

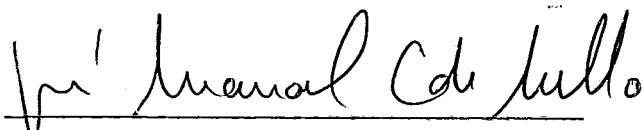
PROGRAMAÇÃO LINEAR POR OBJETIVOS:

MODELAGEM E APLICAÇÕES


Esther Berger Vidal

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.).

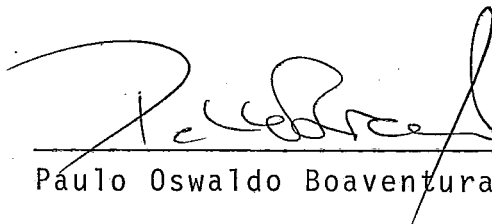
Aprovada por:



José Manoel Carvalho de Mello  
Presidente



Nelson Maculan Filho



Paulo Oswaldo Boaventura Netto



Saul Fuks

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

FEVEREIRO DE 1981

BERGER, ESTHER VIDAL

Programação Linear por Objetivos: Modelagem e Aplicações | Rio de Janeiro | 1981.

X , 136 p. 29,7 cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 1981).

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Fac. Engenharia.

1. Estudo da programação linear por objetivos, para modelagem e solução de problemas de decisão com múltiplos objetivos conflitantes. I. COPPE/UFRJ II. Programação Linear por Objetivos: Modelagem e Aplicações.

Aos meus Pais

AGRADECIMENTOS

A todas as pessoas que colaboraram no desenvolvimento deste trabalho, em especial ao Professor José Manoel Carvalho de Mello, pela orientação por ele dada.

Aos colegas e amigos da Comissão Executiva do Plano da Lavoura Cacaueira, (CEPLAC), Bahia e da COPPE-UFRJ pelo apoio e amizade.

RESUMO

Este trabalho objetiva mostrar a utilidade da Programação Linear por Objetivos (P.L.P.O.), na resolução de Problemas de Decisão cujas variáveis estão relacionadas linearmente e cuja característica básica é a presença de vários objetos conflitantes.

Mostra ainda como a técnica consegue conjugar em um Modelo vários objetivos competitivos e busca uma solução tentando satisfazer os objetivos seguindo uma escala de prioridades previamente estabelecida, segundo a preferência ou necessidade da organização.

Apresenta métodos de solução usados na resolução de problemas de P.L.P.O. e um programa computacional baseado em um desses métodos.

Apresenta-se casos de Modelagem mediante P.L.P.O. e aplicações feitas mediante esta técnica.

ABSTRACT

This work aims to show Goal Programming (G.P.) usefulness when dealing with complex Decision problems, where the variables are linearly related and there are two or more conflicting goals.

It shows also how this technique deals with competitive goals in one model and searches a solution under a given priority structure.

Shows solution methods used for solve G.P. problems and a computational program for one of these methods.

Model building and applications using G.P. are present here.

RESUMEN

Este trabajo tiene por objetivo, mostrar la utilidad de la Programación Lineal por Objetivos (P.L.P.O.), para resolver Problemas de Decisión cuyas variables están relacionadas linealmente y cuya característica básica es la presencia de varios objetivos conflictivos.

Muestra cómo esta técnica consigue conjugar en un Modelo varios objetivos competitivos e busca una solución tratando de satisfacer a los objetivos siguiendo una escala de prioridades previamente establecida de acuerdo con la preferencia o las necesidades de la organización.

Presenta métodos de solución usados para resolver problemas de P.L.P.O. y un programa computacional basado en uno de esos métodos.

Presentanse casos de Modelaje mediante P.L.P.O. y muestranse aplicaciones realizadas mediante esta técnica.

ÍNDICE

	<u>Pág.</u>
<u>CAPÍTULO I - INTRODUÇÃO.....</u>	1
<u>CAPÍTULO II - PROGRAMAÇÃO LINEAR POR OBJETIVOS.....</u>	3
2.1 - Introdução.....	3
2.2 - Análise Matemática da P.L.P.O.....	4
2.2.1 - Um Objetivo com Múltiplos Sub-Objetivos.....	5
2.2.2 - Múltiplos Objetivos.....	8
2.2.3 - Múltiplos Objetivos com Estrutura de Prioridades.....	12
2.3 - Formulação Geral da P.L.P.O.....	18
2.4 - Variações da Função Objetivo.....	19
<u>CAPÍTULO III - MÉTODOS PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO LINEAR POR OBJETIVOS - O MÉ- TODO GRÁFICO.....</u>	24
3.1 - Introdução.....	24
3.1.1 - Capacidade de Produção.....	25
3.1.2 - Tempo Normal de Operação.....	26
3.1.2.1 - No Processo 1.....	26
3.1.2.2 - No Processo 2.....	26
3.1.3 - Operação em Tempo Extra.....	27
3.1.3.1 - Para o Processo 1.....	27



3.1.3.2 - Para o Processo 2.....

CAPÍTULO IV - MÉTODO SIMPLEX DE PROGRAMAÇÃO LINEAR  
POR OBJETIVOS.....

4.1 - Tabela Simplex.....	43
4.2 - Algoritmo Simplex P.L.P.O.....	46
4.2.1 - Exemplo de Aplicação do Método Simplex.....	51
4.2.2 - Programa Computacional para Resolução de Problemas de Programação Linear por Objetivos.....	60
4.3 - Algoritmo de Programação Linear por Objetivos Usando o Método Simplex com Procedimentos de Particionamento e Eliminação.....	68
4.3.1 - Procedimento de Particionamento.....	68
4.3.2 - Procedimento de Eliminação.....	71
4.3.3 - Algoritmo de Particionamento e Eliminação.....	72

CAPÍTULO V - APLICAÇÕES DA PROGRAMAÇÃO LINEAR POR OBJETIVOS.....

5.1 - Um Modelo de Programação por Objetivos para Alocação de Recursos Acadêmicos.....	76
5.2 - Modelo de P.L.P.O. para uma Agência de Seguros...	92

CAPÍTULO VI - CONCLUSÕES.....

111

APĒNDICE.....

BIBLIOGRAFIA.....

## CAPÍTULO I

### INTRODUÇÃO

Este trabalho objetiva o estudo da Programação Linear por Objetivos, (P.L.P.O.), na resolução de problemas de decisão com objetivos múltiplos.

Faz-se o estudo do modelo P.L.P.O. e das suas características, mostrando-se com a apresentação de diversos casos, esta técnica de modelagem.

Apresenta-se dois métodos de solução para problemas P.L.P.O., o Método Gráfico e o Método Simplex.

O Capítulo II apresenta os conceitos básicos da P.L.P.O., sua Análise Matemática e a Formulação e Modelagem de problemas por esta técnica, mostrando diversos exemplos de problemas modelados mediante P.L.P.O.

O Capítulo III, apresenta o Método Gráfico para resolução de problemas P.L.P.O.

O Capítulo IV apresenta o Método Simplex adaptado para resolução de problemas P.L.P.O.

Apresenta-se também as características do programa computacional no Apêndice, usado neste trabalho para resolu

ção de problema P.L.P.O.

Ainda neste capítulo apresenta-se um algoritmo P.L.P.O. de Particionamento e Eliminação baseado no Método Simplex.

O Capítulo V apresenta duas aplicações da P.L.P.O. e os resultados da sua solução obtidos aplicando o Programa Computacional em Apêndice.

O Capítulo VI apresenta as conclusões a que este estudo permitiu chegar a respeito da P.L.P.O.

## CAPÍTULO II

### PROGRAMAÇÃO LINEAR POR OBJETIVOS

#### 2.1 - INTRODUÇÃO

A Programação Linear por Objetivos, (P.L.P.O.) é uma técnica de Programação Matemática aplicada na resolução de problemas lineares com objetivos múltiplos.

A idéia básica da P.L.P.O. teve origem no trabalho desenvolvido por Charnes e Cooper (2), a partir da análise de problemas de Programação Linear insolúveis. Sua conceituação, enquanto uma distinta técnica de Programação Matemática foi posteriormente formalizada por Y. Ijiri (10).

Sua crescente utilização advém do fato de que devido à dinâmica dos negócios hoje em dia, as organizações estão a lidar com diversos objetivos, geralmente conflitantes.

O uso da P.L.P.O. permite a solução simultânea de um sistema de objetivos complexos ao invés de um único objetivo. Em outras palavras, a P.L.P.O. é uma técnica capaz de lidar com problemas de decisão que tratam com um simples objetivo com múltiplos sub-objetivos. Em adição, a função objetivo de um modelo de P.L.P.O. pode ser composta de unidades de medidas não homogêneas, tais como cruzeiros e quilos, ao invés de um só tipo de unidade.

São justamente estas características acima que a diferenciam da Programação Linear e lhe dão um carácter de uma distinta técnica.

A potencialidade desta técnica, engloba ainda o estabelecimento de uma hierarquia de prioridades como relação aos objetivos a serem alcançados. A função objetivo consiste na minimização dos desvios em relação a estes objetivos, baseada na relativa importância ou prioridade consignadas aos mesmos.

## 2.2 - ANÁLISE MATEMÁTICA DA P.L.P.O.

Como componentes básicas de um modelo de P.L.P.O., nós temos a Função Objetivo, as Variáveis Tecnológicas e as Restrições.

As variáveis tecnológicas são todas as variáveis reais no modelo, cujos valores são arbitrariamente atribuídos e variam no decorrer da busca do conjunto ótimo de valores.

As restrições representam um conjunto de relações entre variáveis, as quais restringem os valores das variáveis tecnológicas.

A função objetivo é uma expressão matemática, envolvendo algumas variáveis do modelo, cujos valores podem ser

computados quando os valores de todas as outras variáveis são determinados. Basicamente é formada por variáveis desviacionais.

Vamos agora considerar a propriedade matemática da P.L.P.O. através de alguns exemplos. Vamos inicialmente analisar o caso da P.L.P.O. envolvendo um único objetivo com múltiplos sub-objetivos.

### 2.2.1 - Um Objetivo com Múltiplos Sub-Objetivos

Vamos considerar a situação aonde um objetivo é alcançado pelo alcance coletivo de um conjunto de sub-objetivos  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \quad (2.1)$$

aonde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  são números reais.

Sendo  $\underline{x}$  representando um vetor coluna de componentes  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e  $\underline{a}$  representando um vetor linha de componentes  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , nós podemos expressar (2.1) por:

$$\underline{a} \underline{x} = b \quad (2.2)$$

Usando a formulação de P.L.P.O., (2.2) pode ser expressa como:

$$\text{Minimizar } Z = \delta^- + \delta^+$$

Sujeito a:

$$a x + \delta^- - \delta^+ = b \quad (2.3)$$

$$x, \delta^-, \delta^+ \geq 0$$

aonde  $\delta^-$  e  $\delta^+$  representam as variáveis desvacionais do objetivo. Note-se que em (2.3) é assumido que  $\underline{x}$  é não negativo. Se existir uma solução para (2.3), a função objetivo sempre dirigirá os valores de  $\delta^-$  e  $\delta^+$  para zero. Note-se que  $\delta^-$  e  $\delta^+$  são complementares entre si, no sentido que se  $\delta^+$  tomar um valor não nulo,  $\delta^-$  será nulo e vice-versa, ou seja,  $\delta^- \cdot \delta^+ = 0$ .

Em (2.3), a única restrição imposta a  $\underline{x}$  foi a de não-negatividade. No caso mais geral, restrições adicionais são impostas, as quais podem ser expressas por:

$$B x \leq h \quad (2.4)$$

aonde  $B$  é uma matriz  $m \times n$  e  $h$  é um vetor coluna de  $m$  componentes.

O modelo (2.3) pode então, na sua forma mais geral, ser expresso como:

$$\text{Minimizar } Z = \delta^- + \delta^+$$

Sujeito a



$$a x + \delta^- + \delta^+ = b \quad (2.5)$$

$$B x \leq h$$

$$x, \delta^-, \delta^+ \geq 0$$

### Exemplo 2.1

Uma fábrica produz automóveis de 4 tipos: T1, T2, T3, T4.

Na Tabela (2.1), se dão os custos de produção e os preços de venda unitários para cada tipo de veículo, dados em milhares de cruzeiros.

	CUSTOS DE PRODUÇÃO	PREÇO DE VENDA	LUCRO
T1	70	280	210
T2	80	340	260
T3	76	300	224
T4	55	230	175

Tabela 2.1 - Custos de produção e preços

A empresa quer obter um lucro de Cr\$.  
50.000.000,00, ao final do período de produção.

#### 1. Objetivo:

Obter ao final do período o lucro de Cr\$.  
50.000.000,00.

## 2. Modelo:

$$\text{Minimizar } Z = \delta^- + \delta^+ \quad (2.6)$$

Sujeito a:

$$210T1 + 260T2 + 224T3 + 175T4 + \delta^- - \delta^+ = 50.000$$

$$T1, T2, T3, T4, \delta^-, \delta^+ \geq 0$$

onde:

$\delta^-$  = atingimento de um lucro aquẽm do objetivo de Cr\$. . . . .  
50.000.000,00.

$\delta^+$  = atingimento de um lucro alẽm do objetivo de Cr\$. . . . .  
50.000.000,00.

### 2.2.2 - Mũltiplos Objetivos

Vamos considerar o caso em que temos  $m$  objetivos cujos nĩveis sãõ expressos por um vetor coluna  $b$  de  $m$  componentes, e que estes mũltiplos objetivos podem ser alcançados atravẽs de uma combinaçãõ linear de  $n$  sub-objetivos representados pelo vetor coluna  $x$  de  $n$  componentes.

Sendo  $A$  uma matrix  $m \times n$  expressando a relaçãõ entre objetivos e sub-objetivos, o modelo entãõ assume o seguinte formato:

$$\text{Minimizar } Z = \sum_{i=1}^m (\delta_i^- + \delta_i^+)$$

Sujeito a:

$$Ax + I\delta^- - I\delta^+ = b \quad (2.7)$$

$$x, \delta^-, \delta^+ \geq 0$$

aonde  $\delta^+$  e  $\delta^-$  são vetores colunas de m-componentes representando os desvios dos objetivos e  $I$  é a matriz identidade.

### Exemplo 2.2

Uma empresa produz dois tipos de bens, bem A e bem B. O lucro da venda semanal do produto A é de Cr\$ 50/unidade e do produto B é de Cr\$ 70/unidade.

A empresa quer obter um lucro total de Cr\$..... 600.000,00, sabendo que existe uma produção limitada para cada tipo de produto.

A produção para o produto tipo A deverá ser no máximo de 5000 unidades e a do produto tipo B deverá ser no máximo de 3000 unidades, ao final da semana.

#### 1. Objetivos:

1.1 - Conseguir o lucro total de Cr\$ 600.000,00

1.2 - Realizar a produção semanal de 5000 unidades do produto tipo A e de 3000 unidades do produto tipo B.

2. Modelo:

$$\text{Minimizar } Z = \delta_1^- + \delta_2^- + \delta_3^- + \delta_2^+ \quad (2.8)$$

Sujeito a:

$$50x_1 + 70x_2 + \delta_1^- - \delta_1^+ = 600.000$$

$$x_1 + \delta_2^- = 5.000$$

$$x_2 + \delta_3^- = 3.000$$

$$x_1, x_2, \delta_1^-, \delta_2^-, \delta_3^-, \delta_1^+ \geq 0$$

onde:

$x_1$  = número de unidades do tipo i a serem produzidas,  $i = A, B$ .

$\delta_1^-$  = sub-atingimento do objetivo lucro de Cr\$ 600.000,00.

$\delta_2^-$  = sub-atingimento do objetivo de produção de 5000 unidades do tipo A.

$\delta_3^-$  = sub-atingimento do objetivo de produção de 3000 unidades do tipo B.

$\delta_1^+$  = super-atingimento do objetivo lucro.

Os desvios  $\delta_2^+$  e  $\delta_3^+$ , não aparecem no modelo porque não foram admitidas as hipóteses de super-produção.

### Exemplo 2.3

Considerar-se-ã no exemplo 2.4 a seguinte alteração: a produção requerida do produto tipo A deverá ser no máximo de 5000 unidades e a do produto tipo B, deverá ser pelo menos de 3000 unidades.

### Modelo:

$$\text{Minimizar: } Z = \delta_1^- + \delta_2^- + \delta_3^+ + \delta_1^+ \quad (2.9)$$

Sujeito a:

$$50x_1 + 70x_2 + \delta_1^- - \delta_1^+ = 600.000$$

$$x_1 + \delta_2^- = 5.000$$

$$x_2 - \delta_3^- = 3.000$$

$$x_1, x_2, \delta_1^-, \delta_2^-, \delta_1^+, \delta_3^+ \geq 0$$

Onde:

$x_1$  = número de unidades do produto tipo A, a serem produzidas.

$x_2$  = número de unidades do produto tipo B, a serem produzidas.

$\delta_1^-$  = sub-alcance do objetivo de obtenção do lucro Cr\$. . . . .  
600.000,00.

$\delta_1^+$  = super-alcance do objetivo de obtenção do lucro de Cr\$. . . . .  
600.000,00.

$\delta_2^-$  = sub-alcance do objetivo de produção de 5000 unidades do  
produto tipo A.

$\delta_3^+$  = super-alcance do objetivo de produção de 3000 unidades do  
produto do tipo B.

A variável  $\delta_2^+$  não foi considerada, porque não foi admitida a possibilidade de super-produção do produto tipo A, em tanto que a variável  $\delta_3^-$  não foi considerada porque não se considerou a possibilidade de sub-produção do produto tipo B.

### 2.2.3 - Múltiplos Objetivos com Estrutura de Prioridades

Nos exemplos anteriores nós vimos situações aonde os objetivos eram alcançados simultaneamente levando em conta as restrições dadas. Frequentemente, no entanto, a maioria dos objetivos são competitivos em termos de recursos escassos

disponíveis. Nestas situações, torna-se importante conferir uma escala de importância aos objetivos, de modo que o objetivo mais importante seja alcançado na medida desejada antes que o próximo objetivo seja considerado.

Para tal, vamos considerar que existam  $k$  níveis de prioridades e que as variáveis desviacionais sejam enquadradas nestes níveis. Ou seja associaremos a cada variável desviacional um fator de prioridade  $P_j$  caso a mesma se enquadre na prioridade  $j$ , aonde  $j = 1, 2, \dots, k$ , e aonde  $P_j \gg P_{j+1}$ .

No caso de existir mais de uma variável desviacional enquadrada no mesmo nível de prioridade, uma outra distinção entre elas, em termos de importância relativa, é possível de ser feita via o uso de pesos diferenciais.

O modelo acima descrito, que é o caso geral da P.L.P.O., terá sua formulação matemática apresentada na próxima seção. Antes porém, vamos ilustrar as idéias acima expostas através do seguinte exemplo.

#### Exemplo 2.4

Considerar-se-á, no exemplo 2.2 que a produção do tipo A, requer 2 horas de operação por unidade e a produção do tipo B, requer uma hora de operação por unidade.

A capacidade normal de produção é de 30 horas e a capacidade prevista de venda dos produtos é de 5000 unidades do tipo A e de 3000 unidades do tipo B.

A empresa estabelece os seguintes objetivos, que estão enumerados pela ordem de prioridade:

1. Evitar a sub-utilização da capacidade de produção.
2. Vender tantas unidades tipo A e tipo B quanto seja possível.

Dado que o lucro produzido pela venda de uma unidade tipo B é 1.4 vezes maior do que o lucro produzido pela venda de uma unidade tipo A, então quer-se-ã 1.4 vezes mais, conseguir o objetivo de vendas de B do que o de A.

3. Minimizar o tempo de operação da empresa em horário extra.

Toma-se a decisão de chegar o mais próximo possível dos objetivos.

Dados os objetivos estabelecidos definem-se os fatores de prioridade.

P1: Prioridade mais alta para evitar a sub-utilização da capacidade de produção.



P2: Prioridade atribuída ao objetivo de se evitar a sub-utilização das capacidades de venda.

P3: Prioridade atribuída ao objetivo de minimização do tempo em horário extra.

### Restrições:

#### 1. Capacidade Operacional

$$2x_1 + x_2 + \delta_1^- - \delta_1^+ = 30$$

onde:

$x_1$  = número de unidades do produto tipo A, a serem produzidas.

$x_2$  = número de unidades tipo B, a serem produzidas.

$\delta_1^-$  = sub-utilização da capacidade de produção.

$\delta_1^+$  = super-utilização da capacidade de produção. Considerou-se este desvio positivo porque se está admitindo a possibilidade de fazer sobre-tempo.

## 2. Vendas

### 2.1 - Para o produto tipo A:

$$x_1 + \delta_2^- = 5000$$

### 2.2 - Para o produto tipo B:

$$x_2 + \delta_3^- = 3000$$

onde:

$\delta_2^-$  = sub-alcance do objetivo de venda do produto tipo A.

$\delta_3^-$  = sub-alcance do objetivo de venda do produto tipo B.

As variáveis  $\delta_2^+$  e  $\delta_3^+$ , não estão presentes porque se objetiva maximizar as vendas.

### Função Objetivo

$$Z = P_1 \delta_1^- + 1.4P_2 \delta_2^- + P_2 \delta_3^- + P_3 \delta_1^+$$

Para facilitar a operação na busca da solução, pode-se expressar a F.C. como:

$$Z = P_1 \delta_1^- + 7P_2 \delta_2^- + 5P_2 \delta_3^- + P_3 \delta_1^+$$

onde:

1.  $P_1 \delta_1^-$ , expressa que se está dando a primeira prioridade à minimização da sub-utilização da capacidade de produção.
2.  $7P_2 \delta_2^-$ , expressa que se está dando a segunda prioridade à minimização do sub-alcance do objetivo de vendas do produto tipo A.

O fator 7, é o peso diferencial atribuído à variável desviacional  $\delta_2^-$ , porque existe uma outra variável desviacional, a  $\delta_3^-$ , com a mesma prioridade. Então, o fator 7, está ponderando esta variável desviacional respeito à outra com igual prioridade.

3.  $5P_2 \delta_3^-$ , expressa que a minimização do sub-alcance do objetivo de vendas do produto tipo B, tem também a segunda prioridade. O fator 5 é o peso diferencial atribuído a  $\delta_3^-$ .
4.  $P_3 \delta_1^+$ , expressa que é dada a última prioridade à minimização da super-utilização da capacidade de produção. Isto porque foi admitida a possibilidade de sobretempo, caso seja necessário para cumprir com o objetivo de vendas.

Modelo:

$$\text{Minimizar } Z = P_1 \delta_1^- + P_2 \delta_2^- + 5P_2 \delta_3^- + P_3 \delta_1^+ \quad (2.10)$$

Sujeito a:

$$x_1 + x_2 + \delta_1^- - \delta_1^+ = 600.000$$

$$x_1 + \delta_2^- = 5.000$$

$$x_2 + \delta_3^- = 3.000$$

$$x_1, x_2, \delta_1^-, \delta_2^-, \delta_3^- \geq 0$$

### 2.3 - FORMULAÇÃO GERAL DA P.L.P.O.

Face ao exposto na última seção, o modelo geral da P.L.P.O. pode ser assim expresso:

Minimizar  $C \underline{\delta}$

Sujeito a:

$$A \underline{x} + R \underline{\delta} = b \quad (2.11)$$

$$\underline{x}, \underline{\delta} \geq 0$$

aonde:

1.  $C = (\lambda_1 P_{j1}, \lambda_2 P_{j2}, \dots, \lambda_{2m} P_{j2m})$

2.  $P_{ji}$  representa que a variável desviacional  $i$  foi enquadrada no nível de prioridade  $j$ .

3.  $\lambda_i$  é o peso diferencial atribuído à variável desviacional  $i$ .
4. O vetor linha  $\underline{\delta}$  de  $2m$  componentes é o vetor das variáveis desviacionais, ou seja  $\underline{\delta} = (\delta_1^-, \delta_2^-, \dots, \delta_m^-, \delta_1^+, \delta_2^+, \dots, \delta_m^+)$
5.  $A$  é uma matriz  $(m, n)$  cujos elementos são os coeficientes das variáveis tecnológicas.
6.  $R$  é uma matriz  $(m, 2m)$  de coeficientes dos desvios

#### 2.4 - VARIAÇÕES DA FUNÇÃO OBJETIVO

Dependendo da estrutura dos objetivos apresentam-se algumas variações da F.O.

##### 1. Minimização de $(\underline{\delta}^- + \underline{\delta}^+)$

O problema expressa-se como:

$$\text{Minimizar } \sum_{i \in I} (\delta_i^+ + \delta_i^-) \quad (2.12)$$

Sujeito a:

$$\sum_i (\sum_j a_{ij} x_j - \delta_i^+ + \delta_i^-) = \sum_i b_i$$

$$\forall \delta_i^+, \delta_i^-, x_j \geq 0; i \in I$$

ou como:

$$\text{Minimizar}_{x \in X} \sum_{i \in I} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right| \quad (2.13)$$

onde  $X$  representa o conjunto das variáveis tecnológicas.

