dos anteriores. Seleccionam a cada passo um elemento de peso máximo $e_j \in E$ e uma "condição" a ser obedecida.

Os algoritmos gulosos heurísticos, dependendo do critério utilizado para seleccionar o elemento de peso máximo, podem ser divididos em três grupos: critério do peso médio, critério do peso marginal e critério do máximo peso.



Alguns destes problemas serão enfocados nas seções seguintes.

- Seja: x^* - a solução ótima para o problema
 x^0 - a solução obtida pelo guloso
 Z^* - o valor da função objetivo para solução ótima
 Z^0 - o valor da função objetivo para a solução do guloso
 $S^* \subseteq E$ - um subconjunto de E correspondente a solução ótima
 $S^0 \subseteq E$ - um subconjunto de E correspondente a solução do guloso.

2. PROBLEMA DA MOCHILA

Seja o conjunto finito $E = \{1, 2, \dots, n\}$ e uma função de pesos $c: E \rightarrow \mathbb{R}$. Seja o vetor $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)$. O problema da mochila é dado por:

$$\max Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$(M5) \quad \sum_{j=1}^n a_j x_j \leq b \quad (IV.1)$$

$$x_j \geq 0 \text{ e inteiro,} \quad (IV.2)$$

$$j = 1, \dots, n$$

Onde c_j , a_j e b são inteiros positivos.

Um problema de programação linear inteira. Um processo de resolução deste problema, consiste em relaxar (M5), restrições de intericidade, (IV.2), e resolver o problema de programação linear.

Uma solução viável para o problema relaxado deve satisfazer (IV.1). Seja $x_k = b/a_k$ e $x_j = 0, \forall j \neq k$

Então

$$Z = c_k(b/a_k) = b(c_k/a_k) \quad (\text{IV.3})$$

Esta solução é viável, pois $x \geq 0$ e satisfaz (IV.1).

Seja c_j/a_j o peso médio da variável x_j . Como b é uma constante positiva, de (IV.3), a função Z é máxima para $x \in \mathbb{R}^n$, $x_k = b/a_k$ e $x_j = 0, \forall j \neq k$, tal que

$$\frac{c_k}{a_k} = \text{máximo}_{j = 1, 2, \dots, n} \left(\frac{c_j}{a_j} \right)$$

Se esta solução é inteira, o problema (M5) está resolvido. Caso contrário, aplica-se técnicas de programação inteira.

A técnica que iremos apresentar, semelhante ao processo anterior, é um algoritmo guloso heurístico para (M5).

O algoritmo guloso ordena os elementos de E pelos respectivos

pesos médios de forma que:

$$\frac{c_1}{a_1} \geq \frac{c_2}{a_2} \geq \dots \geq \frac{c_n}{a_n}$$

Seleciona a cada passo um elemento $j \in E$ de peso máximo. Faz x_j o maior inteiro menor ou igual a b/a_j , $0 \leq x_j \leq b/a_j$. Atualiza b , obtendo b' e volta a selecionar no vo elemento $j \in E$ de peso máximo. Faz $0 \leq x_j \leq b'/a_j$ e assim sucessivamente.

Seja $\lfloor d \rfloor$ o maior inteiro menor ou igual a d , $d \in \mathbb{R}$.

ALGORITMO 7 - ALGORITMO GULOSO PARA O PROBLEMA DA MOCHILA

PASSO 0. Seja $E = \{1, 2, \dots, n\}$ e $c: E \rightarrow \mathbb{R}$. Seja $\pi(c) = (i_1, i_2, \dots, i_n)$ uma permutação dos elementos de E tal que

$$c_{i_1}/a_{i_1} \geq c_{i_2}/a_{i_2} \geq \dots \geq c_{i_n}/a_{i_n}$$

Por simplicidade seja $\pi(c) = (1, 2, \dots, n)$

PASSO 1. Faça $j = 1$

PASSO 2. Faça $x_j^0 = 0$

Se $a_j < b$ faça $x_j^0 = \lfloor b/a_j \rfloor$

$$b = b - a_j x_j^0$$

Se não vá para o Passo 3.

PASSO 3. Se $j < n$ então faça $j = j + 1$ e vá para o PASSO 2.

Se não pare.

EXEMPLO 2.1

Seja o problema

$$\max Z = 10x_1 + 5x_2 + x_3$$

$$5x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 34$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ inteiros}$$

$$P0. \pi(c) = (1, 2, 3)$$

$$P1. j = 1$$

$$P2. x_1^0 = \lfloor 34/5 \rfloor = 6, b = 34 - 5 \cdot 6 = 4$$

$$P3. j = j + 1 = 2$$

$$P2. x_2^0 = \lfloor 4/3 \rfloor = 1, b = 4 - 3 \cdot 1 = 1$$

$$P3. j = j + 1 = 3$$

$$P2. x_3^0 = \lfloor 1/1 \rfloor = 1, b = 1 - 1 \cdot 1 = 0$$

P3. PARE.

A solução do guloso é $x^0 = (6, 1, 1)$ e $Z^0 = 10.6 + 5.1 + 1.1$
 $Z^0 = 66$

Por se tratar de um algoritmo guloso heurístico x^0 é uma solução viável para (M5) não necessariamente a ótima. A medida da eficácia dessa solução é obtida analisando a relação entre Z^0 e Z^* .

Considere $c_1/a_1 \geq c_2/a_2 \geq \dots \geq c_n/a_n$. O valor da função Z para o problema relaxado é maior ou igual a Z^* . Logo

$$Z^* \leq b(c_1/a_1) \quad (\text{IV.4})$$

para $x_1 = b/a_1, x_2 = x_3 = \dots = x_n = 0$, viável em (IV.1)

Pelo algoritmo guloso temos que:

$$Z^0 \geq c_1 \lfloor b/a_1 \rfloor \quad (\text{IV.5})$$

De (IV.4) e (IV.5) temos que:

$$\frac{Z^0}{Z^*} \geq \frac{c_1 \lfloor b/a_1 \rfloor}{c_1 (b/a_1)} = \frac{\lfloor b/a_1 \rfloor}{b/a_1} \quad (\text{IV.6})$$

Seja $(b/a_1) \geq 1$, caso contrário basta fazer $x_1 = 0$ e trabalhar com um problema de ordem menor. Se todos os $(b/a_j) < 1$ então $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ é a única solução viável para (IV.1).

Seja $y = \lfloor b/a_1 \rfloor$, $y \geq 1$, então

$$\frac{\lfloor b/a_1 \rfloor}{b/a_1} = \frac{y}{y + \theta} \quad \text{onde } 0 \leq \theta < 1$$

$$\frac{y}{y + \theta} = \frac{1}{1 + \frac{\theta}{y}}$$

Como $y \geq 1$ e $0 \leq \theta < 1$ temos que $0 \leq \frac{\theta}{y} < 1$. Logo

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{1 + \frac{\theta}{y}} \leq 1$$

Assim

$$\frac{1}{2} < \frac{\lfloor b/a_1 \rfloor}{b/a_1} \leq 1$$

Portanto de (IV.6) temos que:

$$\frac{z^0}{z^*} > \frac{1}{2}$$

EXEMPLO 2.2

Seja o problema do exemplo (2.1). Temos

$$\frac{Z^0}{Z^*} \geq \frac{\lfloor 34/5 \rfloor}{34/5} = \frac{6}{34/5} = \frac{30}{34} = 0.88$$

$$0.88Z^* \leq Z^0 = 66 \leq Z^*$$

Apesar de muitas vezes encontrarmos soluções bastante próximas do ótimo, essa heurística nem sempre é considerada boa. Porém, muitas vezes essas soluções são utilizadas como limites para aplicações de outros métodos como Branch-and-bound. Pois, o algoritmo é simples, polinomial, de complexidade $O(n \log n)$, enquanto algoritmos exatos para o problema acima são não polinomiais.

Finalmente, gostaríamos de ressaltar a semelhança entre o algoritmo (7) e o algoritmo 6, seção (III.4).

3. PROBLEMA DE RECOBRIMENTO

3.1 - Apresentação do Problema

Seja $E = \{1, 2, \dots, n\}$ um conjunto finito de índices e a função de pesos $c: E \rightarrow \mathbb{R}$, $c > 0$. Seja $I = \{1, 2, \dots, m\}$ e seja dado um conjunto de subconjuntos de I , $D = \{D_1, D_2, \dots, D_n\}$ tal que $D_j \subseteq I$, $j \in E$.

Um subconjunto $S \subseteq E$ define uma COBERTURA de I se $\bigcup_{j \in S} D_j = I$. S define um RECOBRIMENTO de I . Seja $j \in S$ e $k \in S$, $j \neq k$ e $D_j \cap D_k = \emptyset$ então S define um PARTICIONAMENTO de I (*).

Seja uma matriz $A = (a_{ij}), (m \times n)$, $i \in I$, $j \in E$ tal que

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & - \text{se } i \in D_j \\ 0 & - \text{caso contrário} \end{cases}$$

Assim as colunas de A , matriz de incidência, são os vetores $[0, 1]$ correspondentes aos subconjuntos de I : D_1, D_2, \dots, D_n dados. Seja $x = (x_1, \dots, x_n)$ um vetor $[0, 1]$ de uma cobertura $S \subseteq E$ tal que $x_j = 1$ se tomamos um conjunto D_j para definir o nosso recobrimento, isto é, se $j \in S$. Caso D_j não seja considerado no nosso recobrimento, isto é, $j \notin S$, então $x_j = 0$.

O problema consiste na escolha de alguns D_j de modo a cobrir I , ou seja, na escolha de um conjunto $S \subseteq E$ de modo que S seja uma cobertura de I .

Com a função de pesos $c: E \rightarrow \mathbb{R}$ o problema de recobrimento (PR) consiste em: dado um conjunto I encontrar uma cobertura de peso mínimo, dada por $S^* \subseteq E$. Ou seja, encontrar um vetor $[0, 1]$ $x^* \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$x_j^* = \begin{cases} 1 & - \text{se } j \in S^* \\ 0 & - \text{caso contrário} \end{cases}$$

e a função $Z^* = \sum c_j x_j^*$ seja mínima para todo vetor $[0, 1]_{x \in \mathbb{R}^n}$.

(*) GARFINKEL, R.S. and NEMHAUSER, G.L. - Integer Programming, John Wiley & Sons, New York, 1972.

$$\min Z = \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{IV.7})$$

$$x_j \in [0, 1], \quad j = 1, \dots, n \text{ inteiro} \quad (\text{IV.8})$$

De maneira semelhante, podemos definir o problema de particionamento (PP). Dado um conjunto I encontrar um particionamento de peso m ınimo dado por $S^* \subseteq E$. Para isto, basta substituir em (M6) as restri oes (IV.7) por (IV.9)

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = 1, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{IV.9})$$

EXEMPLO 3.1.1

Seja o conjunto $I = \{1, 2, 3, 4\}$, $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e a fun ao de pesos $c: E \rightarrow \mathbb{R}$, $c = (2, 3, 6, 1, 4)$. Seja $D = (D_1, D_2, \dots, D_5)$ tal que $D_1 = \{1, 3\}$, $D_2 = \{2\}$, $D_3 = \{3, 4\}$, $D_4 = \{3, 4\}$ e $D_5 = \{1\}$. Em termos de matriz de incid ncia A temos:

$$D = \begin{matrix} & D_1 & D_2 & D_3 & D_4 & D_5 \end{matrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$c = (2 \quad 3 \quad 6 \quad 1 \quad 4)$$

O modelo para o exemplo é dado por:

$$\begin{aligned} \min Z &= 2x_1 + 3x_2 + 6x_3 + x_4 + 4x_5 \\ x_1 + & & & + x_5 &\geq 1 \\ & x_2 & & &\geq 1 \\ x_1 + & & x_3 + x_4 & &\geq 1 \\ & & x_3 + x_4 & &\geq 1 \end{aligned}$$

$$x_j \in [0, 1], j = 1, \dots, 5, \text{ inteiro}$$

Podemos verificar que a solução ótima para (PR) é $x^* = (1, 1, 0, 1, 0)$ e $Z^* = 6$, ou seja $S^* = \{1, 2, 4\} \subseteq E$. A solução ótima para (PP) é $x^* = (0, 1, 0, 1, 1)$ e $Z^* = 8$, ou seja, $S^* = \{2, 4, 5\} \subseteq E$.

3.2 - Algoritmo Guloso Heurístico

Mantendo as suas características, o guloso procura a cada passo cobrir o maior número de elementos em I a um custo mínimo. O guloso seleciona a cada passo um elemento $j \in E$ de máximo peso médio $|D_j|/c_j$.

ALGORITMO 8 - ALGORITMO GULOSO PARA O PROBLEMA DE RECOBRIMENTO

PASSO 0. Seja $E = \{1, 2, \dots, n\}$

$$S^0 = \emptyset, J = E.$$

PASSO 1. Se $D_j = \emptyset, \forall j \in E$, então PARE. S^0 é uma cobertura
Se não vā para o PASSO 2.

PASSO 2. Selecione $k \in E$ tal que $\frac{|D_k|}{c_k} = \max_{j \in J} \left(\frac{|D_j|}{c_j} \right)$

PASSO 3. $S^0 = S^0 \cup \{k\}$

$$D_j = D_j - D_k, \forall j \in J$$

$J = J - \{k\}$, vā para o PASSO 1.

S^0 é a solução do guloso.

EXEMPLO 3.2.1

Seja o problema do exemplo (3.1.1). Aplicando o algoritmo 8 temos:

P0. $S^0 = \emptyset, J = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

P1. $D_j \neq \emptyset$

P2. $\frac{|D_k|}{c_k} = \max\left(\frac{2}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{6}, \frac{2}{1}, \frac{1}{4}\right) = \frac{2}{1} \rightarrow k = 4, D_k = \{3, 4\}$

P3. $S^0 = \{4\}$

$$D_1 = \{1, 3\} - \{3, 4\} = \{1\}$$

$$D_2 = \{2\} - \{3, 4\} = \{2\}$$

$$D_3 = \{3, 4\} - \{3, 4\} = \emptyset$$

$$D_4 = \{3, 4\} - \{3, 4\} = \emptyset$$

$$D_5 = \{1\} - \{3, 4\} = \{1\}$$

$$J = \{1, 2, 3, 5\}$$

$$P1. D_j \neq \emptyset$$

$$P2. \frac{|D_k|}{c_k} = \max\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow k = 1, D_k = \{1\}$$

$$P3. S^0 = \{1, 4\}$$

$$D_1 = \emptyset, D_2 = \{2\}, D_3 = D_4 = \emptyset, D_5 = \emptyset$$

$$J = \{2, 3, 5\}$$

$$P1. D_j = D_2 \neq \emptyset$$

$$P2. \frac{|D_k|}{c_k} = \max\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \rightarrow k = 2, D_k = \{2\}$$

$$P3. S^0 = \{1, 2, 4\}$$

$$D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = \emptyset$$

$$J = \{3, 5\}$$

$$P1. D_j = \emptyset, \forall j \in E. S^0 = \{1, 2, 4\} \bar{e} \text{ uma cobertura}$$

A soluç~ao do guloso e $S^0 = \{1, 2, 4\} \subseteq E$, $Z^0 = 6$, que coincide com a soluç~ao o~tima.

EXEMPLO 3.2.2

Seja o conjunto $I = \{1, 2, \dots, m\}$ e $E = \{1, 2, \dots, m+1\}$ e a funç~ao de pesos $c: E \rightarrow \mathbb{R}$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_{m+1})$ tal que $c_j = 1/j$, $j = 1, 2, \dots, m$ e $c_{m+1} > 1$. Seja $D = (D_1, D_2, \dots, D_{m+1})$ tal que $D_j = \{j\}$, $j = 1, \dots, m$ e $D_{m+1} = I = \{1, 2, \dots, m\}$. Determinar uma cobertura $S \subseteq E$ de I .

