DUALIDADE EM PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR COM VÍNCULOS POSITIVOS

Manuel Martins Filho

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

Ronaldo C. Marinho Persiano

Clóvis Caesar Gonzaga

Luís Fernando Loureiro Legey

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 1981

MARTINS FILHO, MANUEL

Dualidade em Problemas de Programação Não Linear com Víncu-los Positivos |Rio de Janeiro| 1981

Vi, 72p , 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia de Siste-mas e Computação, 1981).

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro, Fac. Engenharia

1. Otimização I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Aos meus pais.

AGRADECIMENTOS

Ao Marinho, mais que um orientador, um grande amigo.

A Angela e Denise pela datilografia e a Veralúcia e Nadir pelos acertos finais.

A Nilza pelo apoio e estímulo.

A CAPES pelo auxílio financeiro.

Aos amigos que me incentivaram a terminar este trabalho, e ao SERPRO que me deu condições para isso.

RESUMO

Estudaremos um problema particular em Programação Não-Linear, (Problema a Vínculos Positivos) e sua relação com o Método das Penalidades Exteriores.

Desenvolveu-se uma teoria de Dualidade para Problemas a Vínculos Positivos, buscando-se obter condições mais fracas, que garantam a igualdade dos valores ótimos dos problemas Primal e Dual.

Os resultados dessa teoria de Dualidade serão usados para garantir a convergência do Método das Penalidades Exteriores.

A teoria geral de Dualidade, é apresentada usando-se a abordagem adotada por Geoffrion | 71 | sem hipóteses de convexidade.

ABSTRACT

A special class of Non-Linear Programming Problems (Problems with Positive Constraints) and its relationship to the Exterior Penalty Function Method is considered.

A Duality Theory for problems with positive constraints is developed, in order to obtain weaker suffcient conditions, for the equality of the optimal values of the Primal and Dual Problems.

The convergence of the Exterior Penalty Function Method, is assured as result of the application of such Duality Theory.

The General Duality Theory, is presented following the approach proposed by Geoffrion |71| , without convexity assumptions.

INDICE

CAPITULO I

INTRODUÇÃO

Estudaremos a teoria geral de Dualidade em Programação Não-Linear, usando a abordagem adotada por Geoffrion |71|, porém sem o uso de hipóteses adicionais (convexidade).

Restringiremos no entanto nosso estudo, a uma classe particular de problemas, em que a função vínculo é positiva ou nula em todo o seu domínio (Problema a Vínculos Positivos - P.V.P.).

Embora o estudo se restrinja a essa família particular de problemas, deve-se salientar que qualquer problema de Programação Não-Linear pode ser transformado em um Problema a Vínculos Positivos equivalente.

Desenvolveremos uma teoria de Dualidade para P.V.P., e estudaremos a sua relação com o Método das Penalidades Exteriores.

A interrelação entre esses dois métodos será explicitada quando da definição de um método de penalidades exteriores, obtido à partir do P.V.P..

O método de penalidades exteriores, pode ser vizualizado como um método Dual.

Nesse caso, o peso da função penalidade é um multiplicador de Lagrange para o problema Dual.

A resolução do problema Primal pelo método de penalidades exteriores corresponde a buscar-se uma solução para o problema Dual.

Espera-se que a aplicação de um método de penalidades exteriores, gere uma sequência de soluções convergente a uma solução do problema Primal (P), e além disso, que a sequência de valores ótimos dos sub-problemas desvinculados, convirja para o valor ótimo do problema Primal.

A teoria de Dualidade desenvolvida para problema a Vínculos Positivos, permite obter-se condições que garantam a igualdade dos valores ótimos dos problemas Primal (P) e Dual (D), e a partir daí assegurar-se a convergência do método das penalidades exteriores.

A busca dessas condições envolvem basicamente propriedades da função perturbação.

Mostra-se que, a menos de condições razoaveis de viabilidade, que a semi-continuidade inferior dessa função na origem é suficiente para garantir a igualdade dos valores ótimos dos problemas Primal (P) e Dual (D), mesmo na ausência de estabilidade, e mesmo que o problema Dual não tenha solução.

A definição dos problemas Primal (P) e Dual (D), e a interpretação desses problemas em termos de Condições de Ponto de Sela serão vistas no Capítulo II.

À partir dessa interpretação, apresentaremos um teorema que garante a equivalência entre Condições de Ponto de Sela, adotadas por Lasdon |68|, e Condições de Otimalidade adotadas por Geoffrion |71|, com as quais iremos trabalhar.

Neste capítulo, reapresentaremos ainda a teoria geral de Dualidade, sem hipóteses adicionais.

O capítulo III aborda o Problema a Vínculos Positivos.

Estudaremos estabilidade, as propriedades da função perturbação associada a esse tipo de problema, e veremos que a igualdade dos valores ótimos pode ser obtida à partir de hipóteses menos restritivas.

Finalmente estudaremos o Método das Penalidades Exteriores e a sua relação com o Problema a Vínculos Positivos.

No último capítulo são expostas algumas conclusões, e no apêndice apresentam-se alguns resultados de Programação Matemática úteis ao longo desse trabalho.

Notação

Para cada inteiro n denotamos por R^n o espaço euclidiano n dimensional, cujos elementos são n-uplas ordenadas de números reais, que nós consideramos como vetores colunas.

Se $x \in R^n$, então para $i=1,2,\ldots,n$, x_i denota a i-ésima componente de x.

Se $x, y \in R^n$ denotamos o produto escalar por:

1 $$\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\, y_i$$

A norma de um vetor $x \in R^n$ é denotada por:

2 $$\| x \| = \langle x,x \rangle^{1/2}$$

Se $x, y \in R^n$, então usaremos a notação $x < y$ para indicar que, para $i=1,2,\ldots,n$ $x_i < y_i$.

Analogamente, $x \leq y$ $(x \geq y)$ significa que, para $i=1,2,\ldots,n$ $x_i \leq y_i$ $(x_i \geq y_i)$

O conjunto dos naturais e reais são denotados respectivamente por R e N.

Acrescentaremos ainda, algumas observações sobre as referências. Os capítulos são numerados em algarismos romanos; as expressões e os parágrafos em algarismos arábicos.

Com algarismo arábico entre parênteses indicamos uma referência a uma expressão ou parágrafo no mesmo capítulo.

Para referenciar expressões em outro capítulo, colocamos a numeração do capítulo, seguida da numeração da expressão

(Ex - (II-20)).

As referências ao apêndice são feitas através da letra A, seguida do número da expressão. Exemplo - (ver A-2)

A bibliografia é apresentada no fim do trabalho, em ordem alfabética por nome do autor. A referência bibliográfica é apresentada entre barras e indica a data de publicação do trabalho. Exemplo: Geoffrion |71|.

C A P I T U L O II

TEORIA GERAL DE DUALIDADE

Seção 1 - INTRODUÇÃO

O objetivo básico deste capítulo é apresentar os resultados de Dualidade obtidos por Geoffrion |[71]|, sem hipóteses adicionais.

Veremos inicialmente na seção 2, a definição dos problemas Primal (P) e Dual (D), e a interpretação desses problemas em termos de Condições do Ponto de Sela e da função Langrangeana de (P).

Na seção 3, apresentaremos um conjunto de definições básicas, necessárias para desenvolver os resultados dos demais capítulos. Além disso, estudaremos a equivalência entre Condições de Ponto de Sela e Condições de Otimalidade, equivalência esta que será valiosa na obtenção dos resultados acima mencionados.

Serão vistos ainda os conceitos de estabilidade e função perturbação que serão usados exaustivamente no decorrer deste trabalho.

Finalmente, na seção 4, apresentaremos os principais resultados de Dualidade, resumidos nos três teoremas básicos, Otimalidade, Dualidade Fraca e Dualidade Forte.

A prova dos teoremas de Otimalidade e Dualidade Forte, bem como a apresentação de alguns lemas relevantes estão na seção 5.

Seção 2 - DEFINIÇÃO DE (P) E (D)

DEFINIÇÃO DE PONTO DE SELA E LAGRANGEANA-INTERPRETAÇÃO

Nesta seção serão apresentadas as definições de (P) e (D); a definição do ponto de sela e sua relação com as soluções ótimas de (P) e (D). A interpretação de (P) e (D) será vista à partir desta definição.

1 - Definição: define-se o problema primal da seguinte maneira:

(P) Encontrar se existir, um vetor $\bar{x} \in \bar{X}$ t.q.

$$f(x) \geq f(\bar{x}) \quad \forall\, x \in \bar{X}$$

onde $\bar{X} = \{x \in X \mid g(x) \leqq 0\}$,

$g(x) \triangleq (g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x))'$ e f e cada g_i, $i = 1,2,\ldots,m$ são funções de valor real definidas em $X \subseteq R^n$.

Frequentemente (P) é enunciado simplesmente:

$$\min_{x \in X} f(x) \text{ sujeito a } g(x) \leqq 0.$$

Existem muitas maneiras de definir o dual de um determinado primal. Como nosso trabalho terá por base os resultados obtidos por Geoffrion |71| para problemas convexos, usaremos a definição adotada por este, 2 - <u>Definição</u>: O <u>problema dual</u> de (P) com relação as restrições $g_i(x)$, $i = 1,2,\dots,m$ é:

(D) $$\underset{u \geq 0,\, u \in \mathbb{R}^m}{\text{Max}} \{\inf_{x \in X} f(x) + \langle u, g(x)\rangle\}$$

onde $\inf_{x \in X} f(x) + \langle u, g(x)\rangle = w(u)$ é a função objetivo de (D)

O vetor $u \in R^m$ é chamado <u>vetor de variáveis duais</u>. Vale observar aqui que o maximando de (D) é uma <u>função côncava</u> em u.

3 - <u>Proposição</u>: w função objetivo de (D) é côncava.

<u>Prova</u>: Sejam u^1 e $u^2 \in R^m$, $u^1 \geq 0$, $u^2 \geq 0$ e $\lambda \in [0,1]$.

Podemos escrever que:

4 $$f(x) + \langle u^1, g(x)\rangle \geq w(u^1) \quad \forall\, x \in X$$

5 $$f(x) + \langle u^2, g(x)\rangle \geq w(u^2) \quad \forall\, x \in X$$

Multiplicando 4 por λ, 5 por $(1-\lambda)$ e somando tem-se:

$$f(x) + \langle \lambda u^1 + (1-\lambda)u^2, g(x)\rangle \geq \lambda\, w(u^1) + $$

$$+ (1-\lambda)\, w(u^2) \quad \forall\, x \in X$$

Tomando agora o ínfimo em $x \in X$ do lado esquerdo da desigualdade vem:

$$\inf_{x \in X} \{f(x) + \langle \lambda u^1 + (1-\lambda)u^2, g(x)\rangle\} \geq$$

$$\geq \lambda\, w(u^1) + (1-\lambda)\, w(u^2)$$

ou seja:

$$w(\lambda u^1 + (1-\lambda) u^2) \geqq \lambda w(u^1) + (1-\lambda) w(u^2)$$

provando 3 ||.

Veremos a seguir a definição de ponto de sela e um teorema de otimalidade.

6 - <u>Definição</u>: Sejam $\bar{u} \geqq 0$, $u \in R^m$ e $L = R^n \times R^m \to R$ a função Lagrangeana de (P) $L(x,u) = f(x) + \langle u, g(x) \rangle$. O ponto $(\bar{x},\bar{u})$ é ponto de sela de $L(\cdot,\cdot)$ se:

7 $$L(\bar{x},\bar{u}) \leqq L(x,\bar{u}) \quad \forall x \in X$$

e

8 $$L(\bar{x},u) \leqq L(\bar{x},\bar{u}) \quad \forall u \geqq 0$$

Na realidade todo o problema da dualidade consiste em encontrar um par $(\bar{x},\bar{u})$ que satisfaça ao mesmo tempo (7) e (8). Ou seja, encontrar $(\bar{x},\bar{u})$ tal que:

9 $$L(\bar{x},u) \leq L(\bar{x},\bar{u}) \leq L(x,\bar{u}) \quad \forall x \in X,$$

$$\forall u \geqq 0, \; u \in R^m.$$

Se $(\bar{x},\bar{u})$ satisfaz (9) pode-se escrever que:

10 $$\text{Max } L(\bar{x},u) = L(\bar{x},\bar{u}) = \min_{x \in X} L(x,\bar{u})$$

O resultado (10) é uma consequência imediata de $(\bar{x},\bar{u})$ satisfazer (9).

Analisando (10) conclue-se que (9) pode ser escrita de uma maneira mais compacta, ou ainda, em vez de tentar-se resolver (7) e (8) separadamente (o que equivale a resolver (9)). Pode-se pensar em resolver um dos seguintes problemas:

11 $$\min_{x\in X}\ \sup_{u\geqq 0} L(x,u)$$

ou

12 $$\max_{u\geqq 0}\ \inf_{x\in X} L(x,u)$$

O problema (11) equivale a resolver (9) da esquerda para a direita, ou seja, encontra-se o Sup $L(x,u)$ no conjunto das u's $\geqq 0$, $u \in R^m$ em seguida minimiza-se em $x \in X$.

Em (12) o procedimento é exatamente o inverso, acha-se o ínfimo em $x \in X$ e em seguida maximizamos em $u \geqq 0$, $u \in R^m$. É evidente que resolver (12) equivale a resolver o problema dual, ou seja:

$$(D) \equiv \max_{u\geqq 0}\ \inf_{x\in X} \{f(x) + \langle u,g(x)\rangle\}$$

Analisemos agora o problema (11)

$$\min_{x\in X}\ \sup_{u\geqq 0} L(x,u)$$

Façamos $h(x) = \sup_{u\geqq 0} \{f(x) + \langle u,g(x)\rangle\}$

Para $x \in X|g(x) \leqq 0$ tem-se $h(x) = f(x)$ pois como $g(x) \leqq 0$, o $\sup_{u\geqq 0} \{f(x) + \langle u,g(x)\rangle\}$ é obtido fazendo-se $u = 0$.

Para x não viável ($g(x) \not\leqq 0$), $h(x) = +\infty$. Este resultado é evidente pois basta fazer:

$$u_i = K \quad \text{se} \quad g_i(x) > 0$$
$$u_i = 0 \quad \text{se} \quad g_i(x) \leqq 0$$

onde $K > 0$ pode ser tomado tão grande quanto se queira. Com isto $\forall x$ não viável $h(x) = +\infty$. Logo pode-se dizer que:

13 $$\min_{x \in X} h(x) \iff \min_{x \in X \mid g(x) \leq 0} f(x)$$

ou seja, resolver (11) equivale a resolver (P).

Obteve-se assim a partir das condições de ponto de sela os problemas (11) e (12) que são equivalentes respectivamente a (P) e (D).

Veremos a seguir que a inter-relação entre o problema (9) e os problemas (11) e (12) é tal que se pode garantir que um par $(\bar{x},\bar{u})$ é solução de (9), se e somente se, $\bar{x}$ resolve (P), $\bar{u}$ resolve (D) e $f(\bar{x}) = w(\bar{u})$. Este resultado caracteriza bem a interpretação de (P) e (D) em termos de condições de ponto de sela.