As funcionais  $f_i(x) = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right|$  têm as propriedades da P.L.P.O., já que se incrementam com as discrepâncias dos  $b_i$  para cada  $x \in X$ .

Para mostrar a equivalência entre (2.12) e (2.13), definem-se:

$$\delta_i^+ = \frac{1}{2} \left[ \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right| + \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) \right] \quad (2.14)$$

$$\delta_i^- = \frac{1}{2} \left[ \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right| - \left( \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right) \right] \quad (2.15)$$

somando (2.14) com (2.15) obtém-se:

$$\delta_i^+ + \delta_i^- = \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right| \quad (2.16)$$

e

$$\sum_i (\delta_i^+ + \delta_i^-) = \sum_i \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i \right| \quad (2.17)$$

Então, minimizar  $\sum_i (\delta_i^+ + \delta_i^-)$  é

equivalente a minimizar  $|A \underline{x} - \underline{b}|$

## 2. Minimização de $\delta^-$

Uma função critério que minimize  $\delta^-$ , levará a um conjunto  $X$  de valores da solução, tais que:

$$A X \geq \underline{b}$$

Aqui, trata-se de minimizar  $\delta^-$  para zero. Quando não for possível  $\delta^-$  atingir o valor zero, a solução consistirá em todos os  $x$  que minimizarem  $\underline{b} - A \underline{x}$  tanto quanto possível.

## 3. Minimização de $\delta^+$

Trata-se neste caso, de achar os valores de  $x$  que satisfaçam  $A \underline{x} \leq \underline{b}$ . Quando não for possível reduzir  $\delta^+$  a zero, a solução consistirá em todos os  $x$  que minimizem  $A \underline{x} - \underline{b}$  o quanto possível.

## 4. Minimização de $(\delta^- - \delta^+)$

Esta minimização é equivalente à maximização de  $Ax$ .

Examinando o modelo, temos:

$$\text{Minimizar } \sum (\delta_i^- - \delta_i^+) \quad (2.18)$$

Sujeito a:

$$\sum_i (\sum_j a_{ij} x_j + \delta_i^- - \delta_i^+) = \sum_i b_i$$

$$x_j, \delta_i^-, \delta_i^+ \geq 0$$

Nas restrições teremos:

$$(\underline{\delta}^- - \underline{\delta}^+) = \underline{b} - A \underline{x} \quad (2.19)$$

pode ser substituída na função critério, e dado que  $\underline{b}$  é um vetor constante, a minimização de  $(\underline{\delta}^- - \underline{\delta}^+)$  é equivalente à maximização de  $A \underline{x}$ .

##### 5. Minimização de $(\delta^+ - \delta^-)$

Esta minimização é equivalente à minimização de  $A \underline{x}$ .

O modelo P.L.P.O. expressa-se;

$$\text{Minimizar } (\underline{\delta}^+ - \underline{\delta}^-) \quad (2.20)$$

Sujeito a:



$$A \underline{x} - \underline{\delta}^- + \underline{\delta}^+ = \underline{b}$$

$$x, \underline{\delta}^+, \underline{\delta}^- = 0$$

Nas restrições-objetivos temos:

$$\underline{\delta}^- - \underline{\delta}^+ = A \underline{x} - \underline{b} \quad (2.21)$$

Substituindo (2.21) na F.O., e dado que  $\bar{b}$  é constante, equivale à minimização de  $A \underline{x}$ .

CAPÍTULO IIIMÉTODOS PARA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS  
DE PROGRAMAÇÃO LINEAR POR OBJETIVOS  
O MÉTODO GRÁFICO3.1 - INTRODUÇÃO

Neste capítulo e no próximo serão apresentados e discutidos métodos para a resolução de problemas P.L.P.O.

Iniciar-se-á pelo Método Gráfico que embora na utilização esteja restrito a problemas com até duas variáveis, e muito útil para uma melhor compreensão do outro método, a ser apresentado no Capítulo IV, o Método Simplex Adaptado, o qual pode ser utilizado também em problemas de grande porte.

Existe ainda um outro método, que não será discutido aqui, chamado o da Técnica de Inversão Generalizada, cuja formulação é apresentada em (16).

Apresentar-se-á o Método Gráfico de P.L.P.O. mediante exemplos.

Exemplo 3.1

Uma das seções de uma fábrica de peças para carros, produz um tipo de peça que pode ser acabada por qualquer um de dois processos diferentes.

Mediante o processo 1, produzem-se em média 3 peças por hora e mediante o processo 2 produzem-se 5 peças/hora.

Estes produtos são processados em 2 turnos de 8 horas cada um.

A firma estabelece os seguintes objetivos enumerados por ordem de prioridade:

1. Atingir a produção de 630 unidades por semana.
2. Limitar a operação de horário extra em 6 horas, para o processo 1 e em 4 horas para o processo 2.
3. Evitar a sub-utilização das horas normais de trabalho em ambos os processos.

#### Restrições:

##### 3.1.1 - Capacidade de Produção

$$3x_1 + 5x_2 + \delta_1^- - \delta_1^+ = 630$$

onde:

$x_1$  = número de horas por semana usadas na operação do processo 1.

$x_2$  = número de horas semanais usadas na operação do processo 2.

$\delta_1^-$  = sub-produção, aquêm das 630 unidades.

$\delta_1^+$  = super-produção, além das 630 unidades.

### 3.1.2 - Tempo Normal de Operação

#### 3.1.2.1 - No Processo 1

$$x_1 + \delta_2^- - \delta_2^+ = 80$$

#### 3.1.2.2 - No Processo 2

$$x_2 + \delta_3^- - \delta_3^+ = 80$$

onde:

$\delta_2^-$  = utilização das horas normais de trabalho aquêm das 80 horas, no processo 1.

$\delta_3^-$  = utilização das horas normais de trabalho aquêm das 80 horas no processo 2.

$\delta_2^+$  = utilização das horas normais de trabalho além das 80 horas, no processo 1.

$\delta_3^+$  = utilização das horas normais de trabalho além das 80 horas, no processo 2.

Os desvios positivos serão maiores que zero quando se precisar de tempo extra para satisfazer o objetivo pré-estabelecido de produção.

### 3.1.3 - Operação em Tempo Extra

#### 3.1.3.1 - Para o Processo 1

$$x_1 + \delta_4^- - \delta_4^+ = 92$$

#### 3.1.3.2 - Para o Processo 2

$$x_2 + \delta_5^- - \delta_5^+ = 88$$

onde:

$\delta_4^-$  = Tempo de operação no processo 1 menor que 92 horas.

$\delta_5^-$  = Tempo de operação no processo 2, menor que 88 horas.

$\delta_4^+$  = Tempo de operação no processo 1, maior que 92 horas.

$\delta_5^+$  = Tempo de operação no processo 2, maior que 88 horas.

O valor 92 em (3.1.3.1), resulta da soma das 80 horas normais de operação no processo 1, mais 12 horas extraordinárias permitidas em total para os dois turnos, em tanto que em (3.1.3.2) o valor 88 é o resultado da soma das 80 horas normais de operação no processo 2, mais 8 horas extraordinárias nos dois turnos.

### Prioridades:

Atribui-se-ão as seguintes prioridades:

1. Prioridade 1 à produção de 630 unidades
2. Prioridade 2 às limitações de operação em tempo extra nos processos 1 e 2.
3. Prioridade 3 ao objetivo de se evitar a sub-utilização das horas normais de operação.

### Modelo:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar: } Z = & P_1 \delta_1^- + 3P_2 \delta_4^+ + 5P_2 \delta_5^+ + 5P_3 \delta_3^- + \\ & + 3P_3 \delta_2^- \end{aligned}$$

Sujeito a:

$$3x_1 + 5x_2 + \delta_1^- - \delta_1^+ = 630$$

$$x_1 + \delta_2^- - \delta_2^+ = 80$$

$$x_2 + \delta_3^- - \delta_3^+ = 80$$

$$x_1 + \delta_4^- - \delta_4^+ = 92$$

$$x_2 + \delta_5^- - \delta_5^+ = 88$$

$$x_1, x_2, \delta_1^-, \delta_2^-, \delta_3^-, \delta_4^-, \delta_5^-, \delta_1^+, \delta_2^+, \delta_3^+, \delta_4^+, \delta_5^+ \geq 0$$

### Solução Gráfica

#### i. Primeiro Objetivo:

Produção de 630 unidades por semana.

A área de solução possível é:

$$x_1 \geq \frac{1}{3} (630 - 5x_2), \text{ representada pela área hachurada na Figura (3.1).}$$

rada na Figura (3.1).

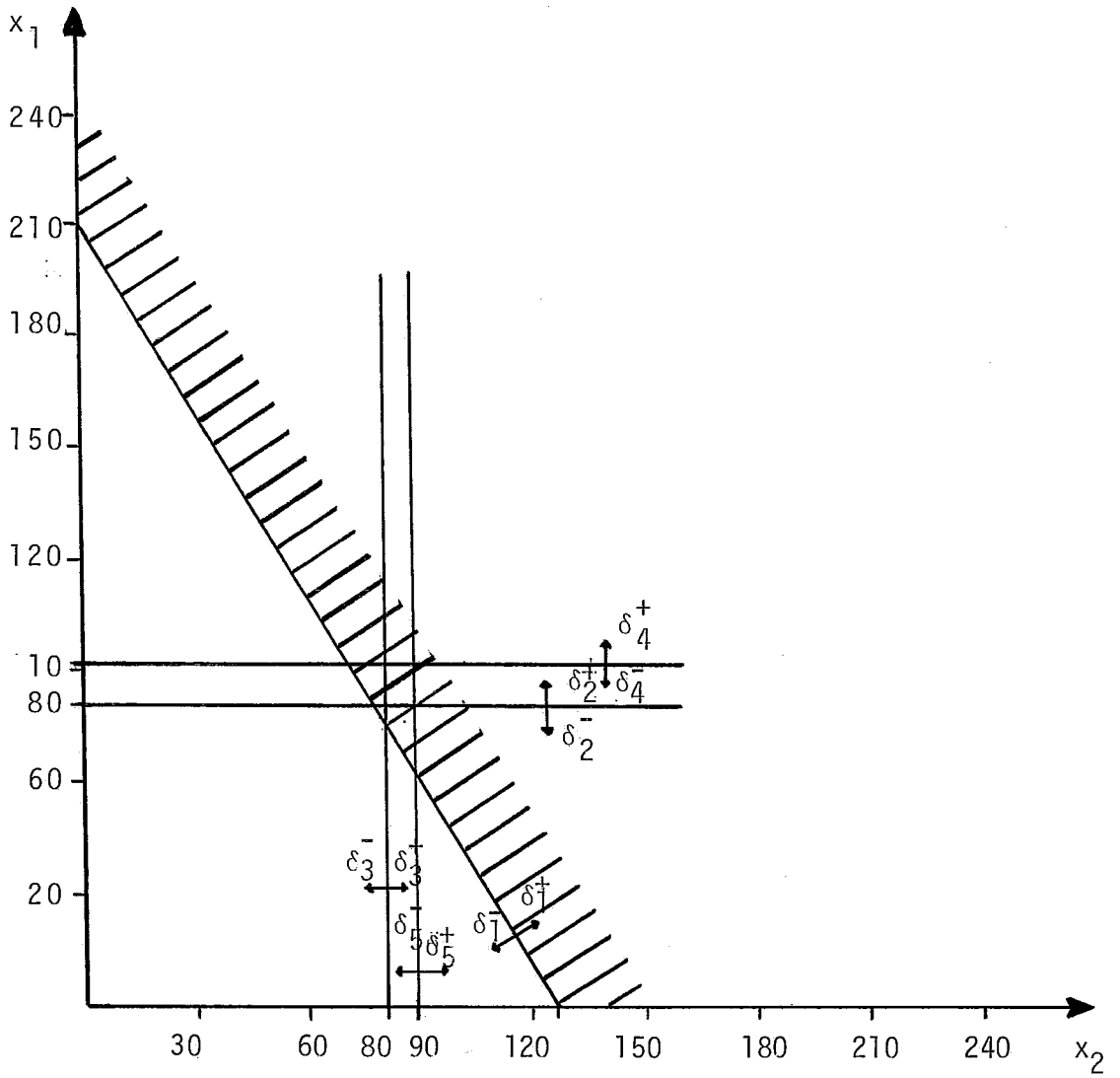


Figura 3.1

ii. Segundo Objetivo

Fica representado pelos valores que satisfazem:

$$x_1 \leq 92 \text{ e } x_2 \leq 88.$$



A área de solução está representada na área hachurada na Figura (3.2).

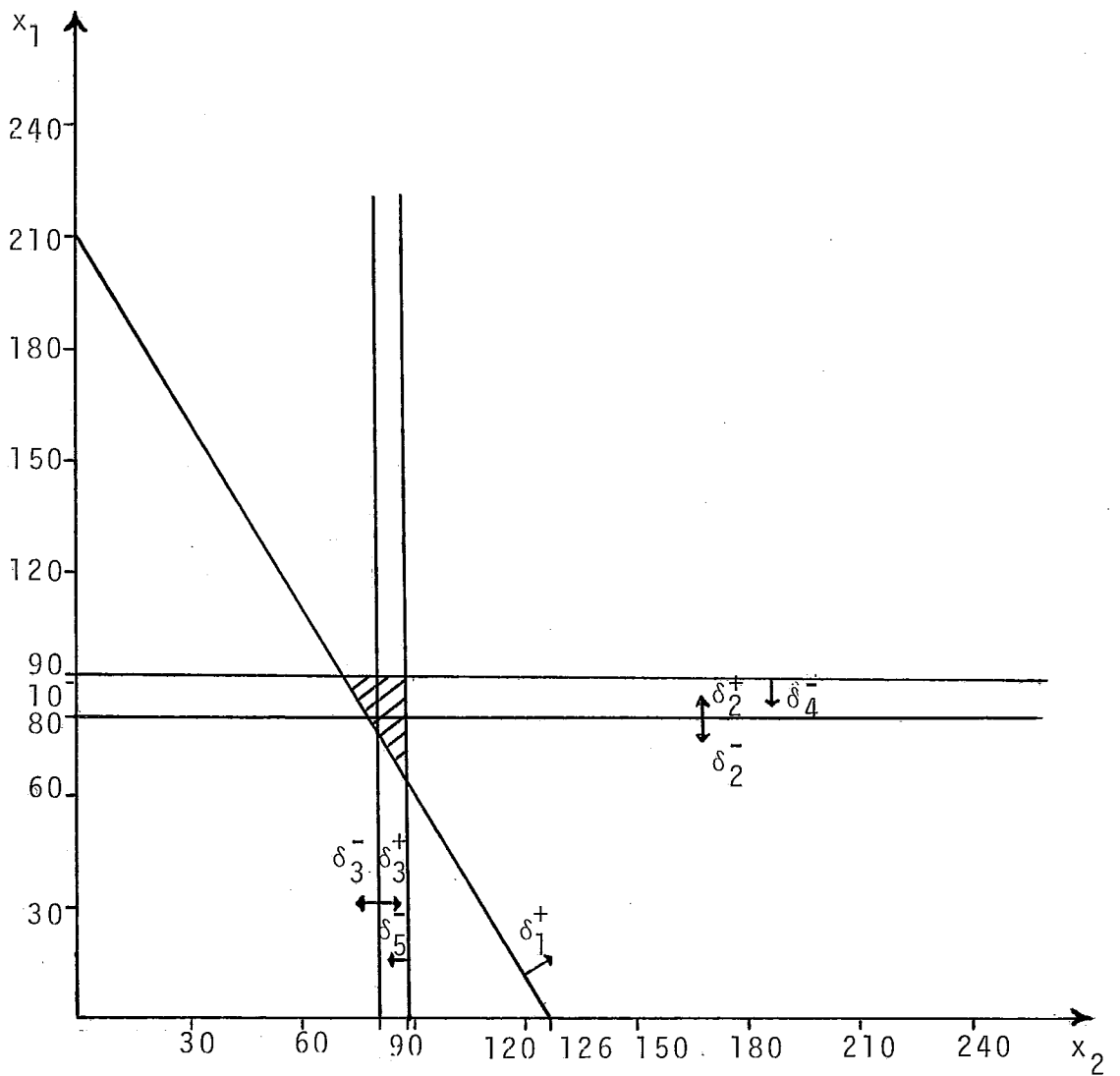


Figura 3.2

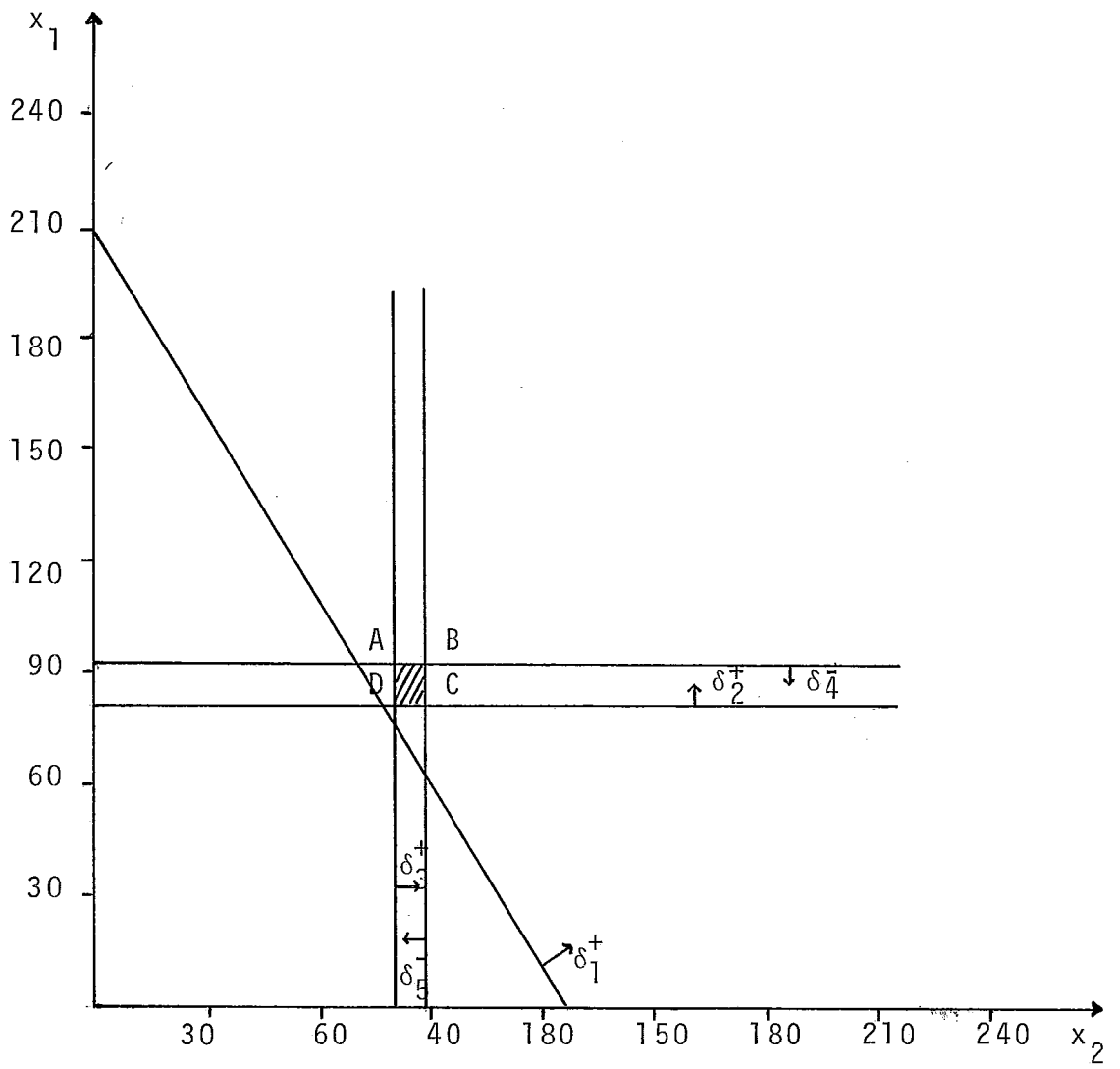


Figura 3.3

Na Figura (3.1) estão graficadas todas as restrições do problema.

Examina-se depois a função objetivo com prioridade 1, devemos minimizar o  $\delta_1^-$ . Os pontos de solução viável para o primeiro objetivo estarão na área definida por  $x_1 \geq \frac{1}{3} (630 - 5x_2)$ .

Relacionadas com o fator de prioridade 2, temos a variável desviacional  $\delta_4^+$  com peso diferencial 3 e a variável desviacional  $\delta_5^+$  com peso diferencial 5. A área de solução viável que satisfaz este segundo objetivo sem priorar o atingimento do segundo objetivo é a área hachurada na Figura 3.2.

Analizando o terceiro objetivo, tentamos minimizar a variável desviacional  $\delta_3^-$  com prioridade 3 e peso diferencial 5 e  $\delta_2^-$  como peso diferencial 3. A região ABCD na Figura 3.3, satisfaz completamente todos os objetivos.

O ponto ótimo da solução é o ponto D, com  $x_1 = 80$  e  $x_2 = 80$ .

#### Solução Ótima:

$$x_1 = 80$$

$$x_2 = 80$$

$$\delta_1^- = 0$$

$$\delta_2^- = 0$$

$$\delta_3^- = 0$$

$$\delta_4^- = 12$$

$$\delta_5^- = 8$$

$$\delta_1^+ = 10$$

$$\delta_2^+ = 0$$

$$\delta_3^+ = 0$$

$$\delta_4^+ = 0$$

$$\delta_5^+ = 0$$

$$\text{com } Z: = 0$$

Exemplo 3.2 (R. Narasimhan, (16))

Uma companhia tem duas máquinas com as que fabrica um produto.

A máquina 1, faz 2 unidades/hora e a máquina 2 faz 3 unidades por hora.

A companhia tem uma ordem de fabricação de 80 unidades.

As restrições de energia determinam que só pode operar uma máquina de cada vez.

A companhia tem 40 horas de tempo normal de operação, mas é permitido o sobretempo.

Os custos de operação são de Cr\$ 4,00 por hora de operação para a máquina 1 e Cr\$ 5,00 por hora de operação para a máquina 2.

