

MODELO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR ESTOCÁSTICA  
APLICADO À PESCA

FRANCISCO JOSÉ NEGREIROS GOMES

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE  
PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JA  
NEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO  
GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:



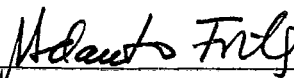
---

NELSON MACULAN FILHO  
(Orientador)



---

ANTONIO ALBERTO FERNANDES OLIVEIRA



---

ANTONIO ADAUTO FONTELES FILHO

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

DEZEMBRO DE 1981

GOMES, FRANCISCO JOSÉ NEGREIROS

Modelo de Programação Linear Estocástica Aplicado à Pesca.  
[Rio de Janeiro] 1981.

*ix*, 199 p. 29,7cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas, 1981).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Programa de Sistemas.

1. Otimização I. COPPE/UFJR II. Título (Série)

Dedico este trabalho à  
Jussara, minha mulher,  
e Miguel e Maria Rosa,  
meus pais.

A G R A D E C I M E N T O S

Gostaria de agradecer ao Professor Nelson Maculan Filho, pela orientação, apoio e dedicação durante o curso.

Aos colegas do Curso de Mestrado, Paulo Villela, Maurício Nardone e Marco Antonio Socomam pela solidariedade e su gestões recebidas.

À Secretaria de Indústria e Comércio, na pessoa do Secretário Firmo Fernandes de Castro, pela ajuda financeira recebida para obtenção dos dados sobre pargo e lagosta.

À SUDEPE, na pessoa do Superintendente José Ubi-rajara Coelho Timm, e dos componentes do PDP, Paulo Lira, José Augusto Aragão e Geovanio Oliveira pelas sugestões e fornecimen-  
to dos dados sobre pesca.

A todos aqueles que direta e indiretamente contri-  
buíram para a elaboração deste estudo.



R E S U M O

A programação linear estocástica pode ser vista como uma programação linear padrão na qual os parâmetros de entrada são variáveis aleatórias, seguindo determinadas distribuições de probabilidade.

Neste estudo, descrevemos vários procedimentos de programação linear estocástica, acompanhados dos respectivos algoritmos. No entanto, damos ênfase à abordagem proposta por SENGUPTA & TINTNER para a qual adaptamos um algoritmo de solução experimental de programação estocástica - SEPE que, para cada conjunto de realizações dos parâmetros aleatórios, resolve um programa linear, utilizando o Algoritmo Simplex.

A seguir, apresentamos um modelo de Programação Linear Estocástica aplicado à pesca numa tentativa de melhorar a atuação da frota pesqueira de lagosta e pargo no nordeste do Brasil, no que diz respeito ao desempenho, i.é., otimizando sua contribuição por tonelada de cada espécie pescada, em cada área e período. O modelo incorpora incertezas tais como: quantidade máxima de cada espécie que pode ser pescada, quantidade máxima de cada espécie que pode ser vendida em cada período e a captura por unidade de espaço, as quais, dentre outras, são tratadas como variáveis aleatórias com relação aos parâmetros de entrada do modelo.

A B S T R A C T

Stochastic linear programming can be viewed as a standard linear programming in which the input parameters are random variables, following certain probability distributions.

In the work, we describe various stochastic linear programming approaches and the respective algorithms. Nevertheless, we give emphasis to the approach suggested by TINTNER & SENGUPTA for which it is adapted an experimental stochastic solution programming algorithm that, for each set of random variables realizations, a linear programming problem is solved by using the Simplex Algorithm.

Then, we present a stochastic programming model applied to the fishery industry. This model is an attempt to improve the action of the vessel fleet, lobster and red snapper, in the northeast Brazil by the maximization of the fleet contribution per catch ton for each species, geographical area and period. The model incorporate uncertainty of the parameters: maximum amount of each species that can be catch in each period and area, the maximum quantity of each species that can be sold in each period, and the catch per unit of effort that, among others, are treated as random variables, with respect to the input parameters of the model.

I N D I C E

Página

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO .....	1
I.1 - Programação Linear sob Incerteza .....	2
I.2 - Caracterização do Problema de Programação Linear Probabilística (PLP) .....	3
I.3 - Modelos em PLP .....	8
3.1 - Modelo Passivo .....	8
3.2 - Modelo Ativo .....	9
CAPÍTULO II - PROGRAMAÇÃO LINEAR PROBABILÍSTICA - PROCEDIMENTOS .....	11
II.1 - Preliminares .....	12
II.2 - Programação Linear Estocástica (TINTNER & SENGUPTA) .....	14
2.1 - Variações no Vetor $c$ .....	15
2.2 - Variações no Vetor $b$ .....	17
2.3 - Variações na Matriz $A$ .....	18
2.4 - Variações em Todos Parâmetros .....	19
2.5 - Procedimento Passivo para PLE .....	21
2.5.1 - Distribuição da Solução Ótima .....	23
2.5.2 - Testes Não-Paramétricos .....	27
2.6 - Procedimento Ativo em PLE .....	36
2.7 - Relações entre os Procedimentos Passivo e Ativo .....	39
II.3 - Programação Linear a Dois Estágios sob Incerteza (DANTZIG) .....	51
3.1 - Preliminares .....	51
3.2 - Uma Classe de Problemas a Dois Estágios .....	51
3.2.1 - Método de Aproximação .....	55

3.3 - Exemplo (Transporte para um Armazém com Demanda Incerta) .....	56
II.4 - Programação Estocástica com Recurso (WALKUP & WETS) ..	59
4.1 - Preliminares .....	59
4.2 - Algoritmos para PE com Recursos Simples ....	61
4.2.1 - Algoritmo de Van Slyke - Wets .....	63
4.2.2 - Algoritmo de Garstka & Rutenberg ...	64
II.5 - Método do Valor Esperado (MADANSKY) .....	70
5.1 - Preliminares .....	70
5.2 - Equivalência do Problema de Programação Probabilística e Teoria dos Jogos .....	70
5.3 - Procedimento .....	72
II.6 - Programação com Probabilidade de Restrições .....	77
6.1 - Preliminares .....	77
6.2 - Descrição do Método .....	78
6.3 - Programação com Probabilidade de Restrições vs. Programação a Dois Estágios .....	83
II.7 - Soluções Minimax para Problemas Probabilísticos ..	85
7.1 - Preliminares .....	85
7.2 - O Problema Minimax .....	86
7.3 - Regiões de Decisão .....	87
7.4 - Programação Linear Multiparamétrica .....	90
7.5 - Região de Busca .....	92
7.6 - Algoritmo para Solução Minimax Global .....	96
CAPÍTULO III - SOLUÇÃO EXPERIMENTAL DE PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA - SEPE .....	
III.1 - Vantagens e Desvantagens dos Métodos de Programação Probabilística .....	99

III.2 - O Método SEPE .....	102
2.1 - Algoritmo de Solução Experimental .....	103
2.2 - Análise Estatística do Método SEPE .....	106
2.3 - Eficiência do Método SEPE .....	107
2.4 - Problema - Exemplo e a Solução SEPE .....	109
 CAPÍTULO IV - MODELO DE PLE APLICADO À PESCA .....	 112
IV.1 - Preliminares .....	113
IV.2 - Sistema Pesqueiro no Nordeste do Brasil .....	114
2.1 - Espécies .....	114
2.2 - Regiões de Pesca .....	116
2.3 - Estações de Pesca .....	118
2.4 - Aspectos Comercial e Industrial .....	120
IV.3 - Modelo de Otimização Estocástica Restrita .....	123
3.1 - Função Objetivo .....	124
3.2 - Restrições .....	125
IV.4 - Elementos Probabilísticos .....	133
IV.5 - Modelo Pré-Teste .....	135
5.1 - Formulação .....	136
5.2 - Resultados .....	144
IV.6 - Conclusões .....	146
 APÊNDICE	
A.1 - Tópicos da Teoria da Probabilidade .....	148
(i) Teorema do Limite Central .....	149
(ii) Teoria da Medida .....	150
(iii) Truncamento .....	152
(iv) Propriedades dos Momentos .....	153
A.2 - Aplicação de Programação Linear à Teoria dos Jogos	156

A.3 - Programa SEPE .....	160
A.4 - Quadros e Gráficos .....	181
BIBLIOGRAFIA .....	193

CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO

## I. INTRODUÇÃO

### I.1 - Programação sob Incerteza

Durante as últimas três décadas têm sido desenvolvidos vários métodos eficientes para a programação linear possibilitando que os pesquisadores das várias áreas técnicas fossem capazes de aplicar a programação linear na resolução de problemas práticos.

No entanto, para aplicar a teoria e os métodos de programação linear é necessário que os dados que determinam um problema de programação linear sejam números fixos conhecidos. Esta condição não é satisfeita em muitas situações práticas, como por exemplo, quando os dados são demandas, coeficientes tecnológicos, capacidades disponíveis, taxas de custo e assim por diante. Pode acontecer que tais informações sejam variáveis aleatórias. Neste caso, a prática comum sugere que estas variáveis aleatórias sejam substituídas por suas médias e se resolva o programa linear resultante. Contudo, por volta de 1960 vários autores reconheceram que este método era pouco seguro e sugeriram alguns métodos contidos nos seguintes artigos: DANTZIG<sup>[6]</sup>, CHARNES & COOPER<sup>[7]</sup>, WALKUP & WETS<sup>[19]</sup>, TINTNER & SENGUPTA<sup>[32]</sup>, e outros cujos procedimentos discutiremos mais adiante.

A teoria da programação sob incerteza pode ser formulada de várias maneiras diferentes. Como um procedimento de programação ela analisa as implicações das variações no espaço de parâmetros de um modelo de programação linear ou não-linear.



O mecanismo que gera tais variações probabilísticas nos modelos econômicos pode existir devido a informações incompletas na demanda, produção e tecnologia, incerteza de vários tipos e consequências por causa de agregação ou desagregação de variáveis etc. Um segundo modo de manipulação de programação sob incerteza é o uso da teoria dos jogos, particularmente da matriz de jogos com estratégias mistas (GALE, KUHN OF TUCKER <sup>[24]</sup>) quando o valor do jogo está variando estocasticamente. Modelos baseados em teoria dos jogos têm sido usados em diversas situações de estruturação econômica, como por exemplo, especificação de estruturas alternativas de mercado, alocação de recursos sob formas alternativas de coligação e/ou competição e modelos de tomada de decisão sob incerteza. Um terceiro tratamento para a programação sob incerteza é através de técnicas de simulação, as quais são essencialmente métodos para analisar a sensibilidade e robustez das hipóteses, soluções ou políticas definidas por uma estrutura econômica particular.

## I.2 - Caracterização do Problema de Programação Linear Probabilística

Definimos um problema de programação linear (PPL):

$$\begin{aligned}
 \text{Min } z &= c'x \\
 Ax &= b \\
 x &\geq 0 \quad c(n \times 1), A(m \times n) \text{ e } b(m \times 1)
 \end{aligned}
 \tag{2.1}$$

como sendo probabilístico, se um ou mais dos coeficientes no conjunto  $(A, b, c)$  são variáveis aleatórias tendo uma distribuição

de probabilidade específica.

Neste propósito, muitos usuários de programação linear alguma vez já recorreram a um procedimento especial de programação probabilística pela substituição das variáveis aleatórias por seus valores esperados, ou por seus estimadores, e a resolução do programa linear resultante. O exemplo abaixo mostra que este procedimento não é viável em todas situações práticas.

Suponhamos o seguinte problema:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s.a.} \quad a_1x_1 + 2x_2 &\geq 4 \\ a_2x_2 + x_2 &\geq 3 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

onde  $(a_1, a_2)$  é um vetor uniformemente distribuído, i.é.,  $a_1 \sim U[0,4]$  e  $a_2 \sim U[1,3]$ . Aplicando o conceito de valor esperado temos:

$$E(a_1) = \frac{1}{4} \int_0^4 a_1 da_1 = 2$$

e

$$E(a_2) = \frac{1}{3} \int_1^3 a_2 da_2 = 2$$

substituindo estes valores no problema acima:

$$\begin{aligned} \min z &= x_1 + \frac{1}{2}x_2 \\ \text{s.a.} \quad 2x_1 + 2x_2 &\geq 4 \end{aligned}$$

$$2x_1 + x_2 \geq 3$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

cujo problema tem como solução ótima  $(x_1^*, x_2^*) = (1, 1)$ .

Suponhamos que a questão seja a seguinte: determinar a probabilidade do evento  $\xi$  = a solução acima é viável com respeito ao problema original. Deste modo, teremos:

$$\begin{aligned} P\{(a_1, a_2) | a_1 x_1^* + 2x_2^* \geq 4; a_2 x_1^* + x_2^* \geq 3\} &= \\ &= P\{(a_1, a_2) | a_1 \geq 2 \text{ e } a_2 \geq 2\} = \\ &= P\{a_1 \geq 2\} \cdot P\{a_2 \geq 2\} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Portanto, esta solução tem probabilidade 0,75 de ser inviável, i.é., ela é inviável na maioria das vezes. Se associamos este exemplo simples com qualquer problema prático tais como problema de dieta em hospitais, problemas de refinaria de petróleo os quais envolvem restrições de alta qualidade tal como gasolina de avião, devemos ter o cuidado de evitar o uso deste procedimento "especial", pois o mesmo pode levar a conseqüências de astrosas.

No problema probabilístico (2.1), se as distribuições de probabilidade forem conhecidas ou se elas podem ser especificadas, então esta classe de problemas de decisão pode ser caracterizada pelas seguintes questões:

(a) como decidir, num vetor de decisão  $x$ , qual é

o ótimo?

- (b) como caracterizar a sensibilidade de um vetor de decisão ótimo quando ele existe em termos de parâmetros característicos da destruição dos custos, e a medida de tolerância acima da qual não são permitidas violações das restrições?

As respostas para estas perguntas estão parcialmente encontradas na literatura de programação linear probabilística onde os métodos mais importantes são:

- (i) PROGRAMAÇÃO LINEAR ESTOCÁSTICA - PLE (TINTNER & SENGUPTA<sup>|32|</sup>);
- (ii) PROBABILIDADE DE RESTRIÇÕES - CCP (CHARNER & COOPER<sup>|7|</sup>);
- (iii) PROGRAMAÇÃO LINEAR A DOIS ESTÁGIOS SOB INCERTEZA (DANTZIG<sup>|6|</sup>);
- (iv) VALOR ESPERADO (MADANSKY<sup>|22|</sup>);
- (v) PROGRAMAÇÃO ESTOCÁSTICA COM RECURSO SIMPLES - (WALKUP & WETS<sup>|19|</sup>).

De um modo geral, os quatro primeiros métodos têm as seguintes características em comum: incorporam as distribuições de probabilidade dos parâmetros de modo a converter o programa linear probabilístico para uma forma determinística e então definem um conjunto de regras contendo certas condições de

otimalidade. Por certo, que os procedimentos de incorporação das distribuições de probabilidade e especificações das regras de decisão são diferentes para métodos diferentes.

Do ponto de vista computacional, existem três problemas básicos de incorporação de variações aleatórias em  $(A, b, c)$  na estrutura de um programa linear, dado que a forma do vetor atividade  $x$  é truncada pelas inequações no espaço de restrições e os pontos de truncamento geralmente não são conhecidos a priori. Primeiro, uma função linear de variáveis aleatórias não-normais geralmente não é da mesma forma de distribuição que as componentes individuais aleatórias e, portanto, a especificação exata da restrição de truncamento parece não ser simples. Segundo, se interpretarmos que as observações amostrais  $(t = 1, 2, \dots, T)$  estão disponíveis para  $A_t = \bar{A} + \alpha_t$ ,  $b_t = b + \beta_t$ ,  $c_t = \bar{c} + \gamma_t$ , onde  $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c})$  representa valores de parâmetros desconhecidos, então a distribuição amostral do vetor atividade  $x$  torna-se dependente da restrição sobre os elementos aleatórios  $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t$  imposta por viabilidade pelo plano amostral e pela forma da distribuição da população, cujos problemas foram levantados e apresentados métodos de solução por WALKUP & WETS<sup>19</sup> e outros. Terceiro, se considerarmos o vetor de decisão  $x$  não-estocástico no sentido de que, dadas as variações aleatórias em  $(A, b, c)$  e os modelos de PL associados, temos que determinar um valor  $x$  de solução ótima, então a especificação da atitude perante o risco se torna muito importante. Existem vários métodos neste campo, como exemplo podemos citar o método de CHARNES & COOPER (CCP)<sup>7</sup> o qual atribui a priori medidas de tolerância para as restrições.

### I.3 - Modelos em PLP

Essencialmente existem dois tipos diferentes de modelos em programação linear probabilística. Estes modelos são comumente conhecidos como modelo ativo (aqui e agora) e modelo passivo (espere e veja).

#### 3.1 - Modelo Passivo

Os problemas "espere e veja" estão baseados na hipótese de que temos condições de esperar pela realização das variáveis aleatórias e tomar decisões com informação completa sobre esta realização, i.é., se  $(\hat{A}, \hat{b}, \hat{c})$  é a realização do vetor aleatório  $(A, b, c)$ , temos que resolver o programa linear:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= \hat{c}'x \\ \hat{A}x &= \hat{b} \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

As questões neste caso são:

(i) Qual é a esperança do valor ótimo de (3.1)?

ou

(ii) Qual é a esperança e a variância deste valor ótimo?

De um modo mais geral,

(iii) Qual a distribuição de probabilidade do valor ótimo de (3.1)?

Como ilustração poderíamos ter a seguinte interpretação possível: suponhamos que um programa especial de produção (com estrutura linear) pode ser adaptado para qualquer "curto prazo" a realizações reais preços aleatórios, coeficientes tecnológicos aleatórios, e demandas aleatórias. Visando o planejamento do orçamento para um "longo prazo", i.é., para vários "curtos prazos", a diretoria da empresa deseja saber a quantidade de dinheiro necessária "em média" ou para "95% do tempo" para este programa de produção. Precisamente, a diretoria deseja saber a esperança de o percentil 95% da distribuição de probabilidade deste custo do programa especial de produção por "curto prazo".

### 3.2 - Modelo Ativo

Os problemas "aqui e agora" são baseados na seguinte informação: uma decisão sobre  $x$  - ou uma "estratégia" para  $x$  - tem que ser tomada antes ou pelo menos sem o conhecimento da realização das variáveis aleatórias.

Entendemos por "estratégia" para  $x$  como sendo o conceito de "estratégia mista" da teoria dos jogos dentro de um conjunto  $X$  de estratégias para  $x$ ; ou, equivalentemente, uma estratégia para  $x$  é uma medida de probabilidade  $P_x$  sobre um espaço de Borel  $X \subset \mathbb{R}^n$ . Se nos restringirmos a distribuições de probabilidade  $P_x$  tais que exista um  $\hat{x} \in X$  com  $P(\{\hat{x}\}) = 1$ , nos restringimos a estratégias puras, i.é., a decisões sobre  $x$  em vez de estratégias mistas de  $x$ 's.

A interpretação prática de uma estratégia é a hi-

põtese de que fazemos nosso jogo quase sempre com os  $x$ 's resultando de uma simulaçõ de Monte-Carlo da distribuiçõ de probabilidade  $P_x$  escolhida.

Existem dois mêtodos båsicos para o modelo ativo: programaçõ com probabilidade de restrições<sup>[7]</sup> e programaçõ com recursos<sup>[6]</sup> e <sup>[19]</sup>. Para maiores detalhes sobre a filosofia do modelo ativo recomendamos KALL<sup>[47]</sup>.



CAPÍTULO II - PROGRAMAÇÃO LINEAR PROBABILÍSTICA - PROCEDIMENTOS

## II. PROGRAMAÇÃO LINEAR PROBABILÍSTICA - PROCEDIMENTOS

### II.1 - Preliminares

A programação probabilística trata da teoria e métodos de incorporação de variações estocásticas de programação matemática. Por exemplo, no modelo padrão de programação linear.

$$\text{Max } Z = c'x \quad (1.1)$$

$$Ax \leq b \quad (1.2)$$

$$x \geq 0 \quad (1.3)$$

Os parâmetros do conjunto  $(A, b, c)$  são dados como números fixos e necessitamos determinar um vetor de decisão  $x$  sujeito as condições acima especificadas. Se os elementos do conjunto  $(A, b, c)$  são estocásticas, então variações aleatórias, são introduzidas em  $\theta$ , onde  $\theta$  denota o vetor com elementos  $(A, b, c)$ .

As fontes de variação aleatórias podem ser diversas, dependendo do tipo de problema e do tipo de decisões que desejamos chegar. Por exemplo, a distribuição de probabilidade de  $\theta$  pode ser conhecida e o problema é escolher um vetor de decisão  $x$  que, de algum modo, seja ótimo. Em outro caso, somente pode existir observações amostrais e temos que estimar os parâmetros populacionais desconhecidos e incorporá-los ao programa de modo a chegar a um vetor decisão  $x$  que, em certo sentido, seja ótimo.

Como vimos anteriormente, existem dois tipos de programação probabilística: o modelo passivo e o modelo ativo. Podemos notar que em ambos procedimentos a distribuição de probabilidade do vetor  $\theta$  é a figura central. No modelo passivo, a distribuição de probabilidade do valor ótimo da função objetivo é induzida e são geradas variações probabilísticas em torno das bases ótimas especificadas. No modelo ativo, restrições adicionais no espaço de decisão interagem com a distribuição de probabilidade do vetor  $\theta$  as quais ajudam o tomador de decisões comparar e avaliar distribuições alternativas de ganhos ótimos.

Neste capítulo, discutiremos os vários (principais) métodos de programação probabilística os quais usam um dos procedimentos acima para o tratamento das variações nos elementos de  $\theta$ .

## II.2 - Programação Linear Estocástica (Tintner & Sengupta)

Este método de programação probabilística, o que foi primeiramente sugerido por Tintner<sup>11</sup>, se preocupa com a especificação da distribuição estatística da função objetivo e suas implicações para a tomada de decisões sob risco. Aqui se faz a hipótese que no programa linear definido por (1.1), (1.2) e (1.3) os elementos dos vetores  $b$ ,  $c$  e da matriz  $A$  são variáveis aleatórias com uma distribuição de probabilidade conhecida, digamos:

$$P(A, b, c) \quad (2.1)$$

Por outro lado, este método se enquadra nos problemas de distribuição pois ele tenta derivar a distribuição estatística da função objetiva  $Z$ , enquanto que os problemas de valor esperado (Dantzig<sup>16</sup> e Madanky<sup>17</sup>) consideramos a otimização do valor esperado da função objetivo.

Antes de apresentarmos os métodos usados em PLE vamos descrever a visão de variação paramétrica proposta por Tintner & Sengupta dentro do contexto de programação probabilística, sendo que foram consideradas variações no vetor  $c$ , no vetor  $b$ , na matriz  $A$  e em todos parâmetros.

---

1 - O método de Tintner & Sengupta chama-se programação linear estocástica para diferenciá-lo dos dois métodos de Charnes & Cooper (programação com restrições probabilísticas) e de Dantzig (programação a dois estágios sob incerteza).

## 2.1 - Variações no Vetor C

O caso mais simples de variações nos parâmetros se dá quando somente o vetor  $c$ , no modelo de PL (1.1), (1.2) e (1.3), é aleatório com média e covariâncias finitas. Neste caso, podemos definir o valor esperado e a variância dos ganhos e podemos especificar um modelo tipo portfólio (Markowitz) onde a função objetivo original pode ser substituída pela função de ganhos esperados sujeito a uma restrição adicional de que a variância dos ganhos deve permanecer dentro de limites de tolerância especificados. Podemos gerar um conjunto completo de pontos  $(E, V)$  onde  $E$  = ganho esperado e  $V$  = variância dos ganhos, através de uma variação paramétrica dos limites de tolerância. Assim, as soluções associadas com o espaço  $x$  são candidatas a decisões ótimas.

Se existir qualquer informação sobre a distribuição de probabilidade do vetor  $c$ , será mais vantajoso incorporá-la dentro da lógica de especificação das decisões ótimas. Para o caso onde  $c$  tem distribuição normal multivariada<sup>1</sup>, Sengupta & Portillo - Campbell<sup>3</sup> apresentaram um método chamado Programação "Fractile" o qual maximiza um "Fractile" específico da distribuição de ganhos sujeito as mesmas restrições. Este método transforma o modelo de PL (1.1), (1.2) e (1.3) em

---

1 - O vetor  $c$  tem distribuição normal multivariada com vetor de media  $m$  e matriz de covariância  $V$  assim a função objetivo  $z = c'x$  é distribuída como uma variável normal  $N(m'x, x'Vx)$

$$\begin{aligned} \text{Maximizar } f(x) &= m'x - k \cdot (x'Vx)^{1/2} \\ \text{s.a.} \quad Ax &\leq b \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

onde  $k = -F^{-1}(\alpha)$  e  $F(\omega)$  é a função distribuição de uma variável normal unitária e  $\alpha = 0.99$  indica uma medida "Fractile" pré-atribuída (por exemplo, com  $\alpha = 0.99$  a constante  $k = 2.33$ , pelas tabelas da normal padrão<sup>[4]</sup>). Computacionalmente o método "Fractile" apresenta uma dificuldade, isto é, a estrutura do problema (2.3) não se enquadra no programa típico de programação quadrática, como é o problema do portfólio ( $\text{Min}_x x'Vx, Ax \leq b, x \geq 0, m'x \geq Z_0$ ), por causa do termo contendo a raiz quadrada  $(x'Vx)^{1/2}$ , assim, não podemos aplicar os algoritmos padrões de programação quadrática. No entanto, podemos recorrer a um algoritmo desenvolvido por KATAOKA<sup>[5]</sup> o qual tem quatro passos básicos:

PASSO 1: Negligencia o termo não linear  $k(x'Vx)^{1/2}$  no problema (2.3) e então resolve o programa linear (1.1)-(1.3) e denota a solução ótima por  $x_0$ .

PASSO 2: Usa o vetor solução ótima  $x_0$  obtido no Passo 1 para calcular  $R_0 = x_0'Vx_0$  e então trata  $R_0$  como uma constante, formulando o problema de programação quadrática padrão como:

$$\text{Maximizar } [m'x - k (R_0^{-1/2} \cdot x'Vx)] \quad (2.4)$$

$$\text{s.a.} \quad Ax \leq b \quad x \geq 0$$

e denotar o vetor de solução ótima deste programa quadrático pelo vetor  $x_0^{(1)}$ .

PASSO 3: Usando o vetor solução ótima  $x_0^{(1)}$  do Passo 2 calcular o novo valor de  $R_0$  denotado por  $R_0^{(1)} = (x_0^{(1)' } V x_0^{(1)})$  e com este valor formular o novo programa quadrático como no Passo 2, apenas substituindo  $R_0$  por  $R_0^{(1)}$ .

PASSO 4: Continuar o processo de iteração até que  $R_0^{(k)}$  convirja no sentido de que  $R_0^{(k)}$  seja aproximadamente igual a  $R_0^{(k+1)}$  para algum  $k$ . Por exemplo,  $|R_0^{(k)} - R_0^{(k-1)}| / R_0^{(k)} \leq \epsilon$ , para um dado  $1 > \epsilon > 0$ .

## 2.2 - Variações no Vetor b

Como o dual do modelo de P.L. (1.1) - (1.3) teria o vetor  $b$  na função objetivo, muitos problemas de variações no vetor  $b$  podem ser analisados pelo método da secção anterior. Contudo, existem alguns problemas adicionais neste caso devido às inequações no espaço de restrições. Existem pelo menos três tipos diferentes de caracterização podendo ser encontradas na literatura. Primeiro, existe o procedimento da função penalidade o qual introduz penalidades para violações das restrições e junta os custos penalidades esperados como uma faceta adicional da função objetivo. Por exemplo, se existe um custo penalidade  $h_i > 0$  por unidade para cada violação da  $i$ -ésima restrição, isto é,  $b_i \geq a_i x$  e as restrições tem probabilidades finitas de violação, então o custo penalidade total esperado é  $E(\sum_i h_i y_i)$  onde

$y_i$  é a margem de segurança (i.é,  $a_i'x + y_i = b_i$ ;  $y_i \geq 0$ ). O problema se reduz a

$$\text{Maximizar } f(x, y) = c'x - Eh'y$$

$$\text{s.a. } Ax + Iy = b, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \quad (2.5)$$

onde  $I$  é a matriz identidade. Podemos notar que este método está basicamente relacionado com o método de programação a dois estágios sob incerteza (Dantzig<sup>[6]</sup>) o qual trataremos mais adiante.

As outras caracterizações se referem ao procedimento programação com restrições probabilísticas (Charnes & Cooper<sup>[7]</sup>) que também discutiremos neste capítulo.

### 2.3 - Variações na Matriz A

No caso de observarmos mudanças na matriz de coeficiente  $A$  então consideraremos modelos de PL (1.1) - (1.3) substituindo  $A$  por  $A^{(k)}$ , onde  $k$  denota o conjunto de índices  $k = 1, 2, \dots, N$ . Vamos considerar o subconjunto  $k = 1, \dots, K$ , onde  $K \leq N$  para o qual as condições de viabilidade  $A^{(k)}x \leq b$ ,  $x \geq 0$  e portanto as condições de otimalidade são satisfeitas. Denotamos por  $x^{(k)}$  e  $z^{(k)}$  as soluções ótimas e ganhos ótimos respectivamente para o subconjunto ( $k = 1, 2, \dots, K$ ). Dadas as medidas de probabilidades associadas com  $\{A^{(k)}, k = 1, 2, \dots, K\}$ , a distribuição de ganhos ótimos é determinada pela sequência  $\{z^{(k)}, k = 1, 2, \dots, K\}$ . Se a distribuição subsequente pode ser estimada ou aproximada, suas características podem ser usadas de várias maneiras na tomada de decisão.



Primeiro, as observações  $\{A^{(k)}, k = 1, 2, \dots, K\}$  verificadas pelas condições de viabilidade, conduzindo a uma distribuição de ganhos ótimos, adquire uma penetração dentro de suas características (ex. se ela está próxima ou não da normal). A distribuição estimada pode ser usada para determinar uma nova função critério em termos de valor esperado.

Segundo, podemos impor regras adicionais de decisão antes de utilizarmos as características da distribuição de ganhos. Por exemplo, a decomposição do vetor  $b$  de recursos em termos de razões de alocação, i.é

$$b_i = \sum_{j=1}^n b_{ij} u_{ij}, \quad u_{ij} \geq 0, \quad \sum_j u_{ij} \leq 1 \quad (2.6)$$

onde a matriz  $U = [u_{ij}]$ , contendo as variáveis de decisão, pode fornecer ao tomador de decisão um conjunto de escolhas alternativas. Pela seleção e pré-atribuição de matrizes de alocação específicas, podemos comparar distribuição de ganhos condicionais alternativas.

#### 2.4 - Variações em todos Parâmetros

O caso geral de variações em todos parâmetros ( $A$ ,  $b$ ,  $c$ ) tem sido considerado por programação linear estocástica, programação com restrições probabilística e programação a dois estágios sob incerteza. Na estrutura de programação linear estocástica, além da caracterização dos problemas de distribuição (amostral e populacional), dois outros aspectos são relevantes:

- (i) caracterização de mudanças sistemáticas e não sistemáticas no conjunto de parâmetros  $S_k = (A^{(k)}, b^{(k)}, c^{(k)})$ .

Um procedimento muito interessante diz respeito a introdução de ordenação no espaço de parâmetros e aplicar uma análise baseada na programação recursiva (Sengupta<sup>[8]</sup>). Para fixar as idéias, suponhamos que o conjunto  $S = (a_{ijt}, b_{it}, c_{jt}; t = 1, \dots, t)$  seja não-negativo para todo  $t$  tal que os elementos estão ordenados como seguem:

$$a_{ij1} \geq a_{ij2} \geq \dots \geq a_{ijt}$$

$$b_{i1} \leq b_{i2} \leq \dots \leq b_{it} \quad i = 1, \dots, m; \quad (2.7)$$

$$c_{j1} \leq c_{j2} \leq \dots \leq c_{jt} \quad j = 1, \dots, n$$

onde  $t$  representa o nº de observações. Suponhamos que para cada  $t = 1, 2, \dots, t$  fixo, o modelo de PL, baseado num conjunto específico de parâmetros, tenha soluções ótimas finitas. Assim, por construção, o ganho ótimo para  $(a_{ij1}, b_{i1}, c_{j1})$  é o mínimo e para  $(a_{ijt}, b_{it}, c_{jt})$  é o máximo.

- (ii) Caracterização da decisão considerando-se restrições significantes e operacionais quando existe variação simultânea em todos parâmetros.

o problema geral é o seguinte:

"Denotar o ganho ótimo para  $z = z(x, S)$ , uma fun-

ção de  $x$  e dos parâmetros, onde  $S = (A^{(k)}, b^{(k)}, c^{(k)}; k = 1, 2, \dots, k)$ . O tomador de decisões pretende escolher uma política  $x = \bar{x}$  tal que  $E z(\bar{x}, S)$  seja máxima, onde  $E = \text{esperança}$ ".