14 - Teorema: O par $(\bar{x},\bar{u})$ é ponto de sela de L se e somente se, $\bar{x}$ resolve (P), $\bar{u}$ resolve (D) e $f(\bar{x}) = w(\bar{u})$.

Prova: ($\Longrightarrow$) Seja $(\bar{x},\bar{u})$ satisfazendo (7) e (8). De (8) temos que:

$$f(\bar{x}) + \langle u, g(\bar{x})\rangle \leqq f(\bar{x}) + \langle \bar{u}, g(\bar{x})\rangle \quad \forall\ u \geqq 0,$$

$u \in R^m$, ou ainda

15 $$\langle u-\bar{u},\ g(\bar{x})\rangle \leqq 0 \quad \forall\ u \geqq 0.$$

Fazendo

$u_i = \bar{u}_i$, $i = 1,2,\ldots,j-K,\ j+K,\ldots,m$ e

$u_j = \bar{u}_j + 1$ segue que:

$g_j(\bar{x}) \leqq 0.$

Variando j de 1 até m obtém-se

16 $g(\overline{x}) \leqq 0$, ou seja $\overline{x}$ é viável.

Como $\overline{u} \geqq 0$ e $g(\overline{x}) \leqq 0$ segue que:

17 $$<\overline{u}, g(\overline{x})> \leqq 0.$$

Fazendo em (15) $u = 0$ resulta:

18 $$<\overline{u}, g(\overline{x})> \geqq 0.$$

De posse de (17) e (18) conclue-se então que:

19 $$<\overline{u}, g(\overline{x})> = 0.$$

De (7) temos

$$f(\overline{x}) + <\overline{u}, g(\overline{x})> \leqq f(x) + <\overline{u}, g(x)> \quad \forall\, x \in X$$

Em vista de (19) segue que:

20 $$f(\overline{x}) \leq f(x) + <\overline{u}, g(x)> \quad \forall\, x \in X.$$

Para $x \in X$ tal que $g(x) \leqq 0$ temos $<\overline{u}, g(x)> \leqq 0$. Logo

$$f(\overline{x}) \leq f(x) \quad \forall\, x \in X \mid g(x) \leqq 0$$

provando que $\overline{x}$ resolve (P).

Mostraremos agora que $\overline{u}$ resolve (D). Sabe-se que $w(\overline{u}) = L(\overline{x},\overline{u})$ pois

21 $$w(\overline{u}) = \inf_{x \in X} L(x,\overline{u}) = L(\overline{x},\overline{u}). \text{ (de (7))}.$$

Mas $$w(u) = \inf_{x \in X} L(x,u) \quad (\forall\, u \geqq 0,\ u \in R^m)$$

$$\leq L(\overline{x},u)$$

$$\leq L(\overline{x},\overline{u}) = w(\overline{u}) \quad \text{de (8) e (21)}.$$

Logo $w(u) \leq w(\bar{u})$ $\forall$ $u \geq 0$, provando que $\bar{u}$ resolve (D).

De (21) segue que:

$$w(\bar{u}) = f(\bar{x}) + \langle\bar{u}, g(\bar{x})\rangle$$

Em vista de (19) vem:

$w(\bar{u}) = f(\bar{x})$ encerrando a primeira parte da prova.

($\Longleftarrow$) Suponha que $\bar{x}$ resolve (P), $\bar{u}$ resolve (D) e $f(\bar{x}) = w(\bar{u})$.

Sabe-se que:

22 $$f(\bar{x}) = w(\bar{u}) \leq f(x) + \langle\bar{u}, g(x)\rangle \quad \forall\ x \in X$$

Como $\langle u, g(\bar{x})\rangle \leq 0$ ($\forall$ $u \geq 0$) ($\bar{x}$ é viável por hipótese), pode-se escrever que:

23 $$f(\bar{x}) + \langle u, g(\bar{x})\rangle \leq f(x) + \langle\bar{u}, g(x)\rangle$$

$(\forall\ x \in X)$ $(\forall\ u \geq 0)$.

Fazendo em (23) $u = \bar{u}$ resulta:

$$f(\bar{x}) + \langle\bar{u}, g(\bar{x})\rangle \leq f(x) + \langle\bar{u}, g(x)\rangle \quad (\forall\ x \in X)$$

provando (7). Ainda em (23) fazendo $x = \bar{x}$ tem-se

24 $$f(\bar{x}) + \langle u, g(\bar{x})\rangle \leq f(\bar{x}) + \langle\bar{u}, g(\bar{x})\rangle \quad (\forall\ u \geq 0)$$

provando (8) ||.

Obtivemos assim com estes resultados, uma interpretação clara de (P) e (D) em termos de condições de ponto de sela, e um teorema que garante a otimalidade do par $(\bar{x},\bar{u})$ pa ra os problemas (P) e (D), quando $(\bar{x},\bar{u})$ é um ponto de sela da Função Lagrangeana de (P) $(L(x,u) = f(x) + \langle u, g(x)\rangle)$.

Na seção seguinte, serão vistas algumas definições e resultados preliminares que servirão de base para desenvolver a teoria de dualidade na seção 4.

Serão introduzidos os conceitos de Condições de Otimalidade e Estabilidade.

O primeiro será usado em substituição as condições de ponto de sela por facilidade de formalização e interpretação. O segundo (estabilidade) é fundamental para os principais resultados de dualidade. A hipótese de convexidade não será usada em nenhum momento.

Seção 3 - DEFINIÇÕES (RESULTADOS PRELIMINARES)

Antes de iniciarmos a discussão dos resultados preliminares, serão apresentadas algumas definições básicas, necessárias para uma melhor compreensão dos mesmos.

25 - Definição: O valor ótimo de (P) é o ínfimo de

$$\{f(x) \mid x \in X,\ g(x) \leqq 0\}.$$

O valor ótimo de (D) é o

$$\text{Sup } \{w(u) \mid u \geqq 0,\ u \in R^m\}.$$

Os problemas (P) e (D) sempre possuem valores ótimos pois convencionamos que sup(inf) de um conjunto vazio é $-\infty$ $(+\infty)$.

26 - <u>Definição</u>: O vetor u é <u>essencialmente inviável</u> em (D) se $w(u) = -\infty$. Se todo $u \geqq 0$ é essencialmente inviável em (D), então (D) é dito ser <u>essencialmente inviável</u>. Se (D) não é essencialmente inviável, então (D) é <u>essencialmente viável</u>.

27 - <u>Definição</u>: O par $(\bar{x},\bar{u})$ satisfaz as <u>Condições de Otimalidade</u> (C.O.) para (P) se:

i) $\bar{x}$ minimiza $f + \langle\bar{u}, g\rangle$ em X

ii) $\langle\bar{u}, g(\bar{x})\rangle = 0$

iii) $\bar{u} \geqq 0$

iv) $g(\bar{x}) \leqq 0$

Isto posto, passemos a alguns resultados preliminares.

A equivalência direta entre Ponto de Sela e Condições de Otimalidade, é garantida pela proposição seguinte:

28 - <u>Proposição</u>: O par $(\bar{x},\bar{u})$ é ponto de sela da função Lagrangeana L de (P), se e somente se, $(\bar{x},\bar{u})$ satisfaz as Condições de Otimalidade para (P).

<u>Prova</u>: ($\Longrightarrow$) Seja $(\bar{x},\bar{u})$ um ponto de sela de L. De (7) vem:

$$f(\bar{x}) + \langle\bar{u}, g(\bar{x})\rangle \leqq f(x) + \langle\bar{u}, g(x)\rangle \quad \forall\, x \in X$$

ou seja, $\bar{x}$ minimiza $f + \langle\bar{u},g\rangle$ em X (condição i). A condição iii) é válida pois $\bar{u} \geqq 0$ por hipótese. A obtenção das condições ii) e iv) é idêntica as das expressões (16) e (19) no Teorema (14).

($\Longleftarrow$) Seja $(\bar{x},\bar{u})$ satisfazendo as C.O. para (P). A expressão (7) resulta direto da condição i), ou seja:

$$f(\bar{x}) + \langle\bar{u}, g(\bar{x})\rangle \leq f(x) + \langle\bar{u}, g(x)\rangle \quad \forall\, x \in X$$

Como $\bar{x}$ é viável $(g(\bar{x}) \leq 0)$, para todo $u \geq 0$, $u \in R^m$ vem $\langle u, g(\bar{x})\rangle \leq 0$.

Pode-se escrever então que:

29 $$f(\bar{x}) \geq f(\bar{x}) + \langle u, g(\bar{x})\rangle \quad \forall\, u \geq 0,\ u \in R^m$$

De (29) e da condição ii) $\langle\bar{u}, g(\bar{x})\rangle = 0$, segue

30 $$f(\bar{x}) + \langle\bar{u}, g(\bar{x})\rangle \geq f(\bar{x}) + \langle u, g(\bar{x})\rangle \quad \forall\, u \geq 0$$

provando (8) ||.

De agora em diante, Condições de Otimalidade serão usadas em substituição a Condições de Ponto de Sela. A razão para isto é que Condições de Otimalidade são formalizadas de uma maneira mais fácil de serem usadas e interpretadas. Esta formalização permite desenvolver uma teoria sobre Dualidade de uma maneira bastante simples e objetiva.

Um resultado imediato da proposição (28) é o seguinte:

31 - <u>Corolário</u>: O par $(\bar{x},\bar{u})$ satisfaz as Condições de Otimalidade para (P), se e somente se, $\bar{x}$ é a solução de (P), $\bar{u}$ é solução de (D) e $f(\bar{x}) = w(\bar{u})$.

<u>Prova</u>: A prova é imediata em vista do Teorema (14) e da equivalência dada pela Proposição (28).

32 - <u>Definição</u>: O vetor $\bar{u} \in R^m$ é um <u>vetor multiplicador ótimo</u> (v. m.o.) para (P), se o par $(\bar{x},\bar{u})$ satisfaz as Condições de Otimalidade para algum $\bar{x} \in X$.

Da definição de v.m.o. e da proposição (28) vê-se que a existência de um vetor multiplicador ótimo, pressupõe a existência de uma solução ótima para (P). Além do mais, se $\bar{u}$ é um v.m.o. para (P), ele satisfaz junto com toda solução ótima de (P), as Condições de Otimalidade como veremos em (II-52).

Não se pode afirmar entretanto, que a existência de uma solução ótima para (P) implica na existência de um vetor multiplicador ótimo. Mesmo no caso convexo, este resultado exige condições adicionais. Algumas dessas condições envolvem a função perturbação de (P) que passaremos a estudar.

33 - <u>Definição</u>: A função perturbação de (P), é a função

$v: R^m \to R$ dada por:

$$v(y) = \inf_{x \in X} \{f(x) \mid g(x) \leqq y\} \quad \text{onde}$$

$y \in R^m$ é chamado <u>vetor perturbação</u>.

O <u>conjunto das perturbações viáveis de (P)</u> é

$$Y = \{y \in R^m \mid g(x) \leqq y \text{ para algum } x \in X\}.$$

Seja $y \in Y$ e consideremos o problema

$$(P_y) \quad \underset{x \in X}{\text{Min}} \; f(x) \text{ s.a. } g(x) \leqq y$$

O problema (P_y) é o problema (P) perturbado por y. A única diferença entre eles, está no conjunto de pontos viáveis que no caso de (P_y) é

$$X(y) = \{x \in X \mid g(x) \leqq y\}$$

Se f é limitada inferiormente (P_y) é limitado para qualquer perturbação $y \in Y$.

Em vista da Definição (33) o valor de v em y é o valor do problema (P_y). A menos do caso trivial $(X = \{\phi\})$, Y é não vazio, e como f é limitada inferiormente, o ínfimo existe. Observe-se também que se y = 0

$$v(0) = \inf_{x \in X} \{f(x) \mid g(x) \leqq 0\}$$

ou seja v(o) é exatamente o valor ótimo do primal.

34 - Definição: Seja $Z \subset R^n$. A função $h: Z \to R$ é crescente se

$$h(z^2) \geq h(z^1) \ \forall\ z^2 \geqq z^1,\ z^1, z^2 \in Z.$$

h é decrescente se -h é crescente.

35 - Lema: Se $y^1, y^2 \in Y$ e $y^1 \geqq y^2$ então

$$X(y^2) \subset X(y^1) \quad e \quad v(y^1) \leq v(y^2)$$

Prova: Temos

$$X(y^2) \triangleq \{x \in X \mid g(x) \leqq y^2\} \qquad e$$

$$X(y^1) \triangleq \{x \in X \mid g(x) \leqq y^1\}$$

Seja $\bar{x} \in X(y^2)$, então pode-se escrever que:

$g(\bar{x}) \leqq y^2 \leqq y^1 \Longrightarrow \bar{x} \in X(y^1)$ provando a primeira parte do lema. Sabe-se ainda que:

$$\inf_{z \in X(y^1)} f(z) \leq f(x) \quad (\forall\ x \in X(y^1))$$

Como $X(y^2) \subset X(y^1)$, a desigualdade vale em particular para $x \in X(y^2)$. Logo

$$\inf_{z \in X(y^1)} (z) \leq f(x) \quad (\forall\ x \in X(y^2)$$

Tomando o ínfimo de $f(\cdot)$ em $X(y^2)$ vem

$$\inf_{z \in X(y^1)} f(z) \leq \inf_{x \in X(y^2)} f(x) \qquad \text{ou seja}$$

$$v(y^1) \leq v(y^2)$$

encerrando a prova ||.

No <u>sentido do Lema 35</u> dizemos que a função perturbação é <u>decrescente</u>.

Em geral a função perturbação v não é diferenciável em todos os pontos do seu domínio. Um conceito importante que amplia a idéia de diferenciabilidade será visto a seguir.