Os objetivos da companhia por ordem de importância são:

1. Satisfazer exatamente a demanda de 80 unidades.
2. Limitar o sobretempo de operação a 10 horas.

3. Usar todas as horas de tempo normal de operação.

4. Minimizar o custo.

Modelo P.L.P.O.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z = & P_1 \delta_1^- + P_1 \delta_1^+ - P_2 \delta_3^+ + P_3 \delta_2^- + \\ & + P_3 \delta_2^+ + P_4 \delta_4^+ \end{aligned}$$

Sujeito a:

$$2x_1 + 3x_2 + \delta_1^- - \delta_1^+ = 80$$

$$x_1 + x_2 + \delta_2^- - \delta_2^+ = 40$$

$$x_1 + x_2 + \delta_3^- - \delta_3^+ = 50$$

$$4x_1 + 5x_2 + \delta_4^+ - \delta_4^+ = 10$$

$$x_1, x_2, \delta_1^-, \delta_2^-, \delta_3^-, \delta_4^-, \delta_1^+, \delta_2^+, \delta_3^+, \delta_4^+ \geq 0.$$

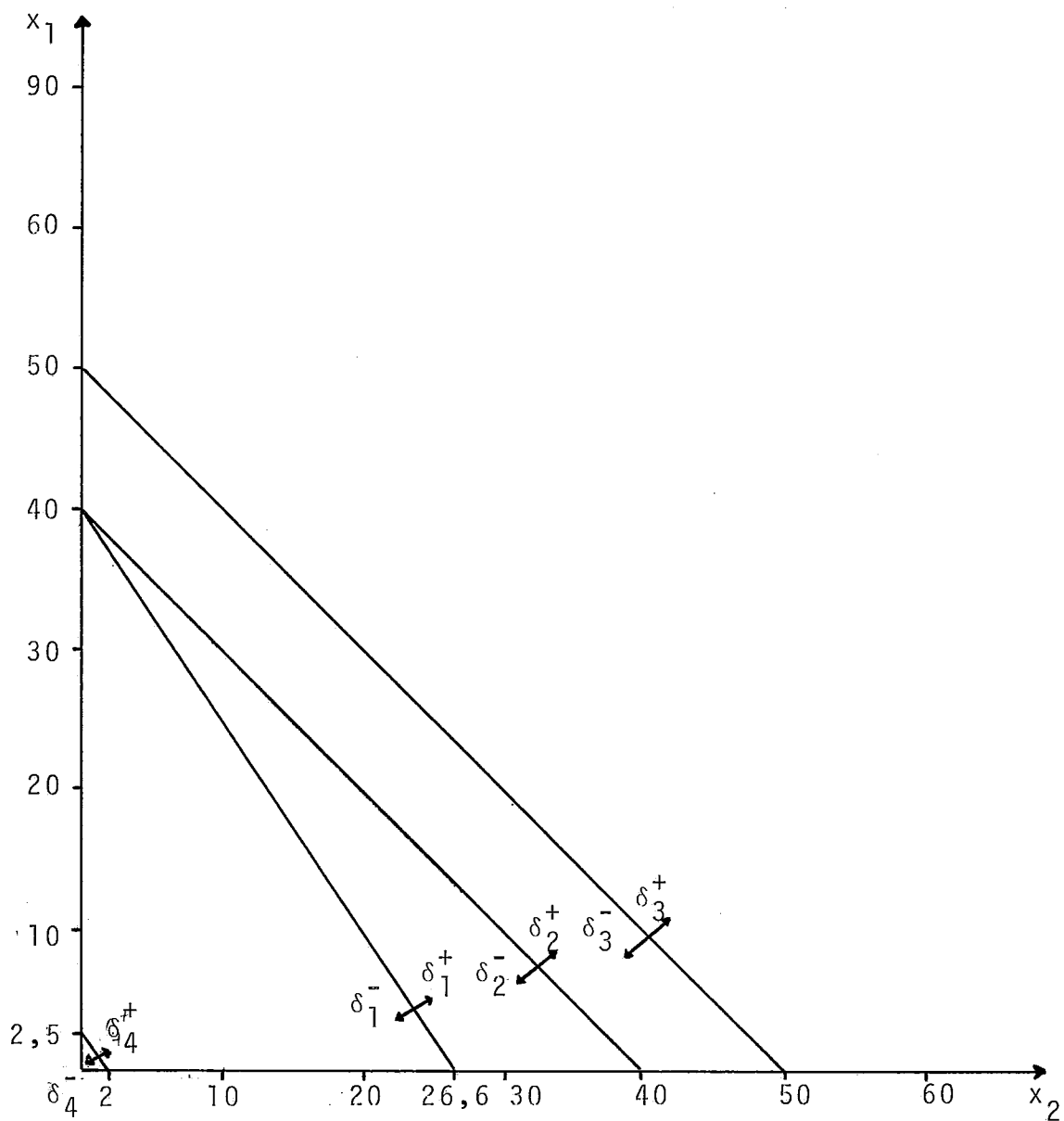


Figura 344

Depois de indicadas as restrições-objetivos examina-se a função objetivo.

Como prioridade 1 e com o mesmo peso diferencial 1 devemos minimizar  $\delta_1^-$  e  $\delta_1^+$ , então os pontos de solução viável para o primeiro objetivo estarão sobre a reta  $2x_1 + 3x_2 = 80$  e o ponto ótimo é  $A = (x_1, x_2) = (40, 0)$ , com o qual  $\delta_1^- = 0$ ,  $\delta_1^+ = 0$  e fica atingido o primeiro objetivo exatamente (Figura 3.5).

Relacionada com o fator de prioridade 2, temos a variável desvacional  $\delta_3^+$ , a solução viável para este objetivo estará sobre a reta  $x_1 + x_2 = 50$  e os pontos abaixo dela, porém qualquer variação que tentemos fazer na solução com a finalidade de melhorar o atingimento deste objetivo piorará o atingimento do objetivo 1. Então a solução ótima continua sendo  $x_1 = 40$ ,  $x_2 = 0$  com  $\delta_1^- = 0$  e  $\delta_1^+ = 0$ . Com esta solução teremos que  $\delta_3^+$  assume o valor 10. Figura 3.6.

Associadas com a prioridade 3 e com o mesmo peso diferencial 1, temos as variáveis desvacionais  $\delta_2^-$  e  $\delta_2^+$ . Vemos que com a satisfação da primeira meta a terceira foi automaticamente atingida. Figura 3.7.

Analisando a quarta meta, vemos que não há melhoramento possível, porque qualquer alteração que se faça para tentar melhorar seu atingimento piorará o atingimento das outras. Assim o ponto ótimo de solução ficará sendo  $x_1 = 40$ ,



$x_2 = 0$  com  $\delta_1^- = 0$ ,  $\delta_2^- = 0$ ,  $\delta_3^- = 10$ ,  $\delta_4^- = 0$ ,  $\delta_1^+ = 0$ ,  $\delta_2^+ = 0$ ,  
 $\delta_3^+ = 0$ ,  $\delta_4^+ = 150$ .

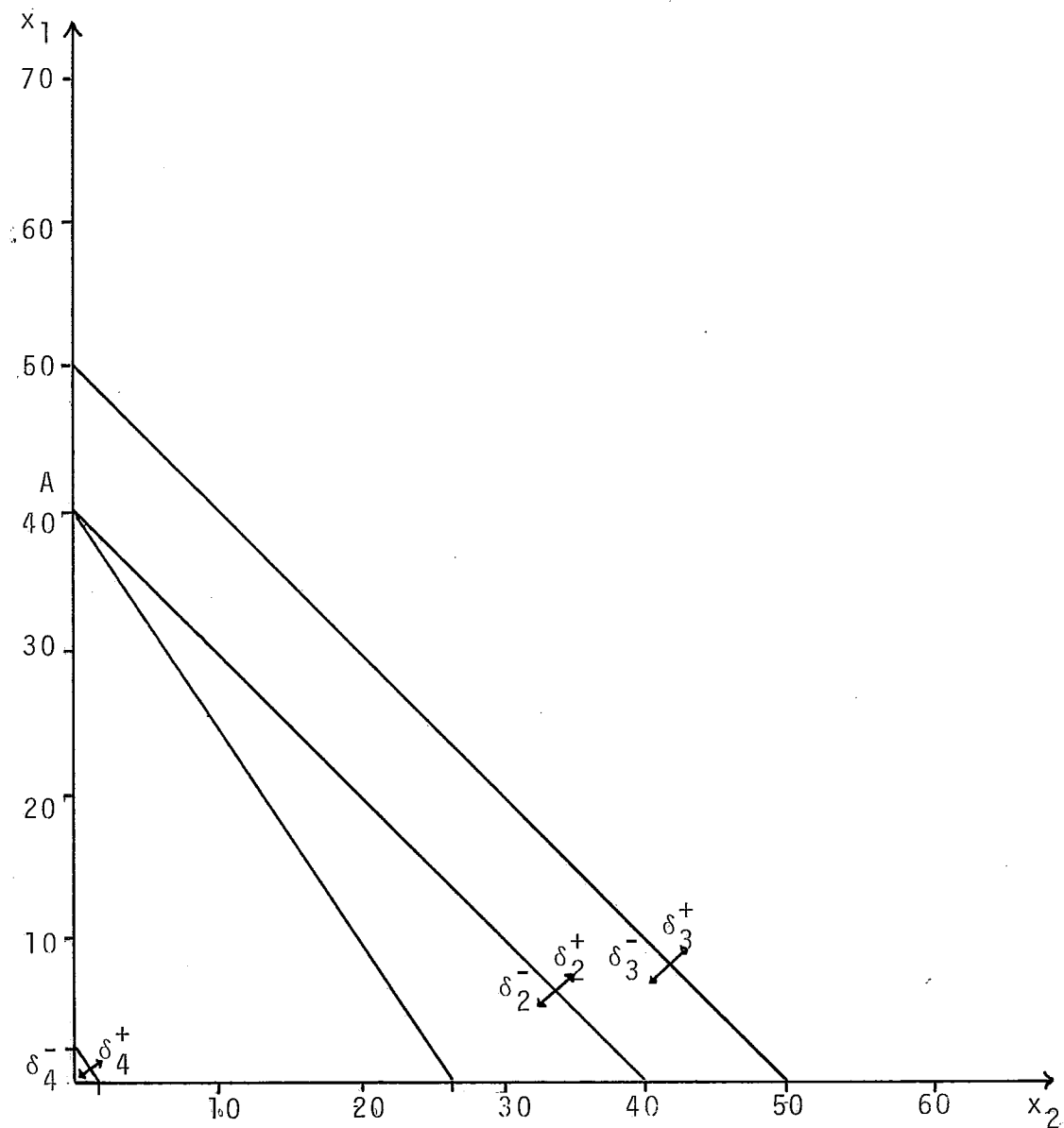


Figura 3.5

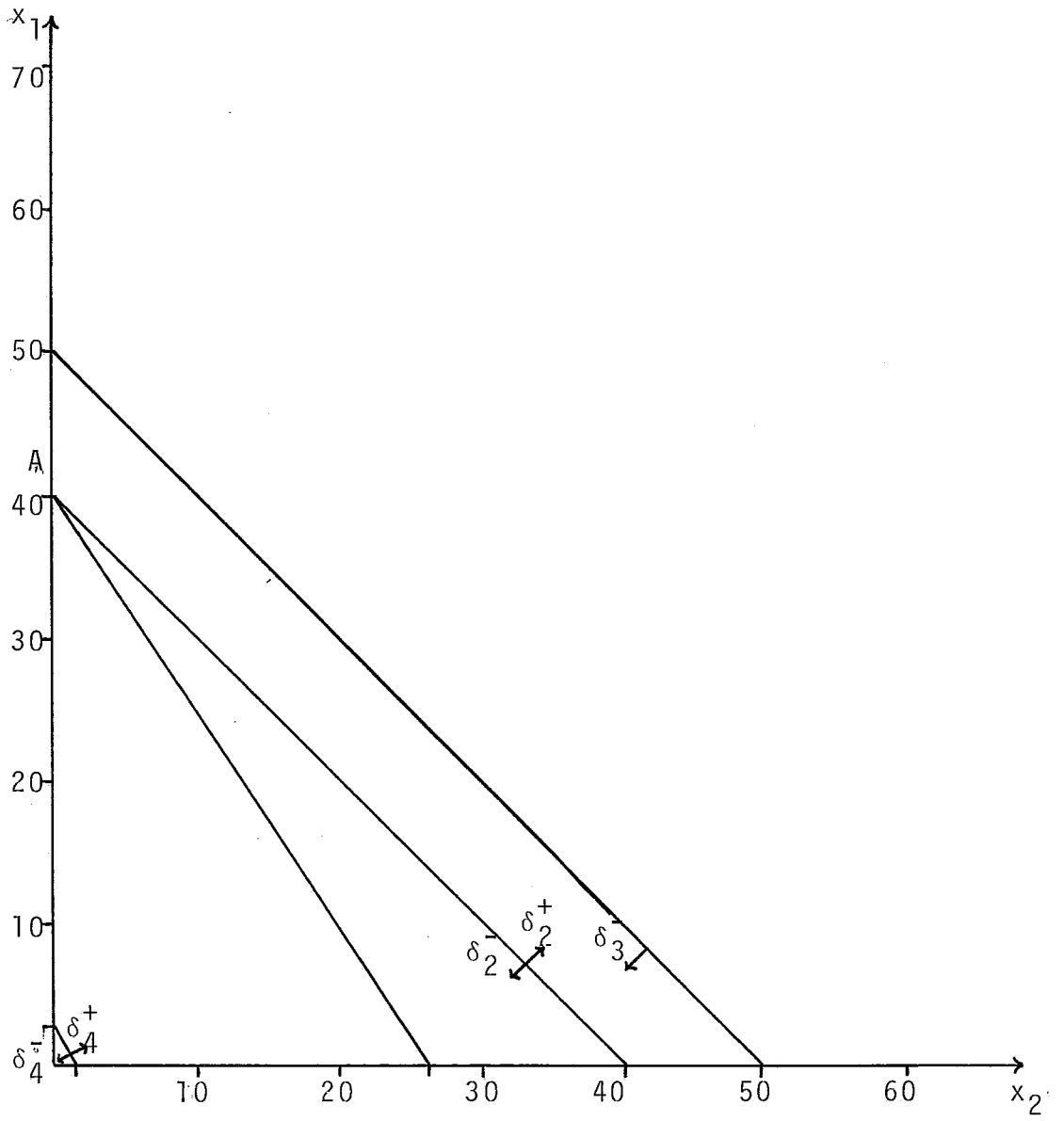


Figura 3.6

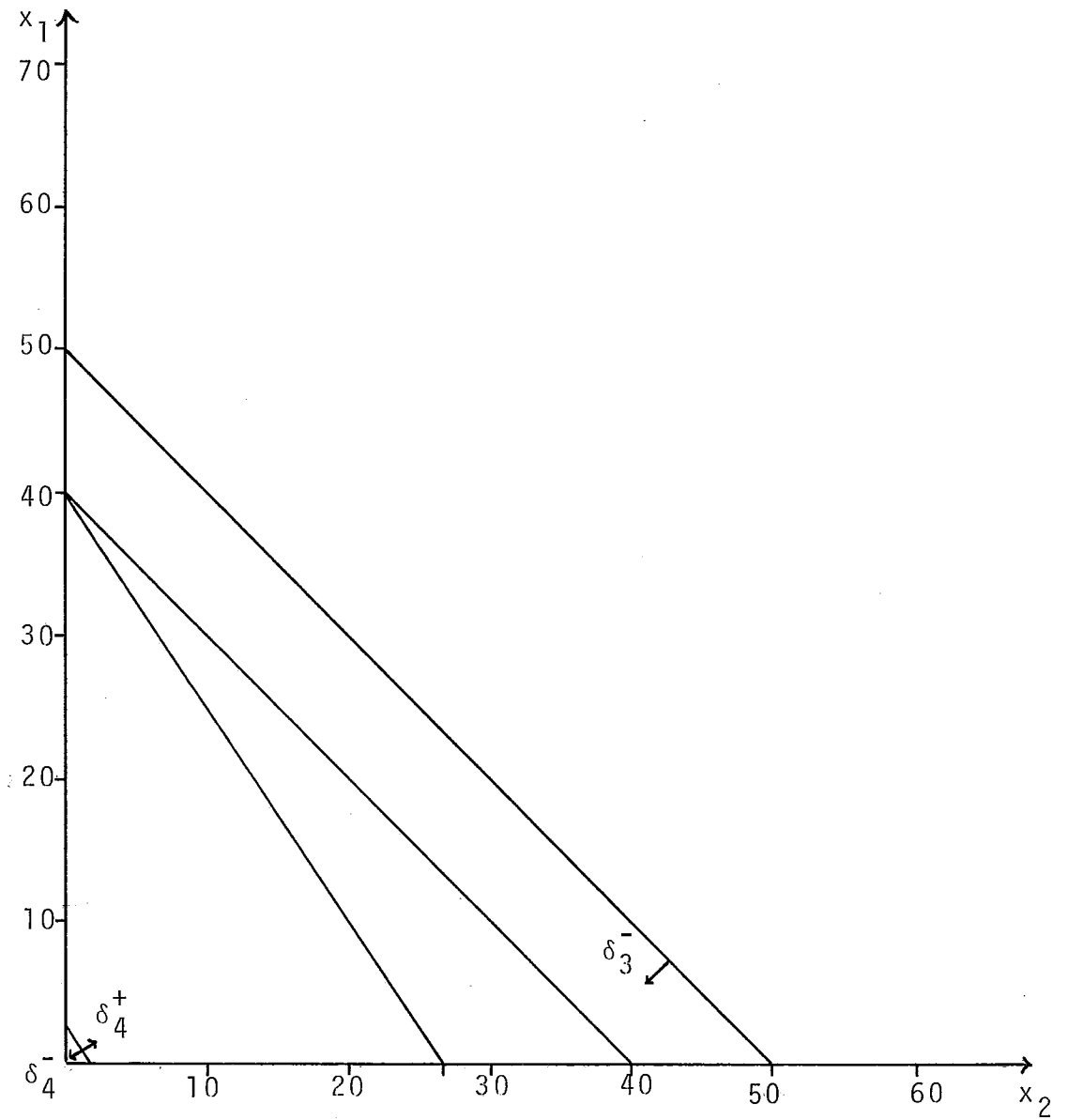


Figura 3.7

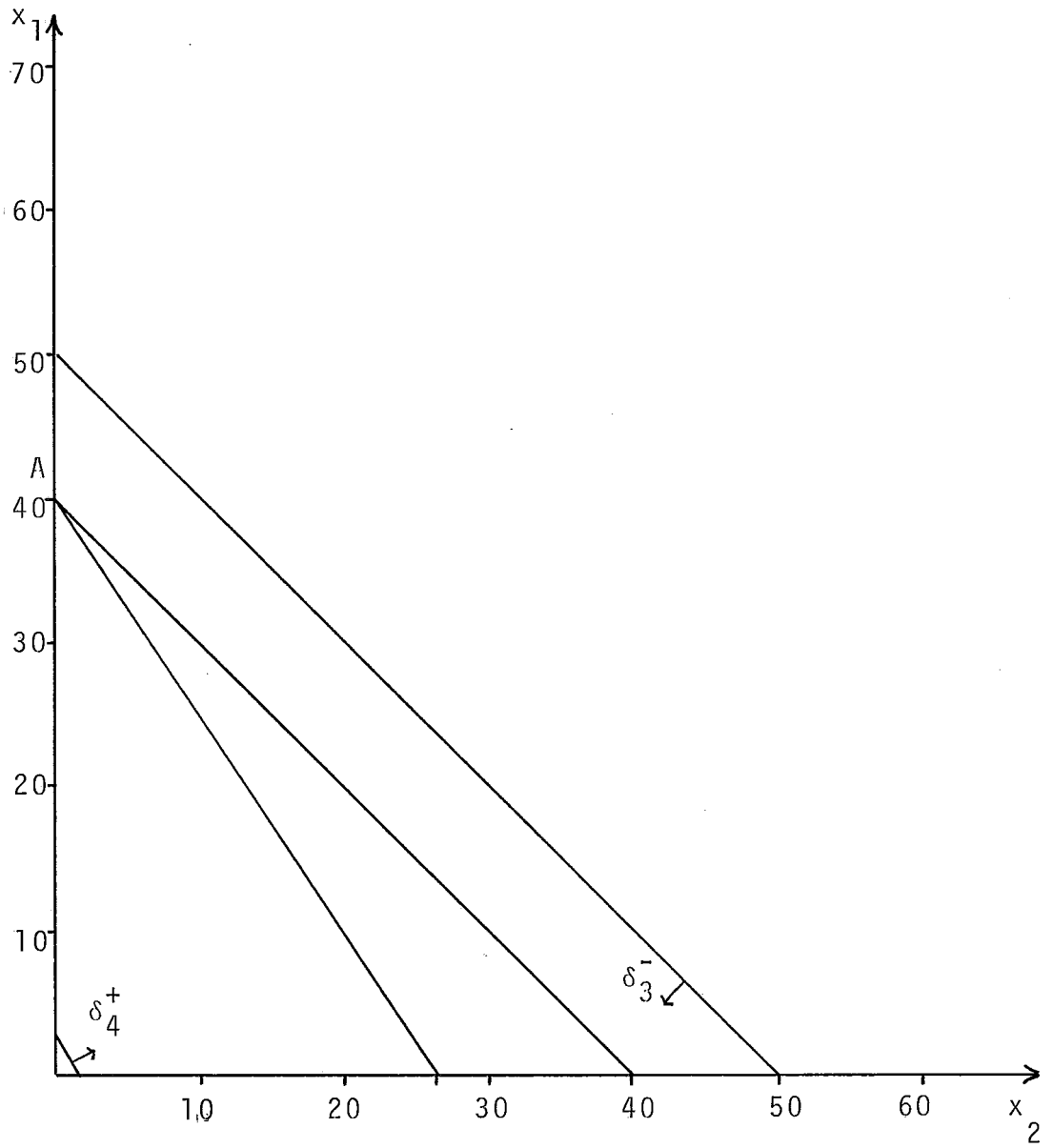


Figura 3.8

## CAPÍTULO IV

### MÉTODO SIMPLEX DE PROGRAMAÇÃO LINEAR POR OBJETIVOS

O Método Simplex de P.L.P.O. é um processo algorítmico que procura atingir a solução ótima do problema tentando atingir cada objetivo seguindo a estrutura de prioridades.

#### 4.1 - TABELA SIMPLEX

Consta de duas partes. Na parte superior estão os coeficientes da matriz A, da matriz R e os valores dos objetivos e na parte inferior está a matriz  $Z_j - C_j$ .

Os critérios Simplex  $Z_j - C_j$  são expressos na tabela, por uma matriz de ordem  $(m, n_1)$  onde m é o número de prioridades e  $n_1$  é o número total de variáveis dos problemas.

Para a identificação da variável que entra na base, assume-se que  $P_j \gg P_{j+1}$  ou seja que:

$$\exists \omega / \omega P_{j+1} \geq P_j$$

Assim, as prioridades serão consideradas na escolha da variável entrante.

Entrará na base a variável cuja contribuição seja mais alta para a obtenção do objetivo de maior prioridade;

Isto é, a variável cujo valor correspondente  $Z_j - C_j$ , seja o mais alto valor positivo, na linha correspondente à prioridade mais alta em tratamento, será escolhida para entrar na base na seguinte iteração.

A coluna correspondente a esta variável será a Coluna Pivô.

A variável que sairá da base será aquela que corresponda ao menor valor positivo resultante da divisão dos pesos diferenciais  $\delta_j$  das variáveis básicas, pelos valores correspondentes da Coluna Pivô.

A linha correspondente à variável que sai da base será a Linha Pivô.

A Nova Solução Básica Possível determina-se mediante o Método de Eliminação Completa de Gauss-Jordan.

Operando por esse método, aparecerão na tabela seguinte, em coluna, os valores da combinação linear equivalente de cada vetor, em função da nova base.

Realiza-se o processo até atingir-se o objetivo de maior prioridade, isto é quando todo  $Z_{1j} - C_{1j} \leq 0$ .

Então, repete-se o processo para o seguinte objetivo na hierarquia e assim por diante.

O teste da condição de otimalidade  $\bar{e}$  dado no algoritmo Simplex posteriormente.

$C_j$			$\alpha \quad \underline{P}$											
	VB	C	$x_1$	$x_2$	$\dots$	$x_n$	$\delta_1^-$	$\delta_2^-$	$\dots$	$\delta_m^-$	$\delta_1^+$	$\delta_2^+$	$\dots$	$\delta_m^+$
	VARIÁVEIS BÁSICAS	OBJETIVOS	$a_{11}$	$a_{12}$	$\dots$	$a_{1n}$	1	0	$\dots$	0	-1	0	$\dots$	0
			$a_{21}$	$a_{22}$	$\dots$	$a_{2n}$	0	1	$\dots$	0	0	-1	$\dots$	0
			$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
			$a_{m1}$	$a_{m2}$	$\dots$	$a_{mn}$	0	0	$\dots$	1	0	0	$\dots$	1
$Z_j - C_j$	$P_k$		$Z_{k1} - Z_{k1} \dots Z_{kn} - C_{kn} - Z_{kn+1} \dots Z_{kn+m} - C_{k1n+m} \dots Z_{k2m} - (k_{2m})$											
	$P_{k_1}$													
	$P_2$													
	$P_1$		$Z_{1n} - C_{1n}$	$Z_{1n}$	$Z_{1,n+1} - C_{1,n+1}$	$\dots$	$Z_{1,n+m} - C_{1,n+m}$	$\dots$	$Z_{1,2m} - C_{1,2m}$					

Tabela 4.1 - Simplex P.P.O.

## 4.2 - ALGORITMO SIMPLEX P.L.P.O.

### 1. Solução Inicial

1.1 - Assume-se que a Solução Inicial está na origem.

1.2 - Colocam-se todas as variáveis desviacionais negativas na Solução Básica Inicial.

### 2. $Z_j - C_j$

2.1 - Os valores  $C_j$  representam os pesos diferenciais atribuídos às variáveis desviacionais.

2.2 - Os valores  $Z_j$ , são produzidos da soma de  $C_j$  vezes as constantes ou coeficientes diferenciais.

Então:

$$Z_j = \sum_{i \in I} C_i Y_{ij}$$

ou

$$Z_j = \sum_{i \in I} C_i Y_{ij}$$

$P_R$

e



$$Z_j - C_j = \sum_{i \in I} \alpha_i Y_{ij} - C_j$$

Calcula-se  $Z_j - C_j$  para cada coluna começando da primeira variável desviacional positiva.

### 3. Determinação da variável que entra na base

- 3.1 - Determina-se o mais alto nível de prioridade que não tenha sido atingido totalmente, por exame dos  $Z_j - C_j$  da coluna de objetivos ( $\underline{b}$ ).
- 3.2 - Identifica-se a variável que tenha o mais alto valor positivo de  $Z_j - C_j$  para essa prioridade. A variável que corresponda a esse valor, entrará na base na próxima iteração.