Aplicando o algoritmo 8 temos:

$$P0. S^0 = \emptyset, J = E$$

$$P1. D_j \neq \emptyset$$

$$P2. \frac{|D_k|}{c_k} = \max\left(\frac{1}{1}, \frac{1}{1/2}, \dots, \frac{1}{1/m}, \frac{m}{c_{m+1}}\right) = \\ = \max(1, 2, \dots, m, \frac{m}{c_{m+1}}) = m \rightarrow k=m, D_k = \{m\}$$

$$P3. S^0 = \{m\}$$

$$D_j = \{j\}, j = 1, \dots, m-1$$

$$D_m = \emptyset$$

$$D_{m+1} = I - \{m\} = \{1, 2, \dots, m-1\}$$

$$J = E - \{m\} = \{1, 2, \dots, m-1, m+1\}$$

$$P1. D_j \neq \emptyset$$

$$P2. \frac{|D_k|}{c_k} = \max(1, 2, \dots, m-1, \frac{m-1}{c_{m+1}}) = m-1 \rightarrow k=m-1, D_k = \{m-1\}$$

$$P3. S^0 = \{m-1, m\}$$

$$D_j = \{j\}, j = 1, \dots, m-2$$

$$D_{m-1} = D_m = \emptyset$$

$$J = \{1, 2, \dots, m-2, m+1\}$$

$$\vdots$$

$$P1. D_1 \neq \emptyset, D_{m+1} \neq \emptyset$$

$$P2. \frac{|D_k|}{c_k} = \max(1, \frac{1}{c_{m+1}}) = 1 \rightarrow k = 1, D_k = \{1\}$$

$$P3. S^0 = \{1, 2, \dots, m\}$$

$$D_1 = D_2 = \dots = D_m = D_{m+1} = \emptyset$$

$$J = \{m + 1\}$$

P1. $D_j = \emptyset, \forall j \in E. S^0 = \{1, 2, \dots, m\}$ é uma cobertura.

A solução do guloso é $S^0 = \{1, 2, \dots, m\} \subseteq E$. A esta solução está associado o peso mínimo:

$$z^0 = \sum_{j=1}^m c_j = \sum_{j=1}^m \frac{1}{j} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{m}$$

Seja $H(m) = \sum_{j=1}^m \frac{1}{j}$. Pelo exemplo (3.2.2) temos

que $D_{m+1} = I$ é uma outra cobertura de I de peso c_{m+1} . Supomos que $c_{m+1} > 1$. Porém, c_{m+1} pode ser arbitrariamente próximo de 1. Assim, o custo da cobertura obtida pelo guloso neste exemplo pode exceder o custo de uma cobertura ótima, $S^* = \{m+1\}$, por um fator arbitrariamente próximo de $H(m)$. Ou seja, pode ser mostrado que este fator nunca ultrapassa $H(m)$. Com isto define-se para este exemplo um limite superior para a solução do guloso. Este limite pode ser generalizado através do teorema (3.2.1) para um problema de recobrimento genérico [2].

TEOREMA 3.2.1

Seja S^0 a cobertura obtida pelo guloso e x^* uma cobertura ótima em (M6). Então

$$\sum_{j \in S^0} c_j = \sum_{j=1}^n c_j x_j^0 \leq \sum_{j=1}^n H\left(\sum_{i=1}^m a_{ij}\right) \cdot c_j \cdot x_j^*$$

Como $\sum_{i=1}^m a_{ij} = |D_j|$, temos que o peso da cobertura obtida pelo algoritmo guloso \bar{e} no máximo o peso da cobertura ótima ponderado pelos fatores

$$H(|D_j|) = \sum_{j=1}^{|D_j|} 1/j.$$

EXEMPLO 3.2.3

Para o exemplo (3.2.1) temos que o guloso fornece a solução ótima $x^0 = x^* = (1, 1, 0, 1, 0)$ e $Z^0 = Z^* = 6$. Aplicando o teorema (3.2.1) temos:

$$\begin{aligned} Z^0 = Z^* = 6 &\leq \sum_{j=1}^n H(|D_j|) c_j x_j^* \\ &\leq H(2) \cdot 2 \cdot 1 + H(1) \cdot 3 \cdot 1 + H(2) \cdot 6 \cdot 0 + H(2) \cdot 1 \cdot 1 + H(1) \cdot 4 \cdot 0 \\ &\leq \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 2 + 3 + 0 + \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot 1 + 0 \\ &\leq 3 + 3 + \frac{3}{2} = 6 + \frac{3}{2} = \frac{15}{2} \\ &\leq \frac{15}{2} \end{aligned}$$

Ou seja $Z^* \leq Z^0 \leq 15/2$

Observe que a cada iteração do algoritmo guloso,

novos custos médios são calculados, o que melhora a solução final obtida, ao invés de custos médios calculados, uma única vez no primeiro passo.

Quanto ao limite definido, trata-se de um limite justo uma vez que para o exemplo (3.2.2) este limite é atingido. Muitas vezes no entanto o limite se mantém bastante distante da solução ótima. Porém, este algoritmo heurístico é polinomial e é por isso significativo para os problemas de recobrimento que são NP-completos.

O algoritmo 8 é também bastante semelhante ao algoritmo 6 da seção (III.4).

4. PROBLEMAS COM FUNÇÕES OBJETIVO SUBMODULARES

4.1 - Introdução

Muitos são os problemas práticos com funções objetivo submodulares. Esta propriedade introduzida nas seções anteriores é apresentada no apêndice D, onde definições equivalentes são demonstradas. Utilizando desta propriedade apresentaremos algoritmos gulosos heurísticos.

Apresentaremos problemas menores como: problema de localização, problema de localização de armazéns não capacitado, problema das K-medianas, etc. Destes problemas chegaremos a problemas gerais, como o problema de interseção de ma-

tróides. Um algoritmo guloso heurístico geral será apresentado e definido um limite para a solução obtida com este algoritmo. Finalmente, retornaremos aos problemas iniciais para os quais particularizaremos o algoritmo guloso heurístico geral.

4.2 - Definição de Modelos

Seja $I = \{1, 2, \dots, m\}$, $E = \{1, 2, \dots, n\}$, uma função de pesos $c = (c_{ij})$, $i \in I$, $j \in E$, e a função de pesos $d: E \rightarrow \mathbb{R}$. Seja I um conjunto de clientes e E um conjunto de possíveis localizações de fornecedores. Um problema de localização consiste em determinar um subconjunto $S \subseteq E$, de fornecedores, tal que $|S| \leq N$, onde N é o número máximo de fornecedores admissíveis e que maximiza os lucros pelo fornecimento a todo $i \in I$ através de algum $j \in S$ e minimiza os custos fixos de manutenção dos fornecedores d_j , $\forall j \in S$. Ainda mais, um fornecedor pode abastecer a mais de um cliente, podendo abastecer a todos, porém um cliente só será abastecido por um único fornecedor.

O modelo para o problema de localização é dado por:

$$\max z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in E} c_{ij} x_{ij} - \sum_{j \in E} d_j y_j \quad (\text{IV.10})$$

$$(M7) \quad \sum_{j \in E} x_{ij} = 1, \quad i \in I \quad (\text{IV.11})$$

$$1 \leq \sum_{j \in E} y_j \leq N \quad (\text{IV.12})$$

$$0 \leq x_{ij} \leq y_j \leq 1, \quad i \in I, \quad j \in E \quad (\text{IV.13})$$

$$x_{ij}, y_j \text{ inteiro, } i \in I, \quad j \in E \quad (\text{IV.14})$$

onde: c_{ij} - lucro obtido em abastecer i através de j , $c_{ij} \geq 0$.

d_j - custo fixo de manutenção do fornecedor j .

N - número máximo de fornecedores locados

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{- o cliente } i \text{ será abastecido por } j \\ 0 & \text{- caso contrário} \end{cases}$$

$$y_j = \begin{cases} 1 & \text{- o fornecedor } j \text{ é ativado} \\ 0 & \text{- caso contrário} \end{cases}$$

Seja $S \subseteq E$ um subconjunto viável em (IV.11) a (IV.14), ou seja, S é um conjunto de fornecedores ativados. Podemos então definir uma função $f(S)$ onde:

$$f(S) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in S} c_{ij} x_{ij} - \sum_{j \in S} d_j y_j \quad (\text{IV.15})$$

Mas, para o problema de localização, pelas restrições (IV.11), para todo cliente existe um único fornecedor, ou seja, para todo $i \in I$ existe um $K \in S \subseteq E$. Portanto, definido um subconjunto de fornecedores S viável em (M7), para todo $i \in I$ existe um $K \in S$ tal que

$$x_{ik} = 1 \leftrightarrow c_{ik} = \max_{j \in S} c_{ij} \quad (\text{IV.16})$$

satisfazendo as restrições (IV.11). Assim, de (IV.16) e (IV.15) para um conjunto viável S de fornecedores, a função

$$f_1(S) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in S} c_{ij} x_{ij}$$

atingirá um máximo para

$$f_1(S) = \sum_{i \in I} \max_{j \in S} c_{ij} \quad (\text{IV.17})$$

Por (IV.12) podemos localizar no máximo N fornecedores. Assim, para todo $S \subseteq E$, viável em (M7), temos que $1 \leq |S| \leq N$. Portanto

$$y_j = 1 \leftrightarrow j \in S, \quad 1 \leq |S| \leq N \quad (\text{IV.18})$$

Logo, de (IV.18) e (IV.15), a função $f_2(S) = \sum_{j \in S} d_j y_j$ é mínima para

$$f_2(S) = \sum_{j \in S} d_j \quad (\text{IV.19})$$

De (IV.17) e (IV.19) em (IV.15) temos que para um subconjunto $S \subseteq E$, viável em (M7), a função $f(S)$ é máxima para

$$f(S) = \sum_{i \in I} \max_{j \in S} c_{ij} - \sum_{j \in S} d_j \quad (\text{IV.20})$$

De (IV.16) e (IV.17) vimos que as restrições (IV.11) são satisfeitas estando embutidas na função (IV.17). De (IV.18) temos que as restrições (IV.12) são satisfeitas para todos $S \subseteq E$ tal que $1 \leq |S| \leq N$. De (IV.16) e (IV.18) as restrições (IV.13) e (IV.14) estão implícitas através da associação. Logo, ao problema de localização em (M7) podemos associar um problema equivalente que consiste em determinar um subconjunto $S \subseteq E$ respeitando de forma implícita as restrições (IV.11) a (IV.14) e maximizando o retorno. Temos:

$$\max_{S \subseteq E} \{f(S) \mid |S| \leq N, f(S) \text{ dada por (IV.20)}\} \quad (\text{IV.21})$$

Fazendo pequenas modificações para o modelo (IV.21) teremos os modelos para outros problemas práticos específicos.

Seja I um conjunto de clientes e E um conjunto de armazéns possíveis de serem locados. Determinar um subconjunto de armazéns $S \subseteq E$, $|S| \leq N$, que minimiza os custos de transportes e os custos de manutenção dos armazéns. Este é um problema de localização de armazéns simples ou não-capacitado. O modelo para este problema é o mesmo modelo anterior, (M7), a menos de (IV.10) que é substituída por:

$$\min Z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in E} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j \in E} d_j y_j$$

Com raciocínio semelhante ao anterior, temos para $S \subseteq E$ que a função $f(S)$ é mínima para

$$f(S) = \sum_{i \in I} \min_{j \in S} c_{ij} + \sum_{j \in S} d_j \quad (\text{IV.22})$$

Logo, o problema de localização de armazéns não capacitado é dado por:

$$\max_{S \subseteq E} \{f(S) \mid |S| \leq N, f(S) \text{ dada por (IV.22)}\}$$

Seja $I = E$ o conjunto de nós de um grafo. Seja a função (IV.10) modificada para

$$\min Z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in E} c_{ij} x_{ij}$$

e a restrição (IV.12) modificada para $\sum_{j \in E} y_j = N$. Este novo modelo é conhecido como problema das N -medianas.

Outros modelos relacionados a problemas práticos podem ser obtidos com pequenas variações em (M7). Assim, o que desenvolvermos para (M7) a menos de pequenas diferenças é válido para os demais problemas.

Mostraremos a seguir que $f(S)$ em (IV.20) é submodular.

Seja $f(\emptyset) = 0$ e $d_j = 0, \forall j \in E$. Seja $R \subset S \subset E$ e $k \in (E - S)$. Utilizando (IV.20) podemos escrever que:

$$\begin{array}{l|l} f(S \cup \{k\}) = \sum_{i \in I} \max_{j \in (S \cup \{k\})} c_{ij} & f(R \cup \{k\}) = \sum_{i \in I} \max_{j \in (R \cup \{k\})} c_{ij} \\ f(S) = \sum_{i \in I} \max_{j \in S} c_{ij} & f(R) = \sum_{i \in I} \max_{j \in R} c_{ij} \end{array}$$

Logo temos que:

$$\begin{aligned} f(S \cup \{k\}) - f(S) &= \sum_{i \in I} (\max_{j \in (S \cup \{k\})} c_{ij} - \max_{j \in S} c_{ij}) \\ &= \sum_{i \in I} \max(0, c_{ik} - \max_{j \in S} c_{ij}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(R \cup \{k\}) - f(R) &= \sum_{i \in I} (\max_{j \in (R \cup \{k\})} c_{ij} - \max_{j \in R} c_{ij}) \\ &= \sum_{i \in I} \max(0, c_{ik} - \max_{j \in R} c_{ij}) \end{aligned}$$

Como $R \subset S$ temos então que:

$$\max_{j \in R} c_{ij} \leq \max_{j \in S} c_{ij}, \forall i \in I$$

$$\text{Logo, } \sum_{i \in I} \max(0, c_{ik} - \max_{j \in S} c_{ij}) \leq \sum_{i \in I} \max(0, c_{ik} - \max_{j \in R} c_{ij})$$

Portanto podemos concluir que:

$$f(S \cup \{k\}) - f(S) \leq f(R \cup \{k\}) - f(R), \quad R \subset S \subseteq E, \quad k \in (E - S) \quad (\text{IV.23})$$

Uma função de valores reais definida sobre os subconjuntos de E satisfazendo (IV.23) é dita SUBMODULAR.

Na seção (II-2.1) introduzimos o conceito de submodularidade. A demonstração da equivalência entre o conceito definido no capítulo II e o definido acima será demonstrado no apêndice D. (Teorema D.1).

Mostramos que a função f em (IV.20) é submodular. Podemos ainda mostrar que f é não-decrescente para $d_j = 0$, $\forall j \in E$. Como em (M7) temos que $c_{ij} \geq 0$ e fizemos $d_j = 0$, $\forall j \in E$ então a função (IV.20) é um somatório de constantes não-negativas e portanto é uma função não-decrescente e para $S \subset E$ e $k \in (E - S)$ temos que:

$$f(S \cup \{k\}) - f(S) \geq 0$$

Definido o problema de localização partiremos para problemas gerais que ao serem particularizados nos levam a voltar ao problema de localização ou aos demais problemas citados anteriormente.

Mostramos que a função f em (IV.20) é submodular e não decrescente. Logo, uma generalização para o problema em (IV.21) é dada pelo problema:

$$\begin{aligned} \max \{f(S) \mid |S| \leq N, f(S) \text{ submodular e não-decrescente}\} \\ S \subseteq E \end{aligned} \quad (\text{IV.24})$$

Através de um exemplo mostraremos, por outro caminho, utilizando a teoria de matrôides que o problema de localização (M7) se encaixa em (IV.24). A seguir, em um segundo exemplo, um outro problema será formalizado, também utilizando a teoria de matrôides. Porém, é um problema que não se encaixa em (IV.24). Das características dos problemas nos dois exemplos, definiremos um novo problema generalizando (IV.24).

