MÉTODOS DE SOLUÇÃO EXATOS E APROXIMADOS DOS PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA COM CUSTO FIXO NA ORIGEM

ANA SATIE YOTSUMOTO

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO, COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

Prof. NELSON MACULAN FILHO
(Presidente)

Prof.ª DINA FEIGENBAUM CLEIMAN

Prof. JAIR KÖILLER

RIO DE JANEIRO, RJ BRASIL

OUTUBRO 1981

YOTSUMOTO, ANA SATIE
MÉTODOS DE SOLUÇÃO EXATOS E APROXIMADOS DOS PROBLEMAS DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA COM CUSTO FIXO NA ORIGEM-
90 p., 29,7 cm (COPPE - UFRJ, M.SC., Engenharia de Sistemas e Computação, 1981).
Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro. Faculdade de Engenharia.
1. Programação Matemática I. COPPE/UFRJ II Título (Série).

AGRADECIMENTOS

Meu particular agradecimento ao Prof. NELSON MACULAN FILHO que, com seu apoio e solidariedade humana, criou condições indispensáveis à realização deste trabalho.

A FUEL pelo auxilio financeiro e colaborações prestadas para a realização deste trabalho.

A CAPES - PICD pela contribuição financeira fornecida durante a obtenção dos créditos e elaboração do trabalho.

Ao Prof. OSWALDO DE SOUZA CAMPOS, pelo apoio e estímulo para execução deste trabalho.

À MARIA CRISTINA RUTZ DEBIAZIO, pelo excelente trabalho de datilografia.

A todos aqueles que, de uma forma ou de outra, contribuiram para a conclusão deste trabalho.

RESUMO

A finalidade deste trabalho foi apresentar uma colaboração didática sobre Métodos de Solução de Problemas com Custo Fixo na origem.

Apresentamos soluções para o Problema do Custo Fixo na origem utilizando métodos exatos, heurísticos e Programação Disjuntiva.

Além disso, incluímos alguns exemplos de aplicações.

ABSTRACT

The purpose of this work is to presente a cola boration concerning methods of solving Fixed - Charge Problem by means of Mathematical Programming.

We studied several models of Fixed - Charge Problem using exacts methods heuristics methods and Disjuntive Programming we have includ, in addtion examples of applications.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

O Problema do Custo Fixo (P.C.F.) é um problema de programção não-linear, cuja estrutura é quase idêntica ao do Problema de Programação Linear (P.P.L.), a diferença está na existência do custo fixo na função objetivo.

Este tipo de problema surge frequentemente nos planejamentos de redes de comunicação, transporte, distribuição de energias, irrigação, locação regionais e outros sistemas de tratamentos de fluxos.

A dificuldade e o custo dessas redes fazem com que as redes existêntes sejam usadas efetivamente e se necessário sejam expandidas novas redes. Se as redes existentes satisfazem o fluxo atual de demanda e quisermos fazer uma previsão para a demanda futura, surgem dois problemas:

a) examinar se as redes existentes poderão satisfazer as novas demandas. Caso não satisfaça,

b) determinar a expansão destas redes.

Um exemplo típico surge no planejamento de locações regionais, onde uma firma pesquisa um número finito de regiões para instalar novas fábricas e/ou depósitos. O problema é criar rotas tais que minimize o custo total de transporte do produto para os clientes (que pode ser diretamente da fábrica ou via depósito) e o custo de estocagem. O resultado deste modelo fornece informações importantes sobre a programação das expansões viáveis, reduzindo o número de alternativas possíveis.

I.1 - Formulação Geral do Problema

O (P.C.F.) foi formulado pela primeira vez em 1954 por Hirsch e Dantzig (7), como segue:

$$(\text{P.C.F.}) \quad \begin{array}{l} \text{minimizar } z = \sum_{j \in J} f_j(x_j) \\ \\ \text{sujeito a :} \\ \qquad\qquad Ax = b \\ \qquad\qquad x \geqslant 0 \end{array}$$

onde,

$A = (a_{ij})$, matriz de ordem m x n formada pelos coeficientes das restrições, $i \in I$ e $j \in J$

$b = (b_i)$, vetor-coluna formado pelas constantes com m componentes, $i \in I$

$x = (x_j)$, vetor-coluna formado por variáveis inteiras com n componentes, $j \in J$

$I = \{1, 2, \ldots, m\}$ conjunto de índices das restrições

$J = \{1, 2, \ldots, n\}$ conjunto de índices das variáveis

$f_j(x_j) = c_j x_j + k_j \delta_j$, função custo côncava para $x_j \geqslant 0$

$$\delta_j = \begin{cases} 1 & \text{se } x_j > 0 \\ 0 & \text{se } x_j = 0 \end{cases} \qquad \forall_j \in J$$

c_j = é o vetor custo com n componentes

O valor de k_j é denominado "Custo Fixo", desde que exista um custo de k_j cruzeiros quando a variável $x_j > 0$ e assumiremos todo $k_j \geqslant 0$.

A função $f(x_j)$ é mostrada geometricamente na figura I-1.

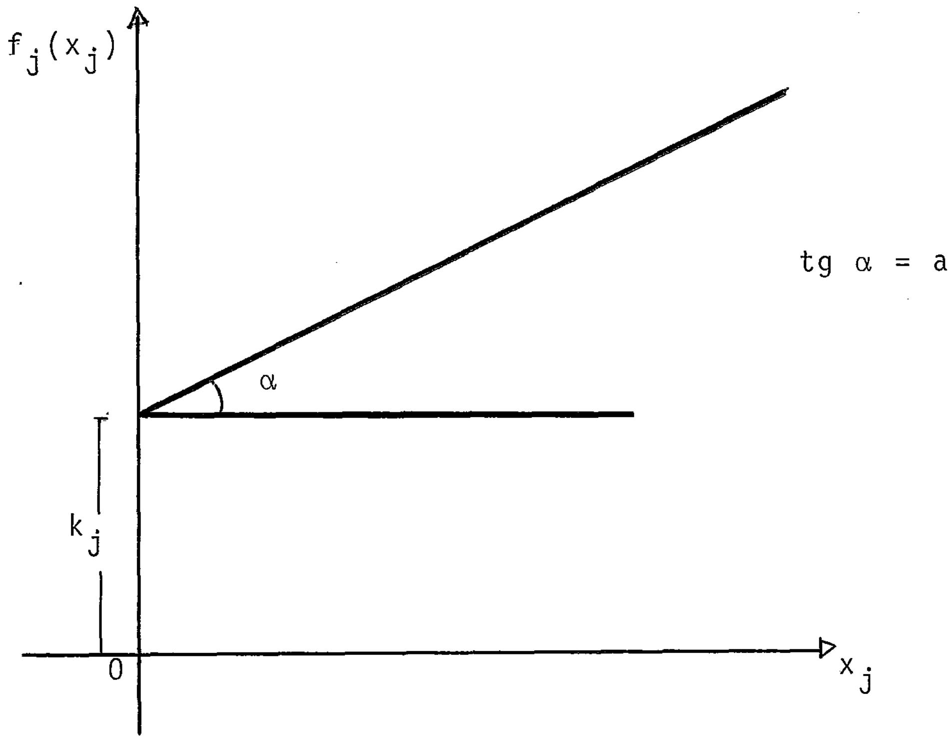

Figura I-1

Hirsch e Dantzig (7), mostraram que para qualquer (P.C.F.) a solução ótima ocorre num vértice de um conjunto S de soluções viáveis, $S = \{x \mid Ax = b,\ x \geqslant 0\}$. Isto significa que a busca do ótimo global pode ser limitada, considerando somente os vértices de S. Além disso, a condição suficiente para que um (P.P.L.) obtido ignorando os termos $k_j\delta_j$ fornecem a mesma solução ótima do (P.C.F.)associado, é que todos os k_j sejam iguais para todo j e ainda todos os vértices do poliedro convexo S sejam não-degenerados pois, um ponto extremo degenerado tem menos variáveis básicas positivas e pode ser uma solução ótima para o (P.C.F.) mas, não para o (P.P.L.).

Descreveremos ao longo do nosso trabalho alguns métodos exatos e heurísticos que resolvem este tipo de trabalho.

CAPÍTULO II

CONCEITOS BÁSICOS E TERMINOLOGIA

Neste capítulo descreveremos algumas definições e teoremas da programação linear com o objetivo de tornar mais clara a demonstração feita por Hirsch e Dantzig (7), de que a solução ótima do (PCF) ocorre num vértice de um poliedro convexo de soluções viáveis.

II.1 - Programação Linear

Consideremos o seguinte (PPL)

$$\text{minimizar} \quad z = Cx \qquad (1)$$

sujeito a:

$$Ax = b \qquad (2)$$

$$x \geq 0 \qquad (3)$$

onde,

(1) é chamada função objetivo

(2) e (3) são as restrições do problema

O conjunto S de pontos que satisfazem o sistema de restrições (2) e (3), chama-se <u>Conjunto de soluções viáveis</u>.

A solução viável x^* que minimiza a função objetivo z é denominada <u>solução ótima</u> do (PPL).

II.2 - Definições

II.2.1 - Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ vetores do R^n e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ números reais.

$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$ é uma combinação convexa se

$\alpha_i \geq 0 \ , \ i = 1, 2, \ldots, n$

e

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$$

Podemos interpretar uma combinação convexa de dois pontos x_1 e x_2 como sendo um ponto pertencente ao segmento de reta que os une.

II.2.2 - Um conjunto de pontos S, diz-se convexo se toda combinação convexa de qualquer par de pontos x_1, x_2 S, também pertencer a S.

II.2.3 - Politopo convexo é um conjunto de pontos

$$\{x \in R^n \mid \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j < b_i,\ i = 1, 2, \ldots, m\}$$

II.2.4 - Um ponto x de um conjunto convexo S, denomina-se vértice ou ponto extremo de S quando não puder ser obtido como combinação convexa de nenhum par de pontos distintos de S.

II.2.5 - Seja A uma matriz m x n tal que o posto de A = m. Um conjunto de m vetores coluna a_j de A linearmente independentes (LI), denomina-se base de A. Os vetores a_j que formam a base denominam-se vetores básicos de A.

II.2.6 - No (PPL) formado por (1), (2) e (3) as m componentes de x correspondentes aos vetores básicos denominam-se <u>variáveis básicas</u> (VB) e as outras (n - m) componentes são as <u>variáveis não-básicas</u>. Anulando as (n - m) variáveis não-básicas, teremos um sistema compatível e determinado, formado de m equações e m incógnitas. Resolvendo este sistema teremos uma <u>solução básica</u>.

II.2.7 - Uma solução básica onde as (VB) são não-negativas, denominamos <u>solução básica viável</u>.

II.2.8 - Uma solução básica é considerada <u>degenerada</u> se pelo menos uma (VB) for igual a zero na solução básica.

II.3 - Teoremas

II.3.1 - O conjunto de soluções viáveis de um (PPL) é convexo.

Prova:

Sejam x_1 e x_2 pontos de $S \Longrightarrow x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $Ax_1 = b$ e $Ax_2 = b$.

Vamos mostrar que toda combinação convexa de dois pontos $x_1, x_2 \in S$, também pertencem a S.

$$x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 1$$

$$\alpha_1 \geqslant 0 \quad \text{e} \quad \alpha_2 \geqslant 0$$

(i) $$\begin{aligned} A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= A\,(\alpha_1 x_1) + A\,(\alpha_2 x_2) \\ &= \alpha_1\,(Ax_1) + \alpha_2\,(Ax_2) \\ &= \alpha_1\, b + \alpha_2\, b \\ &= b\,(\alpha_1 + \alpha_2) = b \end{aligned}$$

(ii) Como $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $\alpha_1 \geqslant 0$ e $\alpha_2 \geqslant 0$, temos:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \geqslant 0$$

Por (i) e (ii) fica demonstrado que toda combinação convexa de um par de pontos de S também pertence a S, logo o conjunto S de soluções viáveis é convexo.

II.3.2 - x é um vértice do conjunto de soluções viáveis do (PPL)$\Longrightarrow$x fôr solução básica viável.

Prova:

(i) Seja $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0)^T$ um vértice cujas K primeiras componentes são positivas. Vamos mostrar que $a_1, a_2, \ldots, a_n$ são (LD).

Suponhamos que $a_1, a_2, \ldots, a_k$ são linearmente dependentes (LD), então existem excalares $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ não todas nulas, tais que:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \lambda_j = 0$$

Então podemos definir através do vetor

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k, 0, \ldots, 0)^T$$

uma direção tal que possamos gerar dois pontos distintos,

$x_1 = x + \alpha\,\lambda$ e $x_2 = x - \alpha\,\lambda$, logo

$$Ax_1 = A(x + \alpha\lambda) = \sum_{j=1}^{k} a_j(x_j + \alpha\lambda_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} a_j x_j + \alpha \sum_{j=1}^{k} a_j \lambda_j$$

$$= b + \alpha\, 0 = b$$

$$Ax_2 = A(x - \alpha\lambda) = \sum_{j=1}^{k} a_j(x_j - \alpha\lambda_j)$$

$$= \sum_{j=1}^{k} a_j x_j - \alpha \sum_{j=1}^{k} a_j \lambda_j$$

$$= b - \alpha\,.\,0 = b$$

Para que tenhamos $x_1 \geqslant 0$, isto é, $x_j + \alpha\lambda_j \geqslant 0$ para $j = 1, \ldots, k$, basta termos:

$$\alpha\lambda_j \geqslant -x_j$$

$$\alpha \geqslant -\frac{x_j}{\lambda_j} \qquad \text{para } \lambda_j > 0$$

ou

$$\alpha \leqslant -\frac{x_j}{\lambda_j} \qquad \text{para } \lambda_j < 0$$

Ou seja, para $x_1 \geq 0$ devemos ter:

$$\underset{j,\lambda_j>0}{\text{máximo}} \left(\frac{-x_j}{\lambda_j}\right) \leq \alpha \leq \underset{j,\lambda_j<0}{\text{mínimo}} \left(\frac{-x_j}{\lambda_j}\right)$$

Para que $x_2 \geq 0$, isto é, $x_j - \alpha\lambda_j \geq 0$ para $j = 1, 2, \ldots, k$, teremos:

$$-\alpha \,.\, \lambda_j \geq -x_j$$

$$\alpha \quad \lambda_j \leq x_j$$

$$\alpha \leq \frac{x_j}{\lambda_j} \qquad \text{para } \lambda_j > 0$$

ou

$$\alpha \geq \frac{x_j}{\lambda_j} \qquad \text{para } \lambda_j < 0 \quad \text{e teremos:}$$

$$\underset{j,\lambda_j<0}{\text{máximo}} \left(\frac{x_j}{\lambda_j}\right) \leqq \alpha \leqq \underset{j,\lambda_j>0}{\text{mínimo}} \left(\frac{x_j}{\lambda_j}\right)$$

Logo $x_1 \geq 0$ e $x_2 \geq 0$, desde que:

$$|\alpha| \leq \underset{j,\lambda_j\neq 0}{\text{mínimo}} \left|\frac{x_j}{\lambda_j}\right|$$

Satisfeita a condição acima, dizemos que $x_1, x_2 \in S$

Se considerarmos $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (LD) $\Longrightarrow x$ poderá ser obtido como combinação convexa de dois pontos distintos $x_1, x_2 \in S$, o que é impossível pois, x é vértice de S. Logo, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ são (LI) e x é solução básica viável.

(ii) Seja x uma solução básica viável. Suponhamos que somente as k primeiras componentes sejam positivas. Logo são variáveis básicas, as quais estão associados os vetores $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (LI).

Para mostrar que x é um vértice de S, basta mos trar que x não pode ser combinação convexa de dois pontos distintos x_1 e x_2 S. Como só as k primeiras componentes de x são positivas, isto é, $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$, e além disso,

$x_1 \geqslant 0$ e $x_2 \geqslant 0$

$x_{1,j} = x_{2,j} = 0$ para $j = k+1, \dots, n$

Como $x_1, x_2 \in S$, teremos $Ax_1 = Ax_2 = b$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot x_{i,j} = b \qquad \text{para } i = 1,2$$

Como $a_1, \dots, a_k$ são (LI), verificamos que a equação acima admite uma solução única, isto é, $x_{1,j} = x_{2,j}$ para $j = 1, \dots, k$, ou seja:

$$\sum_{j=1}^{k} a_j x_{1,j} - \sum_{j=1}^{k} a_j x_{2,j} = \sum_{j=1}^{k} a_j (x_{1,j} - x_{2,j}) = 0$$

Pelo fato de $a_1, \dots, a_k$ serem (LI) $\Longrightarrow x_{1,j} - x_{2,j} = 0$ para $j = 1, 2, \dots, k$ $x_{1,j} = x_{2,j}$

Como não existem dois pontos distintos dos quais se possa ser combinação convexa, então x é um vértice.

II.3.3 - O conjunto S de soluções viáveis tem um número finito de pontos extremos:

<u>Prova</u>:

Consideremos o (PPL) definido por (1), (2) e (3), onde A é uma matriz m x n e o posto (A) = m.

Dos n vetores coluna a_j existem no máximo $\binom{n}{m}$ conjuntos de m vetores (LI), o que significa no máximo $\binom{n}{m}$ soluções básicas. Como as soluções básicas viáveis são um subconjunto das soluções básicas, existem no máximo $\binom{n}{m}$ soluções básicas viáveis, ou seja vértices de S.

II.4 - Solução do Problema do Custo Fixo em Casos Especiais

Sob certas condições é possível reduzir o (PCF) em um (PPL). Em particular, se todos os custos fixos forem iguais e não-negativos (isto é, $k_j = k > 0$), teremos o seguinte teorema:

II.4.1 - Seja $\emptyset = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + k \sum_{j=1}^{n} \delta(x_j)$ com $k > 0$

e $\emptyset_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

Suponhamos que o vetor $b \in R^m$ seja não-degenerado, isto é, não pertence ao subespaço de dimensão menor que m gerado pelos $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Então existe um vértice $\hat{x} \in X$ com exatamente m componentes, tais que $\emptyset$ e $\emptyset_1$ assumem um mínimo em $\hat{x}$ com m componentes que minimiza $\emptyset_1$ também minimiza $\emptyset$.

<u>Prova</u>:

Seja $x \in S$, tal que $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j = b$, $m < n$. Como b é não-degenerado $\Longrightarrow$ x tem pelo menos m componentes distintas de zero $\sum_{j=1}^{n} \delta(x_j) = k \geqslant m$, onde k é o número de componentes de x distintas de zero. Logo

$$\min_{x \in S} \emptyset(x) \geqslant \min_{x \in S} \emptyset_1(x) + k \min_{x \in S} \sum_{j=1}^{n} \delta(x_j) \geqslant \min \emptyset_1(x) + km \qquad (1)$$

Sabemos da programação linear que sob a hipótese de não-degenerência, existe um ponto $\hat{x} \in S$ com exatamente m componentes positivas, onde $\emptyset_1$ assume o mínimo, e a função $\emptyset$ assume o valor,

$$\emptyset(\hat{x}) = \emptyset_1(\hat{x}) + km$$

De (1), temos:

$$\emptyset(\hat{x}) = \emptyset_1(\hat{x}) + km \geqslant \min_{x \in S} \emptyset(x) \geqslant \min_{x \in S} \emptyset_1(x) + km = \emptyset_1(\hat{x}) + km$$

Logo,

$$\emptyset(\hat{x}) = \min_{x \in S} \emptyset(x)$$

Quando k_j varia com j, teremos o teorema a seguir

II.4.2 - A função $\emptyset = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + k_j\, \delta(x_j)$ é minimizada num vértice de um conjunto convexo $S = \{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ de soluções viáveis.

Suponhamos que:

$$\inf_{x \in S} \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + k_j\, \delta(x_j) = \mu > -\infty$$

Se $k_j \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, existe um vértice $\hat{x} \in X$, tal que:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \hat{x}_j + k\, \delta(\hat{x}_j) = \mu$$

<u>Prova</u>:

Seja, $\emptyset_1(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ e

$\emptyset_2(x) = \sum_{j=1}^{n} k_j\, \delta(x_j)$. Então,

$$\emptyset = \emptyset_1(x) + \emptyset_2(x)$$

Provaremos o teorema, mostrando que para cada ponto $x \in S$, existe um ponto extremo x^* pertencente ao conjunto E de pontos extremos, tal que:

$$\emptyset(x^*) < \emptyset(x) \qquad (2)$$

consequentemente,

$$\inf_{x \in S} \emptyset(x) = \min_{x \in E} \emptyset(x) \qquad (3)$$

Seja x um ponto arbitrário que não seja um ponto extremo de S, então x pode ser escrito como combinação convexa dos pontos $\xi \in S$ e $\eta \in S$.

$$x = \lambda_0 \xi + (1 - \lambda_0)\eta \ , \ \xi \neq \eta \quad e \quad 0 < \lambda_0 < 1 \tag{4}$$

Façamos,

$$x(\lambda) = \eta + \lambda(\xi - \eta) \tag{5}$$

$$x(\lambda_0) = x \tag{6}$$

Representando a j-ésima componente de $x(\lambda)$ por $x_j(\lambda)$, teremos:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} a_j x_j(\lambda) &= \sum_{j=1}^{n} a_j(\eta_j + \lambda(\xi_j - \eta_j)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} (a_j\eta_j + \lambda(a_j\xi_j - a_j\eta_j)) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j\eta_j + \lambda \sum_{j=1}^{n} (a_j\xi_j - a_j\eta_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n} a_j\eta_j + \lambda(\sum_{j=1}^{n} a_j\xi_j - \sum_{j=1}^{n} a_j\eta_j) \\
&= b + \lambda(b - b) = b
\end{aligned}$$

Portanto, $x(\lambda) \in S$ para todo λ tal que $x_j(\lambda) \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Consequentemente $x(\lambda) \in S$ para todo $\lambda > 0 \Longrightarrow \xi_j \geq \eta_j$. Da mesma forma $x(\lambda) \in S$ para todo $\lambda < 0 \Longrightarrow \xi_j \leq \eta_j$.