36 - <u>Definição</u>: Seja $U \subset R^m$ um conjunto qualquer e $t: U \to R$ uma função qualquer. Um vetor $\gamma \in R^m$ é um subgradiente de t em $\bar{u} \in U$ se:

$$t(u) \geq t(\bar{u}) + \langle \gamma, (u-\bar{u}) \rangle \quad (\forall\ u \in U)$$

Exemplo:

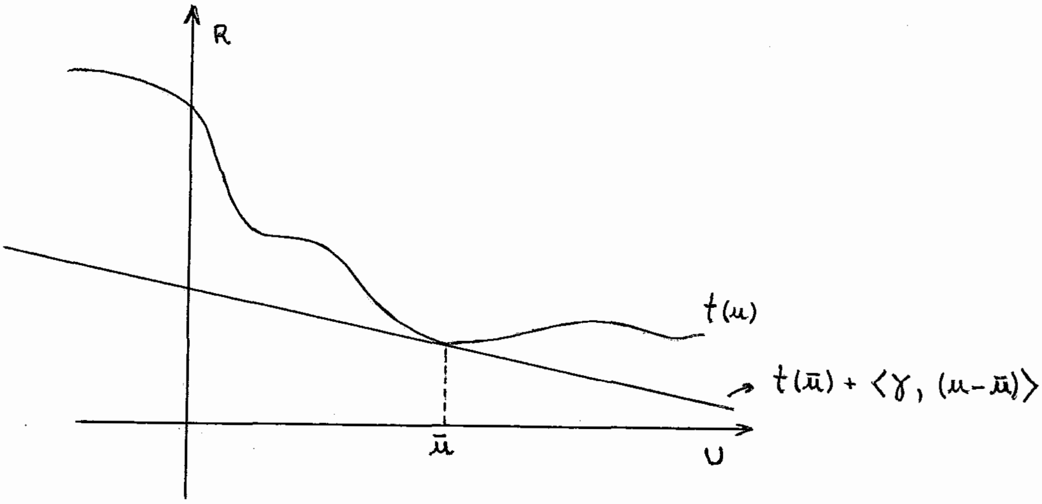


FIG-1

A existência de um subgradiente garante que o gráfico da função está todo acima da forma linear definida por este subgradiente.

37 - Definição: Seja $U \varepsilon R^m$ um conjunto qualquer e $t: U \to R$ uma função qualquer.

O conjunto de subgradientes de t em $\bar{u} \varepsilon U$ é

$$\delta t(\bar{u}) = \{\gamma \varepsilon \mathbb{R}^m | t(u) \geq t(\bar{u}) + \langle\gamma, (u-\bar{u})\rangle$$

$$\forall u \varepsilon U\}$$

Dizemos que $t: U \to R$ é subdiferenciável em $\bar{u} \varepsilon U$ se $\delta t(\bar{u})$ é não vazio. Evidentemente nem toda função é subdiferenciável. Funções estritamente côncavas por exemplo , não admitem subgradientes em nenhum ponto do interior do seu domínio. Em particular, subgradientes da função perturbação na origem são importantes nesse trabalho, pois como veremos mais adiante, estes subgradientes são simétricos dos vetores multiplicadores ótimos para (P), se (P) tem solução. Assim, se (P) tem solução ótima, condições que garantem que v é subdiferenciável na origem, implicam diretamente na existência de um v.m.o. para (P).

Em vista da importância acima mencionada, , serão vistas agora algumas propriedades dos subgradientes de v.

38 - Proposição: Subgradientes da função perturbação são negativos.

Prova: Seja $\gamma \in R^m$ um subgradiente de v em $\bar{y} \in Y$. Então

$$v(y) \geq v(\bar{y}) + \langle\gamma, (y-\bar{y})\rangle \quad \forall\, y \in Y$$

Fazendo

$$y = \bar{y} + e^j \qquad \text{resulta}$$

$$v(\bar{y} + e^j) \geq v(\bar{y}) + \langle\gamma, e^j\rangle$$

Como v é decrescente segue que:

$$\gamma_j \leq 0$$

fazendo j variar de 1 até m obtemos

$$\gamma \leqq 0 \qquad \text{provando (38)} \;||.$$

O resultado seguinte apresenta a relação entre a existência de subgradientes de v e a viabilidade do problema dual.

39 - Proposição: Se v admite um subgradiente em algum $\bar{y} \in Y$, então (D) é essencialmente viável.

<u>Prova</u>: Seja $\gamma \in R^m$ um subgradiente de v em algum $\bar{y} \in Y$, então

$$v(y) \geq v(\bar{y}) + <\gamma, (y-\bar{y})> \quad \forall\, y \in Y$$

fazendo

$$y = g(x) \text{ onde } x \in X \text{ vem:}$$

$$v(g(x)) \geq v(\bar{y}) + <\gamma, g(x)> - <\gamma,\bar{y}> \quad \forall\, x \in X$$

Mas

$$f(x) \geq v(g(x)) \geq v(\bar{y}) + <\gamma,g(x)> - <\gamma,\bar{y}> \quad \forall x \in X$$

ou ainda

$$f(x) + <(-\gamma), g(x)> \geq v(\bar{y}) - <\gamma,\bar{y}> \quad \forall\, x \in X$$

Tomando o ínfimo em X do lado esquerdo da desigualdade vem:

$$\inf_{x \in X} \{f(x) + <(-\gamma), g(x)>\} \geq v(\bar{y}) - <\gamma,y>$$

ou seja $w(-\gamma) \geq v(\bar{y}) - <\gamma,y>$ provando (39) ||.

Esta proposição será usada largamente no capítulo seguinte, como hipótese para obtenção de uma série de resultados importantes. Ela é válida no sentido contrário sem convexidade, este resultado porém, não será aqui demonstrado.

Daremos agora duas definições do que será chamado de estabilidade do problema primal. A primeira delas (estabilidade global ou simplesmente estabilidade) é mais restritiva e garante uma série de resultados importantes. A segunda, que é a definição de estabilidade adotada por Geoffrion |71| é menos restritiva e precisa da hipótese de convexidade para garantir resultados mais fortes.

40 - <u>Definição</u>: Suponha $v(0)$ finito. O <u>problema (P) é estável</u> se a função perturbação v, a ele associada, admite um subgradiente em $y = 0$.

41 - <u>Definição</u>: O problema (P) é <u>estável segundo Geoffrion</u> se $v(0)$ é finito, e existe um escalar $M > 0$ tal que:

$$\frac{v(0) - v(y)}{\|y\|} \leq M \quad (\forall\, y \neq 0) \quad (y \in R^m)$$

O resultado abaixo relaciona as duas definições.

42 - <u>Teorema</u>: Se (P) é estável, então (P) é estável segundo Geoffrion.

<u>Prova</u>: Seja $\gamma \in R^m$ um subgradiente de v em $y = 0$. Então,

43 $$v(y) \geq v(0) + \langle\gamma,y\rangle \quad \forall\, y \in R^m$$

Em particular (43) é válida para $y \neq 0$. Logo pode-se escrever que:

44 $$v(0) - v(y) \leq \langle-\gamma,y\rangle \quad \forall\, y \neq 0$$

Como pela desigualdade de Cauchy-Schwartz

$\langle-\gamma,y\rangle \leq \|\gamma\| \cdot \|y\|$ então

$\dfrac{v(0) - v(y)}{\|y\|} < \|\gamma\| \quad y \neq 0$ concluindo a

prova ||.

Assim, se v admite um subgradiente na origem, verifica-se pelo teorema (42), que esta não pode decrescer infinitamente rápido em nenhuma direção de perturbação, ou seja, existe um escalr M > 0 tal que a expressão da Def.(41) é verdadeira qualquer que seja a perturbação considerada.

A implicação deste teorema no sentido contrário, não é verdadeira em geral, como podemos ver no seguinte exemplo gráfico:

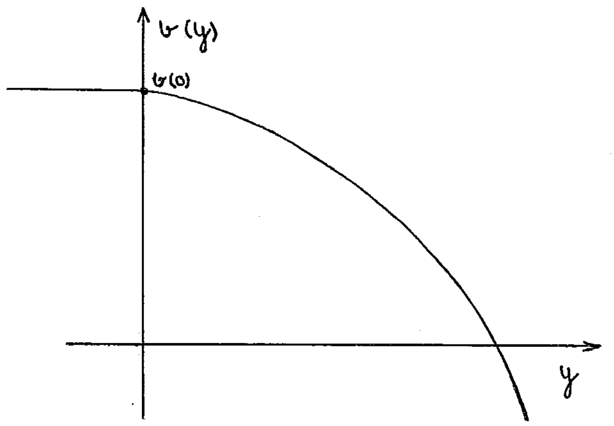


FIG-2

Neste exemplo (P) é estável segundo Geoffrion, porém a função perturbação a ele associada não admite subgradiente em $y = 0$.

Além dessas duas definições de estabilidade, existe o conceito de "localmente estável".

45 - <u>Definição</u>: (P) é <u>localmente estável</u> se $v(0)$ é finito e $\exists \delta > 0$ e $M \geq 0$ $(\delta, M \in R)$ tais que:

46
$$\frac{v(0) - v(y)}{\| y \|} \leq M \quad (\forall\ y \in B_\delta(0) \text{ e } y \neq 0)$$

Na figura seguinte são apresentadas as relações existentes entre os três conceitos de estabilidade, e as hipóteses necessárias para que sejam válidas as implicações a presentadas.

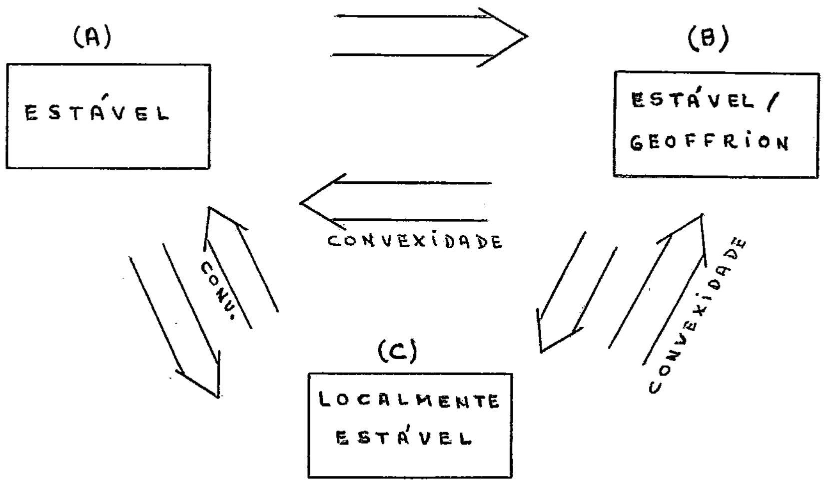


FIG-3

A implicação de (A) → (B) é justificada pelo teorema (42). De (B) → (C) é uma decorrência imediata das definições. A implicação de (C) → (B) e de (B) → (A) com a hipótese de convexidade de v, é justificada pelos lemas 1, 2 e 3 do Apêndice A.

Como vemos, o conceito de estabilidade global ou simplesmente estabilidade é o mais restritivo. Ele implica diretamente em estabilidade segundo Geoffrion e estabilidade local. Basta a convexidade de v para que as implicações sejam válidas no sentido contrário.

Mais adiante veremos como estabilidade é um conceito relevante para os principais resultados de dualidade.

Voltamos a discutir esse quadro no Capítulo III.

Na próxima seção serão discutidos os principais resultados de dualidade.

Seção 4 - DUALIDADE

Antes de passarmos a discussão dos dois teoremas básicos de dualidade, apresentaremos um teorema de otimalidade que fornece a base necessária para caracterizar e interpretar os vetores multiplicadores ótimos. Dos teoremas apresentados nesta seção, veremos somente a prova do teorema de Dualidade Fraca. As provas dos demais teoremas serão vistas na próxima seção.

50 - Teorema (otimalidade): Suponha que (P) tem uma solução ótima. Então, existe um vetor multiplicador ótimo, se e somente se (P) é estável; e u é um vetor multiplicador ótimo para (P) se e somente se $-u$ é subgradiente de v em $y = 0$.

O primeiro resultado deste teorema, apresenta estabilidade como uma condição necessária e suficiente para a existência de um vetor $u \in R^m$ tal que o par (x,u) satisfaz as Condições de Otimalidade para (P) com algum $x \in X$. Qualquer condição de qualificação de vínculos implica uma estabilidade e consequentemente na existência de um v.m.o. como observou Geoffrion |71|.

A condição de qualificação de Slater por exemplo, supõe a existência de algum $\bar{x} \in X$ tal que $g(\bar{x}) < 0$. Este resultado é suficiente para garantir que (P) é estável no caso convexo.

Se (P) não foi convexo, condições de qualificação de vínculos são difíceis de serem encontradas e em alguns casos impossível. Porém, se f for suficientemente bem comportada, o problema poderá ser estável independentemente do comportamento dos vínculos (por exemplo, f constante).

Caso (P) tenha solução, condições que garantam estabilidade são relevantes pois implicam pelo teorema (50) na existência de um vetor multiplicador ótimo para (P), e consequentemente em Condições de Otimalidade.

A segunda parte do teorema, nos permite interpretar e caracterizar um vetor multiplicador ótimo.

Suponhamos que $\bar{u}$ é um v.m.o. para (P), e que o problema foi perturbado com uma perturbação θy onde $\theta>0$ e $y \in R^m$ $(\theta \in R)$. Então o problema perturbado por θy será:

$$\min_{x \in X} f(x) \text{ sujeito a } g(x) \leqq \theta y$$

Como $\bar{u}$ é um v.m.o. para (P), pelo teorema (50), temos que:

$$v(\theta y) \geqq v(0) - \theta\langle\bar{u},y\rangle, \; \forall\, \theta \geqq 0,$$

ou seja, $-\bar{u}$ é subgradiente de v em y = 0. Porém como $v(\theta y)$ é o valor ótimo do problema perturbado conclue-se que

$$v(0) - \theta \langle\bar{u},y\rangle$$

fornece um limite inferior para este valor. Além do mais, tomando o limite quando $\theta \to 0^+$, obtém-se a derivada direcional de v na direção y, ou seja:

$$\frac{d^+v(\theta y)}{d\theta} \geqq - \langle\bar{u},y\rangle$$

Se y é um vetor unitário onde todas as componentes são nulas, exceto a componente j temos que:

$$\frac{d^+v(\theta y)}{d\theta} \geqq - \bar{u}j, \text{ ou seja}$$

$-\bar{u}j$ é o limitante inferior da taxa marginal de variação do valor ótimo de (P), quando há um acréscimo na j-ésima restrição. Assim, o conjunto de subgradientes da função perturbação na origem, pode ser caracterizado em termos do conjunto de v.m.o. para (P). Passemos agora a discussão dos teoremas de dualidade.

51 - <u>Teorema</u>: <u>Dualidade Fraca</u>. Seja $\bar{x}$ viável em (P) e $\bar{u}$ viável em (D). Então o valor da função objetivo de (D) calculada em $\bar{u}$ é menor ou igual ao valor da função objetivo de (P) calculada em $\bar{x}$.

A demonstração do teorema é imediata. Senão vejamos: Seja $\bar{x}$ viável em (P) e $\bar{u}$ viável em (D). Sabe-se que:

$$w(\bar{u}) = \inf_{x \varepsilon X} \{f(x) + \langle \bar{u}, g(x) \rangle\} \leq$$

$$f(\bar{x}) + \langle \bar{u}, g(\bar{x}) \rangle$$

Como $\bar{x}$ e $\bar{u}$ são viáveis ($\langle \bar{u}, g(\bar{x}) \rangle \leq 0$)

resulta:

$$w(\bar{u}) \leq f(\bar{x}) + \langle \bar{u}, g(\bar{x}) \rangle \leq f(\bar{x})$$

completando a prova.