EXEMPLO 4.2.1

Seja o problema de localização (M7). Suponhamos inicialmente que $1 \leq |S| \leq |E| = n$, ou seja, não temos restrição quanto ao número de fornecedores, restrições (IV.12). Seja $E' = \{(i, j) \mid i \in I \text{ e } j \in E\}$ e $E'_i = \{(i, j) \mid j \in E\}$, $i \in I$, uma linha da matriz de posições E' . Podemos definir sobre E' um matrôide transversal (no caso um matrôide partição, pois os E'_i , $i \in I$ são disjuntos. Veja seção (II.4)) $M = (E', F(E'))$ para o problema de localização sem as restrições (IV.12). Seja $Q' = (Q'_1, \dots, Q'_m)$ tal que $Q'_i = E'_i$, $i \in I$. Assim, um conjunto independente $R \in F(E')$ é um parcial transversal de Q' . Portanto R é um conjunto contendo no máximo um elemento por linha, ou

seja, a cada cliente $i \in I$ está associado no máximo a um fornecedor $j \in E$. O máximo conjunto $R \in F(E')$ é uma base do matrôide e portanto a cada cliente $i \in I$ está associado exatamente um fornecedor $j \in E$ (restrições (IV.11)) tal que $(i,j) \in R$.

Associando os pesos c_{ij} aos elementos de E' temos um problema de otimização de matrôides visto anteriormente, que consiste em determinar um conjunto independente $R \subseteq E'$ de peso máximo, ou seja,

$$f(R) = \max_{R \in F(E')} \sum_{(i,j) \in R} c_{ij} \quad (\text{IV.25})$$

Esta função é submodular e não-decrescente (veja teorema D.5) e este problema foi solucionado no capítulo anterior.

Entraremos agora com as restrições (IV.12), voltando ao problema inicial (M7). Temos agora um problema de matrôides restrito ao número de fornecedores. Ou seja, para um subconjunto $S \subseteq E$, viável em (M7), podemos definir um novo matrôide transversal $M = (E'', F(E''))$. Seja $E'' = \{(i,j) \mid i \in I, j \in S\}$ e $E''_i = \{(i,j) \mid j \in S\}$, $i \in I$, temos então $Q'' = (Q''_1, \dots, Q''_m)$ tal que $Q''_i = E''_i$, $i \in I$. Assim, um conjunto independente $R \in F(E'')$ é um parcial transversal de Q'' , isto é, um conjunto tal que a cada $i \in I$ está associado no máximo um fornecedor $j \in S$. Para $R \in F(E'')$, uma base do matrôide M , a cada $i \in I$ está associado a um único $j \in S$, satisfazendo as restrições (IV.11). Como $1 \leq |S| \leq N$ também as restrições (IV.12) são satisfeitas. Por

tanto o problema agora consiste em determinar um subconjunto independente $R \subseteq E''$ de peso máximo tal que $R \in F(E'')$ no matrôide $M = (E'', F(E''))$. Portanto a função para um subconjunto $S \subseteq E$, viável em (M7) é dada por:

$$f(S) = \max\left\{ \sum_{(i,j) \in R} c_{ij} \mid R \in F(E'') \right\}$$

ou mais especificamente dada por:

$$f(S) = \max\left\{ \sum_{(i,j) \in R} c_{ij} \mid R \in F\left(\bigcup_{j \in S} Q_j^i\right) \right\} \quad (\text{IV.27})$$

onde os Q_j^i são as colunas $j \in S \subseteq E$ da matriz de posições inicial E' .

A função (IV.27) também é submodular e não-decrescente (Teorema D.6). Logo, o problema de localização dado por:

$$\max_{S \subseteq E} \{f(S) \mid |S| \leq N, f(S) \text{ dada por (IV.27)}\}$$

é um problema que se encaixa em (IV.24).

EXEMPLO 4.2.2

Seja $I = \{1, 2, \dots, m\}$ um conjunto de caixas e $N = \{1, 2, \dots, n\}$ um conjunto de elementos que serão depositados neste conjunto de caixas. Seja a função $f_i(S_i)$ o retorno

obtido ao depositar $S_i \subseteq N$ na caixa i onde f_i é submodular e não-decrescente. Determinar uma distribuição dos elementos de N pelas caixas tal que $S_i \subseteq N$ são todos os elementos de N depositados na caixa i e de forma a obter o máximo retorno em todas as caixas, $f(S) = \sum_{i=1}^m f_i(S_i)$. Este é o problema das m -caixas e pode ser visto como:

$$\begin{aligned} \max_{S_1 \subseteq N, \dots, S_m \subseteq N} \{ & \sum_{i=1}^m f_i(S_i) \mid \bigcup_{i=1}^m S_i \subseteq N, S_i \cap S_k = \emptyset, k \neq i, \\ & f_i(S_i) \text{ submodular e não decrescente, } i = 1, \dots, m \} \end{aligned} \quad (\text{IV.28})$$

Seja $E = \{(i,j) \mid i \in I, j \in N\}$ e $E_j = \{(i,j) \mid i \in I\}$, $j \in N$, a j^{a} coluna da matriz de posições E . Com estes elementos podemos definir um matrõide transversal (também neste caso um matrõide partição) $M = (E, F)$ sobre E . Para isto, basta fazer $Q = (Q_1, \dots, Q_n)$ tal que $Q_j = E_j$, $j \in N$. Um conjunto independente em $M = (E, F)$ é um parcial transversal de Q . Um parcial transversal de Q corresponde a tomar no máximo um elemento em cada coluna, ou seja, depositar um elemento $j \in N$ em uma única caixa $i \in I$. Assim, o problema consiste em determinar um subconjunto $S \subseteq E$ tal que $|S \cap E_j| \leq 1$, $j \in N$, isto é, um subconjunto $S \subseteq E$ independente no matrõide de M . Portanto uma generalização de (IV.28) é dada por:

$$\begin{aligned} \max \{ & f(S) \mid |S \cap E_j| \leq 1, j \in N, f(S) \text{ submodular} \\ & S \subseteq E \text{ e não decrescente} \} \end{aligned} \quad (\text{IV.29})$$

Como \bar{e} é um problema de maximização deveremos ter $|S \cap E_j| = 1$ e $\bigcup_{i=1}^m S_i = N$. Podemos verificar que este problema não se encaixa em (IV.24), diferenciando apenas nas restrições.

De (IV.24) e (IV.29) no exemplo (4.2.2) temos que estes problemas diferem quanto as restrições. Porém, podemos verificar que em ambos os casos temos um problema de otimização em matrôides.

Em (IV.24), considerando um matrôide uniforme $M = (E, F)$, temos que F é o conjunto de subconjuntos independentes $S \subseteq E$ tal que $|S| \leq N$.

Em (IV.29), pelo exemplo (4.2.2) temos um matrôide partição $M = (E, F)$ tal que F é o conjunto de subconjuntos independentes $S \subseteq E$ tal que S é um parcial transversal de Q . Portanto uma generalização de (IV.24) de modo a englobar (IV.29) pode ser dado por:

$$\max_{S \subseteq E} \{f(S) \mid S \in F, M = (E, F) \text{ um matrôide e } f(S) \text{ submodular e não-decrescente}\} \quad (\text{IV.30})$$

Trata-se aqui de um problema de otimização de matrôides cabendo porém ressaltar a diferença para com os problemas de otimização de matrôides vistos no capítulo III, ou no exemplo (4.2.1). Naqueles, a cada elemento de E está associado um custo fixo, enquanto nestes, os custos são fornecidos

por uma função de subconjuntos de E . Naqueles, o problema consistia em selecionar um elemento e verificar sua independência. Nestes, além da independência, um conjunto de restrições, dadas pelo problema, devem ser satisfeitas. Assim, para o problema de localização, para todo subconjunto $S \subseteq E$ tal que $|S| \leq N$, a função $f(S) = \sum_{i \in I} \max_{j \in S} c_{ij}$ leva em consideração as restrições (IV.11). Portanto $f(S)$ pode atingir um grau de complexidade maior a medida que maior número de restrições são consideradas. A diferença entre os problemas de otimização de matrôides citados é bastante clara para o exemplo (4.2.1). Neste, inicialmente definimos um matrôide transversal sobre E' e a função de custos associada a E' dada pelos custos c_{ij} , obtendo o problema (IV.24). Finalmente obtivemos (IV.30) utilizando as restrições, ou seja, definindo um matrôide uniforme e a função de custos definida sobre subconjuntos de E .

Vimos anteriormente, o problema de determinar um subconjunto $S \subseteq E$ independente em mais de um matrôide, ou seja, o problema de interseção de matrôides. (Apêndice C). De forma semelhante ao visto acima, considerando não mais custos fixos associados aos elementos de E , mas uma função de subconjuntos de E , o problema de interseção pode ser visto como uma generalização de (IV.30) dada por:

$$\max_{S \subseteq E} \{f(S) \mid S \in \bigcap_{k=1}^K F_k, M_k = (E, F_k) \text{ são matrôides} \\ k = 1, \dots, K \text{ e } f(S) \text{ submodular e não decrescente}\}$$

(IV.31)

Para este problema será apresentado um algoritmo guloso heurístico bem como o limite para a solução obtida por este algoritmo.

4.3 - Um Algoritmo Guloso Heurístico

Seja o problema (IV.31) de interseção de matrôides. Seja $F = \bigcap_{k=1}^K F_k$ e $p_j(S) = f(S \cup \{j\}) - f(S)$, o acréscimo da adição de $j \in (E-S)$ ao subconjunto S . Como f é não decrescente temos que $p_j(S) \geq 0$.

Apresentaremos um algoritmo guloso heurístico para um matrôide $M = (E, F)$, onde F é o conjunto interseção e f uma função de conjunto submodular e não-decrescente. O algoritmo seleciona a cada passo um elemento $\{j\}$ tal que o peso marginal $p_j(S)$ seja máximo. Testa se $(S \cup \{j\}) \in F$. Caso sim, adiciona $\{j\}$ a S e volta a selecionar outro elemento. Caso contrário, volta a selecionar outro elemento.

ALGORITMO 9 - ALGORITMO GULOSO HEURÍSTICO PARA (IV.31)

PASSO 0. Seja $S^0 = \emptyset$, $E^0 = E$, $t = 0$.

Iteração $t+1$:

PASSO 1. Se $E^t = \emptyset$ então PARE. S^t é a solução do guloso.

Se não vá ao PASSO 2.

PASSO 2. Selecione $j \in E^t$ tal que $p_{j(t+1)}(S^t) = \max_{j \in E^t} p_j(S^t)$ respeitando as restrições porventura existentes.

PASSO 3. Se $(S^t \cup \{j\}) \notin F$, faça $E^t = E^t - \{j\}$ e retorne ao PASSO 1.

Se $(S^t \cup \{j\}) \in F$, faça $p_t = p_{j(t+1)}(S^t)$

$$S^{t+1} = S^t \cup \{j\}$$

$$E^{t+1} = E^t - \{j\}$$

$$t = t + 1$$

retorne ao PASSO 1.

S^t é a solução do guloso. Para $t = n$, $n = |E|$, temos $S^t = S^n$ é a solução do guloso. Logo,

$$Z^0 = f(S^t) = f(\emptyset) + p_0 + p_1 + \dots + p_{t-1}$$

Para $S^t = S^n$ temos

$$Z^0 = f(S^n) = f(\emptyset) + p_0 + p_1 + \dots + p_{n-1}$$

Através do teorema (4.3.1) podemos obter limites para a solução do algoritmo guloso 9 aplicado ao problema (IV.31).
|||.

TEOREMA 4.3.1

Seja K o número de matrôides na interseção. Se o algoritmo guloso heurístico é aplicado ao problema (IV.31) então:

$$\frac{Z^* - Z^0}{Z^* - f(\emptyset)} \leq \frac{K}{K+1}$$

Este limite \bar{e} é justo para todo K .

Um outro limite independente de K pode ser obtido [11] [17] [3]. Seja N a cardinalidade do máximo conjunto independente em $M = (E, F)$ e $(N' + 1)$ a cardinalidade do mínimo conjunto dependente em $M = (E, F)$.

TEOREMA 4.3.2

Se o algoritmo guloso heurístico \bar{e} é aplicado ao problema (IV.31) então:

$$\frac{Z^* - Z^0}{Z^* - f(\emptyset)} \leq \frac{(N-1)^{N'}}{N}$$

Este limite \bar{e} é justo para todo $N' \leq N$ e todo N .

Com estes resultados voltaremos aos problemas iniciais, tratando casos particulares.

4.4 - Aplicações

O algoritmo guloso heurístico para o problema geral (IV.31) pode ser particularizado para todos aqueles que nele se encaixam.

Seja o problema (IV.31) com $K = 1$, um único matrõide $M_1 = (E, F_1)$. Seja M_1 um matrõide uniforme. Neste caso retornamos ao problema (IV.30) e mais especificamente ao problema (IV.24).

Por se tratar de um matrõide uniforme, todo subconjunto $S \subseteq E$ tal que $|S| \leq N$ é independente. Portanto basta fazer um processo iterativo $t = t + 1$ até N e a independência não é necessária ser testada.

Como f é não decrescente temos para todo $j \in E$ que $p_j(S) \geq 0$, $S \subseteq E$. Assim, para uma iteração $(t+1)$ se $p_j(S^t) = 0$, $\forall j \in E^t$ então para todas as iterações subsequentes os $p_j(S^t)$ serão nulos, pois f é submodular e portanto satisfaz (IV.23). Logo, o processo pode terminar nesta iteração $(t+1)$.

Com estas simplificações temos um novo algoritmo, algoritmo 9 modificado, para o problema (IV.24).

ALGORITMO 10 - ALGORITMO GULOSO HEURÍSTICO PARA (IV.24)

PASSO 0. Seja $S^0 = \emptyset$, $E^0 = E$, $t = 0$

Iteração $t + 1$:

PASSO 1. Selecione $j \in E^t$ tal que $p_{j(t+1)}(S^t) = \max_{j \in E^t} p_j(S^t)$,
respeitando as restrições porventura existentes.

Faça $p_t = p_{j(t+1)}(S^t)$, $j = j(t + 1)$

PASSO 2. Se $p_t = 0$ então PARE. $t < N$. S^t é a solução do guloso.

Se não, faça $S^{t+1} = S^t \cup \{j\}$

$$E^{t+1} = E^t - \{j\}$$

$t = t+1$ e vá para o PASSO 3.

PASSO 3. Se $t = N$ então PARE. S^t é a solução do guloso
Se não retorne ao PASSO 1.

A solução do guloso é S^t , $t \leq N$, e

$$Z^0 = f(S^t) = f(\emptyset) + p_0 + p_1 + \dots + p_{t-1}, \quad t \leq N$$

Aplicando o teorema (4.3.2) para este problema, temos que $N = N'$ por se tratar de um matrõide uniforme. Logo,

$$\frac{Z^* - Z^0}{Z^* - f(\emptyset)} \leq \left(\frac{N-1}{N}\right)^N$$

TEOREMA 4.4.1

Se o algoritmo guloso heurístico (10) é aplicado ao problema (IV.24) e a parada ocorre após $t < N$ iterações então a solução do guloso é uma solução ótima para o problema, isto é, $Z^0 = Z^*$.

Demonstração: Seja S^* a solução ótima para (IV.24), um conjunto independente no matrõide uniforme, ou seja, $|S^*| \leq N$. Seja S^t

a solução do guloso, $t < N$.