## 2.5 - Procedimento passivo para PLE

O modelo passivo para PLE desenvolvido por Tintner<sup>19</sup> supõe que ocorreram as realizações das variáveis aleatórias  $S_k = (A^{(k)}, b^{(k)}, c^{(k)})$  no problema de PL

$$\begin{aligned} \text{Max } z^{(k)} &= c^{(k)}x \\ \text{s.a. } A^{(k)}x &\leq b^{(k)} \\ x &\geq 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

onde  $k = 1, 2, \dots, N$  denota uma seleção específica do conjunto de índices de observações. Semelhante aos itens 2.3 e 2.4. Consideremos o espaço de parâmetros coberto pelos elementos aleatórios de  $S = (A, b, c)$ . Seja  $V^{(k)}$  a região neste espaço de parâmetros onde a função objetivo  $z^{(k)} = c^{(k)}x$  é viável (i.e.,  $x$  é um vetor viável), ótima e finita, denotaremos por  $Z^{(k)*}$  este vetor ótimo, para cada uma das seleções. Podemos notar que algumas seleções não são viáveis e por conseguinte consideremos o conjunto de índices  $k = 1, 2, \dots, K$  onde  $K \leq N$ , para derivar a distribuição da função objetivo.

Aqui aparecem duas questões levantadas por Tintner<sup>11</sup>:

- (i) Deve-se entender que a aleatoriedade dos coeficientes ( $A, b, c$ ) introduz no programa estocástico um novo elemento desconhecido para a estrutura determinística onde os coeficientes são fixos e conhecidos. O novo elemento é tal que temos uma distribuição de probabilidade para os ganhos ótimos e uma distribuição de probabilidade do vetor de solução ótima.

Tintner<sup>11</sup> mostrou que, por causa de truncamentos e restrições no espaço de parâmetros, o simples conhecimento da distribuição dos elementos de  $S = (A, b, c)$  não é suficiente para determinar a distribuição das soluções ótimas e também dos ganhos ótimos.

- (ii) Como estimar e calcular numericamente a função distribuição da solução ótima e do máximo, quando as variações aleatórias estão especialmente estruturadas em torno de um conjunto de valores  $\bar{S} = (\bar{A}, \bar{b}, \bar{c})$  específico que, por exemplo, pode ser o valor esperado dos coeficientes aleatórios?

Em algumas aplicações a problemas de planejamento econômico Sengupta<sup>10</sup> encontrou que a distribuição probabilística empírica de ganhos ótimos nem sempre é normalmente distribuído e mesmo para determinar a forma da distribuição de probabilidade não é um problema trivial.

### 2.5.1 - Distribuição da solução ótima

Seja  $y$  um  $m$ -vetor coluna de variáveis de folga e  $I$  a matriz de identidade de ordem  $m$ . Então, substituímos as  $m$  restrições por:

$$Ax + Iy = b$$

$$x \geq 0, y \geq 0 \quad (2.9)$$

Definindo os vetores e as matrizes

$\bar{c} = (c, 0)$ ,  $\bar{x} = (x, y)$ ,  $\bar{A} = (A, I)$  ; onde  $\bar{c}((m+n) \times 1)$ ,  $\bar{x}((m+n) \times 1)$  e  $A(m \times (m+n))$ , o problema de PL original torna-se:

$$\text{Maximizar } z = \bar{c}'\bar{x}$$

$$\text{s.a. } \bar{A}\bar{x} = b \quad (2.10)$$

$$x \geq 0$$

Qualquer subconjunto do conjunto de índices  $k = 1, 2, \dots, N$  no espaço amostral denotado por  $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c})_k$  é admissível se e somente se satisfaz as três seguintes situações.

- (a) Os elementos do vetor  $\bar{c}$  estão sujeitos somente a distribuições de probabilidade não-negativas, i.é, a probabilidade de qualquer elemento de  $\bar{c}$  tomando um valor negativo é zero.

Os elementos  $\bar{A}$  e  $\bar{b}$  não estão sujeitos a qualquer restrição desse tipo.

(b) O espaço amostral gerado por  $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c})_k$  é tal que contem mais de uma solução básica viável, i.é, se um valor amostral particular de  $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c})$  não satisfaz as restrições de (2.10), tanto porque ele leva a um conjunto de equações inconsistentes ou porque ele leva a um conjunto ilimitado de soluções, então essa amostra particular é definida como sendo inadmissível.

(c) O espaço amostral gerado por  $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c})_k$  é tal que ele satisfaz as condições de um problema comum de PL não-estocástica, i.é, o problema de programação que tem um conjunto não-vazio de soluções básicas e que não é degenerado. Nas suposições implicam que para cada  $k$  pertencente ao espaço amostral admissível  $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c})_k$  do problema (2.10), onde  $k$  denota um valor amostral particular, devemos ter:

$$(c_1) \text{ Rank } [\bar{A}, \text{ para todo } k \text{ admissível}] = m$$

(c<sub>2</sub>) Os pontos caracterizados por  $(\bar{A}, \bar{b}, \bar{c})_k$  para todo  $k$  admissível não devem estar indefinidos no espaço amostral, i.é, devem ser não singulares de algum modo.

(c<sub>3</sub>) O valor máximo do problema primal satisfazendo (2.10) e denotado por  $(\max z)_k$  deve ser limitado para todo  $k$  admissível.

Pelo método de seleção (método combinatorial de seleção completa) existem no máximo  $k = \binom{n+m}{m}$  seleções possíveis, nem todas satisfazendo as condições de não-negatividade. Para cada seleção, escolhamos  $m$  elementos do vetor  $\bar{c}$  e  $\bar{x}$  e as  $m$  colunas correspondentes de  $\bar{A}$ . Denotemos a seleção  $k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) por um índice. Então teremos

$$\begin{aligned} z^{(k)} &= (\bar{c}^{(k)})' \bar{x}^{(k)} \\ \bar{A}^{(k)} \bar{x}^{(k)} &= b \end{aligned} \quad (2.11)$$

se a solução  $\bar{x}^{(k)}$  para a seleção  $k$  são não-negativas, então chamaremos de solução viável. Tomando apenas as soluções viáveis dentro das  $k$  possíveis seleções, calculamos

$$\bar{z}^* = (\max_k z^{(k)} \mid \text{seleção } k \text{ é viável}) \quad (2.12)$$

Agora vamos considerar a distribuição de probabilidade conjunta dada por (2.1), onde o espaço de parâmetros é definido como o intervalo total de variação dos elementos aleatórios do conjunto  $(A, b, c)$ . Seja  $S_k$  a região do espaço de parâmetros onde a  $k$ -ésima seleção é viável, i.é.,  $\bar{x}^{(k)} \geq 0$ . Seja  $T_k$  a região onde  $z_k$  atinge seu máximo. Além disso, seja

$$V_k = S_k \cap T_k \quad (2.13)$$

onde  $V_k$  é a interseção de duas regiões  $S_k$  e  $T_k$  definindo a região onde a seleção  $k$  é tanto viável como maximal (ótima). Considerando-se a distribuição de probabilidade de todos pontos em cada região  $V_k$ , podemos calcular a distribuição de probabilidade do máximo  $\bar{z}^*$  por métodos numéricos e aproximados; esta distribuição quando não-degenerada pode ser utilizada para especificar regras de tomada de decisões ótimas sob risco.

Por exemplo, se  $Q(\bar{z}^*)$  denota a distribuição de probabilidade do máximo  $z^*$ , o qual provem da distribuição de probabilidade (2.1), então isto nos fornece várias sugestões de regras alternativas de decisões viáveis as quais são candidatas a regra de decisão ótima, como seguem:

- (i) Os primeiros quatro momentos<sup>1</sup> da distribuição  $Q(\bar{z}^*)$  indicariam a probabilidade de alcançar qualquer valor específico da função objetivo ( $z_0$ ), i.é,  $\Pr(\bar{z}^* \leq z_0)$ .
- (ii) Os intervalos de confiança e outros limites probabilísticos para  $\bar{z}^*$  poderiam também ser calculados de modo que, para qualquer valor particular  $z_0$ , um valor  $\alpha_0$  de probabilidade restrita poderia ser calculado, e isto pode fornecer índices de sensibilidade.

---

1 - Média, variância, curtose, assimetria.



- (iii) É possível derivar os limites e inequações, para qualquer vetor  $\bar{x}^*$  de solução ótima correspondendo a  $\bar{z}^*$ , por métodos estatísticos tanto paramétricos como não-paramétricos.
  
- (iv) Em alguns casos, quando somente os coeficientes da função objetivo são variáveis aleatórias, a variância do  $\bar{z}^*$  ótimo em relação ao valor esperado (quando for alta) pode indicar a necessidade de adotar-se políticas mais cuidadosas baseadas nos pontos extremos em vez de pontos extremos ótimos. (seleção da segunda melhor ou da terceira melhor solução etc.)

#### 2.5.2 - Testes não paramétricos

No procedimento passivo temos dois tipos de métodos para resolução de um problema de PLE: Método Indireto e Método Direto. Neste item, além de ilustrar o procedimento passivo, aplicaremos alguns testes estatísticos não-paramétricos para testar a diferença entre as distribuições derivadas dos métodos indireto e direto.

##### (i) Método Indireto

Neste método a distribuição de probabilidade da função objetivo é derivada empiricamente atribuindo-se valores amostrais diferentes pa

ra  $(A^k, b^k, c^k)$  do problema de PL. Seja o seguinte exemplo:

Exemplo 2.1:

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.a. } a_{11} x_1 + a_{12} x_2 \leq 104$$

$$a_{21} x_1 + a_{22} x_2 \leq 0,014$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0$$

a função objetivo significa que a renda nacional  $z$  tem duas componentes,  $x_1 =$  bens de investimento e  $x_2 =$  bens de consumo. Os  $a_{ij}$  são os coeficientes de insumo-produção, no entanto estes valores geralmente contêm erros devido a medida e portanto sempre existe alguma incerteza. Para o exemplo acima, selecionamos os seguintes valores amostrais:

$$(a_{11}, a_{12}) = \{(7.1428, 0.5701); (1.0905, 0.4801); \\ (3.0959, 0.7003); (6.4102, 3.2467); \\ (2.3981, 0.4801); (2.0000, 1.9011); \\ (5.0000, 3.4722); (2.3474, 3.3333); \\ (3.5842, 3.0395); (5.4644, 3.7450); \\ (3.6364, 4.3290); (2.5445, 4.1152); \\ (3.4722, 4.6511); (3.7735, 4.3668); \\ (3.1746, 3.0675); (3.4965, 1.4641)\}$$

O método indireto resolve problemas de P.L. para cada um destes 16 valores, por exemplo, o primeiro PPL é

$$\text{Maximizar } z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.a. } 7.1428 x_1 + 0.5701 x_2 \leq 104 \quad (\text{capital})$$

$$0.00025 x_1 + 0.00041 x_2 \leq 0.014 \quad (\text{m\~{a}o-de-obra})$$

$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0$$

Usando o m\u00e9todo simplex a solu\u00e7\u00e3o \u00f3tima \u00e9 dada por:  $z^{(1)} = 38.8144$ . Do mesmo modo, resolvemos outros 15 problemas e os valores \u00f3timos est\u00e3o na tabela 2.1. Assim podemos resumir o m\u00e9todo indireto como:

"Selecionamos uma amostra de tamanho pr\u00e9-definido  $k$  e para cada elemento da amostra  $(A^k, b^k, c^k)$ ,  $k = 1, \dots, K$ , resolvemos um PPL deterministico".

Pela varia\u00e7\u00e3o dos coeficientes dentro de um intervalo plaus\u00edvel, podemos analisar o impacto da incerteza na fun\u00e7\u00e3o objetivo.

### (ii) M\u00e9todo Direto

Aqui ajustamos as distribui\u00e7\u00f5es emp\u00edricas de probabilidade aos coeficientes de insumo-produ\u00e7\u00e3o, e ent\u00e3o estimamos a distribui\u00e7\u00e3o de probabilidade da fun\u00e7\u00e3o objetivo. Usando os valores amostrais dos coeficientes  $a_{11}$  e  $a_{12}$  no exemplo 2.1 podemos ajustar a distribui\u00e7\u00e3o de probabilidade para estes dados<sup>[2]</sup>. Denotamos

$$f(a_{11}) = \text{distribui\u00e7\u00e3o de probabilidade de } a_{11}$$

$f(a_{12})$  = distribuição de probabilidade de  $a_{12}$

assim

$$f(a_{11}) = 6.0930 \left( 1 + \frac{a_{11}}{1.6904} \right)^{-0.3887} \left( 1 - \frac{a_{12}}{2.5645} \right)^{-0.5897}$$

$$f(a_{22}) = 47.8227 \left( 1 + \frac{a_{12}}{7.3612} \right)^{2.1789} \left( 1 - \frac{a_{12}}{0.7676} \right)^{0.2272}$$

cujas distribuições são conhecidas na literatura estatística como "Distribuição BETA". Para calcular a distribuição da função objetivo adota-se o procedimento de BABBAR (veja Sengupta, Tintner e Morrison<sup>[11]</sup>) o qual nos fornece os seguintes resultados

Probabilidade Acumulada	$a_{11}$	Probabilidade Acumulada	$a_{12}$
0.05	0.00098	0.05	0.61088
0.6589	2.32377	0.3152	1.62194
0.8310	4.64656	0.6848	2.63300
0.95	6.96935	0.95	3.64406

Estes dados nos dão 16 pares de  $(a_{11}, a_{12})$ . O primeiro PPL é:

$$\text{Max } z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.ã } 0.0010 x_1 + 0.6109 x_2 \leq 104 \quad (\text{capital})$$

$$0.00025 x_1 + 0.000413 x_2 \leq 0.014 \quad (\text{mão-de obra})$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

O método simplex nos dá a solução ótima  $z^{(1)} = 33.898$ . Do mesmo modo, resolvemos, 16 PPL e agrupamos as soluções ótimas na tabela 2.1.

Podemos resumir o método direto como segue:

"Ajustamos as distribuições de probabilidade aos elementos (A, b, c) e então estimamos a distribuição de probabilidade da função objetivo. Neste método geramos cada elemento  $(A^k, b^k, c^k)$  aleatoriamente e em seguida resolvemos o PPL determinístico"

(iii) Teste de Kolmogorov - Smirnov

Os dados da tabela 2.1 são agrupados a fim de se obter as distribuições acumuladas da tabela 2.2.

O teste de Kolmogorov - Smirnov baseia-se no seguinte resultado<sup>[1,2]</sup>.

Resultado 1: Seja  $x_1, \dots, x_N$  variáveis aleatórias identicamente distribuídas tendo função de distribuição  $F_X(\cdot) = F(\cdot)$ . Definimos

$$D_N = d_n(x_1, \dots, x_N) = \sup_{-\infty < x < \infty} [F_n(x) - F(x)]$$

onde  $F_n(x)$  é a função de distribuição amostral. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n(x) - F(x)}{\sqrt{n} D_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} P[\sqrt{n} D_n \leq x]$$

Tabela 2.1

Valores M̄aximos Ordenados das 16 Amostras	
M̄todo Direto	M̄todo Indireto
28.5396	22.3600
28.5396	23.8160
28.5396	24.0204
33.8983	29.9520
34.9809	32.0320
35.8047	33.9035
37.1294	34.1168
37.3840	34.6492
38.8794	38.8144
39.1774	42.1190
41.5847	45.7532
41.8712	50.3270
48.3148	52.2819
50.7219	56.0000
M̄dia 38.0558	35.8243

Tabela 2.2

Distribuição Acumulada dos Métodos Direto e Indireto					
Valores Ótimos	Frequências		Dist. Acumulada		Freq. Acumulada
	MD	MI	MD	MI	
22 - 24	0	3	0	0,1875	0,1875
25 - 27	0	1	0	0,25	$0,25 = \frac{4}{16}$
28 - 30	3	2	0,1875	0,375	0,1875
31 - 33	0	1	0,1875	0,4375	0,1875
34 - 36	5	3	0,5	0,625	0,125
37 - 39	4	1	0,75	0,6875	0,0625
40 - 42	2	1	0,875	0,75	0,125
43 - 45	0	0	0,875	0,75	0,125
46 - 48	1	1	0,9375	0,8125	0,125
49 - 51	1	1	1	0,875	0,125
52 - 54	0	1	1	0,975	0,0625
55 - 57	0	1	1	1	1

Aqui fazemos o seguinte teste:

$H_0 : X_i \sim F_0(\cdot)$ , onde  $F_0(\cdot)$  é uma função distribuição específica onde a estatística de Kolmogorov  $K_n = \sqrt{n} \sup_{-\infty < x < \infty} [F_n(x) - F_0(x)]$  é usada, rejeitando  $H_0$  se, e somente se,  $k_n > k_{1-\alpha}$  onde  $k_{1-\alpha}$  é o valor tabelado<sup>[13]</sup>.

Pela tabela 2.2 observamos que a maior discrepância entre duas séries é 4/16. O numerador desta maior diferença é  $k_D = 4$ . Pela tabela L de Siegel<sup>[13]</sup> temos que para  $N = 16$ ,  $\alpha = 0.01$ , o valor  $k_{1-\alpha} = 10$  e para  $\alpha = 0.05$   $k_{1-\alpha} = 8$ . Assim concluímos que as distribuições derivadas de ambos métodos provem da mesma população.

#### (iv) Teste de Rényi

Seja  $x_1, x_2, \dots, x_n$  uma amostra de tamanho  $n$  de uma variável aleatória com distribuição  $F$  e seja  $F_n$  a distribuição empírica da amostra. A. Rényi<sup>[14]</sup> sugeriu três estatísticas

$$\text{Sup}_{F_n(x)} \geq a \left[ F_n(x) - F(x) \right] \quad (2.14)$$

$$\text{Sup}_{F_n(x)} \geq a \left\{ (F_n(x) - F(x)) / F_n(x) \right\} \quad (2.15)$$

$$\text{Sup}_{F_n(x)} \leq b \left[ F_n(x) - F(x) \right] \quad (2.16)$$

A estatística de Rényi difere de Kolmogorov - Smirnov porque ele considerou o erro relativo dado pela eq. (2.15). Este tipo de estatística é particularmente eficaz em PLE, onde



as diferenças entre as distribuições ajustadas pelo método direto e indireto devem ser avaliadas nas caudas superiores e inferiores da distribuição.

As distribuições exatas para as três estatísticas de Rényi foram calculadas por Birnbaum and Lientz<sup>|15|</sup>. De acordo com a notação de<sup>|15|</sup>

$$P_1(n, a, c) = P[EQ(2) < c] \quad (2.17)$$

$$P_2(n, a, c) = P[EQ(3) < c] \quad (2.18)$$

$$P_3(n, a, c) = P[EQ(4) > c] \quad (2.19)$$

Para valores de uma amostra dada de tamanho  $n$ , um valor de  $a$  ou  $b$  e um nível de significância, existem tabelas para encontrar o valor mínimo de  $c$  tal que as inequações (2.17) ou (2.19) são satisfeitas e também as probabilidades  $P_1$ ,  $P_2$  ou  $P_3$  são dadas.

No nosso exemplo, denotamos  $F_n(x)$  = distribuição ajustada pelo método direto e  $F(x)$  = distribuição ajustada pelo método indireto: então usando as informações na tabela 2.2 podemos construir os valores da estatística de Rényi dados eq.(2.15) acolhendo  $a = 0.8$  arbitrariamente obtemos da tabela 2.3

$$\text{Sup}_{F_n(x) > 0.8} \{(F_n(x) - F(x))/F_n(x)\} = \frac{1}{7}$$

pelo valor da tabela dada por Birnbaum and Lientz<sup>|15|</sup>  $c = 0.30$

para  $\alpha = 0.05$  e  $P_2 = 0.964953$  isto implica que as distribuições ajustadas pelos dois métodos provem da mesma população.

Tabela 2.3

Valores da Estatística de Rényi $(F_n(x) - F(x)) / F_n(x)$
$\infty$
$\infty$
-1
- 1.33
0.25
0.0833
$0.1429 = \frac{1}{7}$
0.1429
0.1333
0.125
0.0625
0

## 2.6 - Procedimento ativo em PLE

A versão de Tintner & Sengupta para o procedimento ativo incorpora variáveis de decisão adicionais definidas pela matriz de alocação  $U = [u_{ij}]$  onde

$$b_i = \sum_{j=1}^n b_i u_{ij} \quad u_{ij} \geq 0 \quad \sum u_{ij} = 1 \quad (2.20)$$

cujas restrições são introduzidas no PPL original.

Usando-se estas variáveis de decisão o procedimento passivo especifica um problema separável para cada  $x_j$  como segue:

$$\text{Maximizar } z = c_j x_j$$

$$\text{s.a. } a_{ij} x_j \leq b_i u_{ij} \quad (2.21)$$

$$u_{ij} \geq 0, \sum_{j=1}^n u_{ij} = 1, x_j \geq 0 \quad (i=1, \dots, m ; \\ j=1, \dots, n)$$

Novamente, o problema é o ajustamento da distribuição de probabilidade de  $\{ \max z \}$  dado a distribuição de probabilidade (2.1). No entanto, a distribuição de probabilidade da função objetivo ótima também dependerá da matriz de alocação  $U = [u_{ij}]$ . Como exemplo, consideremos o problema de planejamento econômico. Aqui as proporções  $u_{ij}$  podem ser alocações para várias indústrias e o comando central considerará as distribuições de probabilidade da função objetivo  $z$  maximal gerada por estas alocações.

Seria interessante apontar algumas características do procedimento ativo. Em primeiro lugar, na interpretação do procedimento ativo como um modelo político, os elementos  $u_{ij}$  podem ser considerados como variáveis instrumentais as quais podem ser escolhidas apropriadamente para otimizar um funcional de risco-preferência associado com a função objetivo. Seja  $z_a$  o valor da função objetivo no procedimento ativo e seja  $U$  e  $\tilde{U}$  dois conjuntos diferentes de alocação de recursos os quais poderiam ser selecionados por um planejador. Desde que, em cada caso,

todos recursos devem ser totalmente alocados de acordo com (2.20), as seleções  $U$  e  $\tilde{U}$  representam apenas alocações relativas diferentes para cada recurso  $i = 1, 2, \dots, n$ . As distribuições de probabilidade para  $\{\max z_a\}$  resultantes destas duas soluções estão ilustradas na figura 2.1

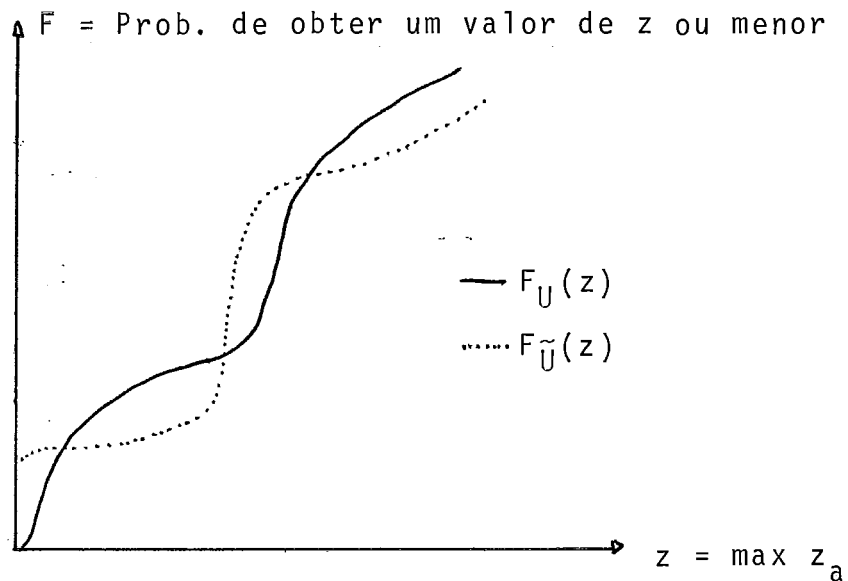


Figura 2.1

Desde que na programação linear estocástica supomos que uma função de risco preferência (função utilidade) está disponível a qual permite uma ordenação entre todos pares como  $F_U$  e  $F_{\tilde{U}}$ , com esta hipótese o problema é formalmente resolvido no "nível político" quando as distribuições de probabilidade são conhecidas para cada matriz  $U$  admissível. Em princípio, diferentes linhas de decisão podem ser comparadas. Por exemplo, se a função risco-preferência é tal que apenas regras de decisão linear, cujas regras dependem por definição do primeiro momento<sup>1</sup> das funções distribuições  $F_U$  e  $F_{\tilde{U}}$ , são consideradas pelo planejador, então a matriz de alocação  $U$  pode ser suposta "melhor"

1 - Valor esperado

que  $\tilde{U}$  a medida que o primeiro momento (valor esperado) de  $F_U$  exceda  $F_{\tilde{U}}$ .

Podemos notar também que a introdução de restrições de decisão adicionais por meio de variáveis de decisão  $u_{ij}$  tem o efeito de truncamento da distribuição estatística do valor ótimo da função objetivo do procedimento passivo, i.é, supondo que uma matriz de alocação particular  $U^{(1)}$  é escolhida a princípio em uma base a priori; então com observações a mais dos dados e os resultados de uma especificação completa da distribuição de probabilidade, outra matriz de alocação  $U^{(2)}$  pode ser selecionada (digamos por considerações de variância mínima), e assim por diante; visto que se a distribuição "completa da função objetivo ótima é estimada com base em grandes amostras de dados com um razoável grau de confiabilidade, então a matriz de alocação ótima pode ter sido  $U^*$ , onde o ótimo é definido pelo funcional de risco-preferência (função utilidade). No caso da matriz de alocação ótima  $U^*$ , não temos ponto de truncamento em qualquer estágio, desde que tenhamos especificação completa da distribuição de probabilidade da função objetivo e também do funcional de Risco-preferência. Neste aspecto, pelo modo sequencial de manipular com novas observações, o procedimento passivo pode ser útil na sugestão de critérios para mudar de uma regra de decisão ótima para outra, já que a distribuição de probabilidade da função objetivo é especificada cada vez menos incompleta.

## 2.7 - Relações entre os Procedimentos Passivo e Ativo

Neste item analizaremos as relações matemáticas en

tre os dois procedimentos e derivaremos algumas inequações para o caso onde os coeficientes da matriz das inequações são variáveis aleatórias. Por outro lado, apresentaremos limites para o valor da função objetivo.

Consideremos os espaços de parâmetros  $L_p$  e  $L_a$  para os procedimentos passivo e ativo respectivamente, onde supomos que em todas situações possíveis, i.é, para todas variações possíveis dos elementos aleatórios, as condições de um programa linear não-estocástico são satisfeitas e um máximo finito é alcançado. Indexamos cada seleção viável por  $i = 1, 2, \dots, I_0$  e o valor correspondente da função objetivo por  $z_i, i = 1, 2, \dots, I_0$ , que por hipótese pode ser arranjada numa ordem ascendente de valores e o ótimo alcançado. Este método de seleção também pode ser aplicado para o procedimento ativo para alguma escolha específica da matriz de alocação  $U$  e algumas observações amostrais do termo  $(A, b, c)$ . Agora, seja  $V_p$  e  $V_a$  aquelas subregiões nos espaços de parâmetros  $L_p$  e  $L_a$ , onde existem seleções viáveis as quais sempre tem soluções  $x$  com ótimo finito.

Definição:<sup>1</sup> Uma única observação amostral de  $(A, b, c)$  é dita ser admissível se e somente se aquela amostra gera soluções pertencentes as subregiões  $V_p$  e  $V_a$ .

Sejam  $k = 1, 2, \dots, K$  os índices do conjunto de observações amostrais dos parâmetros do problema e denotemos, daqui por diante, por  $z^{(k)}$  o valor máximo da função objetivo  $z = c'x$  de uma  $k = \bar{e}$ sima seleção do conjunto  $(A, b, c)$  admissível, composto de elementos aleatórios. Com respeito ao procedimento ativo Sengupta, Tintner and Millham<sup>2</sup> definiram três estádios de

seleção:

(i) Temos A k-ésima observação amostral ( $k \in K$ ) dos parâmetros aleatórios.

(ii) Para uma k-ésima amostra fixa admissível temos uma possível seleção de uma matriz de alocação  $U^*$  ótima dentre o conjunto de todas possíveis matrizes de alocação (i.é,  $U \in u_0$  onde  $u_0$  é o conjunto de todas U's possíveis) - também para qualquer matriz fixa de alocação U, podemos aplicar o método de seleção e definir  $z_d^{(k)}$  como o máximo para um U fixo dentre todas seleções viáveis, i.é

$$\bar{z}_d^{(k)} = \left\{ \max_{i \in I_0} z_{d_i}^{(k)} \right\} \quad (2.22)$$

onde  $I_0$  é o conjunto de todas seleções viáveis para um k e uma U fixos. O índice d indica que uma  $U = [u_{ij}]$  particular tem sido escolhida (ou fixada) e o índice  $d_i$  indica que para U fixa, a i-ésima seleção viável é feita do conjunto  $I_0$  de todas seleções viáveis ( $i \in I_0$ ).

(iii) Denotamos por  $z_a^{(k)}$ , o valor máximo da função objetivo para um k fixo no procedimento ativo correspondendo ao ótimo de todas U's possíveis e o ótimo de todas seleções viáveis para matriz ótima de alocação  $U^*$ , i.é,

$$z_a^{(k)} = \left[ \max_{U \in U_0} \left\{ \max_{i \in I_0} z_{d_i}^{(k)} \right\} \right], \quad k \in K \quad (2.23)$$

As definições acima servem de base para os seguin

tes teoremas.

Teorema 2.1 <sup>|2|</sup> Seja  $z_p^{(k)}$  e  $z_a^{(k)}$  os valores máximos da função objetivo  $z = c'x$  para a  $k$ -ésima seleção do conjunto admissível de valores amostrais dos parâmetros aleatórios  $(A, b, c)$  para o procedimento passivo e ativo da PLE respectivamente e seja  $z_d^{(k)}$ , definido como em (2.22), o valor máximo da função objetivo  $z^{(k)}$  quando qualquer matriz alocação  $U$  do procedimento ativo é selecionada, não necessariamente a matriz ótima, então temos:

$$z_d^{(k)} \leq z_a^{(k)} \leq z_p^{(k)} \text{ para todo } k \text{ e } K \text{ em } V_p \text{ e } V_a$$

Prova: Sejam as subregiões geradas pelas funções objetivo  $z_d^{(k)}$ ,  $z_a^{(k)}$  e  $z_p^{(k)}$  para todo  $k \in K$  admissível em  $V_p$  e  $V_a$  e denotemos estas regiões por  $R_d$ ,  $R_a$  e  $R_p$  respectivamente. Então, pelo modo como as inequações no procedimento ativo são calculadas, temos que qualquer solução viável desse último em termos de  $U$  ou  $x$  deve satisfazer necessariamente todas restrições do problema passivo, isto significa que a subregião  $R_a$  está contida na subregião  $R_p$ , provando assim que  $z_p^{(k)} \geq z_a^{(k)}$ .

De outro modo, suponhamos que  $z_a^{(k)} > z_p^{(k)}$ , isto implica que existe solução ótima em termos de  $U$  e portanto o vetor  $x$  em  $z_a^{(k)}$  contém a subregião  $r_p$  correspondendo a soluções  $x$  em  $z_p^{(k)}$  para todo  $k$ . Considere agora o subconjunto de soluções ótimas  $x^*$  pertencente ao conjunto  $r^* =$  complemento relativo ou diferença entre as subregiões  $r_a$  e  $r_p$ . Desde que supomos  $z_a^{(k)} > z_p^{(k)}$ , o conjunto  $r^*$  deve ser não-vazio. Assim, existem algumas soluções dentre o subconjunto possível de soluções  $x^*$  no caso ativo



as quais não são viáveis no caso passivo. Mas isto contradiz a hipótese de que as soluções do caso ativo devem satisfazer todas as restrições do caso passivo. Assim,  $z_a^{(k)} \leq z_p^{(k)}$ . Além do mais, desde que o subespaço gerado por  $z_d^{(k)}$  está contido naquele gerado por  $z_a^{(k)}$  segue-se das equações (2.22) e (2.23) que  $z_d^{(k)} \leq z_u^{(k)}$ .

Teorema 2.2 |<sup>2</sup>| Sejam  $z_p^-$ ,  $z_a^-$  e  $z_d^-$  definidas como  $z_p^{(k)}$ ,  $z_u^{(k)}$  e  $z_d^{(k)}$ , no entanto neste caso os elementos aleatórios do problema são substituídos por seus valores esperados (supostos finitos). Então, se  $z_p^-$ ,  $z_a^-$  e  $z_d^-$  pertencem a subregião  $V_p$  e  $V_a$

$$z_d^- \leq z_a^- \leq z_p^-$$

Prova: Suponhamos  $z_p^-$ ,  $z_a^-$  e  $z_d^-$  pertencentes as sub-regiões  $V_p$  e  $V_a$  definidas anteriormente, então deve existir pelo menos uma configuração de elementos aleatórios que gera os valores máximos  $z_p^-$ ,  $z_a^-$  e  $z_d^-$ . Denotemos esta configuração particular por  $k_0$ , onde  $k_0$  deve pertencer ao conjunto  $K$  de todas configurações admissíveis, isto é,  $k_0 \in K$ . Agora desde que teorema 2.1 vale para todo  $k \in K$  nas regiões  $V_p$  e  $V_a$ , ele também vale para  $k_0$ . Assim provamos o resultado acima.

Como ilustração do teorema 2.2. Utilizaremos o exemplo 2.1 formulando o modelo com base nos valores médios dos elementos aleatórios da matriz de coeficientes.