Um resultado imediato deste teorema é que qualquer solução viável de (D), forneçe um limitante inferior para o valor ótimo de (P), e qualquer solução viável de (P), fornece um limitante superior para o valor ótimo de (D). No caso de algorítmos implementáveis para a resolução de (P) ou (D), este resultado é bastante útil pois pode funcionar como um cri tério de parada para o algorítmo: se em alguma iteração os valores das funções objetivo de (P) e (D) forem iguais, então as soluções serão ótimas para (P) e (D). Ou seja, a igualdade dos valores ótimos de (P) e (D) implica (pelo corolário (31)) diretamente em otimalidade. Em geral, a igualdade dos valores ótimos não ocorre, dando origem ao "gap" de dualidade, ou seja, a diferença entre os valores ótimos de (P) e (D).

Condições que garantam a igualdade dos valores ótimos e consequentemente a não existência do gap serão vistas no teorema seguinte.

52 - Teorema: Dualidade Forte.

Se (P) é estável, então:

a) (D) tem solução ótima;

b) Os valores ótimos de (P) e (D) são iguais;

c) $\bar{u}$ é uma solução ótima de (D) se e somente se $-\bar{u}$ é subgradiente de v em $y = 0$;

d) Toda solução ótima $\bar{u}$ de (D) caracteriza o conjunto de todas as soluções ótimas de (P), como as que minimizam $f + \langle\bar{u},g\rangle$ em X; que satisfazem a condição de viabilidade $g(\bar{x}) \leq 0$ e a condição de complementaridade $\langle\bar{u},g(\bar{x})\rangle = 0$.

Buscar soluções para problemas estáveis através do seu dual é plenamente justificado pelos resultados a) e d) deste teorema.

Se $\bar{u}$ uma solução ótima do dual, o resultado d) garante que o conjunto de todas as soluções de (P) pode ser determinado.

Na realidade o resultado d) pode ser formulado em termos de Condições de Otimalidade para (P).

Seção 5 - DEMONSTRAÇÃO DOS TEOREMAS DE OTIMALIDADE E DUALIDADE FORTE

Os lemas que apresentamos a seguir, servirão de base para demonstração dos teoremas (50) e (52).

53 - Lema: Suponhamos $v(0)$ finito. Então, $\bar{u}$ é uma solução ótima de (D) e os valores ótimos de (P) e (D) são iguais, se e somente se $-\bar{u}$ é subgradiente de v em $y = 0$.

Prova: $(\Longleftarrow)$

Se $v(0)$ é finito e $-\bar{u}$ é um subgradiente de v em $y = 0$, então pela proposição (38) $\bar{u} \geqq 0$.

Segue ainda que:

$$v(y) \geqq v(0) - \langle \bar{u}, y \rangle \quad \forall\, y \in R^m$$

Fazendo $y = g(x)$ onde $x \in X$ vem:

54 $$v(g(x)) \geq v(0) - \langle \bar{u}, g(x) \rangle \quad \forall\, x \in X$$

Como $f(x) \geq v(g(x))$ $(\forall\, x \in X)$ de (54) vem:

$$f(x) \geq v(0) - \langle \bar{u}, g(x) \rangle \quad \forall\, x \in X$$

Ou ainda:

55 $$f(x) + \langle \bar{u}, g(x) \rangle \geq v(0) \quad \forall\, x \in X$$

Tomando agora o ínfimo em X do lado esquerdo da desigualdade vem:

56 $$w(\bar{u}) \triangleq \inf_{x \in X} \{f(x) + \langle \bar{u}, g(x) \rangle\} \geq v(0)$$

Pelo Teorema 51 (Dualidade Fraca) conclue-se que $\bar{u}$ é uma solução ótima de (D) e os valores ótimos de (P) e (D) são iguais.

($\Longrightarrow$) Seja $\bar{u}$ uma solução ótima de (D) e suponhamos que o valor ótimo de (D), iguala o valor ótimo de (P).

Então:

$$\inf_{x \in X} \{f(x) + \langle \bar{u}, g(x) \rangle\} = v(0)$$

Se $y \in Y$, $x \in X$ e $g(x) \leqq y$ então:

57 $$\langle \bar{u}, g(x) \rangle \leqq \langle \bar{u}, y \rangle \quad \text{pois } \bar{u} \geqq 0$$

Logo pode-se escrever que:

58 $$f(x) + \langle \bar{u}, y \rangle \geq \inf \{f(x) + \langle \bar{u}, g(x) \rangle\} =$$
$$v(0) \quad (\forall x \in X \mid g(x) \leqq y)$$

Ou ainda:

$$f(x) \geq v(0) - \langle \bar{u}, y \rangle \quad (\forall x \in X \mid g(x) \leqq y)$$

Tomando o ínfimo em X do lado esquerdo da desigualdade para cada $y \in Y$ vem:

$$\inf_{x \in X} f(x) \geq v(0) - \langle \bar{u}, y \rangle \quad (\forall\, y \in Y)$$

$$(\forall\, x \in X \mid g(x) \leqq y)$$

Ou seja:

$$v(y) \geq v(0) - \langle \bar{u}, y \rangle \quad (\forall\, y \in Y)$$

Mas se $y \notin Y \quad v(y) = +\infty$

Logo $v(y) \geq v(0) - \langle \bar{u}, y \rangle \quad \forall\, y \in R^m$, provando que $-\bar{u}$ é um subgradiente de v em $y = 0$ ||.

O resultado seguinte fornece a relação entre vetores multiplicaodres ótimos para (P) e o conjunto de subgradientes de v em $y = 0$.

59 - Lema: Se (P) tem uma solução ótima, então, u é um v. m. o. para (P) se e somente se $-u$ é um subgradiente de v em $y = 0$.

Prova: ($\Longrightarrow$) Seja $\bar{u}$ um v. m. o. para (P). Então o par $(\bar{x}, \bar{u})$ satisfaz as Condições de Otimalidade para algum $\bar{x} \in X$. Pelo Corolário (31), $\bar{x}$ é solução ótima de (P), $\bar{u}$ é solução ótima de (D) e $f(\bar{x}) = w(\bar{u})$. Usando agora o lema (53) conclue-se que $-\bar{u}$ é subgradiente de v em $y = 0$.

($\Longleftarrow$) Seja $\bar{x}$ uma solução ótima de (P) e $-\bar{u}$ um subgradiente de v em $y = 0$. Como (P) tem solução ótima $v(0)$ é finito; logo pelo lema (53), $\bar{u}$ é uma solução ótima de (D) e $f(\bar{x}) = w(\bar{u})$. Usando agora o Colorário (31) conclue-se que o par $(\bar{x}, \bar{u})$ satisfaz as Condições de Otimalidade para (P), ou seja, $\bar{u}$ é um v. m. o. para (P).

Na demonstração deste lema, ficou evidenciada a importância da relação entre Ponto de Sela e Condições de Otimalidade dada pela proposição (28). Ela serve de ligação entre os resultados apresentados em termos de Ponto de Sela (Teorema-14) e o Colorário (31) que trabalha com Condições de Otimalidade.

O próximo lema apresenta mais um resultado de Condições de Otimalidade para (P).

60 - Lema: Suponha que v é finita em $y = 0$, e que γ é um subgradiente neste ponto. Então $\bar{x}$ é uma solução ótima de (P) se e somente se $(\bar{x},-\gamma)$ satisfaz as COndições de Otimalidade para (P).

Prova: $(\Longrightarrow)$

Suponhamos que: $v(0)$ é finito, γ é um subgradiente de v em $y=0$ e $\bar{x}$ é uma solução ótima para (P). Pelo lema (53) tem-se que $-\gamma$ é uma solução ótima para (D) e $f(\bar{x}) = w(-\gamma)$. Através do Colorário (31) conclue-se então que o par $(\bar{x},-\gamma)$ satisfaz as Condições de Otimalidade para (P).

$(\Longleftarrow)$ A prova neste sentido é imediata em vista do Colorário (31).

Uma relação direta entre estabilidade e existência de solução ótima para (D), será o tema do próximo lema.

61 - Lema: Suponha o valor ótimo do primal igual ao valor ótimo do dual. Então (P) é estável, se e somente se (D) tem solução.

<u>Prova</u>: Se o valor ótimo do primal não é finito, então (P) não é estável e (D) não tem solução. Se o valor ótimo do primal é finito por hipótese e pelo lema (53), $\bar{u}$ resolve (D) se e somente se $-\bar{u}$ é subgradiente de v em y = 0 concluindo a prova||

Analisando os resültados dos lemas apresentados, pode-se concluir que os vetores multiplicadores ótimos para (P), são exatamente o simétrico dos subgradientes de v na origem.

A existência de uma solução ótima para (D) que garanta a igualdade dos valores ótimos de (P) e (D), está intimamente ligada a estabilidade, e portanto a existência de subgradientes da função perturbação v na origem.

Assim, se os valores ótimos de (P) e (D) são iguais, $\bar{u}$ será uma solução ótima para (D) se $-\bar{u}$ for um subgradiente de v em g = 0. Se (P) tem uma solução ótima e é estável, então: existe um vetor multiplicador ótimo, o problema dual tem solução e Condições de Otimalidade são obtidas. Vale salientar ainda que, a existência de uma solução ótima para (D) é apenas uma condição necessária para que Condições de Otimaliadde sejam obtidas.

Assim (D) pode ter uma solução ótima, e Condições de Otimalidade são serem verificadas, o que pode ocorrer caso (P) não tenha solução ou os valores ótimos não coincidam.

Os exemplos que se seguem, ilustram o segundo caso:

Exemplo 1: Sejam f e g como abaixo:

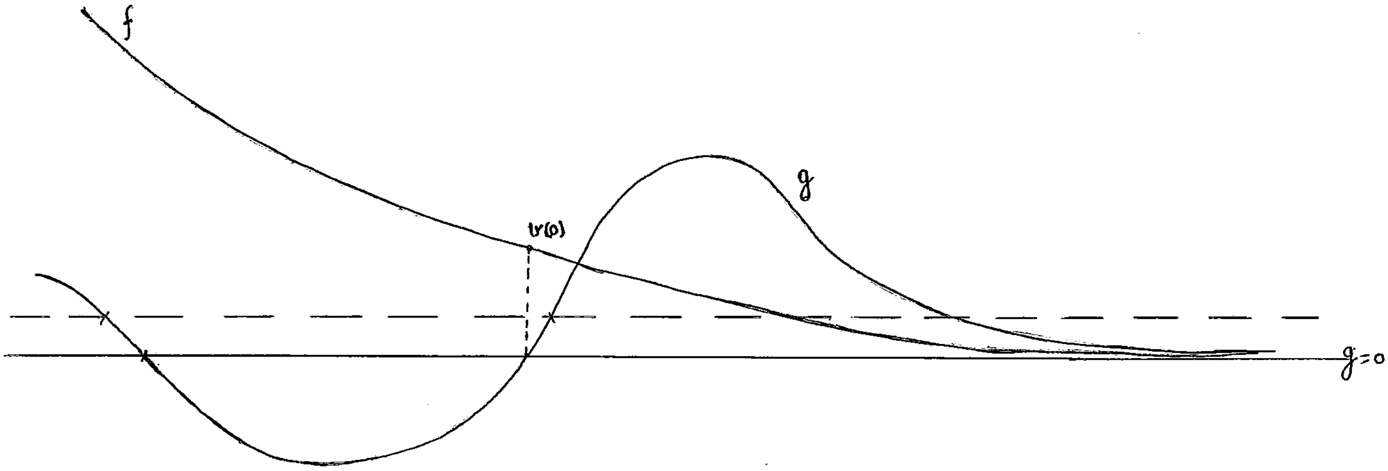


FIG-4

A função perturbação associada ao problema acima será:

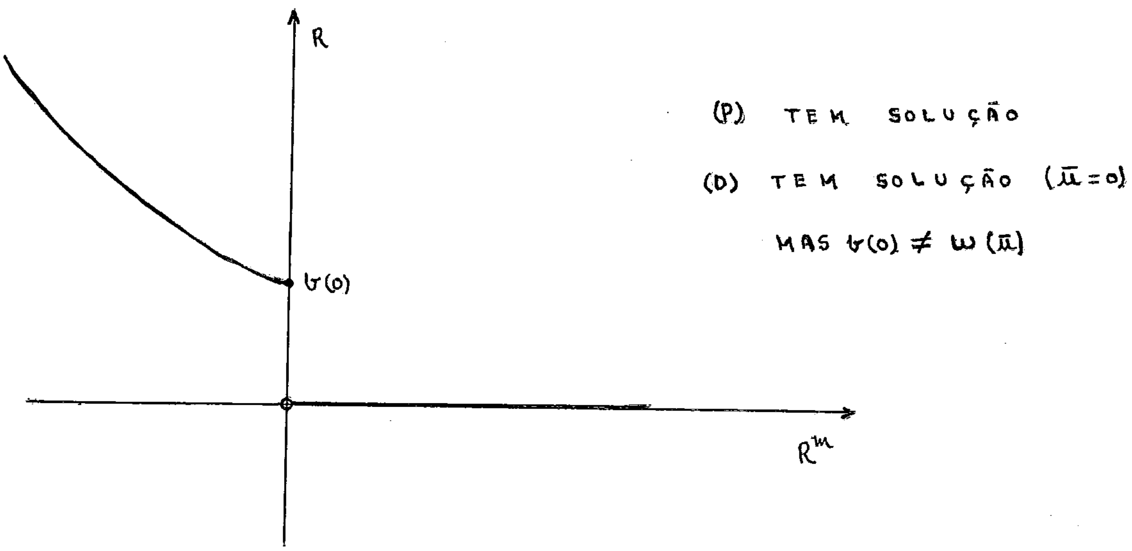


FIG-5

Exemplo 2:

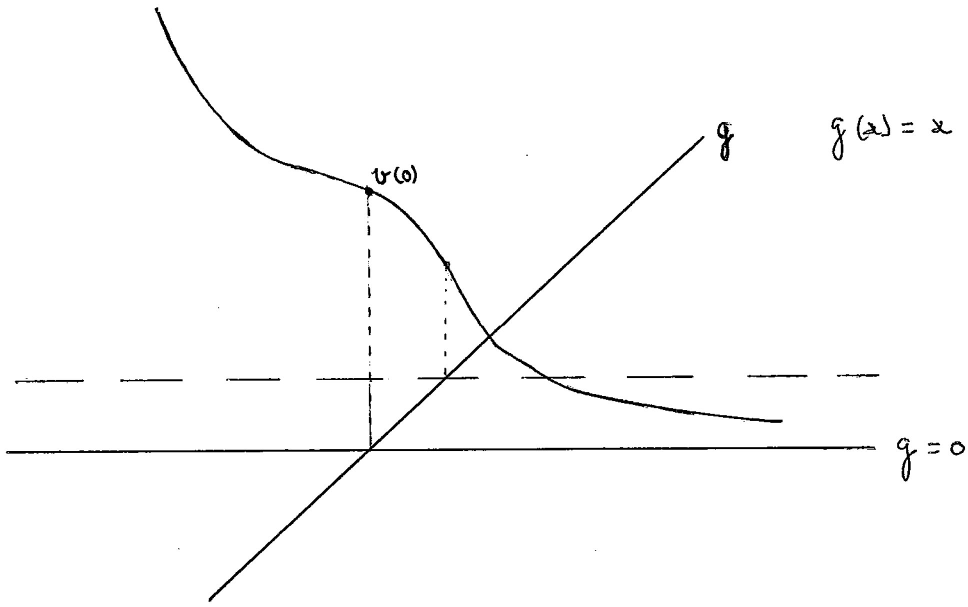
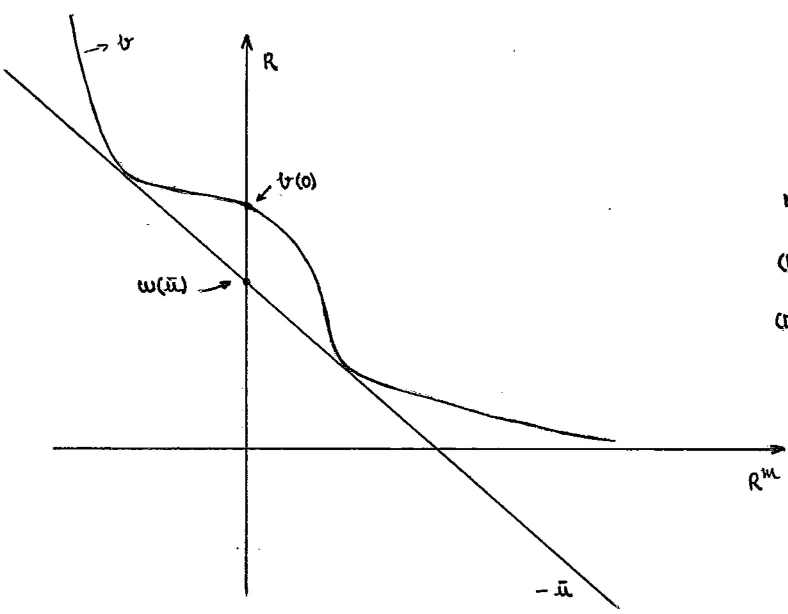


Fig-6

Neste caso o gráfico da função perturbação associada ao proble ma será:



NESTE EXEMPLO ($v(\cdot) = f(\cdot)$)

(P) TEM SOLUÇÃO

(D) TEM SOLUÇÃO

MAS $v(0) \neq w(\bar{u})$

Fig-7

Isto posto, passemos a demonstração dos teoremas (50) e (52).

Prova do Teorema 50: Otimalidade.

A prova é imediata em vista do lema (59) e da relação entre estabilidade e existência de subgradiente de v na origem (Definição (40)).

Prova do Teorema 52: Dualidade Forte.

Suponha que (P) é estável. Então os resultados a), b) e c) ficam demonstrados pelo lema (53). A parte d) fica demonstrada pelo lema (60) e pelo resultado c).

Seção 6 - CONCLUSÃO

O estudo que fizemos nesse capítulo permitiu apresentar, seguindo a linha de Geoffrion, os resultados da Teoria Geral de Dualidade sem hipóteses adicionais.

A interpretação dos problemas primal (P) e dual (D) foi desenvolvida com base nas Condições de Ponto de Sela elaboradas por Lasdon |68|.

Vimos que, a existência de solução ótima para os problemas (P) e (D), e a igualdade dos valores ótimos desses problemas, está diretamente ligada ao conceito de estabilidade. Este conceito, desenvolvido com base na função perturbação v de (P) é fundamental para os principais resultados de Dualidade, como foi visto nas seções 3 e 4, através dos teoremas de Otimalidade (II-50) e Dualidade Forte (II-52).

Devido a isso, buscar condições que garantam estabilidade, torna-se assim um ponto fundamental para os principais resultados deste capítulo.

No próximo capítulo, trabalharemos com um problema particular (com vínculos positivos ($g(x) \geqq 0 \ \forall x \in X$)) buscando encontrar condições que garantam otimalidade de (P) e (D), a partir de hipóteses mais fracas. A hipótese de que a função perturbação v é semi-contínua inferiormente na origem, será usada largamente na obtenção dos resuldados de otimalidade.

C A P I T U L O III

DUALIDADE EM PROBLEMAS A VÍNCULOS POSITIVOS E O MÉTODO DE PENALIDADES

Seção 1 - INTRODUÇÃO

Procuraremos neste capítulo, desenvolver e aprofundar a teoria de dualidade apresentada no capítulo anterior, para uma classe particular de problemas (Problemas a vínculos positivos - P.V.P.).

Veremos na seção 2 que estabilidade em Problemas a Vínculos Positivos, pode ser garantida à partir de resultados menos restritivos e estudaremos as propriedades da função perturbação associada a esta classe de problemas.

A busca de condições que garantam a otimalidade dos problemas (P) e (D) será o escopo da seção 3.

Mais uma vez estas condições envolvem a função perturbação (v) de (P), e a hipótese de que v é semi-contínua inferiormente na origem, é básica para a maioria dos resultados de otimalidade.

Veremos na seção 4 a relação entre Problemas à Vínculos Positivos e o método das Penalidades Exteriores. Estudaremos dois métodos usuais de penalidades exteriores (Zangwill/Polack), e apresentaremos um método desenvolvido à partir do Problema à Vínculos Positivos (equivalente ao problema original (II-1)).

Em vista da equivalência entre P.V.P. e o método das Penalidades Exteriores apresentado, a Otimalidade de (P) e (D) será obtida à partir de um teorema que garante a convergência do método apresentado. Usaremos resultados da teoria de Dualidade para mostrar que o método converge.

Seção 2 - ESTABILIDADE E PROPRIEDADE DA FUNÇÃO PERTURBAÇÃO EM PROBLEMAS À VÍNCULOS POSITIVOS

Nesta seção introduziremos os Problemas à Vículos Positivos, e veremos como um problema geral (P) (II-1), pode ser transformado em um Problema à Vínculos Positivos equivalente.

Estudaremos em seguida estabilidade em Problemas à Vínculos Positivos, e veremos como ela pode ser garantida à partir de hipóteses menos restritivas.

Por ser fundamental para a maioria dos resultados de otimalidade (Seção 3), abordaremos também as propriedades da função perturbação, associada a um Problema à Vínculos Positivos.

1 - Definição: (P) é um problema à vínculos positivos se $g(x) \geqq 0 \ \forall \ x \in X$. Isto posto, tem-se que o conjunto de perturbações viáveis (Y), para um P.V.P. , será então todo ortante positivo (R^{m+}). Senão vejamos:

Por definição $Y = \{y \in R^m | g(x) \leqq y$, para algum $x \in X\}$.

Seja $y \in R^m$ tal que $y_j < 0$ para algum $j \ (y \not\geqq 0)$.

Como $g(x) \geqq 0 \ \forall \ x \in X$, então $\nexists \ x \in X$ tal que $g(x) \leqq y$.

Logo $y \notin Y$ concluindo a prova.

Se (P) é um P.V.P. tem-se para o valor da função perturbação associada a (P):

$$v(y) = +\infty \; \forall \; y \not\geq 0$$

De fato, se $y \not\geq 0$, então:

$\nexists \; x \in X$ tal que $g(x) \leqq y$ pois

$(g(x) \geqq 0, \; \forall \; x \in X)$

$$\text{Logo } v(y) = \inf_{x \in X} \{f(x) \mid g(x) \leqq y\}$$

$$= \inf_{x \in X} \{\phi\} (\text{pois } y \geqq 0 \text{ e } g(x) \geqq 0 \; \forall \; x \in X)$$

$$= +\infty \; \forall \; y \not\geqq 0 \; , \; y \in R^m.$$

Qualquer problema, pode ser transformado em um Problema a Vínculos Positivos equivalente. O procedimento mais usual consiste no seguinte:

Define-se novas funções vínculos como se segue:

$$\bar{g}_i(x) = \begin{cases} g_i(x) & \text{se } g_i(x) > 0 \quad i = 1,2,\ldots,m \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Então $\bar{g}(x) \triangleq (\bar{g}_1(x), \bar{g}_2(x), \ldots, \bar{g}_m(x))$ e $\bar{g}(x) \geqq 0 \; \forall \; x \in X$.

O problema

$$\min_{x \in X} f(x) \text{ s.a. } \bar{g}(x) \leqq 0 \; ,$$

será um problema à vínculos positivos, equivalente ao problema original.

Em todo o capítulo, vamos supor que (P) é um problema à vínculos positivos.

Para este tipo de problema, resultados mais fortes serão obtidos.

O primeiro deles apresenta a identidade entre estabilidade global e estabilidade segundo Geoffrion |7|.

Ele vem no teorema seguinte.

2 - Teorema: (P) é estável segundo Geoffrion, se e somente se (P) é globalmente estável.

Prova: Suponha (P) estável segundo Geoffrion (II-41). Então, $v(0)$ é finito e existe um escalar $M > 0$ tal que:

$$\frac{v(0) - v(y)}{\| y \|} \leq M \quad \forall \; y \neq 0,\; y \in R^m$$

Como $\| y\| \geq 0$ pode-se escrever:

3 $$v(0) - v(y) \leq M \, \| y \| \quad \forall \; y \in R^m$$

Para $y \geqq 0$ tem-se

$$\| y \| \leq \sqrt{m} \,.\, \max_{i=1,2,\ldots m} |y_i|$$

$$= \sqrt{m} \,.\, \max_{i=1,2,\ldots m} y_i \quad \forall \; (y \geqq 0)$$

$$\leq \sqrt{m} \,.\, \sum_{i=1}^{m} y_i$$

$= \sqrt{m} \,.\, \langle e, y \rangle$ onde $e \in R^m$ é o vetor com todas as componentes iguais a 1.

Então de (3) obtemos:

4 $$v(0) - v(y) \leq M \cdot \sqrt{m} \cdot \langle e.y \rangle$$

Logo

5 $$v(y) \geq v(0) - M.\sqrt{m}.\langle e,y \rangle \quad (\forall\ y \geqq 0,\ y \in R^m)$$

Como para $y \not\geqq 0$ $v(y) = +\infty$ e (5) continua válida, o vetor $-(M.\sqrt{m}).e \in R^m$ é um subgradiente de v em $y = 0$. Logo (P) é estável (globalmente).

A 2ª parte do teorema é equivalente ao Teorema (II-42) ||.

Outro teorema onde estabilidade global é garantida à partir de hipóteses mais fracas, é o que vem a seguir.

6 - <u>Teorema</u>: Se (P) é localmente estável, e (D) é essencialmente viável, então (P) é estável (globalmente).

<u>Prova</u>: Por hipótese tem-se que $v(0)$ é finito e:

$$(\exists\ \varepsilon > 0)\ (\exists\ M \geq 0)\ (\forall\ y \in B_\varepsilon(0),\ y \neq 0)$$

7 $$\frac{v(0) - v(y)}{\|y\|} < M$$

e ainda

8 $$w(\bar{u}) \geq K \quad \text{onde } K \in R \quad \text{e} \quad (\bar{u} \in R^m,\ \bar{u} \geqq 0)$$

Sabe-se ainda que:

$$f(x) + \langle \bar{u}, g(x) \rangle \geq w(\bar{u}) \geq K \quad \forall\ x \in X$$

Logo, pode-se escrever que:

9 $$\inf_{x \varepsilon X} \{f(x) + \langle \bar{u}, g(x) \rangle\} \geq K$$

Então, dado $\bar{y} \;\varepsilon\; R^m$, $\bar{y} \geqq 0$ resulta:

$$K \leq \inf_{x \varepsilon X} \{f(x) + \langle \bar{u}, g(x) \rangle\} \quad \text{por (9)}$$

$$\leq \inf_{x \varepsilon X \,|\, g(x) \leqq \bar{y}} \{f(x) + \langle \bar{u}, g(x) \rangle\}$$

$$\leq \inf_{x \varepsilon X \,|\, g(x) \leqq \bar{y}} \{f(x) + \langle \bar{u}, \bar{y} \rangle\} \quad \text{pois } \bar{y} \geqq 0 \text{ e } g(x) \leqq \bar{y}$$

$$= v(\bar{y}) + \langle \bar{u}, \bar{y} \rangle \quad \text{por definição de } v$$

Ou ainda:

$$v(\bar{y}) + \langle \bar{u}, \bar{y} \rangle \geq K \quad (\forall \;\bar{y} \;\varepsilon\; R^m,\ \bar{y} \geqq 0)$$

Como $v(0)$ é finito por hipótese, segue:

$$v(0) - v(\bar{y}) \leq v(0) + \langle u, \bar{y} \rangle - K \quad (\forall \;\bar{y} \;\varepsilon\; R^m,\ \bar{y} \geqq 0)$$

e para $\bar{y} \notin B_{\varepsilon}(0)$ vem:

$$\frac{v(0) - v(\bar{y})}{\|\bar{y}\|} \leq \frac{v(0) - K}{\|\bar{y}\|} + \frac{\langle \bar{u}, \bar{y} \rangle}{\|\bar{y}\|} \quad (\|\bar{y}\| > \varepsilon)$$

$$\leq \frac{v(0) - K}{\|\bar{y}\|} + \|\bar{u}\| \quad \text{por Cauchy-Swartz}$$

$$\leq \frac{v(0) - K}{\varepsilon} + \|\bar{u}\| \quad \text{pois}$$

$$v(0) \geqq w(\bar{u}) \geq K \text{ e } \|\bar{y}\| > \varepsilon$$

provando que:

$$\frac{v(0) - v(\bar{y})}{\|\bar{y}\|} \leq K1 \text{ para algum } K1 > 0 \text{ e } \bar{y} \notin B_{\varepsilon}(0) \tag{10}$$

Como para $\bar{y} \in B_{\varepsilon}(0)$ vale (7), e em vista de (10), (P) é estável segundo Geoffrion.

Pelo Teorema (III-2) conclue-se finalmente que (P) é globalmente estável.||

Estes dois teoremas de estabilidade são valiosos na aplicação da teoria apresentada no capítulo II à problemas à vínculos positivos.

Os dois teoremas básicos, Otimalidade e Dualidade Forte, estão baseados na hipótese de que (P) é globalmente estável, ou seja, v admite um subgradiente na origem. Como o teorema de Dualidade Fraca, não necessita de nenhuma hipótese relacionada com estabilidade (ele é válido desde que (P) e (D) tenham solução), toda teoria apresentada no capítulo II continua válida com hipóteses bem mais fracas.

A razão forte para este fato, é que as funções perturbação associadas aos problemas à vínculos positivos, possuem características bem particulares como veremos a seguir.

Como v assume o valor $(+\infty)$ para perturbações não positivas $(y \not\geq 0)$, então ela é descontínua na origem.

Tal descontinuidade porém não cria grandes problemas desde que v seja semi-contínua inferiormente na origem, como veremos na seção 3.

Assim, na maioria dos casos de problemas estáveis, o gráfico da função perturbação associada ao problema, é como o da figura abaixo.