Como f é submodular, da definição de submodularidade teorema (D.1(3) - Apêndice D) temos:

$$f(S^*) \leq f(S^t) + \sum_{j \in (S^* - S^t)} p_j(S^t) \quad (\text{IV.32})$$

Como o matrõide é uniforme, $\forall t < N$, $S^t \cup \{j\}$ é independente, $\forall j \in (S^* - S^t)$. Do algoritmo guloso temos que p_t é o máximo dos $p_j(S^t)$, $\forall j \in (S^* - S^t)$. Logo,

$$p_j(S^t) \leq p_t, \forall j \in (S^* - S^t) \quad (\text{IV.33})$$

Como $|S^*| \leq N$ e $|S^t| \leq N$ então

$$|S^* - S^t| \leq N \quad (\text{IV.34})$$

Portanto de (IV.33) e (IV.34) temos que

$$\sum_{j \in (S^* - S^t)} p_j(S^t) \leq N \cdot p_t \quad (\text{IV.35})$$

De (IV.32) e (IV.35) temos:

$$f(S^*) \leq f(S^t) + N \cdot p_t \quad (\text{IV.36})$$

Como o algoritmo termina após $t < N$ passos a condição de para-

da satesfita \bar{e} dada pelo PASSO 2, para $p_t = 0$. Logo, de (IV.36) temos:

$$f(S^*) \leq f(S^t) \quad (\text{IV.37})$$

Como S^t \bar{e} a solu \tilde{c} o do guloso heur \tilde{c} stico, uma solu \tilde{c} o aproxima da para o problema de maximiza \tilde{c} o (IV.24) temos que

$$f(S^*) \geq f(S^t) \quad (\text{IV.38})$$

De (IV.37) e (IV.38) ent \tilde{c} o $f(S^*) = f(S^t)$, ou seja $Z^* = Z^0$. ■

Seja o problema (IV.24). Consideremos particularmente o problema de localiza \tilde{c} o. Suponhamos $d_j \neq 0$. Portanto, n \tilde{c} o podemos garantir que:

$$f(S) = \sum_{i \in I} \max_{j \in S} c_{ij} - \sum_{j \in S} d_j$$

$$f(\emptyset) = 0 \quad (\text{IV.39})$$

\bar{e} uma fun \tilde{c} o n \tilde{c} o decrescente. Por \bar{e} m, esta fun \tilde{c} o f ainda \bar{e} submodular. Logo, voltamos a um problema mais geral de (IV.24), ou seja:

$$\max_{S \subseteq E} \{f(S) \mid |S| \leq n, f(S) \text{ submodular}\} \quad (\text{IV.40})$$

Como a função (IV.39), para o problema de localização é submodular este problema estará solucionado se solucionarmos o problema (IV.40). Como f não é necessariamente não-decrescente, $p_j(S) = f(S \cup \{j\}) - f(S)$, não é necessariamente não-negativo. Mas como f é submodular, o algoritmo guloso 10 permanece o mesmo a menos do PASSO 2, onde ao invés do teste $p_t = 0$, testamos se $p_t \leq 0$.

Com isto, o teorema (4.4.1) não mais é válido, pois não podemos garantir $p_t = 0$ em (IV.36).

Para aplicar o algoritmo 10 ao problema de localização, com a função f submodular dada por (IV.39), basta fazer:

$$p_j(S^t) = \max_{j \in E^t} \left\{ \left[\sum_{i \in I} \max_{k \in (S^t \cup \{j\})} c_{ik} - \sum_{k \in (S^t \cup \{j\})} d_k \right] - \left[\sum_{i \in I} \max_{k \in S^t} c_{ik} - \sum_{k \in S^t} d_k \right] \right\}$$

EXEMPLO 4.4.1

Seja o problema de localizar no máximo dois fornecedores, $N = 2$, em um conjunto $E = \{1, 2, 3, 4\}$ de possíveis fornecedores. Seja $I = \{1, 2, 3, 4\}$ o conjunto de clientes e a função de pesos $c = (c_{ij})$, $i \in I$, $j \in E$ dada pela matriz C . Seja $d_j = 0$, $\forall j \in E$, $f(\emptyset) = 0$.

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 11 & 6 & 9 \\ 7 & 0 & 8 & 2 \\ 7 & 3 & 0 & 3 \\ 10 & 9 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

P0. $S^0 = \emptyset$, $E^0 = E$, $t = 0$

Iteração 1:

P1. $E^t = \{1, 2, 3, 4\}$

$$j = 1, p_1 = 0 + 7 + 7 + 10 - f(\emptyset) = 24$$

$$j = 2, p_2 = 11 + 0 + 3 + 9 - f(\emptyset) = 23$$

$$j = 3, p_3 = 6 + 8 + 0 + 4 - f(\emptyset) = 18$$

$$j = 4, p_4 = 9 + 2 + 3 + 0 - f(\emptyset) = 14$$

$$p_t = p_0 = 24, j = 1$$

P2. $p_t = p_0 > 0$

$$S^{t+1} = S^1 = S^0 \cup \{1\} = \{1\}, E^1 = E^0 - \{1\} = \{2, 3, 4\}$$

$$t = t + 1 = 1$$

P3. $t = 1 < N$.

Iteração 2.

P1. $E^1 = \{2, 3, 4\}$

$$j = 2, p_2 = 11 + 7 + 7 + 10 - 24 = 11$$

$$j = 3, p_3 = 6 + 8 + 7 + 10 - 24 = 7$$

$$j = 4, p_4 = 9 + 7 + 7 + 10 - 24 = 9$$

$$p_t = p_1 = 11, j = 2$$

$$P2. p_t = p_1 > 0$$

$$S^2 = S^1 \cup \{2\} = \{1, 2\}, E^2 = E^1 - \{2\} = \{3, 4\}$$

$$t = t + 1 = 2$$

P3. $t = 2 = N$. PARE. S^2 é a solução do guloso.

$S^t = S^2$ é a solução do guloso e

$$Z^0 = f(S^2) = f(\emptyset) + p_0 + p_1 = 0 + 24 + 11 = 35$$

Aplicando o teorema (4.3.2) para $N = N'$ temos:

$$\frac{Z^* - Z^0}{Z^*} \leq \left(\frac{N-1}{N}\right)^N = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$Z^* - Z^0 \leq \frac{Z^*}{4} \rightarrow \frac{3}{4} Z^* \leq Z^0 \leq Z^*$$

Com pequenas variações podemos particularizar o algoritmo 9 para cada um dos problemas apresentados. Sua grande vantagem está em ser um algoritmo polinomial para problemas NP-completos, como é o caso do problema de localização. Porém, a operacionalização do algoritmo 9 pode se tornar bastante difícil como nos problemas de interseção de matrôides. Neste caso a independência em cada matrôide pode ser um processo a parte.

5. CONCLUSÃO

No capítulo III foi apresentado os algoritmos gulosos exatos. Devido a simplicidade destes algoritmos os problemas solucionados por eles são também bastante simples. A aplicação de algoritmos gulosos heurísticos a problemas práticos tornou-se uma nova alternativa, talvez mais viável que a anterior. Neste capítulo, apresentamos alguns destes problemas e os respectivos algoritmos. Porém, gostaríamos de ressaltar que todos estes trabalhos são bastante recentes e muito está para ser desenvolvido.

APÊNDICE ARETICULADOS1 - ORDEM PARCIAL

Sabemos da matemática que uma RELAÇÃO BINÁRIA α de um conjunto A para um conjunto B, ou, entre dois conjuntos A e B, é o subconjunto R_α do produto cartesiano $A \times B$. ($R_\alpha \subseteq A \times B$). Se $a_i \alpha b_j$ para $a_i \in A$ e $b_j \in B$ então $(a_i, b_j) \in R_\alpha$.

EXEMPLO 1.1

Seja um conjunto E não vazio. Seja $A \subseteq E$ e $B \subseteq E$ tal que $A \subset B$ (ou $B \supset A$) quando todo elemento de A está em B. Temos assim, uma relação de inclusão entre subconjuntos de E. Esta é também uma relação binária. Portanto $A \subset B$ então $(A, B) \in R_\alpha$ onde $R_\alpha \subseteq E \times E$.

Essa relação possui, entre outras, as seguintes propriedades:

- (i) $A \subset A, \forall A$
- (ii) Se $A \subset B$ e $B \subset A$ então $A = B$
- (iii) Se $A \subset B$ e $B \subset C$ então $A \subset C$.

Outros exemplos de relação binária é a relação de igualdade (=) e menor que (<) no conjunto dos números reais, a

relação de paralelismo e perpendicularidade no conjunto de retas de um plano, etc.

Seja E um conjunto não vazio. Denomina-se ORDEM PARCIAL EM E , e representa-se geralmente pelo sinal (\leq) , a uma relação binária que possua as propriedades:

(1) $a \leq a, \forall a \in E$ (Reflexiva)

(2) Se $a \leq b$ e $b \leq a$ então $a = b$ (Antisimétrica)

(3) Se $a \leq b$ e $b \leq c$ então $a \leq c$ (transitiva)

EXEMPLO 1.2

A relação de inclusão definida no exemplo (1.1) é uma ordem parcial em E , pois satisfaz as propriedades (1), (2) e (3) dadas por (i), (ii) e (iii).

EXEMPLO 1.3

Seja a relação de divisibilidade sobre um conjunto E de números inteiros positivos. Utilizando o símbolo " $|$ ", para inteiros positivos a e b , $a | b$ significa "a divide b" ou equivalente "b é múltiplo de a", ou $b = j.a$ para algum inteiro positivo j . As propriedades (1), (2) e (3) são facilmente verificadas:

(1) $a = 1.a$

$$(2) a = j_1 \cdot b \text{ e } b = j_2 \cdot a \rightarrow a = j_1 j_2 \cdot a \rightarrow j_1 j_2 = 1 \rightarrow j_1 = j_2 = 1$$

então $a = b$

$$(3) b = j_1 \cdot a \text{ e } c = j_2 \cdot b \rightarrow c = j_2 \cdot j_1 \cdot a. \text{ Mas } j_3 = j_2 \cdot j_1 \text{ é um inteiro positivo, então } c = j_3 \cdot a.$$

A ordem parcial em E pode ser representada graficamente, o que facilita a visualização.

EXEMPLO 1.4

Seja $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$. A ordem parcial em E definida pela relação de divisibilidade sobre E é representada graficamente pela figura (A-1).

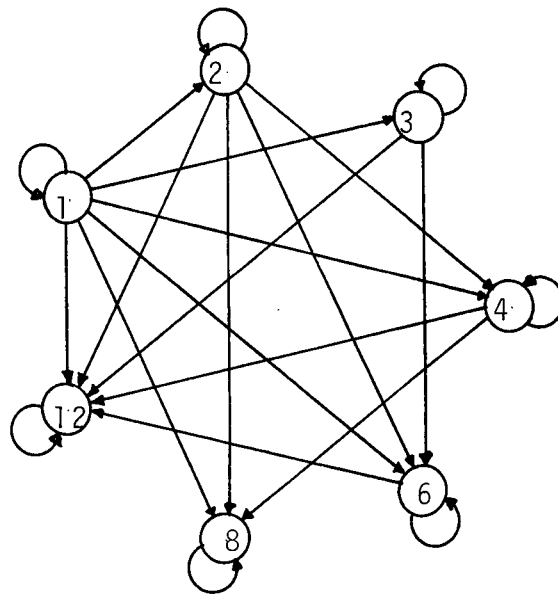


Fig. A-1. Exemplo 1.4

Esse grafo devido a propriedade antisimétrica não possui circuitos de comprimento dois.

Com as propriedades antisimétrica e transitiva pode ser demonstrado que: [18]

TEOREMA 1.1

O grafo direcionado de uma ordem parcial não contém circuitos de comprimento maior que 1.

Ressaltamos que, apesar das relações definidas sobre os elementos de um conjunto, nem todo par de elementos está relacionado. No exemplo (1.4), os elementos 3 e 8 não estão relacionados. Um múltiplo comum a ambos é 24 que não pertence a E . Aos elementos relacionados denominamos COMPARÁVEIS. Caso contrário são INCOMPARÁVEIS.

2 - CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO

O sistema (E, \leq) , constituído pelo conjunto não vazio E e por uma ordem parcial definida em E (\leq), diz-se um SISTEMA ou CONJUNTO PARCIALMENTE ORDENADO (CPO).

Um caso de CPO é a classe dos SIMPLES, que é CPO tal que qualquer par de elementos é comparável.

Os conjuntos parcialmente ordenados (E, \leq) também podem ser representados por um grafo onde os elementos de E são os vértices. Um arco une um par de elementos comparáveis. Porém, não é necessário um grafo direcionado, basta para isso, posicio

nar os v̄rtices de forma que o sentido do arco fica evidente. Assim, a direçãõ do arco ẽ de um v̄rtice interior a um superior na representaçãõ grãfica.

EXEMPLO 2.1

Para o exemplo (1.4), o sistema (E, \leq) dado pela relaçãõ de divisibilidade ẽ um CP0. Logo o grafo direcionado da figura (A-1) pode ser representado pelo grafo nãõ direcionado da figura (A-2).

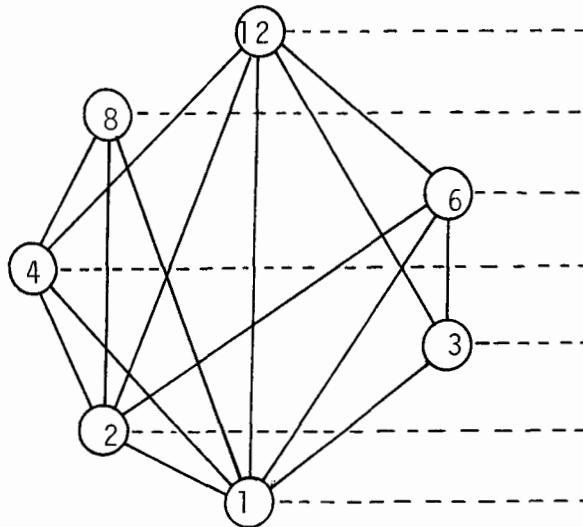


Fig. A-2. Exemplo 2.1

EXEMPLO 2.2

Seja o conjunto $E = \{e_1, \dots, e_5\}$ e o CP0 (E, \leq) representado na figura (A-3(a)) por um grafo direcionado. O correspondente grafo nãõ direcionado de (E, \leq) ẽ dado pela figura (A-3(b)).

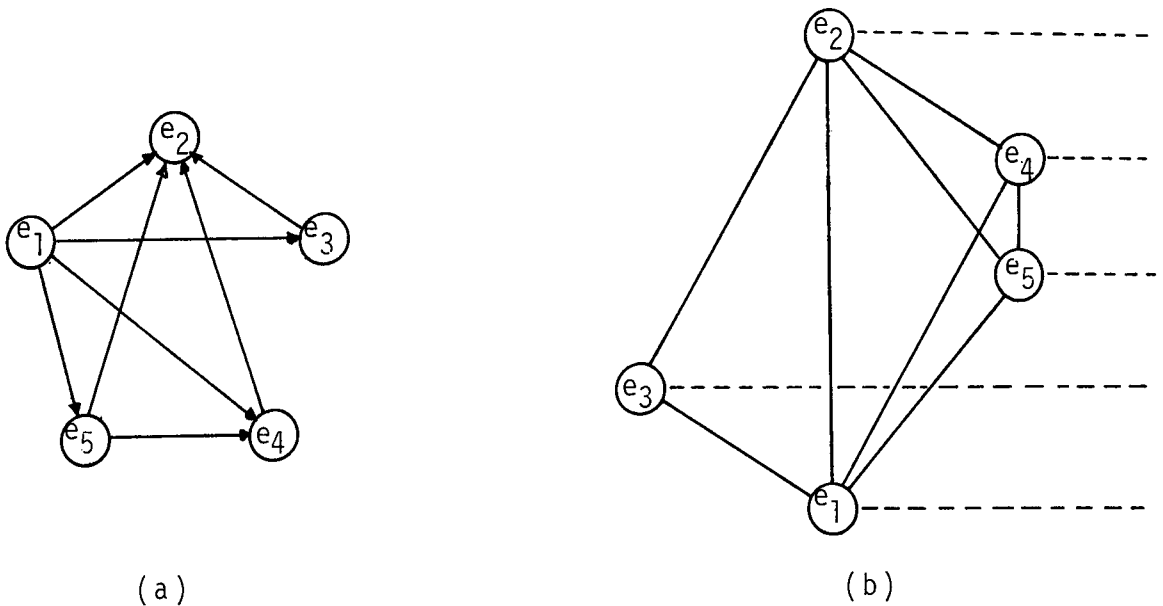


Fig. A-3. Exemplo 2.2

Em um sistema parcialmente ordenado (E, \leq) , $a(b)$ é o IMEDIATO PREDECESSOR (IMEDIATO SUCESSOR) de $b(a)$ se $a \leq b$ e não existe nenhum outro elemento c em E para o qual $a \leq c \leq b$. Essa relação é denotada por $(<)$.