Em caso de empate, examina-se o seguinte nível mais alto de prioridade e escolhe-se a variável que para esse nível tenha o  $Z_j - C_j \geq 0$  mais alto.

Quando não seja possível resolver o empate, escolher-se-á arbitrariamente qualquer uma das variáveis conflitantes. Fica também assim determinada a Coluna Pivô.

### 4. Determinação da Variável que sai da base

Calcula-se na parte principal da tabela o valor

das constantes (b) divididas pelos coeficientes correspondentes da Coluna Pivô.

Escolhe-se para sair da base, a variável que corresponde ao menor valor positivo.

A linha na qual está essa variável será a Linha Pivô.

O elemento interseção entre a Linha Pivô e a Coluna Pivô é o Elemento Pivô.

A variável escolhida, será substituída na iteração seguinte pela variável da Coluna Pivô.

Quando existir empate escolher-se-á a variável com o mais alto nível de prioridade, procurando-se assim a realização do objetivo de ordem mais alto e reduzindo-se o número de iterações.

Isto é

$$\forall e | \theta_e = \min\left\{\theta = \frac{b_i}{y_{ij}}\right\}$$

e = índice da Coluna Pivô.

## 5. Determinação da Nova Solução Básica Possível

5.1 - Aham-se as novas constantes ( $b'_i$ )

5.2 - Aham-se os novos coeficientes da Linha Pivô

$$Y'_{se} = Y_{se} / Y_{sk}$$

$$Y'_{se} = Y_{se} / Y_{se} = 1$$

Onde:

s = Índice da Linha Pivô.

e = Índice da Coluna Pivô.

$Y_{se}$  = Elemento Pivô

5.3 - Aham-se os coeficientes para  $i \neq s$

$$Y'_{ij} = Y_{ie} - \frac{Y_{se}}{Y_{se}} Y_{ie} = 0$$

$$Y'_{ij} = Y_{ij} - \frac{Y_{ej}}{Y_{es}} Y_{is}$$

6. Calcula-se os  $Z_j$  da segunda parte da tabela

$$Z_j = \sum_{i \in I} \alpha_i b_i$$

$P_k$

## 7. Cálculo dos $Z_j - C_j$ para cada linha de prioridade

$$Z_j - C_j = \sum_{i \in I} \alpha_i Y_{ij}$$

$P_k$

## 8. Determinação da Solução Ótima

8.1 - Examina-se o nível de realização dos objetivos, analisando o valor de  $Z_j$  correspondente a cada linha de prioridade.

8.2 - Critérios de Otimalidade.

8.2.1 - Se  $\forall Z_j = 0$  = Solução Ótima.

8.2.2 - Se  $\exists q \in J / Z_q > 0$  examina-se  $Z_{qv} - C_{qv}$ . Se  $Z_{qv} - C_{qv} > 0$  examina-se se para  $t > q, t \in I, \exists Z_{tv} - C_{tv} < 0$  caso exista, a Solução é Ótima.

8.2.3 - Se dadas as condições em 8.2.2,  $Z_{tv} - C_{tv} > 0 \rightarrow$  Solução não ótima.

8.2.4 - Nova iteração.

#### 4.2.1 - Exemplo de Aplicação do Método Simplex

Aplicando o Método Simplex acima descrito ao exemplo (3.1) apresentado no capítulo anterior, nos temos as seguintes tabelas ilustrando as iterações necessárias até se obter a solução ótima.

$C_j$										
	V	C	$x_1$	$x_2$	$P_1$	$3P_3$	$5P_3$	$3P_2$	$5P_2$	
	$\delta_1^-$	$\delta_2^-$	$\delta_3^-$	$\delta_4^-$	$\delta_5^-$	$\delta_1^+$	$\delta_2^+$	$\delta_3^+$	$\delta_4^+$	$\delta_5^+$
$P_1$		630	3	5	1					
$3P_3$		80	1		1					
$5P_3$		80		1						
0		92	1			1				-1
0		88		1			1			-1
$Z_j - C_j$	$P_3$	640	3	5				-3	-5	
	$P_2$	0								-3
	$P_1$	630	3	5						-1

Sai da base  $\delta_3^-$   
 Entra na base  $x_2$

Tabela (4.1)

$C_j$	P <sub>1</sub>					3P <sub>3</sub>					5P <sub>3</sub>					3P <sub>2</sub>					5P <sub>2</sub>				
	V	$\delta_1^-$	$x_2$	$x_1$	$\delta_1^-$	$\delta_2^-$	$\delta_3^-$	$\delta_4^-$	$\delta_5^-$	$\delta_1^+$	$\delta_2^+$	$\delta_3^+$	$\delta_4^+$	$\delta_5^+$	$\delta_1^+$	$\delta_2^+$	$\delta_3^+$	$\delta_4^+$	$\delta_5^+$	$\delta_1^+$	$\delta_2^+$	$\delta_3^+$	$\delta_4^+$	$\delta_5^+$	
P <sub>1</sub>	$\delta_1^-$	230		3	1		-5			-1															
3P <sub>3</sub>	$\delta_2^-$	80		1		1									-1										
0	$x_2$	80					1																		
0	$\delta_4^-$	92		1				1																-1	
0	$\delta_5^-$	8									-1													-1	
Z <sub>j</sub> -C <sub>j</sub>	P <sub>3</sub>	240		3			-5								-3										
	P <sub>2</sub>	0																						-5	
	P <sub>1</sub>	230																						-5	

Sai da base  $\delta_5^-$   
 Entra na base  $\delta_3^+$

Tabela (4.2)

$C_j$														
	V	C	$x_1$	$x_2$	$P_1$	$3P_3$	$5P_3$	$3P_2$	$5P_2$					
	$\delta_1^-$				$\delta_1^-$	$\delta_2^-$	$\delta_3^-$	$\delta_4^-$	$\delta_5^-$	$\delta_1^+$	$\delta_2^+$	$\delta_3^+$	$\delta_4^+$	$\delta_5^+$
$P_1$	$\delta_1^-$	190	3		1				-5	-1				5
$3P_3$	$\delta_2^-$	80	1		1						-1			
0	$x_2$	88	1	1					1					-1
0	$\delta_4^-$	92	1					1					-1	
0	$\delta_3^+$	8					-1		1			1		-1
	$P_3$	240					-5				-3			
$Z_j - C_j$	$P_2$	0											-3	-5
	$P_1$	190	3						-5	-1				5

Entra na base  $\delta_5^+$

Sai da base  $\delta_1^-$

Tabela (4.3)



C <sub>j</sub>	P <sub>1</sub> 3P <sub>3</sub> 5P <sub>3</sub> 3P <sub>2</sub> 5P <sub>2</sub>													
	V	C	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	δ <sub>1</sub> <sup>-</sup>	δ <sub>2</sub> <sup>-</sup>	δ <sub>3</sub> <sup>-</sup>	δ <sub>4</sub> <sup>-</sup>	δ <sub>5</sub> <sup>-</sup>	δ <sub>1</sub> <sup>+</sup>	δ <sub>2</sub> <sup>+</sup>	δ <sub>3</sub> <sup>+</sup>	δ <sub>4</sub> <sup>+</sup>	δ <sub>5</sub> <sup>+</sup>
5P <sub>2</sub>	δ <sub>5</sub> <sup>+</sup>	38	3/5	1/5	1/5				-1	-1/5				
3P <sub>3</sub>	δ <sub>2</sub> <sup>-</sup>	80	1			1								
0	x <sub>2</sub>	126	3/5	1	1/5					-1/5				
0	δ <sub>4</sub> <sup>-</sup>	92	1				1							-1
0	δ <sub>3</sub> <sup>+</sup>	46	3/5	1/5	1/5					-1/5		1		
Z <sub>j</sub> -C <sub>j</sub>	P <sub>3</sub>	240	3					-5						-3
	P <sub>2</sub>	190	3	1					-5	-1				-3
	P <sub>1</sub>	0			-1									

Entra na base x<sub>1</sub>

Sai da base δ<sub>5</sub><sup>+</sup>

Tabela (4.4)

C <sub>j</sub>	3P <sub>2</sub> 5P <sub>2</sub>														
	V	C	x <sub>1</sub>	x <sub>2</sub>	P <sub>1</sub>	3P <sub>3</sub>	5P <sub>3</sub>	δ <sub>5</sub> <sup>-</sup>	δ <sub>4</sub> <sup>-</sup>	δ <sub>3</sub> <sup>-</sup>	δ <sub>2</sub> <sup>+</sup>	δ <sub>1</sub> <sup>+</sup>	δ <sub>3</sub> <sup>+</sup>	δ <sub>4</sub> <sup>+</sup>	δ <sub>5</sub> <sup>+</sup>
0	x <sub>1</sub>	190/3	1		1/3			-5/3			-1/3				5/3
3P <sub>3</sub>	δ <sub>2</sub> <sup>-</sup>	50/3			-1/3	1		5/3			1/3		-1		-5/3
0	x <sub>2</sub>	88		1				1							-1
0	δ <sub>4</sub> <sup>-</sup>	86/3			-1/3			1			1/3		-1		-5/3
0	δ <sub>3</sub> <sup>+</sup>	8						1					1		-1
Z <sub>j</sub> -C <sub>j</sub>	P <sub>3</sub>	50			-1			5			1		-3		-5
	P <sub>2</sub>	0													-3
	P <sub>1</sub>	0			-1										

Entra na base δ<sub>5</sub><sup>-</sup>  
 Sai da base δ<sub>3</sub><sup>+</sup>

Tabela (4.5)

$C_j$														
	$V$	$C$	$x_1$	$x_2$	$P_1$	$3P_3$	$5P_3$	$3P_2$	$5P_2$					
					$\delta_1^-$	$\delta_2^-$	$\delta_3^-$	$\delta_4^-$	$\delta_5^-$	$\delta_1^+$	$\delta_2^+$	$\delta_3^+$	$\delta_4^+$	$\delta_5^+$
0	$x_1$	$230/3$	1		$1/3$		$-5/3$			$-1/3$		$5/3$		
$3P_3$	$\delta_2^-$	$10/3$			$-1/3$	1	$5/3$			$1/3$	-1	$-5/3$		
0	$x_2$	80		1									-1	
0	$\delta_4^-$	$46/3$			$-1/3$		$5/3$	1		$1/3$		$-5/3$	-1	
0	$\delta_5^-$	8					1		1			1		-1
	$P_3$	10			-1					1	-3	-5		
$Z_j - C_j$	$P_2$	0											-3	-5
	$P_1$	0			-1									

Entra na base  $\delta_1^+$

Sai da base  $\delta_2^-$

Tabela (4.6)

$C_j$	$P_1$ $3P_3$ $5P_3$ $3P_2$ $5P_2$													
	V	C	$x_1$	$x_2$	$\delta_1^-$	$\delta_2^-$	$\delta_3^-$	$\delta_4^-$	$\delta_5^-$	$\delta_1^+$	$\delta_2^+$	$\delta_3^+$	$\delta_4^+$	$\delta_5^+$
0	$x_1$	80	1								-1			
0	$\delta_1^+$	10			-1	3	5			1	-3	-5		
0	$x_2$	80		1									-1	
0	$\delta_4^-$	12						1						
0	$\delta_5^-$	8							1					
$Z_j - C_j$	$P_3$	0			-3	-5								
	$P_2$	0											-3	-5
	$P_1$	0			-1									

Tabela (4.7)

SOLUÇÃO

$$x_1 = 80$$

$$x_2 = 80$$

$$\delta_1^- = 0$$

$$\delta_2^- = 0$$

$$\delta_3^- = 0$$

$$\delta_4^- = 12$$

$$\delta_5^- = 8$$

$$\delta_1^+ = 10$$

$$\delta_2^+ = 0$$

$$\delta_3^+ = 0$$

$$\delta_4^+ = 0$$

$$\delta_5^+ = 0$$

#### 4.2.2 - Programa Computacional para Resolução de Problemas de Programação Linear por Objetivos

Este programa resolve o Algoritmo Simplex adaptado para a resolução de problemas P.P.O.

O programa é uma modificação do apresentado em (13).

Usa duas subrotinas:

A subrotina INIC, que lê os dados e os transforma em matrizes que são utilizadas pelo algoritmo na busca da solução.

A subrotina FINAL, que faz a análise dos resultados finais.

FINAL, analisa os valores das variáveis na última tabela, das folgas e da função critério e faz a impressão desses valores.

O Programa Principal desenvolve os cálculos do Algoritmo Simplex: pivoteamentos, cálculos de nova base, razões de substituição, avaliação da função critério.

Imprime ainda todos os valores calculados para a tabela final.

Entrada de Dados

Requer de cinco tipos de cartões:

1. Cartão do Problema
2. Cartão dos Sinais
3. Cartões da Função Critério
4. Cartões dos coeficientes das Variáveis de Decisão
5. Cartões do Membro da Direita.

Descrição dos Cartões

1. Cartão do Problema

Colunas	Conteúdo
5-7	Número de restrições (linhas)
8-10	Número de variáveis de decisão (colunas)
11-13	Número de fatores de prioridade

2. Cartão dos Sinais

Descreve o sentido das restrições.

Existem 4 possibilidades:

I, quando a restrição é uma igualdade, isto é, quando não tem desvios.

G, quando a restrição é do tipo maior que, isto é, quando só existe o desvio positivo.

L, quando a restrição é do tipo menor que, isto é, quando só existe o desvio negativo.

B, quando são possíveis ambas as direções, isto é, quando aparecem ambos os desvios.

Os caracteres de sinal, são perfurados em colunas consecutivas, começando na coluna 1 e na ordem consecutiva das restrições (FORMATO: 80A1).

### 3. Cartões da Função Objetivo

#### Especificação

- O tipo de variável desviacional: positiva ou negativa.
- A restrição (linha) na qual aparece a variável desviacional.
- A coluna na qual aparece a variável desviacional.
- Os pesos diferenciais.

#### Descrição

##### 1. Primeiro Cartão F.C.

Colunas	Conteúdo
1-3	OBJ (Formato A4)

##### 2. Cartões que descrevem cada elemento



Colunas	Conteúdo
8-9	Linha da matriz de restrições na qual aparece a variável desviacional.
13-14	Nível de prioridade ao que está relacionada a <u>va</u> riável desviacional (FORMATO I5).
15.25	Peso diferencial, se for = 1, também deverá ser especificado.

#### 4. Cartões dos Coeficientes das Variáveis de Decisão

##### Descrição:

##### Primeiro Cartão:

Colunas	Conteúdo
1-4	DATA

##### Cartões dos coeficientes:

Colunas	Conteúdo
8-9	Linha na qual esta alocado o coeficiente
13-14	Coluna na qual esta alocado o coeficiente
15-25	Valor do coeficiente

#### 5. Cartões do Membro da Direita

##### Descrição:

##### Primeiro Cartão:

Colunas	Conteúdo
1-4	RGHT

Cartões dos Valores da Direita:

Colunas	Conteúdo
1-10	Valor da direita da primeira restrição
11-20	Valor da direita da segunda restrição
21-30	Valor da direita da terceira restrição
31-40	Valor da direita da quarta restrição
41-50	Valor da direita de quinta restrição
51-60	Valor da direita da sexta restrição
61-70	Valor da direita da sétima restrição
71-80	Valor da direita da oitava restrição

Caso tiver mais de 8 linhas continua no seguinte cartão.

Saídas

O Programa dá as seguintes saídas:

1. Impressão dos dados de entrada correspondentes a:
  - Função Critério
  - Razões de Substituição
  - Lado Direito
2. Impressão da tabela final da solução Simplex.

3. Impressão da matriz final dos custos reduzidos  $Z_j - C_j$
4. Avaliação da Função Critério.
5. Análise de Folgas.
6. Análise de Variáveis.
7. Análise da Função Critério.

#### Descrição das Saídas:

##### 1. Dados de Entrada

Na página 1 são impressos em coluna os elementos do membro da direita.

Na página 2, são impressas as razões de substituição.

Em cada linha aparecem os coeficientes das variáveis desviancionais positivas, os coeficientes das variáveis desviancionais negativas e os coeficientes das variáveis tecnológicas, nessa ordem.

Na página 3 são impressos os valores de entrada da função critério na ordem das prioridades, começando pelo nível mais baixo.

## 2. Solução Final Simplex

A solução final é impressa na forma matricial. Esta tabela é útil para o desenvolvimento de análise de sensibilidade.

São impressos:

### i) O membro da direita

Aparecem duas colunas. A primeira corresponde à numeração da variável básica e a segunda é o valor das constantes da direita.

### ii) As razões de substituição.

Aparecem na forma matricial, segundo a ordem por coluna,  $d_i^-$ ,  $d_i^+$ ,  $x_j$ .

## 3. A matriz $Z_j - C_j$

### 4. Avaliação da função critério.

São apresentados os valores de  $Z_j$  nos objetivos. Estes valores são a parte sub-atingida dos objetivos.

### 5. Análise de Folgas.

Apresenta os valores do membro da direita e os valores positivos e negativos (folgas), para cada equação.

## 6. Análise de Variáveis.

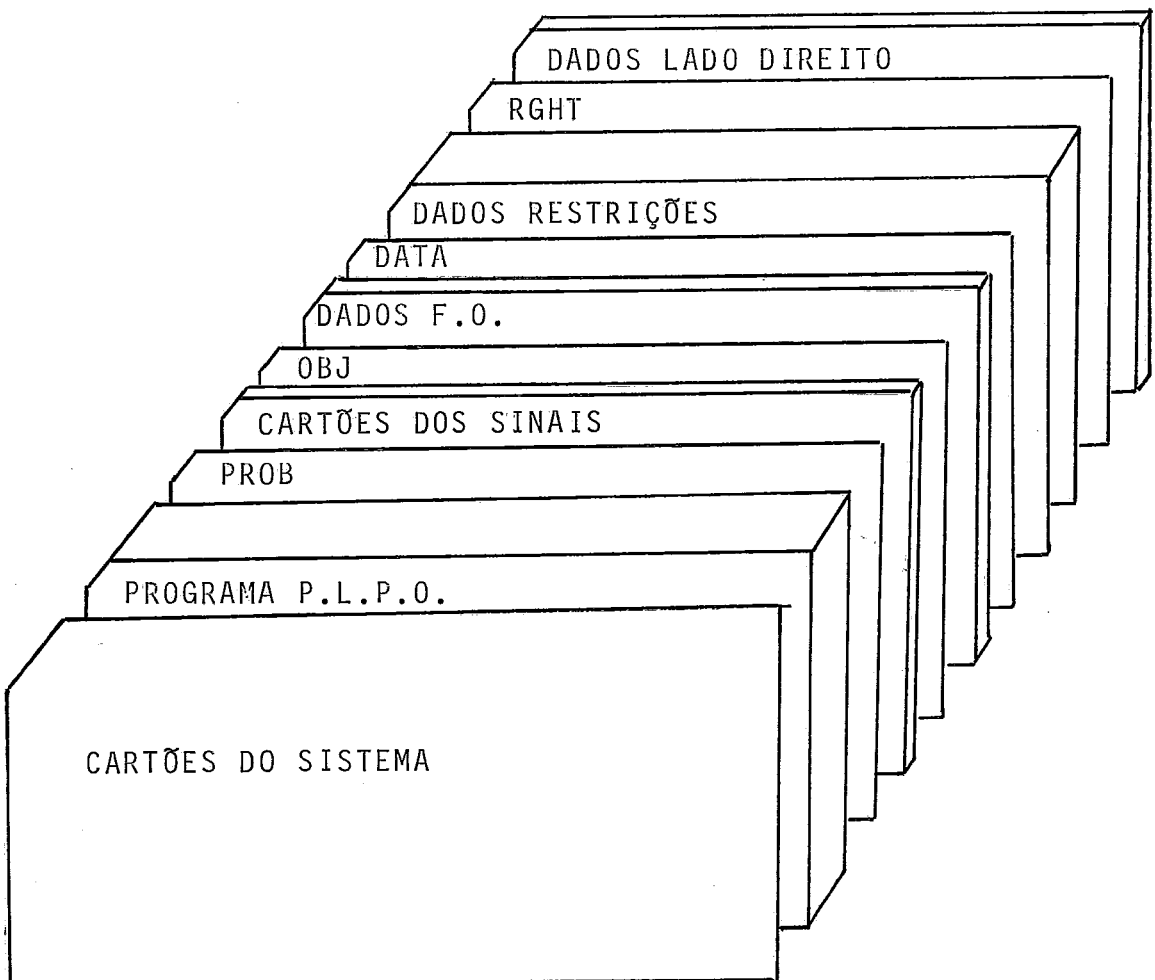
Apresenta as constantes das variáveis de decisão básicas.

## 7. Análise dos Objetivos.

Apresenta os valores  $Z_j$  dos objetivos, que representam a parte sub-atingida das metas.

Imprime também as prioridades artificiais quando necessário.

### Ordem dos Cartões



#### 4.3 - ALGORITMO DE PROGRAMAÇÃO LINEAR POR OBJETIVOS USANDO O MÉTODO SIMPLEX COM PROCEDIMENTOS DE PARTICIONAMENTO E ELIMINAÇÃO

Este algoritmo foi desenvolvido por J. L. Arthur e A. Ravindran (17), sendo superior aos métodos de solução existentes no uso de memória e tempo de computação.

Baseia-se no fato que a definição dos fatores de prioridade implica que os objetivos de mais alta ordem devem ser tratados no processo de otimização, antes de considerar os de ordem inferior.

##### 4.3.1 - Procedimento de Particionamento

Dado o objetivo  $i$ , pode acontecer:

1. Se  $\delta_i^-$  está na F.C.

Neste caso, o particionamento atribui a restrição  $i$  ao fator de prioridade associado com  $\delta_i^-$ .

2. Se  $\delta_i^+$  está na F.C. é atribuída a restrição  $i$  ao fator de prioridade associado com  $\delta_i^+$ .

3. Ambos,  $\delta_i^-$  e  $\delta_i^+$  estão na F.C.

O particionamento, determina, para este caso, o

fato de prioridade de mais alta ordem, associado com  $\delta_i^-$  ou  $\delta_i^+$ , e atribui a restrição  $i$  a essa prioridade.

Dados  $C(k) =$  conjunto das restrições atribuídas ao fator  $P_k$ ,  
 $k = 1, \dots, p$

e  $k_i$  a prioridade atribuída às variáveis desviacionais na restrição  $i$ .

$$k_i^- = \begin{cases} k, & \text{se } \omega_{ik} > 0 \text{ é o peso relacionado com } P_k \\ \infty, & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

$$k_i^+ = \begin{cases} k & \text{se } \omega_{ik}^+ > 0 \text{ é o peso relacionado com } P_k \\ \infty, & \text{em outro caso.} \end{cases}$$

Dado  $k_i^* = \min(k_i^-, k_i^+)$ , a partição  $P$ , define-se por:

$$P : 1, \dots, m \rightarrow \bigcup_{k=1}^p C(k)$$

com  $P(i) = C(k_i^*)$

## P PARTIÇÃO

Hipótese

1)  $i \in \{1, \dots, m\} \rightarrow k/i \in k, i \in C(k)$

2)  $k \neq \ell \rightarrow C(k) \cap C(\ell) = \emptyset$

1) Para qualquer restrição  $i, \dots, m$ , ou  $\delta_i^-$ ,  $\delta_i^+$ , ou ambos devem estar na F.C.

$$\text{Se } k_i^- = \phi \text{ e } k_i^+ = \infty \rightarrow i \in C(k_i^-)$$

$$\text{Se } k_i^- = \infty \text{ e } k_i^+ = \phi \rightarrow i \in C(k_i^+)$$

$$\text{Se } k_i^- = \phi \text{ e } k_i^+ = \phi \rightarrow$$

$$\text{Se } k_i^- \leq k_i^+ \rightarrow i \in C(k_i^-)$$

$$\text{Se } k_i^+ \leq k_i^- \rightarrow i \in C(k_i^+)$$

Porque as prioridades menores são as mais altas na escala ordinal.

2) se  $k \neq l \rightarrow k < l$  ou  $l < k$

2.1 - Seja  $k < l$

$$\text{Se } i \in C(k) \cap C(l) \rightarrow$$

$$P(i) = \min(k, l) = k = l \leftrightarrow$$

2.2 - Seja  $l < k$

$$\text{Se } i \in C(k) \cap C(l) \rightarrow$$

$$P(i) = \min(l, k) = l = k \leftrightarrow$$



Forma-se assim, uma s\u00e9rie de problemas P.L.P.O. inclusivos,  $S_1 \subset S_2 \dots \subset S_k \dots \subset S_p$ .

$S_k$  \u00e9 o sub-problema que consiste das restri\u00e7\u00f5es atribu\u00eddas \u00e0s prioridades  $P_1, P_2, \dots, P_k$  e seus elementos correspondentes na F.O.