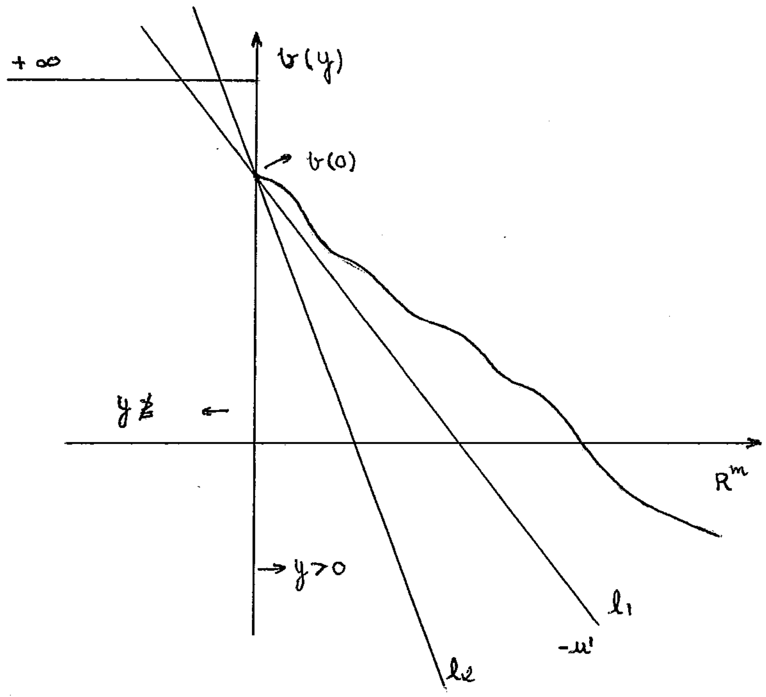


Fig-1

Observando a figura, conclue-se que (D) tem infinitas soluções ótimas. As retas ℓ_1 e ℓ_2, caracterizadas por seus coeficientes angulares $-u^1$ e $-u^2$ respectivamente, são suportes ao gráfico de v em v(0), ou seja, os dois valores u^1 e u^2 da variável dual, fornecem um mesmo valor para a função objetivo de (D) (no caso igual a v(0)).

Assim, se $\bar{u}$ é uma solução ótima de (D), qualquer $u \geqq \bar{u}$ também será ótimo em (D) (no exemplo $u^2 > u^1$).

Levando-se em conta o fato de que se (P) é estável, o conjunto de subgradientes de v em y = 0 (δ v(0)), é exatamente o conjunto de soluções ótimas para (D) (II-53), pode-se afirmar que:

11 - Lema : Suponha (P) estável. Então $\delta\, v(0)$ é ilimitado, fechado e convexo.

Prova: i) Ilimitado

Seja $\alpha \in R^m$, um subgradiente de v em $y = 0$.
Então:

12 $$v(y) \geq v(0) + \langle \alpha, y \rangle \quad (\forall\, y \in R^m)$$

Seja o vetor $\alpha' \in R^m$ tal que $\alpha' \leqq \alpha$.
Então, para $y \geqq 0$ segue que:

$$\langle \alpha', y \rangle \leqq \langle \alpha, y \rangle$$

Logo em (12) pode-se escrever que:

13 $$v(y) \geq v(0) + \langle \alpha', y \rangle \quad (\forall\, y \geqq 0) \quad (y \in R^m)$$

Como para $y \not\geqq 0$, $v(y) = +\infty$ e (13) continua válida, pode-se escrever finalmente que:

14 $$v(y) \geq v(0) + \langle \alpha', y \rangle \quad (\forall\, y \in R^m), \text{ ou seja } \alpha'$$
é um subgradiente de v em $y = 0$

Assim, qualquer vetor $\alpha' \leqq \alpha$ é também um subgradiente de v em $y = 0$, provando assim que $\delta v(0)$ é ilimitado.

ii) Convexo

Sejam α^1, $\alpha^2 \in \delta v(0)$ e $\lambda \in [0,1]$.

15 $$v(y) \geq v(0) + \langle \alpha^1, y \rangle \quad \forall\; y \in R^m \text{ e}$$

16 $$v(y) \geq v(0) + \langle\alpha^2, y\rangle \quad \forall \; y \in R^m$$

Multiplicando (15) por λ e (16) por $(1 - \lambda)$ vem:

$$\lambda v(y) \geq \lambda v(0) + \lambda\langle\alpha^1, y\rangle \; \forall \; y \in R^m$$

$$(1-\lambda) \; v(y) \geq (1-\lambda) \; v(0) + (1-\lambda).\langle\alpha^2, y\rangle \; \forall \; y \in R^m$$

Somando as desigualdades resulta:

$$v(y) \geq v(0) + \langle(\lambda\alpha^1 + (1-\lambda) \; \alpha^2), \; y\rangle \; y \in R^m \, ,$$

provando que o vetor

$$(\lambda\alpha^1 + (1-\lambda) \; \alpha^2) \; \in \; \delta v(0)$$

iii) Fechado

Seja $(\gamma^K)_{K\in\mathbb{N}}$ uma sequencia em R^m, convergente, com limite $\bar{\gamma}$, tal que:

$$(\gamma^K)_{K\in\mathbb{N}} \; \in \; \delta v(0)$$

Como $\gamma^K \in \delta v(0)$ vem:

$$v(y) \geq v(0) + \langle\gamma^K, y\rangle \quad \forall \; y \in R^m, \; \forall \; K \in \mathbb{N}$$

Segue ainda que:

$$v(y) \geq \lim_{K\to\infty} (v(0) + \langle\gamma^k, y\rangle) \quad \forall \; y \in R^m$$

Ou ainda:

$$v(y) \geq v(0) + \lim_{K\to\mathbb{N}} \langle\gamma^k, y\rangle \; \forall \; y \in R^m$$

$$\geq v(0) + \langle \bar{\gamma}, y \rangle \;\; \forall \;\; y \in R^m$$

Logo $\bar{\gamma} \in \delta v(0)$, provando que

$\delta v(0)$ é fechado.||.

<u>Obs.:</u> Os itens ii) e iii) são válidos em geral para qualquer função.

Com base nos teoremas apresentados nesta seção, pode-se reformular o quadro de relações entre as três definições de estabilidade.

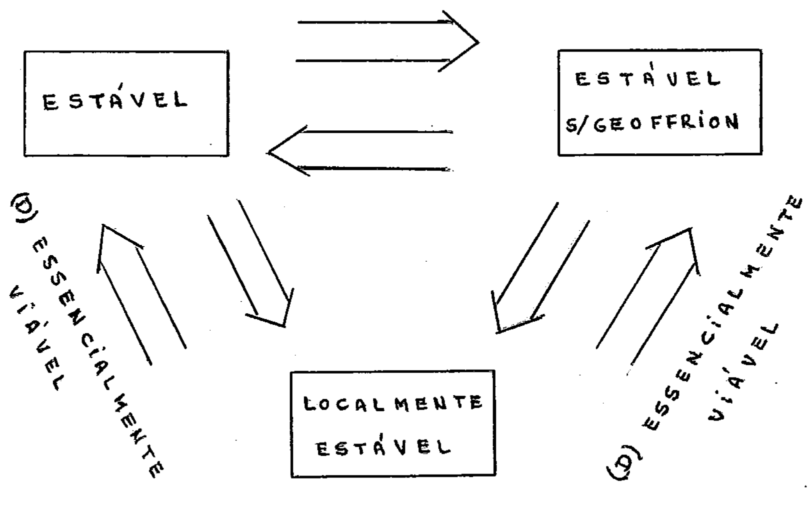


FIG-2

Vale observar aqui que a hipótese de convexidade não está presente em nenhuma das relações entre estabilidade, sendo substituída pela hipótese de que (D) é essencialmente viável.

Desse modo, estabilidade em Problemas à Vínculos Positivos, passa a ser gerantida à partir de uma hipótese mais fraca. Este resultado é relevante, visto que estabilidade é a hipótese central para os Teoremas de Otimalidade e Dualida de Forte, como vimos em (II-50) e (II-52).

Estes dois teoremas e o teorema de Dualidade Fraca (válido se (P) e (D) tem solução), contém os principais resultados de Dualidade, que podem assim ser estendidos para Problemas à Vínculos Positivos, à partir de hipóteses bem menos restritivas.

Na próxima seção, serão vistas condições que garantam a igualdade dos valores ótimos de (P) e (D) em Problemas à Vínculos Positivos.

Seção 3 - CONDIÇÕES DE OTIMALIDADE EM PROBLEMAS À VÍNCULOS POSITIVOS

Procuraremos nesta seção encontrar condições que garantam a igualdade dos valores ótimos de (P) e (D).

Serão apresentadas ainda algumas definições que servirão de base para a elaboração dos teoremas de igualdade dos valores ótimos.

A hipótese de que v é semi-contínua inferiormente na origem será usada largamente nos teoremas que serão apresentados.

Um resultado preliminar de igualdade de valores ótimos é o seguinte:

20 - <u>Teorema</u>: Suponha que (D) é essencialmente viável, $g(x) \geq 0$ em X, e v é semi-contínua inferiormente em $y = 0$.

Então $\sup\limits_{u \in R^{m+}} w(u) = v(0)$

<u>Prova</u>: Basta mostrar que:

$$(\forall\ \beta < v(0))\ (\exists\ \bar{u} \in R^{m+})\ (\forall\ y \geqq 0,\ y \in R^m)$$

21 $$v(y) + \langle\bar{u},y\rangle \geq \beta$$

De fato, pois se $x \in X$ tem-se

$f(x) \geq v(g(x))$ por definição de v

$\geq \beta - \langle\bar{u},g(x)\rangle$ por 21, o que implica em

$f(x) + \langle\bar{u},g(x)\rangle \geq \beta$

Tomando o ínfimo em X da expressão acima resulta:

$w(\bar{u}) \geq \beta$

Logo $(\forall\ \beta < v(0))\ (\exists\ \bar{u} \in R^{m+})$ tal que:

22 $w(\bar{u}) \geq \beta$, o que garante a tese, pois pelo Teorema da Dualidade Fraca

$w(\bar{u}) \leq v(0)\ \ (\forall\ \bar{u} \in R^m)$

Isto posto, mostremos agora (21)

Seja $\hat{u} \in R^m$ tal que $w(\hat{u})$ é finito ((D) essencialmente viável). Então $\forall\ y \geqq 0$, $(y \in R^m)$ tem-se:

23 $$v(y) + \langle\hat{u},y\rangle \geq w(\hat{u})$$

Seja $\beta < v(0)$

Se $\beta \leq w(\hat{u})$, fazendo em (23) $\hat{u}=\bar{u}$ tem-se (21).

Suponhamos $\beta > w(\hat{u})$

Como v é s.c.i. na origem, então:

$v(.) + <\hat{u},.>$ é s.c.i. na origem, e como

$v(0) + <\hat{u},0> > \beta$ tem-se:

$(\exists\ \varepsilon > 0)\ (\forall\ y \in B(0,\varepsilon),\ y \geqq 0)$

24 $\quad v(y) + <\hat{u},y> \ > \beta$

Façamos $\bar{u} = \hat{u} + \frac{2}{\varepsilon}(\beta - w(\hat{u})).e$

onde $e \in R^m$ é o vetor com todas as componentes iguais a 1. Então $(\forall\ y \in B(0,\varepsilon)\ ,\ y \geqq 0)$.

$$v(y) + <\bar{u},y> = v(y) + <\hat{u},y> + \frac{2}{\varepsilon}(\beta - w(\hat{u}).<e,y>$$

$$\geq v(y) + <\hat{u},y> \text{ pois } \beta > w(\hat{u}) \text{ e } y \geqq 0$$

$$> \beta \text{ devido a } (24)$$

Logo $(\forall\ y \in B(0,\varepsilon)\ ,\ y \geqq 0)$

$$v(y) + <\bar{u},y> \ > \beta$$

Se $y \notin B(0,\varepsilon)$ e $y \geqq 0$, segue que:

$$v(y) + <\bar{u},y> = v(y) + <\hat{u},y> + \frac{2}{\varepsilon}(\beta - w(\hat{u})).<e,y>$$

$$\geqq v(y) + <\hat{u},y> + \frac{2}{\varepsilon}(\beta - w(\hat{u})).\frac{\varepsilon}{2} \text{ pois } \|y\| > \varepsilon$$

$$\geq w(\hat{u}) + \beta - w(\hat{u}) \quad \text{devido a } (23)$$

$$= \beta$$

Logo ($\forall\, y \in R^m$), $y \geqq 0$) vale:

$v(y) + \langle \bar{u}, y \rangle \geq \beta$ provando (21) ||.

Na prova deste teorema, ficou evidenciada a importância de v ser semi-contínua inferiormente na origem.

Ele não garante existência de solução do problema dual, porém se este for essencialmente viável, o seu valor ótimo iguala o valor ótimo de (P) ($\sup\limits_{u \geqq 0} w\,(u) = v\,(0)$).

Como veremos mais adiante, este teorema será fundamental para garantir os demais resultados de igualdade dos valores ótimos.

30 - <u>Definição</u>: Uma sequência $(u^K)_{K \in \mathbb{N}}$ em R^m e <u>crescente</u> se $u^K < u^{K+1}$ $\forall\, K \in \mathbb{N}$.

31 - <u>Definição</u>: Uma sequência $(u^K)_{K \in \mathbb{N}}$ em R^m, é <u>totalmente ilimitada</u>, se $(u_i^K)_{K \in \mathbb{N}}$ é não limitda $\forall\, i=1,2,\ldots,m$ e $\lim\limits_{K \to \infty} |u_i^K| = +\infty$, $i=1,2,\ldots,m$.

32 - <u>Lema</u>: Seja $h : R^m \longrightarrow R$ uma função limitada superiormente e $U = \{u \in R^m | u \geqq 0\}$. Seja $(\bar{u}^K)_{K \in \mathbb{N}}$ uma sequência em U crescente e totalmente ilimitada.

Então $\lim\limits_{K \to \infty} h(\bar{u}^K)_{K \in \mathbb{N}} = \sup \{h(u) \mid u \in U\}$

<u>Prova</u>: Seja $\beta = \sup \{h(u) \mid u \in U\}$

Como $(\bar{u}^K)$ é uma sequência crescente e h é crescente, então $(h(\bar{u}^K))$ é uma sequência crescente.

Mas h é limitada superiormente, logo $(h(\bar{u}^K))$ é uma sequência crescente, limitada superiormente e portanto possue limite α. Resta mostrar que α é supremo de h em U. É claro que:

33 $$\alpha \leq \sup \{h(u) \mid u \in U\} = \beta$$

Por absurdo suponha que $\alpha < \beta$, então existe $\hat{u} \in U$ tal que:

34 $$\alpha < h(\hat{u})$$

Mas $(\bar{u}^K)$ é crescente, positiva, totalmente ilimitada, então $(\exists N \in \mathbb{N})\ (\forall K \geq N)$.