Utilizando a idéia de imediato predecessor os CPO's da figura (A-2) e (A-3) podem ser simplificados uma vez que a representação gráfica de $(E, <)$ é mais econômica em termos de arcos do que o grafo de (E, \leq) e mantém a ordem parcial em evidência. Esta forma padrão, resumida, de representação gráfica é denominada DIAGRAMA DE HASSE. Para as figuras (A-2) e (A-3) temos o diagrama de Hasse nas figuras (A-4(a)) e (A-4(b)).

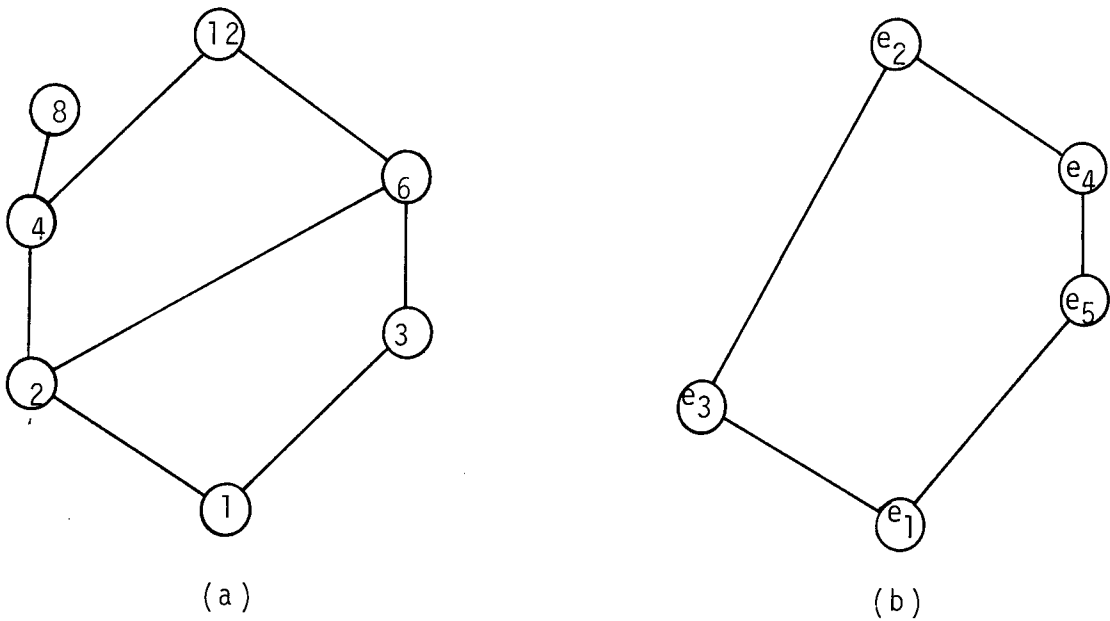


Fig. A-4. Diagrama de Hasse

Um caminho neste diagrama é normalmente referenciado como uma CADEIA, embora possa ser chamado um caminho desde que (E, \leq) é um grafo direcionado.

Um elemento $m \in (E, \leq)$ é MAXIMAL quando não existe um outro elemento $a \in (E, \leq)$ tal que $m \leq a$ (um elemento MINIMAL é definido similarmente usando a relação \geq). No diagrama de Hasse de (E, \leq) temos que o maximal (minimal) não está conectado a qualquer elemento acima (abaixo). Na figura (A-4(a)) os elementos 8 e 12 são maximais e o elemento 1 é minimal. Na figura (A-4(b)) e_2 é maximal e e_1 é minimal.

Um elemento $I \in (E, \leq)$ é o MAIOR quando $a \leq I$ para todo $a \in (E, \leq)$. (O MENOR, 0, é definido similarmente). A diferença entre um elemento maximal e o maior é que o maior é maxi-

mal mas é comparável a todos os outros elementos.

O maior e menor quando existem são únicos. Pois, se I_1 e I_2 são maiores então $I_1 \leq I_2$ e $I_2 \leq I_1$, então $I_2 = I_1$ pela propriedade antisimétrica.

Na figura (A-4(a)) existe um menor, o elemento l , mas não existe o maior. Na figura (A-4(b)) existe o maior, e_2 , e o menor, e_1 .

Esses elementos são também conhecidos por LIMITES UNIVERSAIS I e 0.

3 - RETICULADOS

Seja a e b em um CPO (E, \leq) . O SUPREMO ou JOIN de a e b é um elemento c de E tal que $a \leq c$, $b \leq c$ e não existe nenhum outro elemento x em E para o qual $a \leq x \leq c$ e $b \leq x \leq c$. Se um par de elementos a e b em E tem um único supremo, representamos por $(a \vee b) = \vee\{a, b\}$.

Seja a e b em um CPO (E, \leq) . O ÍNFIMO ou MEET de a e b é um elemento d de E tal que $d \leq a$ e $d \leq b$ e não existe nenhum outro elemento x em E para o qual $d \leq x \leq a$ e $d \leq x \leq b$. Se um par de elementos a e b em E tem um único ínfimo, representamos por $(a \wedge b) = \wedge\{a, b\}$.

EXEMPLO 3.1

No exemplo (1.4), $E = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ sob a relação de divisibilidade, temos que os elementos 3 e 8 não possuem um supremo, pois o menor inteiro divisível por 3 e 8 é 24, que não pertence a (E, \leq) , figura (A-4(a)). Temos ainda que $(2 \vee 3) = 6$, $(2 \wedge 3) = 1$, $(4 \vee 6) = 12$, $(4 \wedge 6) = 2$, $(3 \vee 6) = 6$ e $(3 \wedge 6) = 3$.

EXEMPLO 3.2

Seja os diagramas de Hasse da figura (A-5).

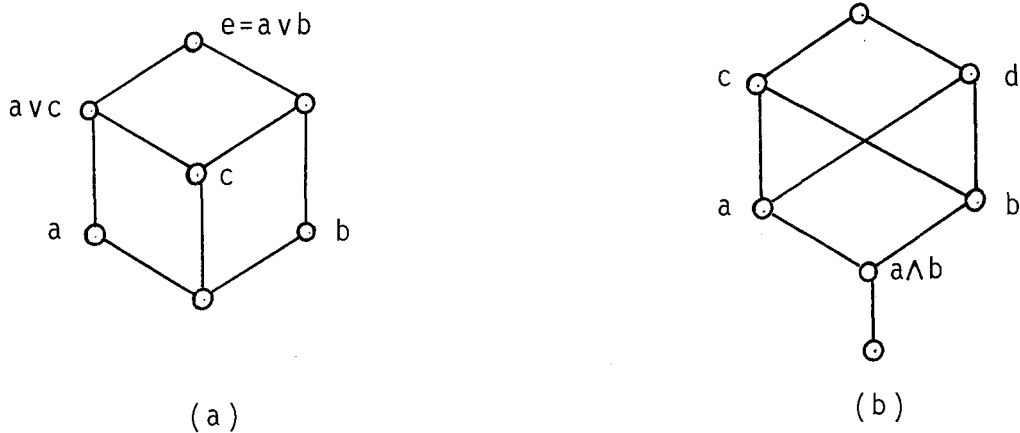


Fig. A-5. Exemplo 3.2

Dado o CPO (E, \leq) , um supremo e de um par de elementos a e b em E é obtido com o diagrama na figura (A-5(a)). Temos que $a \leq e$, ou seja, existe uma cadeia de a até e . O mesmo pode ser dito para $b \leq e$. Assim e é um elemento comum a duas cadeias ascendentes de a e b tal que nenhum outro elemento $d \leq e$ possui a mesma propriedade. Daí o significado do termo JOIN. Interpretação semelhante

é dada ao MEET.

Na figura (A-5(b)) temos que os elementos a e b possuem dois supremos c e d e um único ínfimo $(a \wedge b)$.

TEOREMA 3.1

Para qualquer par de elementos a e b em um CPO (E, \leq) , o supremo (ínfimo) de a e b existe se e somente se (E, \leq) tem o limite universal $I(0)$.

Um RETICULADO é um CPO (E, \leq) tal que qualquer par de elementos possui um único SUPREMO e ÍNFIMO. Um reticulado será representado por (E, \vee, \wedge) ou pela letra L .

TEOREMA 3.2

Em um reticulado as operações binárias de SUPREMO e ÍNFIMO satisfazem as propriedades:

$$(1) a \vee a = a$$

$$a \wedge a = a \text{ (Idempotência)}$$

$$(2) a \vee b = b \vee a$$

$$a \wedge b = b \wedge a \text{ (Comutativa)}$$

$$(3) (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c)$$

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c) \text{ (Associativa)}$$

$$(4) a \vee (a \wedge b) = a$$

$$a \wedge (a \vee b) = a \text{ (Absorção)}$$

(5) $a \vee b = b$, $a \wedge b = a$, $a \leq b$ são equivalentes. (Princípio de consistência).

EXEMPLO 3.3

O CPO da figura (A-5(a)) é um reticulado. Ao passo que, o da figura (A-5(b)) não é, pois os elementos a e b possuem mais de um supremo.

EXEMPLO 3.4

Seja CPO (E, \leq) onde $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ e a ordem parcial (\leq) dada pela relação de divisibilidade. O diagrama de Hasse é dado pela figura (A-6).

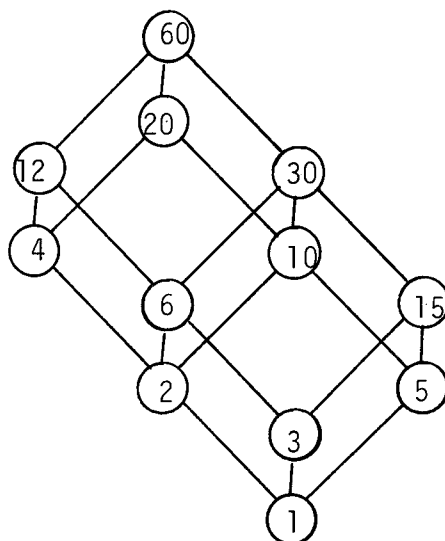


Fig. A-6. Exemplo 3.4

Tem-se os limites universais $I = 60$ e $0 = 1$. Logo, pelo teorema (3.1) cada par de elementos possui um supremo e um ínfimo que verificamos ser único. Portanto (E, \leq) é um reticulado. Podemos verificar que pela propriedade (\leq) definida acima, o supremo coincide com mínimo múltiplo comum e o ínfimo ao máximo divisor comum.

Com a definição de cadeia dado anteriormente, pode-se definir ALTURA de $e \in E$, $h(e)$, no reticulado (E, \vee, \wedge) , como o comprimento da menor cadeia entre o limite universal 0 e o elemento e .

Entre os vários tipos de reticulados temos:

SEMIMODULAR OU SUBMODULAR: Se para todo $a, b \in L$

a e b são imediatos sucessores de $(a \wedge b)$ então $(a \vee b)$ é o imediato sucessor de a e b . Ou,
 $h(a) + h(b) \geq h(a \vee b) + h(a \wedge b)$

A teoria apresentada, demonstração dos teoremas, além de outras informações, pode ser visto em [1], [18].

4 - RETICULADOS DE MATRÓIDES

Seja $M = (E, F)$ um matróide sobre E .

TEOREMA 4.1

Seja $L(M) = (E, \subseteq)$ o conjunto parcialmente ordenado de subconjuntos fechados de E , ordenados por inclusão. Então $L(M)$ é um reticulado do matrôide $M = (E, F)$.

Demonstração: Seja $L(M) = (E, \subseteq)$ o CPO de subconjuntos fechados de E , ordenados por inclusão.

Seja $R \in L(M)$ e $S \in L(M)$. Mostraremos que existe um único supremo e um único ínfimo para todo R e S em $L(M)$ e portanto $L(M)$ é um reticulado pela definição.

Temos que $R \cap S \subseteq R$ e $R \cap S \subseteq S$ (A.1)

Logo não existe nenhum Q tal que

$$R \cap S \subset Q \subseteq R \text{ e } R \cap S \subset Q \subseteq S \quad (\text{A.2})$$

Do teorema (II-3.3.2 (F1)(F2)) e (A-1) então

$$R \cap S \subseteq SP(R \cap S) \quad (\text{A.3})$$

$$SP(R \cap S) \subseteq SP(R) \quad (\text{A.4})$$

$$SP(R \cap S) \subseteq SP(S) \quad (\text{A.5})$$

De (A.3), (A.4) e (A.5) temos

$$R \cap S \subseteq SP(R \cap S) \subseteq SP(R) \cap SP(S) \quad (\text{A.6})$$

Mas como $R \in L(M)$ e $S \in L(M)$, são fechados, pela definição de conjunto fechado

$$SP(R) = R \text{ e } SP(S) = S \quad (A.7)$$

De (A.6) e (A.7) então $R \cap S \subseteq SP(R \cap S) \subseteq SP(R) \cap SP(S) = R \cap S$.

Logo

$$R \cap S = SP(R \cap S)$$

Portanto $(R \cap S)$ é fechado e conseqüentemente

$$(R \cap S) \in L(M) \quad (A.8)$$

De (A.8), (A.2) e (A.1) então $R \cap S = R \wedge S$ é um ínfimo de R e S e este ínfimo é único.

De forma semelhante, mostraremos que $R \vee S = SP(R \cup S)$ e que este supremo é único.

Evidentemente $SP(R \cup S) \in L(M)$ pois um conjunto fechado.

$$\text{Por outro lado, } R \subseteq R \cup S \text{ e } S \subseteq R \cup S \quad (A.9)$$

Do teorema (II-3.3.2 (F2)),

$$(R \cup S) \subseteq SP(R \cup S) \quad (A.10)$$

Logo, de (A.9) e (A.10) então

$$R \subseteq SP(R \cup S) \text{ e } S \subseteq SP(R \cup S)$$

Basta mostrar que não existe $Q \in L(M)$ tal que

$$R \subseteq Q \subset SP(R \cup S)$$

$$S \subseteq Q \subset SP(R \cup S)$$

e então completamos a demonstração.

$$\text{Seja } R \cup S \subseteq Q \subset SP(R \cup S) \quad (\text{A.11})$$

Do teorema (II-2.1.2(b)) temos de (A.11) que

$$r(R \cup S) \leq r(Q) \leq r(SP(R \cup S)) \quad (\text{A.12})$$

Seja $r(R \cup S) = r$. Logo, da definição de fecho

$$r = r(R \cup S) = r(SP(R \cup S)) \quad (\text{A.13})$$

$$\text{De (A.12) e (A.13) então } r(Q) = r \quad (\text{A.14})$$

De (A.11), (A.13) e (A.14) Q não é fecho de $(R \cup S)$. Logo $SP(R \cup S) = R \vee S$ é um supremo e é único.