Exemplo 2.2: seja o modelo passivo do exemplo 2.1

$$\text{Max } z = x_1 + x_2$$

$$\begin{aligned}
 \text{s.a.} \quad & 3.664476 x_1 + 2.685166 x_2 \leq 104 \quad (\text{capital}) \\
 & 0.000250 x_1 + 0.000413 x_2 \leq 0.014 \quad (\text{m\~{a}o-de-obra}) \\
 & x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Definindo a aloca~{c}o proporcional de capital para as duas atividades (investimento e consumo) por  $u_{11}$  e  $u_{12} = 1 - u_{11}$  e a aloca~{c}o proporcional de m\~{a}o-de-obra por  $u_{21}$  e  $u_{22} = 1 - u_{21}$  temos o modelo ativo correspondente a (2.24) formulado por

$$\begin{aligned}
 \text{Max} \quad & z = x_1 + x_2 \\
 \text{s.a.} \quad & 3.664476 x_1 \leq 104 u_{11}; \quad 0.000250 x_1 \leq 0.014 u_{21} \\
 & 2.685166 x_2 \leq 104 (1 - u_{11}); \\
 & 0.000143 x_2 \leq 0.014 (1 - u_{21}) \\
 & u_{12} = 1 - u_{11}, \quad u_{22} = 1 - u_{21}, \quad u_{ij} \geq 0, \quad x_1 > 0, \\
 & x_2 > 0; \quad i, j = 1, 2
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Fazendo os c\~{a}lculos (simplex) temos  $z_{\bar{p}} = z_{\bar{a}} = x_1 + x_2 = 36.4103$  com  $u_{11} = 0.2243$  e  $u_{21} = 0.1136$ . Se as raz\~{o}es de aloca~{c}o  $u_{11}$  e  $u_{21}$  s\~{a}o supostas ser igualmente distribuidas tal que  $u_{ij} = 0.50$   $i, j = 1, 2$ , ent\~{a}o obtemos uma solu~{c}o \~{o}tima  $z_{\bar{d}} = 31.1395$ , assim em ambos casos  $z_{\bar{d}} < z_{\bar{a}} = z_{\bar{p}}$ .

Suponhamos agora um caso especial no qual somente os elementos da matriz  $A$  s\~{a}o aleat\~{o}rios, supostos estimativas amostrais independentes das m\~{e}dias  $\alpha_{ij}$  com vari\~{a}ncias finitas de uma amostra de  $N$  observa~{c}oes. Assim se  $e_{ij}$  \~{e} a componente de erro aleat\~{o}rio para cada  $a_{ij} = \alpha_{ij} + e_{ij}$ , temos para  $N \rightarrow \infty$  a con-

vergência em probabilidade  $a_{ij} \rightarrow \alpha_{ij}$  pelo teorema do limite central. Sejam  $x_p^0$ ,  $x_a^0$  vetores soluções que maximizam a função objetivo pertencente as regiões  $V_p$  e  $V_a$  definidas acima. Sejam  $\hat{x}_p$  e  $\hat{x}_a$  vetores soluções não indefinidos no espaço de parâmetros satisfazendo os programas estocásticos do modelo passivo e ativo. Assim podemos enunciar o seguinte:

Teorema 2.3 <sup>2</sup> Sejam  $x_d$  e  $\hat{x}_d$  os vetores solução ótima não indefinidos no espaço de parâmetros, para um conjunto particular de variáveis de decisão  $u_{ij}$  no caso ativo de um programa estocástico, de acordo como a matriz de coeficiente  $A = [a_{ij}]$  é substituída ou não pela matriz  $[\alpha_{ij}]$ , então quando  $N \rightarrow \infty$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_p \\ \hat{x}_a \\ \hat{x}_d \end{bmatrix} \text{ converge em probabilidade para } \begin{bmatrix} 0 \\ x_p \\ 0 \\ x_a \\ 0 \\ x_d \end{bmatrix}$$

Assim, se  $\bar{z}_p$ ,  $\bar{z}_a$  e  $\bar{z}_d$  representam a função objetivo correspondendo a  $\hat{x}_p$ ,  $\hat{x}_a$ ,  $\hat{x}_d$  respectivamente, e  $\bar{z}_p^0$ ,  $\bar{z}_a^0$ ,  $\bar{z}_d^0$  correspondem respectivamente a  $x_p^0$ ,  $x_a^0$ ,  $x_d^0$  então a seguinte inequação

$$\bar{z}_d \leq \bar{z}_a \leq \bar{z}_p$$

converge em probabilidade para

$$\bar{z}_d^0 \leq \bar{z}_a^0 \leq \bar{z}_p^0$$

quando  $N \rightarrow \infty$ , contanto que todos  $z$ 's ótimos sejam únicos.

Prova: Este fato segue-se do teorema do limite central o qual estabelece que para um conjunto de variáveis aleatórias independentes com funções distribuição dadas tendo médias e variâncias finitas, a média aritmética das variáveis aleatórias convergiram em limite para a média populacional de uma distribuição normal padrão e o fato de que a independência linear das colunas de  $\alpha_{ij}$  é preservada na vizinhança de  $\alpha_{ij}$ .

Usando o resultado acima podemos estabelecer um método de aproximações numéricas para a distribuição da função objetivo. Utilizamos todas observações amostrais dos elementos aleatórios, N sendo o número de observações para cada variáveis aleatória independente. Calculamos os valores ótimos da função objetivo  $z = c'x$ . Depois ajustamos uma distribuição de probabilidade usando os valores amostrais de z e assim podemos fazer inferências probabilísticas com respeito aos diferentes valores da função objetivo.

Como ilustração podemos utilizar o exemplo 2.1 e calcular os 16 valores da função objetivo  $z = x_1 + x_2$  a partir dos 16 pares de valores amostrais dos coeficientes da matriz A. Calculando a função densidade probabilidade  $P(z)$  da variável aleatória z com base nos valores ótimos calculados  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , temos uma distribuição Beta

$$P(z) = \frac{N_0}{(a_1 + a_2)^{m_1 + m_2 + 1}} \cdot \frac{\Gamma(m_1 + m_2 + 2)}{\Gamma(m_1 + 1) \Gamma(m_2 + 1)} \cdot z^{m_1} (a_1 + a_2 - z)^{m_2}$$

com a origem no ponto inicial da curva. Aqui temos  $N_0 = 573.1890$ ,  $a_1 + a_2 = 36.169$ ,  $m_1 = -0.3547$  e  $m_2 = 0.1412$ . Expressando a distribuição em unidades de  $a_1 + a_2 = 36.169$  e denotando  $p = m_1 + 1$  e  $q = m_2 + 1$ , a função densidade acima pode ser expressa na forma padrão da distribuição Beta como segue:

$$P(z) = \frac{N_0 \cdot \Gamma(p+q)}{\Gamma(p) \Gamma(q)} z^{p-1} (1-z)^{q-1} ; 0 \leq z \leq 1$$

$$= 408.015 z^{0.645-1} (1-z)^{1.1419-1} \quad (2.24.1)$$

pela relação da função Beta incompleta (I)

$$I_z(p,q) = 1 - I_{1-z}(p,q), \quad p < q$$

podemos calcular a probabilidade aproximada  $\text{Prob}(z \leq z_0) = \alpha$  para diferentes valores de  $z_0$  a partir de tabelas da função Beta incompleta<sup>16</sup>. No nosso caso temos os seguintes valores aproximados; mencionados na tabela 2.3.

Podemos constatar que existe aproximadamente uma probabilidade de 95% da função objetivo  $z$  ser menor de que 32.5522.

Agora analisaremos se o método de derivar um procedimento ativo de um passivo é único. Para mostrar que não é, podemos construir um procedimento ativo  $\alpha$  alternativo o qual especifica valores mais altos da função objetivo para no mínimo alguns valores das variáveis de decisão  $u_{ij}$ . Por exemplo, a partir de (2.35) podemos construir um dos vários procedimentos ativos alternativos possíveis como segue:

$$\text{Max } z = x_1 + x_2 \quad (2.26)$$

$$\begin{aligned} \text{s.a.} \quad & x_1 \leq 28.380_{11} \quad x_2 \geq 38.7313 (1-u_{11}) \\ & x_1 + x_2 \leq (28.3805 - 38.7313)u_{11} + 38.7313 \\ & x_2 \geq 56.0000u_{21} \quad x_2 \leq 33.8983 (1 - u_{21}) \\ & x_1 + x_2 \leq 33.8983 + (56.0000 - 36.8983)u_{21} \\ & u_{ij} \geq 0, \sum_j u_{ij} = 1, x_i \geq 0; i = 1,2 \end{aligned}$$

Tabela 2.3

$$\text{Prob } (z \leq z_0) = \alpha$$

Valores de $z_0$		Valores de	
Em Unidades ( $a_1 + a_2$ )	Em Unidade Original	$\alpha$	$1 - \alpha$
0.10	3.6169	0.32	0.68
0.20	7.2338	0.45	0.55
0.30	10.8507	0.55	0.45
0.36	13.0208	0.60	0.40
0.40	14.4676	0.63	0.37
0.60	21.7014	0.76	0.22
0.80	28.9353	0.90	0.10
0.90	32.5522	0.95	0.05

Comparando (2.26) com (2.25) vemos que alguns sinais foram revertidos em (2.26), no entanto restrições adicionais foram acrescentadas em (2.26) de modo que as soluções  $x_1$  e  $x_2$  quando definidas devem satisfazer ao problema passivo dado em (2.24). Agora consideremos os valores  $u_{11} = 1.0$  e  $u_{21} = 0.50$  para o modelo ativo (2.25) original e (2.26) alternativo, assim temos  $\text{Max } z = x_1 + x_2 = 28.000$  em (2.25) mas, 28.380 no caso de

(2.26). Com  $u_{11} = 1.0$  e  $u_{21} = 0.0$ ,  $z = x_1 + x_2 = 0$  em (2.25) mas 28.380 em (2.26). Isto mostra que, em alguns casos, os resultados do Teorema 2.2 podem ser mais apurados. Sejam  $T_p$  e  $T_a$  cones convexos gerados pelo vetor viável  $x$  no procedimento passivo e ativo definido no Teorema 2.2, e seja  $T^*$  o cone tal que a soma de  $T^*$  e  $T_a$  é o cone convexo  $T_p$ . Seja  $T_a$  a coleção de pontos pertencentes ao subconjunto  $T^*$ , então se  $T^*$  é um subconjunto não-vazio, temos o seguinte resultado.

Teorema 2.4 [2] Se, no Teorema 2.2, a inequação estrita  $z_{\bar{a}} < z_{\underline{a}} < z_{\bar{p}}$  é verificada para algum  $u_{ij}$  e se  $T_{\alpha}$  é não indefinido no subconjunto  $T^*$  para alguns valores do vetor de solução ótima  $x = (x)_{\alpha}$ , então uma classe de modelos ativos  $\alpha$  existe tal que são alternativos em relação ao modelo ativo original para os quais se verifica  $z_{\alpha}(\bar{u}_{ij}) \leq z_{\alpha}(\bar{u}_{ij}) \leq z_p(\bar{u}_{ij})$ , para alguns valores de  $\bar{u}_{ij}$  onde  $z_{\alpha}(\bar{u}_{ij})$  denota o valor máximo de  $z$  correspondendo a um valor fixo  $\bar{u}_{ij}$  definido na classe de modelos ativos alternativos  $\alpha$  e  $z_p(\bar{u}_{ij})$ ,  $z_{\bar{a}}(\bar{u}_{ij})$  representam os valores máximos da função objetivo dos modelos passivo e ativo respectivamente para a mesma escolha de  $\bar{u}_{ij}$ .

Prova: Ver Sengupta, Tintner, Willham [2].

Com o intuito de determinar limites para o valor da função objetivo, Sengupta, Tintner and Willham [2] chegaram ao seguinte resultado:

$$E(g^{(k^*)}) \leq (k^* - 1) / (2k^* - 1)^{1/2} \quad (2.37)$$

onde  $g^* = \frac{z^* - \mu_{z^*}}{(\sigma_{z^*}^2)^{1/2}}$  e  $k^* = n^\circ$  de valores amostrais de Max  $z$  e  $z^*$  é o valor  $z$  mais alto na função objetivo  $z$  ordenada. Usando as propriedades do valor esperado [12] temos para  $w = (k^*-1)/(2k^*-1)^{1/2}$ :

$$E \left( \frac{z^* - \mu_{z^*}}{(\sigma_{z^*}^2)^{1/2}} \right) = \frac{1}{\sigma_{z^*}} E(z^*) - \frac{\mu_{z^*}}{\sigma_{z^*}} \leq w, \text{ Assim temos}$$

$$E(z^*) \leq \sigma_{z^*} \cdot w + \mu_{z^*} \quad (2.38)$$

Aplicando (2.38) a (2.34.1) temos

$$\sigma_{z^*} = \sqrt{\frac{p \cdot q}{(p+q+1)(p+q)^2}} \approx 0.2828 \text{ e } \mu_{z^*} = \frac{P}{p+q} =$$

$$= 0.3612$$

Expressando (2.38) em termos de unidades originais:

$$E(z^*) \leq 36.1690 \{0.3612 + 2.69 (0.2828)\}$$

$$E(z^*) \leq 40.578 \text{ (Aproximadamente)}$$

que é um limite superior para a função objetivo.



## II.3 Programação Linear a Dois Estágios Sob Incerteza - DANTZIG

### 3.1 - Preliminares

Este método foi elaborado a partir de discussões de G.B. DANTZIG com A. FERGUSON, o qual propôs que os métodos de programação linear fossem estendidos, de modo a incluir o caso de demandas incertas para o problema de alocação ótima de uma frota cargueira a rotas aéreas e assim atender uma distribuição de demanda prevista. Em consequência Dantzig [6] apresentou um procedimento para resolver o problema, o qual descrevemos no item 3.2.

O procedimento que descreveremos aplica-se a uma classe especial de modelos de programação linear a dois estágios no qual as alocações no primeiro estágio são feitas de modo a atingir demandas incertas mas com distribuições de probabilidades conhecidas, as quais ocorrem no segundo estágio.

Dantzig [18] também abordou o caso de multi-estágios, o qual deriva do caso geral de dois-estágios. No entanto, não incluímos em nossa análise, pois se trata apenas de uma generalização.

### 3.2 - Uma Classe de Problemas a Dois-Estágios

No problema de Ferguson e em muitos outros problemas de abastecimento, os custos totais podem ser divididos em

duas partes:

- (i) Os custos de designação de vários recursos para vários destinos  $j$ .
- (ii) Os custos (ou receita perdida) ocasionados por causa da falta das quantidades totais  $u_1, u_2, \dots, u_n$  designadas para atender demandas em vários destinos com quantidades desconhecidas  $d_1, d_2, \dots, d_n$  respectivamente.

A classe especial de problemas de programação a dois-estágios, considerada por Dantzig, tem a seguinte estrutura:

$$\text{1º Estágio: } \sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i; \quad X_{ij} \geq 0 \quad (3.1)$$

$$\sum_{i=1}^m b_{ij} X_{ij} = u_{ij} \quad (3.2)$$

onde:  $X_{ij}$  = quantidade do recurso  $i$  designado para o destino  $j$

$b_{ij}$  = número de unidades de demanda no destino  $j$  que pode ser satisfeito por uma unidade de recurso  $i$ .

$a_i$  = componente do vetor  $A$  de Status Inicial

2º Estágio:  $d_j = u_j + v_i - s_j : j = 1, 2, \dots, n$  (3.3)

onde:  $v_i =$  escasses de oferta

$s_j =$  excesso de oferta

A função do custo total supõe-se ter a seguinte forma

$$C = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij} + \sum_{j=1}^n \alpha_j v_j \quad (3.4)$$

cuja função depende linearmente da escolha  $X_{ij}$  e das escasses  $v_j$ , as quais dependem das designações  $u_j$  e das demandas  $d_j$ .

Objetivo: Minimizar os custos totais esperados.

seja:  $\phi_j (u_j | d_j)$  os custos mínimos num destino se a oferta é  $u_j$  e a demanda é  $d_j$ . Assim

$$\phi_j (u_j | d_j) = \begin{cases} \alpha_j (d_j - u_j), & \text{se } d_j \geq u_j \\ 0 & , \text{ se } d_j < u_j \end{cases} \quad (3.5)$$

onde:  $\alpha_j$  é o coeficiente de proporcionalidade <sup>1</sup>.

Teorema 3.1: O valor esperado de  $\phi_j (u_j/d_j)$ , denotado por  $\phi_j (u_j)$ , é uma função convexa de  $u_j$ .

---

1 - A receita de satisfazer uma unidade de demanda.

Prova: seja  $p(d_j)$  a densidade de probabilidade de  $d_j$ , então

$$\begin{aligned}\phi_j(u_j) &= \alpha_j \int_{x-u_j}^{+\infty} (x - u_j) p(x) dx \\ &= \alpha_j \int_{x-u_j}^{+\infty} x p(x) dx - \alpha_j u_j \int_{x-u_j}^{+\infty} p(x) dx\end{aligned}$$

diferenciando, temos:

$$\phi_j'(u_j) = -\alpha_j \int_{x-u_j}^{+\infty} p(x) dx$$

Assim podemos notar que  $\phi_j'(u_j)$  é uma função não-decrescente de  $u_j$  com  $\phi_j''(u_j) \geq 0$  e  $\phi_j(u_j)$  é CONVEXA.

Do teorema, o valor esperado da função objetivo é:

$$E(C) = \sum C_{ij} X_{ij} + \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi_j(u_j) \quad (3.6)$$

onde  $\phi_j(u_j)$  são funções convexas. Assim, o problema original reduz a:

$$\begin{aligned}\text{Min } & E(C) \\ \text{s.a. } & \sum_{j=1}^n X_{ij} = a_i \\ & \sum_{i=1}^m b_{ij} X_{ij} = u_j; \quad X_{ij} \geq 0\end{aligned} \quad (3.7)$$

### 3.2.1 - Método de Aproximação

Com os resultados do item anterior podemos aplicar um artifício bastante conhecido para aproximar o problema por um problema de programação linear padrão que, neste caso, a função objetivo pode ser representada por uma soma de funções convexas. Para fazer isto, aproximamos a derivada de  $\phi(u)$ , em algum intervalo  $0 \leq u \leq u_0$  suficientemente grande, por uma função escada envolvendo  $k$  degraus, onde o tamanho da  $i$ -ésima base é  $a_i$  e sua altura  $h_i$ ; onde  $h_1 \leq h_2 \leq \dots \leq h_k$  pois  $\phi$  é convexa.

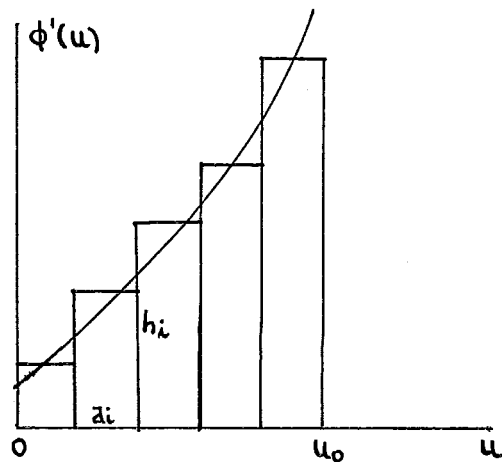


Figura 3.1

Uma aproximação para  $\phi(u)$  é dada por:

$$\phi(u) = \phi(0) + \text{Min} \sum_{i=1}^k h_i \Delta_i \quad (3.8)$$

$$\text{s.a. } u = \sum_{i=1}^k \Delta_i, \quad 0 \leq \Delta_i \leq a_i \quad (3.9)$$

De fato, parece óbvio que a aproximação alcança seu máximo pela escolha de  $\Delta_1 = a_1$ ,  $\Delta_2 = a_2 \dots$ , até que a soma acumulativa dos  $\Delta_i$  exceda  $u$  para algum  $i = n$ ;  $\Delta_n$  é então escolhido como o valor do resíduo com todos os restantes  $\Delta_{n+1} = 0$ .

Em outras palavras, aproximamos uma integral pela soma de áreas retangulares sob a curva  $\Delta + i u$ , i.ê:

$$\phi(u) = \phi(0) + \int_0^u \phi'(X) dx = \sum_{i=1}^k h_i a_i + h_n \Delta_n \quad (3.10)$$

O próximo passo é substituir  $\phi(u)$  por  $\sum_1^k h_i \Delta_i$ , u por  $\sum_1^k \Delta_i$  no problema de programação e adicionar as restrições  $0 \leq \Delta_i \leq a_i$ . Se a função objetivo é a minimização de custos totais será necessário, para qualquer que seja o valor de  $u = \sum_1^n \Delta_i$  e  $0 \leq \Delta_i \leq a_i$ , minimizar  $\sum_1^k h_i \Delta_i$ .

Assim, esta classe de problemas de programação linear a dois estágios em presença da incerteza, pode ser reduzida para um problema tipo programação linear padrão.

Para o caso de multiestágios podemos recorrer a Dantzig [6], [18].

### 3.3 - Exemplo (Transporte para um armazém para atender uma demanda incerta)

Uma fábrica tem 100 itens em estoque que podem ser transportados para um armazém a um custo unitário de Cr\$1 para atender a uma demanda  $d$  incerta. No caso da demanda exceder a oferta, é necessário atender a demanda não satisfeita através de compras no mercado local a Cr\$2 por unidade. Deste modo, o sistema deve satisfazer a seguinte equação:

$$100 = X_{11} + X_{12}$$

$$d = X_{11} + X_{12} - X_{22}$$

$$c = X_{11} + 2X_{21} ; X_{ij} \geq 0$$

onde:

$X_{11}$  = número de itens transportados da fábrica

$X_{21}$  = número de itens comprados no mercado local

$X_{12}$  = número de itens estocados na fábrica

$X_{22}$  = excesso da oferta sobre a demanda

$d$  = demanda desconhecida uniformemente distribuída entre 70 e 80

$c$  = custos totais.

Podemos notar quaisquer que sejam as quantidades embarcadas e a demanda  $d$ , é possível escolher  $X_{21}$   $X_{22}$  consistentes com a segunda equação. Os estoques não utilizados  $X_{12} + X_{22}$  são supostos não ter valor ou são desfeitos a um determinado valor reduzido (como acontece com automóveis modelo do ano anterior quando começa a nova produção).

solução:

Vemos aqui se a oferta excede a demanda ( $X_{11} > d$ ) temos que  $X_{21} = 0$  fornece os custos mínimos e se  $X_{11} \leq d$  os custos mínimos são dados por  $X_2 = d - X_{11}$ . Assim

$$\text{Min } \phi = \begin{cases} X_{11} & \text{se } X_{11} > d \\ X_{11} + 2(d - X_{11}) & \text{se } X_{11} \leq d \end{cases}$$

desde que  $d$  é uniformemente distribuída entre 70 e 80

$$E(\text{Min } \phi) = \begin{cases} -X_{11} + 150 & \text{se } X_{11} \leq 70 \\ 77,5 + \frac{1}{10}(75 - X_{11})^2 & \text{se } 70 < X_{11} \leq 80 \\ X_{11} & \text{se } 80 \leq X_{11} \end{cases}$$

como podemos notar, esta função é convexa e atinge seu mínimo em  $X_{11} = 75$ , isto é

$$E(\text{Min } (\phi)) = 77.5$$

desde que  $X_1 = 75$  está no intervalo de valores possíveis de  $X_{11}$ , como está determinado por  $100 = X_{11} + X_{12}$ , é óbvio este ser o transporte ótimo.



## II.4 Programação Estocástica com Recurso - WALKUP & WETS

### 4.1 - Preliminares

A programação estocástica com recurso é uma generalização da programação a dois-estágios sob incerteza (Dantzig [6]), pois ela inclui variações probabilísticas em outros coeficientes, i.e, os coeficientes da matriz tecnológica e os coeficientes da função objetivo.

Aqui o problema é encontrar o valor ótimo do vetor  $x$  no programa

$$Z = \text{Min } E [c'x + \text{Min } q'y]$$

s.a.

$$Ax = b \tag{4.1}$$

$$Tx + Wy = p$$

$$x \geq 0, y \geq 0$$

onde  $E$  é a esperança matemática com respeito ao vetor aleatório  $p$  de recursos. No caso geral, Walkup & Wets [19] incluíram  $c, q, T$  e  $w$ , assim como  $p$  como variáveis aleatórias. Deste modo, o problema ficaria formulado como segue:

$$\text{INF}_{\substack{E_{\theta} \\ X \geq 0}} [c'(\theta)X + \text{Min}_{\substack{Y \geq 0}} q'(\theta)Y | Ax=b, T(\theta)X + W(\theta)Y=p(\theta)] \tag{4.2}$$

onde  $\theta$  é um ponto vetorial da distribuição de probabilidade conjunta  $P(c, q, T, w, p)$  envolvendo as componentes aleatórias de  $(c, q, T, w, p)$ ,  $E_\theta$  é operador esperança com respeito a  $\theta$  e  $\text{INF}$  é o ínfimo.

Se a matriz  $(\theta)$  é fixa e constante para todo  $\theta$ , temos um problema de "Recurso fixo". Se  $w(\theta)$  é quadrada e não singular com probabilidade 1, então temos um problema com recurso estável. Podemos notar que, para cada valor do vetor de decisão  $x$  e para cada realização da variável aleatória  $\theta$  o termo  $(\text{Min}_{y \geq 0} q'y)$  da expressão (4.2) é o valor ótimo do seguinte problema de PL no segundo estágio.

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Min } q'y \mid y \geq 0, Wy = p - Tx \\ y \geq 0 \end{array} \right] \quad (4.3)$$

Denotemos o valor ótimo do modelo PL no segundo-estágio (4.3) por  $Q(x, \theta)$  e definimos os conjuntos.

$$K_1 = \left[ x \mid Ax = b, x \geq 0 \right]$$

$$K_2 = \left[ x \mid \text{PL (4.3) é viável com probabilidade=1} \right]$$

WALKUP & WETS [19] provaram dois resultados importantes:

Resultado 4.1: O programa determinístico equivalente

$$\begin{array}{l} \text{INF } z(x) = E(c), x + E \left[ Q(x, \theta) \right] \\ \text{s.a. } Ax = b, x \geq 0 \end{array} \quad (4.4)$$

o qual está associado com o problema (4.1), é convexo.

Também, como o conjunto de viabilidade  $K_1$  definido acima é um poliedro fechado convexo, temos que o conjunto de soluções viáveis de (4.4) é convexo. Neste caso, qualquer algoritmo de programação não-linear convexa pode ser aplicado.

Resultado 4.2: No caso especial, quando a matriz  $W$  em (4.1) é fixa e igual a  $(I, -I)$ , a matriz  $m + 2m$  formada pela justaposição de uma matriz identidade  $m \times m$  e sua negativa, temos o "programa estocástico com recurso simples" dado pela seguinte forma:

$$\begin{aligned} \text{INF}_X Z(x) &= E(c \cdot x) + E \left[ \text{Min} (q^+ \cdot y^+ + q^- \cdot y^-) \right] \\ \text{S.A.} \quad Ax &= b & (4.5) \\ Tx + Iy^+ - Iy^- &= P \\ X \geq 0 \quad y^+ \geq y^- \geq 0 \end{aligned}$$

onde o ponto entre dois vetores indica o produto interno.

Este caso de recurso simples tem uma característica bastante vantajosa quando  $p$  é a única variável aleatória, cada uma de suas componentes tendo uma distribuição de probabilidade contínua. Assim, a função penalidade  $E Q(K, \theta)$  tem um gradiente contínuo e então podemos aplicar um algoritmo baseado nos gradientes de  $E Q(K, \theta)$ .

#### 4.2 - Algoritmo Para P.E. com Recurso Simples

Existem vários algoritmos desenvolvidos que utili

zam a teoria descrita no item anterior. No entanto, a maioria deles apresentam dificuldades com respeito ao número de restrições referentes ao vetor  $p$ . Como ilustração, suponhamos distribuições independentes discretas (finitas) para cada um dos  $m$  elementos do vetor  $p$  e uma função linear. Assim o problema (4.1) fica:

$$\begin{aligned} \text{Min } cx + \theta^1 qy^1 + \theta^2 qy^2 + \dots + \theta^r qy^r &= cx + \sum_{i=1}^{i=r} \theta^i qy^i \\ \text{S.A. } Ax &= b \\ Tx + Wy^1 &= p^1 \\ Tx + Wy^2 &= p^2 \\ &\vdots \\ Tx + Wy^r &= p^r \\ x \geq 0, y^i &\geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \tag{4.6}$$

onde

$p^i$  = Vetor com  $m$  componentes correspondendo a uma combinação de realizações de cada uma das suas componentes ( $j = 1, 2, \dots, r$ )

$\theta^i$  = Probabilidade de ocorrência  $p^j$ : se  $p_i^j$  é a  $i$ -ésima componente de  $p^i$  e se  $\theta_{ik}$  é a probabilidade de ocorrência do  $k$ -ésimo valor da distribuição do  $i$ -ésimo elemento, então  $\theta^j$  é um produto de  $\theta_{ik}$ 's por causa da hipótese de independência.

#### 4.2.1 - Algoritmo de Van Slyke - Wets

Este algoritmo quando aplicado a programas estocásticos com recurso, não faz hipóteses quanto a estrutura das matrizes de (4.1), nem da forma da distribuição das variáveis aleatórias  $p$ . Aqui não daremos uma explicação formal do desenvolvimento do algoritmo, a qual poderá ser encontrada em Van Slyke - Wets [20]. Resumindo, o algoritmo consiste dos seguintes passos:

PASSO 1: Resolva o problema do primeiro estágio com as variáveis  $x$ . Adicione restrições além das  $Ax = b$  de modo a assegurar que, para o vetor  $x$  escolhido, existe um  $y$  satisfazendo  $Wy = p + Tx^n$ .

PASSO 2: Encontrar a solução de outro programa linear e determinar se o  $x^n$  realmente encontrado leva, de fato, a um  $y$  viável. Senão, as restrições do Passo 1 são geradas para garantir que um  $y$  viável existe.

PASSO 3: Segundo Estágio: para cada  $p \in B$  (subconjunto de Borel no  $R^N$ ) resolva o programa linear

$$\text{Min } W^2 = qy$$

$$\text{S.A. } Wy = p - Tx^n = p', \quad y \geq 0$$

cada  $p' = p - Tx^n$  determina um  $\pi$  ótimo (vetor variáveis duais), denotaremos por  $\pi(p)$ . Os vetores de variáveis duais são usados então para de-

terminar se atingimos uma solução ótima ou devemos alterar  $x^n$ .

Embora este algoritmo tem sua convergencia garantida nas condições mais gerais, o Passo 3 mostra na prática uma dificuldade computacional. Por exemplo, se existem 50 elementos aleatórios em  $p$ . e cada elemento pode assumir um dentre dez valores, o Passo 3 resulta na solução de  $10^{50}$  problemas de programação linear.

#### 4.2.2 - Algoritmo de Garstka & Rutenberg

Este método é um refinamento do algoritmo de Slyke - Wets. Ele apresenta como vantagem a redução do tempo computacional para obter soluções ótimas para problemas de programação-estocástica-com-recorso de grande-porte.

Além de melhorar a eficiência do Passo 1 e Passo 2 do algoritmo de Slyke-Wets. Este procedimento tem como preocupação principal a busca da solução do problema do segundo-estágio de modo eficiente. O algoritmo tem três aspectos básicos:

- 1 - Os  $m$  elementos estocásticos de  $p$  são vistos como um espaço  $m$ -dimensional no qual cada combinação de valores discretos de variáveis estocásticas é um ponto de rótula (Lattice)<sup>1</sup>. Para uma dada base ótima, alguns dos pontos de rótula são viáveis.

2 - Os pontos inviáveis são deletados deste espaço  $m$ -dimensional até que somente os pontos viáveis permaneçam. Assim, a probabilidade associada com os pontos viáveis de rótula pode ser enumerada. Esta probabilidade é então usada para ponderar o vetor das variáveis duais definido pela base ótima atual.

3 - Nesta parte se apresenta um procedimento sistemático para mudança da base ótima, de modo que todos os pontos de rótula estejam associados com algum vetor de variáveis duais.

Descreveremos somente a parte 3 acima, pois é nela que reside a contribuição deste algoritmo para melhoria do algoritmo de Slyke & Wets. As duas primeiras partes estão bem descritos em Garstka & Rutenberg [21].

Mudança de Base Passo 0:  $j=2, j=1, k=1$

PASSO 1: Resolva o problema

Min  $qy$ , s.a.  $Wy = p - Tx, y \geq 0$

Para  $p = (\bar{p}_1, \bar{p}_2, \dots, \bar{p}_m)$ . Denote a base resultante por  $B_1 = (W_{j_1}, W_{j_1}, \dots, W_{r_1})$

---

1 - O Espaço de Rótula (Lattice) consiste dos pontos definidos por distribuição de probabilidade finita para cada  $p_j$ .

onde  $W_{s_i}$  são os vetores coluna de  $W$ . Armazene  $B_1^{-1}$  e  $(i_1, j_1, \dots, r_1)$

PASSO 2: Usando a rotina 2, enumere todos  $p$ 's viáveis associados com  $B_j$  e as probabilidades associadas com as variáveis duais. Atualize TP (probabilidade total calculada até agora). Se  $TP = 1$  pare, todos  $p$ 's estão associados.

Senão, faça  $j = j + 1$ .

PASSO 3: Remova o  $j$ -ésimo vetor em  $B_j$  e use o critério de entrada do dual simplex para determinar o vetor de entrada. Se o dual simplex indica que esta base não é viável, ou a base  $j$  já tinha sido gerada, faça  $j = j + 1$ .

Senão, faça  $k = k + 1$ , denote esta nova base por  $B_k$ , guarde  $(i, j, s, t, \text{coluna pivô})$  e  $v$  para o Passo 2.

PASSO 4: Se  $j=m+1$ , faça  $i=i+1$  e  $j=1$  e  $v$  para 3. Senão  $v$  para 3.