35 $$\bar{u}^K \geq \hat{u}$$

e nesse caso como h é crescente

36 $$(\forall K \geq N)\ h(\bar{u}^K) \geq h(\hat{u}) \text{ contradizendo } 34$$

Logo $\alpha = \beta$ ||.

O lema seguinte apresenta uma propriedade que a função objetivo do problema dual possue, quando o problema é a vínculos positivos.

37 - <u>Lema</u>: Se (P) é viável, então w é uma função crescente e limitada superiormente.

<u>Prova</u>: i) Limitada superiormente

Seja $\bar{x}$ viável em (P). Pelo Teorema da dualidade fraca tem-se que $w(\bar{u}) \leq f(\bar{x})\ \forall\ \bar{u} \geqq 0,\ \bar{u} \in R^m$, ou seja, $w(\bar{u})$ é limitada superiormente.

ii) Crescente

Sejam $(u^1, u^2 \in R^m)$, $u^2 > u^1 > 0$ e $x \in X$.

Como $g(x) \geqq 0$ segue que:

$<u^1, g(x)> \leq <u^2, g(x)>$ ou ainda

$f(x) + <u^1, g(x)> - \{f(x) + <u^2, g(x)>\} \leq 0$

$(\forall\ x \in X)(\forall\ u^1, u^2 \in R^m,\ u^2 > u^1 > 0)$

Tomando o ínfimo em X na desigualdade acima resulta:

$$\inf_{x \in X}\{f(x) + <u^1, g(x)>\} - \inf_{x \in X}\{f(x) + <u^2, g(x)>\} \leq 0$$

ou seja $w(u^1) \leq w(u^2)$ concluindo a prova ||.

De posse dos resultados apresentados, pode-se agora enunciar o teorema básico de igualdade dos valores ótimos.

38 - <u>Teorema</u>: Suponha que $g(x) \geqq 0$ em X e que (P) é viável. Se (D) é essencialmente viável, v é s.c.i. em $y = 0$ e $(u^K)_{K \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em R^m crescente e totalmente ilimitada com $u^K \geqq 0$ então:

$$\lim_{K \to \infty} w(u^K)_{K \in \mathbb{N}} = v(0)$$

<u>Prova</u>: Em vista dos lemas 37 e 32, tem-se que:

$$\lim_{K \to \infty} w(u^K)_{K \in \mathbb{N}} = \sup_{u \in R^m,\ u \geqq 0} w(u)$$

Usando o Teorema (III-20), conclue-se finalmente que:

$$\lim_{K\to\infty} w(u^K)_{K\,\varepsilon\,\mathbb{N}} = v(0) \quad ||.$$

Ou seja, o limite da sequência de valores de (D), gerada pela solução dos problemas $\inf\limits_{x\varepsilon X} \{f(x) + \langle u^K, g(x)\rangle\}$, onde $(u^K)_{K\,\varepsilon\,\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente e totalmente ilimitada, é igual a v(0).

Assim, se as hipóteses do Teorema-38 são observadas, o valor ótimo do primal é sempre igual ao valor ótimo do dual, mesmo que o dual não tenha solução ótima. Um exemplo típico é o da figura abaixo onde o gráfico de v(.) é tangente ao eixo vertical na origem. ((P) não estável).

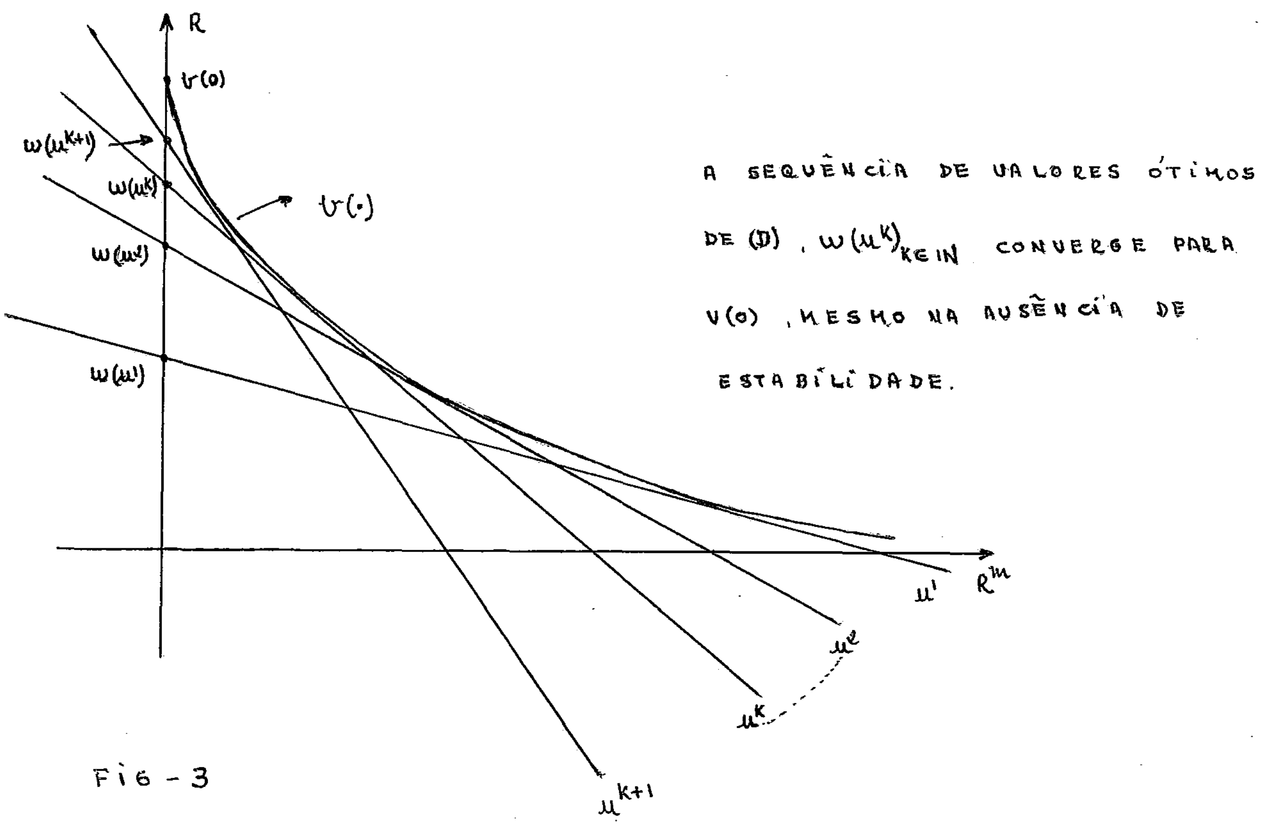


FIG - 3

A igualdade dos valores ótimos em P.V.P., é obtida assim (Teorema (III-38)) sem a hipótese de estabilidade que foi fundamental quando da obtenção dos resultados de otimalidade no Capítulo II (Teoremas II-50 e II-52), embora estes dois teoremas sejam mais fortes que o Teorema (III-38), por garantirem não apenas Otimalidade, mas uma série de outros resultados relevantes.

O comportamento e as propriedades da sequência de valores $(x^K)_{K \in \mathbb{N}}$, gerada pela solução dos problemas $\inf_{x \in X} \{ f(x) + \langle u^K, g(x) \rangle \}$, serão vistas na próxima seção, à partir da relação entre o Método das Penalidades Exteriores, e o Problema à Vínculos Positivos.

Seção 4 - MÉTODO DAS PENALIDADES EXTERIORES - EQUIVALÊNCIA COM PROBLEMA A VÍNCULOS POSITIVOS - UM TEOREMA DE CONVERGÊNCIA

Como foi visto anteriormente, qualquer problema pode ser transformado em um Problema à Vínculos Positivos equivalente (III-1). Um sub-produto do estudo dessa classe de problemas é o Método das Penalidades Exteriores que passaremos a abordar. Serão vistos alguns métodos de Penalidades Exteriores, e será apresentado um método definido à partir de Problema à Vínculos Positivos (III-1).

A convergência do método a ser apresentado, será vista à partir de resultados de dualidade para problemas à vínculos positivos.

Seja o problema primal (II-1)

(40) $\qquad$ (PV) $\min \{f(x) \mid x \in \overline{X} \subseteq R^n\}$

A idéia do método das penalidade é resolver o problema (40) (Problema vinculado - (PV)), construindo uma sequência de pontos $(x^i)_{i \in \mathbb{N}} \in R^n$, que são ótimos para a sequência de problemas desvinculados da forma:

(41) $\qquad$ (PD)i $\min_{x \in R^n} \{f(x) + P^i(x)\}$, $i = 1,2,...$

onde $P^i(.)$ é uma <u>função penalidade</u> para o conjunto $\overline{X}$.

42 - <u>Definição</u>: Seja $\overline{X}$ um subconjunto fechado do R^n. A <u>função contínua</u> $P(.): R^n \longrightarrow R$ é chamada <u>função penalidade exterior</u> para o conjunto $\overline{X}$ se:

i) $P(x) = 0 \quad \forall\, x \in \overline{X}$

ii) $P(x) > 0 \quad \forall\, x \notin \overline{X}$

A sequência de problemas desvinculados (PD)i é construída de tal forma que:

$x^i \longrightarrow \bar{x} \in \overline{X}$ quando $i \longrightarrow \infty$ e $\bar{x}$ é ótimo para o (PV) (Problema vinculado). A idéia básica dos métodos de penalidades é a mesma; o que muda nos diferentes métodos é o tipo de função penalidade a ser usada.

Vejamos inicialmente o método proposto por Zangwill |69|.

Sejam, $(r^K)_{K \in \mathbb{N}}$ uma sequência com $r^K > 0$, $r^{K+1} > r^K$ $(r^K \in R)$ e $P(x)$ uma função penalidade assim definida:

i) $P(x) = 0$ se $x \in$ ao conjunto viável $(x \in \overline{X})$

$$\text{ii) } P(x) = \sum_{i=1}^{m} |\max(g_i, 0)|^{1+\varepsilon} \quad \text{se}$$

$$x \notin \text{conjunto viável } (\varepsilon \geq 0)$$

Para cada r^K, encontrar x^K que:

$$f(x^K) + r^K \,.\, P(x^K) = \min_{x \varepsilon R^n} f(x) + r^K \,.\, P(x)$$

Se x^K é viável para o problema original (Problema vinculado) o algorítmo deve parar, caso contrário continuar com r^{K+1}.

Observadas algumas hipóteses, Zangwill demonstra que o algorítmo converge.

Estudemos agora o seguinte método. Dado o problema primal (II-1).

$$(P) \quad \min_{x \varepsilon X} f(x) \text{ s.a. } g(x) \leqq 0$$

tomemos o problema à vínculos positivos (III-1) obtido à partir de (P).

(PVP) $$\min_{x \varepsilon X} f(x) \text{ s.a. } g(x) \leqq 0 \quad (g(x) \geqq 0 \;\forall\; x \varepsilon X)(X \subseteq R^n)$$

e façamos a hipótese de que $f: X \longrightarrow R$ é contínua.

Seja $\overline{X} = \{x \varepsilon X \mid g(x) \leqq 0\}$ e definamos no (P.V.P.) uma função penalidade exterior para $\overline{X}$.

43 $$P_K(x) = \langle u^K, g(x) \rangle, \; K = 1,2,\ldots\ldots \text{ onde}$$

$g: R^n \longrightarrow R^m$ é contínua e $(u^K)_{K \varepsilon \mathbb{N}}$ é uma sequência em R^m crescente e totalmente ilimitada com $u^K > 0$.

$P_K(.)$ assim definida, atende as condições da

Definição (42) pois $g(x) \geqq 0$ ($\forall x \in \bar{X}$), $g(x) = 0$ se $x \in \bar{X}$ e $u^K \geqq 0 \ \forall \ K \in \mathbb{N}$.

Note-se que a função penalidade assim definida, torna o método um pouco mais geral que o de Zangwill|69|

Nesse caso tem-se m parâmetros ($u^K \in R^m$), o que não ocorre com a função penalidade usada por Zangwill que tem apenas 1 parâmetro ($r^K \in R$).

A sequência de problemas desvinculados gerados à partir do (P.V.P.) será:

$$(PD)_K \qquad \min_{x \in X} \{f(x) + P_K(x)\}$$

Em vista de (43) temos:

44 $$(PD)_K \quad \min_{x \in X} \{f(x) + \langle u^K, g(x)\rangle\}$$

Mas $\min_{x \in X} \{f(x) + \langle u^K, g(x)\rangle\} \equiv w(u^K)$ que é a função objetivo do problema dual do P.V.P.. Resulta daí que resolver o problema dual, equivale a resolver o problema pelo método das penalidades exteriores apresentado.

Em ambos os métodos, espera-se que a sequencia $(x^K)_{K \in \mathbb{N}}$ gerada pela solução da sequência de problemas desvinculados $(PD)_K$, convirja para $\bar{x}$ que é ótimo para o problema primal.

Fica assim estabelecida o relação entre o método das penalidades exteriores apresentado, e o problema à vínculos positivos. Um outro método de penalidade exteriores é o método proposto por Polack|71|. O método é mais geral que o de Zangwill, e o método proposto neste trabalho, visto que usa não uma função penalidade, mas uma sequência de funções penalidades assim definidas.

45 - Definição: Seja $\overline{X}$ um sub-conjunto fechado do R^n. A sequência de funções contínuas é chamada sequência de funções penalidades exteriores para o conjunto $\overline{X}$ se:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & P_i(x) = 0 \quad \forall x \in \overline{X},\ i = 1,2,\ldots.. \\ \text{ii)} & P_i(x) > 0 \quad \forall x \notin \overline{X},\ i = 1,2,\ldots.. \\ \text{iii)} & P_{i+1}(x) > Pi(x) \quad \forall x \notin \overline{X},\ i = 1,2,\ldots. \\ \text{iv)} & P_i(x) \longrightarrow \infty \text{, quando } i \longrightarrow \infty \ \forall x \notin \overline{X} \end{array}$$

Com hipóteses sobre f, g e $\overline{X}$, Polack demonstra que o algorítmo converge em um número finito de iterações Em seguida serão vistas alguns resultados, que servirão de base para garantir a convergência do método de penalidades exteriores proposto, usando a teoria de dualidade.

A hipótese seguinte é básica para demonstração destes resultados.

46 - Hipótese: Suponha que $\exists$ $x' \in \overline{X}$ tal que o conjunto $C = \{x \in \overline{X} \mid f(x) \leq f(x')\}$ é compacto $(x \in R^n)(\overline{X} \subseteq R^n)$.

47 - Lema: Seja P(.) uma função penalidade exterior para $\overline{X} \subset R^n$, $x' \in \overline{X}$ e suponha que a Hipótese (46) é verdadeira.
Então, $Z = \{x \in \overline{X} \mid f(x) + P(x) \leq f(x') + P(x')\}$ é compacto.