Seja $A = \{\lambda | x(\lambda) \in S$, limitado superiormente ou inferiormente$\}$. Assumimos sem perda de generalidade que;

$$-\infty < \inf_{\lambda \in A} \lambda$$

Seja,

$$\underline{\lambda} = \inf_{\lambda \in A} \lambda < 0$$

e $$\overline{\lambda} = \sup_{\lambda \in A} \lambda > 1$$

Se A for ilimitado e $\overline{\lambda} = \infty$, teremos:

$$x_j(\lambda) \geqslant 0 \quad \text{para } \underline{\lambda} < \lambda < \overline{\lambda} \quad \text{e} \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{7}$$

Mostraremos agora que para

$\underline{\lambda} < \lambda < \overline{\lambda}$, $x_j(\lambda) \geqslant 0$ se $x_j(\lambda_0) \geqslant 0$.

Suponhamos que $x_j(\lambda_0) = 0$, isto é

$$\lambda_0 \xi_j + (1 - \lambda_0)\eta_j = 0 \tag{8}$$

Como $0 < \lambda_0 < 1$, a equação acima é satisfeita $\Longrightarrow$ $\xi_j = 0$ e $\eta_j = 0$. Portanto,

$$x_j(\lambda) = \eta_j + \lambda(\xi_j - \eta_j) = 0 \quad \text{para } \underline{\lambda} < \lambda < \overline{\lambda}$$

Suponhamos agora $x_j(\lambda) > 0$. Se $\xi_j \neq \eta_j$, teremos de (5) que $x_j(\lambda)$ é uma função estritamente monótona. Consequentemente $\underline{\lambda} < \lambda_0 < \overline{\lambda}$ e a igualdade (7) é satisfeita somente quando $x_j(\lambda) > 0$ para $\underline{\lambda} < \lambda < \overline{\lambda}$. Por outro lado se $\xi_j = \eta_j$, de (5) teremos:

$$x_j(\lambda) = \eta_j = x(\lambda_0) > 0$$

Pela linearidade da função $x_j(\lambda)$ e o fato de $x(\lambda) \notin S$ para $\lambda < \underline{\lambda}$, existe um intervalo j_0, tal que $x_{j_0}(\lambda_0) > 0$,

e $x_{j_0}(\lambda_0) < 0$ para $\lambda < \underline{\lambda}$. Como a função x_{j_0} é contínua e

$x_j(\lambda) \geqslant 0$, garante que

$$x_{j_0}(\underline{\lambda}) = 0$$

Resumindo os resultados, teremos que qualquer componente nula de $x(\lambda_0)$ é uma componente nula de $x(\underline{\lambda})$, enquanto $x(\underline{\lambda})$ tem pelo menos uma componente para a qual a componente correspondente em $x(\lambda_0)$ é positiva. Logo $x(\underline{\lambda}) \in S$.

Se $\overline{\lambda} < \infty$, considerações semelhantes mostram que o vetor $x(\overline{\lambda})$ tem no mínimo uma componente nula a mais que $x(\lambda_0)$ e $x(\overline{\lambda}) \in X$.

Lembramos que;

$$\emptyset_1(x) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_i x_i \qquad \text{e} \qquad \emptyset_2(x) = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \, \delta(x_j)$$

é claro que

$$\emptyset_2 \left[x(\underline{\lambda})\right] < \emptyset_2 \left[x(\lambda_0)\right] = \emptyset_2(x) \tag{9}$$

e se $\overline{\lambda} < \infty$,

$$\emptyset_2 \left[x(\overline{\lambda})\right] < \emptyset_2 \left[x(\lambda_0)\right] = \emptyset_2(x) \tag{10}$$

Se $\overline{\lambda} = \infty$,

$$\emptyset_2 \left[x(\lambda)\right] = \emptyset_2 \left[x(\lambda_0)\right] = \emptyset_2(x) \tag{11}$$

para todo $\lambda \geqslant \lambda_0$, desde que, para $\underline{\lambda} < \lambda < \overline{\lambda}$, $x_i(\lambda)$ é zero ou positivo, dependendo de $x_i(\lambda_0)$ ser nulo ou positivo.

Observando que $\emptyset_1 \; x(\lambda)$ é uma função linear de λ, segue que se $\overline{\lambda}$ é finito,

$$\emptyset_1 \left[x(\underline{\lambda})\right] < \emptyset_1 \left[x(\lambda_0)\right] = \emptyset_1(x) \tag{12}$$

ou

$$\emptyset_1 \left[x(\overline{\lambda})\right] < \emptyset_1 \left[x(\lambda_0)\right] = \emptyset_1(x) \tag{13}$$

Se $\overline{\lambda} = \infty$, então (2) deve ser satisfeira. Neste caso, a relação $\emptyset_1 \left[x(\underline{\lambda})\right] > \emptyset_1 \left[x(\lambda_0)\right]$ implica que $\emptyset_1 \left[x(\lambda)\right] \to -\infty$ quando $\lambda \to \infty$, visto que $\emptyset_1$ é linear.
Isto contradiz a hipótese de que $\inf_{x \in S} \emptyset(x) > -\infty$

Através das desigualdades de (9) a (13) vemos que existe um ponto $x' \in S$ para o qual

$$\emptyset(x) = \emptyset_1(x') + \emptyset_2(x') < \emptyset_1(x) + \emptyset_2(x) = \emptyset(x),$$

onde x' tem pelo menos uma componente nula a mais que x. (Se $\overline{\lambda} = \infty$, então $x' = x(\underline{\lambda})$; se $\overline{\lambda} < \infty$, então x' será um dos dois vetores $x(\underline{\lambda})$, $x(\overline{\lambda})$). Se x' fôr um ponto extremo, (2) está provado. Por outro lado, numa iteração substituirmos x por x', teremos um novo ponto x'' tal que,

$$\emptyset(x'') < \emptyset(x')$$

onde x'' tem pelo menos uma componente nula a mais que x'. É claro que após quando muito n construções deste tipo teremos um ponto x'' satisfazendo (2).

CAPÍTULO III

MÉTODOS EXATOS

Neste capítulo descreveremos alguns métodos exatos como o de Branch e Bound, Decomposição de Benders.

III.1 - Formulação do Problema de Expansão de Redes

A formulação do problema de expansão de redes que apresentaremos é uma versão do problema geral do custo fixo. Esta formulação sob condições especiais poderá ser reduzido a um problema de transporte com custo fixo como segue.

Seja R^e uma rede existente, definida por (N, A, Y^e) onde N e A são conjuntos de nós e arcos respectivamente, e $Y^e \in R^m$ é o vetor de capacidades dos arcos no início do plano horizontal.

Seja R definida por (N,A, Y) uma expansão da rede R^e, então $Y \geq Y^e$.

O problema poderá ser fomulado matematicamente como segue:

$$\text{minimizar} \quad z = \sum_{(i,j) \in A} f_{ij} \cdot \delta_{ij} + c_{ij}(Y_{ij} - Y^e_{ij}) + t_{ij}\, x_{ij}$$

sujeito a:

$$\sum_{j \in \Gamma(i)} (x_{ij} - x_{ji}) = p_i \quad , \qquad \forall\ i \in N.$$

$$|x_{ij}| \leqslant Y_{ij}$$

$$Y_{ij} \geqslant Y^e_{ij} \geqslant 0 \qquad \forall\ (i,j) \in A$$

$$x_{ij} \in R$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } Y_{ij} > Y^e_{ij} \\ 0, \text{ se } Y_{ij} = Y^e_{ij} \end{cases} \qquad \forall (i,j) \in A$$

onde,

$N = \{1, 2, \ldots, n\}$ é o conjunto de nós

P_i, $i \quad N$ é o fluxo requerido que será positivo se existir demanda, negativo se existir disponibilidade e zero se i for um nó de embarque (mercadorias)

$A = \{(i,j) \mid i,j \in N \text{ e } i < j\}$, é o conjunto de arcos com cardinalidade $m \leqslant n(n-1)/2$.

$\Gamma(i) = \{j \in N \mid (i,j) \in A \text{ ou } (j,i) \in A\}$ é o conjunto de todos os nós adjacentes ao nó $i \in N$.

Ω é o conjunto de soluções viáveis do problema.

Para todo $(i,j) \in A$ teremos:

- fluxos: $x_{ij} \in R$ com as seguintes convenções:

  $x_{ij} \leqslant 0$, fluxo de j para i

  $x_{ij} > 0$, fluxo de i para j

- capacidades existentes: $Y^e_{ij} \in R^+$

- capacidades finais: $Y_{ij} \in R^+$

- custos por unidade de transporte: $t_{ij} \in R^+$

- custos de expansão

$$c(Y_{ij}) = \begin{cases} f_{ij} + c_{ij}(Y_{ij} - Y^e_{ij}), & \text{se } Y_{ij} > Y^e_{ij} \\ 0 & , \text{se } Y_{ij} = Y^e_{ij} \end{cases}$$

  onde c_{ij} é o custo unitário e f_{ij} é o custo fixo.

- $\delta_{ij} \in \{0,1\}$ é uma variável bivalente

$$\Omega \neq \phi \Longrightarrow \sum_{i \in N} P_i = 0 \text{ e } \Gamma(i) \neq \phi, \forall i \in N$$

$|P|$ é um problema não linear com $4m + n$ restrições e $3m$ variáveis, é possível transformá-lo em um problema de programação linear inteira mista.

As variáveis x_{ij} não tem restrições nos sinais, então poderão ser substituídas por $2m$ variáveis x^+_{ij} e x^-_{ij} que poderão ser não-negativas como segue.

$$x_{ij} = x^+_{ij} - x^-_{ij} \quad , \forall \ (i,j) \in A$$

III.1.1 - Proposição

As variáveis x^+_{ij} e x^-_{ij} nunca estarão na mesma base.

<u>Prova</u>:

Seja $\Psi(t)$ uma base para $|P|$ na t-ésima iteração.

Suponhamos por absurdo que dois vetores coluna $\beta^+(t)$ e $\beta^-(t)$, correspondentes aos coeficientes de x^+_{ij} e x^-_{ij} estão sempre na mesma base. Portanto, $\beta^+(t) = - \beta^-(t)$, isto é, eles são linearmente dependentes, logo Det $|\Psi(t)| = 0$ e $\Psi(t)$ não é uma base.

III.1.2 - <u>Proposição</u>

Seja,

$$\phi = \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} \cdot \delta_{ij} + c_{ij}(Y_{ij} - Y^e_{ij})$$

$$z_1 = \phi + \sum_{(i,j)\in A} t_{ij} \ |x_{ij}|$$

$$z_2 = \phi + \sum_{(i,j)\in A} t_{ij} \ (x^+_{ij} + x^-_{ij}), \text{ então:}$$

$$\min_{\Omega} z_1 = \min_{\Omega} z_2$$

Prova:

Da proposição 1, em qualquer iteração temos:

$$x_{ij} = \begin{cases} x_{ij}^{+} \\ 0 \\ x_{ij}^{-} \end{cases}$$

$$x_{ij}^{+} \ , \ x_{ij}^{-} \geq 0, \ x_{ij} \in R, \ \forall (i,j) \in A$$

então

$$|x_{ij}| = \begin{cases} x_{ij}^{+} \\ 0 \\ x_{ij}^{-} \end{cases}$$

$$x_{ij}^{+} \ , \ x_{ij}^{-} \geq 0 \quad e \quad x_{ij} \in R \ , \ \forall (i,j) \in A$$

Desde que somente x_{ij}^{+} ou x_{ij}^{-} estará em qualquer base, podemos substituir na função objetivo,

$$|x_{ij}| = x_{ij}^{+} + x_{ij}^{-}$$

$$x_{ij}^{+} \ , \ x_{ij}^{-} \geq 0 \quad \text{para } \forall (i,j) \in A$$

Logo,

$$\min_{\Omega} z_1 = \min_{\Omega} x_2$$

Observamos que o fato de termos $x_{ij}^{+} = - x_{ij}^{-}$, significa que o fluxo sobre (i,j) vai de j para i.

Usando o fato de $t_{ij} > 0$, para $\forall (i,j) \in A$, é possível substituir a restrição

$$|x_{ij}| \leq Y_{ij} \qquad \text{para } \forall (i,j) \in A$$

por

$$Y_{ij} \geq x_{ij}^{+}$$

$$Y_{ij} \geq x^-_{ij} \quad \text{para } \forall (i,j) \in A$$

e podemos reescrever o problema $|P|$, como segue:

$$\text{minimizar } z = \sum_{(i,j)\in A} f_{ij} \cdot \delta_{ij} + c_{ij}(Y_{ij}-Y^e_{ij})+t_{ij}(x^+_{ij}+x^-_{ij})$$

sujeito a:

$$\sum_{j\in\Gamma(i)} (x^+_{ij} - x^-_{ij})-(x^+_{ji} - x^-_{ji})=P_i, \text{ para } \forall i \in N$$

$$Y_{ij} \geq x^+_{ij}$$

$$Y_{ij} \geq x^-_{ij}$$

$$x^+_{ij} , x^-_{ij} \geq 0$$

$$Y_{ij} \geq Y^e_{ij}$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ se } Y_{ij} > Y^e_{ij} \\ 0, \text{ se } Y_{ij} = Y^e_{ij} \end{cases}$$

para $\forall (i,j) \in A$

Temos agora, um problema de programação inteira mista com 5m variáveis e 3m + n restrições.

É interessante notar que sob circunstâncias especiais o problema $|P|$ se reduz a um problema de transporte com custo fixo.

III.1.3 - Proposição

Se $Y^e_{ij} = 0$ para $\forall (i,j) \in A$, uma solução ótima para o problema $|P|$ será atingido em $|x^*_{ij}| = Y^*_{ij}$ para $\forall (i,j) \in A$. Ver demonstração na referência ( ).

Usando a proposição acima, é possível mudar o problema $|P|$ para um problema de transporte com custo fixo.

$$\text{minimizar } z = \sum_{(i,j)\in A} f_{ij}\ \delta_{ij} + (c_{ij} + t_{ij})\ (x^+_{ij} + x^-_{ij})$$

sujeito a:

$$\sum_{j\in\Gamma(i)} (x^+_{ij} - x^-_{ij}) - (x^+_{ji} - x^-_{ji}) = P_i, \forall i \in N$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } x^+_{ij} + x_{ij} > 0 \\ 0, & \text{se } x^+_{ij} + x^-_{ij} = 0 \end{cases} \qquad \forall (i,j) \in A$$

$$x^+_{ij} \geq 0 \quad \text{e} \quad x^-_{ij} \geq 0 \quad , \forall (i,j) \in A$$

III.2 - **Método de Branch e Bound**

Descreveremos o método que será usado para encontrar um limite inferior ótimo inicial para o problema, que consistirá em resolver o problema |P| como um problema linear ordinário. Em seguida, a solução ótima será trocada por uma solução inteira viável para |P| da seguinte maneira:

- se $\delta^*_{ij} > 0$, então troca-se o seu valor por

  $\delta^*_{ij} = 1$, $\forall (i,j) \in A$

- recalcule o valor da função objetivo que será usado como limite inferior inicial Z_B

III.2.1 - Escolha das variáveis para as ramificações

- a idéia é tentar trocar uma solução inviável para uma solução inteira viável. Escolhemos a variável δ_{pq} tal que:

$$\delta_{pq} = \underset{Y_{ij} - Y^e_{ij} \neq 0}{\text{mínimo}} \{\delta_{ij}\}$$

Isto é, a variável com a menor parte fracional perto do seu limite inferior inteiro.

- escolha a variável associada ao ramo que tem a maior sobre carga, isto é:

$$\delta_{pq} \ni Y_{pq} - Y^e_{pq} = \underset{\neq 0}{\text{máximo}} \quad Y^e_{ij}$$

- escolha a variável δ_{pq} que tem o menor custo de participação no valor da função objetivo, relacionado ao problema contínuo associado ao $|P|$.

III.2.2. - Entre as estratégias escolhidas para o sub-problema foram feitos os seguintes testes:

- "LIFO" A idéia é sempre ramificar o problema ativo mais novo criado pela ramificação (last - in - first-out). Este contrôle tem a vantagem de que para muitos problemas é requerido o mínimo de armazenagem de cálculos.

- "LAND e DOIG" Este programa faz a ramificação do problema limitado, que tem o menor limite atual.

- Melhor Projeção - A regra é escolher dentre todos os nós candidatos para resolver o subproblema a seguir, o nó para o qual $\hat{z}_k$ é um mínimo onde:

$$\hat{z}_k = z_k = \frac{(z_I - z_o)}{S_o} \cdot s_k$$

z_o = valor da função objetivo associado a solução de $|P|$ como um problema linear comum

z_k = valor da função objetivo associado a uma solução inteira viável usada como um limite inferior.

s_k = soma de inteiros inviáveis no nó k

$s_k = \sum_{(i,j) \in A}$ mínimo $\{\delta_{ij}, (1 - \delta_{ij})\}$

III.3. - Método de Decomposição de Benders

Em 1962, Benders (2) mostrou que um problema de Programação Inteira Mista (PPIM) pode ser formulado como um Problema de Programação Inteira (PPI). O algorítimo é baseado na resolução sucessiva de um (PPL) e um (PPI).

III.2.1. - Formulação de um (PPIM) como um (PPI)

Seja o (PPIM),

$$\left.\begin{array}{lll} \text{minimizar} \quad z = cx + dy & & (1) \\ \text{sujeito a :} \quad Ax + dy & & (2) \\ \qquad x \geq 0 \text{ e inteiro} & & (3) \\ \qquad y \geq 0 & & (4) \end{array}\right\} \quad \text{Problema I}$$

Tomemos $x = \overline{x}$, satisfazendo (3) e substituindo no problema I, teremos:

$$\begin{array}{l} \text{minimizar} \quad z = c\overline{x} + dy \\ \text{sujeito a:} \quad A\overline{x} + Dy \geq b \\ \qquad\qquad y \geq 0 \end{array}$$

que é um (PPL). Como $c\overline{x}$ é uma vostante, teremos

$$\left.\begin{array}{lll} \text{minimizar } dy & & (5) \\ \text{sujeito a:} \quad Dy \geq b - A\overline{x} & & (6) \\ \qquad y \geq 0 & & (7) \end{array}\right\} \quad \text{Problema II}$$

Tomemos o dual do problema II,

$$\left.\begin{array}{lll} \text{maximar} \quad u(b - Ax) & & (8) \\ \text{sujeito a:} & & \\ \qquad uD \leq d & & (9) \\ \qquad u \geq 0 & & (10) \end{array}\right\} \quad \text{Problema III}$$

Seja U o conjunto de restrições do Problema III isto é:

$$U = \{u \geqslant 0 | \; uD \leqslant d\}$$

que é politopo convexo, e os valores de u são independentes de x.

Denominaresmos u^p os pontos extremos de U, para $p = 1, 2, \ldots, P$ e v^s os raios vetores de U para $D = 1,2,\ldots,S$. Da maneira como definimos U implica na existência de pelo menos um vértice, pois $u \geqslant 0$.

Observações:

i) Se no problema III, $U = \phi$, então os problemas II e III serão ilimitados ou não admitirão soluções viáveis.

ii) Se o problema III admitir solução limitada, então, pelo menos uma será vértice u^p de U.

iii) Se o problema III admitir solução ilimitada para um certo $x = \bar{x}$, isto é, se existir pelo menos um raio vetor v^s tal que $v^s(b - Ax) > 0$, então o problema II não terá solução para $x = \bar{x}$ ou o problema I não admitirá $\bar{x}$ como solução viável.