Como o resultado é válido para todo $R \in L(M)$ e $S \in L(M)$ então $L(M)$ é um reticulado.

EXEMPLO 4.1

Seja o matrõide $M = (E, F)$ sobre $E = \{e_1, e_2\}$. O reticulado $L(M)$ é dado pela figura (A.8) para (a) e_1 e e_2 dependentes e (b) e_1 e e_2 independentes.

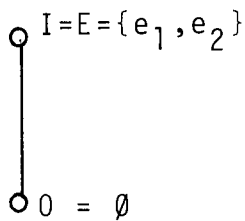
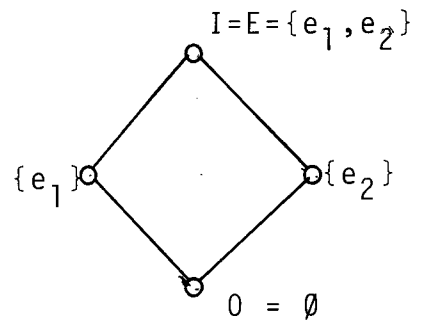
(a) e_1 e e_2 dependentes(b) e_1 e e_2 independentes

Fig. A-8. Exemplo 4.1

EXEMPLO 4.2

Seja o matrõide $M = (E, F)$ tal que todo subconjunto de E é independente. O reticulado $L(M)$ para $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ é dado pela figura (A-9).

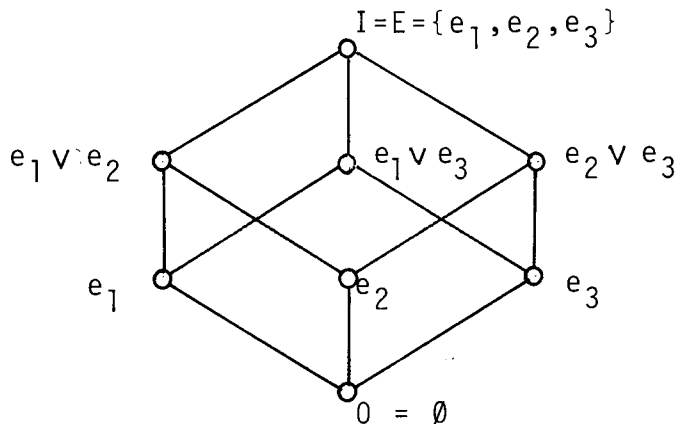


Fig. A-9. Exemplo 4.2

EXEMPLO 4.3

Seja o grafo $G = (N, A)$ dado na figura (A-10(a)).

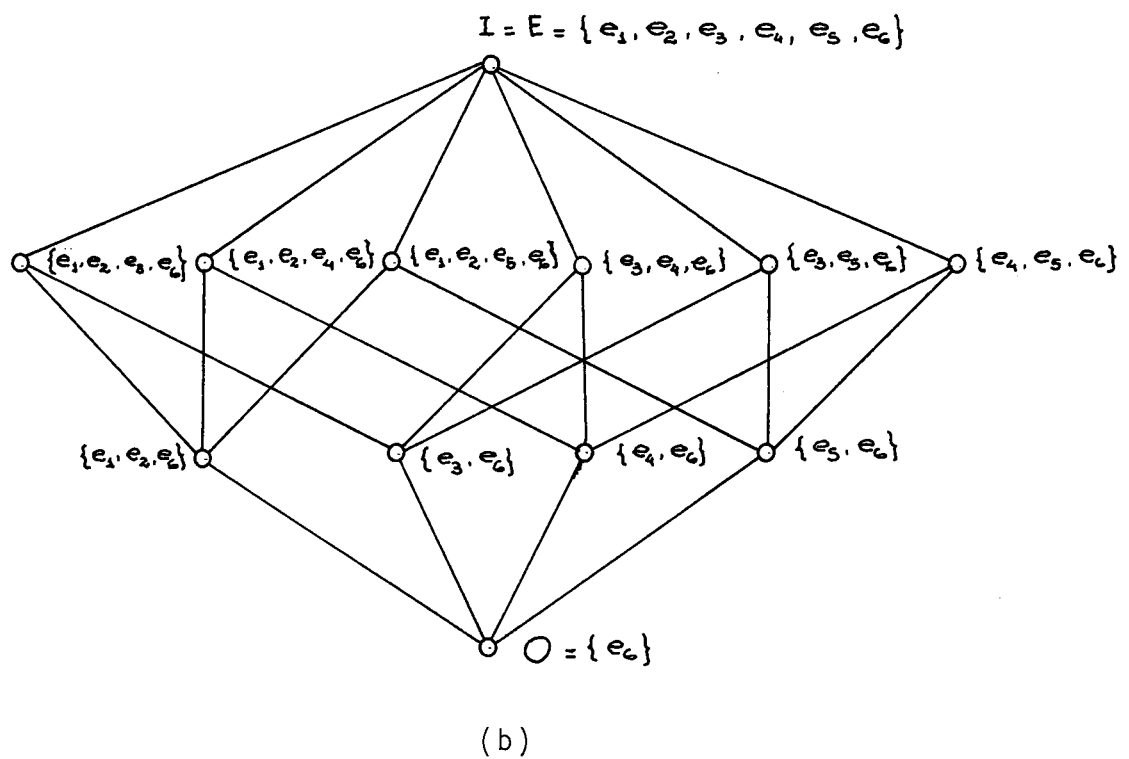
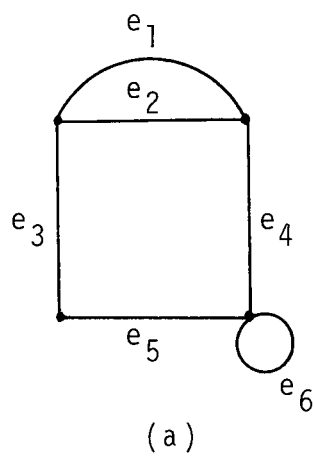


Fig. A-10. Exemplo 4.3

Seja $M = (E, F)$ o matrõide gráfico definido sobre $E = A$ no grafo G . Os elementos de $L(M)$ \bar{e} o reticulado da figura (A-10(b)).

Entre outras, o reticulado de um matrõide, $L(M)$, satisfaz as propriedades:

- (1) $L(M)$ \bar{e} finito com limites universais $I = E$ e $0 = SP(\emptyset)$
- (2) Os imediatos sucessores de 0 (\bar{A} TOMOS) sã elementos de posto 1 em M .
- (3) Um elemento de $L(M)$ \bar{e} o imediato predecessor de E se e somente se tem posto igual a $r(E) - 1$ em M .
- (4) Um subconjunto fechado $S \subseteq E$ \bar{e} o imediato sucessor de um subconjunto fechado $R \subseteq E$ em $L(M)$ se e somente se $R \subseteq S$ e $r(S) = r(R) + 1$.

Das propriedades acima podemos retirar que o comprimento da menor cadeia do limite universal 0 a um elemento $S \in L(M)$ \bar{e} $r(S)$. Logo a altura de S , $h(S) = r(S)$. Mas, do teorema (II-2.1.2(c)) para quaisquer $R \subseteq E$ e $S \subseteq E$ temos:

$$r(R) + r(S) \geq r(R \cup S) + r(R \cap S) \quad (\text{A.9})$$

Seja R e S subconjuntos fechados de E . Do teorema (4.1) temos que $R \vee S = SP(R \cup S)$ e $R \wedge S = R \cap S$ (A.10)

Da definiçã de fecho $r(SP(R \cup S)) = r(R \cup S)$ (A.11)

De (A.10), (A.11) e (A.9)

$$\begin{aligned} r(R \vee S) + r(R \wedge S) &= r(SP(R \cup S)) + r(R \cap S) \\ &= r(R \cup S) + r(R \cap S) \end{aligned}$$

$$r(R \vee S) + r(R \wedge S) \leq r(R) + r(S)$$

Portanto os elementos de $L(M)$ satisfazem a propriedade de submodularidade com relação aos operadores (\vee, \wedge) . Como $h(S) = r(S)$ temos que

$$h(S) + h(R) \geq h(S \vee R) + h(S \wedge R).$$

e portanto $L(M)$ é submodular.

Maiores informações verificar [24]

APÊNDICE BUM ALGORITMO GULOSO PARA MATRÓIDES GRÁFICOS

Seja o grafo $G(N, A)$. Seja $M = (E, F)$ um matróide gráfico definido sobre $E = \{e_1, \dots, e_n\}$, onde E é o conjunto de arcos de G e F o conjunto de florestas de G . Seja a função de pesos $c: E \rightarrow \mathbb{R}$. A cada arco (i, j) está associado o custo c_{ij} . Determinar a árvore geradora mínima $S^* \subseteq E$, $S^* \in F$.

Aplicando o algoritmo 2, no PASSO 2, o teste de independência consiste em testar se o subconjunto $(S^k \cup \{e_{k+1}\})$ é ou não uma floresta, ou seja, se contém ou não um ciclo. O algoritmo guloso que iremos apresentar mantém as características do algoritmo 2, selecionar um elemento e_{k+1} de peso mínimo e testar se o mesmo é dependente em S^k . Porém, com uma sequência de operações própria.

Seja $N = P \cup \bar{P}$, $P \cap \bar{P} = \emptyset$, onde P será o conjunto dos nós pesquisados e \bar{P} o conjunto dos nós não pesquisados. Definimos um ARCO MINIMAL DE $j \in \bar{P}$ ao arco de peso mínimo ligando j a algum $\bar{n} \in P$. O algoritmo inicia o processo por um \bar{n} arbitrário. Seja i este \bar{n} . Então, $P = \{i\}$ e $\bar{P} = N - \{i\}$. Determina os arcos minimais para todo $j \in \bar{P}$. Como P contém um único elemento, estes arcos serão todos os arcos contendo i como uma das extremidades. Aos nós $j \in \bar{P}$ não ligados diretamente a i podemos associar um arco artificial com peso infinito. A seguir, determina como novo elemento de P o $\bar{n} \in \bar{P}$ correspondente ao menor arco

minimal. Seja k este $n\bar{o}$, $k \in \bar{P}$. Faz $P = P \cup \{k\}$ e $\bar{P} = \bar{P} - \{k\}$.

Atualiza os arcos minimais de $j \in \bar{P}$. A seguir, escolhe um novo elemento para P e sucessivamente até $\bar{P} = \emptyset$. Como no início do processo $|\bar{P}| = n-1$, $(n-1)$ arcos serão selecionados formando uma árvore geradora.

O algoritmo se comporta como se a cada $n\bar{o}$ de $j \in \bar{P}$ associamos um peso c_j correspondente ao peso do arco minimal de $j \in \bar{P}$. A cada passo, um novo elemento $k \in \bar{P}$ de peso mínimo é anexado a P e então os pesos c_j , $\forall j \in (\bar{P} - \{k\})$ são atualizados. Segue até $\bar{P} = \emptyset$.

ALGORITMO B - GULOSO PARA MATRÓIDES GRÁFICOS

Seja o $n\bar{o}$ inicial $i = 1$. Seja $L(j)$ o vetor contendo para cada $j \in \bar{P}$ a extremidade em P do arco minimal de j , ou seja, $L(j) = i$ onde $i \in P$ e (i,j) é o arco minimal.

PASSO 0. $n = |N|$

Para $j = 2, 3, \dots, n$

Faça $L(j) = 1$ e $c_j = c_{1j}$

PASSO 1. $P = \{1\}$, $\bar{P} = \{2, 3, \dots, n\}$, $S^* = \emptyset$

PASSO 2. Selecione $k \in \bar{P}$ tal que $c_k = \min_{j \in \bar{P}} \{c_j\}$

PASSO 3. $P = P \cup \{k\}$

$$\bar{P} = \bar{P} - \{k\}$$

$$S^* = S^* \cup \{(L(k), k)\}$$

PASSO 4. Se $\bar{P} = \emptyset$ então PARE. S^* contém uma árvore geradora mínima.

Se não VÁ AO PASSO 5.

PASSO 5. Para todo $j \in \bar{P}$

Se $c_{kj} < c_j$ então faça $c_j = c_{kj}$ e $L(j) = k$

PASSO 6. VOLTE AO PASSO 2.

O conjunto de arcos $S^* \subseteq E$, $S^* \in F$, é uma árvore geradora mínima.

EXEMPLO 1. Seja o grafo da figura (III.1).

$$P0. n = 7, L(2) = L(3) = \dots = L(7) = 1$$

$$c = (c_2, c_3, \dots, c_n) = (2, 4, 8, \infty, \infty, \infty)$$

$$P1. P = \{1\}, \bar{P} = \{2, 3, \dots, 7\}, S^* = \emptyset$$

$$P2. c_k = \min \{2, 4, 8, \infty\} = 2 \rightarrow k = 2$$

$$P3. P = \{1, 2\}, \bar{P} = \{3, 4, \dots, 7\}, S^* = \{(1, 2)\}$$

$$P4. \bar{P} \neq \emptyset$$

$$P5. c_{23} = 10 > 4 = c_3$$

$$c_{24} = \infty > 8 = c_4$$

$$c_{25} = 12 < \infty = c_5 \rightarrow c_5 = 12, L(5) = 2$$

$$c_{26} = c_{27} = c_6 = c_7 = \infty$$

$$P2. c_k = \min \{4, 8, 12, \infty\} = 4 \rightarrow k = 3$$

$$P3. P = \{1, 2, 3\}$$

$$\bar{P} = \{4, 5, 6, 7\}$$

$$S^* = \{(1,2), (1,3)\}$$

$$P4. \bar{P} \neq \emptyset$$

$$P5. c_{34} = 5 < c_4 = 8 \rightarrow c_4 = 5, L(4) = 3$$

$$c_{35} = 7 < c_5 = 12 \rightarrow c_5 = 7, L(5) = 3$$

$$c_{36} = 7 < c_6 = \infty \rightarrow c_6 = 5, L(6) = 3$$

$$c_{37} = 6 < c_7 = \infty \rightarrow c_7 = 6, L(7) = 3$$

$$P2. c_k = \min \{5, 7, 5, 6\} = 5 \rightarrow k = 4 \text{ (ou } k = 6)$$

$$P3. P = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$\bar{P} = \{5, 6, 7\}$$

$$S^* = \{(1,2), (1,3), (3,4)\}$$

$$P4. \bar{P} \neq \emptyset$$

$$P5. c_{45} = \infty > c_5$$

$$c_{46} = 3 < c_6 = 5 \rightarrow c_6 = 3, L(6) = 4$$

$$c_{47} = \infty > c_7$$

$$P2. c_k = \min \{7, 3, 6\} = 3 \rightarrow k = 6$$

$$P3. P = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

$$\bar{P} = \{5, 7\}$$

$$S^* = \{(1,2), (1,3), (3,4), (4,6)\}$$

$$P4. \bar{P} \neq \emptyset$$

$$P5. c_{65} = \infty > c_5$$

$$c_{67} = 7 > c_7$$

$$P2. c_k = \min \{7, 6\} = 6 \rightarrow k = 7$$

$$P3. P = \{1, 2, 3, 4, 6, 7\}$$

$$\bar{P} = \{5\}$$

$$S^* = \{(1,2), (1,3), (3,4), (4,6), (3,7)\}$$

$$P4. \bar{P} \neq \emptyset$$

$$P5. c_{75} = 4 < c_5 = 7 \rightarrow c_5 = 4, L(5) = 7$$

$$P2. c_k = \min \{4\} = 4 \rightarrow k = 5$$

P3. $P = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 5\}$

$\bar{P} = \emptyset$

$S^* = \{(1,2), (1,3), (3,4), (4,6), (3,7), (7,5)\}$

P4. $\bar{P} = \emptyset$. PARE. S^* é uma árvore geradora mínima.

