"UMA PERSPECTIVA PARA A SOLUÇÃO DO PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO INTEIRA
VIA INTEGRALIZAÇÃO DE POLITOPOS"

TARCISO GONÇALVES ALENCAR

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIA (M. Sc.)

Aprovada por:

Nelson Maculan Filho
Prof. Nelson Maculan Filho - Presidente

Prof. João Lizardo Rodrigues H. de Araújo

Prof. Jair Koiller

Antonio Alberto Fernandes de Oliveira
Prof. Antonio Alberto F. de Oliveira

RIO DE JANEIRO
ESTADO DO RIO DE JANEIRO - BRASIL
MAIO DE 1977

AGRADECIMENTOS

Ao terminar este trabalho, aproveito a oportunidade para expressar minha gratidão àqueles que de algum modo me auxiliaram; especialmente ao professor Nelson Maculan Filho, pelo seu apoio, incentivo e orientação durante minha passagem pela COPPE.

DEDICATÓRIA

ao meu velho pai

Paulo Gonçalves de Alencar
(in memorian)

S U M Á R I O

O presente trabalho de tese, tem por objetivo principal a integralização de poliedros convexos; fato este de particular interesse na solução de problemas de programação linear inteira.

Primeiramente, se obtêm condições necessária e suficiente para que um poliedro convexo seja integral.

Em seguida, se exibe uma transformação linear do R^n no R^k, que preserva a operação de integralização e integraliza-se um (2, 2)-canto poliédrico pela geração dos vetores normais e vértices do seu conjunto de pontos inteiros.

Por fim, integraliza-se um (2, 2)-poliedro e mostra-se, a impossibilidade de generalização do método apresentado para integralizar.

A B S T R A C T

The present work of thesis concerns mainly the integralization of convex polyhedrons, being this fact of special interest in the solution of problems of Integer Linear Programming.

Firstly, necessary and sufficient conditions are obtained for a convex polyhedron be integral.

Next, a linear transformation of R^n to R^k is shown, preserving the operation of integralization and a (2, 2)-corner-polyhedron is integralizated by the generation of normal vectors and vertex of its set of integer points.

Finally, a (2, 2)-polyhedron is integralizated and the impossibility of generalization of the method presented to integralizate is shown.

I N D I C E

CAPITULO V

CAPITULO VI

CAPÍTULO I

1 - Introdução

Como se sabe, a solução de um problema de programação linear, ocorre em um dos vértices do politopo que o define.

Não obstante essa solução, em geral, ser não-inteira, existe uma gama enorme desses problemas, cujas soluções são, intrinsicamente, inteiras.

Assim é, que o problema da mochila, o problema de colorir regiões de um mapa com um número mínimo de cores, o problema do caixeiro viajante e outros; cada um, tem sua solução situada num dos vértices da envoltória convexa dos pontos inteiros do politopo que o define.

Em 1958, Gomory[8] apresentou um trabalho que resolvia este problema, a partir da aplicação do método do Simplex. É o "Algoritmo dos Cortes de Gomory", que conduz a uma solução (quando esta existe), para o problema de programação linear inteira.

Esta solução, como já foi dito, está situada em um dos vértices da envoltória convexa dos pontos inteiros do politopo que define o problema.

Muito se tem pesquisado nesta área.

Contribuições mais significativas, foram obtidas pelo próprio Gomory[9], que em 1965, mostrou poder um problema de programação linear inteira, ser reduzido a um problema de otimização, com uma equação definida em um grupo abeliano finito.

Autores, como Balinski[1] e Balinski[2], Shapiro[23] e Shapiro[24], Hu[16] e outros também têm desenvolvido pesquisas de relevância neste campo.

Aqui, vale reafirmar, que todas estas pesquisas, têm sido feitas a partir dos cortes de Gomory e estes da aplicação simultânea do método do Simplex.

A presente tese, no entanto, se baseia em uma nova idéia, a de tratar o problema de programação linear inteira apresentada por Murray Edelberg[21] em trabalho de 1970.

Este novo caminho, tem por objetivo, a obtensão da envoltória convexa dos pontos inteiros do politopo, do problema de programação linear, sem a concomitante aplicação do método do Simplex.

Obtida esta envoltória convexa, junta-se-lhe a função objetivo, formando assim um novo problema de programação linear inteira, equivalente ao primeiro. A seguir, aplica-se o método do Simplex a este problema, para obtensão da solução, que sem dúvida será inteira.

Todavia, dificuldades têm existido neste tratamento e por enquanto só tem sido possível integralizar (obter envoltória convexa dos pontos inteiros do politopo), politopos em que a matriz do problema é m x 2.

Espera-se que esta nova idéia, leve a resultados mais interessantes, na solução de problemas de programação linear inteira.

2 - Definições e generalidades

Seja R o corpo dos reais e R^n o espaço de dimensão $\underline{n}$ sobre R.