Se $U \neq \phi$, o problema III poderá ser transformado em um outro problema,

maximizar $u^p(b - Ax)$ (11)
$p = 1,2,\ldots,P$

sujeito a:

$v^s(b - Ax) \leqslant 0 \quad (s, 1, 2, \ldots, 5)$ (12)

$x \geqslant 0$ e inteiro (13)

Podemos reescrever o problema I na forma:

$$\text{minimizar } \{cx + \underset{y}{\text{mínimo}}\ dy\}$$

sujeito a:

$$Dy \geqq b - Ax$$
$$x \geqq 0 \text{ e inteiro}$$
$$y \geqq 0$$

Quando o problema III tiver solução limitada, o mínimo de dy será igual ao máximo de $u(b - Ax)$, logo o problema I poderá ser escrito na forma:

$$\underset{x}{\text{minimizar}} \{cx + \underset{p=1,2,\ldots,P}{\text{máximo}} \quad u^P(b - Ax)\}$$

sujeito a:

$$v^s(b - Ax) \leqq 0 \qquad (s = 1,2,\ldots,s)$$
$$x \geqq 0 \text{ e inteiro}$$

Fazendo $Z = cx + \underset{p=1,2,\ldots,P}{\text{máximo}} \quad u^P(b - Ax)$, teremos:

$$Z \geqq cx + u^P(b - Ax) \qquad (p = 1,2,\ldots,P)$$

e o (PPIM) será equivalente ao (PPIM),

$$\left.\begin{array}{llll} \underset{x}{\text{minimizar}} & Z & & (14) \\ \text{sujeito a:} & & & \\ & Z \geqq cx + u^P(b - Ax) & (p=1,2,\ldots,P) & (15) \\ & v^S\ (b - Ax) \leqq 0 & (s=1,2,\ldots,S) & (16) \\ & x \geqq 0 \quad \text{e inteiro} & & (17) \end{array}\right\} \text{Problema IV}$$

Ao resolvermos o problema acima obteremos uma solução x*, substituindo no problema II obteremos y*. O par(x*,y*) será a solução ótima do problema I.

A idéia desenvolvida por Benders é encontrar a solução do problema IV sem ter que trabalhar com todas as restri ções. O problema será relado da seguinte maneira:em cada iteração a dicionaremos uma restrição do tipo (15) ou (16). Este problema relaxado dará um limite inferior e o problema III um limite superior para o problema I.

O problema IV relaxado é da forma,

$$\left.\begin{array}{l} \text{minimizar } Z, \\ \text{sujeito a:} \\ \quad Z \geqslant cx + u^P (b - Ax) \\ \quad p = 1,2,\dots,P' \leqslant P \\ \quad v^s (b - Ax) \leqslant 0 \\ \quad s = 1,2,\dots,S' \leqslant S \\ \quad x \geqslant 0 \text{ e inteiro} \end{array}\right\} \quad \text{Problema V}$$

III.2.2 - Algorítmo de Benders

Passo 1: Escolher um vetor inteiro não-negativo $\bar{x}$ para x. Fazer Z^{sup} (Z^{inf}) arbitrariamente grande (pequeno). Vá para o passo seguinte.

Passo 2: Resolver o problema III para $x = \bar{x}$. Se este não admitir solução viável, pare; pois o problema I será ilimitado ou vazio. Caso contrário poderemos ter:

2.1 - Uma solução limitada u^P(vértice). Daremos a Z^{sup} o valor $c\bar{x} + u^P(b - Ax)$, sempre que o valor que estava em Z^{sup} seja maior que este. Vá para o Passo 3.1

2.2 - Solução ilimitada, fornecendo um u^P e um v^s. Vá para o Passo 3.2

Passo 3: 3.1 - Acrescentar ao problema V uma restrição do tipo $Z \geqslant cx + u^P(b - Ax)$. Vá para o Passo 4.

3.2 - Acrescentar ao problema V uma restrição do tipo $v^s(b - Ax) \leqslant 0$. Vá para o Passo 4.

Passo 4: Se o problema V não admitir solução viável, pare, pois o problema I não tem solução.
Caso contrário fazemos Z^{inf} igual ao valor de Z obtido

nesta iteração quando resolvemos o problema V. Vá para o Passo 5.

Passo 5: Se $Z^{inf} < Z^{sup}$, vá para o Pass2, fazendo $x = \bar{x}$, obtido no Passo 4, isto é, o ótimo do problema V. Se $Z^{inf} = Z^{sup}$, o valor de $\bar{x}$ obtido no Passo 4 é levado ao problema II, que ao ser resolvido nos fornecerá $\bar{y}$. O par $(\bar{x}, \bar{y})$ é solução ótima do problema. O valor da função objetivo do problema I será, $c\bar{x} + k\bar{y} = z^{inf} = z^{sup}$.

III.2.3 Uma aplicação para o Problema de Instalação de Fábricas

$$\text{minimizar} \quad \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} k_i y_i$$

sujeito a:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq n_i y_i \qquad (j = 1,2,\ldots,m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \qquad (j = 1,2,\ldots,n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad \text{para } \forall i,\ j$$

$$y_i = 0 \text{ ou } 1 \qquad (i = 1,2,\ldots,m)$$

onde,

k_i = custo fixo para instalar a fábrica i

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{se } x_{ij} > 0 \\ 0 & \text{se } x_{ij} = 0 \end{cases}$$

c_{ij} = custo de transporte por unidade do produto ($c_{ij} > 0$)

x_{ij} = fração de demanda satisfeita pela fábrica i ao consumidor j

n_i = número de consumidores atendidos pela fábrica i.

m = número de fábricas

n = número de consumidores.

Observamos que para a variável y bivalente, o problema I' é reduzido a um (PPL) pois,

$\sum_{i=1}^{m} k_i y_i$ é uma constante.

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & \sum\limits_{i=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \\
\text{sujeito a:} & \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} > -n_i y_i \,, \qquad (i = 1, \ldots, m) \\
 & \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = 1 \,, \qquad (j = 1, \ldots, n) \\
 & x_{ij} \geqq 0 \quad \text{para} \quad \forall\, i,j
\end{array}\right\} \text{Problema II'}$$

Tomemos o dual do problema II',

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & \sum\limits_{j=1}^{n} v_j - \sum\limits_{i=1}^{m} n_i y_i u_i \\
\text{sujeito a:} & \\
 & v_j - u_i < c_{ij} \\
 & u_i > 0 \\
 & v_j \quad \text{qualquer}
\end{array}\right\} \text{Problema III'}$$

Seja U o conjunto de restrições do Problema III' isto é:

$U = \{ (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n) \mid v_j - u_i < c_{ij}$ para $\forall$ ij e $u_i \geqq 0$ $(i = 1, \ldots, m) \}$ independentes de x com P pontos extremos (S raios vetores) com componentes (u_i^p, v_j^p) e (u_i^s, v_j^s) respectivamente.

O (PPIM) será equivalente ao (PPI),

$$\left.\begin{array}{ll}
\text{minimizar} & Z \\
\text{sujeito a:} & Z \geqq \sum\limits_{i=1}^{m} k_i y_i + \sum\limits_{j=1}^{m} v_j^p - \sum\limits_{i=1}^{m} n_i y_i u_i^p \\
 & \qquad (p = 1,\ 2,\ \ldots,\ P) \\
 & \sum\limits_{j=1}^{n} v_j^s - \sum\limits_{i=1}^{m} n_i y_i u_i^s \leqq 0 \\
 & \qquad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ s) \\
 & y_i = 0 \text{ ou } 1, \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m)
\end{array}\right\} \text{Problema IV'}$$

III.3.4 - Solução do Problema Dual

Para a variável y bivalente ($y \neq 0$), o problema II' será resolvido por inspeção. Em particular quando $y_i = 1$, a fábrica i será instalada e poderá atender cada um dos n consumidores. Como $c_{ij} > 0$ e nada será transportado de uma fábrica não instalada ($y_i = 0$), uma solução ótima será, atender cada consumidor j da fábrica i(j) com menor custo de transporte.

Seja,

$$I = \{i | y_i = 1\} \quad (1)$$

Uma solução ótima para o problema II', será:

$$x_{i(j),j} = 1 \quad \text{e}$$

$$x_{i,j} = 0 \quad \text{para } (j = 1,\ldots,n)$$

onde,

$$c_{i(j),j} = \underset{i \in I}{\text{mínimo}} \{c_{ij},\ j = 1,\ldots,n\} \quad (2)$$

Para obter a solução do dual correspondente, temos da teoria das folgas complementares que:

$$v_j - u_{i(j)} = c_{i(j),j} \quad \text{ou}$$

$$v_j = c_{i(j),j} + u_{i(j)} \quad (3)$$

Substituindo (3) no problema III' e observando que $y_i = 1$ se i I e $y_i = 0$ caso contrário, teremos um problema equivalente.

$$\text{maximizar} \sum_{j=1}^{n} (c_{i(j),j} + u_{i(j)}) - \sum_{i=1}^{m} n_i u_i y_i$$

sujeito a:

$$c_{i(j),j} + u_{i(j)} - u_i \leqslant c_{ij} \ , \ \forall i,j$$

$$u_i \geqslant 0 \quad , \ (i = 1, \ldots, m)$$

ou

$$\text{maximizar} \quad \sum_{j=1}^{n} c_{i(j),j} + \sum_{j=1}^{n} u_{i(j)} - \sum_{i \in J} n_i u_i$$

sujeito a:

$$u_{i(j)} - u_i \leqslant c_{ij} - c_{i(j),j} \qquad \text{para } \forall i,j$$

$$u_i \geqslant 0 \ , \ (i = 1,\ldots,m)$$

Como $\sum_{j=1}^{n} c_{i(j),j}$ é constante, podemos reescrever o problema na forma:

$$\text{maximizar} \quad \sum_{j=1}^{n} u_{i(j)} - \sum_{i \ I} n_i u_i$$

sujeito a:

$$u_{i(j)} - u_i \leqslant c_{ij} - c_{i(j),j}$$

Problema III'

para $\forall i,j$

$$u_i \geqslant 0 \ (i = 1,\ldots,m)$$

Para cada j, i(j) corresponderá a alguma fábrica i, onde $i \in I$. Definamos N_i como sendo o número de vezes que o índice i é um i(j), então:

$$\sum_{j=1}^{n} u_{i(j)} = \sum_{i \ I} N_i u_i$$

O problema III' poderá ser reescrito,

$$\text{maximizar} \quad \sum_{i \in I} N_i u_i - \sum_{i \in I} n_i u_i$$

sujeito a:

$$-u_i \leqslant c_{ij} - c_{i(j),j} - u_{i(j)}$$

$$u_i \geqslant 0$$

ou

maximizar $\sum_{i \in I} (N_i u_i - n_i u_i)$

sujeito a:

$$u_i \geqq - c_{ij} + c_{i(j),j} + u_{i(j)}$$

$$(i = 1, \ldots, m)$$

$$(j = 1, \ldots, n)$$

$$u_i \geqq 0, \; (i = 1, 2, \ldots, m)$$

ou

$$\left.\begin{array}{l} \text{maximizar} \quad \sum_{i \in I} (N_i - n_i)\, u_i \\ \text{sujeito a:} \\ \quad u_i \geqq c_{i(j),j} - c_{ij} + u_{i(j)} \\ \quad u_i \geqq 0 \\ \qquad (i = 1,\ldots,m) \\ \qquad (j = 1,\ldots,n) \end{array}\right\} \quad \text{Problema III'}$$

Como N_i poderá ser o máximo n_i, $N_i - n_i$, será não-positivo. Assim, a função objetivo tornará u_i tão pequeno quanto possível. Como $u_{i(j)} > 0$, e só aumenta o valor de u_i, uma solução ótima para o problema III" e III' será $u_{i(j)} = 0$ para $\forall\ i(j)$. Então, para cada índice i, u_i precisará ser não-negativo e $u_i \geqq c_{i(j),j} - c_{ij}$ para cada $j = 1,\ldots,n$.

Se fizermos, $m_i = \underset{j=1,\ldots,n}{\text{máximo}} \{c_{i(j),j} - c_{ij}\}$ (4)

para cada $i = 1,\ldots,m$, $i \neq 1(j)$ para todo $j = 1,\ldots,n$ uma solução ótima será:

$$u_i = \text{máximo} \; \{0, m_i\}$$

Resumindo e usando (3), teremos uma solução ótima para o problema III',

$$\left.\begin{array}{l} v_j = c_{i(j),j} \quad (j=1,\ldots,n) \\ u_{i(j)} = 0 \qquad \text{e} \\ u_i = \text{máximo } \{0,\ m_i\} \\ \qquad i=1,\ldots,m,\ i \neq i(j) \text{ para } j=1,\ldots,n \end{array}\right\} \tag{5}$$

Um limite superior para a solução ótima do problema de Instalação de Fábricas será dado pelo problema III".

$$Z^u = \sum_{i \in I} k_i + \sum_{j=1}^{n} c_{i(j),j} - \sum_{i \in I} n_i u_i \tag{6}$$

Pela teoria da dualidade podemos escrever

$$Z^u = \sum_{i \in I} k_i + \sum_{j=1}^{n} c_{i(j),j} \tag{7}$$

O (PPL) que aparece no Passo 2 será resolvido por inspeção usando (5). A solução ótima cujas componentes são (u_i, v_j) geram uma desigualdade para o (PPI) no Passo 3 e um limite superior definido por (6) ou (7). Resolvido o (PPI), teremos uma nova variável y bivalente e um limite inferior Z^l. Quando $Z^l = Z^u$, teremos a solução ótima.

CAPÍTULO IV

MÉTODOS HEURÍSTICOS

Entre os métodos heurísticos mais eficientes podemos citar os de Walker e Steinberg (17) que são facilmente adaptáveis aos problemas de grande parte. Nestes métodos, cada iteração consiste em deslocar um ponto extremo para um ponto extremo adjacente como no método Simplex. Desde que as restrições sejam lineares, podemos usar o método Simplex revisado para determinar os pontos extremos, com uma modidicação.

Antes de descrevermos esses métodos introduziremos as seguintes notações:

B = matriz base corrente

a_j = j-ésima coluna de A

$y_j = B^{-1}a_j = (y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{mj})^T$

$x_B = (x_{B1}, x_{B2}, \ldots, x_{Bm})^T$, vetor m x 1 formado pelas variáveis básicas.

c_B = vetor m x 1 formado pelos coeficientes das variáveis básicas da função objetivo.

$k_B = (k_{B1}, k_{B2}, \ldots, k_{Bm})^T$, vetor m x 1 formado pelos custos fixos correspondentes as variáveis básicas.

$z_j = c_B y_j$

Como em programação linear, se a variável x_j for escolhida para entrar na base, a variável x_{Br} que deixa a base será escolhida como segue:

$$\Theta_j = \frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \underset{i}{\text{mínimo}} \left\{ \frac{x_{Bi}}{y_{ij}} \middle| \; y_{ij} > 0 \right\} \qquad (1)$$

Para determinar a variação correspondente na função objetivo, definimos:

$$V = \{ i \mid \frac{x_{Bi}}{y_{ij}} = \frac{x_{Br}}{y_{rj}} \}$$

$$W = \{ i \mid x_{Bi} = 0 \quad \text{e} \quad y_{ij} < 0 \}$$

A variação na função objetivo causada pela troca de x_{Br} por x_j na solução básica será dada por:

$$\theta_j = \begin{cases} k_j + \sum\limits_{i \in W} k_{Bi} - \sum\limits_{i \in V} k_{Bi} - \theta_j(z_j - c_j) , & \text{se } \theta_j > 0 \\ 0 , & \text{se } \theta_j = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

O termo $- \theta_j(z_j - c_j)$ representa o acréscimo para a variação da função objetivo, devido a parte linear. Se todos os custos fixos forem nulos, então, o valor do termo acima será a variação da função objetivo. Além disso, o valor da função objetivo aumentará de k_j se a variável x_j que entra na base for positiva, isto é, se $\theta_j > 0$. Se algumas variáveis básicas x_{Bi} forem nulas e os correspondentes y_{ij}, negativos, então cada uma das variáveis x_{Bi} serão não-nulas na solução básica subsequente, de modo que o valor da função objetivo aumentará adicionando a soma dos custos fixos correspondentes (isto é, o termo $\sum\limits_{i \in W} k_{Bi}$). Se houver empate na variável que deverá deixar a base, teremos mais de uma variável nula na solução básica resultante, a saber: a variável básica que deixou a base e todas as outras variáveis x_{Bi} cuja razão

$$\frac{x_{Bi}}{y_{ij}} = \text{mínimo} \{ \frac{x_{Br}}{y_{rk}} \}$$

O termo $- \sum\limits_{i \in V} k_{Bi}$ de (2) representa o decrescimento correspondente na função objetivo.

A primeira fase das heurísticas de Walker e Steinberg consiste em efetuar as iterações semelhantes as do Método

Simplex, isto é, em cada iteração é escolhida uma variável x_j que deverá entrar na base, cujo c_j correspondente é negativo de maneira que o valor da função objetivo dimina em cada iteração. Quando todos os c_j forem não-negativos a solução não terá melhora.

A principal dificuldade em resolver o (PCF) está no fato de que, embora, um ponto extremo particular possa ser uma solução melhor que os seus pontos extremos adjacentes, não seja a solução ótima. Tal ponto extremo será denominado ótimo local do (PCF).

IV.1 - Descrição das Heurísticas

Descreveremos duas heurísticas de Walker e Steinberg, todas partindo de uma solução ótima local.

Os dois primeiros passos das heurísticas são:

Passo 1: Achar uma solução básica viável inicial de $S = \{x \mid Ax = b, x \geqslant 0\}$

Passo 2: Achar uma solução ótima local do (PCF)

IV.1.1 - Heurística de Steinberg

Para controlar o número de iterações efetuadas após a determinação do ótimo local, devemos estipular valores para os parâmetros α_0 e β_0 onde,

α_0 = número máximo de iterações consecutivas admitidas para encontrar um novo ponto extremo com o valor de z menor que z_0.

β_0 = número máximo de iterações admitidas nas quais o valor da função objetivo não diminuiu.

Além disso definimos dois contadores, α_1 e β_1 que indicam respectivamente o número de iterações consecutivas, nas quais o valor de z_0 não obteve melhora e em que o valor da função objetivo não diminuiu.

Iniciamos fazendo $\alpha_1 = \beta_1 = 0$

Passo 3: Achar o c_j que fornece o menor acréscimo em z e introduza na base, o x_j correspondente. Faça $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ e vá para o Passo 4.

Passo 4: Escolha um x_j cujo c_j correspondente seja negativo e introduza na base. Denominaremos x_1 a solução resultante e z_1 o valor da função objetivo e vá para o Passo 5.

Passo 5: Compare z_1 com z_0

5.1 se $z_1 < z_0$, volte para o Passo 2

5.2 se $z_1 = z_0$ e $x_1 \neq x_0$, faça $\alpha_1 = \alpha_1 + 1$. Se $\alpha_1 \leqslant \alpha_0$, volte para o Passo 4; senão, STOP

5.3 se $z_1 = z_0$ e $x_1 = x_0$, faça $\alpha_1 = \alpha_1 + 1$ e $\beta_1 = \beta_1 + 1$. Se $\sigma_1 \leqslant \alpha_0$ e $\beta_1 \leqslant \beta_0$, vá para o Passo 6; senão, STOP.

5.4 se $z_1 > z_0$, faça $\alpha_1 = \alpha_1 + 1$. Se $\alpha_1 \leqslant \alpha_0$, volte para o Passo 4; senão termina.

Passo 6: Efetuar β_1 iterações consecutivas em cada uma das variáveis que fornece o maior aumento em z, até ser introduzida na base. Volte para o Passo 4.

IV.1.2 - Heurística II de Steinberg

A idéia básica desta heurística é achar sucessivamente os pontos extremos adjacentes para o ótimo local x_0 com o segundo menor, terceiro menor, etc., valores de z e de cada um destes pontos extremos tentar achar uma solução melhor. Especificamente, α_0 é definido como na heurística anterior e $\beta_0 = n - m$ = número de variáveis não-básicas. Os contadores α_1 e β_1 serão inicialmente iguais a 1.

Passo 3: Iniciar com o quadro correspondente a x_0. Achar o c_j que fornece o β_1-ésimo menor acréscimo em z e introduza o x_j correspondente na base. Faça $\beta_1 = \beta_1 + 1$ e se $\beta_1 \leq \beta_0 + 1$, vá para o Passo 4; senão, STOP.

Passo 4: Escolher um x_j cujo c_j correspondente é negativo e introduza na base. Denomine a solução resultante de x_1 e e de z_1 o valor da função objetivo. Faça $\alpha_1 = \alpha_1 + 1$ e se $\alpha_1 \leq \alpha_0$, vá para o Passo 5. Se $\alpha_1 > \alpha_0$ volte para o Passo 2.

Passo 5: Compare z_1 com z_0.

5.1 se $z_1 > z_0$, volte para o Passo 4

5.2 se $z_1 = z_0$ e $x_1 \neq x_0$, volte para o Passo 4

5.3 se $z_1 = z_0$ e $x_1 = x_0$, faça $\alpha_1 = 1$ e volte para o Passo 3

5.4 se $z_1 < z_0$, volte para o Passo 2.