#### 4.3.2 - Procedimento de Elimina\u00e7\u00e3o

##### Teorema 4.1

Seja  $Z^*$  o valor \u00f3timo de um P.P.L., e seja  $\bar{c}_j > 0$  para  $x_j$  n\u00e3o b\u00e1sico.

Ent\u00e3o,  $x_j$  n\u00e3o pode entrar na base para formar uma solu\u00e7\u00e3o \u00f3tima alternativa.

##### Demonstra\u00e7\u00e3o

Seja a linha de custo na tabela \u00f3tima:

$$Z(x) = Z + \sum_{j \in N} \bar{c}_j x_j$$

Se  $\bar{c}_j > 0$ , ent\u00e3o, se incrementando  $x_j$ , se incrementar\u00e1  $Z(x)$ , at\u00e9  $Z^*$ . Ent\u00e3o introduzindo  $x_j$  na base, se destroi a otimalidade se  $c_j^* > 0$ .

### Corolário

Em um problema de P.L.P.O., se é achada a solução ótima  $S_k$ , então toda variável  $x_s$  não-básica, com pelo menos um custo positivo ( $c_{j_s}^* > 0$ , sendo  $c_{j_s}^*$  a mudança relativa na prioridade  $P_j$  por incremento unitário em  $x_s$ ), pode ser eliminada fazendo-a entrar na base em sub-problemas  $S_{k+1}, \dots, S_p$ .

### Demonstração

Do teorema (4.3.1) e dado que o algoritmo de particionamento otimiza  $S_1$ , busca-se soluções ótimas alternativas para  $S_1$ , que melhorem  $P_2$  em ordem a atingir  $S_2$  e assim por diante.

#### 4.3.3 - Algoritmo de Particionamento e Eliminação

1. Aplicar Fase I do Simplex sobre as restrições reais, isto é, restrições que não têm desvios.
2. Resolver o sub-problema  $S_1$ .
3. Caso não existam soluções ótimas alternativas, esta será a última solução ótima a calcular, não se otimizando as metas de prioridades mais baixas.
4. Substituem-se os valores das variáveis tecnológicas nas restrições atribuídas a  $P_2, P_3, \dots, P_p$  e se calcula seus n

veis de atingimento. FIM.

5. Se existirem soluções ótimas alternativas, o seguinte conjunto de restrições atribuído a prioridade 2 e seus elementos na F.O. são acrescentados a  $S_1$ .
6. Eliminam-se todas as colunas não-básicas com custo  $(C_{j_s}^*)$  positivo.
7. O algoritmo termina quando não existirem soluções alternativas em alguma tabela do sub-problema ótimo, ou quando todas as prioridades tenham sido incluídas e otimizadas.

#### Exemplo 4.1

Seja o modelo:

$$\text{Minimizar } Z = P_1(\delta_1^- + \delta_1^+) + P_2\delta_3^+ + P_3(\delta_2^- + \delta_2^+) + P_4\delta_4^+$$

s.a.:

$$2x_1 + 3x_2 + \delta_1^- - \delta_1^+ = 80$$

$$x_1 + x_2 + \delta_2^- - \delta_2^+ = 40$$

$$\delta_3^- + \delta_2^+ - \delta_3^+ = 10$$

$$4x_1 + 5x_2 + \delta_4^- - \delta_4^+ = 10$$

$$x_1, x_2, \delta_1^-, \delta_2^-, \delta_3^-, \delta_4^-, \delta_1^+, \delta_2^+, \delta_3^+, \delta_4^+ \geq 0$$

$$S_1: \text{minimizar } Z = P_1(\delta_1^- + \delta_1^+)$$

s.a.:

$$2x_1 + 3x_2 + \delta_1^- - \delta_1^+ = 80$$

$$x_1, x_2, \delta_1^-, \delta_1^+ \geq 0$$

$$S_2: \text{minimizar } Z = P_1(\delta_1^- + \delta_1^+) + P_2\delta_3^+$$

s.a.:

$$2x_1 + 3x_2 + \delta_1^- - \delta_1^+ = 80$$

$$x_1 + x_2 + \delta_3^- - \delta_3^+ = 50$$

$$x_1, x_2, \delta_1^-, \delta_3^-, \delta_3^+ \geq 0$$

$$S_3: \text{minimizar } Z = P_1(\delta_1^- + \delta_1^+) + P_2\delta_3^+ + P_3(\delta_2^- + \delta_2^+)$$

s.a.:

$$2x_1 + 3x_2 + \delta_1^- - \delta_1^+ = 80$$

$$x_1 + x_2 + \delta_2^- - \delta_2^+ = 40$$

$$x_1 + x_2 + \delta_3^- - \delta_3^+ = 50$$

$$x_1, x_2, \delta_1^-, \delta_2^-, \delta_3^-, \delta_1^+, \delta_2^+, \delta_3^+ \geq 0$$

### Solução

$P_1, P_2, P_3$ , são atingidos exatamente

$P_4$  tem um sub-atingimento de 150.

## CAPÍTULO V

### APLICAÇÕES DA PROGRAMAÇÃO LINEAR POR OBJETIVOS

A P.L.P.O. tem-se aplicado na resolução de problemas de alocação de recursos, em marketing para resolver problemas de alocação de vendas em problemas de planejamento da produção que incluem combinações de forças de trabalho, tempo, capacidade de produção etc., na administração bancária, na administração de seguros, na otimização do planejamento financeiro, na administração hospitalária.

Neste ítem apresentar-se-ão modelos propostos para algumas dessas áreas.

#### 5.1 - UM MODELO DE PROGRAMAÇÃO POR OBJETIVOS PARA ALOCAÇÃO DE RECURSOS ACADÊMICOS (S. Lee (14))

Este modelo foi proposto por Lee e Clayton, (14) para a alocação de recursos acadêmicos numa Universidade.

Trata-se de desenvolver um modelo de planejamento sistemático e dinâmico para a alocação eficiente dos recursos desse tipo de instituição, modelo este que deverá considerar um planejamento a longo prazo para o atingimento dos objetivos. Este planejamento a longo prazo pode ser estabelecido para as escolas, departamentos, currículos, etc. de uma Universidade. Aqui se apresentará o planejamento de uma escola de

uma Universidade, para 1 ano, podendo ser estendido para um horizonte maior.

### Variáveis

$x_1$  = número de auxiliares de pesquisa

$x_2$  = número de monitores

$x_3$  = número de auxiliares de ensino

$x_4$  = número de professores assistentes B

$x_5$  = número de professores adjuntos B

$x_6$  = número de professores titulares B em tempo integral

$x_7$  = número de professores titulares B em tempo parcial

$x_8$  = número de professores visitantes B

$x_9$  = número de funcionários da área administrativa

$y_1$  = número de professores assistentes A

$y_2$  = número de professores adjuntos A

$y_3$  = número de professores titulares A em tempo integral

$y_4$  = número de professores titulares A em tempo parcial

$y_5$  = número de professores visitantes A

$w$  = disponibilidade financeira para o atendimento dos aumentos salariais dos professores, monitores, auxiliares de pesquisa, auxiliares de ensino e pessoal administrativo.

### Constantes

$a_1$  = percentagem de pessoal docente em tempo integral

$a_2$  = percentagem do staff acadêmico do tipo A, nível de graduação

$a_3$  = percentagem do staff acadêmico do tipo A, a nível de pós-graduação

$a_4$  = número estimado de horas de crédito requeridas por ano pelos alunos da graduação

$a_5$  = número estimado de horas de crédito requeridas por ano pelos alunos da pós-graduação

$a_6$  = proporção desejada professores de graduação/alunos

$a_7$  = razão desejada professores de pós-graduação/alunos



$a_8$  = razão desejada professores/pessoal administrativo.

$a_9$  = razão desejada professores/auxiliares de pesquisa.

$b_i, b'_i; i = 1, 2, \dots, 13$ , são as cargas horárias máximas para cada tipo de professor.

$b_{14}$  = número estimado de alunos de graduação para este ano acadêmico

$b_{15}$  = número estimado de alunos de pós-graduação para este ano acadêmico

$b_{16}$  = percentagem desejada de aumento do salário para monitores e auxiliares de pesquisa

$b_{17}$  = percentagem desejada de aumento do salário para professores

$b_{18}$  = percentagem desejada de aumento do salário para o pessoal administrativo.

Na tabela (5.1) dão-se os valores de carga horária, razões desejadas de cada tipo de professor e salários médios.

VARIÁVEL	RAZÃO	CARGA HORÁRIA TOTAL		SALÁRIO
		GRADUAÇÃO	PÓS-GRADUAÇÃO	
$x_1$	$c_1$	$b_1$	$b_1'$	$s_1$
$x_2$	$c_2$	$b_2$	$b_2'$	$s_1$
$x_3$	$c_3$	$b_3$	$b_3'$	$s_2$
$x_4$	$c_4$	$b_4$	$b_4'$	$s_3$
$x_5$	$c_5$	$b_5$	$b_5'$	$s_4$
$x_6$	$c_6$	$b_6$	$b_6'$	$s_5$
$x_7$	$c_7$	$b_7$	$b_7'$	$s_6$
$x_8$	$c_8$	$b_8$	$b_8'$	$s_7$
$x_9$	-	-	-	$s_8$
$y_1$	$c_9$	$b_9$	$b_9'$	$s_3$
$y_2$	$c_{10}$	$b_{10}$	$b_{10}'$	$s_4$
$y_3$	$c_{11}$	$b_{11}$	$b_{11}'$	$s_5$
$y_4$	$c_{12}$	$b_{12}$	$b_{12}'$	$s_6$
$y_5$	$c_{13}$	$b_{13}$	$b_{13}'$	$s_7$

Tabela 5.1

### Restrições

#### 1. Serviço

1.1 - Percentagem de pessoal docente em tempo integral.

$$\frac{\sum_{i=3}^6 x_i + x_8 + \sum_{i=1}^3 y_i + y_5}{\sum_{i=2}^8 x_i + \sum_{i=1}^5 y_i} \geq a_i$$

1.2 - Assumir-se-á neste modelo que  $x_2$  a  $x_7$  e  $y_1$  a  $y_3$  são úteis para ensino na graduação e que  $x_8$  e  $y_4$  a  $y_5$  são

úteis para ensino na pós-graduação.

Expressar-se-ão as restrições das percentagens de professores para ensino na graduação e para ensino na pós-graduação por:

$$\sum_{i=1}^3 y_i / \left( \sum_{i=2}^7 x_i + \sum_{i=1}^3 y_i \right) \geq a_2$$

$$\sum_{i=1}^5 y_i / \left( x_8 + \sum_{i=1}^5 y_i \right) \geq a_3$$

1.3 - A restrição sobre o número máximo de horas-crédito de estudante por turma que um professor pode lecionar estará incorporada nas restrições para a seleção desejada de tamanhos de turmas e cargas horárias.

## 2. Número total de pessoal docente

Estará dado em função do número estimado de horas de crédito por estudante necessárias por turmas e em função da máxima carga horária desejada para o pessoal docente.

$$\sum_{i=2}^7 b_i x_i + \sum_{i=1}^5 b_{i+8} y_i \geq a_4$$

na graduação.

$$\sum_{i=2}^7 b'_i x_i + \sum_{i=1}^5 b'_{i+8} y_i \geq a_5$$

na pós-graduação.

Considerando a razão docentes/estudantes temos:

$$\left( \sum_{i=2}^7 x_i + \sum_{i=1}^3 y_i \right) / b_{14} \geq a_6$$

na graduação

$$(x_8 + \sum_{i=1}^5 y_i) / b_{15} \geq a_7$$

na pós-graduação.

### 3. Distribuição do Pessoal Docente

Assumir-se-á que se deseja minimizar o número de professores do tipo B e que se deseja maximizar o número de professores do tipo A.

$$C_i T \leq x_i \quad i = 2, 3, \dots, 8$$

$$C_{12} T \leq y_4$$

$$C_{13} T \leq y_5$$

$$C_i T \geq y_i \quad i = 1, 2, 3$$

$$\text{para } T = \sum_{i=2}^8 x_i + \sum_{i=1}^5 y_i$$

#### 4. Número de Pessoal Administrativo

Incorpora-se este objetivo mediante uma restrição que reflete a razão professores/pessoal administrativo.

$$\left( \sum_{i=2}^8 x_i + \sum_{i=1}^5 y_i \right) / x_9 \geq a_8$$

#### 5. Número de Auxiliares de Pesquisa Graduados

Esta restrição expressará a razão desejada professores/auxiliares de pesquisa.

$$\left( \sum_{i=3}^8 x_i + \sum_{i=1}^5 y_i \right) / x_9 \geq a_9$$

#### 6. Incremento do Salário

Esta restrição estabelece o incremento periódico de salário.

$$b_{16} \left( S_1 \sum_{i=1}^2 x_i \right) + b_{17} \left( S_2 x_3 + \sum_{i=3}^7 S_i x_{i+1} + \right. \\ \left. + \sum_{i=3}^7 S_i y_{i-2} + b_{18} (S_8 x_9) \right) \leq w$$

### 7. Orçamento Total

$$S_1 \sum_{i=1}^2 x_i + S_2 x_3 + \sum_{i=3}^7 S_i x_{i+1} + \sum_{i=3}^7 S_i Y_{i-2} + S_8 x_9 + w = p$$

### 8. Função Critério

Minimizarã os desvios dos objetivos estabelecidos pela escola.

#### Aplicação:

#### Prioridades

$P_1$  = Minimização do custo total

$P_2$  = Manter a razão desejada professores/auxiliares de pesquisa graduados

$P_3$  = Manter a razão desejada professores/pessoal administrativo

$P_4$  = Atingir uma distribuição desejável do pessoal docente com respeito ao grau

$P_5$  = Garantir um número adequado de professores para as razões desejadas professores/alunos.

$P_6$  = Assegurar incrementos adequados de salários para o pessoal acadêmico, auxiliares graduados e pessoal administrativo

$P_7$  = Garantir um número de 75% do pessoal docente em tempo integral, que pelo menos 40% dos professores na graduação seja do tipo A e que pelo menos 75% do pessoal acadêmico na pós-graduação seja do tipo A.

VARIÁVEL	CARGA HORÁRIA		RAZÃO DESEJADA		SALÁRIO
	GRADUAÇÃO	PÓS-GRADUAÇÃO	MÁXIMO	MÍNIMO	
$x_1$	0	0	-	-	30.000
$x_2$	6	0	7%	-	30.000
$x_3$	12	0	7	-	80.000
$x_4$	9	0	15	-	130.000
$x_5$	9	0	5	-	150.000
$x_6$	6	0	2	-	170.000
$x_7$	3	0	1	-	20.000
$x_8$	0	3	-	1 %	300.000
$x_9$	-	-	-	-	40.000
$y_1$	6	3	-	21	130.000
$y_2$	6	3	-	14	150.000
$y_3$	3	3	-	23	170.000
$y_4$	0	3	2	-	20.000
$y_5$	0	3	-	2	300.000

Tabela 5.2

Restrições1. Serviço

$$\sum_{i=3}^6 x_i + x_8 + \sum_{i=1}^3 y_i + y_5 - 0.75 \left( \sum_{i=1}^8 x_i + \sum_{i=1}^5 y_i \right) +$$

$$+ \delta_1^- - \delta_1^+ = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 y_i - 0.40 \left[ \sum_{i=2}^7 x_i + \sum_{i=1}^3 y_i \right] + \delta_2^- - \delta_2^+ = 0$$

$$\sum_{i=1}^5 y_i - 0.75 \left[ x_8 + \sum_{i=1}^6 y_i \right] + \delta_3^- - \delta_3^+ = 0$$

2. Quantidade de Pessoal Docente

Prognostica-se o número total de horas-crédito necessárias para os alunos.

Para os alunos da pós-graduação esse valor será de 1.820 e o número médio de horas-crédito por aluno da pós-graduação será 10; o tamanho desejado de cada turma será 20.

Calculam-se assim 910 horas-crédito-estudantes como:

(Projeção de matriculados)(Número de horas-crédito/aluno)/(Tamanho da turma)



$$6x_2 + 12x_9 + 9x_4 + 9x_5 + 6x_6 + 3x_7 + 6y_1 + 6y_2 + 3y_3 + \delta_4^- - \delta_4^+ = 910$$

Prognosticam-se 100 horas crédito por turma de estudantes na p $\bar{o}$ s-graduação.

$$3x_8 + 3y_1 + 3y_2 + 3y_3 + 3y_4 + 3y_5 + \delta_5^- - \delta_5^+ = 100$$

Considerar-se-á agora a razão professores/alunos na graduação e na p $\bar{o}$ s-graduação.

As razões professores/alunos na graduação e professores/alunos na p $\bar{o}$ s-graduação são respectivamente 1/20 e 1/10.

$$\sum_{i=2}^7 x_i + \sum_{i=1}^5 y_i + \delta_6^- - \delta_6^+ = (0.05) (1.820) = 91$$

na graduação

$$x_8 + \sum_{i=1}^5 y_i + \delta_7^- - \delta_7^+ = (0,10) (100) = 10$$

na p $\bar{o}$ s-graduação.

### 3. Distribuição de Pessoal Docente

$$0.07 T - x_2 + \delta_8^- - \delta_8^+ = 0$$

$$0.07 T - x_3 + \delta_9^- - \delta_9^+ = 0$$

$$0.15 T - x_4 + \delta_{10}^- - \delta_{10}^+ = 0$$

$$0.05 T - x_5 + \delta_{11}^- - \delta_{11}^+ = 0$$

$$0.02 T - x_6 + \delta_{12}^- - \delta_{12}^+ = 0$$

$$0.01 T - x_7 + \delta_{13}^- - \delta_{13}^+ = 0$$

$$0.01 T - x_8 + \delta_{14}^- - \delta_{14}^+ = 0$$

$$0.21 T - y_1 + \delta_{15}^- - \delta_{15}^+ = 0$$

$$0.14 T - y_2 + \delta_{16}^- - \delta_{16}^+ = 0$$

$$0.23 T - y_3 + \delta_{17}^- - \delta_{17}^+ = 0$$

$$0.02 T - y_4 + \delta_{18}^- - \delta_{18}^+ = 0$$

$$0.02 T - y_5 + \delta_{19}^- - \delta_{19}^+ = 0$$

$$\text{Para } T = \sum_{i=2}^8 x_i + \sum_{i=1}^5 y_i$$

#### 4. Quantidade de Pessoal Administrativo

Dã-se uma razão de 4 a 1 para professores/pessoal administrativo.

$$T - 4x_9 + \delta_{20}^- - \delta_{20}^+ = 0$$

#### 5. Quantidade de Auxiliares de Pesquisa Graduados

A razão desejada professores/auxiliares de pesquisa é de 5 a 1.

$$\sum_{i=3}^8 x_i + \sum_{i=1}^5 y_i - 5x_1 + \delta_{21}^- - \delta_{21}^+ = 0$$

#### 6. Custo do Pessoal Docente, Assistentes e Pessoal Administrativo

Incremento de salário: 6% para assistentes e pessoal administrativo e 8% para professores.

$$\begin{aligned} & 0.06 \left[ 30.000 \sum_{i=1}^2 x_i \right] + 0.08 (80.000x_3 + 130.000x_4 + 150.000x_5 + \\ & + 170.000x_6 + 20.000x_7 + 300.000x_8 + 130.000y_1 + 150.000y_2 + \\ & + 17.000y_3 + 20.000y_4 + 300.000y_5) + 0.06 (40.000x_9) - \omega + \\ & + \delta_{22}^- - \delta_{22}^+ = 0 \end{aligned}$$

### 7. Pagamento Total para a Escola

$$\begin{aligned}
 & 30.000x_1 + 30.000x_2 + 80.000x_3 + 130.000x_4 + 50.000x_5 + \\
 & + 170.000x_6 + 20.000x_7 + 300.000x_8 + 130000y_1 + 150.000y_2 + \\
 & + 170.000y_3 + 20.000y_4 + 300.000y_5 + 40.000x_9 + \delta_{23}^- - \delta_{23}^+ = 0
 \end{aligned}$$

### Função Critério

$$\begin{aligned}
 \text{Minimizar } Z = & P_7 \sum_{i=1}^3 \delta_i^- + P_6 \delta_{22}^- + 2P_5 \delta_5^- + 2P_5 \delta_7^- + P_5 \delta_4^- + \\
 & + P_5 \delta_6^- + P_4 \sum_{i=8}^{13} \delta_i^- + P_4 \delta_{18}^- + P_4 \sum_{i=14}^{17} \delta_i^+ + \\
 & + P_4 \delta_{19}^+ + P_3 \delta_{20}^+ + P_2 \delta_{21}^+ + P_1 \delta_{23}^+
 \end{aligned}$$

Usando o Programa Computacional em anexo, obteve-se a seguinte solução:

### Solução:

$$x_1 = 27.65686$$

$$x_2 = 10.408409$$

$$x_3 = 10.408491$$

$$x_4 = 22.30391$$

$$x_5 = 7.43463$$

$$x_6 = 0.0$$

$$x_7 = 0.0$$

$$x_8 = 1.48692$$

$$x_9 = 37.17320$$

$$y_1 = 37.38146$$

$$y_2 = 20.60881$$

$$y_3 = 34.19933$$

$$y_4 = 0.0$$

$$y_5 = 2.97385$$

$$w = 0.0$$

5.2 - MODELO DE P.L.P.O. PARA UMA AGÊNCIA DE SEGUROS (J. Gleason, (7))

Considere-se que uma agência de corretagem de seguros tenha estabelecido os seguintes objetivos como desejáveis para o prosseguimento de seus negócios. Um objetivo consiste em aumentar a quantia de prêmios subscritas pelas diversas Companhias de Seguros com as quais a Agência opera. Um outro objetivo é trabalhar com um maior número de companhias. Um outro objetivo é balancear seus negócios de modo a não ficar dependente, em demasia, de uma ou mais dessas companhias. Certas companhias oferecem bonificações caso a quantia em prêmios ultrapasse um dado valor; atingir tal valor, ou seja, obter tal bonificação, passa a ser um outro objetivo. Evidentemente maximizar o lucro é também um dos objetivos da Agência, embora não seja considerado o mais importante. Finalmente, a Agência tem também como objetivo trabalhar mais com coberturas comerciais que com pessoais.

Vamos supor que a Agência trabalhe com 31 classes de seguro e que deseje representar 10 Companhias de Seguro. Os objetivos e suas prioridades são listados a seguir.

Objetivos com prioridade 1

- Expandir os prêmios
- Expandir o número de Companhias de Seguro

Objetivos com prioridade 2

- Não ficar dependente demais com qualquer Companhia

Objetivos com prioridade 3

- Obter bonificações
- Maximizar o lucro

Objetivos com prioridade 4

- Mudar da linha pessoal para a linha comercial.

Na Tabela 5.1 é apresentada a taxa de comissão (em percentual), para os 31 tipos de seguros oferecidos pelas 10 Companhias. Também na Tabela 1, são apresentados os totais de prêmios para cada tipo, subscritos no ano passado, assim como o desejado aumento para este ano.



TIPOS DE SEGURO	COMPANHIAS DE SEGURO										AUMENTO PER- CENTUAL SO- BRE O ANO PASSADO	PRÊMIOS NO ANO PASSADO
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
	( 1 ) Fogo (C)	20	21	19	20	21	25	22.5	19	23		
( 2 ) Fogo (P)	20	21	19	20	21	25	22.5	19	23	17.5	1.0	100.000
( 3 ) Cobertura ex- tendida (C)	20	21	19	20	21	25	22.5	19	23	17.5	1.0	200.000
( 4 ) Cobertura ex- tendida (P)	20	20	19	20	21	18	20	21	23	25	20	40.000
( 5 ) A1 (C)	20	20	19	20	21	18	20	21	23	25	5	10.000
( 6 ) A2 (P)	20	20	19	20	21	18	20	21	23	25	5	10.000
( 7 ) Interrupção ne- gócios (C)	20	17	19	20	21	18	20	21	23	25	20	40.000
( 8 ) A3 (C)	20	17	19	20	21	18	20	21	23	25	5	15.000
( 9 ) A4 (C)	20	17	19	20	21	18	20	21	23	25	5	10.000
(10) Valor aluguel (C)	20	17	19	20	21	18	20	21	23	25	5	5.000
(11) A5 (C)	20	17	19	20	21	18	20	21	23	25	5	5.000
(12) A6 (C)	20	17	19	20	21	18	20	21	23	25	20	5.000

continua...