#### Exemplo 4.1

Considere o seguinte problema no segundo-estágio:

Minimizar  $- 3y_1 - 3y_2 - 2y_3$

s.a.  $y_1 + 2y_3 + y_4 = P_1$



$$\begin{aligned}
 y_1 + y_2 + 2y_3 + y_5 &= P_1^1 \\
 y_1 + y_2 + 2y_3 + y_6 &= P_2^1 \\
 y_i &\geq 0 \quad (i=1, 2, \dots, 6)
 \end{aligned}$$

onde os elementos de  $p'$  estão restritos aos seguintes valores:

$$P_1^1 = \{2, 3\}, P_2^1 = \{2, 4\}, P_3^1 = \{2, 5\}$$

A base correspondente a solução ótima com  $P_1^1 = 3$ ,  $P_2^1 = 4$  e  $P_3^1 = 5$  é dada por:

$$B_1 = (w_1, w_2, w_6) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \text{ Assim temos}$$

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B_1^{-1}w = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Os seguintes pontos são viáveis para  $B_1$  (com  $B_1^{-1}p \geq 0$ ):

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Supondo que todos pontos são equiprováveis, temos uma probabilidade associada de  $1/2$ . Guardaremos  $(1, 2, 6)$  e  $B_1^{-1}$ .  $P_i$  votemos pelo método dual simplex. Removemos  $w_1$  e usemos o critério de entrada. Todas as linhas de entrada são não negativas. Assim este pivoteamento particular não é viável. Tentemos remo-

ver o segundo valor de  $B_1$ . Isto é possível e temos

$$B_2 = (w_1, w_4, w_6) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad e$$

$$B_2^{-1} w = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{onde} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{são viáveis para } B_2$$

A probabilidade de  $B_2$  é  $1/4$ ,  $TP = 3/4 < 1$  : temos que continuar.

Armazene  $(1, 4, 6)$  e  $(1, 2, 5, 3, 1, -1, -1)$ .  $P_i$  votemos novamente, removendo  $w_6$  de  $B_1$  e usando o método do dual simplex. Assim  $w_5$  entra e temos

$$B_3 = (w_1, w_2, w_5)$$

como não existe pontos associados com esta base, devemos, ignorá-la. Neste ponto todos vetores de  $B_1$  foram considerados para remoção. Agora trabalhemos com  $B_2$ . Se tentarmos remover  $w_1$  teremos inviabilidade pelo método dual simplex. Não precisamos considerar a remoção do segundo vetor pois o mesmo foi o vetor entrada na construção de  $B_2$  a partir de  $B_1$ .

Removendo o terceiro vetor temos

$$B_4 = (w_1, w_4, w_5) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad e \quad B_4^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

os dois pontos restantes são viáveis para esta base:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Por conseguinte, a probabilidade associada com esta base é  $1/4$  e como  $TP = 1$ , temos associado cada ponto com alguma base.

## II.5 Método do Valor Esperado - Madansky

### 5.1 - Preliminares

Entre as situações em programação probabilística, este método se enquadra na situação "Aqui e Agora" que é aquela onde queremos determinar um vetor atividade  $x$  que minimiza  $c'x$  (ou  $Ec'x$ , se  $c$  é aleatório) dentre os vetores  $x$  cuja probabilidade de viabilidade é no mínimo  $p$ , isto é,

Minimizar  $c'x$  (ou  $Ec'x$  se  $c$  é aleatório)

$$\text{s.a. } P_r (Ax \geq b) \geq p \quad (5.1)$$

$$x \geq 0$$

depois do qual os elementos aleatórios de  $A$  e  $b$  são observados. Neste método  $P = 1$  (o caso onde  $P < 1$  será discutido na próxima secção, programação com probabilidade de restrições), utilizando teoria dos jogos.

### 5.2 - Equivalência do Problema de Programação Probabilística e Teoria dos Jogos

Considere o problema de programação não-probabilística a um-estágio

$$\begin{aligned} & \text{Min } c'x \\ \text{s.a. } & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (5.2)$$

Dantzig [23], Gale, Kuhn Tucker [24] mostraram que este programa linear é viável e finito se e somente se a matriz de jogos com matriz de escores

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & A & -b \\ -A' & 0 & c \\ b' & -c' & 0 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

tem uma estratégia ótima mista  $(x_0', y_0', t)$  tal que  $t > 0$ . Neste caso,  $x = x_0/t$  resolve o programa linear primal e  $y = y_0/t$  resolve o dual. (Este resultado poderá também ser encontrado em Maculan & Pereira [25]).

Como vimos nas secções anteriores, na programação probabilística  $A, b, c$ , podem ser matrizes aleatórias. De modo a situar o problema na teoria dos jogos devemos fazer um jogo, onde uma jogada aleatória determina os elementos da matriz  $Q$ .

Consideremos o jogo onde primeiro uma jogada aleatória determina os elementos  $d_{ij}$  ( $i=1, \dots, s; j=1, \dots, t$ ) da matriz  $D_{(A \times t)}$ , i.é, o vetor  $st$ -dimensional

$$d = (d_{11}, \dots, d_{st}) \quad (5.4)$$

é retirado de uma distribuição multivariada  $F(d)$ , a qual é conhecida por ambos jogadores, no entanto nenhum jogador é informado sobre o resultado da jogada aleatória. Então, o jogador 1 escolhe um número  $i \in [1, \dots, s]$  e o jogador 2 escolhe simultaneamente um número  $j \in [1, \dots, t]$ . O jogador 2 paga ao jogador 1 a

quantidade  $d_{ij}$  conforme determinada pela jogada aleatória.

Considerando a esperança matemática de  $d_{ij}$  como sendo o "Escore" para o jogador 1, se por acaso as estratégias  $(i, j)$  são escolhidas. Agora este jogo torna-se a matriz de jogos com matriz de escores ED, cuja solução pode ser determinada resolvendo-se um PPL da classe descrita por Dantzig [23].

Podemos concluir que as estratégias ótimas, para a versão de teoria dos jogos para o problema de programação-probabilística-a-um-estágio, são aquelas associadas com a matriz de jogos com matriz de escores EQ.

### 5.3 - Procedimento

Seja  $(\bar{y}', \bar{x}', \bar{t}') = \bar{z}$  a estratégia do jogo descrito acima, com  $\bar{t}' > 0$ . Então  $x^* = \bar{x}'/\bar{t}'$  resolve o problema

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } (EC)' x \\ \text{s.a.} \quad & (EA) \quad x \geq Eb \\ & x \geq 0 \end{aligned} \tag{5.5}$$

Denotemos  $x^*$  uma solução de valor esperado do pPL probabilístico a um-estágio. Este vetor  $\bar{e}$  não-negativo, mas não necessariamente satisfaz  $P_r (Ax^* \geq b) = 1$ .

Seja  $S = \{x \mid x \geq 0, P_r (Ax \geq b) = 1\}$ . Denotaremos  $S$  como o conjunto de vetores  $x$ 's "permanentemente viáveis". Do mesmo modo, chamaremos  $(A^0, b^0)$  um  $(A, b)$  "possível" se  $(A^0, b^0)$

estã no domĩnio da definiçãõ da medida de probabilidade em  $(A, b)$ . Assim, seja  $(A^0, b^0)$  um  $(A, b)$  possĩvel e seja  $x^0$  uma soluçãõ de

$$\begin{aligned} & \text{Minimizar } EC'x \\ & \text{s.a.} \quad A^0 x \geq b^0 \\ & \quad \quad x \geq 0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

evidentemente, se  $x^0$  ẽ permanentemente viãvel, entãõ  $x^0$  resolve o PPL probabilĩstico.

Agora, com os argumentos acima, reduzimos nossa questãõ de resolver um PPL probabilĩstico para o seguinte:

Problema: Encontrar um vetor  $x$  permanentemente viãvel o qual ẽ soluçãõ de algum PPL possĩvel. Consequentemente, se  $(EA, Eb)$  ẽ um  $(A, b)$  possĩvel e  $x^*$  ẽ permanentemente viãvel, entãõ  $x^*$  resolve o PPL probabilĩstico.

Apenas como observaçãõ, notamos que ẽ possĩvel que  $x^*$  seja permanentemente viãvel sem, contudo, que  $(EA, Eb)$  seja um  $(A, b)$  possĩvel. Neste caso,  $x^*$  nãõ ẽ necessariamente õtimo.

Seja  $(EA, Eb)$  um valor possĩvel de  $(A, b)$ , se  $\bar{v}=0$  para todas estratẽgias õtimas mistas para a matriz de jogos EQ entãõ (i) ou (ii) acontece:

- (i) Nãõ existe soluçãõ permanentemente viãvel
- (ii) Nãõ existe soluçãõ finita para o problema de

Programação Linear Probabilística.<sup>1</sup>

Isto nos fornece uma condição necessária para a existência de uma solução finita do programa probabilístico, como segue:

Resultado 5.1: Existe uma estratégia mista para matriz de jogos EQ com  $\bar{\tau} > 0$ .

Seja  $M(Q) = Q\bar{Z}'$ , onde  $\bar{Z}$  é uma estratégia ótima para a matriz de jogos EQ com  $\bar{\tau} > 0$ . Os primeiros  $m$  elementos de  $M(Q)$  são elementos de  $A\bar{x} - b\bar{\tau}$ .

Resultado 5.2: Desde que  $\bar{\tau} > 0$ , temos que  $A\bar{x} - b\bar{\tau} \geq 0$  se e somente se  $Ax^* = A\bar{x}/\bar{\tau} \geq b$ ,  $\forall A, b$ .

Isto é, a solução de valor esperado é ótima se e somente se para cada  $Q$  os  $m$  primeiros elementos de  $M(Q)$  são não-negativos.

Aqui se apresenta uma dificuldade básica. Embora a condição necessária e suficiente de otimalidade da solução de valor esperado  $x^* = \bar{x}/\bar{\tau}$ , para o programa primal probabilístico, seja satisfeita, o programa dual probabilístico poderá não ser ótimo pela solução de valor esperado  $y^* = \bar{y}/\bar{\tau}$  (ex. quando somente o valor  $C$  é aleatório). Assim,  $x^*$  é a solução do problema

---

1 - Vide Maculan & Pereira [25] pp. 96 a 98



primal, ainda que possa existir um problema dual possível para o qual a solução  $y^*$  de valor esperado não seja viável. Em situações bastante gerais, podemos determinar se os  $m$ 's primeiros elementos de  $M(Q)$  são negativos para cada  $Q$  e, portanto, se a solução de valor esperado é ótima, através do seguinte processo.

1 - Seja  $M_i(Q)$  o  $i$ -ésimo elemento de  $M(Q)$ . Assim

$$M_i(Q) = A_{i1}\bar{x}_1 + \dots + A_{in}\bar{x}_n - b_i\bar{t}, \quad i=1, \dots, m$$

2 - Suponhamos que  $\forall i$ ,  $S_i$  é um poliedro convexo limitado, onde  $S_i$  é o conjunto dos possíveis  $(A_{i1}, \dots, A_{in}, b_i)$ .

3 - Considere o problema de programação

Minimizar  $M_i(Q)$

s.a.  $(A_{i1}, \dots, A_{in}, b_i) \in S_i$

E seja  $\bar{M}_i$  este mínimo

4 - Os primeiros  $m$  elementos de  $M(Q)$  são não-negativos se e somente se  $\text{Min } \bar{M}_i \geq 0, i=1, \dots, m$   
Em outras palavras, a solução de valor esperado é ótima para o programa linear probabilístico se e somente se os valores ótimos das funções objetivo dos  $m$  programas não-probabilísticos, descritos acima, são não-negativos.

Assim, concluímos que basta resolver  $m$  programas

lineares não-probabilísticos para se determinar se a solução de valor esperado é ótima para o programa probabilístico, quando os elementos aleatórios estão distribuídos num poliedro convexo limitado.

Resultado 5.3:  $X^*$  e  $Y^*$  são viáveis (e portanto ótimos) para os programas probabilísticos primal e dual, respectivamente, se e somente se, os primeiros  $m + n$  elementos de  $M(Q)$  são não-negativos  $\forall Q$ .

## II.6 Programação com Probabilidades de Restrições - Charnes & Cooper

### 6.1 - Preliminares

O problema de programação com probabilidades de restrições é definido como sendo:

"Selecionar certas variáveis aleatórias como funções de variáveis aleatórias com distribuições conhecidas de tal modo que

- (a) maximizem um funcional de variáveis aleatórias.
- (b) sujeito a restrição destas variáveis, que devem ser respeitadas a níveis prescritos de probabilidade".

O método usado por Charnes & Cooper [26] consiste em dividir o problema em duas partes:

- (i) Determinar as distribuições que maximizam o funcional, sujeito a restrições probabilísticas.
- (ii) Aproximar as distribuições determinadas em (i), o mais preciso possível, por funções das variáveis aleatórias conhecidas de alguma classe admissível ou prescrita.

Então, o problema original é fatorado em dois novos problemas:

- (1) Um problema que determina os coeficientes das funções integráveis, contendo as distribuições ótimas discretas ou, de outro modo, as frequências de probabilidades discretas.
- (2) Um problema que determina os parâmetros da regra de decisão ótima no sentido da "Melhor Aproximação".

#### 6.2 - Descrição do Método

Este método transforma programas estocásticos em programas determinísticos equivalentes tomando as restrições aleatórias

$$\Delta(\omega) X \leq b(\omega) \quad (6.1)$$

e substituindo por restrições determinísticas do tipo

$$P(\Delta(\omega) X \leq b(\omega)) \geq \alpha \quad (6.2)$$

onde  $\alpha$  é um conjunto ordenado de constantes representando medidas de probabilidade ( $0 \leq \alpha \leq 1$ ) que indicam o grau de violação das restrições (6.1).

Como podemos notar, neste tipo de abordagem é pos

sível que tenhamos soluções inviáveis para certas realizações da variável aleatória  $\omega$ . No entanto, pela especificação de  $\alpha$  próximo a 1 podemos fazer com que esta inviabilidade seja a menor possível.

Suponhamos que  $X_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ , sejam variáveis de primeiro-estágio. Suponhamos que todos os coeficientes  $a_{ij}$  sejam conhecidos exatamente. Finalmente, suponhamos que cada elemento aleatório seja estatisticamente independente dos níveis para as variáveis do primeiro estágio. Assim, o modelo de programação com probabilidade de restrições será encontrar níveis  $X_j$  que satisfaçam

$$\text{Maximizar } \sum_{j=1}^k E(c_j) X_j \quad (6.3)$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^k a_{ij} X_j = b_i \quad i = 1, 2, \dots, g \text{ (primeiro estágio)} \quad (6.4)$$

$$P \left[ \sum_{j=1}^k a_{ij} X_j \leq b_i \right] \geq \alpha_i \quad i = g + 1, \dots, m \quad (6.5)$$

(restrições com probabilidade)

$$X_j \geq 0, \quad \forall_j \quad (6.6)$$

podemos interpretar a restrição (6.5) como sendo uma restrição que estabelece a probabilidade não-condicional menor que  $\alpha_i$ ,  $0 \leq \alpha_i \leq 1$ , de que o valor verdadeiro de  $b_i$  é pelo menor maior que  $\sum_{j=1}^k a_{ij} X_j$ .

Suponhamos que existem  $X_j$  que satisfazem (6.4) - (6.6), o modelo anterior poderá ser resolvido como um programa linear padrão com a função objetivo (6.3), restrições (6.4), (6.6) e as restrições (6.5) subdivididas por:

$$\sum_{j=1}^k a_{ij} X_j \leq B_i \quad (\text{restrições equivalentes determinísticas}) \quad (6.7)$$

$$i = g + 1, \dots, m$$

onde  $B_i$  é o maior número que satisfaz a

$$P (b_i \geq B_i) \geq \alpha_i \quad (6.8)$$

ou de outra forma

$$P (b_i < B_i) \leq 1 - \alpha_i \quad (6.9)$$

onde  $B_i$  é chamado de  $(1 - \alpha_i)$  - fractile

Exemplo [34]: uma companhia madeireira processa mensalmente uma dada quantidade  $T$  de madeira entre tábuas e compensados. Suponhamos que a companhia fabrica somente um tipo especial de cada um dos dois produtos. No início de um dado mês a companhia deve decidir os níveis de  $X_1 =$  nº de tons. de madeira a ser alocada para fabricar compensado.

$X_2 =$  nº de tons. de madeira a ser alocada para fabricar tábuas

$X_3$  = nº de tons. de madeira não alocada para quaisquer processos acima.

Suponhamos que no final do mês  $X_1$  produz  $a_1 X_1$  centenas de metros quadrados de tábuas e  $X_2$  produz  $a_2 X_2$  milhares de folhas de compensado. Seja  $D_1$  a quantidade máxima de tábuas que a companhia pode vender no final do mês, e  $D_2$  a quantidade máxima de compensado. Por outro lado seja  $r_j$  o preço de mercado que a companhia recebe por cada centena de metros quadrados ( $j=1$ ) e por cada milhar de folhas de compensado ( $j=2$ ). Assim, a quantidade  $r_j (a_j X_j)$  é a receita total do produto  $j$ . Seja  $e_j$  o custo de produção para processar uma tonelada de madeira para o produto  $j$ ; Assim  $e_j X_j$  é o custo total de fabricação associado com o produto  $j$ . Conseqüentemente, definindo  $c_j \equiv r_j a_j - e_j$ , a quantidade  $c_j X_j$  representa o lucro para o produto  $j$ ,  $j = 1, 2$ . Neste exemplo  $c_3$  representa o lucro correspondente a várias atitudes alternativas que a empresa pode tomar para o excesso ( $X_3$ ) de madeira produzida. Vamos supor que os coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  sejam conhecidos exatamente. Assim os únicos elementos aleatórios são os preços de mercado  $r_j$  e as limitações de Demanda  $D_j$ . O valor esperado de um coeficiente de lucro é  $E [c_j] = E [r_j] \cdot a_j - e_j$ ,  $j = 1, 2$ . Então, podemos formular o problema como segue:

$$\text{Maximizar } E (c_1) X_1 + E (c_2) X_2 + c_3 X_3 \quad (6.10)$$

$$\text{s.a} \quad X_1 + X_2 + X_3 = T \quad (6.11)$$

$$P [a_1 X_1 \leq D_1] \geq \alpha_1 \text{ (Demanda Tábuas)} \quad (6.12)$$

$$P [a_2 X_2 \leq D_2] \geq \alpha_2 \text{ (Demanda Compensados)} \quad (6.13)$$

$$X_j \geq 0, j = 1, 2, 3. \quad (6.14)$$

onde  $\alpha_i$  ( $i = 1, 2$ ) é o nível de probabilidade que a companhia estipula para vender toda a produção  $a_i x_i$ ,  $i = 1, 2$ . As restrições (6.12) e (6.13) implicam num par de inequações lineares equivalentes

$$a_1 x_1 \leq B_1 \quad (6.15)$$

$$a_2 x_2 \leq B_2 \quad (6.16)$$

Assim, pela substituição das inequações (6.12) - (6.13) por (6.15) - (6.16), podemos obter uma solução ótima para o problema com probabilidade de restrições.

Tomamos os valores para cada  $B_i$  o maior número tal que  $P(D_i \geq B_i) \geq \alpha_i$ , como sendo o equivalente determinístico. Notemos que a distribuição de probabilidade é a distribuição marginal de  $D_i$ . Isto significa que se começarmos com uma distribuição de probabilidade conjunta de  $D_1$  e  $D_2$  devemos, com um cálculo a parte, obter as duas distribuições marginais. Suponha mos que a distribuição de probabilidade de  $D_1$  é

$P[D_1=1] = 0.2, P[D_1=3] = 0.4, P[D_1=8] = 0.3, P[D_1=10] = 0.1$ , dando o gráfico de  $P[D_1 > B_1]$  na fig. 6.1



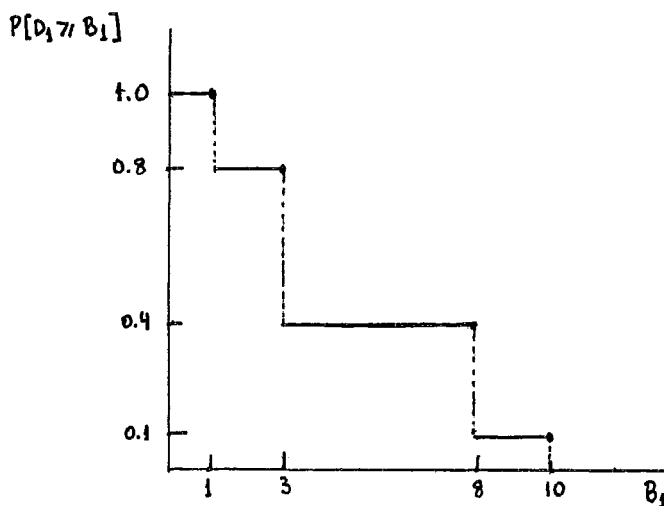


Figura 6.1

Então, podemos verificar que  $B_1=1$  de  $0.8 \leq \alpha_1 < 1.0$  e  $B_1=3$  se  $0.4 \leq \alpha_1 < 0.8$ , etc. Deste modo, podemos obter a solução da versão determinística do modelo de programação com probabilidade de restrições.

### 6.3 - Programação com Prob. Restrições VS. Programação a Dois-Estágios

O modelo com probabilidade de restrições comparado com a programação a dois estágios tem duas vantagens:

- (i) Ele nos leva a um programa linear equivalente que tem a mesma estrutura e tamanho do modelo original. Assim, o esforço computacional não será maior depois da determinação dos valores apropriados do lado direito.
- (ii) A única informação necessária sobre a incerteza de cada elemento  $b_j$  é o  $(1-\alpha_j)$  fratile

para a distribuição condicional do coeficiente do lado direito.

Estas são vantagens favoráveis do modelo de Charnes & Cooper comparado com o modelo de Dantzig (programação a dois-estágios) que é um problema de programação linear bastante grande. No entanto, o modelo de probabilidade de restrições apresenta a desvantagem principal de avaliar somente indiretamente as consequências econômicas de violação de uma restrição. No exemplo da companhia madeireira, o procedimento de probabilidade de restrições não indica penalidades diferenciais entre uma quantidade maior ou menor de excesso de produção. A especificação de valores corretos para  $\alpha_j$  deverá ser uma parte importante do problema de otimização.

Portanto, quando tivermos que decidir sobre a escolha entre os dois procedimentos para modelar um processo a dois estágios, devemos comparar as limitações do tamanho do problema imposta pelo método de Dantzig com o significado restrito de otimalidade proposto pelo método de Charnes & Cooper.

## II.7 Soluções MINIMAX para Programas Probabilísticos - Dyson & Swaites

### 7.1 - Preliminares

A solução MINIMAX identifica o plano mais lucrativo sob as mais pessimistas das circunstâncias. Isto nos dá um limite inferior para o valor da função objetivo. A solução também identifica o conjunto de valores mais pessimista dos parâmetros aleatórios do modelo.

O uso de soluções MINIMAX nos fornece um método alternativo de análise do modelo "Espere e Veja" que computacionalmente pode ser mais eficaz. Para este modelo, a solução MINIMAX (MAXIMAX) dá o limite inferior (superior) do valor da função objetivo. Dyson and Swaites [27] sugerem que as soluções MINIMAX e MAXIMAX sejam calculadas assegurando medidas de incerteza para ajudar no processo de avaliação. Também eles discutem que os valores dos parâmetros correspondendo as soluções MINIMAX não podem ser obtidos a priori.

Consequentemente, se torna necessário especificar uma região plausível para os valores dos parâmetros e incorporar esta região no modelo. A sugestão é que a fronteira da região seja um contorno Equi-probabilístico da distribuição conjunta dos parâmetros aleatórios. O problema MINIMAX, definido deste modo, é não-convexo e, portanto, poderá ter ótimo local. O problema MAXIMAX associado é convexo.

7.2 - O Problema MINIMAX

O problema MINIMAX é da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 & \text{Min Max } \{c'x\} \\
 & \quad Z \quad x \\
 \text{s.a. } & Ax \leq b \text{ (restrições determinísticas)} \\
 & A_1x \leq Z \quad \quad \quad (7.1) \\
 & F(Z) \leq \alpha \\
 & X, Z \geq 0 \text{ e } \alpha = \text{constante}
 \end{aligned}$$

onde  $X$  é um vetor de variáveis de decisão, e  $F(Z) \leq \alpha$ . É uma região convexa de valores plausíveis dos parâmetros  $Z$  estocásticos. Se  $Z$  tem uma distribuição normal multivariada, a região será um hiperelipsoide. Como a interseção de conjuntos convexos é por sua vez convexa, segue-se que as restrições formam um conjunto  $S$  convexo.

O problema pode ser considerado como um jogo restrito. O jogador  $Z$  joga primeiro escolhendo  $Z = Z^*$  satisfazendo  $F(Z) \leq \alpha$ . Seguindo-se o jogador  $x$  escolhendo  $x = x^*$  satisfazendo as restrições restantes. O problema do jogador  $X$  é, portanto, o programa linear.

$$L: \text{Max}_x \{C'x : Ax \leq b, A_1x \leq Z^*, x \geq 0\} \quad (7.2)$$

O problema do jogador  $Z$  é mais complicado e é um programa não-convexo podemos escrever como segue:

$$\begin{aligned} \text{Min } \{ \text{Max } \{ C'x : Ax \leq b, A_1x \leq Z, x \geq 0 \} \} \\ Z \in D(Z)x \end{aligned} \quad (7.3)$$

onde  $D(Z) = \{ Z \geq 0 : \exists x \geq 0 \text{ para o qual } Ax \leq b, A_1x \leq Z, F(Z) \leq \alpha \}$ . Devido a esta não-convexidade, o problema poderá ter ótimo local.

### 7.3 - Regiões de Decisão

Para o problema MINIMAX vamos nos referir ao conjunto de  $Z$ , para o qual uma base de  $L$  é viável e ótima, como uma região de decisão. Podemos ilustrar tais regiões de decisão com o seguinte problema:

Exemplo 7.1:     $\text{Max } \{x_1 + x_2\}$

s.a.             $x_1 \leq Z_1$

$x_2 \leq Z_2$

$x_1 + 2x_2 \leq 6$

$x_1, x_2, Z_1, Z_2 \geq 0$

Introduzindo variáveis de folga  $x_3, x_4, x_5$  temos três possíveis bases ótimas viáveis:  $B_0 = \{x_1, x_2, x_4\}$ ,  $B_1 = \{x_1, x_2, x_5\}$  e  $B_2 = \{x_1, x_3, x_4\}$  cujas regiões de decisão são, respectivamente,  $R_0, R_1, R_2$  (Figura 7.1).

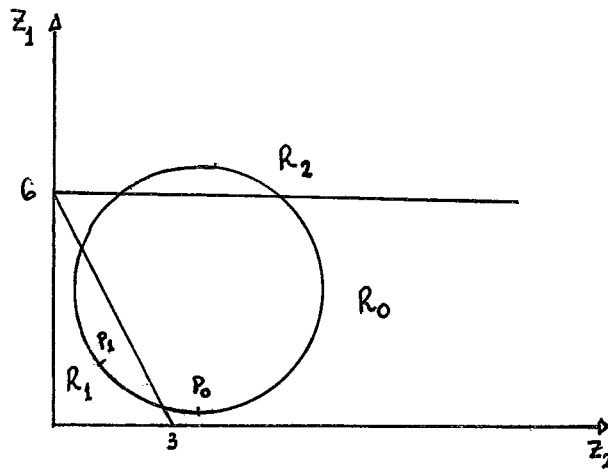


Fig. 7.1. - Regiões de Decisão e Ótimo Local

Por exemplo, para a base  $B_0 = \{x_1, x_2, x_4\}$  temos:

$$\begin{aligned} x_0 &+ 1/2 x_3 + 1/2 x_5 = 3 + 1/2 Z_1 \\ x_1 + x_3 &= Z_1 \\ 1/2 x_3 + x_4 - 1/2 x_5 &= -3 + 1/2 Z_1 - Z_2 \\ x_2 - 1/2 x_3 + 1/2 x_5 &= 3 - 1/2 Z_1 \end{aligned}$$

Esta base ótima é viável contanto que

$$\begin{aligned} Z_1 &\geq 0 \\ 1/2 Z_1 + Z_2 &\geq 3 \\ -1/2 Z_1 &\geq -3, \text{ cuja região denotamos por } R_0. \end{aligned}$$

Se superpormos uma região convexa não-poliedral  $F(Z) \leq \alpha$  sobre o gráfico (neste caso um círculo) então as regiões de decisão viáveis reduzem aos segmentos do círculo. Podemos considerar o problema MINIMAX como um problema em  $x$  (programa linear  $L$  (7.2) será o problema primário) no qual desejamos conservar a otimalidade com respeito a  $x$  e um problema em  $Z$  (problema secundário) no qual desejamos manter a viabilidade do problema primário, enquanto se minimiza a função objetivo com respeito a  $Z$ .

Em geral, o problema secundário consiste em minimizar uma função linear sobre uma região convexa formada pela interseção de uma região de decisão e uma região plausível. Para cada região de decisão existirá um problema secundário. Neste exemplo, para  $R_0$  teremos

$$\text{Min } \left\{ 3 + \frac{1}{2} Z_1 \right\}$$

$$Z_1 \geq 0$$

$$\frac{1}{2} Z_1 + Z_2 \geq 3$$

$$- \frac{1}{2} Z_1 \geq - 3$$

$$F(Z) \leq \alpha, \text{ onde } \alpha = \text{constante}$$

Para  $B_0$  ótima podemos buscar a solução MINIMAX representando a função objetivo  $x_0$  em termos de  $Z$ , i.e.,  $x_0(Z) = 3 + 1/2 Z_1$  e minimizar com respeito a  $Z \in R_0 \cap \{F(Z) \leq \alpha\}$ . Assim, podemos notar que o problema secundário terá um mínimo com respeito a  $Z$  em  $P_0$  (Fig. 7.1) que simultaneamente corresponde a um máximo no problema primário (pois a base  $B_0$  é ótima para todos pontos em  $R_0$ ). Deste modo, o ponto  $P_0$  será uma solução MINIMAX local, mas não necessariamente um ótimo global. De fato, a função objetivo do problema secundário correspondendo a  $B_1$  é  $\{Z_1 + Z_2\}$  de modo que podemos ver graficamente que  $x_0(Z)$  tem um máximo em  $P_1$ , portanto  $P_1$  é mais uma solução MINIMAX local.

Para determinarmos uma solução ótima global, devemos garantir que a busca cobre todas regiões de decisão possíveis. Isto pode ser alcançado pelo uso da programação multiparamétrica.

#### 7.4 - Programação Linear Multiparamétrica

Este método foi desenvolvido por GAL e NEDOMA [29] para encontrar todos vértices de um poliedro convexo.

A programação linear multiparamétrica para os elementos do lado direito, acarreta em se achar todas as bases viáveis ótimas no problema primário e suas regiões de decisão associadas. Uma base viável ótima é uma base viável para algum  $Z$  quando satisfaz as condições de otimalidade do problema primário. Aqui nos restringiremos a descrição do método para o caso em que  $Z \geq 0$ .

O método é o seguinte:

- (1) Calcule  $B_0 \in \mathbb{B}$  e  $R_0$ , onde  $B_0$  é qualquer base ótima viável para algum  $Z$ ,  $\mathbb{B}$  é o conjunto de todas as bases ótimas viáveis e  $R_0$  é a região de decisão correspondendo a  $B_0$ .
- (2) Construa os conjuntos  $V_0 = \{B_0\}$  e  $W_0 = \{\Gamma(B_0)\}$ , onde  $\Gamma(B_0)$  é o conjunto de bases vizinhas a  $B_0$ . Uma base  $B_i$  é uma base vizinha a  $B_0$  se ela tem apenas uma variável básica diferente de  $B_0$ .  $V_0$  é o conjunto de bases cujas regiões de decisão e vizinhas tenham sido determinadas.  $W_0$  é o conjunto de bases ótimas viáveis que foram descobertas, mas cujas regiões



de decisão e vizinhas não tenha sido determinadas.

(3) Suponhamos que temos construído  $V_{k-1}$  na iteração  $k-1$ .

(3.1) Se  $W_{k-1} = \emptyset$ , então  $V_{k-1} = \mathbb{B}$ , e o processo termina.

(3.2) Se  $W_{k-1} \neq \emptyset$ , selecione  $B_k$  e  $W_{k-1}$  a qual tenha o menos possível de variáveis básicas diferentes de  $B_{k-1}$  (de modo que o número de iterações do simplex, necessárias para obter o Tableau simplex correspondente, seja mínimo). Em particular, se  $W_k = W_{k-1} \cap \Gamma(B_{k-1}) \neq \emptyset$ , selecione  $B_i$  e  $W_k$  para caso onde  $B_k$  seja uma vizinha de  $B_{k-1}$ .

(3.3) Determine  $R_k$  e  $\Gamma(B_k)$  e então construa  $V_k = V_{k-1} \cup \{B_k\}$  e  $W_k = W_{k-1} \cap \Gamma(B_k) - V_k$  e volte a (3.1).

Um problema pendente é determinar  $\Gamma(B_k)$ , o conjunto de bases viáveis ótimas vizinhas de  $B_k$ , notando que tais bases correspondem a regiões de decisão adjacentes a  $R_{k-1}$ , existirá uma base viável ótima vizinha tendo uma variável básica diferente na linha  $i$  se e somente se:

(4) (4.1)  ${}^k a_{ij} < 0$  para pelo menos um  $j$ , onde  ${}^k a_{ij}$  é o elemento na linha  $i$  coluna  $j$  do Tableau simplex com base  $B_k$  e

(4.2) Existe  $Z \geq 0$  tal que  ${}^k b_i(Z) = 0$  e  ${}^k b_j(Z) \geq 0$  para  $i \neq j$  onde  ${}^k b_i(Z)$  é o lado direito da linha  $i$  em termos de  $Z$  para a base  $B_k$ .