Se $n \geq m$ e $\beta_0 = n - m$, esta heurística requer muito mais iterações que a heurística anterior. Naturalmente é possível modificar a Heurística II, reduzindo o valor de β_0. Outra possível modificação envolve a mudança do Passo 3, como segue:

Passo 3 (a): Se $\beta_1 < \beta_0/2$, faça $\beta_1 = \beta_1 + 1$ e inicie com o quadro correspondente a x_0.
Achar o c_j que fornece o β_1-ésimo menor acréscimo em z e introduza o x_j na base e vá para o Passo 4.
Se $\beta_1 \geq \beta_0/2$, vá para o Passo 3(b).

Passo 3 (b). Se $\beta_1 > \beta_0$, STOP; senão, achar o c_j que fornece o $(\beta_1 - \beta_0/2 + 1)$ - ésimo maior acréscimo em z e introduza x_j na base e vá para o Passo 4.

Assumimos que β_0 é uma constante e que $\beta_0 < (n-m)/2$.

IV.1.3 - Heurística SWIFT - 1 de Walker

Esta heurística é semelhante à anterior, a diferença está no Passo 3 da Heurística II. As iterações sempre começam de x_0, entretanto na SWIFT-1 as iterações podem ser iniciadas de diferentes ótimos locais. Após executarmos os Passos 1 e 2, SWIFT-1 é descrito por Walker como segue:

Passo 3: Forçar a variável não básica corrente que ainda não foi testada, a entrar na base, fornecendo uma nova solução x_1 com valor da função objetivo $z_1 \geqslant z_0$.

Se todas as variáveis não-básicas da solução x_0 foram testadas e nenhuma forneceu uma melhora termina; x_0 será uma solução aproximada. Caso contrário vá para o Passo 4.

Passo 4: Iterar como no Passo 2 até que $e_j \geqslant 0$ para toda coluna j não-básica e teremos um ótimo local x_1

4.1 se $x_1 = x_0$, volte para a solução x_0 e vá para o Passo 3.

4.2 se $z_1 < z_0$, temos uma solução melhorada. Reespecifique a solução x_0 e vá para o Passo 3.

4.3 se $z_1 \geqslant z_0$, vá para o Passo 3.

IV.1.4 - Heurística SWIFT-2 de Walker

Esta heurística difere da anterior somente no Passo 4.3, que é substituído por:

(3) se $z_1 \geqslant z_0$, volte para a solução x_0, e vá para o Passo 3.

IV.2 - **Método Simplex para (PCF)**

O algorítmo aproximado que segue é denominado Simplex do Custo Fixo porque conserva quase todas as regras de decisão do método simples de Dantzig, levando em consideração o custo fixo associado com o vetor que entra e o vetor que sai da base em cada iteração. A diferença está no critério usado para selecionar o vetor que entra na base. Observando a não-negatividade das variáveis x_j, o vetor a ser selecionado para deixar a base será determinado da mesma forma que no método simplex.

No algorítmo simplex do custo fixo, o critério usado para selecionar o vetor que entra na base leva em consideração as variáveis custo e custo fixo. Uma vez selecionado o vetor que entra na bas, o algorítmo se transforma num problema linear na forma "standard".

Descreveremos a seguir os passos do algorítmo.

Passo 1: Determinar uma solução básica viável para o (PPL), ignorando os custos fixos; se não existir, termina o problema pois não existirá uma solução viável para o (PCF).

Passo 2: Com a solução básical inicial obtida no Passo 1, determinar para cada vetor não-básico o valor de $z_j - c_j$ como na programação linear.

Passo 3: Para cada vetor não-básico, determinar o vetor que deverá sair da base para manter a viabilidade do vetor que será introduzido na solução. O critério usado é:

$$\theta_j = \min \{\frac{x_{Bi}}{y_{ij}} , \text{ para } y_{ij} > 0\}$$

onde,

x_{Bi} é a i-ésima componente do vetor básico.

y_{ij} é a componente da linha i e a coluna j do quadro do simplex.

Passo 4: Para cada vetor não-básico, determinar a variação total das variáveis custos. (excluindo o custo fixo).

$$d_j = \theta_j (z_j - c_j)$$

onde d_j é a variação total das variáveis custos.

Passo 5: Para cada vetor não-básico, determinar a variação do custo fixo total que resultará se o vetor for introduzido na base.

$c_j = k_{rj} - k_j$

onde,

k_j é o custo fixo associado ao vetor j.

k_{rj} é o custo fixo associado ao vetor básico que deverá deixar a base se o vetor j entrar na base.

Passo 6: Para cada vetor não-básico, determinar a variação total na função objetivo que poderá resultar se o vetor foi introduzido na base

$s_j = d_j + e_j$

onde s_j é a variação total da função objetivo.

Passo 7: Se todo $s_j \leqslant 0$, STOP. Se um ou mais $s_j > 0$, selecione o s_j mais positivo para entrar na base na iteração seguinte.

Passo 8: Transformar a matriz usando o método simplex e vá para o Passo 3.

Passo 9: Registre e imprima a solução ótima.

Passo 10: Selecione a variável não-básica para entrar na base.

Passo 11: Determinar a variável básica que deverá sair se a viabilidade fôr mantida.

Passo 12: Transformar a matriz e calcular o s_j para cada variável não-básica.

Passo 13: Se todos os pontos extremos adjacentes forem inferio res que a melhor solução ótima local encontrada, vá para o passo seguinte. Se um ponto extremo adjacente for maior que a melhor solução, continue com este ponto e vá para o Passo 3.

Passo 14: Se após L iterações, não houver melhora na solução, termina a fase de busca. Do contrário vá para o Passo 10.

A fase inicial do algorítmo simplex do custo fixo tem somente os nove primeiros passos. Os cinco últimos passos são adicionados após a fase inicial do teste.

IV.3 - Algorítmo Aproximado

A idéia geral deste algorítmo é iniciar com um ponto extremo ótimo do (PPL), ignorando o custo fixo. Tal ponto extremo estabelece um limite inferior para o valor ótimo do (PCF), desde que:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n} (c_j x_j + k_j \delta_j)$$

Por isso a solução ótima do (PCF) precisa ocorrer num ponto extremo. Critérios inteligentes foram desenvolvidos para selecionar outro ponto extremo solução.

Para formalizar a idéia acima façamos:

$$w_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad w_2 = \sum_{j=1}^{n} k_j x_j \qquad w_3 = \sum_{j=1}^{n} (c_j x_j + k_j \delta_j)$$

Definimos w_1^*, w_2^* e w_3^* como o menor valor de w_1, w_2 e w_3 atingido por qualquer ponto extremo solução. Em geral w_1^*, w_2^* e w_3^* não precisam ser atingido num ponto extremo e consequentemente é possível termos $w_3^* \neq w_1^* + w_2^*$. Por conveniência, seja w_1 e w_2 os valores de w_1 e w_2 calculados num mesmo ponto extremo associado com w_3^*; assim $w_3^* = w_1 + w_2$. Definiremos agora E_1^*, E_2^* e E_3^* como ponto extremo associado com w_1^*, w_2^* e w_3^* respectivamente.

Os valores de w_1^*, w_2^* e w_3^* são iniciados resolvendo o (PPL).

$$\text{minimizar } w_1 = \{\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \mid x_j \in S\}$$

Seja $e^0 = \{x_1^0, \ldots, x_n^0\}$ o ponto extremo associado a uma solução. Então:

$$w_1^* = w_1 = w_1^0 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0$$

$$w_2^* = w_2 = w_2^0 = \sum_{j=1}^{n} k_j \delta_j^0$$

$$w_3^* = w_1 + w_2$$

onde y_j^* é definido conforme e^0. Inicialmente, $E_1^* = E_2^* = E_3^* = e^0$.

A heurística gera uma sequência de pontos extremos começando com e^0. A melhor solução é dado por E_3^* após terminar o algorítmo.

A determinação de e^{t+1}, dado e^t será obtido como segue:

Para todo x_j, determine,

$$c_j^t = \begin{cases} c_j + (k_j/x_j^t) & \text{se } x_j^t > 0 \\ c_j & \text{se } x_j^t = 0 \end{cases}$$

Calcule os custos reduzidos $z_j - c_j$ para todas as variáveis não-básicas associadas com e^t, do seguinte modo:

$$z_j^t - c_j^t = C_B^t \, B_t^{-1} \, P_j - C_j^t$$

onde,

$C_B^t = (C_1^t, C_2^t, \ldots, C_m^t)$ associados as variáveis básicas x_j

B_t^{-1} = inversa da base

$P_j = (a_{1j}, \ldots, a_{mj})^t$.

Então:

(1) Se $z_j^t - c_j^t \leqslant 0$ para todo j da variável não-básica e vá para (3); senão

(2) Mude a base introduzindo a variável não-básica que dá maior valor para $z_j^t - c_j^t$ e o ponto extremo resultante será e^{t+1}.

Calcule w_k^{t+1} para k = 1, 2, 3

2.1 se $w_3^{t+1} < w_3^*$, faça $w_3^* = w_3^{t+1}$, $E_3^* = e^{t+1}$,

$w_1 = w_1^{t+1}$, $w_2 = w_2^{t+1}$ e vá para (2.3); senão,

2.2 se $w_k^{t+1} < w_k^*$ para k=1 ou k=2, faça

$w_k^* = w_k^{t+1}$ e $E_k^* = e^{t+1}$ para k=1 ou k=2 e vá para (2.3)

2.3 Efetue (a) para e^{t+1}

(3) Calcule:

$\Delta_1 = w_1^* - w_1$

$\Delta_2 = w_2^* - w_2$

3.1 se $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$, STOP

3.2 se $\Delta_1 < \Delta_2$, seja $e^{t+1} = E_1^*$; senão, $e^{t+1} = E_2^*$

se $\Delta_1 = \Delta_2$, selecione arbitrariamente

$$e^{t+1} = E_1^* \quad \text{ou} \quad e^{t+1} = E_2^*$$

3.3 calcule (2.1) para e^{t+1}.

CAPÍTULO V

PROGRAMAÇÃO DISJUNTIVA

Neste capítulo daremos algumas noções da programação disjuntiva, com o objetivo de aplicá-la na resolução de um (PCF).

V.1 - **Programação Disjuntiva**

Consideremos o seguinte problema de programação matemática.

$$\text{minimizar} \quad z = cx$$

$$\text{sujeito a:} \quad \begin{aligned} Ax &\geq b \\ x &\geq 0 \\ x &\in \Psi \end{aligned}$$

onde,

A é uma matriz m x n

$b \in R^m$

Ψ é o conjunto de condições lógicas

Diremos que o problema acima é um problema disjuntivo(PD).

A título de ilustração tomemos um exemplo.

$$(PD) \begin{cases} \text{minimizar} \quad z = x_1 + 2x_2 \\ \text{sujeito a:} \\ \qquad x_1 + x_2 \leq 4 \\ \qquad x_1 \ , \ x_2 \geq 0 \\ \qquad x_1 \geq 2 \ \text{ e/ou } \ x_2 \geq 2 \end{cases}$$

Neste caso, o conjunto de condições lógicas é dado por:

$$\Psi = \{x \in R^2 | \ x_1 \geq 2 \quad e/ou \quad x_2 \geq 2\}$$

Geometricamente, o conjunto não-convexo de soluções viáveis para (PD) é representado na Figura V-1, onde a solução ótima $x^* = (2,0)$ pode ser obtida, resolvendo dois (PPL).

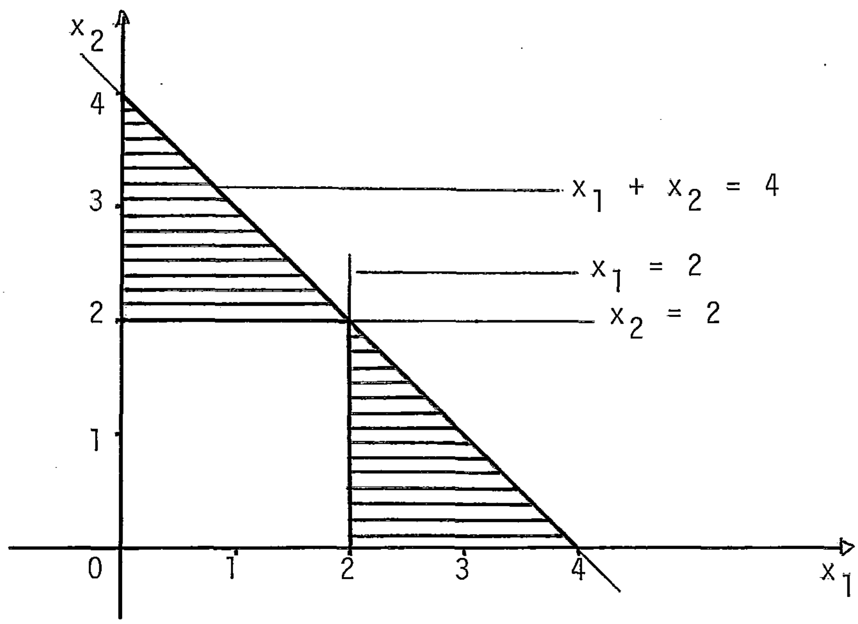

Figura V-1

V.2 - Condições Lógicas

Entendemos por Condições Lógicas, declarações que envolvem restrições lineares, através dos seguintes operadores:

$\wedge$, conjunção

$\vee$, disjunção

-, complementar de, ou negação.

Os operadores lógicos $\wedge$ e $\vee$ gozam da propriedade distributiva, isto é, sendo A, B e C restrições lineares, teremos:

$$(A \vee B) \wedge C = (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$$

$$(A \wedge B) \vee C = (A \vee C) \wedge (B \vee C)$$

O operador lógico ___. obedece às Leis de Morgan,ou seja:

$$\overline{(A \wedge B)} = \bar{A} \vee \bar{B}$$

$$\overline{(A \vee B)} = \bar{A} \wedge \bar{B}$$

V.3. - Definições

V.3.1. - Sejam f e g dois funcionais definidos em $X \subseteq R^n$, tais que:

$$f, g: X \to R \text{ e } \forall x \in X,\ f(x) > 0 \Rightarrow g(x) \geqq 0$$

Em termos disjuntivos, teremos:

$$\bigwedge_{x \in X} ([f(x)] \leqq 0 \quad \vee \quad [g(x)] > 0)$$

Sendo A e B duas restrições, as seguintes condições são equivalentes:

$$A \Rightarrow B \equiv \bar{A} \vee B$$

Um "plano de Corte" é uma desigualdade linear válida em relação à algum conjunto de restrições, Sendo,

$$\begin{cases} X = \{x \mid Dx \geqq b\} \\ \text{onde,} \\ D = \text{matriz } m \times n \\ a_o,\ \alpha,\ \beta \in R^m \\ x \in R^n \\ \alpha_o \in R \end{cases}$$

$\alpha x \geqq \alpha_o$ é um "Plano de Corte", válido ou implicado por S $\Rightarrow$ a disjunção $(x \notin S) \vee (\alpha x \geqq \alpha_o)$ é verdadeira para todo $x \in S$.

V.3.2. - Sejam $\alpha_x \geqq \alpha_o$ e $\beta x \geqq \beta_o$ dois cortes válidos para S. Diremos que $\beta x \geqq \beta_o$ é mais "profundo" que $\alpha x \geqq \alpha_o \iff$

$$[\bigvee_{j\in\{1,2,\ldots,m\}} (\beta_j < \alpha_j \;;\; \beta_h < \alpha_h \;,\; h \in \{1,2,\ldots,n\}\setminus\{j\}] \wedge$$

$$[\beta_o > \alpha_o]$$

Pela mesma argumentação, $\alpha x \geqq \alpha_o$ é um "enfraquecimento" de $\beta x \geqq \beta_o$.

Sendo $x > 0$, qualquer enfraquecimento de $\beta x \geqq \beta_o$ também será um corte válido para S, já que: $(\alpha - \beta)x \geqq 0$, $x \geqq 0$; ou seja, um corte contém todos os seus enfraquecimentos.

V.4. - Formas Normais

Existem várias maneiras de representar um (PD), sendo que duas são fundamentais.

Diremos que (PD) está na forma normal disjuntiva (conjuntiva) se for definido por uma disjunção (conjunção), cujos termos não contêm disjunções (conjunções) adicionais.

V.4.1. - Forma Normal Disjuntiva

$$(PD) \begin{cases} \text{minimizar} \quad z = cx \\ \text{sujeito a:} \\ \qquad \bigvee_{h \in H} \begin{array}{l} A^h x \geqq b^h \\ x \geqq 0 \end{array} \end{cases}$$

Seja $S_h = \{x \mid A^h \geqq b^h,\; x \geqq 0$, para $\forall\, h \in H$.
Para que (PD) tenha solução viável, devemos ter pelo menos um $S_h \neq \emptyset$, ou seja, $\bigvee_{h \in H} (S_h \neq \emptyset)$.

V.4.2 - Forma Normal Conjuntiva

$$
(PD) \begin{cases} \text{minimizar} \quad z = cx \\ \text{sujeito a:} \\ \qquad Ax \geqq b \\ \qquad x \geqq 0 \\ \bigvee_{i \in H_j} (d^i x \geqq d_{io}) \\ j \in X \end{cases}
$$

minimizar $z = cx$

sujeito a: $\begin{pmatrix} Ax \geqq b \\ x \geqq 0 \end{pmatrix}$

$$\wedge \left[\bigvee_{i \in H} (d^i x \geqq d_{io}) \right] \wedge \ldots \wedge_{i \in H_S} \left[\vee (d^i x \geqq d_{io}) \right]$$

onde,

$d^i \in R^n$

$d_{io} \in R$

$H = \# X$

$H, H_j, j \in X$

são conjuntos que podem ser finitos ou não.

Devido a distributividade dos operadores $\wedge$ e, as duas formas estão relacionadas, podendo uma ser obtida a partir da outra. Assim considerando o exemplo inicial teremos:

Forma Normal Disjuntiva	Forma Normal Conjuntiva
minimizar $z = x_1 + 2x_2$ sujeito a: $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 2 \\ x_1, \ x_2 \geq 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_2 \geq 2 \\ x_1, \ x_2 \geq 0 \end{pmatrix}$	minimizar $z = x_1 + 2x_2$ sujeito a; $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1, \ x_2 \geq 0 \end{pmatrix}$ $\underset{j \in \{1,2\}}{\vee} x_j \geq 2$

V.5. - Exemplo

Para ilustrar escreveremos na forma disjuntiva um problema de programação bivalente.

Seja o seguinte problema de programação inteira com n variáveis

$$(PI) \begin{cases} \text{minimizar} \quad z = cx \\ \text{sujeito a:} \\ \quad Ax \geq b \\ \quad x \in \{0,1\} \end{cases}$$

A forma normal disjuntiva será dada por:

$$(PD) \begin{cases} \text{minimizar} \quad z = cx \\ \text{sujeito a:} \\ \qquad\qquad Ax \geq 0 \\ \underset{h \in H}{\vee} \quad x = x^h \end{cases}$$

onde, $H = \{x^1, x^2, \ldots, x^{\# H}\}$ é o conjunto de todos os elementos 0 - 1, sendo $\# H = 2^n$.

A forma normal conjuntiva será:

$$
PD \left\{
\begin{array}{l}
\text{minimizar } z = cx \\
\quad \text{sujeito a:} \\
\qquad\qquad\qquad Ax \geqslant b \\
\displaystyle\bigwedge_{j\ \{1,2,\ldots,n\}} \left[(x_j = 0) \vee (x_j = 1) \right]
\end{array}
\right.
$$

V.6 - Princípio Básico da Programação Disjuntiva

V.6.1 - Caracterização da Família

Estamos interessados na família de restrições lineares implicadas pelo conjunto de restrições de um (PD), F. Todos os cortes válidos para (PD) devem pertencer a esta família.

Notamos que o conjunto de pontos satisfazendo todas as restrições lineares desta família será a envoltória convexa de (PD). Para o exemplo dado em (V.1), teremos a envoltória dada a seguir, na Figura V-2.