TIPOS DE SEGURO	COMPANHIAS DE SEGURO										AUMENTO PER- CENTUAL SO- BRE O ANO PASSADO	PRÊMIOS NO ANO PASSADO
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
	(13) Automóvel (P)	15	13	20	17	13	17.5	13	15	12.5		
(14) Automóvel (P)	20	17	25	19	13	17.5	13	20	12.5	20	20	160.000
(15) Automóvel (C)	20	17	25	19	13	17.5	13	20	12.5	20	20	138.000
(16) Automóvel (C)	20	17	25	19	13	17.5	13	20	12.5	20	20	95.000
(17) BB1 (P)	5	6	10	7	7.5	W/W	W/W	W/W	W/W	W/W	0	40.000
(18) BB2 (C)	15	12.5	18	16	13	15	19	13	17.5	12.5	10	90.000
(19) BB3 (P)	15	12.5	18	16	13	15	19	13	17.5	12.5	5	20.000
(20) BB4 (C)	15	12.5	18	16	13	15	19	13	17.5	12.5	10	45.000
(21) BB5 (C)	15	12.5	18	16	13	15	19	13	17.5	12.5	10	250.000
(22) BB6 (C)	12.5	16	15	13	10	16	20	17	19	15	0	5.000

continua...

TIPOS DE SEGURO	COMPANHIAS DE SEGURO										AUMENTO PER- CENTUAL SO- BRE O ANO PASSADO	PRÊMIOS NO ANO PASSADO
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		
(23) BB7 (C)	15	15	20	13	12	20	25	16.5	25	14	10	27.000
(24) BB8 (C)	15	15	20	13	12	20	25	16.5	25	14	20	22.000
(25) BB9 (C)	12.5	13	20	13	12	20	25	16.5	25	14	10	85.000
(26) Roubo A1 (P)	17	19	25	18	16	19	20	22	23	20	5	500.000
(27) Roubo A2 (P)	17	19	25	18	16	19	20	22	23	20	5	370.000
(28) Motocicleta (P)	W/W	W/W	W/W	W/W	W/W	W/W	W/W	W/W	W/W	5	0	6.000
(29) BB10 (C)	17.5	20	15	10	12	17.5	7.5	17.5	15	20	10	52.500
(30) BB11 (C)	12.5	15	15	10	12	15	7.5	17.5	15	20	10	31.500
(31) BB12 (C)	7.5	12.5	15	10	12	12.5	7.5	17.5	15	20	10	21.000

Tabela 5.1

Taxas de comissão, aumento de prêmios, prêmios subscritos ano passado.

Notas referentes à Tabela (5.1)

1. As Companhias numeradas de 1 a 6 foram as que trabalharam com a agência no ano passado. As Companhias numeradas de 7 a 10 são as novas Companhias.
2. W/W indica que a Companhia não trabalha com um dado tipo de seguro.
3. (C) indica comercial, (P) pessoal.

Restrições

1. Mudança da Linha Pessoal para Comercial

Considerar-se-á, um limite superior  $u$  para a percentagem do total de prêmios resultante da linha de seguros de pessoal, a fim de obter uma razão satisfatória comercial/pessoal.

$$\sum_j \sum_{i \in P} X_{i,j} \leq u \sum_j \sum_i X_{i,j}$$

onde:

$P$  = conjunto de tipos de seguro pessoal.

Supondo que a agência deseja uma razão comer-

cial/pessoal de 60 a 40, para os prêmios, a restrição para prêmios de seguros pessoais será:

$$\begin{aligned}
 & - 0.4 \sum_{i=1}^{10} X_{1,j} + 0.6 \sum_{j=1}^{10} X_{2,j} - 0.4 \sum_{j=1}^{10} X_{3,j} + 0.6 \sum_{j=1}^{10} X_{4,j} - \\
 & - 0.4 \sum_{j=1}^{10} \sum_{i=5}^{12} X_{i,j} + 0.6 \sum_{j=1}^{10} X_{13,j} + 0.6 \sum_{j=1}^{10} X_{14,j} - \\
 & - 0.4 \sum_{j=1}^{10} \sum_{i=15}^{16} X_{i,j} + 0.6 \sum_{j=1}^5 X_{17,j} - 0.4 \sum_{j=1}^{10} X_{18,j} + \\
 & + 0.6 \sum_{j=1}^{10} X_{19,j} - 0.4 \sum_{j=1}^{10} \sum_{i=20}^{25} X_{i,j} + 0.6 \sum_{j=1}^{10} X_{19,j} - \\
 & - 0.4 \sum_{j=1}^{10} \sum_{i=20}^{25} X_{i,j} + 0.6 \sum_{j=1}^{10} \sum_{i=26}^{27} X_{i,j} + 0.6 \sum_{j=9}^{10} X_{28,j} - \\
 & - 0.4 \sum_{j=1}^{10} \sum_{i=29}^{31} X_{i,j} + d_{54}^- - d_{54}^+ = 0
 \end{aligned}$$

## 2. Maximização da Renda Bruta

Estabelece-se um rendimento arbitrariamente alto

$H = 1.000.000,00.$

$$\sum_j \sum_i a_{ij} X_{ij} + \delta_{53}^- - \delta_{53}^+ = 1.000.000$$

### 3. Redução dos Custos de Serviços das Companhias de Seguros

Hã seguros que dão uma redução no custo de servi-  
ços se tem atingido um certo volume de prêmios.

Seja  $V_j$  o volume de prêmios requerido pelo segu-  
ro  $j$ .

$$\sum_i X_{i,j} \geq V_j$$

Assim, se o prêmio para o seguro 2 exceder os  
Cr\$ 200.000, o seguro dá serviços que reduzirão os custos em  
Cr\$ 2.000.

Então, a restrição que garante a redução do cus-  
to é:

$$\sum_{i=1}^{27} X_{i,2} + \sum_{i=29}^{31} X_{i,2} + \delta_{52}^- - \delta_{52}^+ = 200.000$$

### 4. Evitar Dependência das Companhias de Seguros

A fim de evitar esta dependência se tenta garan-  
tir que não se conceda mais de uma certa quantidade de prêmios  
para uma dada Companhia de Seguros. Considerar-se-ã  $C_j$  o limi-  
te superior para a Companhia  $j$ .

$$\sum_i X_{ij} \leq C_j$$

Suponha-se que a quantidade máxima de prêmios é de Cr\$ 450.000 para qualquer Companhia de Seguros.

Então para  $j = 1$ :

$$\sum_{i=1}^{27} X_{i,1} + \sum_{i=29}^{31} X_{i,1} + \delta_{42}^- + \delta_{42}^+ = 450.000$$

### 5. Expansão do número de Companhias de Seguros

Estabelece-se um limite mínimo de volume de prêmios para cada Companhia de Seguros.

$$\sum_i X_{i,j} \geq b_j$$

Suponha-se que se tem o objetivo de incrementar o número de Companhias de Seguros de 6 para 10. Para assegurar isso, a agência deverá alocar um volume máximo de prêmio para cada uma das 10 Companhias de Seguros. Além do mais os prêmios totais para todas as linhas de seguros para uma Companhia de Seguros deverá ser menor que algum mínimo estabelecido para essa Companhia.

Assim para a Companhia de Seguros 6 a restrição será:

$$\sum_{i=1}^{16} X_{i6} + \sum_{i=18}^{27} X_{i6} + \sum_{i=29}^{31} X_{i6} + \delta_{37}^- - \delta_{37}^+ = 75.000$$

## 6. Expansão dos Prêmios

Seja  $X_{ij}$  o valor dos prêmios para o tipo de seguro  $i$  oferecido pela Companhia  $j$ .

Seja  $a_i$  o múltiplo desejado dos prêmios  $T_i$  do ano anterior na classe  $i$ .

Supondo que a agência deseje um 20% de aumento em prêmios na classe  $i$ . Assim  $a_i = 1.2$ .

Assim para cada seguro da classe  $i$  haverá uma restrição do tipo:

$$\sum_j X_{ij} \geq a_i T_i$$

A restrição para a ampliação do seguro tipo 3 será:

$$\sum_{j=1}^{10} X_{1,j} + \delta_3^- - \delta_3^+ = 1.2 (200.000)$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{1,j} + \delta_3^- - \delta_3^+ = 240.000$$



7. O total de prêmios não poderá exceder a uma certa percentagem do total do ano anterior

$$\sum_j \sum_i X_{i,j} \leq SZ$$

Supondo que se estabeleça que o crescimento não possa exceder 20% dos prêmios do ano anterior. Ou seja os prêmios totais não poderão ser maiores que 120% do total de prêmios anterior, que foi de Cr\$ 3.048.000,00.

$$\sum_{j=i}^{10} \sum_{i=1}^{31} X_{i,j} + \delta_{55}^- - \delta_{55}^+ = 3.657.000$$

8. Garantir que os seguros de fogo e de cobertura estendida tenham incrementos proporcionais de prêmios

Seja:

F = volume de prêmios para fogo

E = volume de prêmios para cobertura estendida

$$\frac{\sum_{j=1}^{10} X_{f,j}}{F} = \frac{\sum_{j=1}^{10} X_{e,j}}{E}$$

$$E \sum_{j=1}^{10} X_{fj} - F \sum_{j=1}^{10} X_{ej} + \delta_{56}^- - \delta_{56}^+ = 0$$

Função Objetivo

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z = & 3P_1 \sum_{i=1}^{31} \delta_i^- + 3P_1 \sum_{i=55}^{57} \delta_i^+ + \\ & + 3P_1 \sum_{i=56}^{57} \delta_i^- + P_1 \sum_{i=32}^{41} \delta_i^- + P_2 \sum_{i=42}^{51} \delta_i^+ + \\ & + P_3 \sum_{i=52}^{53} \delta_i^- + P_4 \delta_{54}^+ \end{aligned}$$

onde  $\delta_1^-$  a  $\delta_{31}^-$ ,  $\delta_{55}^+$  a  $\delta_{57}^+$ ,  $\delta_{56}^-$  e  $\delta_{57}^-$ , tem prioridade 1 e peso diferencial 3, por considerar-se que são 3 vezes mais importantes e entre eles ao mesmo nível.

Modelo

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } Z = & 3P_1 \left( \sum_{i=1}^{31} \delta_i^- + \sum_{i=55}^{57} \delta_i^+ + \sum_{i=56}^{57} \delta_i^- \right) + \\ & + P_1 \sum_{i=32}^{41} \delta_i^- + P_2 \sum_{i=42}^{51} \delta_i^+ + P_3 \sum_{i=52}^{53} \delta_i^- + \\ & + P_4 \delta_{54}^+ \end{aligned}$$

Sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{10} X_{ij} + \delta_j^- - \delta_j^+ = 540.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{2j} + \delta_2^- - \delta_2^+ = 120.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{3j} \delta_3^- - \delta_3^+ = 240.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{4j} + \delta_4^- - \delta_4^+ = 48.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{5j} + \delta_5^- - \delta_5^+ = 12.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{6j} + \delta_6^- - \delta_6^+ = 12.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{7j} + \delta_7^- = -\delta_7^+ = 48.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{8j} + \delta_8^- - \delta_8^+ = 18.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{9j} + \delta_9^- - \delta_9^+ = 12.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{10,j} - \delta_{10}^- + \delta_{10}^+ = 6.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{11,j} + \delta_{11}^- - \delta_{11}^+ = 6.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{12,j} + \delta_{12}^- - \delta_{12}^+ = 6.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{13,j} + \delta_{13}^- - \delta_{13}^+ = 240.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{14,j} + \delta_{14}^- - \delta_{14}^+ = 192.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{15,j} + \delta_{15}^- - \delta_{15}^+ = 165.600$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{16,j} + \delta_{16}^- - \delta_{16}^+ = 114.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{17,j} + \delta_{17}^- - \delta_{17}^+ = 48.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{18,j} + \delta_{18}^- - \delta_{18}^+ = 108.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{19,j} + \delta_{19}^- - \delta_{19}^+ = 24.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{20,j} + \delta_{20}^- - \delta_{20}^+ = 54.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{21,j} + \delta_{21}^- - \delta_{21}^+ = 300.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{22,j} + \delta_{22}^- - \delta_{22}^+ = 6.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{23,j} + \delta_{23}^- - \delta_{23}^+ = 32.400$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{24,j} + \delta_{24}^- - \delta_{24}^+ = 26.400$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{25,j} + \delta_{25}^- - \delta_{25}^+ = 102.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{26,j} + \delta_{26}^- - \delta_{26}^+ = 600.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{27,j} + \delta_{27}^- - \delta_{27}^+ = 444.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{28,j} + \delta_{28}^- - \delta_{28}^+ = 7.200$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{29,j} + \delta_{29}^- - \delta_{29}^+ = 63.000$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{30,j} + \delta_{30}^- - \delta_{30}^+ = 37.800$$

$$\sum_{j=1}^{10} X_{31,j} + \delta_{31}^- - \delta_{31}^+ = 25.200$$

$$\sum_{i=1}^{27} X_{i,1} + \sum_{i=29}^{31} X_{i,1} + \delta_{32}^- - \delta_{32}^+ = 45.000$$

$$\sum_{i=1}^{27} X_{i,2} + \sum_{i=29}^{31} X_{i,2} + \delta_{33}^- - \delta_{33}^+ = 60.000$$

$$\sum_{i=1}^{27} X_{i,3} + \sum_{i=29}^{31} X_{i,3} + \delta_{34}^+ - \delta_{34}^+ = 60.000$$

$$\sum_{i=1}^{27} X_{i,4} + \sum_{i=29}^{31} X_{i,4} + \delta_{35}^- - \delta_{35}^+ = 55.000$$

$$\sum_{i=1}^{16} X_{i,5} + \sum_{i=18}^{27} X_{i,5} + \sum_{i=29}^{31} X_{i,5} + \delta_{36}^- - \delta_{36}^+ = 70.000$$

$$\sum_{i=1}^{16} X_{i,6} + \sum_{i=18}^{27} X_{i,6} + \sum_{i=29}^{31} X_{i,6} + \delta_{37}^- - \delta_{37}^+ = 75.000$$

$$\sum_{i=1}^{16} X_{i,7} + \sum_{i=18}^{27} X_{i,7} + \sum_{i=29}^{31} X_{i,7} + \delta_{38}^- - \delta_{38}^+ = 50.000$$

$$\sum_{i=1}^{16} X_{i,8} + \sum_{i=18}^{27} X_{i,8} + \sum_{i=29}^{31} X_{i,8} + \delta_{39}^- - \delta_{39}^+ = 80.000$$

$$\sum_{i=1}^{16} X_{i,9} + \sum_{i=18}^{31} X_{i,9} + \delta_{40}^- - \delta_{40}^+ = 50.000$$

$$\sum_{i=1}^{16} X_{i,10} + \sum_{i=18}^{31} X_{i,10} + \delta_{41}^- - \delta_{41}^+ = 40.000$$

$$\sum_{i=1}^{27} X_{i,1} + \sum_{i=29}^{31} X_{i,1} + \delta_{42}^+ - \delta_{42}^+ = 450.000$$

$$\sum_{i=1}^{27} X_{i,2} + \sum_{i=29}^{31} X_{i,2} + \delta_{43}^- - \delta_{43}^+ = 450.000$$

$$\sum_{i=1}^{27} X_{i,3} + \sum_{i=29}^{31} X_{i,3} + \delta_{44}^- - \delta_{44}^+ = 450.000$$

$$\sum_{i=1}^{27} X_{i,4} + \sum_{i=29}^{31} X_{i,4} + \delta_{45}^- - \delta_{45}^+ = 450.000$$

$$\sum_{i=1}^{27} X_{i,5} + \sum_{i=29}^{31} X_{i,5} + \delta_{46}^- - \delta_{46}^+ = 450.000$$

$$\sum_{i=1}^{16} X_{i,6} + \sum_{i=18}^{27} X_{i,6} + \sum_{i=29}^{31} X_{i,6} + \delta_{47}^- - \delta_{47}^+ = 450.000$$

$$\sum_{i=1}^{16} X_{i,7} + \sum_{i=18}^{27} X_{i,7} + \sum_{i=29}^{31} X_{i,7} + \delta_{48}^- - \delta_{48}^+ = 450.000$$

$$\sum_{i=1}^{10} X_{i,8} + \sum_{i=18}^{27} X_{i,8} + \sum_{i=29}^{31} X_{i,8} + \delta_{49}^- - \delta_{49}^+ = 450.000$$

$$\sum_{i=1}^{16} X_{i,9} + \sum_{i=18}^{31} X_{i,9} + \delta_{50}^- - \delta_{50}^+ = 450.000$$

$$\sum_{i=1}^{16} X_{i,10} + \sum_{i=18}^{31} X_{i,10} + \delta_{51}^- - \delta_{51}^+ = 450.000$$

$$\sum_{i=1}^{27} X_{i,2} + \sum_{i=29}^{31} X_{i,2} + \delta_{52}^- - \delta_{52}^+ = 200.000$$

$$\sum_j \sum_i a_{ij} X_{ij} + \delta_{53}^+ - \delta_{53}^- = 1000000$$

$$- 0.4 \sum_{j=1}^{10} X_{i,j} + 0.6 \sum_{j=1}^{10} X_{2,j} - 0.4 \sum_{j=1}^{10} X_{3,j} + 0.6 \sum_{j=1}^{10} X_{4,j} -$$

$$- 0.4 \sum_{j=1}^{10} \sum_{i=5}^{12} X_{1,j} + 0.6 \sum_{j=1}^{10} X_{13,j} + 0.6 \sum_{j=1}^{10} X_{14,j} -$$

$$- 0.4 \sum_{j=1}^{10} \sum_{i=5}^{16} X_{16,10} + 0.6 \sum_{j=1}^5 X_{17,j} - 0.4 \sum_{j=1}^{10} X_{18,j} +$$

$$+ 0.6 \sum_{j=1}^{10} X_{19,j} - 0.4 \sum_{j=1}^{10} \sum_{i=20}^{25} X_{i,j} + 0.6 \sum_{j=1}^{10} \sum_{i=26}^{27} X_{i,j}$$

$$+ 0.6 \sum_{j=1}^{10} X_{28,j} - 0.4 \sum_{j=1}^{10} \sum_{i=29}^{31} X_{i,j} + \delta_{54}^- - \delta_{54}^+ = 0$$

$$\sum_{j=1}^{10} \sum_{i=1}^{31} X_{i,j} + \delta_{55}^- - \delta_{55}^+ = 3.657.000$$

$$200.000 \sum_{j=1}^{10} X_{1,j} - 450.000 \sum_{j=1}^{10} X_{3j} + \delta_{56}^- - \delta_{56}^+ = 0$$

$$40.000 \sum_{j=1}^{10} X_{2j} - 1.000.000 \sum_{j=1}^{10} X_{4j} + \delta_{57}^- + \delta_{57}^+ = 0$$



SOLUÇÃO

$X_{14,1}$	=	45.000	$X_{5,10}$	=	10.500
$X_{3,2}$	=	240.000	$X_{6,10}$	=	10.500
$X_{29,2}$	=	57.750	$X_{7,10}$	=	48.000
$X_{14,3}$	=	147.000	$X_{8,10}$	=	15.750
$X_{15,3}$	=	165.600	$X_{9,10}$	=	10.500
$X_{16,3}$	=	114.000	$X_{10,10}$	=	217.400
$X_{27,3}$	=	23.400	$X_{11,10}$	=	5.250
$X_{13,4}$	=	240.000	$X_{12,10}$	=	6.000
$X_{21,4}$	=	124.850	$X_{26,10}$	=	14.350
$X_{1,5}$	=	210.000	$X_{28,10}$	=	6.000
$X_{17,5}$	=	40.000	$X_{30,10}$	=	34.650
$X_{1,6}$	=	330.000	$X_{31,10}$	=	23.100
$X_{2,6}$	=	120.000			
$X_{18,7}$	=	99.000			
$X_{19,7}$	=	21.000			
$X_{20,7}$	=	49.500			
$X_{21,7}$	=	150.150			
$X_{22,7}$	=	5.000			
$X_{23,7}$	=	5.450			
$X_{24,7}$	=	26.400			
$X_{25,7}$	=	93.500			
$X_{26,8}$	=	85.900			
$X_{27,8}$	=	365.100			
$X_{23,9}$	=	24.250			
$X_{26,9}$	=	425.750			
$X_{4,10}$	=	48.000			

CAPÍTULO VICONCLUSÕES

A P.L.P.O. é a extensão da P.L. que supera as limitações que esta possui.

Os problemas de decisão, incluem sempre vários objetivos, e a tomada de uma decisão afetará em maior ou menor intensidade todos os objetivos conflitantes.

A P.L.P.O. resolve o problema de decisão com vários objetivos, compatibilizando-os, segundo uma hierarquia, em cuja ordem se tentará atingi-los.

A importância da P.L.P.O., resume-se assim, na solução de problemas que compreendem objetivos relevantes e incompatíveis, conjugando-os num modelo, que permite o tratamento de variáveis de diferentes unidades de medida na F.O., isto é, é possível tratar com uma F.O. não homogênea.

Pelas facilidades que oferece para a solução de problemas com objetivos múltiplos, a P.L.P.O., vem sendo aplicada em diversas áreas, como na resolução de problemas de alocação de recursos, em problemas de planejamento, problemas de sequenciação, problemas de análise de políticas e outras.

APÊNDICE

Programa computacional e solução do problema 5.1.

(C O S O 8 0 0 5) E S T H E R O N P A C K

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA



	SUBROUTINE INIC(NLINH, NVAR, NPRT, C, VALX, VALY, RHS, RHS1, KPCK, KEPT, TES 17)	00001000	C	002:0000:0
C	-----	00002000	C	002:0000:0
C	-----SUBROTINA INIC E FEITA PARA TOMAR INFORMACAO EM UM FORMATO	00003000	C	002:0000:0
C	-----ESPECIFICAO E TRANSFORMA-LA EM UMA SERIE DE MATRIZES	00004000	C	002:0000:0
C	-----	00005000	C	002:0000:0
	REAL IGUAL	00006000	C	002:0000:0
	DIMENSION RHS(70)	00007000	C	002:0000:0
	DIMENSION VALY(70,20)	00008000	C	002:0000:0
	DIMENSION C(70,500), VALX(20,500), IGUAL(70), RVLX(20,500)	00009000	C	002:0000:0
	DIMENSION KEPT(70), RHS1(70)	00010000	C	002:0000:0
	REAL NEG, L	00011000	C	002:0000:0
	NV=500	00012000	C	002:0000:0
	NR=70	00013000	C	002:0000:0
	DATA POS, NEG/'POS ', 'NEG '/	00014000	C	002:0001:0
	DATA DATA/'DATA'/	00015000	C	002:0001:5
	DATA OBJ/'OBJ'/	00016000	C	002:0001:5
	DATA PROB/'PROB'/	00017000	C	002:0001:5
	DATA B/'B'/	00018000	C	002:0001:5
	DATA I, G, L/'I', 'G', 'L'/	00019000	C	002:0001:5
	DATA RGHT/'RGHT'/	00020000	C	002:0001:5
	TEST=0.	00021000	C	002:0001:5
C	-----	00022000	C	002:0001:5
C	-----LEITURA DO NUMERO DE LINHAS E VARIAVEIS	00023000	C	002:0002:3
C	-----	00024000	C	002:0002:3
10	READ(5,1) ANOME, NLINH, NVAR, NPRT	00025000	C	002:0002:3
1	FORMAT(A4,3I3)	00026000	C	002:0002:3
	LISP=NPRT+1	00027000	C	002:000F:2
	IF(NVAR.LE.0) GO TO 1020	00028000	C	002:000F:2
	IF(NPRT.LE.0) GO TO 1020	00029000	C	002:0010:4
	IF(NLINH.LE.0) GO TO 1020	00030000	C	002:0011:5
	IF(ANOME.NE.PROB) GO TO 901	00031000	C	002:0013:0
C	-----	00032000	C	002:0014:1
C	-----LENDO O CARTAO DE SINAIS	00033000	C	002:0015:3
C	-----CONTERA UMA DAS SEGUINTEIS LETRAS PARA CADA LINHA	00034000	C	002:0015:3
C	-----PARA IGUALDADE I	00035000	C	002:0015:3
C	-----PARA MENOR OU IGUAL A L	00036000	C	002:0015:3
C	-----PARA MAIOR OU IGUAL A G	00037000	C	002:0015:3
C	-----PARA AMBOS OS DESVIOS B	00038000	C	002:0015:3
C	-----	00039000	C	002:0015:3
11	READ(5,11)(IGUAL(L), L=1, NLINH)	00040000	C	002:0015:3
	FORMAT(80A1)	00041000	C	002:0015:3
	NART=0	00042000	C	002:0022:2
C	-----	00043000	C	002:0022:2
C	-----CONTANDO O NUMERO DE VARIAVEIS DE FOLGA POSITIVAS	00044000	C	002:0023:0
C	-----	00045000	C	002:0023:0
	NFPOS=0	00046000	C	002:0023:0
	DO 12 I=1, NLINH	00047000	C	002:0023:0
	IF(IGUAL(I).EQ.B) NFPOS=NFPOS+1	00048000	C	002:0023:4
12	IF(IGUAL(I).EQ.G) NFPOS=NFPOS+1	00049000	C	002:0025:0
C	-----	00050000	C	002:0028:2
C	-----TEST PARA O TAMANHO	00051000	C	002:0020:5
C	-----	00052000	C	002:0020:5
	NTAM=NFPOS+NLINH+NVAR	00053000	C	002:0020:5
	IF(NLINH.GT.NR) GO TO 911	00054000	C	002:0020:5
	IF(NTAM.GT.NV) GO TO 911	00055000	C	002:002F:5
C	-----	00056000	C	002:0031:1
C	-----ZERANDO TODAS AS MATRIZES	00057000	C	002:0032:3
C	-----	00058000	C	002:0032:3
	KDUD=NPRT+1	00059000	C	002:0032:3
	DO 16 J=1, NTAM	00060000	C	002:0032:3
	DO 16 I=1, NLINH	00061000	C	002:0033:5
	KEPT(I)=0	00062000	C	002:0035:0
	IF(I.GT.KDUD) GO TO 17	00063000	C	002:0036:0
	K=I	00064000	C	002:0038:0
	RVLX(K, J)=0.	00065000	C	002:0039:2
	VALX(K, J)=0.0	00066000	C	002:003A:1
17	IF(I.EQ. J) C(I, J)=1.	00067000	C	002:003C:5
	VALY(I, K)=0.	00068000	C	002:0040:0
	IF(I.NE. J) C(I, J)=0.	00069000	C	002:0044:3
16	CONTINUE	00070000	C	002:0047:4
	KPCK=0	00071000	C	002:004C:1
	K=KDUD	00072000	C	002:0050:3
C	-----	00073000	C	002:0051:1
C	-----AJUSTANDO AS VARIAVEIS DE FOLGA E A FUNCAO OBJETIVO PARA CUMPRIR	00074000	C	002:0052:0
C	-----OS REQUERIMENTOS DE SINAL	00075000	C	002:0052:0
C	-----	00076000	C	002:0052:0
	DO 13 I=1, NLINH	00077000	C	002:0052:0
	IF(IGUAL(I).EQ.I) GO TO 14	00078000	C	002:0052:0
	IF(IGUAL(I).EQ.G) GO TO 15	00079000	C	002:0053:0
	IF(IGUAL(I).EQ.L) GO TO 13	00080000	C	002:0055:0
		00081000	C	002:0057:0