Para determinar as linhas que satisfazem (4.1) e (4.2) procedemos como segue:

Determinação  $I_k$  os índices de linhas satisfazendo 4.1. Para  $i \in I_k$ , minimize  ${}^k b_i(Z)$  sujeito a  ${}^k b_j(Z) \geq 0$  para  $i \neq j$ . Seja  $\bar{I}_k$  o conjunto de índices para o qual  $\text{Min} \{ {}^k b_i(Z) \} \leq 0$ . Para cada  $i \in \bar{I}_k$ , as regras do dual simplex gerarão as bases com preendendo  $\Gamma(B_k)$ .

### 7.5 - Região de Busca

Na procura da solução MINIMAX global, deveremos limitar a busca para a região plausível  $F(Z) \leq \alpha$ . Contudo, pode-se mostrar que onde existe um único ótimo global, ele reside sobre uma região na superfície da região plausível e onde existem ótimos múltiplos, existe pelo menos um que recai nesta região. Por exemplo, para a região plausível na Fig. 7.2, a região de busca poderá ser limitada a (menor) curva AB

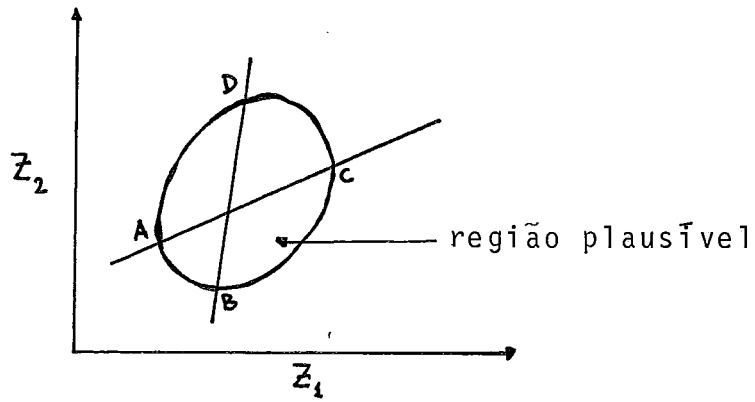


Fig. 7.2 - Existência de um Ótimo Global

A seguir mostraremos que uma solução MINIMAX ótima global ocorre numa região M (uma generalização de AB) na superfície da região plausível, então transformar M num conjunto de restrições para o caso onde Z tem uma distribuição conjunta normal multivariada.

Seja  $\bar{Z}_i = (Z_1, \dots, Z_{i-1}, \dots, Z_m)$  e seja a função G tal que:

$$G(\bar{Z}_i) = \underset{Z_i}{\text{Min}} \{Z_i : F(Z) \leq \alpha, Z_i > 0\}$$

definida para  $\bar{Z}_i \in \{\bar{Z}_i : \exists Z_i \geq 0, \text{ para o qual } F(Z) \leq \alpha\}$ . Seja

$S_i = \{Z_1, \dots, Z_{i-1}, G(\bar{Z}_i), Z_{i+1}, \dots, Z_m\}$ , onde os elementos de  $\bar{Z}_i$  são definidos acima. No exemplo,

$$G(\bar{Z}_1) = G(\bar{Z}_2) = \underset{Z_1}{\text{Min}} \{Z_1 : F(Z_1, Z_2) \leq \alpha, Z_1 \geq 0\}$$

de modo que  $S_1 = \{G(Z_2), Z_2\} = \text{curva DAB}$ . Analogamente  $S_2 = \{Z_1, G(Z_1)\} = \text{curva ABC}$ . Assim a curva  $AB = S_1 \cap S_2$ .

Teorema 7.1 [28] Seja  $P$  um conjunto fechado convexo com  $Z = (Z_1, Z_2, \dots, Z_m) \in P$  e seja  $M(\subseteq P) = S_1 \cap S_2 \cap \dots \cap S_m$ . Se  $\tilde{Z} \in P-M$  Então existe  $Z^* \in M$  tal que  $Z_j^* \leq \tilde{Z}_j$  para todo  $j$  e  $Z_j^* < \tilde{Z}_j$  para algum  $j$ .

Prova: Se  $\tilde{Z} \in P-M$  então  $\tilde{Z}_j > G(\tilde{Z}_j)$  para algum  $j$ . Seja  $\tilde{Z} = (\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_{j-1}, G(\tilde{Z}_j), \tilde{Z}_{j+1}, \dots, \tilde{Z}_m)$ . Se  $\tilde{Z} \in M$ , o teorema está provado. Senão, então algum elemento de  $\tilde{Z}$ ,  $\tilde{Z}_k > G(\tilde{Z}_k)$ . Podemos repetir o processo anterior substituindo  $\tilde{Z}_k$  por  $G(\tilde{Z}_k)$  para formar um novo vetor. Depois de aplicação repetida, deveremos descobrir um vetor  $\tilde{Z}^*$  para o qual  $Z_j^* = G(\tilde{Z}_j)$  para todo  $j$ . Consequentemente,  $Z^* \in M$  e  $Z_j^* \leq \tilde{Z}_j$  para todo  $j$ , e  $Z_j^* < \tilde{Z}_j$  para pelo menos um  $j$ .

Teorema 7.2 [28] Se  $Z$  são os parâmetros do lado direito de restrições do tipo "Menor que ou igual" num programa linear de variáveis  $x$  e  $x_0(Z)$  é o valor máximo da função objetivo, então  $x_0(Z^*) \leq x_0(\tilde{Z})$ . Portanto, a busca para uma solução MINIMAX GLOBAL pode ser limitada a região  $M$ .

Prova: Uma redução de um ou mais parâmetros do lado direito de restrições do tipo "Menor que ou igual" reduz o tamanho da região viável, portanto  $x_0(Z^*) \leq x_0(\tilde{Z})$ .

Para o caso onde  $\tilde{Z}$  é uma variável aleatória com distribuição normal multivariada, a fronteira de  $M$  pode ser representada pela interseção de restrições lineares com  $P$ .

Estas restrições podem ser determinadas como segue:  $M$  é definido como a interseção das regiões  $S_j$  onde  $S_j$  é uma

região sobre a superfície de P (região plausível). A fronteira de  $S_i$  ocorrerá onde  $S_i$  encontra  $\bar{S}_i$  (seu complemento) sobre a superfície de P. Conseqüentemente, em um ponto de fronteira teremos:

$$\text{Min}_{Z_i} \{Z_i : F(Z) \leq \alpha\} = \text{Max}_{Z_i} \{Z_i : F(Z) \leq \alpha\}$$

e para tal ponto temos  $(\partial F / \partial Z_i) = 0$ . Para o caso da distribuição normal multivariada esta equação define um hiperplano que separa a família de regiões  $S_i$  dos seus complementares  $\bar{S}_i$ . Conseqüentemente,  $S_i$  está contida num semi-espaco limitado pelo hiperplano. Além do mais, o conjunto de equações  $(\partial F / \partial Z_i) = 0$  conterá M na interseção dos  $S_i$ .

Se  $F(Z) = (Z - \mu)' V^{-1} (Z - \mu) = \alpha$ , onde  $\mu$  é um vetor de médias e V é a matriz de covariância, então o conjunto de hiperplanos será formado por:

$$\frac{\partial F}{\partial Z} = V^{-1} (Z - \mu) = 0$$

o qual é um conjunto de restrições lineares.

Com referência a Fig. 7.2, as restrições serão as linhas através de AC e BC. Se  $Z_i$  são independentes então as restrições são simplesmente:

$$Z_i = \mu_i \quad i = 1, \dots, M$$

## 7.6 - Algoritmo Para Solução MINIMAX Global

Este algoritmo usa o método de programação multi-paramétrica para especificar todas as regiões de decisão que geram  $M$ , e testa para cada região a existência de uma solução MINIMAX. Desta forma, todas soluções MINIMAX em  $M$  são determinadas e portanto a solução global MINIMAX. A região de decisão  $R_k$  (correspondendo a  $B_k$ ) é reduzida pela adição de restrições: (onde  $R_k^*$  é a região reduzida).

$$(5) \quad F(Z) \leq \alpha$$

onde  $2V^{-1}(Z - \mu) \leq 0$  para o caso de distribuição normal multivariada.

No algoritmo de Gal & Nedoma, a determinação do conjunto  $\Gamma(B_i)$  de bases vizinhas de  $B_k$ , correspondendo ao passo (4.2), foi modificada para:

$$(4.2) \text{ Existe } Z > 0 \text{ tal que } {}^k b_i(Z) = 0 \text{ sujeito a } {}^k b_j(Z) \geq 0 \text{ para } j \neq i \text{ e as restrições (5)}$$

Isto obriga a busca nas regiões que geram  $M$ . Agora podemos resumir o algoritmo, como segue:

Suponhamos que temos construído  $V_{k-1}$  e  $W_{k-1}$  na iteração  $k-1$

- (a) Se  $W_{k-1} = \emptyset$  então  $V_{k-1} = \mathbb{B}$  e o processo termina. Se  $W_{k-1} \neq \emptyset$ , selecione  $B_k \in W_{k-1}$  e determine  $R_k^*$ .
- (b) Resolva o problema secundário com a região viável  $R_k^*$  e se uma solução MINIMAX local for obtida, guarde esta solução.
- (c) Determine  $V_i$  e  $W_k$  e repita (a). A solução MINIMAX com o menor valor para  $x_0$  é um ótimo global.

Dyson & Swaites [28] Também analisaram o caso de ocorrência de variáveis aleatórias nos coeficientes da função objetivo, utilizando uma modificação do algoritmo de programação multiparamétrica para coeficientes da função objetivo. Do mesmo modo, eles sugerem uma variação do algoritmo acima para trabalhar com variações aleatórias nos coeficientes da função objetivo e do lado direito das restrições, simultaneamente, baseados na extensão de Gal [30] para a programação multiparamétrica.

CAPÍTULO III - SOLUÇÃO EXPERIMENTAL DE PROGRAMAÇÃO  
ESTOCÁSTICA - SEPE



### III. SOLUÇÃO EXPERIMENTAL DE PROGRAMAÇÃO ESTO- CÁSTICA - SEPE

Depois de analisar os procedimentos mais conhecidos de Programação Linear Probabilística, apresentaremos um método experimental que tenta melhorar a abordagem do Problema Geral da Programação Probabilística, i.é, variações aleatórias ocorrendo em todos coeficientes (A, b, c).

Este método pode utilizar uma série de algoritmos de programação matemática e qualquer tipo de distribuição probabilística para os parâmetros considerados aleatórios.

Por outro lado, com ele podemos fazer uma análise estatística dos resultados por meio de inferências probabilísticas nos valores das variáveis de decisão e sobre o valor da função objetivo.

#### III.1 - Vantagens e Desvantagens dos Métodos de Programação Probabilística

Como vimos no capítulo anterior, embora nenhum método tenha sido desenvolvido que seja totalmente aceitável para todos casos, vários procedimentos tem sido propostos tanto para os tipos especiais como para o caso geral de programação linear probabilística. Vamos analisar os vários procedimentos quanto as características operacionais.

permite que a aleatoriedade ocorra nos valores  $b$  (lado direito das restrições). Este método está bastante limitado pois somente poucos parâmetros podem ser aleatórios. Por outro lado, ele somente avalia a consequência da violação de uma restrição (inviabilidade) indiretamente.

No caso Programação com Recursos <sup>|19|</sup> (ou multietápio), o problema estocástico é transformado em um problema determinístico, onde os parâmetros podem assumir somente uns poucos valores aleatórios discretos. Nestes problemas alguns dos valores aleatórios dos parâmetros são imediatamente conhecidos e outros valores devem ser determinados em estágios posteriores. Este método "aqui e agora" será bastante útil se os valores dos parâmetros de fato serão conhecidos nos próximos estágios, se apenas uns poucos conjuntos de valores discretos dos parâmetros são considerados "possíveis", e se o valor esperado da função objetivo será uma ferramenta útil para o planejamento. No entanto, quando aumenta o número de estágios e o número de conjuntos de valores possíveis dos parâmetros, este procedimento resulta num programa linear de grandes dimensões.

O método do Valor-Esperado <sup>|22|</sup>, supõe-se que o valor esperado de cada parâmetro seja uma constante. Então, substituímos os parâmetros por seus valores esperados e obtemos uma função objetivo que também é um valor esperado. Quando as variâncias das distribuições dos parâmetros são pequenas, os resultados obtidos por este procedimento pode está muito próximo do ótimo verdadeiro. Caso suponhamos valores constantes para os parâ-

metros, quando as variâncias são grandes, poderemos chegar a soluções inviáveis (i.é, elas violam as restrições) ou subótimas.

Embora os procedimentos descritos neste trabalho tenham sido usados com algum sucesso, todos apresentam limitações, pois somente podem ser aplicados a um caso especial de programação probabilística e não podem ser usados numa variedade de aplicações. Por outro lado, eles podem se tornar intratáveis, do ponto de vista matemático, mesmo para problemas de pequeno porte.

O procedimento que apresentaremos na próxima seção, aproveita as vantagens do método do Valor-Esperado e tenta amenizar as desvantagens. Os pontos robustos do método do Valor-Esperado são:

- (i) Ele tolera qualquer padrão de variação nos parâmetros;
- (ii) Simples de aplicar e fácil de analisar os resultados;
- (iii) Pode utilizar uma variedade de algoritmos de programação matemática: Simplex, quadrática, inteira, não-linear, etc.

Algumas das desvantagens do método do valor esperado são:

- (i) O fato da solução está próxima do ótimo é di

retamente relacionado com as variâncias dos parâmetros;

- (ii) A solução poderá ser inviável ou subótima. Por exemplo, se os parâmetros do vetor  $b$  de um problema de maximização tendem para o lado maior das distribuições, a solução poderá ser subótima, mas se eles tendem em direção ao menor lado, a solução poderá ser inviável.

### III.2 - O Método SEPE

Este procedimento foi desenvolvido por GAITHER <sup>[31]</sup> baseado no método de SENGUPTA & TINTNER <sup>[32]</sup>. O método expande os esforços dos procedimentos anteriores, refinando a parte de aplicação enquanto tenta superar as desvantagens dos outros procedimentos.

O método SEPE seleciona, a cada iteração, um único conjunto de valores dos parâmetros para o problema (os parâmetros podem ser constantes ou ter valores selecionados aleatoriamente a partir de suas distribuições discretas ou contínuas), executa o algoritmo de programação matemática, então armazena os resultados da iteração. Esta sequência de passos é repetida até que o número de ciclos (iterações) previamente determinado, tenha sido completado. Este número de ciclos pode ser determinado "A priori" ou pode ser terminado por uma heurística de parada usando um algoritmo de "comportamento". No final, o método SEPE

exibe um resumo estatístico dos valores resultantes da função objetivo, variáveis de decisão e variáveis de folga.

Notadamente, este procedimento é uma interação de simulação e programação matemática, pois ele gera valores de variáveis aleatórias, conhecidas as suas distribuições de probabilidade, e em seguida resolve um programa matemático.

A vantagem principal deste método é que podemos obter a dispersão dos valores da função objetivo por meio da construção de intervalos de confiança, dando ao tomador de decisão maior flexibilidade na escolha de uma política a ser adotada.

### 2.1 - Algoritmo de Solução Experimental

A figura 3.1 abaixo nos fornece a descrição da estrutura lógica do procedimento SEPE, interagindo um método experimental com algoritmos de programação matemática.

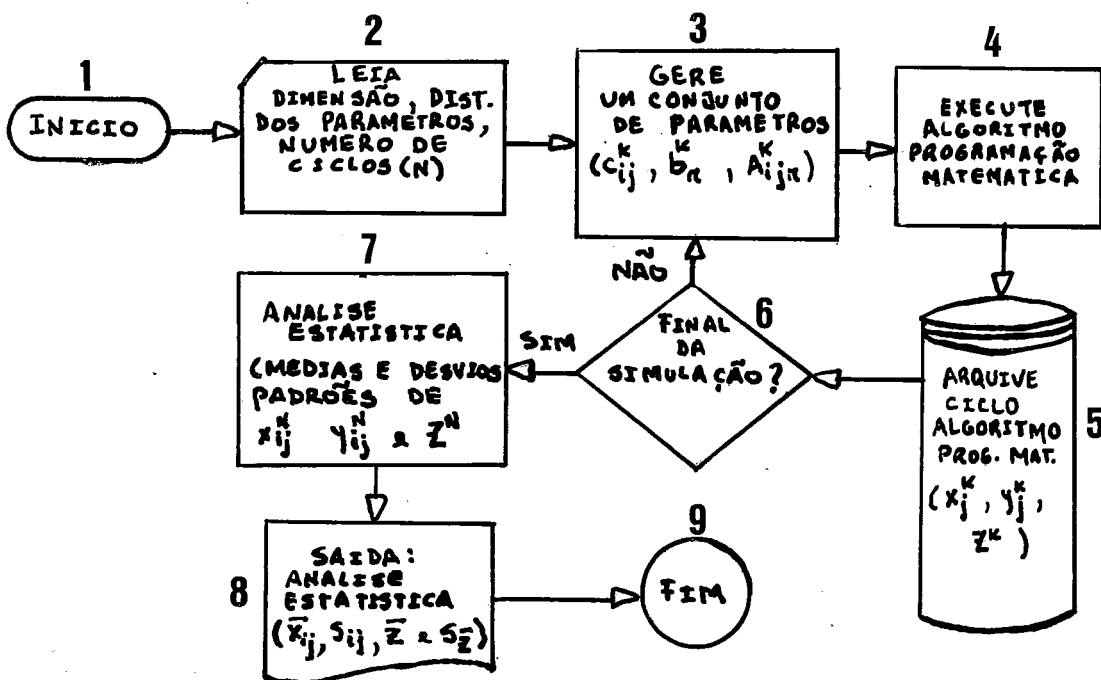


FIGURA 3.1 - MÉTODO SEPE

PASSO 2: O Processo Identifica:

- (a) As entradas do algoritmo de programação matemática (sinais das inequações ou equações no conjunto de restrições, número de restrições, número de variáveis de decisão, classe do problema de minimização ou maximização e outras características)
- (b) Identificação e localização dos parâmetros com valores constantes, i.é, parâmetros não-aleatórios.
- (c) Uma descrição estatística dos parâmetros que são variáveis aleatórias (média, desvio padrão e distribuição para variáveis aleatórias contínuas: valores discretos e probabilidades associadas para variáveis aleatórias discretas).
- (d) O número máximo de ciclos executados.

PASSO 3: Gera um conjunto de valores de parâmetros. Estes parâmetros poderão ser gerados a partir de constantes, distribuições contínuas para variáveis contínuas ou obtidos por métodos de simulação de MONTECARLO <sup>33</sup> para distribuições discretas. Aqui podemos usar qualquer tipo de distribuição: NORMAL, UNIFORME, POISSON, GAMA, EXPONENCIAL, ALFA, BETA, etc. As quais são usadas em conjunto

com uma subrotina de geração de números aleatórios.

PASSO 4: Usa o único conjunto de valores de parâmetros estabelecido no PASSO 3 e executa um algoritmo de programação matemática para obter uma solução viável e ótima desse conjunto de valores de parâmetros, podendo usar qualquer algoritmo (inteira, mista, não-linear, etc.).

PASSO 5: Arquiva a solução obtida neste único ciclo do PASSO 4, i.é, do único conjunto de valores ótimos de variáveis de decisão e da função objetivo alcançado pelo algoritmo de programação matemática. Caso a solução não seja viável ou a solução seja indeterminada, os resultados deste ciclo serão deletados.

PASSO 6: Executa um algoritmo heurístico onde:

- (a) Compara o número de ciclos executados com o número previamente determinado.
- (b) Calcula a variância dos valores da função objetivo e compara com a variância obtida nos ciclos anteriores. O algoritmo para o processo SEPE caso a variância tenha estabilizado.

PASSO 7: Calcula a média e o desvio padrão dos valores das variáveis de decisão e dos valores da função obje

tivo determinados em cada ciclo arquivado no PASSO 5.

PASSO 8: Exibe os resultados finais:

Valor médio de cada variável de decisão;

Desvio padrão de cada valor da variável de decisão;

Média dos valores da função objetivo;

Desvio padrão dos valores da função objetivo.

## 2.2 - Análise Estatística do Método SEPE

Os valores médios das variáveis de decisão fornece ao tomador de decisões o melhor conjunto de decisões. Podemos mostrar que, quando o número de ciclos aumenta, os valores médios das variáveis de decisão aproximam-se dos valores obtidos pelo método do Valor-Esperado de MADANSKY [22].

Para um conjunto de ciclos, os desvios padrões dos valores médios das variáveis de decisão são medidas de dispersão dos valores individuais das variáveis de decisão, a cada ciclo, em torno da média. A grandeza destas dispersões fornece uma estimativa do grau de confiança que o tomador de decisão pode ter para cada valor médio de cada variável de decisão.

A média dos valores da função objetivo dá o valor esperado da função objetivo, tomando-se os valores médios das variáveis de decisão como um conjunto de decisão. Do mesmo modo, podemos mostrar que a média dos valores da função objetivo apro-



xima-se dos valores da função objetivo obtidos no método do Valor-Esperado<sup>|22|</sup>.

Também, o desvio padrão dos valores da função objetivo é uma medida da dispersão dos valores da função objetivo, que corresponde a cada ciclo, em torno da sua média. Analogamente, esta dispersão é uma medida de confiança que o tomador de decisão tem no valor médio da função objetivo.

Pelo Teorema do Limite Central<sup>|12|</sup>, quando o número de ciclos aumenta, podemos supor que a distribuição dos valores da função objetivo, obtidos em todo o conjunto de ciclos, aproxima-se da distribuição normal. Embora existam diversos artifícios, basta dizer que o número de ciclos excede o tamanho mínimo crítico da amostra para se aplicar o Teorema do Limite Central.

Com a normalidade da distribuição dos valores da função objetivo, o tomador de decisões poderá fazer condições probabilísticas sobre os resultados usando a média dos valores das variáveis de decisão ( $\bar{X}_j$ ) como um critério de decisão. Esta habilidade de fazer condições probabilísticas é a vantagem primordial do método SEPE.

### 2.3 - Eficiência do Método SEPE

Além da vantagem - chave do SEPE sobre o método do Valor - Esperado de programação linear, ele possui as outras vantagens deste último, i.é.,

- a) tolera qualquer tipo de variação paramétrica;
- b) simples de aplicar e de interpretar os resultados;
- c) pode utilizar qualquer tipo de algoritmo de programação matemática.

Podemos mencionar duas dificuldades no procedimento SEPE. Primeiro, como no método do Valor-Esperado (e em todos outros métodos de programação probabilística), a solução pode ser tanto inviável como subótima. Contudo, não podemos fazer esta de terminação antes de sabermos com certeza os valores precisos dos parâmetros.

Segundo, a eficiência do SEPE depende, em grande parte, do seguinte:

- (i) a eficiência do algoritmo de programação matemática empregado;
- (ii) a dimensão e estrutura do problema de programação matemática;
- (iii) o número de parâmetros que são variáveis aleatórias;
- (iv) a eficiência dos geradores de números aleatórios empregados;
- (v) o número de ciclos executados (ou a eficiência da heurística empregada);

(vi) o sistema (máquina) computacional utilizado.

#### 2.4 - Problema - Exemplo e a Solução SEPE

Desenvolvemos o algoritmo SEPE em linguagem FORTRAN IV cujo programa computacional está descrito no Apêndice A.3. de pois aplicamos um exemplo teste para observar o comportamento da solução. Abaixo descrevemos este exemplo com as respectivas soluções e inferências.

Problema:        Minimizar  $Z = C_1X_1 + 1.75X_2 + 1.90X_3 + 2.82X_4$

s.a.

$$X_3 \leq 185$$

$$X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \geq b_2$$

$$X_4 \leq b_3$$

$$X_2 \leq b_4$$

$$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$$

onde:

$$C_1 = 1.65 + V_1, \quad V_1 = \text{variável aleatória} \\ N(0.761, 0.190)^1$$

$$b_2 = V_2, \quad V_2 = \text{variável aleatória} \\ N(210, 6.7)$$

$$b_3 = 0.275 b_2$$

$$b_4 = V_3, \quad V_3 = \text{variável aleatória} \\ N(12, 1.25)$$

---

1 -  $N(\mu, \sigma)$  variável aleatória normalmente distribuída com média =  $\mu$  e desvio padrão =  $\sigma$

Para este exemplo, supomos um número máximo de ciclos = 30, e um número mínimo = 10, sendo que foram executados 25 ciclos determinados pela Heurística de Parada (subroutine HEURIS) que obteve  $ESTAB = \left[ \frac{VAR(K) - VAR(K-1)}{VAR(K)} \right] < \epsilon$ , onde  $\epsilon = 0.01$ , significando que a variância da função objetivo no  $K = 25$  ciclo tinha sido estabilizada. Os resultados foram os seguintes:

	<u>Média</u>	<u>Desvio Padrão</u>	
$X_1$	11.561	6.541	
$X_2$	11.613	1.514	ESTAB = 0.002378
$X_3$	184.891	0.378	
$X_4$	0	0	
Z	399.785	15.681	

Agora, construiremos intervalos de confiança para a média e variância verdadeira dos valores da função objetivo, supondo que estes valores seguem uma distribuição normal: o intervalo da média é dado por:

$$P \left[ \bar{X} - t_{\frac{1-\alpha}{2}} S/\sqrt{N} < \mu < \bar{X} + t_{(1-\frac{1-\alpha}{2})} S/\sqrt{N} \right] = 1 - \alpha$$

Assim, para  $\alpha = 0.05$ ,  $\bar{X} = \bar{Z}$ ,  $S = S_Z$ ,  $N = 25$

$$P \left[ \bar{Z} - t_{0,975} S_Z/\sqrt{N} < \mu < \bar{Z} + t_{0,975} S_Z/\sqrt{N} \right] = 0.95$$

$$t(24)_{0,975} = 2.064$$

$$P\left[399.785 - 2.064 \times 15.681/5 < \mu < 399.785 + 2.064 \times 15.681/5\right] = 0.95$$

Desse modo, podemos afirmar que para uma probabilidade de 95% temos:

$$393.3119 < \mu_Z < 406.2581$$

O intervalo para a variância é dado por:

$$P\left[S^2/\chi_{0.975}^2 < \sigma_Z^2 < S^2/\chi_{0.025}^2\right] = 0.95$$

$$\chi_{0.975}^2(24) = 1.64$$

$$\chi_{0.025}^2(24) = 0.517$$

$$P\left[(15.681)^2/1.64 < \sigma_Z^2 < (15.681)^2/0.517\right] = 0.95$$

Assim, temos:

$$149.935 < \sigma_Z^2 < 475.616$$

ou

$$12.244 < \sigma_Z < 21.808$$

CAPÍTULO IV - MODELO DE PLE APLICADO À PESCA

#### IV. MODELO DE PLE APLICADO À PESCA

##### IV.1 Preliminares

Investimentos exorbitantes em fábricas de processamento, barcos frigoríficos, equipamentos; custos variáveis elevados para a pesca e processamento das espécies de lagosta e pargo; estoques; e a rápida subida dos preços dos derivados de frutos no mar (peixes, crustáceos etc) caracterizam as críticas feitas contra as estações<sup>1</sup> tradicionais de pesca.

Neste capítulo, pretendemos apresentar um plano que visa otimizar a pesca das espécies de lagosta e pargo na região do norte e nordeste do Brasil.

O objetivo central seria desenvolver um modelo para determinação da quantidade de lagosta e pargo a ser pescada em cada região geográfica (conjunto de blocos) em cada período de cada estação de pesca. Este modelo permitirá maior rendimento para a frota pesqueira sob certas limitações, como seguem:

1. capacidade dos barcos e dos equipamentos
2. restrições meteorológicas
3. restrições biológicas

---

1 - Estas estações dizem respeito a distribuição do esforço de pesca nas diversas áreas que compõem a região de pesca.

4. restrições de processamento

5. restrições de mercado

6. restrições de captura

Na formulação deste modelo, levamos em consideração a incerteza de certos fatores, como por exemplo, a quantidade de cada espécie que poderia ser pescada e a quantidade de cada espécie que poderia ser negociada a preços do mercado corrente.

Deste modo, devido a natureza estocástica dos parâmetros, utilizamos o método de solução experimental de programação estocástica-SEPE para obter uma política ótima de pesca para a frota no NORTE/NORDESTE.

#### IV.2 - O Sistema Pesqueiro no Nordeste do Brasil

##### 2.1 - Espécies

A pesca industrial e comercial do Ceará tem o pargo e a lagosta como os maiores contribuintes da receita bruta, sendo que esta atividade começou em 1955 para a lagosta e em 1961 para o pargo, com o estado do Ceará figurando como o maior exportador nacional para estes produtos.

Existem duas espécies de lagosta capturadas no norte/nordeste com os seguintes nomes biológicos:



- (i) *Panurilus argus* e
- (ii) *Panurilus laevicauda*

No entanto, elas são conhecidas comumente como lagosta vermelha e lagosta verde, respectivamente.

A pesca da lagosta é praticada de três maneiras distintas: covos ou manzuãs, caçoeira (rede) e pesca de mergulho. Embora que a pesca de caçoeira seja bastante rentável, ela é considerada altamente predatória pois arrasta toda lagosta do local sem distinção de tamanho (idade). A pesca de mergulho também apresenta alta rentabilidade em relação a pesca de covos, mas tem várias desvantagens: não existe pessoal qualificado, necessidade de um barco equipado com aparelho de descompressão, e finalmente os mergulhadores estariam limitados à profundidade de 30 m o que provocaria a pesca de lagosta mais jovens.

Em vista do exposto, o grupo de trabalho sobre a pesca da lagosta (SUDEPE) emitiu um relatório<sup>36</sup> proibindo a pesca de caçoeira e de mergulho, permitindo somente a pesca por meio de covos, que é um tipo de armadilha iscada onde a lagosta entra para comer ou para se esconder dos predadores.

A pesca do pargo, *Lutjanus purpureus* Poey, permitiu a diversificação das atividades das empresas pesqueiras do norte/nordeste tanto na época de fechamento da estação de pesca da lagosta como em função das flutuações da produção de lagosta<sup>37</sup>.

Além do pargo propriamente dito, existe outra espécie de peixe, Guaiuba, a qual é exportada como pargo, na maioria das vezes, embora com menos intensidade.

As pescarias são realizadas, na sua maioria, por barcos motorizados, usando-se como aparelho de pesca a linha parqueira, construída com fio de nylon com 5 a 15 anzóis de tamanhos variados, iscada principalmente com a sardinha verdadeira.

## 2.2 - Regiões de Pesca

A delimitação de áreas de pesca para uma determinada espécie não é um problema trivial pois ela está relacionada com fatores tais como profundidade, posição geográfica (coordenadas), correntes marítimas etc. Contudo, existe um padrão de codificação de blocos de 1 grau de lado proposta pela FAO, cujo sistema é adotado pela SUDEPE nos mapas de bordo, os quais caracterizam o local de pesca e a quantidade capturado de cada espécie por viagem de cada embarcação.

A idéia para delimitação de cada área de pesca, seria o agrupamento de blocos, segundo alguns critérios de similaridade (correntes, profundidades, abundância, tipo de fundo etc.). Infelizmente, nesta primeira tentativa não foi possível caracterizar cada área segundo os critérios acima.

Deste modo, resolvemos utilizar o modo mais simples para relacionar os blocos por área, i.é., agrupamos os blo

cos segundo sua vizinhança paralela (figura abaixo), como segue:

<u>Área</u>	<u>Blocos</u>
1	32° - 36°
2	37° - 38°
3	39° - 40°
4	41° - 43°
5	44° - 50°

sendo que excluimos os blocos com "latitude menor" maior que 16. Para a pesca da lagosta delimitamos as áreas 1 a 4 e para o pargo todas áreas. Outro aspecto que deveria ser abordado seria zonas diferentes para o pargo e a lagosta, pois a pesca do primeiro é feita em águas mais distantes da costa enquanto que a pesca da lagosta é feita mais próximo à costa. Fonteles FO & Kurisaka<sup>38</sup> analisaram condições oceanográficas para delimitação de áreas de pesca do pargo.