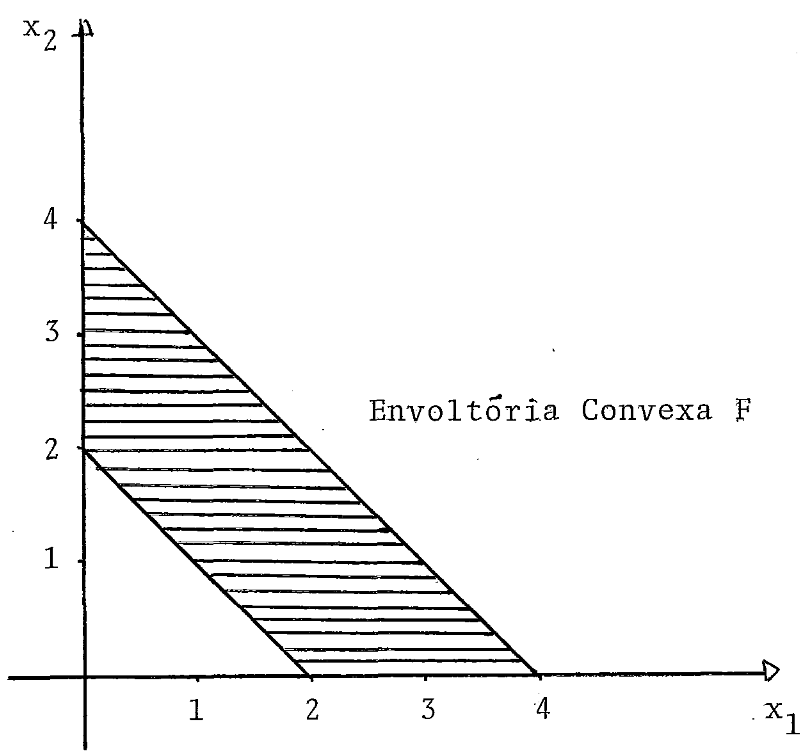

Figura V-2

Sejam, $\alpha,\ x \in R^n$ e $\alpha_o \in R$

$N = 1, 2, \ldots, n$

$h \in H$ (não necessariamente finito), e $b^h,\ \theta^h \in R_+^{m_h}$

$A^h = (a_j^h)$, matriz $(m_h \times n)$, $h \in H$ e $j \in N$

onde, a_j^h é a j-ésima coluna de A^h.

V.6.2 - Teorema Fundamental da Família dos Cortes Disjuntivos

O corte $\alpha x \geqq \alpha_o$ é uma consequência da disjunção $\bigvee_{h \in H} (A^h x \geqq b^h,\ x \geqq 0) \iff \theta^h \geqq 0$, satisfazendo

$$\alpha \geqq \theta^h A^h \quad e \quad \alpha_o \leqq \theta^h\, b^h, \quad \forall\ h \in H^* \subseteq H$$

A demonstração do teorema poderá ser encontrada em (2).

V.6.2.1. - Proposição:

Se para algum $h \in H^*$, existe $i \in \{1,2,\ldots,m_h\}$ tal que $(a_{j1}^h, \ldots, a_{in}^h)x = b_i^h$, então i-ésima componente de θ^h no Teorema (V.6.2.) será irrestrita.

V.6.2.2. - Corolário

Seja H finito e $H^* \neq \emptyset$. O corte

$\sum_{j \in N} \underset{h \in H^* \subseteq H}{\text{máximo}} \{a_j^h / a_o^h\}\, x_j \geqq 1$ é uma consequência da disjunção $\bigvee_{h \in H} (\sum_{j \in N} a_j^h . x_j \geqq a_o^h,\ x \geqq o)$.

V.7 - Corte Convexo de Glover

A idéia de utilizar os raios vetores provenientes de um vértice do conjunto de soluções viáveis para gerar um hiperplano que corte este vértice não se restringe a (PPI). Isto é, pode ser aplicado a qualquer problema de programação matemática, cujas restrições se reduzem em:

$$x = \bar{x} - \sum_{j=J} a_j x_j\ , \quad x_j \geqq 0 \quad e \quad \text{para } \forall\ j \in J$$

As justificativas deste corte proposto por Glover, são provenientes dos trabalhos de Balas e Young (2).

V.7.1. - Corte de Glover usando a Disjunção

Consideremos a solução do (PPL) associado ao (PD) em termos das variáveis não-básicas.

$$x_i = b_i + \sum_{j \in J} a_{ij} \, (-x_j), \quad i \in I.$$

Eliminar a solução contínua corrente, é equivalente a resolver o problema a seguir na forma normal conuntiva:

$$\left[\begin{array}{ll} x_i = b_i + \sum_{j \in J} a_{ij}(-x_j), & i \in I \\ \bigvee_{h \in I} (b_h + \sum_{j \in J} a_{hj}(-x_j) \leq 0 & \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{ll} x_i = b_i + \sum_{j \in J} a_{ij}(-x_j), & i \in J \\ \bigvee_{h \in I} (\sum_{j \in J} a_{hj} x_j \geq b_h & \end{array} \right]$$

Aplicando o corolário (V.6.2.2.), com multiplicadores,

$$\Theta^h = \begin{cases} \dfrac{1}{b_h} & , \text{ se } b_h > 0 \\ \infty & , \text{ se } b_h = 0 \text{ para } \forall\, h \in I. \end{cases}$$

teremos a seguinte equivalência:

$$\left[\begin{array}{ll} x_i = b_i + \sum_{j \in J} a_{ij}(-x_j), & i \in I \\ \bigvee_{h \in I} (\sum_{j \in J} a_{hj} \, x_j \geq b_h & \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{ll} x_i = b_i + \sum a_{ij}(-x_j) & i \in I \\ \sum_{j \in J} \alpha_j x_j \geq \alpha_o & \end{array} \right]$$

onde,

$$\begin{cases} \alpha_j = \underset{i \in I}{\text{máximo}} \{ \Theta^i, \ a_{ij} \} & , \quad j \in J \\ \alpha_o = 1 & \end{cases}$$

Reescrevendo os coeficiente na forma:

$$\beta'_j = \underset{i \in I}{\text{mínimo}} \{(\Theta^i \cdot a_{ij})^{-1} , a_{ij} \neq 0\},$$

a equivalência será mantida ao substituirmos

$$\sum_{j \in J} \alpha_j x_j \geq \alpha_0 \qquad \text{por} \quad \sum_{j \in J} \frac{x_j}{\beta'_j} \geq 1$$

Se estabelecermos a condição adicional de que o corte elimina apenas um vértice, podemos interpretar como um enfraquecimento e obtemos o Corte Convexo de Glover (2),

$$\sum_{j \quad J} \frac{x_j}{\beta_j} \geq 1,$$

onde,

$$\beta_j = \begin{cases} \text{mínimo } \{(\Theta^i a_{ij})^{-1} , a_{ij} > 0\} \\ \infty \qquad , \text{ se } a_{ij} \leq 0 \qquad \text{para } j \in J \end{cases}$$

Observamos que se $\bigvee_{i \in I} (b_i = 0)$, é possível que o corte convexo não fique determinado e para superarmos esta indeterminação devido a degenerescência usaremos o procedimento devido a Balas (2).

A degenerescência ocorrerá sempre que o vértice correspondente, $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$ fôr determinado por mais de n hiperplanos. Balas mostra que, ignorando cada restrição para a qual a variável associada é nula no quadro do Simplex e o politopo resultante associa n arestas distintas àquele vértice. Assim, podemos determinar os valores de β_j e quando adicionamos o corte ao quadro para reotimização, reativamos as restrições ignoradas no cálculo dos coeficientes do corte, a menos que estas sejam redundantes com relação ao problema atual, podendo neste caso serem eliminados.

Ao utilizarmos este corte, estaremos interceptando os raios vetores r_j, $j \in J$ do cone envoltório convexo C, definido a partir de b, onde:

$$C = \{x | \ x = b + \sum_{j \in J} a_j(-x_j) \ , x_j \geq 0 \ \text{ para } \forall_j \in J\}$$

e

$$r_j = b - \beta_j a_j \quad , \quad \beta_j \geq 0 \qquad \text{para } j \in J$$

Ilustraremos geometricamente no R^2, conforme Figura V-3

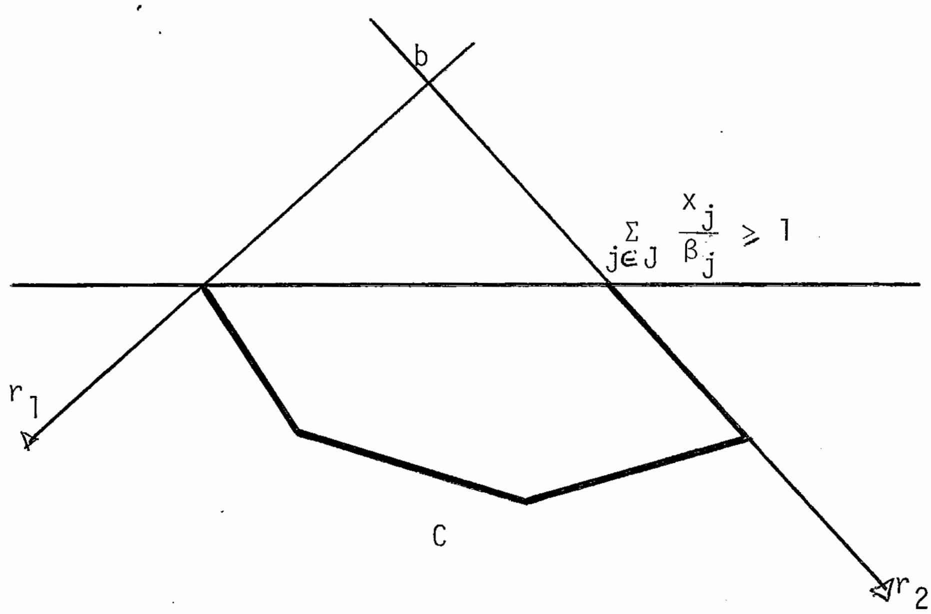

Figura V-3

A seguir faremos uma aplicação do Corte Convexo, ao Problema com Custo Fixo na Origem, através de um Algorītmo Dual de Cortes.

V.8 - Algorītmo de Taha

Este algorītmo ē da famīlia "Branch and Bound", que utiliza uma "solução local" para gerar um corte legītimo com o objetivo de eliminar as soluções de considerações futuras. Ē vālido para qualquer problema de minimização de funções côncavas sobre poliedros convexos.

Os cortes poderão gerar novos vērtices e deverão ser considerados de forma a não se multiplicarem indefinidamente.

Seja o seguinte problema com custos fixos na origem, na forma normal conjuntiva minimizar $f(x)$

sujeito a:

$$\begin{pmatrix} Ax \geq b \\ x \geq 0 \end{pmatrix}$$

$$\bigwedge_{j \in N} \left[(x_j = 0,\ y_j = 0)\right] \vee \left[(x_j > 0,\ y_j = 1)\right]$$

onde,

$\#(N) = n$

$x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$

$y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ tal que $y_j \in \{0,1\}$ para $\forall_j \in N$

$k = (k_1, k_2, \ldots, k_n)$ tal que $k_j \geq 0$ para $\forall_j \in N$

$f(x) = cx + ky$

Sejam F e $\overline{F}$, os conjuntos de soluções viávies para (PD) e para o problema linear relaxado respectivamente. Notamos que existe uma correspondência bionívoca entre os elementos de F e os de $\overline{F}$. Sabemos ainda que o mínimo da função côncava f sobre $\overline{F}$, caso exista, será um vértice deste.

A idéia central se resume em utilizar um algorítmo dual de planos de corte gerando uma sequência $x = \{x^0, x^1, \ldots, x^k\}$ de elmentos de $\overline{F}$ de modo que:

$$cx^i \leq cx^{i+1}$$

onde,

$$cx^i = \underset{i = 0,1,\ldots,k-1}{\text{mínimo}} \{cx \mid x \in S^i\}$$

S^{i+1} e S^i $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$ é o conjunto de soluções viáveis para o (PPL) obtido a partir de $\overline{F}$, pela introdução de $(i+1)$ cortes sucessivos do tipo.

$\sum_{j \in J^i} \beta_j x_j \geq 1$, onde, J^i é o conjunto de índices das variáveis não-básicas no ótimo local x^i e que, aplicado a S^i só elimina um único de seus vértices, o ótimo local x^i. Logo,

$$S^0 \equiv \bar{F} \qquad \text{e} \qquad S^{i+1} = S^i \cap \{x \geqslant 0 \mid \sum_{j \in J^i} \beta_j x_j \geqslant 1\}$$

Devemos notar que alguns dos elementos de X podem não ser vértices efetivos de $\bar{F}$, surgindo como resultado da aplicação dos cortes convexos.

Desta forma, podemos garantir a enumeração dos vértices do politopo básico até a regra de parada se verifique ou, então até a enumeração completa.

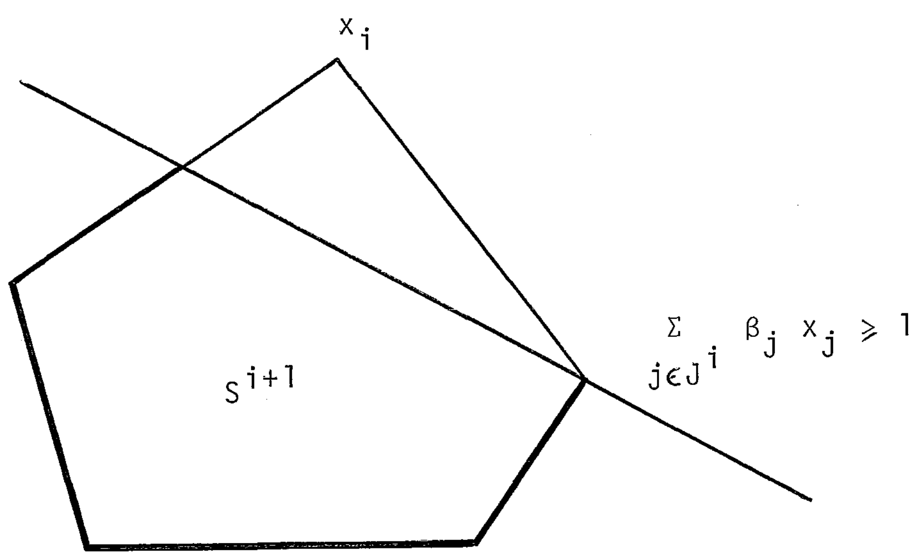

Figura V-4

Passemos agora, à construção desta regra de parada para a qual necessitamos de um limite inferior e um limite superior para o valor da solução ótima global. Estes limites serão dados por:

- $\underline{f} = cx^0$, limite inferior inicial para (PD), atualizado a cada iteração para $\underline{f} = cx^{i+1}$

- $\bar{f}$ limite superior, atualizado, sempre que $(cx^{i+1} + ky^{i+1}) < \bar{f}$ na iteração anterior

- Se $cx^{i+1} > \bar{f}$ paramos com (x^i, y^i) sendo a solução ótima para (PD).

A seguir descreveremos o algorítmo determinando o ótimo global para (PD) em um número finito de iterações.

Passo 0:

0.1) Resolver o (PPL)

(P^0): minimizar $\{cx \mid x \in \bar{F}\}$

0.2) Teste

i) Se (P^0) foe ilimitado termina, (PD) não tem solução ótima finita.

ii) Se (P^0) não for viável termina (PD), faça:

$\underline{f} = cx^0$

$\bar{f} = cx^0 + ky^0$, onde $y_j^0 = \begin{cases} 1, & \text{se } x_j^0 > 0 \\ 0, & \text{se } x_j^0 = 0 \end{cases}$

para $\forall j \in N$

$x^* = x^0$, $y^* = y^0$ e $i = 0$ e vá para o Passo 1.

Passo 1:

1.1) Resolver o (PPL)

(P^{i+1}): minimizar $\{cx \mid x \in S^{i+1}\}$ onde

$$S^{i+1} = S^i \cap \{x \geq 0 \mid \sum_{j \in J^i} \beta_j x_j \geq 1\}$$

1.2) Aproximar o limite inferior, ou seja, sendo x^{i+1} a solução ótima de (P^{i+1}), fazer $\underline{f} = cx^{i+1}$ e vá para o Passo 2.

Passo 2:

2.1) Teste de Otimalidade Global

i) se $cx^{i+1} \geq \bar{f}$ termina, (x^*, y^*) será o ótimo global.

ii) se $cx^{i+1} + ky^{i+1} \leq \bar{f}$, aproximar o limite superior fazendo.

$$\bar{f} = cx^{i+1} + ky^{i+1}$$

$$x^* = x^{i+1} \quad e \quad y^* = y^{i+1}$$

iii) fazer $i = i+1$ e vá para o Passo 1.

V.9 - Exemplo de Aplicação

Seja o seguinte Problema Linear com Custos Fixos na Origem na forma normal conjuntiva:

$$\text{minimizar} \quad z = -3x_1 - 5x_2 + 5y_1 + 2y_2$$

sujeito a:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \quad &= 18 \\ x_1 \qquad\qquad x_4 \quad &= 4 \\ x_2 \qquad + x_5 &= 6 \\ x_j > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 5 \end{aligned}$$

$$\bigwedge_{j\ \{1,2\}} \left[(x_j > 0,\ y_j = 1) \vee (x_j = 0,\ y_j = 0)\right]$$

Passo 0:

0.1) Resolver o (PPL) associado a (PD)

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	0	-3	-5	0	0	0
x_3	18	3	2	1	0	0
x_4	4	1	0	0	1	0
x_5	6	0	1	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	30	-3	0	0	0	5
x_3	6	3	0	1	0	-2
x_4	4	1	0	0	1	0
x_2	6	0	1	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	-36	0	0	-1	0	-3
x_1	2	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$
x_4	- 6	0	0	1	-3	-2
x_2	6	0	1	0	0	1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
	-36	0	0	-1	0	-3
x_1	2	1	0	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$
x_4	2	0	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$
x_2	6	0	1	0	0	1

$x^0 = (2,\ 6,\ 0,\ 2,\ 0)$

$x^* = x^0$

$$\underline{f} = cx^0 = (-3,\ -5,\ 0\ 0\ 0)\begin{pmatrix}2\\6\\0\\2\\0\end{pmatrix} = (-6\ -30\ +0\ +0\ 0) = -36$$

$$\overline{f} = cx^0 + ky^0 = -36 + (52)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = -36 + (5 + 2) = -36 + 7$$

$\overline{f} = -\ 29$

$i = 0$ e vá para o <u>Passo 1</u>

<u>Passo 1</u>:

1.1) Determinar os coeficientes do "<u>Corte Convexo 1</u>".

$$\Theta^h = \begin{cases} \dfrac{1}{a_{h0}}, & \text{se } a_{ho} > 0 \\ \infty, & \text{se } a_{h0} = 0 \end{cases}$$

$$\Theta^1 = \frac{1}{2} \qquad \Theta^2 = \frac{1}{2} \qquad \Theta^3 = \frac{1}{6}$$

$$\beta_j = \begin{cases} \text{mínimo } \left\{(\Theta^i \cdot a_{ij})^{-1} \quad \text{para } a_{ij} > 0)\right\} \\ \infty \qquad \text{se } a_{ij} \leqslant 0 \end{cases}$$

$$\beta_3 = \text{mínimo } \left\{\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}, \infty, \infty\right\} = \text{mínimo } \{6,\ \infty,\ \infty\} = 6.$$

$$\beta_5 = \text{mínimo } \left\{\infty, \frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}}, \frac{1}{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{1}}\right\} = \text{mínimo } \{\infty,\ 3,6\} = 3$$

O corte convexo de Glover é dado por $\sum\limits_{j\ J} \dfrac{x_j}{\beta_j}\quad 1$, logo teremos: $\frac{1}{6}x_3 + \frac{1}{3}x_5 > 1$

1.2) Incluir o corte ao quadro e reotimizar

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	-36	0	0	-1	0	-3	0
x_1	2	1	0	1/3	0	-2/3	0
x_4	2	0	0	-1/3	1	2/3	0
x_2	6	0	1	0	0	1	0
x_6	-1	0	0	-1/6	0	-1/3	-1

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
	-30	0	0	0	0	-1	-6
x_1	0	1	0	0	0	-4/3	2
x_4	4	0	0	0	1	4/3	-2
x_2	6	0	1	0	0	1	0
x_3	6	0	0	1	0	2	-6

1.3) $\underline{f} = c \cdot x^{i+1} = cx^1$

$$\underline{f} = (-3\ -5\ 0\ 0\ 0) \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = -30,$$ vã para o <u>Passo 2</u>.

Passo 2:

$cx^1 = -30 < \bar{f} = -29$

$cx^1 + ky^1 = -30 + (5\ 2)\binom{0}{1} = -30 + 2 = -28 < \bar{f} = -29$

$$\bar{f} = -29$$

$x^* = (0, 6, 6, 4, 0)$

Faça i = 1 e volte para o Passo 1.

Passo 1:

1.1) Determinar os coeficientes do Corte Convexo 2

$\theta^1 = \infty \qquad \theta^2 = \frac{1}{4} \qquad \theta^3 = \frac{1}{6} \qquad \theta^4 = \frac{1}{6}$

$$\beta_5 = \text{mínimo}\ \left\{\infty, \frac{1}{\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}}, \frac{1}{\frac{1}{6}\cdot 1}, \frac{1}{\frac{1}{6}\cdot 2}\right\}$$

$$= \text{mínimo}\ \{\infty, 3, 6, 3\} = 3$$

$$\beta_6 = \text{mínimo}\ \{\infty, \infty, \infty, \infty\} = \infty$$

Logo o corte convexo 2 é dado por $\frac{1}{3}x_5 \geq 1 \Rightarrow x_5 \geq 3$.