Em que este algoritmo se assemelha ao algoritmo 2? A cada passo um novo elemento $k \in \bar{P}$ é selecionado e anexado a P . Como $P \cap \bar{P} = \emptyset$, são disjuntos, garantimos a não formação de ciclo durante o processo iterativo. Suponhamos que existe uma cadeia ligando $i \in P$ a $j \in P$. Para que ocorra um ciclo em P é necessário uma nova cadeia ligando j a i , isto é, i deve ser selecionado novamente. Mas como $i \in P$ e portanto $i \notin \bar{P}$, isto não ocorrerá, impedindo a formação do ciclo. Assim a formação de ciclos verificada pelo algoritmo 2, no PASSO 2, está embutida no processo de construção de árvore geradora do algoritmo B.

Quanto ao processo de seleção, o algoritmo 2 seleciona os elementos de E em ordem crescente de pesos, (minimização). O algoritmo B, seleciona entre os arcos minimais o de menor peso, atualiza os arcos minimais dos nós restantes em \bar{P} , seleciona o de menor peso e segue sucessivamente. Ou seja, seleciona um arco minimal de menor peso mas não necessariamente o arco de peso mínimo entre os arcos ainda não selecionados. Porém, é fácil verificar que todos os arcos de peso mínimo selecionados pelo algoritmo 2 em ordem crescente, serão selecionados pelo algoritmo B em uma ordem não necessariamente crescente, encontrando a mesma solução. Assim é um algoritmo guloso exato fornecendo

uma árvore geradora mínima de G , isto é, uma base de peso mínimo do matróide gráfico.

APÊNDICE CINTERSEÇÃO DE MATRÓIDES

Este é um outro ramo da teoria de matrôides. Seja $M_i = (E, F_i)$, $i = 1, \dots, n$ um conjunto de n matrôides definidos sobre E . Cada matrôide M_i satisfaz a uma "estrutura de independência" que gera F_i . O problema consiste em determinar um subconjunto $S \subseteq E$ tal que $S \in F_1, S \in F_2, \dots, S \in F_n$, ou seja, S é um conjunto independente em todos os matrôides M_i .

EXEMPLO 1

Seja o grafo conexo direcionado $G(N, A), |N| = n$. Seja $E = A$ o conjunto de arcos de G . Podemos definir um matrôide $M_1 = (E, F_1)$ sobre E onde F_1 é o conjunto de florestas em G . Trata-se de um problema semelhante ao problema 3, seção (III.1), só que agora consideramos arcos direcionados. Determinar uma base $S \in F_1$ de M_1 é determinar uma árvore geradora de G .

Seja o grafo conexo direcionado $G(N, A)$ na figura (C-1), onde $E = A = \{1, 2, \dots, 12\}$.

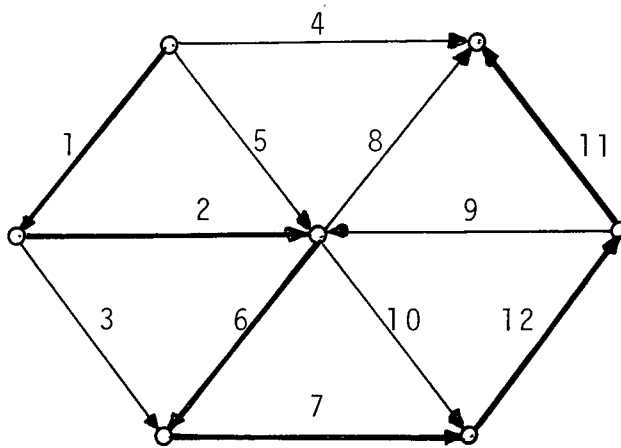


Fig. C-1. Exemplo 1.

Para o matrõide $M_1 = (E, F_1)$ definido acima temos que

$$F_1 = \{\{1\}, \dots, \{12\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 12\}, \{2, 3\}, \dots, \{11, 12\}, \\ \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 6\}, \dots, \{1, 3, 4\}, \dots, \\ \{1, 4, 5\}, \dots, \{10, 11, 12\}, \dots, \{1, 2, 3, 4, 7, 9\}, \dots, \\ \{1, 2, 6, 7, 11, 12\}, \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}, \dots, \\ \{3, 5, 7, 10, 11, 12\}\}.$$

Entre os conjuntos dependentes temos: $\{1, 2, 5\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{4, 5, 8\}$, $\{1, 2, 4, 8\}$, $\{1, 3, 5, 6\}$, $\{1, 2, 4, 9, 11\}$, etc.

Definiremos um outro matrõide sobre E . Seja $M_2 = (E, F_2)$ tal que para todo $S \in F_2$, $|S| \leq n-1$ e cada nó $j \in N$ é destino de no máximo um elemento de S , isto é, em cada nó chega no máximo

um arco. Determinar uma base $S \in F_2$ de M_2 é encontrar um conjunto $S \in F_2$ tal que $|S| = n-1$. Como temos $(n-1)$ arcos e como desejamos garantir que a cada nó chega no máximo um arco, esta última condição será atendida se garantirmos que a $(n-1)$ nós chega pelo menos um arco. No caso de termos $(n-1)$ arcos, a cada um dos $(n-1)$ nós chegará exatamente um arco.

Considerando o grafo da figura (C-1) temos para o matrõide $M = (E, F_2)$ que:

$$F_2 = \{\{1\}, \dots, \{12\}, \{1, 2\}, \dots, \{1, 12\}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \\ \{2, 6\}, \{2, 7\}, \{2, 8\}, \{2, 10\}, \dots, \{11, 12\}, \{1, 2, 3\}, \\ \{1, 2, 4\}, \{1, 2, 6\}, \dots, \{1, 2, 3, 4, 7, 12\}, \dots, \\ \{1, 2, 6, 7, 11, 12\}, \dots, \{1, 3, 4, 5, 7, 12\}, \dots, \\ \{1, 6, 9, 10, 11, 12\}\}.$$

Entre os conjuntos dependentes temos: $\{2, 5\}$, $\{2, 9\}$, $\{3, 6\}$, $\{4, 8\}$, $\{4, 11\}$, $\{5, 9\}$, $\{2, 6, 7, 9, 12\}$, etc.

É fácil verificar que uma base de M_1 e M_2 é um subconjunto $S \subseteq E$, $S \in F_1$ e $S \in F_2$ tal que S é uma "arborescência geradora" de G . Pois, de M_1 temos que S é uma árvore geradora. Se é uma árvore geradora então $|S| = n-1$, que satisfaz a primeira condição em M_2 . Por M_2 , $(n-1)$ elementos de N são destinos de pelo menos um elemento de S . Logo, é uma árvore geradora com raiz, ou seja, uma "arborescência geradora". Entre as bases $S \in F_1$ e $S \in F_2$ no grafo da figura (C-1) temos:

$\{1, 2, 3, 4, 7, 12\}$, $\{1, 2, 6, 7, 11, 12\}$, $\{1, 3, 4, 5, 7, 12\}$
etc.

Um terceiro matrõide pode ser definido sobre E , $M_3 = (E, F_3)$, tal que $S \subseteq E$, $S \in F_3$ se $|S| \leq n-1$ e cada não $j \in N$  origem de no máximo um elemento de S . Determinar uma base $S \in F_3$ de M_3  encontrar um conjunto $S \in F_3$ tal que $|S| = n-1$. Como temos $(n-1)$ arcos e desejamos garantir que de cada não saia no máximo um arco, esta condio será atendida se garantirmos que de $(n-1)$ nós saia pelo menos um arco. No caso de termos $(n-1)$ arcos, de cada um dos $(n-1)$ nós sair exatamente um arco. Considerando o grafo da figura (C-1) temos para o matrõide $M_3 = (E, F_3)$ que:

$$F_3 = \{\{1\}, \dots, \{12\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \dots, \{1, 12\}, \{2, 4\}, \dots, \\ \{2, 12\}, \dots, \{11, 12\}, \{1, 2, 6\}, \{1, 2, 7\}, \dots, \\ \{1, 3, 6\}, \dots, \{1, 2, 6, 7, 9, 12\}, \{1, 2, 6, 7, 11, 12\} \\ \{1, 2, 7, 8, 9, 12\}, \dots, \{3, 5, 7, 10, 11, 12\}\}$$

Entre os conjuntos dependentes temos: $\{1, 4\}$, $\{1, 5\}$, $\{2, 3\}$, $\{4, 5\}$, $\{6, 8\}$, $\{1, 2, 9, 11\}$, etc.

Também  fácil verificar que uma base de M_1 , M_2 e M_3  um subconjunto $S \subseteq E$, $S \in F_1$, $S \in F_2$ e $S \in F_3$ tal que S  um caminho contendo $(n-1)$ arcos no grafo. Pois, por M_1 , M_2 e M_3 temos $|S| = n-1$. Por M_1 , S  uma árvore, por M_2 $(n-1)$ nós de G são destinos de pelo menos um elemento de S e por M_3 $(n-1)$ nós de G são origens de pelo menos um elemento de S . Logo, temos

uma arborescência que \bar{e} um caminho. Uma base $S \in F_1$, $S \in F_2$ e $S \in F_3$ no grafo da figura (C-1) \bar{e} dada por:

$S = \{1, 2, 6, 7, 11, 12\}$, em traços cheios na figura.

Portanto, um exemplo para um problema que seja formulado a partir da interseção de M_1 , M_2 e M_3 \bar{e} o da determinação de uma rota aberta no problema do caixeiro viajante.

Como para cada matrõide $M = (E, F)$ podemos definir o poliedro do matrõide M , para o problema de interseção de matrõides podemos definir um problema de interseção de poliedros de matrõides que consiste em determinar $x \in \mathbb{R}^E$ e $x \in P$ onde P \bar{e} o poliedro interseção dos poliedros P_i de matrõides $M_i = (E, F_i)$.

Seja $M_1 = (E, F_1)$ e $M_2 = (E, F_2)$. O modelo resultante da interseção de M_1 e M_2 se resume em:

$$\max Z = cx$$

$$\sum_{j \in S} x_j \leq r_1(S), \forall S \subseteq E$$

$$x_j \in [0,1], j \in E, \text{ inteiro}$$

$$\max Z = cx$$

$$\sum_{j \in S} x_j \leq r_2(S), \forall S \subseteq E$$

$$x_j \in [0,1], j \in E, \text{ inteiro}$$

$$\searrow \quad \max Z = cx \quad \swarrow$$

$$\sum_{j \in S} x_j \leq r_1(S), \forall S \subseteq E$$

$$\sum_{j \in S} x_j \leq r_2(S), \forall S \subseteq E$$

$$x_j \in [0,1], j \in E, \text{ inteiro}$$

Os algoritmos utilizados na resolução do problema interseção são variados. Entre eles existe um algoritmo primal e outro primal-dual apresentado em [14]. A utilização de algoritmos gulosos heurísticos para este problema é mencionado no capítulo IV deste trabalho.

Com a interseção de matrôides problemas maiores podem ser enfocados considerando na "estrutura de independência" de cada matrôide um conjunto de restrições.

APÊNDICE DSUBMODULARIDADE

É uma propriedade introduzida nas seções anteriores.

O objetivo desta seção é apresentar três definições de submodularidade mostrando a equivalência entre elas. Ressaltamos porém, que existe outras definições equivalentes a estas três. Finalmente apresentaremos algumas funções submodulares.

Seja $E = \{1, 2, \dots, n\}$ e a função de conjunto f definida sobre os subconjuntos de E .

Seja $p_j(S) = f(S \cup \{j\}) - f(S)$, o acréscimo da adição de j ao subconjunto S .

TEOREMA 1

Seja as funções f tal que:

$$(1) \quad f(R) + f(S) \geq f(R \cup S) + f(R \cap S), \quad \forall R, S \subseteq E.$$

$$f(R) \leq f(S), \quad \forall R \subseteq S \subseteq E \quad (D.1)$$

$$(2) \quad p_j(R) \geq p_j(S) \geq 0, \quad \forall R \subseteq S \subseteq E, \quad \forall j \in E \quad (D.2)$$

$$(3) f(S) \leq f(R) + \sum_{j \in (S-R)} p_j(R), \quad \forall S, R \subseteq E \quad (D.3)$$

cada uma das definições são equivalentes e define uma função submodular.

Demonstração: Seja $A \subseteq E$, $B \subseteq E$ quaisquer e $R \subseteq S \subseteq E$

(1) \rightarrow (2) $\forall A, B \subseteq E$ em (1) temos:

$$f(A) + f(B) \geq f(A \cup B) + f(A \cap B), \quad \forall A, B \subseteq E$$

Seja $j \notin S$, $A = R \cup \{j\}$ e $B = S$ em (1)

$$f(R \cup \{j\}) + f(S) \geq f(S \cup \{j\}) + f(R).$$

$$\text{Portanto, } f(R \cup \{j\}) - f(R) \geq f(S \cup \{j\}) - f(S)$$

$$\text{Logo, } p_j(R) \geq p_j(S) \quad (D.4)$$

$$\text{De (1), temos } f(R) \leq f(S), \quad \forall R \subseteq S \subseteq E \quad (D.5)$$

$$\text{Como } R \subseteq (R \cup \{j\}) \text{ e } S \subseteq (S \cup \{j\}) \quad (D.6)$$

Então de (D.6), (D.5) e (D.4) temos que

$$p_j(R) \geq p_j(S) \geq 0 \quad (D.7)$$

De (D.4) f é submodular e de (D.7) f é submodular e não decrescente.