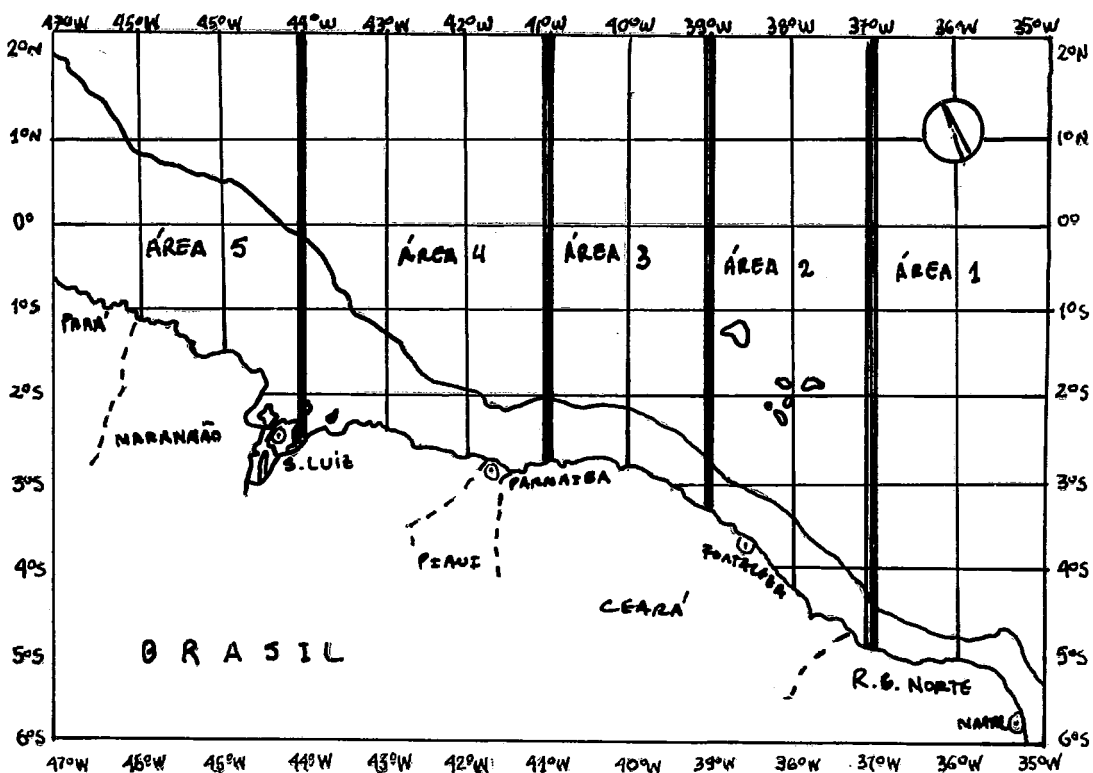


FIG.1 ÁREAS DE PESCA

### 2.3 - Estações de Pesca

Devido a efeitos adversos da pesca sobre a população de lagosta, tanto do ponto de vista biológico como do econômico-social, fizeram com que a SUDEPE, como o órgão controlador da pesca no Brasil, adotasse medidas de regulamentação para evitar a sobre-exploração.

Dentre as medidas adotadas existe uma quanto a épocas interditadas, compreendendo a princípio dois meses, sendo que neste ano a proibição se estenderá por 3 meses. A determinação das épocas de fechamento está diretamente ligada aos fatores biológicos de acasamento desova e crescimento, pois ela é feita de acordo com o pico de desova (intensidade) para o qual Buesa Mās et alli<sup>39</sup> estimaram como sendo 23% o pico máximo, ocorrendo no mês de março. Abaixo, as últimas estações de pesca da lagosta.

<u>Ano</u>	<u>Estação</u>
1980	fev-nov
1981	fev-nov
1982 (previsto)	mai-jan

Além das medidas de regulamentação já citadas, existem outras as quais enumeramos a seguir<sup>40</sup>

- Áreas interditadas: A pesca é proibida a todo tempo nos criadouros naturais identificados. (existem três áreas protegidas)

- Tamanhos mīnimos de captura das lagostas vermelha e verde

Espēcie	Comprimentos (cm)		
	Total	Cauda	Cefalotorax
Vermelha	18,5	12,0	6,5
Verde	16,0	10,0	6,0

- Proibida a pesca da lagosta ovada de qualquer tamanho.
- A malha dos covos nāo deve ser inferior a 5,0cm.
- Limitaçāo do nūmero de embarcações (nāo existe mais concessões de licenças para pescar lagosta para nova embarcações a partir de 1974).

Existem certas sugestões com respeito ao estabelecimento de cotas por um perīodo de 5 anos, que seria determinada de acordo com os incrementos dos valores da CPUE (captura por unidades de esforço) nos perīodos anteriores, no entanto esta legislaçāo nāo estā em vigor.

Quanto a pesca do pargo, esta nāo tem uma regulamentaçāo no que se diz respeito a conservaçāo de estoques. Mesmo assim, o Prof. Antonio Aduato Fonteles F<sup>0</sup><sup>1</sup> defende uma polī-

---

1 - Labomar - UFC

tica de um tamanho m̃nimo de captura bem como o controle do esforço de pesca atravēs da limitaçaõ do ñ de embarcações.

Devemos notar que estas medidas de regulamentaçaõ da pesca para lagosta e pargo visam permitir a recuperaçaõ do estoque pela reduçaõ da taxa de mortalidade e proteçaõ do estoque reprodutor cujo fato estã diretamente relacionado com a sobrevivência da empresa pesqueira, pois esta teria garantido uma receita vital para os anos subseqüentes.

De acordo com Paiva<sup>43</sup>, uma anãlise de variãcia levou a conclusã de que a abundãcia de lagostas esteve sujeita a variações significativas somente entre locais de pesca e nã entre épocas do ano, no entanto hoje o esforço de pesca aumentou consideravelmente, bem como novas áreas de pesca estã sendo exploradas, cujo fato poderã levar a outras conclusões.

#### 2.4 - Aspectos Comercial e Industrial

A exportaçaõ de lagostas estã entre US\$ 40 milhões e US\$ 50 milhões por ano sendo que em 1979 atingiu quase US\$ 54 milhões somente no estado do Cearã. Neste ano o pargo teve uma receita de US\$ 4,2 milhões. Assim podemos dizer que a indũstria pesqueira representa uma parcela vital para a economia do nordeste, nã sã pela receita como pela oferta de empregos diretos e indiretos.

A produçaõ da regiãõ ĩ praticamente exportada

para os EUA, o maior consumidor mundial dos dois produtos. Por se tratar de produtos perecíveis a demanda deve se comportar harmoniosamente com a produção. Os exportadores dizem que existe sempre ótimas condições de venda para os produtos, mais intensamente para a lagosta, embora acredite-se que haja uma certa sazonalidade na demanda por ocasião das festas (natal, ação de graças etc.).

Segundo <sup>41</sup> a demanda para os produtos derivados de peixe de altos preços tem sido afetada pela recessão, mesmo para a lagosta. O consumo de caudas de lagosta foi 14% menor no primeiro semestre de 1980 em comparação com 1979.

Tabela 4.1 - Oferta e demanda de caudas de lagosta nos EUA (jan - jun)

Componente	Média 1974-78	1979	1980
	Milhões de Quilos		
Estoque Inicial	2,3	2,7	2,6
Importações	8,1	8,8	7,5
Oferta Total	10,4	11,5	10,1
Estoque Final	2,1	2,1	2,1
Consumo Aparente	8,3	9,4	8,0

Tabela 4.2 - Importações EUA de caudas de lagosta de água quente por país de origem (jan - jun)

País	Média 1974-78	1979	1980
Brasil	1,3	1,6	1,0
Honduras	0,2	0,5	0,4
Nicarágua	0,4	0,7	0,4
Ásia	0,8	0,4	0,2
Outros	0,7	0,6	0,7
Total	3,4	3,8	2,7

Pela tabela 4.1 vemos que o consumo aparente de caudas de lagosta na primeira metade de 1980 foi 15% menor que em 1979 e 3% abaixo da média de 1974-78.

As importações dos EUA no primeiro semestre de 1980, para lagosta de água-quente, foram 29% menores que 1979, ocasionadas pelo declínio acentuado dos embarques do Brasil e Nicarágua. Os embarques do Brasil diminuíram cerca de 37%. Desse modo, seria interessante um estudo mais detalhado sobre a oferta e a demanda levando-se em consideração série de preços bem como o consumo e a oferta de produtos similares (substitutivos).

O aspecto industrial da pesca no norte/nordeste tem como elemento principal o custo operacional da frota pesqueira, tanto pelo custo inicial de cada embarcação como também o custo de manutenção, onde o combustível é o maior insumo re-



presentado cerca de 20% do custo operacional por viagem, seguido do custo de iscas que representa cerca de 14%. Costa e Ferreira<sup>42</sup> analisaram o custo operacional das pescarias de lagostas por item (provisões, combustível, mão-de-obra, implementos etc), explicitando a participação percentual de cada item no custo total para 9 embarcações de casco de aço com frigorífico a bordo, cujo estudo seria bastante útil para a composição da "contribuição" da frota pesqueira por tonelada, embora que os dados devam ser atualizados, haja visto que determinados itens sofreram maiores variações de preços que outros neste tempo.

Depois da descarga, o pescado é transportado do porto para as indústrias de beneficiamento, as quais processam cada espécie (lagosta e pargo) separadamente com níveis diferentes de produção diária. Notadamente o trabalho é praticamente manual, exigindo uma grande quantidade de mão-de-obra, a qual permanece muitas vezes ociosa pela falta de matéria prima e outras vezes é escassa pela sobre produção de pescado.

Portanto, seria ideal a elaboração de um plano que conservasse uma produção adequada ( $\pm$  constante) durante toda a estação de pesca, observando-se níveis ótimos do esforço de pesca bem distribuídos ao longo da estação e mantendo ocupada a mão-de-obra disponível.

#### IV.3 - Modelo de Otimização Estocástica Restrita

Com referencia a idéia de um plano para melho-

rar a conjuntura da pesca da lagosta e pargo, poderíamos formalizar um modelo de programação matemática o qual expressa o objetivo central, a melhoria da contribuição da frota pesqueira, levando em consideração requisitos necessários para uma estruturação robusta do sistema pesqueiro. Poderíamos expressar o modelo da seguinte forma:

$$\text{Maximizar } Z = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{k=1}^{12} C_{ijk} X_{ijk} \quad (4.1)$$

$$\text{Sujeito a } \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{J_i} \sum_{k=1}^{12} A_{ijk}^r X_{ijk} \begin{matrix} > \\ = \\ < \end{matrix} b_r \quad (4.2)$$

$$r = 1, \dots, n \text{ (nº de restrições)}$$

$$X_{ijk} > 0, \forall i, j, k \quad (4.3)$$

Devido a natureza aleatória dos coeficientes  $C_{ijk}$ ,  $A_{ijk}^r$  e  $b_r$  o modelo acima será tratado como um problema de programação linear estocástica, o qual descreveremos a seguir.

### 3.1 - Função Objetivo

O modelo (4.1) - (4.3) visa determinar o número de toneladas de cada espécie a ser pescado em cada área geográfica, em cada período de tempo. O objetivo seria maximizar a contribuição (rentabilidade) da frota de barcos, representado por (4.1), onde  $X_{ijk}$  é o número de toneladas da espécie (i), a ser pescada na área geográfica (j) no período (k) e  $C_{ijk}$  repre

senta a contribuição por tonelada para cada espécie (i) na área (j) no período (k). Os coeficientes  $C_{ijk}$  incluem fatores de custo variável tais como

- a) mão-de-obra (fixa e variável)
- b) combustível
- c) iscas, implementos de pesca
- d) reparos e manutenção
- e) provisões etc.

cujos fatores estão associados com o custo operacional de um barco (ver Quadro I no Apêndice). Como  $C_{ijk}$  representa rentabilidade, existe também um valor bruto por tonelada que é associado a este coeficiente. Como é de se esperar, a contribuição da lagosta é, na maioria das vezes, superior a do pargo.

Os dados correspondentes aos  $C_{ijk}$  são colhidos nos mapas de controle orçamentário de cada barco (Quadro I) e posteriormente identificada a área de pesca pelo mapa de bordo.

### 3.2 - Restrições

As quantidades  $X_{ijk}$  estão sujeitas a certas restrições do tipo: capacidade da frota, condições meteorológicas, mercados, processamento, captura, considerações biológicas e utilização da frota, as quais são representadas por (4.2) onde  $A_{ijk}^r$  são os coeficientes tecnológicos dos  $X_{ijk}$  e  $b_r$  é a disponibilidade ou necessidade da restrição r, a seguir descreveremos

cada conjunto de restrições:

a) Capacidade da Frota:

Existem cerca de 3000 barcos lagosteiros, dos quais 1331 compõem a frota industrial, embora 7% dos mesmos tenham menos que 20 TBA. Com base no comprimento os barcos lagosteiros temos que 46% tem menos de 10 metros, 42% estão entre 10 e 15 mestros e 12% medem mais que 15 metros.

Existem cerca de 190 barcos pesqueiros sendo que 30% deles tem menos que 20 TBA. Notamos que algumas empresas transformam barcos lagosteiros em pesqueiros na época de fechamento da pesca da lagosta numa ordem de 20% dos barcos. O custo de mudança é compensativo.

A capacidade da frota é desenvolvida em toneladas<sup>1</sup> de cada espécie para cada área e cada período. A quantidade de armadilhas (covos e anzóis), a abundância de cada espécie e as condições meteorológicas afetam a capacidade da frota. Nesta parte, temos os seguintes subconjuntos de restrições:

(a.1) capacidade máxima de pesca para cada espécie, em cada período.

(a.2) capacidade máxima total de pesca para todas as espécies, em cada período.

---

1 - Tonelagem líquida dos barcos.

(a.3) capacidade total de pesca para todas espécies através de todos períodos.

b) Condições Meteorológicas:

A situação meteorológica influencia a pesca, i.é, o mau tempo reduz a capacidade de captura da frota. Ventos fortes, correntezas, chuvas<sup>38</sup> e<sup>44</sup> afetam os coeficientes  $C_{ijk}$  da função objetivo. Dependendo do tamanho do barco, certas áreas devem ser evitadas pois o mau tempo é bastante perigoso. O conjunto de restrições seria o seguinte:

(b.1) número máximo de dias de pesca em cada área em cada período para cada espécie.

Isto quer dizer que em determinadas épocas do ano a eficiência dos barcos diminui e aumenta o custo variável de captura.

Embora exista trabalhos na literatura sobre condições oceanográficas da pesca, não há uma persistência das informações para cada ano. As informações são obtidas através dos mapas de bordo para o nº de dias de pesca, embora o nº máximo deva ser estimado.

c) Fatores Biológicos

Cada espécie tem certos períodos nos quais a pesca pode desequilibrar o processo biológico natural e portan

to deve ser reduzida ou evitada. O ideal seria a obtenção de índices que ponderasse a captura em cada período da estação utilizando-se os resultados obtidos para Buesa Mās et alli<sup>39</sup> os quais determinaram percentuais mensais de lagosta vermelha com ova, sendo o mês de março o de maior concentração com 23% das lagostas amostradas portadoras de ova.

(c.1) períodos que a pesca para cada espécie deve ser evitada ou reduzida por causa do acasalamento e desova.

Este conjunto de restrições se refere somente a pesca da lagosta pois não encontramos na literatura estudos similares para o pargo.

d) Mercados:

Embora os exportadores de pescados afirmem que não existe um limite para a demanda, principalmente para a lagosta, deverá existir uma capacidade prática para absorver o volume de cada espécie em cada período. A quantidade de cada espécie que pode ser negociada está sujeita a uma situação de incerteza considerável devido a flutuações de preços. O mercado importador atua em regime de quase pura competição: os preços pagos são os mesmos para todos os exportadores em cada período, cada exportador pode vender toda sua produção em cada período até algum limite superior que é a capacidade máxima de processamento, quantidade máxima que o mercado pode absorver, e o limite sazonal.

(d.1) quantidade máxima de cada espécie que po  
de ser vendida, em cada período.

e) Processamento:

Existem cerca de 25 empresas que beneficiam o  
pescado, sendo 12 consideradas grandes (10 localizadas em For-  
taleza), as outras são de pequeno porte. No Ceará existe um su  
perdimensionamento das instalações frigoríficas, decorrente  
da sazonalidade das capturas, mesmo assim existem empresas sub  
dimensionadas nas épocas de pico. A lagosta é processada sepa  
radamente do pargo, sendo que a maioria das empresas quando es  
tã processando lagosta, não processa o pargo e vice-versa, em  
bora que o processamento seja feito no mesmo local.

Pela existência de rádios nos barcos maiores,  
há grande flexibilidade das empresas planejar o processamento  
antes da descarga do pescado, tornando esta operação (descarga  
e processamento) bastante rápida. Os conjuntos de restrições  
seriam:

(e.1) capacidade de processamento para cada pe  
ríodo e para cada espécie

(e.2) capacidade de processamento para cada pe  
ríodo para todas espécies.

f) Recrutamento:

As lagostas devem ter um certo tamanho mínimo

antes que possam ser capturadas (ver item 2.3 deste capítulo), para tanto o grupo de trabalho de lagostas<sup>[45]</sup> usou o modelo de Beverton & Holt para identificar a relação existente entre o estoque reprodutor e o recrutamento. Foi obtido que o rendimento máximo por recruta será quando a idade for de 2 anos e o coeficiente de mortalidade por pesca for igual a 0,65. A quantidade de cada espécie, incluída em cada recrutamento anual, é altamente dependente de fatores tais como: captura dos anos anteriores, sobrevivência dos indivíduos jovens, influências ambientais e abundância de predadores. A produção máxima sustentável para 1981 foi estimada da ordem de 9.013 toneladas correspondendo a um esforço ótimo de 25 000 000 de covos-dia. Para o pargo, Ivo e Evangelista<sup>[46]</sup> encontraram que a idade de captura deve ser 4,5 anos, correspondente a um comprimento total de 40 cm. No entanto, não encontramos o valor da captura máxima sustentável na literatura consultada.

(f.1) quantidade máxima de cada espécie que pode ser capturada durante toda a estação.

g) Utilização da Frota:

As políticas tradicionais das estações de pesca tem levado a variações extremas na utilização da capacidade da frota de período a período, através do ano. Por exemplo, na estação de 1979 os dias de pesca variaram entre 7700 e 4800 para o primeiro e quarto trimestre respectivamente. Estes desníveis são ocasionados pelo excesso da capacidade da frota e performances previstas de processamento inconsistentes. O número



de dias de pesca por período, para todas espécies e áreas, deverá ser limitado a uma quantidade máxima que seria um percentual<sup>1</sup> da capacidade de captura necessária para colher a proporção mensal da captura sazonal.

(g.1) nível de capacidade de pesca através dos períodos, para cada espécie

(g.2) nível de capacidade de pesca através dos meses, para todas espécies.

---

1 - A ser estimado

Tabela 4.3 - Configuração do Problema de Programação Estocástica

Elemento do Problema	Descrição	Nº de * Elementos
Variáveis de Decisão	$X_{ijk}$ - Nº de toneladas das espécies a serem pescadas em cada área em cada período.	192
Função Objetivo	Maximizar a contribuição da frota de barcos para todas espécies e áreas com horizonte de 1 ano	1
Restrições	<u>Capacidade da Frota</u> : capacidade máxima de pesca para cada espécie em cada período, capacidade total máxima de pesca para todas espécies sobre todos períodos	55
	<u>Considerações Biológicas</u> : cada espécie, em cada área geográfica tem períodos nos quais a pesca deve ser evitada.	42
	<u>Mercados</u> : Quantidade máxima de cada espécie que pode ser vendida em cada período	42
	<u>Processamento</u> : máxima capacidade de processamento para cada período e área, para cada espécie e sobre todas espécies.	54
	<u>Captura</u> : Quantidade máxima de cada espécie que pode ser pescada durante toda a estação	4
	<u>Utilização da Frota</u> : Nível de capacidade de pesca através dos períodos para cada espécie e para todas espécies	54
	<u>Condições Meteorológicas</u> : Nº máximo de dias de pesca em cada período, em cada área geográfica, para cada espécie.	192

\* Estamos considerando: Lagosta - 2 espécies, 4 áreas, 9 períodos  
 Pargo - 2 espécies, 5 áreas, 12 períodos  
 Total de 443 restrições.

#### IV.4 - Elementos Probabilísticos

O modelo que descrevemos no item anterior tem como dados de entrada as informações contidas nos mapas de bordo (computarizado), registro geral da pesca, anuários, relatórios e outras fontes que se encontram disponíveis no PDP-SUDEPE, e nos quais podemos encontrar séries de preços, estatísticas de captura, informações sobre recrutamento etc. No Labomar-UFC existe um acervo bastante grande sobre o comportamento biológico de cada espécie, cujos resultados servem para se fazer as considerações de proteção da biomassa.

Devido a variação existente na série de alguns dos dados, podemos tratar explicitamente com quatro fontes de variação:

- (a) captura por espécies
- (b) captura por unidade de esforço (CPUE)
- (c) condições meteorológicas
- (d) mercados

Estas incertezas impõem aleatoriedade em certos coeficientes  $A_{ijk}$ ,  $b_r$  e  $C_{ijk}$ . Deste modo, ajustamos as distribuições de probabilidade a cada um dos elementos aleatórios a partir das fontes históricas quando estas forem apropriadas para as hipóteses do modelo. Outros elementos terão suas distribuições ajustadas através de previsões ou outras estimativas.

Deste modo, pela identificação de cada elemento aleatório e sua distribuição de probabilidade respectiva, po

demos utilizar o algoritmo SEPE, desenvolvido no capítulo anterior, e resolver o problema de programação linear estocástica descrito pelo modelo de pesca. A seguir apresentamos na tabela 4.4 cada fonte de variação com suas causas e efeitos.

Tabela 4.4 - Elementos Probabilísticos do Modelo

Fontes de Incerteza	Causas de Incerteza	Principais Elementos do Modelo que são Afetados
1. Recrutamento ou Cap <u>t</u> ura para limite das esp <u>e</u> cies	Imprecisão da captura por esp <u>e</u> cies, fatores biol <u>o</u> gicos	$b_c$ para cada esp <u>e</u> cie (recrutamento)
2. Eficiência do Barco: captura por unidade de esforço (CPUE)	Dispersão das esp <u>e</u> cies, tempo, abundância de esp <u>e</u> cies, tipo de barco	$A_{ijk}^r$ (capacidade da frota) $C_{ijk}$ (todos)
3. Condições Metereol <u>o</u> gicas	Vento, correntezas e mar bravo reduzem a CPUE e o número de dias de pesca	$A_{ijk}^r$ (capacidade da frota) $b_c$ (condições metereol <u>o</u> gicas) $A_{ijk}^r$ (condições metereol <u>o</u> gicas) $C_{ijk}$ (todos)
4. Mercados	Fatores que afetam a quantidade de cada esp <u>e</u> cie que poderá ser negociada	$b_c$ (mercados)

#### IV.5 - Modelo Prê-Teste

A princípio tencionamos equacionar o modelo descrito na seção anterior na sua totalidade, i.é., com 192 variáveis e 443 restrições. No entanto, isto não foi possível devido à grande quantidade de dados que deveriam ser colhidos in loco como por exemplo: capacidade de processamento, receita e despesa da frota, informações sobre mercado, além de alguns parâmetros que deveriam ser determinados pelos "experts" da pesca, tais como: índices (penalidades) para restrições biológicas, determinação de captura máxima sustentável por área de pesca, fatores que relacionam a CPUE de cada área e período com a capacidade da frota em toneladas por área e período, dentre outros índices.

Como a coleta de algumas informações (embora a maioria delas já tenha sido colhida e processada pela SUDEPE) inerentes ao modelo, bem como a obtenção dos indicadores acima mencionados, demandam tempo e pessoal especializado, nos limitamos a apresentar um modelo pré-teste o qual representa o mesmo problema anteriormente descrito, contudo numa forma bastante reduzida com 36 variáveis e 43 restrições, haja visto que o programa computacional, desenvolvido neste trabalho, usa como sub-rotina um código de Algoritmo Simplex que não garante a estabilidade numérica da solução ótima a partir de 50 restrições.

Vale salientar que os parâmetros de entrada do modelo pré-teste foram obtidos a partir do conjunto de informações disponíveis na SUDEPE, LABOMAR e algumas indústrias de pesca e beneficiamento.



$P_{5q}$  = nº de tons de pargo a ser pescada na área 5, no quarto trimestre.

Os parâmetros de contribuição ( $C_{ijk}$ ) foram obtidos a partir do Quadro I, no Apêndice, de uma única empresa de pesca, pela identificação de cada barco e posterior relacionamento com a área de pesca (blocos) de acordo com os mapas de bordo arquivados na SUDEPE. Notamos que alguns barcos apresentaram um retorno negativo, significando que a pesca deveria ser evitada ou reduzida, naquela área e período. Devido à grande variabilidade na contribuição, consideramos estes parâmetros como variáveis normalmente distribuídas.

#### (b) Restrições

A matriz tecnológica do modelo piloto tem as mesmas restrições do modelo completo, com exceção das restrições de processamento, para as quais não nos foi possível a obtenção de dados para todas empresas, e assim ficamos impossibilitados de estimar os parâmetros que compõem este conjunto de restrições. Podemos adiantar, que isto não invalida o modelo pois, de acordo com a Conjuntura e Perspectiva do Setor Pesqueiro [43], existe um superdimensionamento das instalações frigoríficas das empresas de beneficiamento.

#### (b<sub>1</sub>) Capacidade da Frota

Através do número de barcos que pescaram em determinada área e período, estimamos a capacidade da frota (em tons

líquida), usando para isto o RGP<sup>1</sup>. Aqui temos 4 restrições para lagosta e 4 para pargo (1 por período), com a seguinte forma:

$$A_{L1p} L_{1p} + A_{L2p} L_{2p} + \dots + A_{L4p} L_{4p} \leq AC_{Lp}$$

$$A_{L1s} L_{1s} + A_{L2s} L_{2s} + \dots + A_{L4s} L_{4s} \leq AC_{Ls}$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$A_{P1p} P_{1p} + A_{P1q} P_{2q} + \dots + A_{P5q} P_{5p} \leq A_{Pq}$$

Como a capacidade da frota, além da tonelagem líquida, está sujeita a CPUE, incorporamos este índice de abundância acima, pois como vimos a CPUE impõe grandes variações na captura. Deste modo, temos:

$$A_{L1p} = \text{CPUE da frota lagosteira na área 1, no primeiro trimestre}$$

$$\vdots$$

$$A_{P5p} = \text{CPUE da frota pargueira na área 5, no quarto trimestre}$$

$$\vdots$$

$$AC_{Lp} = \text{CPUE frota lagosteira x capacidade frota lagosteira (1º período)}$$

$$\vdots$$

$$AC_{Pq} = \text{CPUE frota pargueira x capacidade frota pargueira (4º período)}$$



As unidades para o Índice de abundância são:

$$CPUE_{lagosta} = \text{captura/covos}$$

$$CPUE_{pargo} = \text{anzõis/dia}$$

As informações da CPUE para cada espécie foram obtidas a partir do sistema de mapas de bordo (Quadro II).

(b<sub>2</sub>) Condições Metereológicas (dias de pesca)

Mesmo que estas restrições não representem exclusivamente as condições de tempo, entendemos que o número de dias de pesca também incluiria as variações quanto à chuva, correntezas, mar bravo etc. Por conseguinte, temos o seguinte conjunto de inequações:

$$d_{L1p} L_{1p} + d_{L2p} L_{2p} \leq DL_{12p}$$

$$d_{L3p} L_{3p} + d_{L4p} L_{4p} \leq DL_{34p}$$

⋮                    ⋮                    ⋮

$$d_{p3q} P_{3q} + d_{p4q} P_{4q} + d_{p5q} P_{5q} \leq DP_{345q}$$

Podemos notar que este conjunto tem 16 restrições, i.é., foram agregadas as áreas (1,2) e (3,4)<sup>1</sup> para cada espécie e período. Os parâmetros são os seguintes:

---

1 - Pargo = (3,4,5).

$d_{L1p}$  = dias de pesca/toneladas de lagosta na área  
1 no primeiro período

⋮

$d_{P5q}$  = dias de pesca/toneladas de pargo na área 5  
no quarto período

⋮

$dL_{12q}$  = n° máximo de dias de pesca de lagosta na  
área (1 + 2) no 1º período

⋮

$DP_{345q}$  = n° máximo de dias de pesca de pargo na área  
(3 + 4 + 5) no 1º período

Os parâmetros deste conjunto de restrições foram supostos normalmente distribuídos.

### (b<sub>3</sub>) Condições Biológicas

Esta restrição diz respeito à conservação do estoque reprodutor de modo a garantir uma desova substancial ao longo do ano. GETZ<sup>[50]</sup> formulou um modelo para administração da pesca de uma população com estrutura etária (BEVERTON & HOLT) no qual ele inclui coeficientes de capturabilidade de idade específica. Este modelo introduz uma equação  $f(p)$  onde  $p$  é a biomassa do estoque reprodutor presente no início da estação de desova. Se  $S_i$  é a proporção de indivíduos sexualmente maduros no período  $i$  e  $x_i$  é o n° de indivíduos no mês  $i$ , então:

$$p = \sum_{i=1}^n S_i X_i$$

No seu trabalho GETZ supõe classe de idades, o que se aplica ao caso da lagosta, pois a SUDEPE, pelas tabelas 11, 12 de <sup>[45]</sup>, obteve a biomassa de cada espécie por faixa etária. No entanto, nesta parte incluímos apenas uma restrição:

$$b_{L_p} L_p + b_{L_s} L_s + \dots + b_{L_q} L_q \leq B_L$$

onde:

$b_{L_p}$  = percentual de lagostas ovadas no primeiro período

:

$b_{L_q}$  = percentual de lagostas ovadas no quarto período

$B_L$  = biomassa adulta da lagosta.

Os coeficientes  $b_{L_j}$  foram obtidos em BUESA MÃS et al. <sup>[39]</sup> e  $B_L$  em <sup>[45]</sup>. Para um estudo mais acurado seria interessante uma melhor interpretação de análise de população virtual <sup>[45]</sup> pela qual o grupo de trabalho de lagostas (SUDEPE) estimou a biomassa de cada espécie usando o coeficiente instantâneo de mortalidade por pesca.

#### (b<sub>4</sub>) Mercados

A quantidade máxima de cada espécie que pode ser

vendida foi estimada a partir do total exportado no período e multiplicando-se por 3\*, para a lagosta e para o pargo o total exportado, por período. Assim, obtemos as seguintes restrições:

$$L_{1p} + L_{2p} + \dots + L_{4p} \leq Q_{Lp}$$

$$L_{1s} + L_{2s} + \dots + L_{4s} \leq Q_{Ls}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$P_{1q} + P_{2q} + \dots + P_{4q} \leq Q_p$$

Embora os exportadores garantam que existe uma demanda ilimitada para produtos pesqueiros, consideramos as quantidades  $Q_{jk}$  como 100% do total exportado no período. Estes parâmetros foram supostos normalmente distribuídos.

(b<sub>5</sub>) Utilização da Frota

Estas restrições estão relacionadas com a utilização dos barcos e equipamentos, através de um nível de capacidade de captura para cada período e espécie.

$$U_{L1p} L_{1p} + U_{L2p} L_{2p} + \dots + U_{L4p} L_{4p} \leq U_{Lp}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$U_{P1q} P_{1q} + U_{P2q} P_{2q} + \dots + U_{P4q} P_{4q} \leq U_{Pq}$$

---

\* - Lagosta inteira = 3 x cauda lagosta

$U_{L1p}$  = proporção de lagostas capturadas na área 1 no 1º período em relação à tonelagem total no 1º período.

$U_{Lp}$  = Nível de utilização da frota lagosteira no 1º período (120% da capacidade de captura)

(b<sub>6</sub>) Recrutamento

O grupo de trabalho de lagostas<sup>|45|</sup> no seu relatório apresentou um modelo de produção para avaliação dos estoques lagosteiros do nordeste do Brasil, cuja equação é dada por:

$$Y = (0,98 \cdot e^{-0,04f})f$$

$$f_{\max} = 25,0 \times 10^6 \text{ covos-dia}$$

$$Y_{\max} = 9.013 \text{ tons.}$$

Os resultados obtidos pelo modelo acima apresenta uma produção máxima sustentável (para as duas espécies de lagosta) de 9.013 tons correspondendo a um esforço de 25 milhões de covos-dia. Ficou constatado<sup>|45|</sup> que se houvesse uma diminuição no esforço de 27,2% haveria um aumento na produção de cerca de 11%, com um incremento de CPUE de cerca de 40%. Mesmo assim o esforço ora empregado supera o ótimo, havendo, portanto, um provável estado de sobrepesca. Para o pargo, não encontramos uma indicação da captura máxima sustentável e supomos 8.500 tons.

$$L_{1p} + L_{1s} + \dots + L_{4q} \leq Y_{MAXL}$$

$$P_{1p} + P_{1s} + \dots + P_{5q} \leq Y_{MAXP}$$

O modelo acima descrito foi corrido pelo programa computacional SEPE (Apêndice A.3) perfazendo um total de 50 ciclos, apresentando resultados satisfatórios.

## 5.2 - Resultados

O modelo piloto foi formulado para estabelecer um plano para a estação de pesca de 1980. Depois comparamos o plano com a pesca real em 1980, a qual foi efetuada usando as políticas tradicionais. Nossa intenção seria obter validade para equacionar o modelo completo com o qual a SUDEPE pudesse eventualmente implementar um programa de entrada limitada dos barcos nas pescarias, em função da CPUE, por exemplo.

### 5.2.1 - Captura Real versus Planejada (1980)

A captura real da lagosta e pargo em 1980 é comparada com a captura planejada, resultante do modelo pré-teste, pelos quadros 7 e 8.

As diferenças básicas entre a captura real e planejada são:

1. Embora a captura total (lagosta + pargo) seja 17% menor no plano que na real, a captura do

pargo aumentaria em 41% enquanto a da lagosta diminuiria 47% em relação à captura real. Isto se deve ao baixo índice de abundância de lagostas (CPUE) em determinadas áreas e períodos, pela presença de um grande número de embarcações.

2. A captura real foi realizada com um número limitado de barcos (tanto quanto possível). O plano supõe um número máximo de barcos, estabelecendo um número máximo de dias de pesca em cada área e período.
3. Como consequência de um número limitado de barcos, a captura sazonal seria melhor distribuída ao longo do ano. O quadro 9.a apresenta a informação sob forma gráfica para o pargo.
4. Pela comparação do número de dias de pesca, podemos concluir que o capital empregado na frota seria melhor utilizado no plano do que no real, haja vista que as pescarias se concentrariam em áreas mais distantes onde barcos maiores seriam usados na captura.