1.2) Anexando o corte ao quadro e reotimizando, teremos:

		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
	-27	0	0	0	0	0	-6	-3
x_1	4	1	0	0	0	0	2	-4
x_4	0	0	0	0	1	0	-2	4
x_2	3	0	1	0	0	0	0	3
x_3	0	0	0	1	0	0	-6	6
x_5	3	0	0	0	0	1	0	-3

1.3) $\underline{f} = cx^{i+1} = cx^2$

$$\underline{f} = (-3, -5\ 0\ 0\ 0)\begin{pmatrix}4\\3\\0\\0\\3\end{pmatrix} = -12 - 15 = -27,$$ vā para o

<u>Passo 2</u>.

<u>Passo 2</u>:

$cx^2 = -27 \quad \overline{f} = -29$ solução ótima global

$x^* = (0, 6, 6, 4, 0)$

$x_0^* = 3.0 - 5.6 + 5.0 + 2.1 = -30 + 2 = -28$

Geometricamente, podemos observar o desenvolvimento dos cortes na Figura V-5.

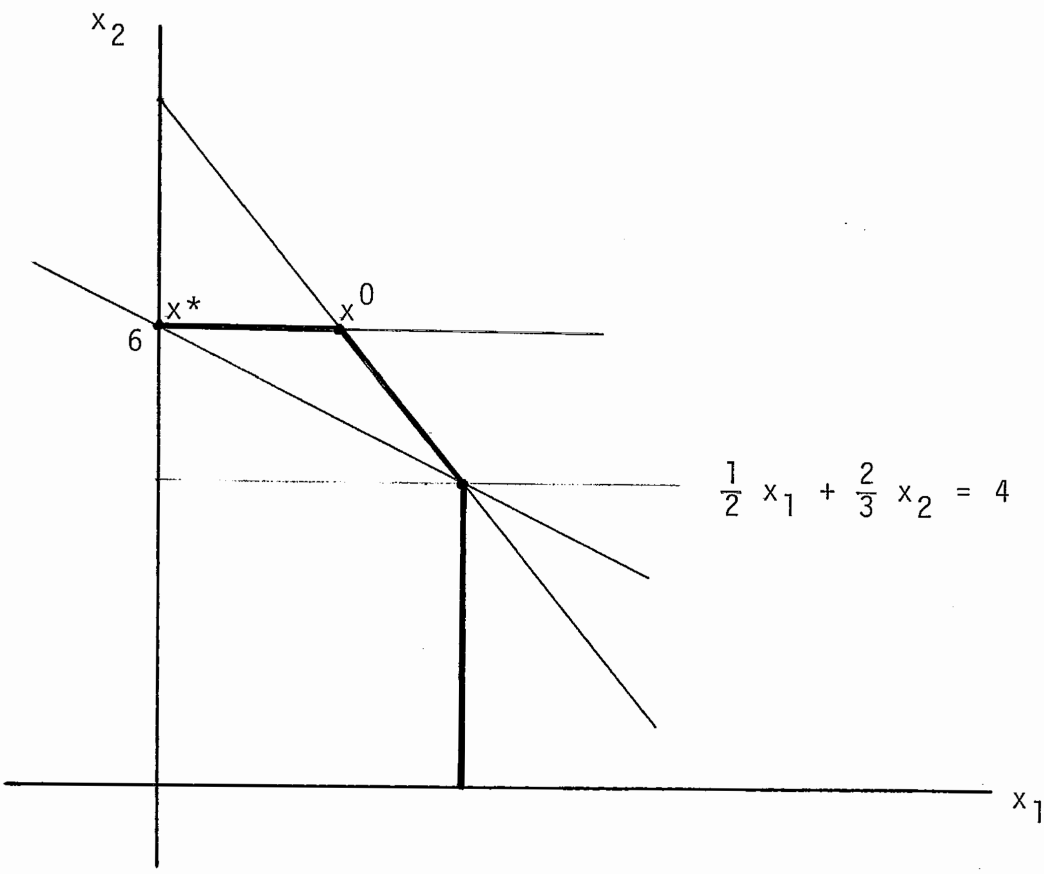

Figura V-4

CAPÍTULO VI

COMPARAÇÕES E CONCLUSÕES

Descrevemos nos capítulos anteriores alguns métodos exatos, heurísticos e alguns conceitos de programação disjuntiva para resolvermos o problema do custo fixo.

Entre os métodos exatos citamos o Algorítmo de "Branch e Bound". Neste método usamos as seguintes alternativas para a seleção do nó a ser expandido: LIFO, LAND e DOIG e a MELHOR PROJEÇÃO. A seguir usamos três métodos para a escolha da variável a ser forçado na expansão da escolha do nó: menos a divisão da unidade, custo mínimo na função objetivo e carga máxima.

Este algorítmo não é eficiente para problemas com um número muito grande de variáveis e restrições.

O outro método é o algorítmo de Benders, que é uma versão para resolução de problemas lineares mistos. Este algorítmo é bastante usado para solução de problemas mistos bivalentes isto é, aqueles em que as variáveis só tomam valores iguais a zero ou um, pois um esquema enumerativo é bem mais simples para o problema,

minimizar z,

sujeito a:

$$z \quad cx + u^{P}(b - Ax)$$
$$p = 1,2,\ldots,\ P' \leqslant P$$

Usando a teoria da dualidade é possível mostrar que qualquer problema de programação mista poderá ser escrito como um problema de programação linear. Isto sugere resolver um problema de programação inteira equivalente. Porém, computacionalmente, isto é impossível para obter todas as restrições da programação inteira porque requer o valor numérico de cada ponto extremo ou um raio vetor do poliedro convexo, e existem várias restrições como existem vários pontos extremos e vários raios vetores. Como o poliedro convexo tem vários pontos extremos, normal mente será impossível listar todas as restrições. Este algorítmo funciona resolvendo problemas lineares sucessivamente e um problea inteiro. O problema linear fornece um ponto extremo ou um raio vetor e uma única restrição para o problema inteiro. O valor da solução ótima fornece um limite superior para a solução ótima do problema misto. Quando resolvemos o problema inteiro, o qual é equivalente ao problema misto quando tivermos todas as restrições fornecendo um limite inferior não-decrescente. Quando os dois limites coincidirem, teremos a solução ótima do problema misto.

Finalmente, observamos que o algorítmo de Benders é ineficiente para o (PCF), conforme testado computacionalmente. Ver referência (14).

Entre os métodos heurísticos descrevemos os de Walker e Steinberg (16) que usam o método dos pontos extremos adjacentes. Isto é, cada iteração consiste em deslocar um ponto extremo para um ponto extremo adjacente usando o método simplex da programação linear.

Para a implementação computacional destas heurísticas foram incluídos:

1) testes para inviabilidade e ilimitação

2) cálculo dos e_j

3) escolha da variável que entra na base

4) escolha da variável que deixa a base

5) tratamentos das variáveis limitadas

6) uso do método simplex e do método simplex revisado.

Desde que o conjunto de restrições do (PCF) seja o mesmo do (PPL), o teste de inviabilidade é o mesmo para ambos: a ineficiência para terminar com sucesso a Fase I do método simplex com uma solução viável.

Além disso, uma solução ótima, ilitada para o problema do custo fixo é também determinado da mesma forma como num problema de programação linear. Particularmente, se para qualquer variável não-básica x_j, $z_j - c_j > 0$ e todo $y_{ij} < 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, então a variável x_j que entrará na base poderá aumentar ilimitadamente, sem forçar qualquer variável básica a se tornar negativa. Além disso, como a variável que entrará na base aumenta sem limite, o valor da função objetivo diminui ilimitadamente na razão de $(z_j - c_z)$ unidades por unidade aumentada em x_j. Para qualquer valor fixo de x_j, a solução resultante é não-básica mas, terá no máximo (m+1) variáveis positivas, e a contribuição do custo fixo para a função objetivo será compensada pelo decrescimento da sua parte linear.

Considerando o cálculo de e_j, cuja definição será repetida a seguir:

$$e_j = \begin{cases} k_j + \sum\limits_{i \in N} k_{Bi} - \sum\limits_{i \in V} k_{Bi} - \Theta_j(z_j - c_j), & \text{se } \Theta_j > 0 \\ 0, & \text{se } \Theta_j = 0 \end{cases}$$

onde

$$V = \{i \mid \frac{x_{Bi}}{y_{ij}} = \frac{x_{Bi}}{y_{rj}}\}, \quad w = \{i \mid x_{Bi} = 0 \text{ e } y_{ij} < 0\}$$

e

$$\Theta_j = \frac{x_{Br}}{y_{rj}} = \min_i \{\frac{x_{Bi}}{y_{ij}} \mid y_{ij} > 0\}$$

Verificamos que para calcular cada e_j, os conjuntos V e W precisam ser conhecidos, bem como o valor de Θ_j.

Os elementos $y_{1j}, y_{2j}, \ldots, y_{mj}$, são sequencialmente examinados. Para cada $y_{ij} < 0$ encontrada, o correspondente x_{Bi} é examinado. Se for igual a zero, então k_{Bi} será incluido na soma $\sum\limits_{i \in W} k_{Bi}$. Para cada $y_{ij} > 0$ será calculada a razão x_{Bi}/y_{ij} e se esta razão for igual a razão mínima atual; então k_{Bi} será incluido na soma $\sum\limits_{i \in V} k_{Bi}$. Se por outro lado a razão x_{Bi}/y_{ij} for me nor que a razão mínima atual, então será a nova razão mínima.

Após examinarmos todos os y_{ij}, o valor de Θ_j será conhecido, bem como $\sum_{i \in V} k_{Bi}$ e $\sum_{i \in W} k_{Bi}$. O valor $z_j - c_j$ será obtido do quadro do simplex ou calculado de $z_j - c_j = c_B B^{-1} a_j - c_j$ do simplex revisado. Finalmente, será calculado o valor de e_j.

Observemos que todo vetor y_j é requerido em ordem para calcular e_j. Esta é a diferença fundamental entre as exigências computacionais destas heurísticas para o problema do custo fixo e do método simplex.

No método simplex comum, os vetores y_j para todas as variáveis não básicas são apresentados no quadro. Porém, no método do simplex revisado, somente a base inversa atual B^{-1}, é conhecida, e qualquer vetor y_j necessário será calculado pela fórmula $y_j = B^{-1} a_j$.

No caso do problema do custo fixo, a determinação da variável que entra na base depende dos y_j, de maneira que é despendido um esforço computacional considerável em cada iteração.

As heurísticas para o problema do custo fixo sugerem usar o método simplex que oferece certas vantagens computacionais sobre o método simplex revisado. Isto é válido no caso em que o e_j para cada variável não-básica for calculado em cada iteração. O método simplex revisado tem vantagens quando o problema do custo fixo for de grande porte.

Estas heurísticas foram testadas computacionalmente, vem referência (2), obtendo bons resultados.

Com alguns conceitos de Programação Disjuntiva, aplicamos o Corte Convexo de Glover para resolução do (PCF), através de um algoritmo dual de cortes, o Algoritmo de Taha.

Este algorītmo foi testado para problemas de pequeno e médio porte por Campello (2) obtendo bons resultados. Ā medida, que o porte dos problemas aumentou, a eficiência da técnica decresceu. Uma das razões foi a ocorrência da degenerecência dual e o acúmulo de erros de Processamento.

APÊNDICE

PROBLEMA DE INSTALAÇÃO DE FÁBRICAS

O problema de instalação de fábricas é um PCF da forma,

$$\text{minimizar } z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g_{ij} z_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i x_i \qquad (1)$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{m} z_{ij} = d_j \qquad (j = 1, \ldots, n) \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} \leqslant M_i x_i \qquad (i = 1, \ldots, m) \qquad (3)$$

$$z_{ij} \geqslant 0 \qquad (\forall i, j) \qquad (4)$$

$$x_i = 0 \text{ ou } 1 \qquad (i = 1, \ldots, m) \qquad (5)$$

O modelo representa uma situação em que existem m fábricas que produzem um único produto para n clientes. Cada fábrica i poderá produzir no máximo M_i unidades e cada cliente j requer d_j unidades.

f_i = custo fixo positivo associado a fábrica i

g_{ij} = custo de transporte por unidade do produto da fábrica i ao cliente j.

As variáveis são z_{ij} e x_i que representam a quantidade transportada de i para j.

As variáveis são z_{ij} e x_i que representam a quantidade transportada de i para j.

Quando $x_i = 0$, a restrição (3) com (4) implicam em $z_{ij} = 0$ para $j = 1, \ldots, n$, e se $x_i = 1$, (3) se reduz a

$$\sum_{j=1}^{n} z_{ij} \leqslant M_i \qquad (6)$$

ALGORÍTMO DE BRANCH E BOUND PARA INSTALAÇÃO DE FÁBRICAS

Quando cada fábrica satisfaz a demanda de todos os clientes, é possível reformular o problema de localização de fábricas de modo que o programa linear possa ser resolvido por inspeção. Para transformação do problema definimos Y_{ij} como fração de demanda do cliente j satisfeita pela fábrica i, isto é,

$$Y_{ij} = z_{ij}/dj \tag{7}$$

para todo i, j. Antes de fazermos uso de (7), notamos que quando $M_i \geq \sum_{j=1}^{n} d_j$ $(i = 1,\ldots,m)$, a desigualdade (3) será necessário somente para assegurar que nada poderá ser transportada de uma fábrica não instalada. Isto nos permitirá substituir (3) por

$$\sum_{j=1}^{n} Y_{ij} \leq nx_i \qquad (i = 1,\ldots,m)$$

Substituindo $Y_{ij}\ d_j$ por z_{ij} em (1), (2) e (4) e fazendo $c_{ij} = g_{ij}\ d_j$, obteremos um problema equivalente

(PIF) minimzar $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}Y_{ij} + \sum_{i=1}^{m} f_i x_i$ (1)'

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{i=1}^{m} Y_{ij} = \quad (j = 1,\ldots,n) \tag{2'}$$

$$\sum_{j=1}^{n} Y_{ij} \leq nx_i \quad (i = 1,\ldots,m) \tag{3'}$$

$$Y_{ij} \geq 0 \ \forall\ i,j \tag{4'}$$

$$x_i = 0 \text{ ou } 1 \ (i = 1,\ldots,m) \tag{5'}$$

O problema (PIF) com $x_i = 0$ ou 1 substituindo por $0 \leq x_i \leq 1$ $(i = 1, \ldots, m)$ poderá ser resolvido por inspeção. E, em particular, toda solução ótima do PPL satisfará a restrição (2)', e como $f_i \geq 0$ teremos o menor valor não-negativo para x_i $(1 = 1,\ldots,m)$, assim como a restrição (3)' será satisfeita. Portanto, em algum ponto ótimo do PPL,

$$\sum_{j=1}^{n} Y_{ij} = nx_i \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

ou

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij} = x_i \qquad (7)$$

Substituindo x_i no PPL, teremos:

$$LP^0 \quad \text{minimizar} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + f_i/n)Y_{ij} \qquad (1)'$$

sujeito a:

$$\sum_{i=1}^{m} Y_{ij} = 1 \qquad (j = 1, \ldots, n) \qquad (2)'$$

$$Y_{ij} \geqslant 0 \qquad \forall\ i,j \qquad (4)'$$

Uma solução ótima para o problema acima será:

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } c_{ij} + f_i/n = \underset{k=1,\ldots,m}{\text{mínimo}} (c_{kj}+f_k/n) \\ 0, & \text{do contrário} \end{cases} \qquad (8)$$

para $j = \frac{1}{n}, \ldots, n$ e assim

$$x_i = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_{ij} \qquad (i = 1, \ldots, m)$$

A expressão (8) poderá ser generalizada como um PPL que aparece durante a enumeração de Branch e Bound, que poderá ser resolvido por inspeção.

Em qualquer nó, seja I_0, I_1 e I_f o conjunto dos índices i tais que x_i é zero, 1 e livre, respectivamente. Assim LP^0 se tornará:

$$LP^k \quad \sum_{i\in I_1} f_i + \text{minimizar} \left(\sum_{i\in I_f}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij} + f_i/n)Y_{ij} + \sum_{i\in I_1}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}Y_{ij}\right)$$

sujeito a:

$$\sum_{i \in I_1 \cup I_f} Y_{ij} = 1 \qquad (j = 1,\ldots,n)$$

$$Y_{ij} > 0 \qquad (\forall j,\ e\ i \in I_0)$$

A solução ótima do problema poderá ser escrito como:

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 \quad \text{se } c_{ij} + (l_i/n) = \underset{k \in I_1 \cup I_f}{\text{mínimo}} (c_{kj} + l_k/n) \\ \\ 0 \ , \text{ do contrário} \end{cases} \tag{9}$$

$j = 1, \ldots, n$ e

$$x_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} Y_{ij} \qquad (i \in I_f)$$

onde,

$$l_k = \begin{cases} f_k \text{ se } x_k \text{ for livre} & (k \in I_f) \\ \\ 0 \quad \text{se } x_k \text{ for } 1 & (k \in I_1) \end{cases}$$

Exemplo de Aplicação

Consideremos m = 4 fábricas e n = 5 limites

i \ j	1	2	3	4	5=n	f_i	M_i	f_i/M_i
1	4	10	5	8	9	110	190	0,58
2	6	1	18	2	11	130	350	0,37
3	1	2	11	21	15	140	360	0,33
m=4	1	13	2	11	21	160	200	0,80
d_j	100	90	100	120	50			

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad c_{ij} + (f_i/n) = \underset{k=1,\ldots,m}{\text{mínimo}} \; (c_{kj} + f_k/n) \\ 0 & , \text{ senão} \end{cases}$$

$j = 1, \ldots, n$ e

$$x_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \gamma_{ij} \qquad (i = 1,\ldots,m)$$

$$c_{ij} = g_{ij} d_j$$

$c_{11} = 400$	$c_{21} = 600$	$c_{31} = 100$	$c_{41} = 100$
$c_{12} = 900$	$c_{22} = 90$	$c_{32} = 180$	$c_{42} = 117$
$c_{13} = 550$	$c_{23} = 1980$	$c_{33} = 1210$	$c_{43} = 220$
$c_{14} = 960$	$c_{24} = 240$	$c_{34} = 2520$	$c_{44} = 1320$
$c_{15} = 450$	$c_{25} = 550$	$c_{35} = 750$	$c_{45} = 1050$

$$c_{11} + f_1/n = \underset{k=1,\ldots,m}{\text{mínimo}} \; (c_{kj} + f_k/n)$$

$$c_{11} + 110/5 = 400 + 22 = 422$$

$$\underset{k=1,\ldots,m}{\text{mínimo}} \; (c_{11} + f_1/n,\ c_{21} + f_2/n\ ,\ c_{31} + f_3/n\ ,\ c_{41} + f_4/n) =$$

$$\underset{k=1,\ldots,m}{\text{mínimo}} \; (400 + 22\ ,\ 600 + 26\ ,\ 100 + 28\ ,\ 100 + 32) = 128 \qquad y_{11} = 0$$

$$c_{12} + f_1/n = \underset{k=1,\ldots,m}{\text{mínimo}} \; (c_{kj} + f_k/n)$$

$$c_{12} + 110/5 = 900 + 22 = 922$$

$$\text{mínimo} \; (c_{12} + f_1/n\ ,\ c_{22} + f_2/n\ ,\ c_{32} + f_3/n\ ,\ c_{42} + f_4/n) =$$

$$\text{mínimo}(900 + 22,\ 90 + 26,\ 180 + 28,\ 117 + 32) = 116 \qquad y_{12} = 0$$

$$c_{13} + f_1/n = \underset{k=1,\ldots,m}{\text{mínimo}} \; (c_{kj} + f_k/n)$$

$$c_{13} + 110/5 = 550 + 22 = 572$$

$\text{mínimo}\,(c_{13} + f_1/n\ ,\ c_{23} + f_2/n\ ,\ c_{33} + f_3/n\ ,\ c_{43} + f_4/n) =$

$\text{mínimo}(550 + 22,\ 1980 + 26,\ 1210 + 28,\ 220 + 32) = 252 \qquad y_{13}=0$

$c_{14} + f_1/n = \underset{k=1,\dots,m}{\text{mínimo}} \ (c_{kj} + f_k/n)$

$c_{14} + 110/5 = 960 + 22 = 982$

$\text{mínimo}\,(c_{14} + f_1/n\ ,\ c_{24} + f_2/n\ ,\ c_{34} + f_3/n\ ,\ c_{44} + f_4/n) =$

$\text{mínimo}(960 + 22,\ 240 + 26,\ 2520 + 28,\ 1320 + 32) = 266 \qquad y_{14} = 0$

$c_{15} + f_1/n = \underset{k=1,\dots,m}{\text{mínimo}} (c_{kj} + f_k/n)$

$c_{15} + f_1/n = \underset{k=1,\dots,m}{\text{mínimo}} (c_{kj} + f_k/n)$

$c_{15} + 110/5 = 450 + 22 = 472$

$\text{mínimo}\,(c_{15} + f_1/n\ ,\ c_{25} + f_2/n\ ,\ c_{35} + f_3/n\ ,\ c_{45} + f_4/n)$