14	J=I VALX(K,J)=1.0 NARI=NARI+1 TEST=1. GO TO 13	00082000 C 002:0059:0 00083000 C 002:0058:0 00084000 C 002:0058:3 00085000 C 002:005C:2 00086000 C 002:005F:1 00087000 C 002:0060:3
15	KPCK=KPCK+1 J=NLINH+KPCK C(I,J)=-1. KEPT(I)=J J=I VALX(K,J)=1. NARI=NARI+1 TEST=1. GO TO 13	00088000 C 002:0061:1 00089000 C 002:0061:4 00090000 C 002:0063:0 00091000 C 002:0064:3 00092000 C 002:0067:3 00093000 C 002:0069:4 00094000 C 002:006A:3 00095000 C 002:0060:2 00096000 C 002:006E:4 00097000 C 002:006F:2
18	KPCK=KPCK+1 J=KPCK+NLINH C(I,J)=-1. KEPT(I)=J	00098000 C 002:006F:5 00099000 C 002:0071:1 00100000 C 002:0072:2 00101000 C 002:0075:2 00102000 C 002:0077:3
13	CONTINUE	00103000 C 002:0079:4
C	-----LENDO A FUNCAO OBJETIVO	00104000 C 002:0079:4
C	-----	00105000 C 002:0079:4
21	READ(5,21)ANOME FORMAT(A4,2I5,F16.0)	00106000 C 002:0079:4 00107000 C 002:0081:2
19	I=0 IF(ANOME.NE.OBJ)GO TO 920 IF(ANOME.EQ.OBJ)GO TO 20 READ(5,21)ANOME,I,M,TEMP	00108000 C 002:0081:2 00109000 C 002:0082:0 00110000 C 002:0083:2 00111000 C 002:0084:4
20	IF(ANOME.EQ.DATA)GO TO 30 IF(M.LE.0)GO TO 1022 K=LISP-M IF(J.LE.0)GO TO 1022 IF(K.GT.NPRT)GO TO 1024 IF(ANOME.EQ.NEG)GO TO 26 IF(ANOME.EQ.POS)GO TO 25 GO TO 27	00112000 C 002:0092:2 00113000 C 002:0093:4 00114000 C 002:0094:5 00115000 C 002:0096:2 00116000 C 002:0097:3 00117000 C 002:0098:5 00118000 C 002:009A:1 00119000 C 002:0098:3
26	J=I VALX(K,J)=TEMP GO TO 20	00120000 C 002:009C:0 00121000 C 002:009C:5 00122000 C 002:009F:5
25	J=KEPT(I) IF(KEPT(I).EQ.0)GO TO 1026 VALX(K,J)=TEMP GO TO 20	00123000 C 002:00A0:2 00124000 C 002:00A2:2 00125000 C 002:00A4:4 00126000 C 002:00A8:0
27	IF(TEMP)926,20,926	00127000 C 002:00A8:3
C	-----LENDO A MATRIZ DE DADOS	00128000 C 002:00AA:1
30	READ(5,21)ANOME,I,J,TEMP	00129000 C 002:00AA:1 00130000 C 002:00AA:1 00131000 C 002:00B7:2
C	-----	00132000 C 002:00B7:2 00133000 C 002:00B8:4 00134000 C 002:00B9:5 00135000 C 002:00BB:0
40	IF(ANOME.EQ.RGT)GO TO 40 IF(I.LE.0)GO TO 1090 IF(J.EQ.0)GO TO 1090 J=KPCK+NLINH+J C(I,J)=TEMP GO TO 30	00136000 C 002:00BD:0 00137000 C 002:00C0:0 00138000 C 002:00C0:3 00139000 C 002:00C0:3
C	-----LENDO O LADO DIREITO	00140000 C 002:00C0:3
40	READ(5,44)(RHS(I),I=1,NLINH)	00141000 C 002:00C0:3
44	FORMAT(7F10.0)	00142000 C 002:00CE:2 00143000 C 002:00CE:2
C	-----ESCREVENDO OS RESULTADOS ACIMA	00144000 C 002:00CE:2 00145000 C 002:00CE:2 00146000 C 002:00CE:2 00147000 C 002:00D2:2
5015	WRITE(6,5015) FORMAT(55X,'LADO DIREITO = ENTRADA ',33X,' PAGINA 01')	00148000 C 002:00D2:2 00149000 C 002:00D3:0 00150000 C 002:00D7:0 00151000 C 002:00DA:1
42	DO 41 I=1,NLINH IF(RHS(I))941,42,43 RHS(I)=0.00001	00152000 C 002:00D0:3 00153000 C 002:00E7:2 00154000 C 002:00E7:2 00155000 C 002:00E9:3
43	RHS1(I)=RHS(I) WRITE(6,1111)I,RHS(I)	00156000 C 002:00ED:2 00157000 C 002:00ED:2 00158000 C 002:00F1:2 00159000 C 002:00F1:2
1111	FORMAT(10X,I3,2X,F25.5)	00160000 C 002:00F2:0 00161000 C 002:00F8:2 00162000 C 002:00F8:2 00163000 C 002:0108:3
41	CONTINUE WRITE(6,6200)	00164000 C 002:0108:3 00165000 C 002:010C:2 00166000 C 002:0110:2 00167000 C 002:0110:2
6200	FORMAT(1H1)	00168000 C 002:0111:0 00169000 C 002:0112:3
5016	WRITE(6,5016) FORMAT(55X,'AS RAZOES DE SUBSTITUICAO - ENTRADA ',18X,' PAGINA 02')	00160000 C 002:00D2:0 00161000 C 002:00F8:2 00162000 C 002:00F8:2 00163000 C 002:0108:3 00164000 C 002:0108:3 00165000 C 002:010C:2 00166000 C 002:0110:2 00167000 C 002:0110:2 00168000 C 002:0111:0 00169000 C 002:0112:3
2519	FORMAT(1X,'LINHA',I5)	00160000 C 002:00D2:0 00161000 C 002:00F8:2 00162000 C 002:00F8:2 00163000 C 002:0108:3 00164000 C 002:0108:3 00165000 C 002:010C:2 00166000 C 002:0110:2 00167000 C 002:0110:2 00168000 C 002:0111:0 00169000 C 002:0112:3
1112	WRITE(6,1113)(C(I,J),J=1,NTAM)	00160000 C 002:00D2:0 00161000 C 002:00F8:2 00162000 C 002:00F8:2 00163000 C 002:0108:3 00164000 C 002:0108:3 00165000 C 002:010C:2 00166000 C 002:0110:2 00167000 C 002:0110:2 00168000 C 002:0111:0 00169000 C 002:0112:3
1113	FORMAT(10F13.4)	00160000 C 002:00D2:0 00161000 C 002:00F8:2 00162000 C 002:00F8:2 00163000 C 002:0108:3 00164000 C 002:0108:3 00165000 C 002:010C:2 00166000 C 002:0110:2 00167000 C 002:0110:2 00168000 C 002:0111:0 00169000 C 002:0112:3
5017	WRITE(6,6200) WRITE(6,5017) FORMAT(55X,'A FUNCAO OBJETIVO - ENTRADA ',19X,' PAGINA 03')	00160000 C 002:00D2:0 00161000 C 002:00F8:2 00162000 C 002:00F8:2 00163000 C 002:0108:3 00164000 C 002:0108:3 00165000 C 002:010C:2 00166000 C 002:0110:2 00167000 C 002:0110:2 00168000 C 002:0111:0 00169000 C 002:0112:3
	DO 1114 K=1,NPRT M=LISP-K WRITE(6,2150)M	00160000 C 002:00D2:0 00161000 C 002:00F8:2 00162000 C 002:00F8:2 00163000 C 002:0108:3 00164000 C 002:0108:3 00165000 C 002:010C:2 00166000 C 002:0110:2 00167000 C 002:0110:2 00168000 C 002:0111:0 00169000 C 002:0112:3

Line	Code	Description	Address	Mode	Time
2155		FORMAT( 'PRIORIDADE', 15)	00170000	C	002:0119:2
1114		WRITE(6,1113)(VALX(K,J),J=1,NTAM)	00171000	C	002:0119:2
		WRITE(6,8200)	00172000	C	002:0129:3
		WRITE(6,5018)	00173000	C	002:0120:2
5018		FORMAT(55X,'RESUMO DA INFORMACAO DE ENTRADA',19X,'PAGINA 04')	00174000	C	002:0131:2
		NVAR=NTAM	00175000	C	002:0131:2
		WRITE(6,2017)NLINH,NVAR,NPRT,NART	00176000	C	002:0132:1
2017		FORMAT(10X,'NUMERO DE LINHAS.....',15,/,10X,'NUMERO DE VARIAVEI	00177000	C	002:0130:2
		1S.....',15,/,10X,'NUMERO DE PRIORIDADES.....',15,/,10X,'ADICA	00178000	C	002:0130:2
		20 DE PRIORIDADES.....',15)	00179000	C	002:0130:2
		IF(NART.GT.0)NPRT=NPRT+1	00180000	C	002:0130:2
		RETURN	00181000	C	002:013F:5
910		WRITE(6,914)	00182000	C	002:0140:2
914		FORMAT('PROGRAMA QUE CONTEM UM ERRO NO NUMERO DE LINHAS PERFURADO	00183000	C	002:0144:2
		1 OU NO CARTAO DE SINAIS O VALOR E DIFERENTE DE	00184000	C	002:0144:2
		2 I, G, OU L')	00185000	C	002:0144:2
		GO TO 999	00186000	C	002:0144:2
1090		WRITE(6,1091)	00187000	C	002:0144:5
1091		FORMAT('DEFINICAO IMPROPRIA DOS DADOS DAS COLUNAS OU DAS LINHAS')	00188000	C	002:0149:2
		GO TO 999	00189000	C	002:0149:2
920		WRITE(6,921)	00190000	C	002:0149:5
921		FORMAT('UM CARTAO OBJETIVO COM O VALOR ',F25.3,')	00191000	C	002:014E:2
		1FOI ACHADO, MAS AS INSTRUCOES PARA O DESVIO TEM QUE SER	00192000	C	002:014E:2
		2IGNORADAS	00193000	C	002:014E:2
		3EXAMINE SEUS DADOS')	00194000	C	002:014E:2
		GO TO 999	00195000	C	002:014E:2
1020		WRITE(6,1021)	00196000	C	002:014E:5
1021		FORMAT(' NUMERO DE LINHAS, VARIAVEIS, OU PRIORIDADES NAO PODEM	00197000	C	002:0152:2
		1 SER IGUAIS A ZERO SOB QUALQUER CIRCUNSTANCIA')	00198000	C	002:0152:2
		GO TO 999	00199000	C	002:0152:2
1022		WRITE(6,1023)	00200000	C	002:0152:5
1023		FORMAT(' O VALOR DA COLUNA OU DA PRIORIDADE E MENOR OU IGUAL A	00201000	C	002:0157:2
		1 ZERO')	00202000	C	002:0157:2
		GO TO 999	00203000	C	002:0157:2
911		WRITE(6,912)	00204000	C	002:0157:5
912		FORMAT(' O NUMERO DE VARIAVEIS QUE SE PRECISA PARA CALCULAR ESTE	00205000	C	002:015C:2
		2 PROGRAMA E MUITO GRANDE PARA AS PRESENTES DIMENSÕES, '/*VEJA SEU	00206000	C	002:015C:2
		2 PROGRAMA PARA ALTERAR ESTA RESTRICAO SEGUNDO SUAS NECESSIDADES')	00207000	C	002:015C:2
		GO TO 999	00208000	C	002:015C:2
1026		WRITE(6,1027)	00209000	C	002:015C:5
1027		FORMAT(10X,'TENTA-SE MINIMIZAR DESVIOS POSITIVOS QUE	00210000	C	002:0161:2
		1NAO EXISTEM.')	00211000	C	002:0161:2
		GO TO 999	00212000	C	002:0161:2
1024		WRITE(6,1025)	00213000	C	002:0161:5
1025		FORMAT(' A PRIORIDADE DA FUNCAO OBJETIVO EXCEDE O NUMERO ESTABE	00214000	C	002:0166:2
		1LECIO DE PRIORIDADES')	00215000	C	002:0166:2
		GO TO 999	00216000	C	002:0166:2
901		WRITE(6,902)	00217000	C	002:0166:5
902		FORMAT(' FALTA CARTAO DO PROBLEMA OU ESTA MAL PERFURADO')	00218000	C	002:0168:2
		GO TO 999	00219000	C	002:0168:2
926		WRITE(6,927)	00220000	C	002:0168:5
927		FORMAT(' UM CARTAO NA SECAO OBJETIVO DEFINE ALGUM VALOR PARA A	00221000	C	002:0170:2
		1FUNCAO OBJETIVO'/* NA QUAL FALTA DEFINIR SE ESTE FOI APLICAD A DES	00222000	C	002:0170:2
		2VIO POSITIVO OU NEGATIVO')	00223000	C	002:0170:2
		GO TO 999	00224000	C	002:0170:2
941		WRITE(6,942)	00225000	C	002:0170:5
942		FORMAT(' NAO SAO PERMITIDOS VALORES NEGATIVOS NO LADO DIREITO. '/*	00226000	C	002:0175:2
		1 CORRIJA O PROBLEMA MULTIPLICANDO TODA A RESTRICAO POR MENOS 1.')	00227000	C	002:0175:2
		GO TO 999	00228000	C	002:0175:2
999		RETURN	00229000	C	002:0175:5
		END	00230000	C	002:0176:2

(3)	SUBROUTINE FINAL(RHS1,RHS,VALY,NPRT,KPCK,Y,NLINH,KEPT,TEST) DIMENSION VALY(70,20),ZVAL(20),RHS(70),KEPT(70),Y(70),RHS1(70)	00231000	C	007:0000:0
C	-----	00232000	C	007:0000:0
C	-----RHS1 E O VETOR RESERVADO DOS VALORES RHS DESDE O RHS INICIAL AO	00233000	C	007:0000:0
C	-----RHS FINAL SAO OS SUBINDICES DOS UNS DO COMEÇO E OS RESULTADOS SAO	00234000	C	007:0000:0
C	-----ALOCADOS NA COLUNA DE FOLHA APROPRIADA	00235000	C	007:0000:0
C	-----OS VALORES RESTANTES SAO IMPRESSOS NA PAGINA DOIS DOS RESULTADOS	00236000	C	007:0000:0
C	-----	00237000	C	007:0000:0
C	-----ANALISE DE FOLGAS	00238000	C	007:0000:0
C	-----	00239000	C	007:0000:0
21	WRITE(6,21) FORMAT(1H1,120X,'PAGINA 06',//,50X,'ANALISE DE FOLGAS')	00240000	C	007:0000:0
1	WRITE(6,1) FORMAT(7777)	00241000	C	007:0000:0
8	WRITE(6,8) FORMAT(10X,'LINHA',14X,'DISPONIVEL',9X,'FOLGA-POS',12X,'FOLGA NEG' 1)	00242000	C	007:0000:0
	WRITE(6,1)	00243000	C	007:0000:0
	DO 19 I=1,NLINH	00244000	C	007:0004:2
	FNEG=0.0	00245000	C	007:0004:2
	FPOS=0.0	00246000	C	007:0008:2
	DO 11 J=1,NLINH	00247000	C	007:0008:2
	M=Y(J)	00248000	C	007:000C:2
9	IF(I-M)9,10,9	00249000	C	007:000C:2
11	IF(M-KEPT(I))11,12,11	00250000	C	007:000C:2
	CONTINUE	00251000	C	007:0010:2
10	GO TO 13	00252000	C	007:0011:0
	FNEG=RHS(J)	00253000	C	007:0011:4
	GO TO 13	00254000	C	007:0012:2
12	FPOS=RHS(J)	00255000	C	007:0013:0
13	WRITE(6,14)I,RHS(I),FPOS,FNEG	00256000	C	007:0015:1
14	FORMAT(10X,I3,3F25.5)	00257000	C	007:0016:3
19	CONTINUE	00258000	C	007:0019:0
43	FORMAT(10X,I3,3X,F25.5)	00259000	C	007:001B:1
C	-----	00260000	C	007:001B:4
C	-----VALORES DAS VARIÁVEIS	00261000	C	007:001D:4
C	-----	00262000	C	007:001E:1
	WRITE(6,44)	00263000	C	007:0020:1
44	FORMAT(1H1,120X,'PAGINA 07',//,50X,'ANALISE DE VARIÁVEIS')	00264000	C	007:002C:2
	WRITE(6,45)	00265000	C	007:002C:2
45	FORMAT(7777,7X,'VARIÁVEL VALOR',//)	00266000	C	007:002E:3
	DO 41 I=1,NLINH	00267000	C	007:002E:3
	NCHCK=Y(I)-KPCK-NLINH	00268000	C	007:002E:3
	IF(NCHCK)41,41,42	00269000	C	007:002E:3
42	WRITE(6,43)NCHCK,RHS(I)	00270000	C	007:002E:3
41	CONTINUE	00271000	C	007:0032:2
72	WRITE(6,72)	00272000	C	007:0032:2
	FORMAT(1H1)	00273000	C	007:0036:2
	WRITE(6,50)	00274000	C	007:0036:2
50	FORMAT(77,56X,'ANALISE DA FUNCAO OBJETIVO',23X,'PAGINA 08',7777,50 1X,'PRIORIDADE',10X,'SUB-ATINGIMENTO',//)	00275000	C	007:0037:0
	DO 52 K=1,NPRT	00276000	C	007:003A:1
	ZVAL(K)=0.0	00277000	C	007:003B:0
	DO 51 I=1,NLINH	00278000	C	007:0044:2
51	ZVAL(K)=ZVAL(K)+VALY(I,K)*RHS(I)	00279000	C	007:0046:3
	LISP=NPRT+1	00280000	C	007:004A:2
	KK=LISP-K	00281000	C	007:004A:2
	IF(TEST.EQ.0.0)GO TO 52	00282000	C	007:004E:2
	KK=NPRT-K	00283000	C	007:004E:2
	IF(KK.GT.0) GO TO 52	00284000	C	007:004E:2
	WRITE(6,78) ZVAL(K)	00285000	C	007:004F:0
78	FORMAT(7,45X,'ARTIFICIAL',5X,F25.5)	00286000	C	007:0050:3
	GO TO 77	00287000	C	007:0052:0
52	WRITE(6,53)KK,ZVAL(K)	00288000	C	007:005A:2
53	FORMAT(1H0,52X,I2,5X,F25.5)	00289000	C	007:005B:4
77	CONTINUE	00290000	C	007:005C:5
	RETURN	00291000	C	007:005E:0
	END	00292000	C	007:005F:3
		00293000	C	007:0060:2
		00294000	C	007:0067:2
		00295000	C	007:0067:2
		00296000	C	007:0067:5
		00297000	C	007:0072:3
		00298000	C	007:0072:3
		00299000	C	007:0072:3
		00300000	C	007:0073:0

(A)		00301000	C	008:0000:0
C	-----	00302000	C	008:0000:0
C	PROGRAMA PRINCIPAL	00303000	C	008:0000:0
C	-----	00304000	C	008:0000:0
	DIMENSION KEPT(70),RHS1(70),VALY(70,20),Y(70),PRDT(70)	00305000	C	008:0000:0
	DIMENSION AMT(70),ZVAL(20),C(70,500),DOB(70),DUD(500)	00306000	C	008:0000:0
	DIMENSION VALX(20,500),X(500),RVLX(20,500),D(70,500)	00307000	C	008:0000:0
	CALL INIC(N,M,L,C,VALX,VALY,PRDT,RHS1,KPCK,KEPT,TEST)	00308000	C	008:0000:0
21	DO 21 J=1,M	00309000	C	008:0007:1
	X(J)=J	00310000	C	008:0008:0
	DO 20 I=1,N	00311000	C	008:0008:5
20	Y(I)=I	00312000	C	008:0000:0
15	FORMAT(IX,F12.2)	00313000	C	008:0010:5
12	FORMAT(10F10.3)	00314000	C	008:0010:5
13	FORMAT(8F9.0)	00315000	C	008:0010:5
	DO 25 K=1,L	00316000	C	008:0010:5
	DO 25 I=1,N	00317000	C	008:0012:0
	VALY(I,K)=VALX(K,I)	00318000	C	008:0013:0
25	CONTINUE	00319000	C	008:0017:4
	IFAB=0	00320000	C	008:0010:0
C	-----	00321000	C	008:0010:4
C	INTRODUCAO DE NOVAS VARIABEIS	00322000	C	008:0010:4
C	-----	00323000	C	008:0010:4
	ITER=0	00324000	C	008:0010:4
C	-----	00325000	C	008:0010:2
C	CALCULANDO A REDE DE CONTRIBUICAO DE CADA VARIABEL(RVTX(K,J))	00326000	C	008:0010:2
C	-----	00327000	C	008:0010:2
31	L1=0	00328000	C	008:0010:2
32	K3=L-L1	00329000	C	008:0010:0
33	IF(K3-1)800,40,40	00330000	C	008:0010:3
40	DO 60 K=1,K3	00331000	C	008:0020:4
	DO 60 J=1,M	00332000	C	008:0022:0
	SUMP=0.	00333000	C	008:0023:0
	DO 50 I=1,N	00334000	C	008:0023:4
	P=VALY(I,K)*C(I,J)	00335000	C	008:0025:0
	SUMP=SUMP+P	00336000	C	008:0020:0
50	CONTINUE	00337000	C	008:0020:2
	RVLX(K,J)=SUMP-VALX(K,J)	00338000	C	008:0020:3
60	CONTINUE	00339000	C	008:0032:4
	ITER=ITER+1	00340000	C	008:0037:0
C	-----	00341000	C	008:0038:2
C	LEVANDO A X(K2)	00342000	C	008:0038:2
C	-----	00343000	C	008:0038:2
	ZMAX=0.	00344000	C	008:0038:2
	DO 90 J=1,M	00345000	C	008:0039:0
	IF(K3-L)92,70,70	00346000	C	008:003A:0
92	K4=K3+1	00347000	C	008:003B:2
	DO 91 K=K4,L	00348000	C	008:003C:4
	IF(RVLX(K,J))90,91,91	00349000	C	008:003E:0
91	CONTINUE	00350000	C	008:0041:0
70	IF(RVLX(K3,J)-ZMAX)90,90,80	00351000	C	008:0043:1
80	ZMAX=RVLX(K3,J)	00352000	C	008:0046:2
	K2=J	00353000	C	008:0049:0
90	CONTINUE	00354000	C	008:0049:5
95	IF(ZMAX)790,790,100	00355000	C	008:004C:0
C	-----	00356000	C	008:004D:4
C	VARIABEL QUE SERA RETIRADA DA BASE	00357000	C	008:004D:4
C	-----	00358000	C	008:004D:4
C	CALCULO LIMITANDO AMT PARA CADA VARIABEL BASICA	00359000	C	008:004D:4
C	-----	00360000	C	008:004D:4
100	DO 150 I=1,N	00361000	C	008:004F:0
	IF(PRDT(I))110,120,120	00362000	C	008:0050:5
110	WRITE(6,13)PRDT(I)	00363000	C	008:0058:2
	GO TO 830	00364000	C	008:0058:5
120	IF(C(I,K2))130,130,140	00365000	C	008:0058:5
130	AMT(I)=-1.	00366000	C	008:005D:3
	GO TO 150	00367000	C	008:005E:0
140	AMT(I)=PRDT(I)/C(I,K2)	00368000	C	008:0062:4
150	CONTINUE	00369000	C	008:0064:5
C	-----	00370000	C	008:0064:5
C	SELECIONANDO O MENOR POSITIVO QUE LIMITA AMT	00371000	C	008:0064:5
C	-----	00372000	C	008:0064:5
	I=1	00373000	C	008:0065:3
160	IF(AMT(I))170,210,210	00374000	C	008:0067:5
170	I=I+1	00375000	C	008:0069:1
	IF(I=N)160,160,180	00376000	C	008:006A:1
180	WRITE(6,13)AMT(N)	00377000	C	008:0071:2
	GO TO 830	00378000	C	008:0071:5
210	ZMIN=AMT(I)	00379000	C	008:0073:2
	K1=I	00380000	C	008:0074:1
220	I=I+1	00381000	C	008:0075:3
	IF(I=N)230,230,300	00382000	C	008:0076:3
230	IF(AMT(I))220,240,240	00383000	C	008:0078:2
240	IF(ZMIN-AMT(I))220,220,210	00384000	C	008:007A:5
C	-----	00385000	C	008:007A:5
C	ALTERANDO Y(K1)	00385000	C	008:007A:5
300	Y(K1)=Y(K2)	00385000	C	008:007A:5