#### 5.2.2 - Contribuição Real versus Planejada (1980)

As condições supostas no plano e as condições sob as quais a captura real, em 1980, foi realizada foram bastante di

ferentes tanto que as suas contribuições foram divergentes. Como exemplo:

1. Mesmo que o número real de toneladas fosse menor no plano, a contribuição total seria maior que na captura real em torno de 15%. A tabela abaixo mostra a contribuição esperada (plano) vs. real.

Tabela 4.4

CONTRIBUIÇÃO: CAPTURA (1980) REAL vs. PLANO

	Contribuição Anual (US\$)	Desvio Padrão da Cont. Anual (US\$)	Intervalo de Confiança 95% (US\$)
Real (1980)*	6.431.328	-	-
Plano (1980)	7.540.243	716.485	7.331.105 -7.749.380

#### IV.6 - Conclusões

O modelo deste estudo apresenta vários benefícios comparado com as políticas tradicionais de pesca:

- (a) o modelo explicita e direciona as principais fontes de incerteza e determina os efeitos desta incerteza nos resultados de decisões;

\* Calculada a partir das estatísticas de captura, preço e custo (SUDEPE e Empresas).



- (b) o modelo incorpora as principais preocupações empresariais e governamentais.
  - (i) proteção e sobrevivência da biomassa;
  - (ii) rentabilidade da frota pesqueira;
  - (iii) estabilidade no processamento;
  - (iv) oferta adequada de produtos pesqueiros aos consumidores.
- (c) o modelo poderá melhorar a contribuição anual da frota.

Depois de desmonstrarmos a viabilidade do modelo (através do pré-teste) poderíamos equacionar o modelo completo para então implementar os resultados obtidos e assim proporcionar aos processadores e às entidades governamentais os benefícios acima citados, os quais ajudariam na tomada de decisões.

A modelagem completa, seria precedida por discussões com os especialistas sobre os parâmetros de entrada. Uma das decisões mais críticas seria a determinação do número máximo de embarcações em cada estação de pesca, pois o tamanho limitado da frota é uma característica fundamental para a implementação dos resultados do modelo.

Por outro lado, este modelo seria atualizado a cada estação de pesca e comparado com as informações de captura real mais recente, e outras informações inerentes ao modelo de otimização restrita.

A.1 - TÓPICOS DA TEORIA DA PROBABILIDADE

A.1 - TÓPICOS DA TEORIA DA PROBABILIDADE(i) Teorema do Limite Central (TLC)

Mood, Graybill & Boes<sup>12</sup> apresentam o teorema da seguinte forma:

"seja  $f(\cdot)$  uma densidade com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2$ . Seja  $\bar{X}_n$  a média amostral de uma amostra aleatória de tamanho  $n$  de  $f(\cdot)$ . Seja a variável aleatória  $Z_n$  definida como:

$$Z_n = \frac{X_n - E(\bar{X}_n)}{\sqrt{\text{VAR}[\bar{X}_n]}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma\sqrt{n}}$$

Então, a distribuição de  $Z_n$  aproxima-se da distribuição normal padrão quando  $n$  tende a infinito".

Este teorema nos diz que a distribuição limite de  $Z_n$  (a qual é  $\bar{X}_n$  padronizada) é uma distribuição normal padrão, ou nos diz que  $\bar{X}_n$  é aproximadamente, ou assintoticamente, distribuída como uma distribuição normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2/n$ .

O fato extraordinário com o TLC é que nada é dito acerca da forma da função densidade original. Qualquer que seja a função distribuição, contanto que ela tenha somente uma variância finita, a média amostral terá aproximadamente uma distribuição normal para grandes amostras. A condição de que a variância seja finita não é uma restrição crítica pois, em estatística aplicada, em quase todas situações práticas o intervalo de varia-

ção da variável aleatória é finito, assim a variância deverá ser necessariamente finita.

A importância do TLC, reside no fato de que a média  $\bar{X}_n$  de uma amostra aleatória de qualquer distribuição com variância finita  $\sigma^2$  e média  $\mu$  é aproximadamente distribuída como uma variável aleatória normal com média  $\mu$  e variância  $\sigma^2/n$ .

Outra forma de enunciar o TLC, dada por FELLER<sup>[48]</sup>, é a seguinte:

"Seja  $\{X_k\}$  uma seqüência de variáveis aleatórias mutuamente independentes com uma mesma distribuição. Suponha que  $\mu = E(X_k)$  e  $\sigma^2 = \text{VAR}(X_k)$  existam e seja  $S_n = x_1 + x_2 + \dots + x_n$ . Então, para cada  $\beta$  fixo:

$$P \left\{ \frac{S_n - n\mu}{\sigma/\sqrt{n}} < \beta \right\} \rightarrow N(\beta)$$

onde  $N(x)$  é dada por:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-1/2y^2} dy$$

## (ii) Teoria da Medida

Um dos conceitos básicos em teoria da medida é aquele de "espaço mensurável"  $(R, \mathcal{U})$  onde  $R$  é algum conjunto não-vazio (chamado espaço) e  $\mathcal{U}$  é uma  $\sigma$ -álgebra sobre  $R$ . Dizemos que  $\mathcal{U}$  é uma  $\sigma$ -álgebra, se ela é uma classe de subconjuntos não-vazios

de  $R$ , a qual é fechada sob a formação dos complementos e uniões contáveis, i.é., se  $A \in \mathcal{U}$ , então  $\bar{A} = R - A \in \mathcal{U}$ , e se  $A_i \in \mathcal{U}$ ,  $i = 1, 2, 3, \dots$ , então  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{U}$ .

Desta definição segue-se:

Teorema 1: Seja  $(R, \mathcal{U})$  um espaço mensurável. Se  $A_i \in \mathcal{U}$ ,  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{U}$ ,  $\phi \in \mathcal{U}$  e  $R \in \mathcal{U}$ .

Conjuntos pertencentes a  $\mathcal{U}$  são chamados de mensuráveis.

Se é dado que em  $R$  alguma classe  $E$  não-vazia de subconjuntos, podemos definir, de maneira única, a "menor"  $\sigma$ -álgebra contendo  $E$ , como segue:

Teorema 2: Se  $E$  é uma classe qualquer não-vazia de subconjuntos de  $R$ , então existe uma única  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{U}$  tal que  $E \subset \mathcal{U}$  e tal que se  $\zeta$  é qualquer outra  $\sigma$ -álgebra contendo  $E$  então  $\mathcal{U} \subset \zeta$ .

Esta menor  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{U}$  contendo  $E$  é chamada de  $\sigma$ -álgebra gerada por  $E$ . Uma das mais importantes  $\sigma$ -álgebras em aplicações é a álgebra de Borel  $B$  em  $\mathbb{R}^n$ , a qual é a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $E = \{A_t | A_t = \{x | x \in \mathbb{R}^n, x \in t, t \in T\}\}$  onde  $T$  é o conjunto de todas  $n$ -uplas de racionais. É óbvio, que para  $a \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^n$  conjuntos do tipo  $\{x | x \leq b\}$ ,  $\{x | x < b\}$ ,  $\{x | x \geq a\}$ ,  $\{x | a < x \leq b\}$  etc. são conjuntos de Borel.

Teorema 3: Todo conjunto aberto em  $\mathbb{R}^n$  é um conjunto de Borel.

A teoria da probabilidade pode ser entendida como uma área especial da teoria da medida. Um espaço de probabilidade é um espaço de medida finito  $(\Omega, F, P)$  com  $P(\Omega) = 1$ . Os elementos mensuráveis (i.é., os elementos de  $F$ ) são chamados de "eventos" e  $P$  é chamada de "medida de probabilidade". Uma transformação mensurável  $x : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  (onde  $\sigma$ -álgebra sobre  $\mathbb{R}^n$  é sempre a álgebra de Borel) é chamada de vetor aleatório (n-dimensional). Um vetor unidimensional é uma variável aleatória. Toda componente de um vetor aleatório é uma variável aleatória. Um vetor aleatório  $x$  define uma medida de probabilidade  $\tilde{P}$  sobre  $\mathbb{R}^n$  por  $\tilde{P}(B) = P(x^{-1}[B])$  para todos conjuntos de Borel  $B$ .  $\tilde{P}$  é unicamente determinado sobre  $B$  pela função distribuição de:

$$x : F_x(t) = \tilde{P}(\{\xi \mid \xi \in \mathbb{R}^n, \xi \leq t\}), \text{ para todo } t \in \mathbb{R}^n.$$

A teoria da medida (probabilidade), aplicada a programação linear está bem descrita em Kall<sup>[47]</sup>. Para maiores detalhes sobre teoria das probabilidades recomendamos FELLER<sup>[48]</sup> vol. I e vol. II.

### (iii) Truncamento

Existem várias famílias de funções densidade de probabilidade. Por certo, novas famílias podem ser formadas das famílias já existentes por vários processos. Um desses proces-

so é chamado de "truncamento". Vamos ilustrar este processo observando a distribuição de Poisson truncada em zero: suponha, como muitas vezes é o caso, que a contagem zero não pode ser observada, ainda que a distribuição Poisson seja um modelo razoável. Poderíamos distribuir a massa de modo ordinal dado para o ponto de massa zero proporcionalmente entre os outros pontos de massa obtendo a família de densidades:

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-\lambda} \lambda^x / x! (1 - e^{-\lambda}), & \text{para } x = 1, 2, \dots \\ 0 & \text{, fora.} \end{cases} \quad (A1)$$

A variável aleatória tendo densidade dada por (A1) é chamada uma "variável aleatória de Poisson truncada em zero".

(iv) Propriedades dos Momentos <sup>[12]</sup>

Definição: Seja  $X$  uma variável aleatória. A média de  $X$ , denotada por  $\mu_X$  ou  $E(X)$ , é definida por:

$$(a) E(X) = \sum x_j f_X(x_j)$$

se  $X$  é discreta com pontos de massa  $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots$

$$(b) E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx$$

se  $X$  é contínua com função densidade probabilidade  $f_X(x)$ .

$E(X)$  é o centro de gravidade (ou centróide) da unidade de massa que é determinada pela função densidade de  $X$ . Assim, a média de  $X$  é uma medida de onde os valores da variável aleatória  $X$  estão centrados.

Definição 2: Seja  $X$  uma variável aleatória, e seja  $\mu_X$  a média  $E(X)$ , a variância de  $X$ , denotada por  $\sigma_X^2$  ou  $\text{VAR}(X)$ , é definida por:

$$(a) \text{VAR}(X) = \sum_j (X_j - \mu_X)^2 f_X(X_j)$$

se  $X$  é discreta com pontos de massa  $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots$

$$(b) \text{VAR}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (X - \mu_X)^2 f_X(X) dx$$

se  $X$  é contínua com função densidade probabilidade  $f_X(X)$ .

A variância de uma variável aleatória  $X$  é uma medida de espalhamento ou dispersão do centróide (densidade) de  $X$ .

Teorema 1: Abaixo estão as propriedades do valor esperado:

$$(a) E(c) = c, \text{ se } c \text{ é constante}$$

$$(b) E(c g(X)) = c E(g(X)), \text{ se } c \text{ é constante}$$



$$(c) E(c_1 g_1(X) + c_2 g_2(X)) = c_1 E(g_1(X)) + \\ + c_2 E(g_2(X))$$

(d)  $E(g_1(X)) \leq E(g_2(X))$ , se  $g_1(X) \leq g_2(X)$  para to  
do  $X$ .

Teorema 2: Se  $X$  é uma variável aleatória

$$\text{VAR}(X) = E[(X - E(X))^2] = E[X^2] - (E[X])^2$$

Contanto que exista  $E[X^2]$ .

Teorema 3: Seja  $X$  uma variável aleatória e  $g(\cdot)$   
uma função não-negativa com domínio na  
reta real, então:

$$P[g(X) \geq K] \leq \frac{E[g(X)]}{K} \text{ para todo } K > 0.$$

Corolário: (Inequação de Chebyshev) se  $X$  é uma va  
riável aleatória com variância finita,

$$P\left[|X - \mu_X| \geq r\sigma_X\right] = P\left[(X - \mu_X)^2 \geq r^2\sigma_X^2\right] \leq \frac{1}{r^2}, \text{ pa}$$

ra todo  $r > 0$ .

As provas dos resultados acima podem ser encontra  
dos em Mood, Graybill & Boes<sup>[12]</sup>.

## A.2 - APLICAÇÃO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR À TEORIA DOS JOGOS

A.2 - APLICAÇÃO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR À TEORIA DOS JOGOS

Considere um jogo de duas pessoas a soma - constante onde X, o jogador maximizante, tem m estratégias, 1, 2, ..., m; Y, o jogador minimizante, tem n estratégias, 1, 2, ..., n; e  $a_{ij}$  é o valor do jogo para X se ele joga sua i-ésima estratégia e Y joga sua j-ésima. A matriz de escores (ou pagamentos) é então:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que todo elemento da matriz é maior que zero. Se isto não for verdade no jogo originalmente formulado, uma constante suficientemente grande pode ser adicionada aos elementos da matriz e assim torná-los todos positivos. A adição de uma tal constante não mudará as estratégias ótimas.

Suponha que o jogador X faz uma estratégia mista definida por um dado peso  $x_i$  para i-ésima estratégia pura,  $\sum_i x_i = 1$ . Então o valor do jogo será:

$$v = \sum_{j=1}^n y_j (a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{mj}x_m),$$

onde  $y_j$  é o peso dado a  $j$ -ésima estratégia para  $Y$ . Seja

$$B_j(x) = a_{1j}x_1 + a_{2j}x_2 + \dots + a_{mj}x_m$$

e seja  $B_{j_0}(x) = \min_j B_j(x)$

Então  $X$  pode antecipar que, se sua estratégia é descoberta,  $Y$  escolherá  $y_{j_0} = 1$ ,  $y_j = 0 (j \neq j_0)$ , de modo que o valor da jogada para  $X$  é  $v = \min_j B_j(x) = B_{j_0}(x)$ . Assim,  $X$  deve tentar selecionar  $x_1, x_2, \dots, x_m$  de modo que  $\min_j B_j(x)$  seja tão grande quanto possível, sujeito à condição de  $\sum_i^m x_i = 1$ .

Agora será construído o problema de programação linear equivalente. Considere qualquer conjunto,  $x$ , de pesos, e seja  $B_{j_0}(x) = \min_j B_j(x)$ . Seja:

$$u_i = x_i / B_{j_0}(x) \tag{1}$$

Desde que supomos que todos elementos da matriz são positivos,  $B_{j_0}(x)$  também deve ser positivo, e assim:

$$B_j(u) = B_j(x) / \min_j B_j(x) \geq 1 \tag{2},$$

$$S = \sum_{i=1}^m u_i = \sum_{i=1}^m x_i / B_{j_0}(x) = 1 / B_{j_0}(x) \tag{3}$$

Cada conjunto de pesos,  $x$ , determina um valor-jogada,  $B_{j_0}(x)$ , um conjunto de  $u$  definido por (1), e a soma  $S$  definida pela equação (3). Em virtude da equação (3) o conjunto de  $x$  o qual determina a menor  $S$  determinará também o maior  $B_{j_0}(x)$ . 0

conjunto de  $x$  pode ser encontrado em dois passos:

(a) Encontre um conjunto de valores,  $u_1, u_2, \dots, u_m, u_{m+1}, \dots, u_{m+n}$  satisfazendo:

$$u_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, m+n \quad (4)$$

$$B_j(u) - u_{m+j} = 1, j = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_m = \text{mínimo} \quad (6)$$

Este é o problema na forma para o método simplex.

(b) Calcule  $x_i$  de:

$$x_i = x_i/S, i = 1, 2, \dots, m \quad (7)$$

Uma aplicação deste procedimento poderá ser encontrada em Dorfman <sup>49</sup>.

A.3 - PROGRAMA SEPE

```

$ RESET FREE
FILE 5=FILES,UNIT=READER
FILE 6=PRINT,UNIT=PRINTER
COMMON A(51,100),B(51),IBASE(51),D(51,100),N,M,M1,M2,M3,K1,
*IDESIG(51),SOLIL
DIMENSION SDC(51),TMUC(51),ZTEST(101),VARTES(101),
*CX(51),LC(51),SDA(51,100),TMUA(51,100),LA(51,100),
*SDB(51),TMUB(51),LB(51),X(101,100),Y(101,100),XBAR(100),
*XSD(100),YBAR(100),YSD(100),Z(101),XVAR(100),YVAR(100)
DOUBLE PRECISION D,X,Y,Z,VARTES

```

```

C
C *****
C

```

PROGRAMA PRINCIPAL

```

C *****
C

```

```

C LEITURA DAS DISTRIBUICOES DE PROBABILIDADE DOS COEFICIENTES
C

```

```

C DATA LA/5100*1/
C IN=5
C IMP=6
C NMAX=100
C MMAX=51
C READ(IN,100) IDI,N,M,NIT
C M1=M+1 ; M2=M+2 ; M3=M+3
10 READ(IN,101) (SDC(J),TMUC(J),LC(J),J=1,N)
C READ(IN,102) I,J,SDA(I,J),TMUA(I,J),LA(I,J),IFLAG
C IF(IFLAG-1)10,1000,10
1000 CONTINUE
C DO 5 J=1,16
5 TMUA(42,J)=1.0
C DO 6 J=17,36
6 TMUA(43,J)=1.0
C READ(IN,103) (SDB(I),TMUB(I),LB(I),IDESIG(I),I=2,M1)
C RO=.37954937
C GERACAO DOS PARAMETROS PELA DISTRIBUICAO DA VARIABEL ALETOR
IA
KT=0

```

```

EPS=0.01
KC=0
1 KC=KC+1
2   CONTINUE
   WRITE(IMP,106)KC,RO
   DO 3 I=1,MMAX
     B(I)=0.
     ISINAL=0
   DO 3 J=1,NMAX
     A(I,J)=0.
3   CONTINUE
   DO 1001 J=1,N
     GO TO (30,40,50,60,70),LC(J)
30   C(J)=TMUC(J)
     GO TO 1001
40   CALL ANDRMA (TMUC(J),SDC(J),C(J),RO)
     GO TO 1001
50   CALL GAMA (TMUC(J),SDC(J),C(J),RO)
     GO TO 1001
60   CALL EXPON (TMUC(J),C(J),RO)
     GO TO 1001
70   CALL POISON (TMUC(J),C(J),RO)
1001 CONTINUE
     DO 1002 I=2,M1
       DO 1002 J=1,N
         GO TO (31,41,51,61,71),LA(I,J)
31   A(I,J)=TMUA(I,J)
         GO TO 1002
41   CALL ANDRMA (TMUA(I,J),SDA(I,J),A(I,J),RO)
         GO TO 1002
51   CALL GAMA (TMUA(I,J),SDA(I,J),A(I,J),RO)
         GO TO 1002
61   CALL EXPON (TMUA(I,J),A(I,J),RO)
         GO TO 1002
71   CALL POISON (TMUA(I,J),A(I,J),RO)
1002 CONTINUE
     DO 1003 I=2,M1
       GO TO (32,42,52,62,72),LB(I)
32   B(I)=TMUB(I)

```



```

      GO TO 1003
42     CALL ANDRMA (TMUB(I),SDB(I),B(I),R0)
      GO TO 1003
52     CALL GAMA (TMUB(I),SDB(I),B(I),R0)
      GO TO 1003
62     CALL EXPON (TMUB(I),B(I),R0)
      GO TO 1003
72     CALL POISON (TMUB(I),B(I),R0)
1003  CONTINUE
C
C     EXECUTA O ALGORITMO DE PROGRAMACAO MATEMATICA
C
      WRITE(IMP,104)KC
      CALL BASE(IDT,C,FLAG)
      IF(FLAG.EQ.0.) GO TO 2
      IF(SOLIL.EQ.1.0) GO TO 2
C
C     GUARDA OS VALORES DA F.O., VAR.PRIMAIS E VAR.DUAIS
C
      Z(KC)=D(1,M2)
      DO 1004 I=2,M1
        J=IBASE(I)
        X(KC,J)=D(I,M2)
1004  CONTINUE
      DO 1005 I=2,M1
        J=I-1
        Y(KC,J)=D(1,I)
1005  CONTINUE
C
C     EXECUTA O TESTE DE PARADA DO PROCEDIMENTO SEPE
C
      CALL HEURIS (Z,KC,KT,ESTAB,VARTES)
      WRITE(IMP,105)ESTAB
      IF(KC.LE.10) GO TO 1
      IF(ESTAB.LE.EPS) GO TO 1006
      IF(KC.GE.NIT) GO TO 1006
      GO TO 1
C
C     DETERMINACAO DA MEDIA, VARIANCIA E DESVIO PADRAO DAS

```

```

C                                 VARIAVEIS PRIMAIS
C
1006 L=KC
      DO 1007 J=1,N
          XBAR(J)=AVERX(L,J,X)
          XVAR(J)=VARX(L,J,X)
          XSD(J)=SQRT(XVAR(J))
1007 CONTINUE
C
C      DETERMINACAO DA MEDIA, VARIANCIA E DESVIO PADRAO
C      DAS VARIAVEIS DUAS
C
      DO 1008 J=1,M
          YBAR(J)=AVERX(L,J,Y)
          YVAR(J)=VARX(L,J,Y)
          YSD(J)=SQRT(YVAR(J))
1008 CONTINUE
C
C      DETERMINACAO DA MEDIA, VARIANCIA E DESVIO PADRAO DA
C      FUNCAO OBJETIVO
C
ZBAR=AVERZ(L,Z)
ZVAR=VARZ(L,Z)
ZSD=SQRT(ZVAR)
CALL SAIDACIMP,N,N,XBAR,XSD,YBAR,YSD,ZBAR,ZSD,ESTAB)
100  FORMAT(I2,3I3)
101  FORMAT(2F10.3,9X,I1)
102  FORMAT(2I2,F6.3,F10.3,9X,I1,4DX,I1)
103  FORMAT(2F10.3,9X,I1,8X,I2)
104  FORMAT(/,T15,"ITERACAO KC=",I4,///)
105  FORMAT(/,T15,"ESTAB=",F10.4)
106  FORMAT("1" T15,"GERADOR(",I3,")=",F13.10)
      STOP
      END

```

C  
C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*

SUBROUTINE POISON (FLMBDA, T, R0)

\*\*\*\*\*

CALL GERAL (R0, R03)  
R1=R03  
T=(-1.0/FLMBDA)\*ALOG(R1)  
R0=R1  
RETURN  
END

C  
C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*

SUBROUTINE GAMA (TMU,SD,G,R0)

\*\*\*\*\*

```
IR=(TMU/SD)**2
TLMBDA=TMU/SD**2
T=1.0
DO 1 J=1,IR
  CALL GERAL (R0,R03)
  R1=R03
  T=T*R1
1 G=-ALOG(T)/TLMBDA
R0=R1
RETURN
END
```

C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*

SUBROUTINE EXPON (TMU,V,R0)

\*\*\*\*\*

CALL GERAL (R0,R03)  
R1=R03  
V=ABS(TMU\*ALOG(R1))  
R0=R1  
RETURN  
END

C  
C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*

SUBROUTINE ANORMA (TMU,SD,V,RO)

\*\*\*\*\*

```
CALL GERAL (RO,R03)
R1=R03
R0=R1
CALL GERAL (R0,R03)
R2=R03
R0=R2
Q=R2*6.283
S=ALOG(R1)
S=ABS(S)*2.
V1=S**0.5*COS(Q)
V=V1*SD+TMU
RETURN
END
```

C  
C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*

SUBROUTINE GERAL (R0,R3)

\*\*\*\*\*

R01=3.1416\*R0  
R02=R01\*\*5  
IR=IFIX(R02)  
R03=R02-IR  
RETURN  
END







C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*

FUNCTION AVERX(I,N,X)

\*\*\*\*\*

FUNCAO AVERX CALCULA A MEDIA DE CADA VARIABEL DE DECISA

DIMENSION X(101,100)

DDOUBLE PRECISION X

SUM=0.

DD 5 J=1,I

5       SUM=SUM+X(J,N)

AVERX=SUM/FLOAT(I)

RETURN

END

C  
C  
\*  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C  
C

\*\*\*\*\*

FUNCTION VARX(I,N,X)

\*\*\*\*\*

A FUNCAO VARX CALCULA A VARIANCIA DA VARIABEL DE DECISA

DIMENSION X(101,100)  
DOUBLE PRECISION X  
SUM=0.  
SUMSQ=0.  
CALCULO DA SOMA DOS QUADRADOS  
DO 5 J=1,I  
    SUM=SUM+X(J,N)  
    SUMSQ=SUMSQ+X(J,N)\*X(J,N)  
K=I-1  
VARX=(SUMSQ-SUM\*SUM/FL0AT(I))/FL0AT(K)  
RETURN  
END

```

C
C *****
C
C          SUBROUTINE BASE(IOT,C,FLAG)
C
C *****
C
COMMON A(51,100),B(51),IBASE(51),D(51,100),N,M,M1,M2,M3,K1,
*IDESIG(51),SOLIL
DIMENSION C(51),INID(3),ISINAL(51)
DOUBLE PRECISION D
DATA INID/"LE","EQ","GE"/
NMAX=100 ;MMAX=51
DO 2 I=1,M1
DO 2 J=1,M3
D(I,J)=0.
IF(I.EQ.J) D(I,J)=1.
2 CONTINUE
D(1,1)=-1.
9 FORMAT(T11,6(I3,2X,E15.9),/)
K=0 ; K1=0
DO 17 I=2,M1
ISINAL(I)=IDESIG(I)
KL=ISINAL(I)*2 ; KLL=I-1
IF(B(I).GE.3.) GO TO 14
DO 13 J=1,N
13 A(I,J)=-A(I,J)
ISINAL(I)=-ISINAL(I)
B(I)=-B(I)
14 IF(ISINAL(I).EQ.0) GO TO 16
IF(ISINAL(I).EQ.1) GO TO 15
K1=K1+1
A(I,N+K1)=1.
IBASE(I)=N+K1
GO TO 17
15 K1=K1+1
A(I,N+K1)=-1.
16 K=K+1
IBASE(I)=N+M+K

```

```

17      D(1,I)=1.
        CONTINUE
        DO 18 I=2,M1
18      D(I,M2)=B(I)
        IF(K.EQ.0) GO TO 26
        D(1,M2)=0.
        DO 20 I=2,M1
20      D(1,M2)=D(1,M2)+D(1,I)*B(I)
        CALL SIMPL(-1)
        DO 21 I=1,M1
        IF(IBASE(I).GT.(N+M)) GO TO 30
21      CONTINUE
        DO 22 J=1,N
22      A(1,J)=C(J)
        DO 23 I=2,M1
        L=IBASE(I)
23      C(I)=A(1,L)
        DO 24 I=2,M1
        D(1,I)=0.
        DO 24 J=2,M1
24      D(1,I)=D(1,I)+C(J)*D(J,I)
        D(1,M2)=0.
        DO 25 I=2,M1
25      D(1,M2)=D(1,M2)+D(1,I)*B(I)
        GO TO 28
26      CONTINUE
        DO 27 J=1,N
27      A(1,J)=C(J)
28      CONTINUE
        CALL SIMPL(IOT)
        IF(SOLIL.EQ.1.0) GO TO 32
        CALL IMPRES
        FLAG=1.
        RETURN
30      WRITE(6,31) D(1,M2)
31      FORMAT(//T11,"VARIABEL ARTIFICIAL NA BASE NO FINAL DA PRIME
1IRA FASE"//T21,"VALOR DA FUNCAO OBJETIVO ARTIFICIAL= ",
1D24.15)
        FLAG=0.

32      CONTINUE
        RETURN
        END

```

```

C
C *****
C
C SUBROUTINE SIMPL(IOT)
C
C *****
C
COMMON A(51,100),B(51),IBASE(51),D(51,100),N,M,M1,M2,M3,K1,
* SOLIL
DOUBLE PRECISION D,ZERO,ZJCJ,TETAT,TETA
ZERO=1.D-8
NK1=N+K1
SOLIL=0.0
1 DO 3 J=1,NK1
ZJCJ=0.
DO 2 I=1,M1
2 ZJCJ=ZJCJ+D(I,I)*A(I,J)
IF((IOT*ZJCJ.LT.0.).AND.(DABS(ZJCJ).GT.ZERO)) GO TO 4
3 CONTINUE
RETURN
4 D(1,M3)=ZJCJ
DO 5 I=2,M1
D(I,M3)=0.
DO 5 K=2,M1
5 D(I,M3)=D(I,M3)+D(I,K)*A(K,J)
TETAT=1.050
K=0
DO 6 I=2,M1
IF(D(I,M3).LE.ZERO) GO TO 6
K=K+1
TETA=D(I,M2)/D(I,M3)
IF(TETA.GE.TETAT) GO TO 6
TETAT=TETA
IPIV0=I
6 CONTINUE
IF(K.EQ.0) GO TO 10
IBASE(IPIV0)=J
DO 8 I=1,M1
IF(I.EQ.IPIV0) GO TO 8

```

```
      DO 7 J=2,M2
7     D(I,J)=D(I,J)-D(I,M3)*(D(IPIVO,J)/D(IPIVO,M3))
8     CONTINUE
      DO 9 J=2,M2
9     D(IPIVO,J)=D(IPIVO,J)/D(IPIVO,M3)
      GO TO 1
10    WRITE(6,11)
11    FORMAT(/,F11,"SOLUCAO ILIMITADA")
      SOLIL=1.0
      RETURN
      END
```

```

C
C *****
C
SUBROUTINE IMPRES
C
C *****
COMMON A(51,100),B(51),IBASE(51),D(51,100),N,M,M1,M2,M3,K1
DOUBLE PRECISION D
WRITE(6,1) D(1,M2)
1  FORMAT(T11,"SOLUCAO OTIMA"//,T11"FUNCAO OBJETIVO = "D24.15/
*///)
WRITE(6,2)
2  FORMAT(T11,"VARIAVEIS BASICAS PRIMAS"//)
DO 3 I=2,M1
J=IBASE(I)
3  WRITE(6,4) J,D(I,M2)
4  FORMAT(T11,"X(",I3," )= "D24.15//)
WRITE(6,5) N
5  FORMAT(//T11,"AS VARIAVEIS COM INDICE MAIOR QUE ",I3," SAO
*DE FOLGA"///,T11,"AS VARIAVEIS NAO LISTADAS ACIMA SAO NULAS
*","///)
WRITE(6,6)
6  FORMAT(T11,"VARIAVEIS DUAS"//)
DO 7 I=2,M1
J=I-1
7  WRITE(6,8) J,D(1,I)
8  FORMAT(T11,"LINHA(",I2," )= "D24.15//)
RETURN
END

```



```
C
C *****
C
      SUBROUTINE HEURIS(Z,KC,KT,ESTAB,VARTES)
C
C *****
C
      DIMENSION Z(KC),VARTES(101)
      DOUBLE PRECISION Z,VARTES,VARIA
      ESTAB=1.0
      KT=KT+1
      IF(KC.LT.3) GO TO 1
      VARTES(KT)=VARZ(KC,Z)
      ESTAB=DABS((VARTES(KT)-VARTES(KT-1))/VARTES(KT))
1     RETURN
      END
```

```

C
C *****
C
SUBROUTINE SAIDA(IMP,M,N,XBAR,XSD,YBAR,YSD,ZBAR,ZSD,ESTAB)
C
C *****
C
DIMENSION XBAR(100),XSD(100),YBAR(100),YSD(100)
WRITE(IMP,1)
1  FORMAT(1H1,9X,"SOLUCAO EXPERIMENTAL DE PROGRAMACAO ESTOCAST
*ICA      = SEPE"//)
WRITE(IMP,2)
2  FORMAT(9X,"VARIAVEL",T54,"DESVIO",/,T11,"PRIMAL",T32,"MEDIA
*",T54,"PADRAO",/)
DO 10 J=1,N
WRITE(IMP,3)J,XBAR(J),XSD(J)
3  FORMAT(T11,"X(",I3,")",T24,F15.3,T50,F10.3/)
10  CONTINUE
WRITE(IMP,4)
4  FORMAT(/,9X,"VARIAVEL",/,T12,"DUAL",/)
DO 11 I=1,M
WRITE(IMP,5)I,YBAR(I),YSD(I)
5  FORMAT(T11,"Y(",I3,")",T24,F15.3,T50,F10.3/)
11  CONTINUE
WRITE(IMP,7)
7  FORMAT(/,T11,"FUNCAO",/,T13,"OBJETIVO",/)
WRITE(IMP,8)ZBAR,ZSD
8  FORMAT(T13,"Z",T19,F19.3,T50,F10.3//)
WRITE(IMP,9)ESTAB
9  FORMAT(T10,"ESTAB = ",F11.6)
RETURN
END

```

#### A.4 - QUADROS E GRÁFICOS

QUADRO I - MAPA ORÇAMENTÁRIO

MESTRE:

MAPA Nº

Data da Saída : 27/04/81 Etapa: 03 Entregas Data do Beneficiamento: 29/06/81

Data da Chegada: 27/06/81 kgs. Produzidos: 2.745 kgs. Beneficiados: 2.687,1

C O N T A S	V A L O R	%	A P U R A Ç Õ E S
Material de Pesca .....	87.435,00	3,31	
Combustíveis e Lubrificantes	543.082,80	20,59	
Material de Conserv. e Limpe- sa .....	6.646,00	0,25	
Peças e Mat. de Manut. e Re- posição .....	62.723,50	2,38	
Isca .....	461.550,00	17,50	
Rancho .....	149.574,06	5,67	
Manzuãs, Linhas e Anzõis ...	312.900,00	11,86	
Outros Materiais .....	13.337,00	0,51	
Mão-de-Obra Fixa e Variável.	670.155,35	25,41	
Enc. Sociais (INPS, FGTS, FÉ- rias, 130) .....	153.709,70	5,83	
Outras Despesas .....	17.201,70	0,65	
Reparos Navais .....	-0-	-0-	
Sub-Total (Desp. Armação).	2.478.314,39	93,96	
Beneficiamento e Armazenagem	136.482,80	5,17	
Material de Embalagem .....	22.960,00	0,87	
Custo Total .....	2.637.757,19		