$\text{mínimo}(450 + 22,\ 550 + 26,\ 750 + 28,\ 1050 + 32) = 472 \qquad y_{15} = 1$

$c_{21} + f_2/n = \underset{k=1,\dots,m}{\text{mínimo}} (c_{kj} + f_k/n)$

$c_{21} + 130/5 = 600 + 26 = 626$

$\text{mínimo}\,(c_{11} + f_1/n\ ,\ c_{21} + f_2/n\ ,\ c_{31} + f_3/n\ ,\ c_{41} + f_4/n) =$

$\text{mínimo}(400 + 22,\ 600 + 26,\ 100 + 28,\ 100 + 32) = 128 \qquad y_{21} = 0$

$c_{22} + f_2/n = \underset{k=1,\dots,m}{\text{mínimo}} (c_{kj} + f_k/n)$

$c_{22} + 130/5 = 90 + 26 = 116$

$\text{mínimo}\,(c_{12} + f_1/n\ ,\ c_{22} + f_2/n\ ,\ c_{32} + f_3/n\ ,\ c_{42} + f_4/n) =$

$\text{mínimo}(900 + 22,\ 90 + 26,\ 180 + 28,\ 117 + 32) = 116 \qquad y_{22} = 1$

$c_{23} + f_2/n = \underset{k=1,\dots,m}{\text{mínimo}} \ (c_{kj} + f_k/n)$

$c_{23} + 130/5 = 1980 + 26 = 2006$

$\text{mínimo}\ (c_{13} + f_1/n\ ,\ c_{23} + f_2/n\ ,\ c_{33} + f_3/n\ ,\ c_{43} + f_4/n) =$

$\text{mínimo}(550 + 22,\ 1980 + 26,\ 1210 + 28,\ 220 + 32) = 252 \qquad y_{23} = 0$

$c_{24} + f_2/n = \underset{k=1,\dots,m}{\text{mínimo}}\ (c_{kj} + f_k/n)$

$c_{24} + 130/5 = 240 + 26 = 266$

$\text{mínimo}\ (c_{14} + f_1/n,\ c_{24} + f_2/n\ ,\ c_{34} + f_3/n\ ,\ c_{44} + f_4/n) =$

$\text{mínimo}(960 + 22,\ 240 + 26,\ 2520 + 28,\ 1320 + 32) = 266 \qquad y_{24} = 1$

$c_{25} + f_2/n = \text{mínimo}\ (c_{kj} + f_k/n)$

$c_{25} + 130/5 = 550 + 26 = 576$

$\text{mínimo}\ (c_{15} + f_1/n)\ ,\ c_{25} + f_2/n\ ,\ c_{35} + f_3/n\ ,\ c_{45} + f_4/n) =$

$\text{mínimo}(450 + 22,\ 550 + 26,\ 750 + 28,\ 1050 + 32) = 472 \qquad y_{25} = 0$

$c_{21} + f_2/n = \underset{k=1,\dots,m}{\text{mínimo}}(c_{kj} + f_k/n)$

$c_{21} + 130/5 = 600 + 26 = 626$

$\text{mínimo}\ (c_{11} + f_1/n\ ,\ c_{21} + f_2/n\ ,\ c_{31} + f_3/n\ ,\ c_{41} + f_4/n) =$

$\text{mínimo}\ (400 + 22,\ 600 + 26,\ 100 + 28,\ 100 + 32) = 128 \qquad y_{21} = 0$

$c_{22} + f_2/n = \underset{k=1,\dots,m}{\text{mínimo}}(c_{kj} + f_k/\ n)$

$c_{22} + 130/5 = 90 + 26 = 116$

$\text{mínimo}\ (c_{12} + f_1/n\ ,\ c_{22} + f_2/n\ ,\ c_{32} + f_3/n\ ,\ c_{42} + f_4/n) =$

$\text{mínimo}(900 + 22,\ 90 + 26,\ 180 + 28,\ 117 + 32) = 116 \qquad y_{22} = 1$

$c_{23} + f_2/n = \underset{k=1,\dots,m}{\text{mínimo}}(c_{kj} + f_k/n)$

$c_{23} + 130/5 = 1980 + 26 = 2006$

$\text{mínimo } (c_{13} + f_1/n \ , \ c_{23} + f_2/n, \ c_{33} + f_3/n \ , \ c_{43} + f_4/n) =$

$\text{mínimo}(550 + 22, \ 1980 + 26, \ 1210 + 28, \ 220 + 32) = 252 \qquad y_{23} = 0$

$c_{24} + f_2/n = \underset{k=1,...,m}{\text{mínimo}} (c_{kj} + f_k/n)$

$c_{24} + 130/5 = 240 + 26 = 266$

$\text{mínimo } (c_{14} + f_1/n \ , \ c_{24} + f_2/n \ , \ c_{34} + f_3/n \ , \ c_{44} + f_4/n) =$

$\text{mínimo}(960 + 22, \ 240 + 26, \ 2520 + 28, \ 1320 + 32) = 266 \qquad y_{24} = 1$

$c_{25} + f_2/n = \text{mínimo } (c_{kj} + f_k/n)$

$c_{25} + 130/5 = 550 + 26 = 576$

$\text{mínimo } (c_{15} + f_1/n \ , \ c_{25} + f_2/n \ , \ c_{35} + f_3/n \ , \ c_{45} + f_4/n) =$

$\text{mínimo}(450 + 22, \ 550 + 26, \ 750 + 28, \ 1050 + 32) = 472 \qquad y_{25} = 0$

$c_{31} + f_3/n = \underset{k=1,...,m}{\text{mínimo}} (c_{kj} + f_k/n)$

$c_{31} + 140/5 = 100 + 28 = 128$

$\text{mínimo } (c_{11} + f_1/n \ , \ c_{21} + f_2/n \ , \ c_{31} + f_3/n \ , \ c_{41} + f_4/n) =$

$\text{mínimo } (400 + 22, \ 600 + 26, \ 100 + 28, \ 100 + 32) = 128 \qquad y_{31} = 1$

$c_{32} + f_3/n = \underset{k=1,...,m}{\text{mínimo}} (c_{kj} + f_k/n)$

$c_{32} + 140/5 = 180 + 28 = 208$

$\text{mínimo } (c_{12} + f_1/n \ , \ c_{22} + f_2/n \ , \ c_{32} + f_3/n \ , \ c_{42} + f_4/n) =$

$\text{mínimo}(900 + 22, \ 90 + 26, \ 180 + 28, \ 117 + 32) = 116 \qquad y_{32} = 0$

$c_{33} + f_3/n = \underset{k=1,...,m}{\text{mínimo}} (c_{kj} + f_k/n)$

$c_{33} + 140/5 = 1210 + 28 = 1238$

mínimo $(c_{13} + f_1/n \ , \ c_{23} + f_2/n \ , \ c_{33} + f_3 \ , \ c_{34} + f_4/n) =$

mínimo$(550 + 22, 1980 + 26, 1210 + 28, 220 + 32) = 252 \qquad y_{33} = 0$

$c_{34} + f_3/n = \underset{k=1,...,m}{\text{mínimo}} (c_{kj} + f_k/n)$

$c_{34} + 140/5 = 2520 + 28 = 2548$

mínimo $(c_{14} + f_1/n \ ; \ c_{24} + f_2/n \ , \ c_{34} + f_3/n \ , \ c_{44} + f_4/n) =$

mínimo$(960 + 22, 240 + 26, 2520 + 28, 1320 + 32) = 266 \qquad y_{34} = 0$

$c_{35} + f_3/n = \underset{k=1,...,m}{\text{mínimo}} (c_{kj} + f_k/n)$

$c_{35} + 140/5 = 750 + 28 = 778$

mínimo $(c_{15} + f_1/n, \ , \ c_{25} + f_2/n \ , \ c_{35} + f_3/n \ , \ c_{45} + f_4/n) =$

mínimo$(450 + 22, 550 + 26, 750 + 28, 1050 + 32) = 472 \qquad y_{35} = 0$

$c_{41} + f_4/n = \underset{k=1,...,m}{\text{mínimo}} (c_{kj} + f_k/n)$

$c_{41} + 160/5 = 100 + 32 = 132$

mínimo $(c_{11} + f_1/n \ , \ c_{21} + f_2/n \ , \ c_{31} + f_3/n \ , \ c_{41} + f_4/n) =$

mínimo$(400 + 22, 600 + 26, 100 + 28, 100 + 32) = 128 \qquad y_{41} = 0$

$c_{42} + f_4/n = \text{mínimo} \ (c_{kj} + f_k/n)$

$c_{42} + 160/5 = 117 + 32 = 149$

mínimo $(c_{12} + f_1/n \ , \ c_{22} + f_2/n \ , \ c_{32} + f_3/n \ , \ c_{42} + f_4/n) =$

mínimo$(900 + 22, 90 + 26, 180 + 28, 117 + 32) = 116 \qquad y_{42} = 0$

$c_{43} + f_4/n = \underset{k=1,...,m}{\text{mínimo}} (c_{kj} + f_k/n)$

$c_{43} + 160/5 = 220 + 32 = 252$

$\text{mínimo } (c_{13} + f_1/n,\ c_{23} + f_2/n,\ c_{33} + f_3/n,\ c_{43} + f_4/n) =$

$\text{mínimo } (550 + 22,\ 1980 + 26,\ 1210 + 28,\ 220 + 32) = 252 \Rightarrow \quad y_{43} = 1$

$c_{44} + f_4/n = \underset{k=1,\dots,m}{\text{mínimo}} \ (c_{kj} + f_k/n)$

$c_{44} + 160/5 = 1320 + 32 = 1352$

$\text{mínimo } (c_{14} + f_1/n,\ c_{24} + f_2/n,\ c_{34} + f_3/n,\ c_{44} + f_4/n) =$

$\text{mínimo } (960 + 22,\ 240 + 26,\ 2520 + 28,\ 1320 + 32) = 246 \Rightarrow \quad y_{44} = 0$

$c_{45} + f_4/n = \underset{k=1,\dots,m}{\text{mínimo}} \ (c_{kj} + f_k/n)$

$c_{45} + 160/5 = 1050 + 32 = 1082$

$\text{mínimo } (c_{15} + f_1/n,\ c_{25} + f_2/n,\ c_{35} + f_3/n,\ c_{45} + f_4/n) =$

$\text{mínimo } (450 + 22,\ 550 + 26,\ 750 + 28,\ 1050 + 32) = 472 \Rightarrow \quad y_{45} = 0$

$z = 472 + 116 + 266 + 128 + 252 = 1234$

LP^1

$$Y_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } c_{ij} + l_i/n = \underset{k \in I_1 \cup I_f}{\text{mínimo}} \ (c_{kj} + f_k/n) \\ 0, & \text{senão} \end{cases}$$

para $j = 1, 2, \dots, n$ e

$$l_k = \begin{cases} f_k & \text{se } x_k \text{ for livre} \quad (k \in I_f) \\ 0 & \text{se } x_k \text{ for fixo em } 1 \quad (k \in I_1) \end{cases}$$

Fazendo $x_1 = 1$ $k = 1$ I_1, x_2, x_3, x_4 livre teremos $l_1 = 0$

$c_{11} + 0/5 = 400 \Rightarrow \text{mínimo}(400, 626, 128, 132) = 128 \Rightarrow y_{11} = 0$

$c_{12} + 0/5 = 900 \Rightarrow \text{mínimo}(900, 116, 208, 149) = 116 \Rightarrow y_{12} = 0$

$c_{13} + 0/5 = 550 \Rightarrow \text{mínimo}(550, 2006, 1238, 252) = 252 \Rightarrow y_{13} = 0$

$c_{14} + 0/5 = 960 \Rightarrow \text{mínimo}(960, 266, 2548, 1552) = 266 \Rightarrow y_{14} = 0$

$c_{15} + 0/5 = 450 \Rightarrow$ mínimo(450, 576, 778, 1082)=450 $\Rightarrow y_{15} = 1$

$c_{21} + 130/5 = 626 \Rightarrow$ mínimo(400, 626, 128, 132)=128 $\Rightarrow y_{21} = 0$

$c_{22} + 130/5 = 116 \Rightarrow$ mínimo(900, 116, 208, 149)=116 $\Rightarrow y_{22} = 1$

$c_{23} + 130/5 = 2006 \Rightarrow$ mínimo(550, 2006, 1238, 252)=252 $\Rightarrow y_{23} = 0$

$c_{24} + 130/5 = 266 \Rightarrow$ mínimo(960, 266, 2548, 1352)=266 $\Rightarrow y_{24} = 1$

$c_{25} + 130/5 = 576 \Rightarrow$ mínimo(450, 576, 778, 1032)=450 $\Rightarrow y_{25} = 0$

$c_{31} + 140/5 = 128 \Rightarrow$ mínimo(400, 626, 128, 132)= 128 $\Rightarrow y_{31} = 1$

$c_{32} + 140/5 = 208 \Rightarrow$ mínimo(900, 116, 208, 149)= 116 $\Rightarrow y_{32} = 0$

$c_{33} + 140/5 = 1238 \Rightarrow$ mínimo(550, 2006, 1238, 252)=252 $\Rightarrow y_{33} = 0$

$c_{34} + 140/5 = 2548 \Rightarrow$ mínimo(960, 266, 2548, 1352)=266 $\Rightarrow y_{34} = 0$

$c_{35} + 140/5 = 778 \Rightarrow$ mínimo(450, 576, 778, 1082)= 450 $\Rightarrow y_{35} = 0$

$c_{41} + 160/5 = 132 \Rightarrow$ mínimo(400, 626, 128, 132) = 128 $\Rightarrow y_{41} = 0$

$c_{42} + 160/5 = 149 \Rightarrow$ mínimo(900, 116, 208, 149) = 116 $\Rightarrow y_{42} = 0$

$c_{43} + 160/5 = 252 \Rightarrow$ mínimo(550, 2006, 1238, 252)=252 $\Rightarrow y_{43} = 1$

$c_{44} + 160/5 = 1352 \Rightarrow$ mínimo(960, 266, 2548, 1352)=266 $\Rightarrow y_{44} = 0$

$c_{45} + 160/5 = 1082 \Rightarrow$ mínimo(450, 576, 778, 1082)=450 $\Rightarrow y_{45} = 0$

$$z = \sum_{i \in I_1} f_i + \text{minimizar}\left(\sum_{i \in I_f} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} + 1_1/n) y_{ij} + \sum_{i \in I_1} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} + y_{ij}\right.$$

$z = 110 + 450 + 116 + 266 + 128 + 252 = 1322.$

Fazendo $x_1 = 0 \Rightarrow I_o = \{1\} \Rightarrow I_f = \{2,3,4\}$

$c_{11} + 110/5 = 422 \Rightarrow$ mínimo(626, 128, 132) = 128 $\Rightarrow y_{11} = 0$

$c_{12} + 110/5 = 922 \Rightarrow$ mínimo(116, 208, 1202) = 116 $\Rightarrow y_{12} = 0$

$c_{13} + 110/5 = 572 \Rightarrow$ mínimo(2006, 1248, 252) = 252 $\Rightarrow y_{13} = 0$

$c_{14} + 110/5 = 982 \Rightarrow$ mínimo(266, 2548, 1352) = 266 $\Rightarrow y_{14} = 0$

$c_{15} + 110/5 = 472 \Rightarrow$ mínimo(576, 778, 1082) = 576 $\Rightarrow y_{15} = 0$

$c_{21} + 130/5 = 626 \Rightarrow$ mínimo(626, 128, 132) = 128 $\Rightarrow y_{21} = 0$

$c_{22} + 130/5 = 116 \Rightarrow$ mínimo(116, 208, 1202) = 116 $\Rightarrow y_{22} = 1$

$c_{23} + 130/5 = 2006 \Rightarrow$ mínimo(2006, 1238, 252) = 252 $\Rightarrow y_{23} = 0$

$c_{24} + 130/5 = 266 \Rightarrow$ mínimo(266, 2548, 1352) = 266 $\Rightarrow y_{24} = 1$

$c_{25} + 130/5 = 576 \Rightarrow$ mínimo(576, 778, 1082) = 576 $\Rightarrow y_{25} = 1$

$c_{31} + 140/5 = 128 \Rightarrow$ mínimo(626, 128, 132) = 128 $\Rightarrow y_{31} = 1$

$c_{32} + 140/5 = 208 \Rightarrow$ mínimo(116, 208, 1202) = 116 $\Rightarrow y_{32} = 0$

$c_{33} + 140/5 = 1238 \Rightarrow$ mínimo(2006, 1238, 252) = 252 $\Rightarrow y_{33} = 0$

$c_{34} + 140/5 = 2548 \Rightarrow$ mínimo(266, 2548, 1352) = 266 $\Rightarrow y_{34} = 0$

$c_{35} + 140/5 = 778 \Rightarrow$ mínimo(576, 778, 1082) = 576 $\Rightarrow y_{35} = 0$

$c_{41} + 160/5 = 132 \Rightarrow$ mínimo(626, 128, 132) = 128 $\Rightarrow y_{41} = 0$

$c_{42} + 160/5 = 1202 \Rightarrow$ mínimo(116, 208, 1202) = 116 $\Rightarrow y_{42} = 0$

$c_{43} + 140/5 = 252 \Rightarrow$ mínimo(2006, 1238, 252) = 252 $\Rightarrow y_{43} = 1$

$c_{44} + 140/5 = 1352 \Rightarrow$ mínimo(266, 2548, 1352) = 266 $\Rightarrow y_{44} = 0$

$c_{45} + 140/5 = 1082 \Rightarrow$ mínimo(576, 778, 1082) = 576 $\Rightarrow y_{45} = 0$

$$z = \sum_{i \in I_1} f_i + \text{minimizar}\left(\sum_{i \in I_f} \sum_{J=1}^{n} (c_{ij} + f_i/n) y_{ij} + c_{ij} y_{ij}\right)$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{i \in I_1 \cup I_f} y_{ij} = 1 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

$$y_{ij} \geqq 0 \quad \forall\ i,j \ \text{ e } \ i \notin I_o$$

$z = 0 + 116 + 266 + 576 + 128 + 252 = 1338$

LP^2

$I_1 = \{1\}$ $I_o = \{2\}$ $I_f = \{3,4\}$

$x_2 = 0$

$c_{11} + f_1/5 = 400 \Rightarrow \text{mínimo}(400, 128, 132) = 128 \Rightarrow y_{11} = 0$

$c_{12} + f_1/5 = 900 \Rightarrow \text{mínimo}(900, 208, 1202) = 208 \Rightarrow y_{12} = 0$

$c_{13} + f_1/5 = 550 \Rightarrow \text{mínimo}(550, 1238, 252) = 252 \Rightarrow y_{13} = 0$

$c_{14} + f_1/5 = 960 \Rightarrow \text{mínimo}(960, 2548, 1352) = 960 \Rightarrow y_{14} = 0$

$c_{15} + f_1/5 = 450 \Rightarrow \text{mínimo}(450, 778, 1082) = 450 \Rightarrow y_{15} = 1$

$c_{21} + f_2/5 = 626 \Rightarrow \text{mínimo}(400, 128, 132) = 128 \Rightarrow y_{21} = 0$

$c_{22} + f_2/5 = 116 \Rightarrow \text{mínimo}(900, 208, 1202) = 208 \Rightarrow y_{22} = 0$

$c_{23} + f_2/5 = 2006 \Rightarrow \text{mínimo}(560, 1238, 252) = 252 \Rightarrow y_{23} = 0$

$c_{24} + f_2/5 = 226 \Rightarrow \text{mínimo}(960, 2548, 1352) = 960 \Rightarrow y_{24} = 0$

$c_{25} + f_2/5 = 576 \Rightarrow \text{mínimo}(450, 778, 1082) = 450 \Rightarrow y_{25} = 0$

$c_{31} + f_3/5 = 128 \Rightarrow \text{mínimo}(400, 128, 132) = 128 \Rightarrow y_{31} = 1$

$c_{32} + f_3/5 = 208 \Rightarrow \text{mínimo}(900, 208, 1202) = 208 \Rightarrow y_{32} = 1$

$c_{33} + f_3/5 = 1238 \Rightarrow \text{mínimo}(550, 1238, 252) = 252 \Rightarrow y_{33} = 0$

$c_{34} + f_3/5 = 2548 \Rightarrow \text{mínimo}(960, 2548, 1352) = 960 \Rightarrow y_{34} = 0$

$c_{35} + f_3/5 = 778 \Rightarrow \text{mínimo}(450, 778, 1082) = 450 \Rightarrow y_{35} = 0$

$c_{41} + f_4/5 = 132 \Rightarrow \text{mínimo}(400, 128, 132) = 128 \Rightarrow y_{41} = 0$

$c_{42} + f_4/5 = 1202 \Rightarrow \text{mínimo}(900, 208, 1202) = 200 \Rightarrow y_{42} = 0$

$c_{43} + f_4/5 = 252 \Rightarrow \text{mínimo}(550, 1238, 252) = 252 \Rightarrow y_{43} = 1$