Seja

$$X = \{x^i \in R^n \;/\; i = \overline{0,k}\}$$

2.1 - Combinação Linear

Um vetor $x \in R^n$ é dito, combinação linear dos $x^i \in X$, se e só se

$$x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x^i$$

$$\lambda_i \in R$$

2.2 - Combinação afim

Um vetor $x \in R^n$ é dito, combinação afim dos $x^i \in X$, se e só se,

$$x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x^i$$

onde $\quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1$

com $\quad \lambda_i \in R$

2.3 - Combinação Convexa

Um vetor $x \in R^n$ é dito, combinação convexa dos $x^i \in X$, se e só se,

$$x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x^i$$

$$1 = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i$$

$$\lambda_i \geq 0$$

$$\lambda_i \in R$$

2.4 - Dependência Linear

O conjunto X é dito, linearmente dependente, se e só se,

$$\lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1 + \ldots\ldots + \lambda_k x^k = 0$$

$$\lambda_i \neq 0 \text{ para algum } \underline{i}\text{ , } i = \overline{0,k}$$

Se além disso,

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots\ldots + \lambda_k = 0$$

o conjunto X é dito, dependente afim.

2.5 - Independência Linear

O conjunto X é dito, linearmente independente, se e só se

$$\lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1 + \ldots\ldots + \lambda_k x^k = 0$$

$$\lambda_i = 0 \qquad \forall \ i = \overline{0,k}$$

Vê-se que

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \ldots\ldots + \lambda_k = 0$$

portanto, se X é linearmente independente, ele também é independente afim.

Dir-se-á que X é dependente, se ele é dependente afim. E independente se ele não é dependente afim.

Pode ser mostrado, que $\underline{X}$ é um conjunto dependente ou independente, se e só se,

$$\overline{X} = \{x^1 - x^0 , x^2 - x^0, ... x^k - x^0\}$$

é linearmente dependente ou linearmente independente.

<u>lema I - 1</u>

O conjunto $\underline{X}$ é dependente, se e só se $\overline{X}$ for linearmente dependente.

prova: i) Assumir-se-á $\overline{X}$ linearmente dependente.

daí

$$\lambda_1(x^1 - x^0) + \lambda_2(x^2 - x^0) + ... + \lambda_k(x^k - x^0) = 0$$

$$-(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k)x^0 + \lambda_1 x^1 + ... + \lambda_k x^k = 0$$

$$\lambda_i \neq 0 \text{ para algum } \underline{i}, \quad i = \overline{1,k}$$

mas, isto é dizer que $\underline{X}$ é linearmente dependente.

Por outro lado, fazendo

$$\lambda_0 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k)$$

tem-se que $$\lambda_0 + \lambda_1 + ... + \lambda_k = 0$$

e portanto, $\underline{X}$ é dependente.

ii) Assumir-se-á $\underline{X}$ dependente.

daí,

$$\lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1 + ... + \lambda_k x^k = 0$$

$$\lambda_0 + \lambda_1 + ... + \lambda_k = 0$$

$$\lambda_i \neq 0 \text{ para algum } \underline{i}, \quad i = \overline{0,k} \quad *$$

*Note que $\lambda_i \neq 0$ para mais de um $\underline{i}$.

Fazendo $\lambda_0 = -(\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_k)$ segue

$$-(\lambda_1 \quad \lambda_2 + ... + \lambda_k)x^0 + \lambda_1 x^1 + ... + \lambda_k x^k = 0$$

$$\lambda_1(x^1 - x^0) + \lambda_2(x^2 - x^0) + ... + \lambda_k(x^k - x^0) = 0$$

$$\lambda_i \neq 0 \quad \text{para algum } \underline{i}, \quad i = \overline{1,k}.$$

Portanto, $\overline{X}$ é linearmente dependente.

Nas definições vistas até aqui, o conjunto X tem sido um subconjunto finito do R^n. Agora, X será considerado um subconjunto qualquer do R^n.

2.6 - Dimensão

O conjunto X tem dimensão k, onde $0 \leqslant k \leqslant n$, se e só se, X contém um máximo de k + 1 elementos independentes e todo conjunto com k + 2 ou mais elementos é dependente.

2.7 - Conjunto Limitado

O conjunto X é limitado, se e só se, existem $y, z \in R^n$ tais que

$$y \leq x \leq z, \qquad x \in X$$

onde $\leq$ significa comparação, componente a componente.

Se X não é limitado, ele é ilimitado.

2.8 - Conjunto Convexo

O conjunto X é convexo, se e só se, para todo $x^1, x^2 \in X$ e $\lambda \in [0, 1]$,

$$\lambda x^1 + (1 - \lambda)x^2 \in X$$

isto é, se $X \varepsilon R^n$ é convexo, então ele contém o segmento de reta, que liga quaisquer dois pontos seus.

ex. I - 1

O R^2 é um conjunto convexo, ilimitado e de dimensão 2.

Um ponto do R^2, é um conjunto convexo, limitado de dimensão 0.

Na figura abaixo, encontram-se vários subconjuntos do R^2 com estas propriedades.