1) CUSTO DA MATÉRIA PRIMA:  
 (Total Desp. Arm.) = 2.478.314,39 = Cr\$ 902,85 p/kg.  
 (kg. Produzido) = 2.745

2) CUSTO DO PRODUTO FINAL:  
 (Custo Total) = 2.637.757,19 = Cr\$ 981,64 p/kg.  
 (Prod. Beneficiada) = 2.687,1

P R E V I S Õ E S D E R E C E I T A S / R E S U L T A D O S

I) \_\_\_\_\_ Lb.F.Px. x US\$ \_\_\_\_\_ x Cr\$ \_\_\_\_\_ = Cr\$ \_\_\_\_\_

II) \_\_\_\_\_ Lb.P.Ev. x US\$ \_\_\_\_\_ x Cr\$ \_\_\_\_\_ = Cr\$ \_\_\_\_\_

III) \_\_\_\_\_ kg. Isca x Cr\$ \_\_\_\_\_ = Cr\$ \_\_\_\_\_

IV) \_\_\_\_\_ kg.Px.Int. x Cr\$ \_\_\_\_\_ = Cr\$ \_\_\_\_\_

V) 5.740 Lb.Lag. x US\$ 48,861.00 x Cr\$ Abaixo = Cr\$3.272.629,08

VI) 15 % I.P.I. (US\$ x Tx.dia Embarque(85.80/90.95) = Cr\$ 652.900,30

VII)..... TOTAL (I + II + III + IV + V + VI)..... = Cr\$3.925.529,38

VIII).... CUSTO TOTAL ..... = Cr\$2.637.757,19-

IX)..... RESULTADO (VII - VIII)..... = Cr\$1.287.772,19

RESULTADO p/kg = (IX) = 1.287.772,19 = Cr\$ 479,24  
 (kg.Beneficiado) 2.687,1

Obs.: Taxas US\$ aplicadas: 64.21,65.50,68.20 e 69.30  
 Contribuição = US\$ 6,915,44 p/ton

PUP - PROGRAMA DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO PESQUEIRO DO BRASIL

FÓR/DARR - JMB023/IME023 - 1

SISTEMA MAPAS DE BORDO

EMITIDO EM 03/04/01 - PAGINA 1

## QUADRO 2

RELATORIO 2 - DESEMPENHO DA FROTA DE LINHA/PARCO

PERIODO LUTUBRU /00 A DEZEMBRO /80

ESTADO - CEARA

CLA. BARCOS	BARCOS	VIAGENS / BARCO	DIAS PAR / VIAGEM	PESCADOR / VIAGEM	PRCENT. S/ TOT	CAPTURA / VIAGEM	CAPTURA *100/ANZ	CAPLUNA/ D. PESCA	CAPTURA/ H. PESCA	CAPTURA / LINHA	TOTAL DE KG CAPTURADO
ATE 20 TON.	6	423	728	622	11234	1.06525	1.66529	25321	623	2721	272704
ACIMA 20 T.	8	123	2628	1529	88266	21.66922	6.42025	80520	3620	7424	2162692
* * * T O T A L	D O	E S T A D O * * *	1321	829	100200	6.78826	4.85121	56625	2326	6221	2442396

**QUADRO 3**

RELATORIO 5 - INDICES DE FLUTUAÇÃO E PERIODO DE ABUNDANCIA POR AREA DE PESCA DE LINHA

FLUCC	ABRIL			MAYO			JUNHO			TRIMESTRE
	DIAS PESCA	DESEMBARCADO	DIAS PESCA	DESEMBARCADO	DIAS PESCA	DESEMBARCADO	DIAS PESCA	DESEMBARCADO		
00 00	026	268.152	353	235.496	331	191.547	1.509	696.235		
04 04	52	2.926	2	49	0	0	54	3.035		
05 04	71	5.263	0	0	0	0	71	5.263		
05 05	25	1.905	13	959	8	934	47	3.798		
06 04	73	4.883	0	0	0	0	73	9.863		
07 02	5	829	0	0	0	0	5	829		
07 04	156	12.679	4	76	0	0	160	12.755		
07 17	41	15.318	69	27.469	53	24.737	163	67.524		
07 18	55	30.330	51	28.892	61	45.175	166	104.405		
07 20	0	0	0	0	17	12.547	17	12.547		
08 02	5	7.255	1	158	0	0	6	7.413		
08 03	14	1.724	5	285	0	0	20	2.009		
08 15	0	0	19	14.863	14	2.946	33	17.809		
08 16	44	35.845	37	13.744	15	6.293	97	55.882		
08 17	226	113.624	222	95.610	255	119.541	704	328.775		
08 18	134	66.313	97	37.173	134	76.587	365	180.073		
08 10	4	143	0	0	0	0	4	153		
08 20	0	0	0	0	18	8.694	14	8.694		
09 02	3	351	15	2.641	0	0	14	2.992		
09 14	3	74	20	11.522	14	4.037	37	15.633		
09 10	41	5.014	72	8.095	116	14.024	230	27.133		
09 21	34	8.698	55	13.130	143	45.324	231	67.152		
09 21	0	0	10	2.768	18	4.176	28	6.944		
40 02	70	15.043	18	1.375	40	8.346	129	24.764		
40 20	11	4.027	0	0	0	0	11	4.027		

BLOCO	OUTUBRO			NOVEMBRO			DEZEMBRO			TRIMESTRE		
	DIAS PESCA	CAPTURADO	DIAS PESCA	DIAS PESCA	CAPTURADO	DIAS PESCA	DIAS PESCA	CAPTURADO	DIAS PESCA	DIAS PESCA	CAPTURADO	
00090	0	0	0	0	0	0	8	4.030	8	8	4.030	
33033	11	600	8	190	0	0	0	0	18	18	790	
34033	0	0	9	850	0	0	0	0	9	9	650	
34053	0	0	23	28.089	0	0	0	0	23	23	28.089	
35031	0	0	5	2.009	0	0	0	0	5	5	2.009	
35032	0	0	0	0	0	12	4.249	0	12	12	4.249	
35034	9	1.009	0	0	0	0	0	0	9	9	1.009	
35041	0	0	65	14.423	125	24.175	190	38.590	190	190	38.590	
35043	17	3.150	15	4.907	0	0	32	8.057	32	32	8.057	
35044	0	0	0	0	0	25	4.243	0	25	25	4.243	
35051	16	1.572	0	0	0	0	16	1.572	16	16	1.572	
35052	0	0	6	481	0	0	6	481	6	6	481	
38014	23	16.961	0	0	0	0	23	16.961	23	23	16.961	
39021	0	0	31	28.247	13	2.398	43	30.645	43	43	30.645	
39023	6	1.666	0	0	0	0	6	1.666	6	6	1.666	
40022	0	0	12	11.392	55	6.184	67	17.576	67	67	17.576	
40023	17	1.200	8	6.253	0	0	25	7.453	25	25	7.453	
40024	0	0	37	7.290	0	0	37	7.290	37	37	7.290	
41021	0	0	11	8.195	0	0	11	8.195	11	11	8.195	
41023	7	1.168	0	0	0	0	7	1.168	7	7	1.168	
43011	0	0	5	1.719	0	0	5	1.719	5	5	1.719	
43013	0	0	0	0	17	26.719	17	26.719	17	17	26.719	

SISTEMA MAPAS DE BORDO

RELATÓRIO 5 - INDICES DE FLUTUAÇÃO E PERÍODO DE ABUNDANCIA POR ÁREA DE PESCA DE CUVU

BLOCO	CUV DESPESC	CAPTURADO	CUV DESPESC	Fevereiro		MARÇO		TRIMESTRE	
				CAPTURADO	CUV DESPESC	CAPTURADO	CUV DESPESC	CAPTURADO	CUV DESPESC
00000	C	0	98.490	25.761	130.780	37.053	229.270	62.814	
34051	C	0	0	0	4.000	2.395	4.000	2.382	
34053	C	0	2.500	789	0	0	2.500	789	
34063	C	0	500	270	250	94	750	304	
34074	C	0	0	0	350	140	350	140	
35043	C	0	7.920	2.760	12.610	3.840	20.530	6.600	
35044	C	0	0	0	2.000	1.680	2.000	1.680	
35052	C	0	11.180	2.399	45.610	18.330	56.740	20.724	
35054	C	0	19.125	2.756	23.080	11.118	42.205	13.674	
36043	C	0	17.840	4.006	14.465	3.765	32.305	7.771	
37033	C	0	6.400	2.127	8.350	2.547	14.750	4.674	
37041	C	0	85.754	19.569	53.570	12.669	139.325	32.240	
37042	C	0	8.484	1.839	37.050	8.088	45.535	9.921	
37044	C	0	4.650	1.279	2.605	930	7.255	2.204	
38031	C	0	1.350	537	7.900	1.551	9.250	2.086	
38032	C	0	20.170	4.935	54.244	14.532	74.414	19.467	
38034	C	0	32.414	7.137	55.520	12.582	87.934	19.714	
39021	C	0	18.930	7.815	16.390	5.361	35.320	13.170	
39023	C	0	0	0	92.240	31.374	92.240	31.374	
39024	C	0	3.600	1.680	0	0	3.600	1.680	
40021	C	0	0	0	11.100	2.316	11.100	2.316	
41024	C	0	0	0	2.350	661	2.350	661	
42004	C	0	0	0	9.100	2.751	9.100	2.751	
TOTAL	C	0	339.309	85.659	583.564	173.967	922.873	259.620	

\*\*\*\*\* CAPTURADO EM QUILOGRAMAS \*\*\*\*\*



PUP - PROGRAMA DE PESQUISA E DESENVOLVIMENTO PESCUEIRO DO BRASIL

PDP/MBJ/316 - IMB316

SISTEMA MAPAS DE BORDO

EMITIDO EM 03/04/01 - PAGINA 1

RELATORIO 1 - DADOS BASICOS DA PESCA DE CUVC

PERIODO OUTUBRO /00 A DEZEMBRO /00

ESTADO - CEARA

## QUADRO

MES	BARCOS	VIAGENS	DIAS DE DESPEÇA	CUVUS DESPEÇADOS	TOTAL EM NUMERO CAPTURADO	TOTAL EM KG CAPTURADO
OUTUBRO	62	96	1.087	341.811	134.121	55.458
NOVEMBRO	54	92	1.156	352.107	148.225	63.381
***** T O T A L	D U	E S T A D O *****	2.243	693.918	282.350	118.839

## Quadro 7

## Captura Real de Lagosta e Pargo no Norte e Nordeste

1980  
(Toneladas)

Espécie/Área	Períodos				Captura Anual
	Jan-Mar	Abr-Jun	Jul-Set	Out-Dez	
Lagosta:	1181,699	4189,549	1496,577	930,355	7798,180
32°W - 36°W	388,085	838,750	248,114	106,021	1580,970
37°W - 38°W	645,157	1417,578	573,528	427,264	3063,527
39°W - 40°W	122,657	601,071	292,821	318,728	1335,277
41°W - 43°W	25,800	1332,150	382,114	78,342	1818,406
Pargo:	1035,833	495,131	1241,284	1539,193	4114,441
32°W - 36°W	21,740	149,227	97,572	217,859	486,398
37°W - 38°W	187,131	182,227	273,100	403,004	1045,462
39°W - 40°W	165,390	33,000	175,527	185,145	559,062
41°W - 43°W	441,050	87,118	463,390	488,790	1480,348
44°W - 50°W	220,522	43,559	231,695	244,395	740,171
T o t a l	2217,53	4684,68	2737,86	2469,55	11912,621

## Quadro 8

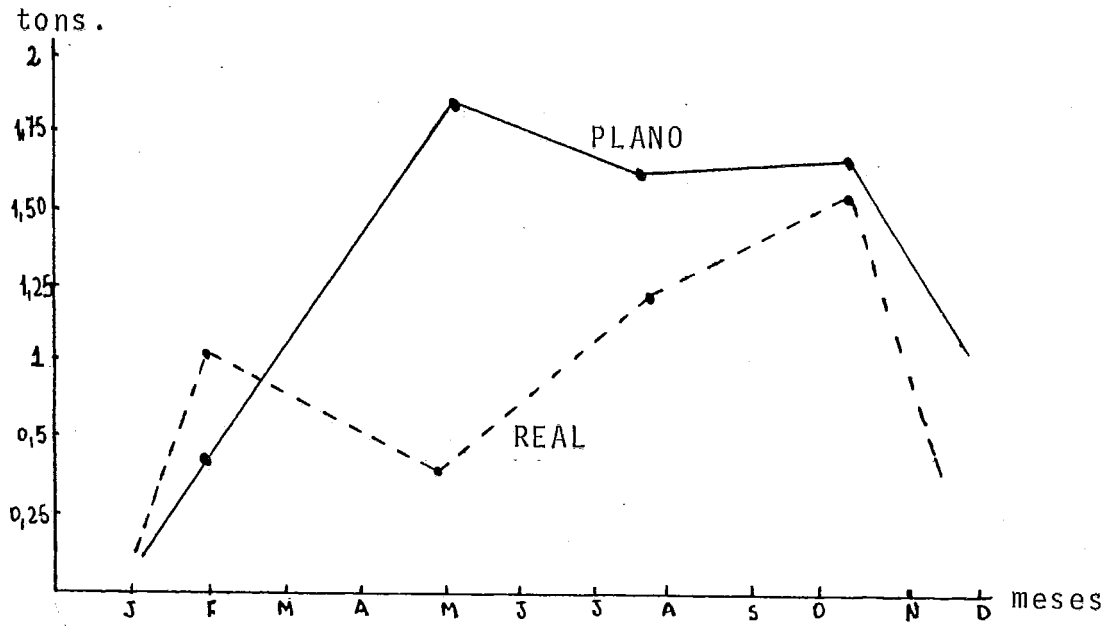
Captura Planejada\* de Lagosta e Pargo no Norte Nordeste  
1980  
(Toneladas)

Espécie/Área	Períodos				Captura Anual
	Jan-Mar	Abr-Jun	Jul-Set	Out-Dez	
Lagosta:	1583,293	1542,223	138,478	832,117	4096,111
32°W - 36°W	9,026	61,622	41,607	73,584	185,839
37°W - 38°W	0	8,996	0	0	8,996
39°W - 40°W	0	784,557	0	0	784,557
41°W - 43°W	1574,267	687,048	96,871	758,533	3116,719
Pargo:	480,787	1951,828	1670,038	1685,016	5787,669
32°W - 36°W	0	0	755,966	179,810	935,776
37°W - 38°W	0	527,045	193,903	18,395	739,343
39°W - 40°W	325,688	1093,138	0	358,002	1776,828
41°W - 43°W	40,441	209,976	25,373	57,372	333,162
44°W - 50°W	114,658	121,669	694,796	1071,437	2002,560
T o t a l	2064,080	3494,051	1808,516	2517,133	9883,780

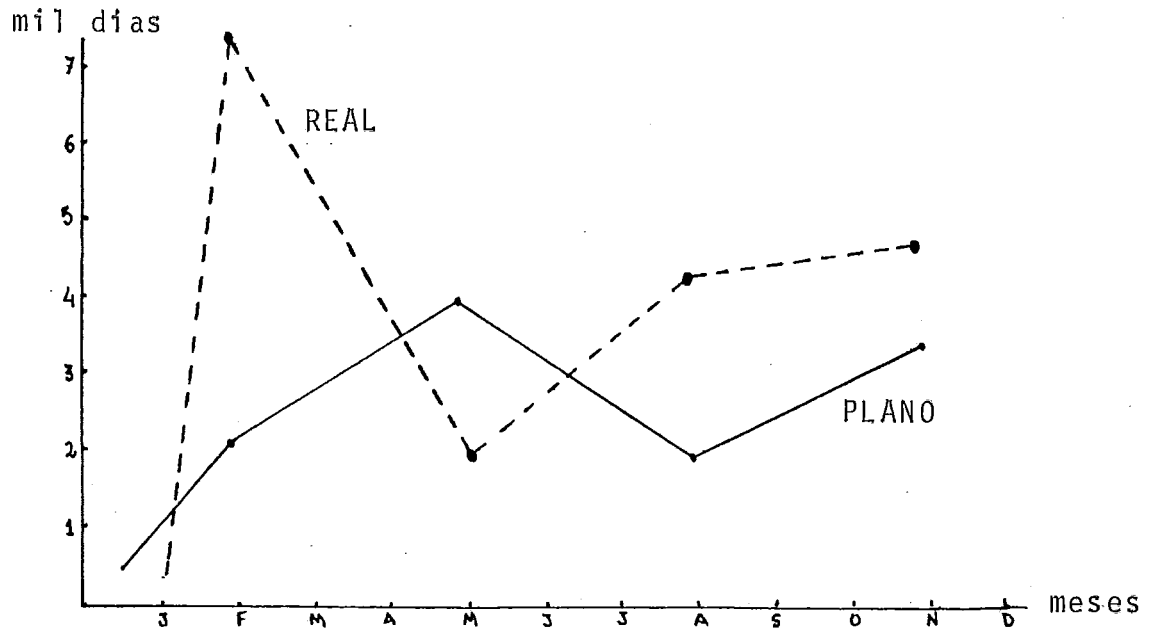
\* Obs.: Como os elementos desta solução são probabilísticos, usamos o valor esperado de suas distribuições para compor o quadro.

B I B L I O G R A F I A

QUADRO 9

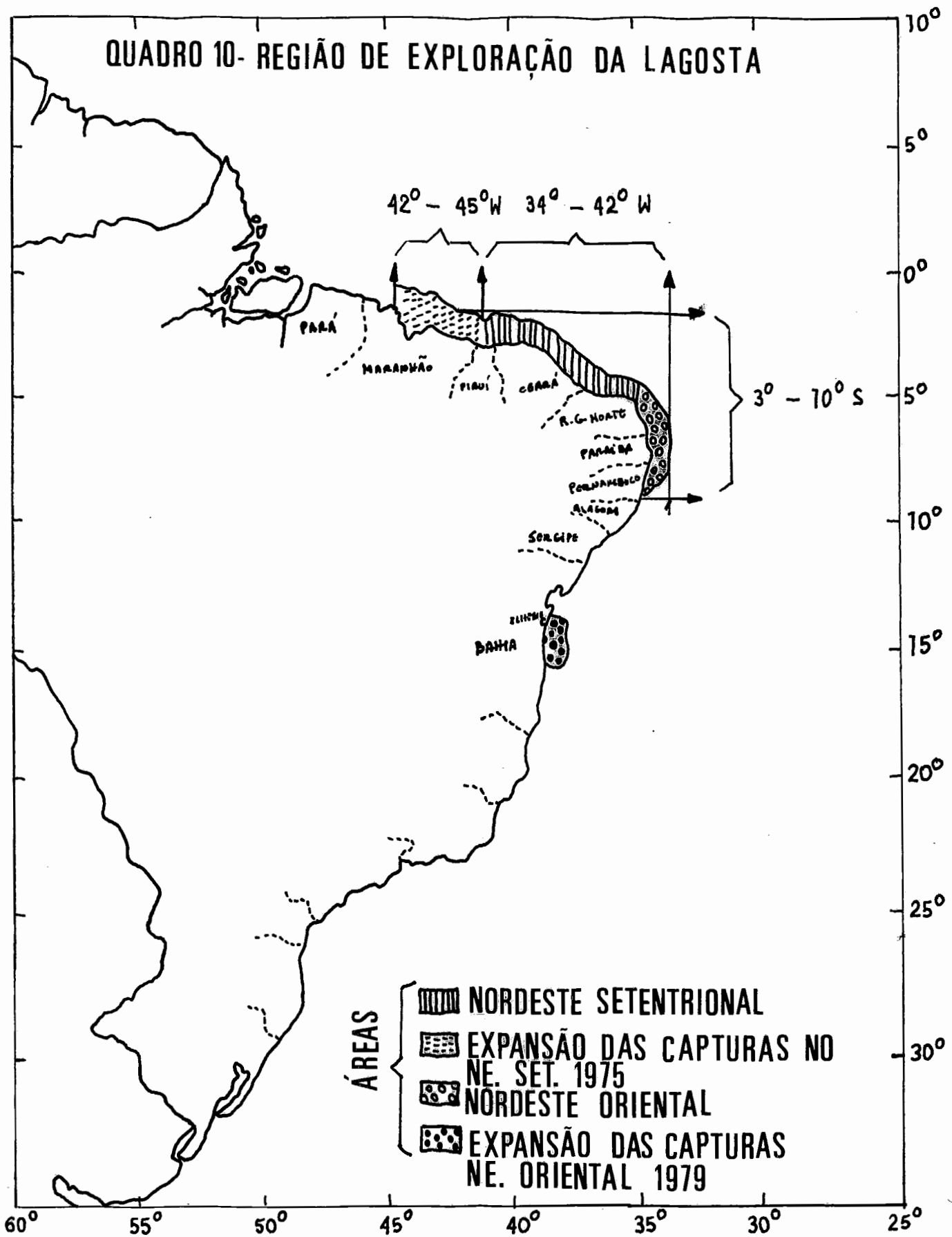


CAPTURA DO PARDO

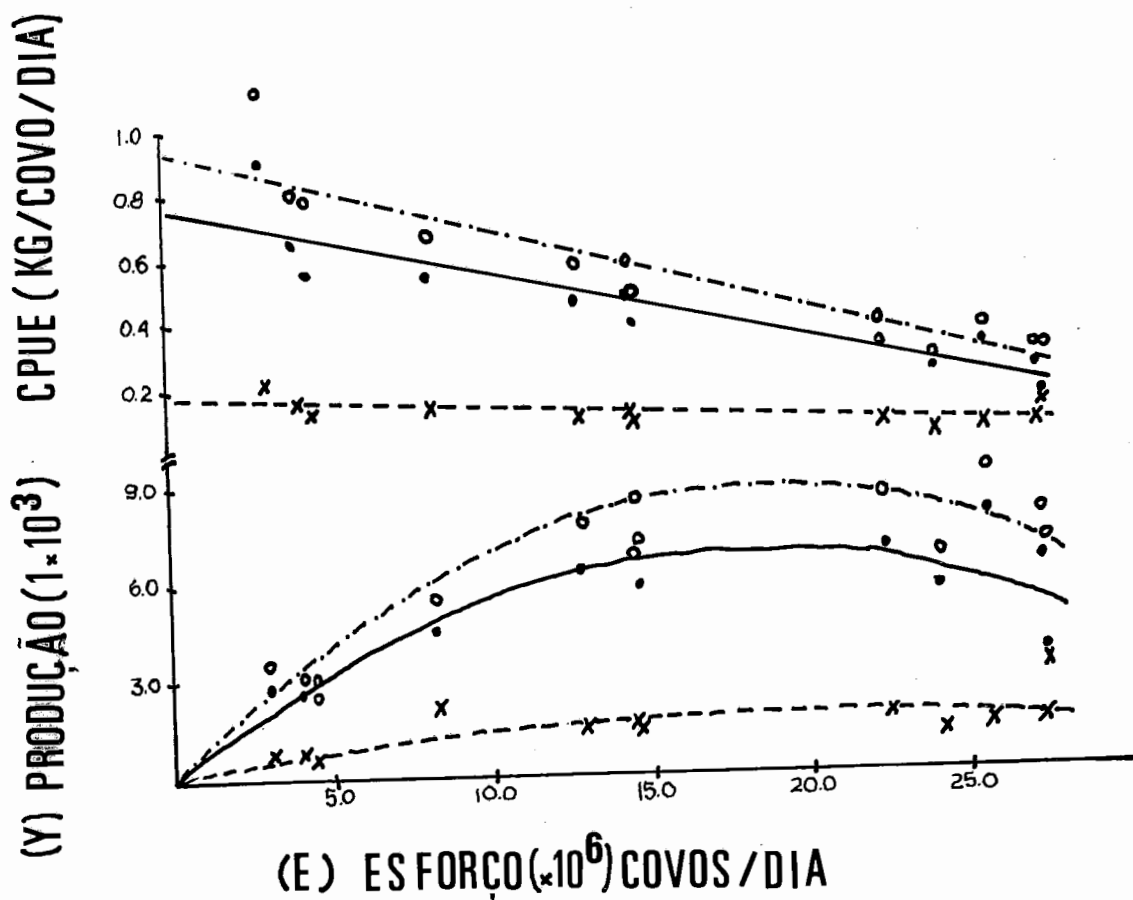


DIAS DE PESCA

# QUADRO 10- REGIÃO DE EXPLORAÇÃO DA LAGOSTA



QUADRO 11- CURVAS DE RENDIMENTO DAS LAGOSTAS  
*P. argus* E *P. laevicauda* NO NORDESTE  
 1965 A 1976



*P. argus* (o) ———

*P. laevicauda* (x) - - - - -

*P. arg.* + *P. lae.* (o) - . - . - .

BIBLIOGRAFIA

- [ 1 ] Tintner, G. - Stochastic Linear Programming with Applications to Agricultural Economics - Second Symposium on Linear Programming, Washington: National Bureau of Standards, 1955.
- [ 2 ] Sengupta, J.K.; Tintner, G. and Millhan, C. - On some Theorems of Stochastic Linear Programming with Applications, Mngmt. Sci, vol 10 n<sup>o</sup> 1, pp 143 - 159, Oct. 1963.
- [ 3 ] Sengupta, J.K.; and Portillo-Campbell, J.H. - A Fractile Approach to Linear Programming under Risk, Mngmt. Sci. vol 16 n<sup>o</sup> 5, pp 298 - 308, Jan. 1975.
- [ 4 ] Dixon, W.J and Massey Jr, F.J - Introduction to Statistical Analysis, McGrawHill Kogakusha, 3rd. Edition, 1969.
- [ 5 ] Kataoka, S. - A Stochastic Programming Model, Econometrica vol 31, pp 181 - 196, 1963.
- [ 6 ] Dantzig, G.B - Linear Programming under Uncertainty, Mngmt.Sci, vol 6, pp 73 - 79, 1955.
- [ 7 ] Charnes, A.; and Cooper, W.W. - Chance Constrained Programming, Mngmt Sci, vol. 6, pp. 73-79, 1959.
- [ 8 ] Sengupta, J.K. - Recursive Constraints and Stochastic Linear Programming, Metrika 10, 1966.
- [ 9 ] Tintner, G. - A Note on Stochastic Linear Programming, Econometrica, vol. 28, pp. 490-495, 1960.



- [10] Sengupta, J.K. - The Stability of Truncated Solutions of Stochastic Linear Programming, *Econometrica*, vol.34, n<sup>o</sup> 1, Jan. 1966.
- [11] Sengupta, J.K.; Tintner, G. and Morrison, B. - Stochastic Linear Programming with Applications to Economic Models, *Econometrica*, vol.30, pp. 262-276, 1963.
- [12] Mood, A.M.; Graybill, F.A. and Boes, D.C. - Introduction to the Theory of Statistics, Mc Graw - Hill Kogakusha, 3rd Edition, 1963.
- [13] Siegel, Sidney - Non-Parametric Statistics, Mc Graw - Hill Book Co., pp. 128-130, 1956.
- [14] Rényi, A. - On the Theory of Order Statistics, *Acta Math. Acad. Sci. Hungarica*, vol. 4, pp. 191-231, 1953.
- [15] Birnbaum, Z.W. and Lientz, B.P. - Tabulation of the Exact Distributions of Some Rényi Type Statistics, *Jasa*, vol. 64, pp. 870-877, Sep. 1969.
- [16] Pearson, K. - Tables of Incomplete Beta Function, Cambridge England, 1934.
- [17] Madansky, A. - Inequalities for Stochastic Linear Programming Problems, *Mngmt. Sci*, vol. 6, pp. 194-204, 1960.
- [18] Dantzig, G.B. - Linear Programming and Extensions, Prentice University Press (1963).
- [19] Walkup, D.W. and Wets, R.J.B. - Stochastics Programs with Recourse, *Siam J. Appl. Math*, vol. 15 n<sup>o</sup> 5, Set. 1967.

- [20] Van Slyke, R.M. and Wets, R. - L-Shaped Linear Programs with Applications to Optimal Control and Stochastic Programming, SIAM J. Appl. Math. 17, pp. 638-663, 1969.
- [21] Garstka, S.J. and Rutenberg, D.P. - Computation in Discrete Stochastic Programs with Recourse, OPS. RES. vol. 21, pp. 112-122.
- [22] Madansky, A. - Methods of Solution of Linear Programs under Uncertainty - OPS. RES. vol. 10, pp. 463-471.
- [23] Dantzig, G.B. - A Proof of the Equivalence of the Programming Problem and the Game Problem - Activity Analysis of Production and Allocation, T.C. Koopmans, ed. Wiley, New York, 1951.
- [24] Gale, D.; Kuhn, H.W. and Tucker, A.W. - Linear Programming and the Theory of Games - In Activity Analysis of Production and Allocation, T.C. Koopmans, ed. Wiley, New York, 1951.
- [25] Maculan, N. e Pereira, M.V. - Programação Linear, Ed. Atlas, 1980.
- [26] Sengupta, J. K. - Stochastic Programming Methods and Applications North-Holland, Amsterdam, 1972.
- [27] Dyson, R.G. and Swaites, G. - An Approach to Stochastic Programming for Medium Term Planning, Omega 4, pp.479-485, 1976.
- [28] Dyson, R.G. and Swaites G. - A Global Algorithm for Minimax Solutions of a Stochastic Programming Problem, COMP. OPS. RES., vol. 5, pp. 197-204.

- [29] Gal, T. and Nedoma, J. - Multiparametric Linear Programming, Mngnt.Sci. 21, pp. 567-575, 1975.
- [30] Gal, T. - Rim Multiparametric Linear Programming, Mngnt Sci 21, pp. 565-575, 1975.
- [31] Gaither, N. - An Experimental Solution for the General Stochastic Programming Problem - Simulation, pp. 191-195, Jun. 1978.
- [32] Tintner, G. and Sengupta, J.K. - Stochastic Economics: Stochastic Processes, Control and Programming, Academic Press, N.Y., 1972.
- [33] Gonzalez, R.F. and McMillan, C. - Systems Analysis: A Computer Approach to Decision Models, Richard Irwin, Inc. Illinois, 1968.
- [34] Wagner, H.M. - Principles of Operations Research, Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliff New Jersey, 1969.
- [35] Albuquerque, R.L.M. - Tópicos de Programação Linear Estocástica e a Algumas Aplicações, Tese de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco.
- [36] Sumário dos Relatórios das Reuniões Técnicas do Grupo de Trabalho sobre a Pesca da Lagosta no Nordeste Brasileiro, Doc. Técnicos PDP nº 28, SUDEPE - MA, Brasília, 1978.
- [37] Fonteles Fº, A.A. - Estudo Preliminar sobre a Pesca do Parago, Lutjanus Pupureus Poey, no Nordeste Brasileiro - Arq. Ciênc. Mar. 9(1), pp. 83-88, Jun 1969.

- [38] Fonteles Fº, A.A. e Kurisaka, S. - Some Oceanographic Conditions Related to the Caribbean Red Snapper Fishery of the Northeast Brazil - Arq. Ciênc. Mar, 10(2), pp. 177-180, Dez. 1970.
- [39] Buesa Mās, R.J.; Paiva, M.P. y Costa, R.S. - Comportamiento Biológico de la Langosta, *Panurilus Argus*, (Latreille) en el Brasil y en Cuba - Rev. Brasil. Biol. 28(1), pp. 61-70, Abril 1968.
- [40] Oliveira, G.M. e Pereira, H.L - A Pesca de Lagosta no Nordeste do Brasil, PDP - SUDEPE - MA, Brasília, Julho 1980.
- [41] Current Economic Analysis - S42, Shellfish Market Review, Washington DC, November 1980.
- [42] Costa, R.S. e Pereira, C.R.C. - Análise Preliminar dos Custos Operacionais das Pescarias de Lagosta na Costa do Nordeste do Brasil, Cienc. Agron. 10(1), pp. 125-136, jan. jun. 1980.
- [43] Conjuntura e Perspectiva do Setor Pesqueiro - Assessoria Econômica - SUDEPE, out. 1981.
- [44] Paiva, M.P. e Moura, S.J.C. - Considerações sobre a Exportação Nacional de Caudas Congeladas de Lagostas, Bol. Est. Biol. Mar. UFC nº 8, 1968.
- [45] Relatório do Grupo de Trabalho de Lagostas - PDP SUDEPE (No Prelo).
- [46] Ivo, C.T.C. e Evangelista, J.E.V. - Tamanho e Idade Ótimos de Captura do Pargo no Norte e Nordeste do Brasil, Arq. Cien. Mar, 17(1), pp. 37-40, julho 1977.

- [47] Kall, P. - Stochastic Linear Programming, Springer Verlag, Berlin 1976.
- [48] Feller, W. - Introduction to the Probability Theory and its Applications, John Wiley & Sons.
- [49] Dorfman, R. - Application of the Simplex Method to a Game Theory Problem - in Activity Analysis of Production and Allocation, T.C. Koopmans, ed. Wiley, New York, 1951.
- [50] Getz, W.M. - Harvesting Models and Stock Recruitment Curves in Fisheries Management - Lectures Notes in Biomathematics n<sup>o</sup> 33, pp. 284-304, Springer - Verlag (1980).
- [51] Santos, E.P. - Dinâmica das Populações Aplicada à Pesca e à Piscicultura, HUCITEC - EDUSP (1978).