$c_{44} + f_4/5 = 1352 \Rightarrow \text{mínimo}(960, 2548, 1352) = 960 \Rightarrow y_{44} = 0$

$c_{45} + f_4/5 = 1082 \Rightarrow \text{mínimo}(450, 778, 1082) = 450 \Rightarrow y_{45} = 0$

$z = 110 + 960 + 450 + 128 + 252 = 2108$

Fazendo $x_2 = 1$ $\quad I_1 = 1,2$ $\quad I_f = 3,4$

$c_{11} + f_1/5 = 400 \Rightarrow \text{mínimo}(400, 600, 128, 132) = 128 \Rightarrow y_{11} = 0$

$c_{12} + f_1/5 = 900 \Rightarrow \text{mínimo}(900, 90, 208, 1202) = 90 \Rightarrow y_{12} = 0$

$c_{13} + f_1/5 = 550 \Rightarrow \text{mínimo}(550, 1980, 1238, 252) = 252 \Rightarrow y_{13} = 0$

$c_{14} + f_1/5 = 960 \Rightarrow \text{mínimo}(960, 240, 2548, 1352) = 240 \Rightarrow y_{14} = 0$

$c_{15} + f_1/5 = 450 \Rightarrow \text{mínimo}(450, 550, 778, 1082) = 450 \Rightarrow y_{15} = 1$

$c_{21} + f_2/5 = 600 \Rightarrow \text{mínimo}(400, 600, 128, 132) = 128 \Rightarrow y_{21} = 0$

$c_{22} + f_2/5 = 90 \Rightarrow \text{mínimo}(900, 90, 208, 1202) = 90 \Rightarrow y_{22} = 1$

$c_{23} + f_2/5 = 1980 \Rightarrow \text{mínimo}(550, 1980, 1238, 252) = 252 \Rightarrow y_{23} = 0$

$c_{24} + f_2/5 = 240 \Rightarrow \text{mínimo}(960, 240, 2548, 352) = 240 \Rightarrow y_{24} = 1$

$c_{25} + f_2/5 = 550 \Rightarrow \text{mínimo}(450, 550, 778, 1082) = 450 \Rightarrow y_{25} = 0$

$c_{31} + f_3/5 = 128 \Rightarrow \text{mínimo}(400, 600, 128, 132) = 128 \Rightarrow y_{31} = 1$

$c_{32} + f_3/5 = 208 \Rightarrow \text{mínimo}(900, 90, 208, 1202) = 90 \Rightarrow y_{32} = 0$

$c_{33} + f_3/5 = 1238 \Rightarrow \text{mínimo}(550, 1980, 1238, 252) = 252 \Rightarrow y_{33} = 0$

$c_{34} + f_3/5 = 2548 \Rightarrow \text{mínimo}(960, 240, 2548, 1352) = 240 \Rightarrow y_{34} = 0$

$c_{35} + f_3/5 = 778 \Rightarrow \text{mínimo}(440, 550, 778, 1082) = 450 \Rightarrow y_{35} = 0$

$c_{41} + f_4/5 = 132 \Rightarrow \text{mínimo}(400, 600, 128, 132) = 128 \Rightarrow y_{41} = 0$

$c_{42} + f_4/5 = 1202 \Rightarrow \text{mínimo}(900, 90, 208, 1202) = 90 \Rightarrow y_{42} = 0$

$c_{43} + f_4/5 = 252 \Rightarrow \text{mínimo}(550, 1980, 1238, 252) = 252 \Rightarrow y_{43} = 1$

$c_{44} + f_4/5 = 1352 \Rightarrow \text{mínimo}(960, 240, 2548, 1352) = 240 \Rightarrow y_{44} = 0$

$c_{45} + f_4/5 = 1082 \Rightarrow \text{mínimo}(450, 550, 778, 1082) = 450 \Rightarrow y_{45} = 0$

$z = 110 + 130 + 450 + 90 + 240 + 128 + 252 = 1400$

LP^3

Fazendo $x_3 = 0$ $I_1 = \{1,2\}$ $I_f = \{4\}$

$c_{11} + f_1/5 = 400 \Rightarrow$ mínimo(400, 600, 132) = 132 $\Rightarrow y_{11} = 0$

$c_{12} + f_1/5 = 900 \Rightarrow$ mínimo(900, 90, 1202) = 90 $\Rightarrow y_{12} = 0$

$c_{13} + f_1/5 = 550 \Rightarrow$ mínimo(550, 1980, 252) =252 $\Rightarrow y_{13} = 0$

$c_{14} + f_1/5 = 960 \Rightarrow$ mínimo(960, 240, 1352) =240 $\Rightarrow y_{14} = 0$

$c_{15} + f_1/5 = 450 \Rightarrow$ mínimo(450, 550, 1082) =450 $\Rightarrow y_{15} = 1$

$c_{21} + f_2/5 = 600 \Rightarrow$ mínimo(400, 600, 132) = 132 $\Rightarrow y_{21} = 0$

$c_{22} + f_2/5 = 90 \Rightarrow$ mínimo(900, 90, 1202) = 90 $\Rightarrow y_{22} = 1$

$c_{23} + f_2/5 = 1980 \Rightarrow$ mínimo(550, 1980, 252)= 252 $\Rightarrow y_{23} = 0$

$c_{24} + f_2/5 = 240 \Rightarrow$ mínimo(960, 240, 1352) = 240 $\Rightarrow y_{24} = 1$

$c_{25} + f_2/5 = 550 \Rightarrow$ mínimo(450, 550, 1082) = 450 $\Rightarrow y_{25} = 0$

$c_{31} + f_3/5 = 128 \Rightarrow$ mínimo(400, 600, 132) = 132 $\Rightarrow y_{31} = 0$

$c_{32} + f_3/5 = 208 \Rightarrow$ mínimo(900, 90, 1202) = 90 $\Rightarrow y_{32} = 0$

$c_{33} + f_3/5 = 1238 \Rightarrow$ mínimo(550, 1980, 252) = 252 $\Rightarrow y_{33} = 0$

$c_{34} + f_3/5 = 2548 \Rightarrow$ mínimo(960, 240, 352) = 240 $\Rightarrow y_{34} = 0$

$c_{35} + f_3/5 = 778 \Rightarrow$ mínimo(450, 550, 1082) = 450 $\Rightarrow y_{35} = 0$

$c_{41} + f_4/5 = 132 \Rightarrow$ mínimo(400, 600, 132) = 132 $\Rightarrow y_{41} = 1$

$c_{42} + f_4/5 = 1202 \Rightarrow$ mínimo(900, 90, 1202) = 90 $\Rightarrow y_{42} = 0$

$c_{43} + f_4/5 = 252 \Rightarrow$ mínimo(550, 1980, 252) = 252 $\Rightarrow y_{43} = 1$

$c_{44} + f_4/5 = 1352 \Rightarrow$ mínimo(960, 240, 1352) = 240 $\Rightarrow y_{44} = 0$

$c_{45} + f_4/5 = 1082 \Rightarrow$ mínimo(450, 550, 1082) = 450 $\Rightarrow y_{45} = 0$

$z = 110 + 130 + 450 + 90 + 240 + 132 + 252 = 1404 \Rightarrow$

fazendo $x_3 = 1$ $\quad I_1 = \{1,2,3\}$ $\quad I_f = \{4\}$

$c_{11} + f_1/5 = 400 \Rightarrow$ mínimo(400, 600, 100, 132) = 100 $\Rightarrow y_{11} = 0$

$c_{12} + f_1/5 = 900 \Rightarrow$ mínimo(900, 90, 180, 1202) = 90 $\Rightarrow y_{12} = 0$

$c_{13} + f_1/5 = 550 \Rightarrow$ mínimo(550, 1980, 1210, 252)=252 $\Rightarrow y_{13} = 0$

$c_{14} + f_1/5 = 960 \Rightarrow$ mínimo(960, 240, 2520, 1352)=240 $\Rightarrow y_{14} = 0$

$c_{15} + f_1/5 = 450 \Rightarrow$ mínimo(450, 550, 750, 1082)= 450 $\Rightarrow y_{15} = 1$

$c_{21} + f_2/5 = 600 \Rightarrow$ mínimo(400, 600, 100, 132) = 100 $\Rightarrow y_{21} = 0$

$c_{22} + f_2/5 = 90 \Rightarrow$ mínimo(900, 90, 180, 1202) = 90 $\Rightarrow y_{22} = 1$

$c_{23} + f_2/5 = 1980 \Rightarrow$ mínimo(550, 1980, 1210, 252)=252 $\Rightarrow y_{23} = 0$

$c_{24} + f_2/5 = 240 \Rightarrow$ mínimo(960, 240, 2520, 1352)=240 $\Rightarrow y_{24} = 1$

$c_{25} + f_2/5 = 550 \Rightarrow$ mínimo(450, 550, 750, 1082)= 450 $\Rightarrow y_{25} = 0$

$c_{31} + f_3/5 = 100 \Rightarrow$ mínimo(400, 600, 100, 132) = 100 $\Rightarrow y_{31} = 1$

$c_{32} + f_3/5 = 180 \Rightarrow$ mínimo(900, 90, 180, 1202) = 90 $\Rightarrow y_{32} = 0$

$c_{33} + f_3/5 = 1210 \Rightarrow$ mínimo(550, 1980, 1210, 2200=220 $\Rightarrow y_{33} = 0$

$c_{34} + f_3/5 = 2520 \Rightarrow$ mínimo(960, 240, 2520, 1352)=240 $\Rightarrow y_{34} = 0$

$c_{35} + f_3/5 = 750 \Rightarrow$ mínimo(450, 550, 750, 1082)= 450 $\Rightarrow y_{35} = 0$

$c_{41} + f_4/5 = 132 \Rightarrow$ mínimo(400, 600, 100, 132) = 100 $\Rightarrow y_{41} = 0$

$c_{42} + f_4/5 = 1202 \Rightarrow$ mínimo(900, 90, 180, 1202) = 90 $\Rightarrow y_{42} = 0$

$c_{43} + f_4/5 = 252 \Rightarrow$ mínimo(550, 1980, 1210, 252)=252 $\Rightarrow y_{43} = 1$

$c_{44} + f_4/5 = 1352 \Rightarrow$ mínimo(960, 240, 2520, 1352)=240 $\Rightarrow y_{44} = 0$

$c_{45} + f_4/5 = 1082 \Rightarrow$ mínimo(450, 550, 750, 1082) =450 $\Rightarrow y_{45} = 0$

$z = 110 + 130$ % $140 + 450 + 90 + 240 + 100 + 252 = 1512$

LP^4

Fazendo $x_4 = 0$ $\quad I_1 = \{1,2\}$ $\quad I_f = \{3,4\}$

$c_{11} + f_1/5 = 400 \Rightarrow$ mínimo(400, 600) = 400 $\Rightarrow y_{11} = 1$

$c_{12} + f_1/5 = 900 \Rightarrow$ mínimo(900, 90) = 90 $\Rightarrow y_{12} = 0$

$c_{13} + f_1/5 = 550 \Rightarrow$ mínimo(550, 1980) = 550 $\Rightarrow y_{13} = 1$

$c_{14} + f_1/5 = 960 \Rightarrow$ mínimo(960, 240) = 240 $\Rightarrow y_{14} = 0$

$c_{15} + f_1/5 = 450 \Rightarrow$ mínimo(450, 550) = 450 $\Rightarrow y_{15} = 1$

$c_{21} + f_2/5 = 600 \Rightarrow$ mínimo(400, 600) = 400 $\Rightarrow y_{21} = 0$

$c_{22} + f_2/5 = 90 \Rightarrow$ mínimo(900, 90) = 90 $\Rightarrow y_{22} = 1$

$c_{23} + f_2/5 = 1980 \Rightarrow$ mínimo(550, 1980) = 550 $\Rightarrow y_{23} = 0$

$c_{24} + f_2/5 = 240 \Rightarrow$ mínimo(960, 240) = 240 $\Rightarrow y_{24} = 1$

$c_{25} + f_2/5 = 550 \Rightarrow$ mínimo(450, 550) = 450 $\Rightarrow y_{25} = 0$

$z = 110 + 130 + 400 + 550 + 450 + 90 + 240 = 1970$ primeiro solução

Fazendo $x_4 = 1$ $\quad I_1 = \{1,2,4\}$ $\quad I_o = \{3\}$

$c_{11} + f_1/5 = 400 \Rightarrow$ mínimo(400, 600, 100) = 100 $\Rightarrow y_{11} = 0$

$c_{12} + f_1/5 = 900 \Rightarrow$ mínimo(900, 90, 1170) = 90 $\Rightarrow y_{12} = 0$

$c_{13} + f_1/5 = 550 \Rightarrow$ mínimo(550, 1980, 220) = 220 $\Rightarrow y_{13} = 0$

$c_{14} + f_1/5 = 960 \Rightarrow$ mínimo(960, 240, 1320) = 240 $\Rightarrow y_{14} = 0$

$c_{15} + f_1/5 = 450 \Rightarrow$ mínimo(450, 550, 1050) = 450 $\Rightarrow y_{15} = 1$

$c_{21} + f_2/5 = 600 \Rightarrow$ mínimo(400, 600, 100) = 100 $\Rightarrow y_{21} = 0$

$c_{22} + f_2/5 = 90 \Rightarrow$ mínimo(900, 90, 1170) = 90 $\Rightarrow y_{22} = 1$

$c_{23} + f_2/5 = 1980 \Rightarrow$ mínimo(550, 1980, 220) = 220 $\Rightarrow y_{23} = 0$

$c_{24} + f_2/5 = 240 \Rightarrow$ mínimo(960, 240, 1320) = 240 $\Rightarrow y_{24} = 1$

$c_{25} + f_2/5 = 550$	mínimo(450, 550, 1050) = 450	$y_{25} = 0$
$c_{41} + f_4/5 = 100$	mínimo(400, 600, 100) = 100	$y_{41} = 1$
$c_{42} + f_4/5 = 1170$	mínimo(900, 90, 1170) = 90	$y_{42} = 0$
$c_{43} + f_4/5 = 220$	mínimo(550, 1980, 220) = 220	$y_{43} = 1$
$c_{44} + f_4/5 = 1320$	mínimo(960, 240, 1320) = 240	$y_{44} = 0$
$c_{45} + f_4/5 = 1050$	mínimo(450, 550, 1050) = 450	$y_{45} = 0$

$z = 110 + 130 + 160 + 450 + 90 + 240 + 100 + 220 = 1500$ segunda solução.

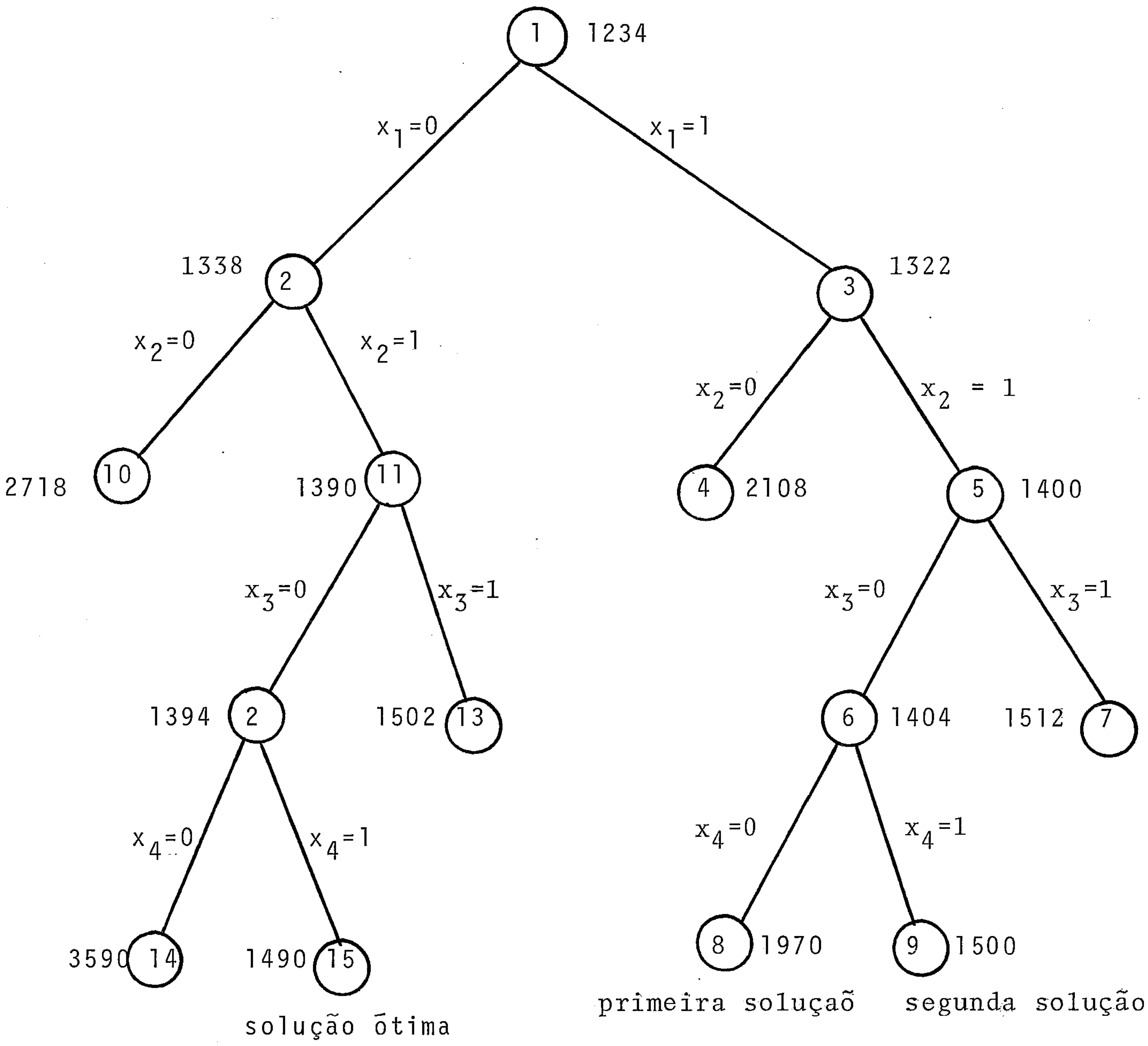

Fig. A-1 - Arborescência de Branch e Bound

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

(1) - BREGALDA, P.F., OLIVEIRA, A.F. e BORNSTEINS, C.T. - Introdução a Programação Linear - Editora Campos, 1981.

(2) - CAMPELLO, R.E. - Cortes Disjuntivos para o Problema do Particionamento - Tese de Doutoramento, COPPE/UFRJ,1980.

(3) - DENZLER, D.R. - An Approximative Algorithm for the Fixed Charge Problem - Naval Research Logisticx Quarterly 16, 1969, p. 411 - 416.

(4) - GASS, S. - Linear Programming, Addison - Wesley Publishing Company, 1975.

(5) - HADLEY, G. - Linear Programming, Addison - Wesley Publishing Companhy, 1975.

(6) - HADLEY, G. - Non linear and Dynamic Programming - Addison Wesley Publishing Company, Inc., 1964.

(7) - HIRSCH, WARTEN M. and DANTZIG GEORGE S.B. - The fixed Charge Problem - Naval Research Logistics Quarterly, 15(3) 1968, p. 413 - 424.

(8) - HU, T.C. - Integer Programming and Network Flows, Addison Wesley, 1969.

(9) - KENNINGTON, JEFF and UNGERED - A New Branch and Bound Algorithm for the Fixed. Charge Transportation Problem - Management Science, 22(10), 1976, p.1116-1126.

(10) - KUHN HAROLD W. and BAUMOL J. WILLIAM - An Approximative Algorithm for the Fixed - Charges Transportation Problem Naval Research Logistics Quarterly, 9(1), 1962, p.1-16.

(11) - LASDON, L.S. - Optimization Theory for Large Systems - The Macmillan Company, Inc., 1970.

(12) - MACULAN, NELSON Fº e CAMPELLO, RUI E. - Branch and Bound Approach a Fixed - Charge Network Expansion - Memórias de Matemática da Universidade Federal do Rio de Janeiro, 1977, nº 82, Apresentado no IX International Symposium on Mathematical Programming, Budapeste, 1976.

(13) - MACULAN, NELSON Fº e PEREIRA, V.F. - Programação Linear Editora Atlas S.A. - 1980.

(14) - SALKIN, HARVEY, M. - Integer Programming - Addison - Wesley Publishing Company, 1974.

(15) - SIMONNARD, MICHEL. - Linear Programming - Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.I., 1966.

(16) - STEINBER, DAVID I. - On Solving Large - Scale Fixed Charge Problems - Presented at Fall 1976 Joint National TIMS/ORSA Meiting, Miami Beach, Florida, 1976.

(17) - STEINBERG, DAVID I. - The Fixed Carge Problem - Naval Reserch Logistics Quarterly, 17(2), p. 217-236.

(18) - TAHA, H.A. - Integer Programmin Theory Application, and Computation - Academic Press, Inc., 1975.