(2) \rightarrow (1) Seja $A-B = \{j_1, j_2, \dots, j_r\}$. Seja $i = 1, 2, \dots, r$. De (2) obtemos que

$$\begin{aligned}
i = 1 & \quad p_{j_1}(A \cap B) \geq p_{j_1}(B), \text{ pois } (A \cap B) \subseteq B \\
i = 2 & \quad p_{j_2}(A \cap BU\{j_1\}) \geq p_{j_2}(BU\{j_1\}), \text{ pois} \\
& \quad (A \cap B U \{j_1\}) \subseteq BU\{j_1\} \\
& \quad \vdots \\
i = r & \quad p_{j_r}(A \cap BU\{j_1, \dots, j_{r-1}\}) \geq p_{j_r}(BU\{j_1, \dots, j_{r-1}\}), \\
& \quad \text{pois } (A \cap BU\{j_1, \dots, j_{r-1}\}) \subseteq BU\{j_1, \dots, j_{r-1}\}
\end{aligned}$$

Substituindo p_j por sua definição, temos para $i = 1, 2, \dots, r$ que:

$$\begin{aligned}
f(A \cap BU\{j_1\}) - f(A \cap B) & \geq f(BU\{j_1\}) - f(B) \\
f(A \cap BU\{j_1, j_2\}) - f(A \cap BU\{j_1\}) & \geq f(BU\{j_1, j_2\}) - f(BU\{j_1\}) \\
& \quad \vdots \\
f(A \cap BU\{j_1, \dots, j_r\}) - f(A \cap BU\{j_1, \dots, j_{r-1}\}) & \geq \\
& \quad f(BU\{j_1, \dots, j_r\}) - f(BU\{j_1, \dots, j_{r-1}\})
\end{aligned}$$

Logo, fazendo o somatório das r parcelas, $i = 1, 2, \dots, r$, temos,

$$f(A \cap BU\{j_1, \dots, j_r\}) - f(A \cap B) \geq f(BU\{j_1, \dots, j_r\}) - f(B) \tag{D.8}$$

$$\begin{aligned}
\text{Como } A \cap BU\{j_1, \dots, j_r\} & = A \\
BU\{j_1, \dots, j_r\} & = A \cup B \tag{D.9}
\end{aligned}$$

De (D.8) e (D.9) temos que:

$$f(A) - f(A \cap B) \geq f(A \cup B) - f(B)$$

$$\text{Portanto } f(A) + f(B) \geq f(A \cup B) + f(A \cap B) \quad (\text{D.10})$$

De (2) $p_j(R) \geq p_j(S) \geq 0$, $\forall R \subseteq S \subseteq E$, $\forall j \in E$. Então

$$f(R \cup \{j\}) - f(R) \geq f(S \cup \{j\}) - f(S) \geq 0 \quad (\text{D.11})$$

Como $R \subseteq S$, seja $S - R = \{j_1, \dots, j_r\}$. De (D.11) temos:

$$f(R) \leq f(R \cup \{j_1\}), \text{ pois } R \subseteq R \cup \{j_1\}$$

$$f(R \cup \{j_1\}) \leq f(R \cup \{j_1, j_2\}), \text{ pois } R \cup \{j_1\} \subseteq R \cup \{j_1, j_2\}$$

⋮

$$f(R \cup \{j_1, \dots, j_{r-1}\}) \leq f(R \cup \{j_1, \dots, j_r\}), \text{ pois}$$

$$R \cup \{j_1, \dots, j_{r-1}\} \subseteq R \cup \{j_1, \dots, j_r\}$$

Logo, fazendo o somatório das r parcelas, temos:

$$f(R) \leq f(R \cup \{j_1, \dots, j_r\}) = f(S) \quad (\text{D.12})$$

De (D.12) e (D.11) temos que:

$$0 \leq f(R) \leq f(S), \quad \forall R \subseteq S \subseteq E.$$

(2) \rightarrow (3) Seja A e B e tal que $A - B = \{k_1, k_2, \dots, k_q\}$ e $B - A = \{j_1, \dots, j_r\}$

$$\begin{aligned}
 f(A \cup B) - f(A) &= \sum_{t=1}^r [f(A \cup \{j_1, \dots, j_t\}) - \\
 &\quad f(A \cup \{j_1, \dots, j_{t-1}\})] \\
 &= \sum_{t=1}^r p_{j_t}(A \cup \{j_1, \dots, j_{t-1}\}) \quad (D.13)
 \end{aligned}$$

Como $A \subseteq A \cup \{j_1, \dots, j_{t-1}\}$, de (2) temos em (D.13) que:

$$\begin{aligned}
 f(A \cup B) - f(A) &= \sum_{t=1}^r p_{j_t}(A \cup \{j_1, \dots, j_{t-1}\}) \leq \sum_{t=1}^r p_{j_t}(A) \\
 &= \sum_{j \in (B-A)} p_j(A) \quad (D.14)
 \end{aligned}$$

De maneira semelhante,

$$\begin{aligned}
 f(A \cup B) - f(B) &= \sum_{t=1}^q [f(B \cup \{k_1, \dots, k_t\}) - f(B \cup \{k_1, \dots, k_{t-1}\})] \\
 &= \sum_{t=1}^q p_{k_t}(B \cup \{k_1, \dots, k_t\} - \{k_t\}) \quad (D.15)
 \end{aligned}$$

Como $(B \cup \{k_1, \dots, k_t\} - \{k_t\}) \subseteq (A \cup B - \{k_t\})$, $t=1, \dots, q$, então de (2) temos em (D.15) que:

$$\begin{aligned}
 f(A \cup B) - f(B) &= \sum_{t=1}^q p_{k_t}(B \cup \{k_1, \dots, k_t\} - \{k_t\}) \\
 &\geq \sum_{t=1}^q p_{k_t}(A \cup B - \{k_t\}) \\
 &= \sum_{j \in (A-B)} p_j(A \cup B - \{j\}) \quad (D.16)
 \end{aligned}$$

Subtraindo (D.16) de (D.14) temos:

$$-f(A) + f(B) \leq \sum_{j \in (B-A)} p_j(A) - \sum_{j \in (A-B)} p_j(A \cup B - \{j\}) \quad (D.17)$$

De (2) temos que $p_j(S) \geq 0, \forall S \subseteq E$. (não-decrescente).
Portanto, $\sum_{j \in (A-B)} p_j(A \cup B - \{j\}) \geq 0$, constitui uma parcela negativa em (D.17) e pode ser retirada mantendo a inequação. Logo, de (D.17) temos:

$$f(B) \leq f(A) + \sum_{j \in (B-A)} p_j(A), \forall A, B \subseteq E.$$

que é a definição (3).

(3) \rightarrow (2) Seja A e $B = (A \cup \{j\})$. De (3) temos:

$$f(A) \leq f(B) + \sum_{j \in (A-B)} p_j(B) \quad (D.18)$$

Como $A \subseteq B$ temos que $(A-B) = \emptyset$. Logo, de (D.18) temos:

$$f(A) \leq f(B) = f(A \cup \{j\})$$

Portanto $p_j(A) \geq 0$. ■

Com as definições acima, outros resultados podem ser obtidos [17] [9].

TEOREMA 2

Seja c uma função de pesos $c: E \rightarrow \mathbb{R}$. A função linear $f(S) = \sum_{j \in S} c_j$, $S \subseteq E$, é submodular.

TEOREMA 3

Uma combinação linear positiva de funções submodulares é submodular.

TEOREMA 4

Seja g uma função de conjunto submodular sobre os subconjuntos de E' . Seja um conjunto de subconjuntos $\{Q_j\} \subseteq E'$, $j \in E$. Se

(a) g é não decrescente, ou

(b) os Q_j são disjuntos,

então $f(S) = g(\bigcup_{j \in S} Q_j) = g(\bigcup_S Q_j)$, $S \subseteq E$, é uma função submodular sobre o conjunto de subconjuntos de E .

Demonstração: da submodularidade de g temos que:

$$\begin{aligned} f(R) + f(S) &= g(\bigcup_R Q_j) + g(\bigcup_S Q_j) \\ &\geq g[(\bigcup_R Q_j) \cup (\bigcup_S Q_j)] + g[(\bigcup_R Q_j) \cap (\bigcup_S Q_j)] \end{aligned} \quad (D.19)$$

$$\text{Temos que } \left(\bigcup_R Q_j \right) \cap \left(\bigcup_S Q_j \right) = \left(\bigcup_{R \cap S} Q_j \right) \quad (\text{D.20})$$

pois, $\forall j \in (R \cap S)$ então Q_j está contido na interseção, mas pode existir algum $Q_{j_1} \subset \left(\bigcup_R Q_j \right)$ e $Q_{j_2} \subset \left(\bigcup_S Q_j \right)$ tal que $j_1, j_2 \notin (R \cap S)$ e $Q_{j_1} \cap Q_{j_2} = \emptyset$, $\forall j_1, j_2 \in E$. Logo de (D.20) a igualdade é satisfeita com a condição (b).

De (D.20) e com a condição (a) temos que:

$$g\left[\left(\bigcup_R Q_j\right) \cap \left(\bigcup_S Q_j\right)\right] \geq g\left(\bigcup_{R \cap S} Q_j\right) \quad (\text{D.21})$$

Temos que $\left[\left(\bigcup_R Q_j\right) \cup \left(\bigcup_S Q_j\right)\right] = \bigcup_{R \cup S} Q_j$. Portanto temos:

$$g\left[\left(\bigcup_R Q_j\right) \cup \left(\bigcup_S Q_j\right)\right] = g\left(\bigcup_{R \cup S} Q_j\right) \quad (\text{D.22})$$

Logo, de (D.19), (D.21) e (D.22) temos que:

$$\begin{aligned} f(R) + f(S) &\geq g\left(\bigcup_{R \cup S} Q_j\right) + g\left(\bigcup_{R \cap S} Q_j\right) = f(R \cup S) + f(R \cap S) \\ f(R) + f(S) &\geq f(R \cup S) + f(R \cap S) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

TEOREMA 5

Seja o matrõide $M = (E', F(E'))$ e uma função de pesos $c: E' \rightarrow \mathbb{R}$. Para $R \subseteq E'$ a função de conjunto:

$$f(R) = \max_{R \in F(E')} \sum_{j \in R} c_j$$

é submodular e não decrescente.

Demonstração: Seja $R \subseteq S \subseteq E'$ tal que $R \in F(E')$ e $S \in F(E')$, com juntos independentes no matrõide. Utilizando a definição de submodularidade (2), teorema 1, mostraremos que $p_j(R) \geq p_j(S) \geq 0$ para $\forall R \subseteq S \subseteq E'$ e $j \in E'$.

Para isto, consideremos para $R \in F(E')$ e $j \in E'$ que:

$$f(R \cup \{j\}) - f(R) = \begin{cases} c_j, & \text{se } (R \cup \{j\}) \text{ é independente} \\ -\infty, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{D.23})$$

(a) Seja $j \in E'$ independente em R .

$$\text{Portanto, de (D.23), } f(R \cup \{j\}) - f(R) = c_j \quad (\text{D.24})$$

Como $R \subseteq S \subseteq E'$ então temos que:

$$f(S \cup \{j\}) - f(S) = \begin{cases} c_j, & \text{se } j \text{ é independente em } S \\ -\infty, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{D.25})$$

Consequentemente, de (D.24) e (D.25) temos:

$$f(R \cup \{j\}) - f(R) \geq f(S \cup \{j\}) - f(S) \quad (\text{D.26})$$

(b) Seja $j \in E'$ dependente em R .

Portanto, de (D.23) temos que:

$$F(R \cup \{j\}) - f(R) = -\infty \quad (D.27)$$

Como $R \subseteq S \subseteq E'$, então j também é dependente em S . Logo

$$f(S \cup \{j\}) - f(S) = -\infty \quad (D.28)$$

Consequentemente, de (D.27) e (D.28) temos

$$f(R \cup \{j\}) - f(R) \geq f(S \cup \{j\}) - f(S) \quad (D.29)$$

De (D.26) e (D.29) temos que:

$$p_j(R) \geq p_j(S), \quad \forall R \subseteq S \subseteq E' \text{ e } j \in E'.$$

Como $R \subseteq S$ temos que $f(R) \leq f(S)$ e portanto f é não decrescente. Logo:

$$p_j(R) \geq p_j(S) \geq 0, \quad \forall R \subseteq S \subseteq E', R \in F(E'), S \in F(E') \text{ e } j \in E'.$$

TEOREMA 6

Seja o matrõide $M = (E', F(E'))$ e uma função de pesos $c: E' \rightarrow \mathbb{R}$. Seja o conjunto de subconjuntos $\{Q_j\} \subseteq E'$, $j \in E'$. A função de conjunto para $S \subseteq E$

$$f(S) = \max_{R \subseteq S} \left\{ \sum_{j \in R} c_j \mid R \in f\left(\bigcup_{j \in S} Q_j\right) \right\}$$

é submodular e não decrescente.

A demonstração do teorema (6) é obtida através do teorema (4) e (5).

Para o problema de localização, o teorema (6) é mostrado na seção (IV-4.2).

Apresentamos apenas alguns resultados para o desenvolvimento do texto, porém outras definições e teoremas podem ser vistos em [17] ou em bibliografia específica.

BIBLIOGRAFIA

1. BIRKHOFF, G. and MAC LANE, S. - A Survey of Modern Algebra, New York, Macmillan Publ. Co., Inc., 1977, 499 p.
2. CHVATAL, V. - A Greedy Heuristic for the Set-covering Problem, Mathematics of Operations Research, Vol. 4, n. 3, p. 233-235, August 1979.
3. CORNUEJOLS, G., FISHER, M. L. and NEMHAUSER, G. L. - Location of Bank Accounts to Optimize Float: An Analytic Study of Exact and Aproximate Algoritms, Management Science, Vol. 23, n. 8, p. 789-810, April 1977.
4. DUNSTAN, F. D. J. and WELSH, D. J. A. - A Greedy Algorithm for Solving a Certain Class of Linear Programmes, Mathematical Programming, 5, p. 338-353, 1973.
5. EDMONDS, J. - Maximum Matching and a Polyhedron With 0,1 - Vertices, Journal of Research of the National Bureau of Standards, Vol. 69B, n. 1 and 2, p. 125-130, 1965.
6. EDMONDS, J. - Minimum Partition of a Matroid Into Independent Subsets, Journal of Research of the National Bureau of Standards, vol. 69 B, n. 1 and 2, p. 67-72, 1965.

7. EDMONDS, J. and FULKERSON, D. R. - Transversals and Matroid Partition, Journal of Research of the National Bureau of Standards, vol. 69 B, n. 3, p. 147-153, 1965.
8. EDMONDS, J. - Matroids and the Greedy Algorithm, Mathematical Programming 1, p. 126-136, 1971.
9. EDMONDS, J. - Submodular Functions, Matroids, and Certain Polyhedra, Proceedings of the International Conference on Combinatorics, Calgary, Gordon and Breach, New York, p. 69-87, 1970.
10. EVERETT, H. - Generalized Lagrange Multiplier Method for Problems of Optimum Allocation of Resources, Operations Research 11, p. 399-471, 1963.
11. FISHER, M. L., NEMHAUSER, G. L. and WOLSEY, L. A. - An Analysis of Approximations for Maximizing Submodular Set Functions - II, Mathematical Programming Study 8, p. 73-87, 1978.
12. GEOFFRION, A. M. - Lagrangian Relaxation for Integer Programming, Mathematical Programming Study, vol. 2, p. 82-114, 1974.
13. KRUSKAL, J. B. - On the Shortest Spanning Subtree of a Graph and the Traveling Salesman Problem, Proceedings American Mathematical Society 7, p. 48-50, 1956.

14. LAWLER, E. L. - Combinatorial Optimization: Networks and Matroids, Berkeley, Holt, Rinehart and Winston, 1976, 374 p.
15. MINOUX, M. - Algorithmes Gloutons et Algorithmes Gloutons Accélérés pour la résolution des grands problèmes combinatoires, Bulletin de La Direction des Etudes et Recherches Serie C - Mathematiques, Informatique, n. 1, p. 41-58, 1977.
16. MIRSKY, L. - Transversal Theory and the Study of Abstract Independence, Journal Mathematical Analysis and Applications 25, p. 209-217, 1969.
17. NEMHAUSER, G. L., WOLSEY, L. A. and FISHER, M. L. - An Analysis of Aproximations for Maximizing Submodular Set Functions - I, Mathematical Programming 14, p. 265-294, 1978.
18. PREPARATA, F. P. and YEH, R. T. - Introduction to Discrete Structures, London, Addison-Wesley Publ. Co., 1973, 354 p.
19. RADO, R. - Note on Independence Functions, Proceedings London Mathematical Society 7, p. 300-320, 1957.
20. RADO, R. - A Theorem on Independence Relations, Quartely Journal Mathematical 13, p. 83-89, 1942.

21. RADO, R. - Axiomatic Treatment of Rank in Infinite Sets, Canad. Journal Mathematical 1, p. 337-343, 1949.
22. TUTTE, W. T. - Matroids and Graphs, Trans. American Mathematical Society 90, p. 527-552, 1959.
23. WELSH, D. J. - Kruskal Theorem for Matroids, Proceedings Cambridge Phil. Society 64, p. 3-4, 1968.
24. WELSH, D. J. - Matroid Theory, London, Academic Press Inc., 1976, 433 p.
25. WHITNEY, H. - On the Abstract Properties of Linear Dependence, American Journal Mathematics 57, p. 509-532, 1935.
26. WILSON, R. J. - An Introduction to Matroid Theory, American Mathematical Monthly 80, p. 500-525, 1973.