Prova: Mostremos inicialmente que

$$Z \subset C = \{x \in \overline{X} \mid f(x) \leq f(x'),\ x' \in \overline{X}\}$$

Seja $\bar{x} \in Z$

Então:

$$f(\bar{x}) + P(\bar{x}) \leq f(x') + P(x')$$

Como $P(x') = 0$ $(x' \in \bar{X})$ e $P(\bar{x}) \geq 0$ segue que:

$f(\bar{x}) \leq f(x') \Rightarrow \bar{x} \in C$, provando que $Z \subset C$.

Mas $f(.)$ e $P(.)$ são contínuas, logo Z é fechado. Como $Z \subset C$ (compacto) e Z é fechado, resulta que Z é compacto ||.

48 - Lema: Suponha que a Hipótese (46) é verdadeira. Então (D) é essencialmente viável.

Prova: Mostremos que $w(0)$ é finito. Temos que:

$$w(0) = \inf \{f(x) \mid x \in X\}$$

Por hipótese C é compacto. Mas, se $x \notin C$ então:

$$f(x) > f(x') \geq w(0)$$

Logo $w(0) = \inf \{f(x) \mid x \in C\}$

Como C é compacto, o ínfimo na expressão acima é atingido e portanto $w(0)$ é finito ||.

O teorema seguinte é básico para demonstração dos resultados que irão garantir a solução do problema proposto em (44).

49 - Teorema: Suponha f e g contínuas e que a Hipótese (46) é verdadeira. Então $v(\cdot)$ é semi-contínua inferiormente em $y=0$.

Prova: Pela hipótese (46) existe $\hat{x}$ viável para (P) tal que: $C = \{x \in X \mid f(x) \leq f(\hat{x})\}$ é compacto. Então, $(\forall\ y \geqq 0)$,

$$\begin{aligned} v(y) &\leq v(0) \quad \text{pois } v \text{ é decrescente} \\ &\leq f(\hat{x}) \quad \text{pois } \hat{x} \text{ é viável} \end{aligned}$$

$$\text{Logo } v(y) = \inf_{x \in C} \{f(x) \mid g(x) \leq y\}$$

Mas como C é compacto e f e g são contínuas, vale:

50 $$v(y) = \operatorname*{Min}_{x \in C} \{f(x) \mid g(x) \leq y\}$$

$$\text{Seja } K = \{(f(x), g(x)) \mid x \in C\}$$

Pelas mesmas razões anteriores, K é compacto, Mostremos que:

51 $$(\forall y \geq 0)(\exists \bar{y} \geq 0,\ \bar{y} \leq y)(v(y), \bar{y}) \in K$$

De fato, dado $y \geq 0$, existe $\hat{x} \in C$ com $g(\hat{x}) \leq y$ e $v(y) = f(\hat{x})$ pois o mínimo em (50) existe.

Para garantir (51) basta tomar-se $\bar{y} = g(\hat{x})$ pois $g(\hat{x}) \geq 0$, $g(\hat{x}) \leq y$, $(f(\hat{x}), g(\hat{x})) \in K$. Seja $(y^K)_{K \in \mathbb{N}}$ tal que $y^K \geq 0$ e $y^K \longrightarrow 0$. Basta mostrar que $v(y^K) \longrightarrow v(0)$, pois v é decrescente em R^{m+}, e possue valor infinito fora de seu ortante.

De (51) deduz-se que:

$$(\forall K \in \mathbb{N})(\exists \bar{y}^K \geq 0,\ \bar{y}^K \leq y^K)(v(y^K), \bar{y}^K) \in K$$

Nesse caso a sequência $(\bar{y}^K)_{K \in \mathbb{N}}$ converge a zero pois $y^K \longrightarrow 0$.

Como K é compacto, então a sequência $((v(y^K), \bar{y}^K)_{K \in \mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente em K. Tomando-se uma subsequência, se necessário temos que:

$$(v(y^K), \bar{y}^K) \longrightarrow (\alpha, \bar{y}) \in K$$

Daí segue que:

52 $$\alpha = \lim_{K\to\infty} v(y^K)$$

$$\bar{y} = \lim_{K\to\infty} \bar{y}^K = 0$$

Por definição de K, existe $\bar{x} \in C$ tal que

$\alpha = f(\bar{x})$ e $\bar{y} = 0 = g(\bar{x})$

Nesse caso, $\bar{x}$ é viável para (P) e portanto:

53 $$\alpha \geq v(0)$$

Por outro lado v é decrescente, logo

$$\forall\ K \in \mathbb{N},\quad v(y^K) \leq v(0)$$

Então tem-se:

$$\begin{aligned} \alpha &\geq v(0) \text{ por } (53) \\ &\geq \lim_{K\to\infty} v(y^K) = \alpha \text{ por } (52) \end{aligned}$$

Ou seja, $\lim_{K\to\infty} v(y^K) = v(0)$ complentando a prova ||.

De posse dos resultados apresentados, pode-se finalmente enunciar o teorema que irá garantir a solução do problema primal, pelo método das penalidades exteriores apresentado ou pelo método dual.

54 - Teorema: Suponha que f é contínua, g é contínua com $g(x) \geq 0 \ \forall x \in X$, $(u^K)_{K \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente totalmente ilimitada, com $u^K \geq 0$ e (P) é viável. Seja $(x^K)_{K \in \mathbb{N}}$ uma sub-sequência convergente de $(x^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$, onde $(x^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ é a sequência gerada pela solução dos problemas $\inf\limits_{x \in X} \{f(x) + \langle u^K, g(x)\rangle\}$ Então $\bar{x} = \lim\limits_{K\to\infty} (x^K)_{K \in \mathbb{N}}$ é um ponto viável com $g(\bar{x}) = 0$, e é ponto mínimo de (P).

Prova: Seja $\bar{\bar{x}} = \lim\limits_{K\to\infty} (x^K)_{K \in \mathbb{N}}$. Pelo Teorema (III-38) tem-se que:

55 $$\lim_{K\to\infty} \inf_{x\in X} \{f(x) + \langle u^K, g(x)\rangle\} = \lim_{K\to\infty} w(u^K) = v(0)$$

Ou ainda:

$$\lim_{K\to\infty} \{f(x^K) + \langle u^K, g(x^K)\rangle\} \doteq v(0)$$

por definição de x^K

Então no limite obtem-se:

56 $$f(\bar{x}) + \lim_{K\to\infty} \langle u^K, g(x^K)\rangle = v(0)$$

Como (u^K) é crescente e totalmente ilimitada como $u^K > 0$, $(u^K) \longrightarrow \infty$.

Porém $v(0)$ é finito, logo $g(x^K) \longrightarrow 0$.

Como $\lim\limits_{K\to\infty} g(x^K) = g(\overline{x})$ por hipótese, resulta daí que $g(\overline{x}) = 0$, ou seja, $\overline{x}$ é um ponto viável.

Seja $z = \lim\limits_{K\to\infty} \langle u^K, g(x^K)\rangle$

Então de (56) vem:

57 $$f(\overline{x}) + z = v(0)$$

Como $\langle u^K, g(x^K)\rangle \geq 0 \Rightarrow z \geq 0$

De (57) resulta então que:

$f(\overline{x}) = v(0) - z \Rightarrow f(\overline{x}) \leq v(0)$

Por definição de $v(0)$, $f(\overline{x}) \geq v(0)$ $(\forall \cdot \overline{x} \in X)$

Logo, $z = 0$ e $f(\overline{x}) = v(0)$ provando que $\overline{x}$ é ótimo para (P) ||.

CAPITULO IV

CONCLUSÕES

Como foi visto no Capítulo II, estabilidade é a hipóteses central para que os teoremas básicos de Dualidade sejam válidos.

Geoffrion usou estabilidade local e convexidade, para garantir que (P) é estável globalmente no caso geral.

O estudo de um problema particular, (P.V.P.), permitiu obter condições que garantem uma série de resultados importantes, na ausência de hipóteses adicionais usadas por Geoffrion.

No P.V.P. estabilidade é garantida à partir de hipóteses mais fracas, embora que a classe de problemas considerada seja mais restrita.

Sendo (P) localmente estável, com a hipótese de que (D) é essencialmente viável, garantem-se estabilidade global, como sugere o quadro da Fig. 2 no capítulo anterior.

O enfoque maior deste trabalho, recaiu entretanto na busca de condições que garantam a igualdade dos valores ótimos dos problemas Primal (P) e Dual (D).

Essas condições são vitais, pois além de garantirem a não existência do gap de Dualidade, garantem, com hipóteses de continuidade das funções f e g, que o Método das Penalidades Exteriores, vizualizado como um método Dual é um método convergente, mesmo que (P) não seja estável e que o Dual não tenha solução.

A hipótese de que a função perturbação é semi-contínua inferiormente na orígem, é o suporte básico para se obter a igualdade dos valores ótimos.

Ela serve para garantir que a sequência de valores ótimos gerada pela solução dos problemas desvinculados converge para o valor ótimo do problema Primal.

Hipóteses de continuidade de f e g foram usadas para garantir a semi-continuidade inferior da função perturbação na orígem, e para garantir que a sequência de soluções ótimas gerada também pela solução dos problemas desvinculados, converge para um ponto de ótimo.

A semi-continuidade inferior de v na orígem é uma hipótese necessária e suficiente para garantir igualdade dos valores ótimos, porém não é suficiente para garantir que o Método das Penalidades Exteriores é um método convergente.

Com hipótese de continuidade de f e g consegue-se entretanto garantir que v é semi-contínua inferiormente na orígem, e que o Método das Penalidades Exteriores é um método convergente.

BIBLIOGRAFIA

1. A.M. GEOFFRION: Duality in Nonlinear Programming: A Simplified Applications - Oriented Development Siam Review - Vol. 13 - No. 1 - January - 1971

2. L.S. LASDON: Duality and Decomposition in Mathematical Programming - I E E E Transaction System Sci. and Cybernetics, SSC - 4 (1978) P. 86 - 100.

3. PERSIANO, R.C.M.: Apostila de Programação Não-Linear COPPE/UFRJ, não publicada - 1973

4. POLAK, E.: Computational Methods in Optimization - Academic Press - 1971

5. W.I. ZANGWILL - Nonlinear Programming: A Unified Approach Prentice - Hall, Englewood Cliffs, New Jersey - 1969

APÊNDICE

<u>Lema 1</u> - Se (P) é convexo, então Y é convexo e $v:Y \to R$ é convexa.

<u>Prova</u>: Sejam $y^1, y^2 \in Y$ e $\lambda \in [0,1]$

Então existem $x^1, x^2 \in X$ tg.

$$g(x^1) \leqq y^1 \quad e \quad g(x^2) \leqq y^2$$

Como g é convexa p/ hipótese temos:

$$\begin{aligned} g(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) &\leq \lambda g(x^1) + (1-\lambda)\ g(x^2) \\ &\leq \lambda y^1 + (1-\lambda)y^2 \end{aligned}$$

Logo $\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2 \in X(\lambda y^1 + (1-\lambda)y^2)$ e este conjunto não é vazio.

$$(X(y) = \{x \in X | g(x) \leqq y\})$$

Portanto $\lambda y^1 + (1-\lambda)y^2 \in Y$ que é convexo.

<u>Convexidade de v</u>

Como $g(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \leq \lambda y^1 + (1-\lambda)y^2$, p/ definição de v segue que:

$$\begin{aligned} v(\lambda y^1 + (1-\lambda)y^2) &\leq f(\lambda x^1 + (1-\lambda)x^2) \\ &\leq \lambda f(x^1) + (1-\lambda)\ f(x^2) \end{aligned}$$

(f é convexa)

Como a desigualdade acima vale p/ todo $x^1 \varepsilon X(y^1)$ e $x^2 \varepsilon X(y^2)$ temos:

$$v(\lambda y^1 + (1-\lambda)y^2) \leq \lambda \inf_{x^1 \varepsilon X(y^1)} f(x^1) + (1-\lambda) \inf_{x^2 \varepsilon X(y^2)} f(x^2)$$

$$\leq \lambda\, v(y^1) + (1-\lambda)\, v(y^2)$$

provando que v é convexa ||.

<u>Lema 2</u> - Seja $\phi(.)$ uma função convexa em um conjunto convexo $Y \subseteq R^m$, tomando valores em $R \cup \{-\infty\}$.
Seja $\|.\|$ uma norma qualquer no R^m e seja $\bar{y} \varepsilon Y$ um ponto onde ϕ é finita. Então ϕ tem um subgradiente em $\bar{y} \varepsilon Y$ se e somente se existe um escàla positivo M tal que:

$$\frac{\phi(\bar{y}) - \phi(y)}{\|y - \bar{y}\|} \leq M \quad \forall y \varepsilon Y, \; y \neq \bar{y}$$

<u>Prova</u>: Ver Geoffrion |71| - pg 10/11.

<u>Lema 3</u> - Suponha que (P) é convexo e localmente estável. Então v admite um subgradiente na origem e (P) é estável globalmente.

<u>Prova</u>: Como (P) é localmente estável (II-45) vem:

4 $$\frac{v(0) - v(y)}{\|y\|} \leq M \; (\forall y \varepsilon B_\delta(0), \; y \neq 0),$$

$$(\delta > 0, \; M \geq 0, \; \delta \text{ e } M \varepsilon R)$$

Então pode-se escrever que:

5 $$v(y) \geq v(0) - M.\|y\| \quad (\forall\, y \in R^m,\ y \neq 0) \text{ e } \|y\| \leq \delta$$

Faremos a prova por absurdo.

Suponhamos então que a seguinte hipótese é verdadeira.

<u>Hipótese</u> - Seja $y^1 \in R^m$, tal que $v(y^1) < v(0) - M\,\|y^1\|$.

Como v é convexa p/ hipótese ((P) é convexo) vem:

6 $$(1-\lambda)\ v(0) + \lambda\ v(y^1) \geq v(\lambda y^1) \quad \forall\, y^1 \in R^m \text{ e } \lambda \in [0,1]$$

Seja λ tal que $\|\lambda . y^1\| < \delta \Rightarrow \lambda < \dfrac{\delta}{\|y^1\|}$ $(\lambda y^1 \in B_\delta(0))$

Logo pode-se escrever que:

7 $$v(\lambda y^1) \geq v(0) - M\,\|\lambda . y^1\| \text{ pois (P) é L.E.}$$

De (6) e (7) resulta que:

$$(1-\lambda)\ v(0) + \lambda\ v(y^1) \geq v(0) - M.\ \|\lambda . y^1\|$$
$$\forall\, \lambda \text{ tal que } \|\lambda . y^1\| < \delta$$

$$v(0) - \lambda v(0) + \lambda v(y^1) \geq v(0) - \lambda\ M \cdot \|y^1\|$$

$v(y^1) - v(0) \geq -M.\|y^1\|$! ! (Contradiz a Hipótese inicial).

Logo $v(y^1) \geq v(0) - M.\|y^1\|$, $(\forall\, y^1 \in R^m)$ e (P) é estável segundo Geoffrion.

Pelo Lema 2 v admite um subgradiente em $y = 0$, concluindo a prova ||.