Line	Code	Instruction	Address	Mode	Time
		DO 310 K=1,L	00387000	C	008:0070:1
		VALY(K1,K)=VALX(K,K2)	00388000	C	008:0070:1
310		CONTINUE	00389000	C	008:007E:0
C		-----CALCULO DOS NOVOS ELEMENTOS DA DIREITA	00390000	C	008:0082:4
		DO 400 I=1,N	00391000	C	008:0084:5
		PRDT(I)=PRDT(I)-ZMIN*CKI,K2)	00392000	C	008:0084:5
400		CONTINUE	00393000	C	008:0086:0
		PRDT(K1)=ZMIN	00394000	C	008:008A:3
C		-----CALCULO DAS NOVAS RAZOES DE SUBSTITUICAO	00395000	C	008:008C:4
C		-----	00396000	C	008:008E:2
		DO 500 J=1,M	00397000	C	008:008E:2
		DO 500 I=1,N	00398000	C	008:008E:2
		D(I,J)=C(I,J)-C(K1,J)*(C(I,K2)/C(K1,K2))	00399000	C	008:008E:2
500		CONTINUE	00400000	C	008:008F:0
		DO 510 J=1,M	00401000	C	008:0090:0
		D(K1,J)=C(K1,J)/C(K1,K2)	00402000	C	008:0098:4
510		CONTINUE	00403000	C	008:00A0:0
		DO 520 J=1,M	00404000	C	008:00A1:0
		DO 520 I=1,N	00405000	C	008:00A8:0
		C(I,J)=D(I,J)	00406000	C	008:00AA:1
520		CONTINUE	00407000	C	008:00AB:0
C		-----	00408000	C	008:00AC:0
C		-----ESCREVENDO TODAS AS TABELAS OU A TABELA OTIMA	00409000	C	008:00B0:4
		IF (ITAB)40,40,600	00410000	C	008:00B5:0
C		-----	00411000	C	008:00B5:0
C		-----ESCREVENDO CADA TABELA	00412000	C	008:00B5:0
		DO 610 I=1,N	00413000	C	008:00B5:0
610		CONTINUE	00414000	C	008:00B6:4
		WRITE(6,13)Y(I),PRDT(I)	00415000	C	008:00B6:4
620		CONTINUE	00416000	C	008:00B6:4
		DO 620 I=1,N	00417000	C	008:00B6:4
		WRITE(6,12)(C(I,J),J=1,M)	00418000	C	008:00B8:0
620		CONTINUE	00419000	C	008:00C1:2
		GO TO 40	00420000	C	008:00C3:3
C		-----	00421000	C	008:00C5:0
C		-----MOVENDO AO SEGUINTE NIVEL DE PRIORIDADE INFERIOR	00422000	C	008:00C5:0
		LI=L+1	00423000	C	008:00C5:0
790		GO TO 32	00424000	C	008:00D5:0
C		-----	00425000	C	008:00D5:0
C		-----ESCREVENDO OS RESULTADOS FINAIS	00426000	C	008:00D5:0
800		WRITE(6,1014)ITER	00427000	C	008:00D6:2
		WRITE(6,1015)	00428000	C	008:00D6:2
1015		FORMAT(1H1)	00429000	C	008:00D6:5
1014		FORMAT(10X,' ITERACOES.....',I5)	00430000	C	008:00D6:5
		WRITE(6,5000)	00431000	C	008:00D0:2
5000		FORMAT(55X,' A SOLUCAO SIMPLEX',25X,' PAGINA 05')	00432000	C	008:00E1:2
		WRITE(6,5001)	00433000	C	008:00E1:2
5001		FORMAT(' O MEMBRO DA DEREITA')	00434000	C	008:00E1:2
801		DO 810 I=1,N	00435000	C	008:00E5:2
		WRITE(6,13)Y(I),PRDT(I)	00436000	C	008:00E9:2
810		CONTINUE	00437000	C	008:00E9:2
		WRITE(6,6201)	00438000	C	008:00EA:0
6201		FORMAT(1H1)	00439000	C	008:00F3:2
		WRITE(6,5002)	00440000	C	008:00F5:3
5002		FORMAT(1X,' AS RAZOES DE SUBSTITUICAO')	00441000	C	008:00F5:3
811		DO 812 I=1,N	00442000	C	008:00F9:2
		WRITE(6,12)(C(I,J),J=1,M)	00443000	C	008:00F9:2
812		CONTINUE	00444000	C	008:00F9:2
		WRITE(6,5003)	00445000	C	008:00FD:2
5003		FORMAT(' A MATRIZ ZJ-CJ')	00446000	C	008:00FE:0
813		DO 814 K=1,L	00447000	C	008:010B:2
		WRITE(6,12)(RVLX(K,J),J=1,M)	00448000	C	008:010B:2
814		CONTINUE	00449000	C	008:010D:3
C		-----	00450000	C	008:0111:2
C		-----AVALIANDO A FUNCAO OBJETIVO	00451000	C	008:0111:2
		DO 820 K=1,L	00452000	C	008:0112:0
		ZVAL(K)=0.	00453000	C	008:011F:2
		DO 820 I=1,N	00454000	C	008:0121:3
		ZVAL(K)=ZVAL(K)+PRDT(I)*VALY(I,K)	00455000	C	008:0121:3
820		CONTINUE	00456000	C	008:0121:3
		WRITE(6,6201)	00457000	C	008:0123:0
		WRITE(6,5004)	00458000	C	008:0123:0
5004		FORMAT(' UMA AVALIACAO DA FUNCAO OBJETIVO')	00459000	C	008:0124:3
		DO 821 K=1,L	00460000	C	008:0126:0
		KK=L-K	00461000	C	008:0128:1
		IF (TEST.EQ.1.0) GO TO 89	00462000	C	008:012F:3
		KK=KK+1	00463000	C	008:0133:2
89		WRITE(6,15)KK,ZVAL(K)	00464000	C	008:0137:2
821		CONTINUE	00465000	C	008:0137:2
		CALL FINAL(RHS1,PRDT,VALY,L,KPCK,Y,N,KEPT,TEST)	00466000	C	008:0138:0
830		STOP	00467000	C	008:0139:3
		END	00468000	C	008:013A:4
			00469000	C	008:013C:0
			00470000	C	008:0145:2
			00471000	C	008:0147:3
			00472000	C	008:0140:3
				C	008:014E:2











NUMERO DE LINHAS.....	23
NUMERO DE VARIAVEIS.....	61
NUMERO DE PRIORIDADES.....	7
ADICAO DE PRIORIDADES.....	0
ITERACOES.....	52



O MEMBRO DA DEREITA

57.	21.
47.	28.
15.	6.
30.	87.
24.	5.
58.	34.
54.	1.
41.	3.
48.	10.
25.	37.
49.	10.
51.	7.
35.	3.
53.	1.
29.	53.
50.	22.
26.	23.
28.	190.
56.	37.
45.	175615.
55.	37.
46.	2186557.
60.	3.





AS RAZOES DE SUBSTITUICAO

0.000	0.000	-0.000	0.023	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.136	0.068
0.068	0.000	-0.068	0.004	0.000	-1.000	-0.068	0.000	-0.136	-0.000
0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000
0.000	-0.136	-0.068	-0.068	0.000	-0.068	-0.004	0.000	1.000	0.068
0.000	-0.136	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	1.000	-0.000	-0.136	-0.000
-0.000	0.000	-0.000	0.030	0.000	0.000	-0.000	0.200	0.182	0.091
-0.091	0.000	-0.091	-0.182	0.000	-0.000	-0.091	0.000	-0.182	-0.000
-0.200	0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.030	0.000	-0.000	-0.000
0.000	-0.182	-0.091	-0.091	0.000	-0.091	-0.182	0.000	-0.000	0.091
0.000	0.182	0.000	0.200	0.000	-0.000	1.000	0.000	-0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.182	-0.000
-0.000	0.000	0.000	0.007	0.000	0.000	-0.000	1.000	1.041	1.020
-0.020	0.000	0.980	0.819	1.000	1.000	0.980	0.000	0.959	0.000
-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.007	-0.000	-0.000	0.000
-1.000	-1.041	-1.020	-1.020	0.000	-0.980	-0.819	-1.000	-1.000	-0.980
0.000	1.959	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000
0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.959	0.000
-0.000	0.000	0.000	0.106	0.000	-0.000	-1.000	1.000	1.637	1.319
-1.000	0.000	0.681	-0.637	0.000	-0.000	-0.319	0.000	-0.637	-0.000
-1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.106	0.000	0.000	1.000
-1.000	-1.637	-1.319	-1.319	0.000	-0.681	-0.637	0.000	0.000	0.319
0.000	0.637	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.637	-0.000
-1.000	0.000	0.000	0.005	0.000	0.000	0.000	0.850	0.030	0.015
-0.015	0.000	0.985	-0.030	0.000	0.000	-0.015	0.000	-0.030	0.000
-0.850	-0.030	-0.015	-0.015	0.000	-0.985	0.030	0.000	-0.000	0.015
0.000	0.030	-0.000	-0.150	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.970	0.000
-0.000	0.000	-0.000	0.038	0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.225	0.113
-0.000	0.000	-0.113	-0.225	0.000	-0.000	-1.113	0.000	-0.225	-0.000
-0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.038	0.000	0.000	0.000
-0.000	0.225	-0.113	-0.113	0.000	-0.113	0.225	0.000	0.000	1.113
0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	1.000	-0.225	-0.000
0.000	0.000	-0.000	0.002	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.010	0.005
0.000	-0.000	-0.005	-1.010	0.000	-0.000	-0.005	0.000	-0.010	-0.000
0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.002	0.000	0.000	-0.000
0.000	-0.010	-0.005	-0.005	0.000	0.005	1.010	0.000	0.000	0.005
-0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000
-0.000	0.000	0.000	1.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.010	-0.000
-0.000	0.000	-0.000	0.003	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.020	0.010
-0.000	-0.000	-0.010	-0.020	0.000	-0.000	-0.010	-1.000	-0.020	0.000
-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.003	0.000	0.000	-0.000
-1.000	0.020	-0.010	-0.010	0.000	-0.010	0.020	0.000	0.000	0.010
0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000
-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.980	-0.000
-0.000	0.000	-0.000	0.011	0.000	-0.000	-0.000	-1.000	0.069	0.034
-0.034	-0.000	-0.034	-0.069	0.000	-0.034	-0.034	0.000	-0.069	-0.000
-0.000	-0.069	-0.034	-0.034	0.000	0.034	0.069	0.000	-0.000	0.034
0.000	0.069	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	1.000	-0.000	0.000
0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.069	-0.000
-1.000	-1.000	0.000	0.041	0.000	-0.000	-0.000	1.000	1.247	1.124
-0.124	0.000	0.876	0.353	0.000	0.000	-0.124	0.000	-0.647	-0.000
0.000	-0.000	0.000	-0.000	1.000	0.000	-0.041	0.000	0.000	0.000
-1.000	-1.247	-1.124	-1.124	0.000	-0.876	-0.353	0.000	-0.000	0.124
0.000	0.647	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.647	-0.000
-0.000	0.000	-0.000	0.011	0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.931	0.034
-0.034	0.000	-0.034	-0.069	0.000	-0.000	-0.034	0.000	-0.069	-0.000
-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.011	0.000	0.000	0.000
-0.000	0.931	-0.034	-0.034	0.000	0.034	0.069	0.000	0.000	0.034
0.000	0.069	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	1.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.069	-0.000
-0.000	0.000	-0.000	0.008	0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.049	0.025
-0.975	-0.000	-0.025	-0.049	0.000	0.000	-0.025	0.000	-0.049	-0.000
0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.008	0.000	0.000	0.000
0.000	-0.049	-0.025	0.975	0.000	0.025	0.049	0.000	-0.000	0.025
0.000	0.049	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000
-1.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.049	-0.000

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
NUCLEO DE COMPUTACAO ELETRONICA



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
NUCLEO DE COMPUTACAO ELETRONICA



-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	128-0.000	-0.000	0.000	-0.020	-0.000	-0.000
-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.020	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.020	-0.000	-0.000
-0.000	0.000	0.000	0.002	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.010	0.005	0.005
-0.005	0.000	-1.005	-0.010	0.000	-0.000	-0.005	0.000	-0.010	-0.000	-0.000
-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.002	0.000	0.000	0.000	-0.000
0.000	-0.010	-0.005	-0.005	0.000	1.005	-0.010	0.000	0.000	0.005	0.005
0.000	-0.010	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	-0.000	1.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.010	-0.000	-0.000
-0.000	0.000	0.000	0.158	0.000	-1.000	-0.000	-0.000	0.951	0.475	0.475
0.475	0.000	-0.475	0.049	0.000	0.000	-0.475	0.000	0.049	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.158	0.000	1.000	0.000	0.000
0.000	-0.951	-0.475	-0.475	0.000	0.475	-0.049	0.000	-0.000	-0.475	-0.475
0.000	-0.049	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.049	0.000	0.000
-0.000	0.000	0.000	0.025	0.000	0.000	0.000	0.000	0.147	-0.926	-0.926
0.074	0.000	-0.074	-0.147	0.000	-0.000	-0.074	0.000	-0.147	-0.000	-0.000
-0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.025	0.000	-0.000	-0.000	-0.000
-0.000	-0.147	0.926	-0.074	0.000	0.074	0.147	0.000	0.000	0.074	0.074
0.000	-0.147	0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.000	1.000
0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.147	-0.000	-0.000
-0.000	0.000	-1.000	0.025	0.000	0.000	-0.000	0.250	0.400	0.325	0.325
0.325	0.000	0.175	0.850	0.000	-0.000	-0.075	0.000	-0.150	-0.000	-0.000
-0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	1.000	-0.025	0.000	-0.000	0.000	0.000
-0.250	-0.400	-0.325	-0.325	0.000	-0.175	-0.850	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.150	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000
0.000	0.250	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.150	-0.000	-0.000
-0.000	0.000	0.000	0.319	-1.000	-0.000	-0.000	3.000	4.912	3.956	3.956
3.956	0.000	2.044	-1.912	0.000	-0.000	-0.956	0.000	-1.912	0.000	0.000
-0.000	-0.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.319	1.000	0.000	0.000	0.000
-3.000	-4.912	-3.956	-3.956	0.000	-2.044	1.912	0.000	0.000	0.000	0.956
0.000	1.912	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	3.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	-1.912	-0.000	-0.000
-0.000	0.000	0.000	0.041	0.000	-0.000	-0.000	1.000	1.246	1.123	1.123
1.123	0.000	0.877	0.614	0.000	1.000	-0.877	0.000	0.754	0.000	0.000
-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	-0.041	0.000	0.000	0.000	0.000
-1.000	-1.246	-1.123	-1.123	0.000	-0.877	-0.614	0.000	-1.000	-0.877	-0.877
0.000	-0.754	-0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	1.000	0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	0.754	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	192.983	0.000	0.000	0.000	896.000	1557.898	578.949	578.949
418.949	0.000	301.051	-2495.498	0.000	-160.000	-898.949	0.000	-2517.898	-60.000	-60.000
-36.000	-1.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-192.983	0.000	-0.000	-0.000	-0.000
-896.000	-1557.898	-578.949	-418.949	0.000	-301.051	2495.498	0.000	160.000	898.949	898.949
0.000	2517.898	60.000	36.000	1.000	-0.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000
0.000	-320.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	-277.898	-0.000	-0.000
1.000	0.000	0.000	0.041	0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.245	0.123	0.123
0.000	0.000	-0.123	-0.245	0.000	-0.000	-0.123	0.000	-0.245	-0.250	-0.250
0.123	0.000	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.041	0.000	0.000	0.000	0.000
-0.000	-0.245	-0.123	-0.123	0.000	0.123	0.245	0.000	0.000	0.123	0.123
0.000	0.245	0.250	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	-0.000	0.000	0.000	1.000	0.000	0.000	-0.000	-0.245	-0.000	-0.000
-0.000	0.000	0.000	2402.810	0.000	0.000	0.000	10600.000	19416.863	7208.431	7208.431
15208.431	0.000	3791.569	-31136.863	0.000	-2000.000	-11208.431	0.000	-31416.863	-1000.000	-1000.000
-600.000	0.000	-1.000	-0.000	0.000	0.000	-2402.810	0.000	-0.000	-0.000	-0.000
10600.000	-19416.863	-7208.431	-15208.431	0.000	-3791.569	31136.863	0.000	2000.000	11208.431	11208.431
0.000	31416.863	1000.000	600.000	0.000	1.000	-0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000
0.000	-4000.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	-3416.863	-0.000	-0.000
-1.000	0.000	0.000	0.003	0.000	-0.000	0.000	0.000	0.020	0.010	0.010
0.010	0.000	-0.010	-0.020	0.000	-0.000	-0.010	0.000	-1.020	-0.000	-0.000
0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.003	0.000	0.000	-0.000	-0.000
-0.000	-0.020	-0.010	-0.010	0.000	0.010	0.020	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	1.020	0.000	-0.000	0.000	-0.000	-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	-0.000	0.000	0.000	-0.000	-0.020	1.000	1.000
-0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

MATRIZ ZJ-CJ



UMA AVALIACAO DA FUNCAO OBJETIVO

21.865,73

7.00  
6.00  
5.00  
4.00  
3.00  
2.00  
1.00  
0.00

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA



UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO  
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA



## ANALISE DE FOLGAS

LINHA	DISPONIVEL	FOLGA-POS	FOLGA NEG
1	20.60881	4.53514	0.00000
2	27.65686	37.47063	0.00000
3	6.15598	22.67566	0.00000
4	86.65037	0.00000	0.00000
5	4.53514	189.95111	0.00000
6	34.19933	53.23204	0.00000
7	1.48692	86.65037	0.00000
8	2.97385	0.00000	0.00000
9	10.40849	0.00000	0.00000
10	37.47063	0.00000	0.00000
11	10.40849	0.00000	0.00000
12	7.43463	2.97385	0.00000
13	2.97385	0.00000	0.00000
14	1.48692	0.00000	0.00000
15	53.23204	0.00000	6.15598
16	22.30391	0.00000	0.00000
17	22.67566	0.00000	0.00000
18	189.95111	2.97385	0.00000
19	37.38146	0.00000	0.00000
20	175614.51178	0.00000	0.00000
21	37.17320	0.00000	0.00000
22	2186557.30493	175614.51178	0.00000
23	2.97385	2186557.30493	0.00000

ANALISE DE VARIAVEIS

VARI AVEL

VALOR

11	20.60881
1	27.65686
12	34.19933
3	1.48692
2	10.40849
3	10.40849
5	7.43463
7	1.48692
4	22.30391
10	37.38146
9	37.17320
14	2.97385



PRIORIDADE

SUB-ATINGIMENTO

7

2186557.30493

6

0.00000

5

0.00000

4

0.00000

3

0.00000

2

0.00000

1

0.00000



BIBLIOGRAFIA

- | <sup>1</sup> | ARTHUR, J. L.; RAVINDRAN, A. - Research Memorandum, N<sup>o</sup> 77, Vol. 2, Maio 1977.
- | <sup>2</sup> | CHARNES, A.; COOPER, W. W.; DEVOE, J. K., LEARNER, D. B.; REINECKE, W. - A Goal Programming Model for Media Planning - Management Science, U.S.A., Vol. N<sup>o</sup> 8, Abril 1968.
- | <sup>3</sup> | CHARNES, A.; COOPER, W. W.; DEVOE, J. K.; SNOW, E. F. - Note on an Application of Goal Programming Model for Media Planning - Management Science, U. S. A. Vol. 14, N<sup>o</sup> 8, Abril 1968.
- | <sup>4</sup> | CHARNES, A.; COOPER; W. W.; KLINGMAN, D.; NIEHAUS, R.J. - Explicit Solutions in Convex Goal Programming - Management Science, U. S. A., Vol. 22, N<sup>o</sup> 4, Dezembro 1975.
- | <sup>5</sup> | CHARNES, A.; COOPER, W. W. - Goal Programming and Multiple Objective Optimizations - European Journal of Operational Research. Amsterdam - Janeiro 1977.
- | <sup>6</sup> | DYER, J. S. - Interactive Goal Programming - Management Science, U. S. A., Vol. 19, N<sup>o</sup> 1, Setembro 1972.



- | <sup>7</sup> | GLEASON, M. JOHN - A Goal Programming Model for Insurance Agency Management - Decision Sciences, Vol. 8, Nº 1, Janeiro 1977.
- | <sup>8</sup> | GOODMAN, A. DAVID - A Goal Programming Approach to Aggregate Planning of Production and Work Force. Management Science, U. S. A., Vol. 6, Nº 3, Julho 1975.
- | <sup>9</sup> | HARWOOD, B. GORDON - Optimizing Organizational Goals in Assigning Faculty Teaching Schedules - Decision Sciences, U. S. A., Vol. 6, Nº 3, Julho 1975.
- | <sup>10</sup> | IJIRI, Y. - Management Goals and Accounting for Control - Rand-McNally, Chicago, 1965.
- | <sup>11</sup> | KEOWN, J. ARTHUR - A Chance Constrained Goal Programming Model for Bank Liquidity Management Decision Sciences, U. S. A., Vol. 9, Nº 1, Janeiro 1978.
- | <sup>12</sup> | LEE, S. - An Aggregate Budget Planning Model for Hospital Administration - Management Science, Setembro 1971.
- | <sup>13</sup> | LEE, M. SANG - Goal Programming for Decision Analysis - College Business Virginia Polytechnic Institute and State University, Philadelphia 1972.
- | <sup>14</sup> | LEE, M. SANG; CLAYTON, R. EDWARD - A Goal Programming Model for Academic Resource Allocation - Management

Science, U. S. A., Vol. 18, Nº 8, Abril 1972.

|<sup>15</sup>| LEE, S.; SEVEBECK, W. - An Agregative Model for Municipal Economic Planning Policy Sciences, Vol. 2, Nº 2, Janeiro 1971, p. 99-115.

|<sup>16</sup>| NARASIMHAN, RAM - Goal Programming in a Fuzzy Environment - Decision Sciences, U. S. A., Vol. 11, Nº 2, Abril 1980.

|<sup>17</sup>| REEVES, R. GARY - A Note on Quadratic Preferences and Goal Programming - Decision Sciences, U. S. A., Vol. 9, Nº 3, Julho 1978.

|<sup>18</sup>| SHIM, K. J.; SIEGEL, J. - Quadratic Preferences and Goal Programming - Decision Sciences, U. S. A., Vol. 6, Nº 4, Outubro 1975.

|<sup>19</sup>| STAITON, R. S. - Production Scheduling With Multiple Criteria Objectives - Operational Research Quartely, Great Britain, Vol. 28, Nº 2.

|<sup>20</sup>| VEIKKO, JAASKELAINEN - A Goal Programming Model of Aggregate Production Planning - Ekonomisk Tidskrift (Swedish Journal of Economics), Nº 2, 1969, p. 14-19.