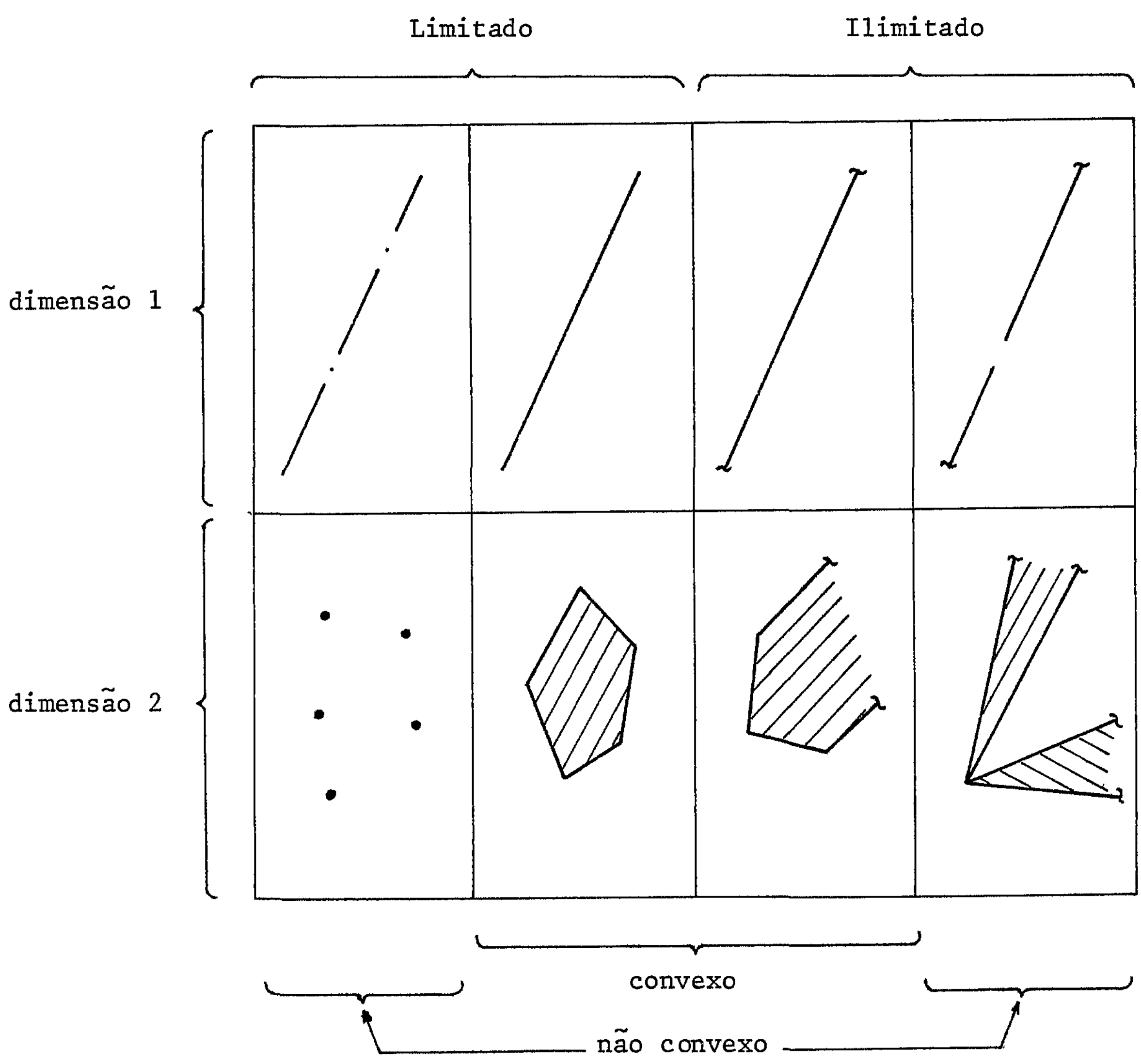


fig. 1 - 1

2.9 - Envoltória Convexa

Seja X um subconjunto do R^n.

A envoltória convexa de X, denotada H(X), é a interseção de todos os subconjuntos convexos do R^n que contêm X.

Assim, H(X) é o menor subconjunto convexo do R^n que contém X.

Se X é convexo, então H(X) = X.

H(X) é única.

Teorema de Caratheodory (Bonnice and Klee[4])

$$H(X) = \{x \in R^n / x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i x^i, \quad \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geqslant 0,\}$$

onde $x^i \in X, \lambda_i \in R$

Este teorema estabelece, que H(X) é o conjunto de todas as combinações convexas, de todos os subconjuntos finitos de X, que contêm n+1 ou menos elementos.

Por outro lado, se X é um subconjunto finito do R^n

$$X = \{x^0, x^1 \ldots . x^m\}$$

pode ser mostrado (Benson[3]) que

$$H(X) = \{x \in R^n / x = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i x^i, \quad \sum_{i=0}^{m} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad \lambda_i \in R\}$$

E vê-se, neste caso particular, que H(X) é o conjunto de todas as combinações convexas de X.

A figura da página seguinte, mostra alguns subconjuntos do R^2 e as suas envoltórias convexas.

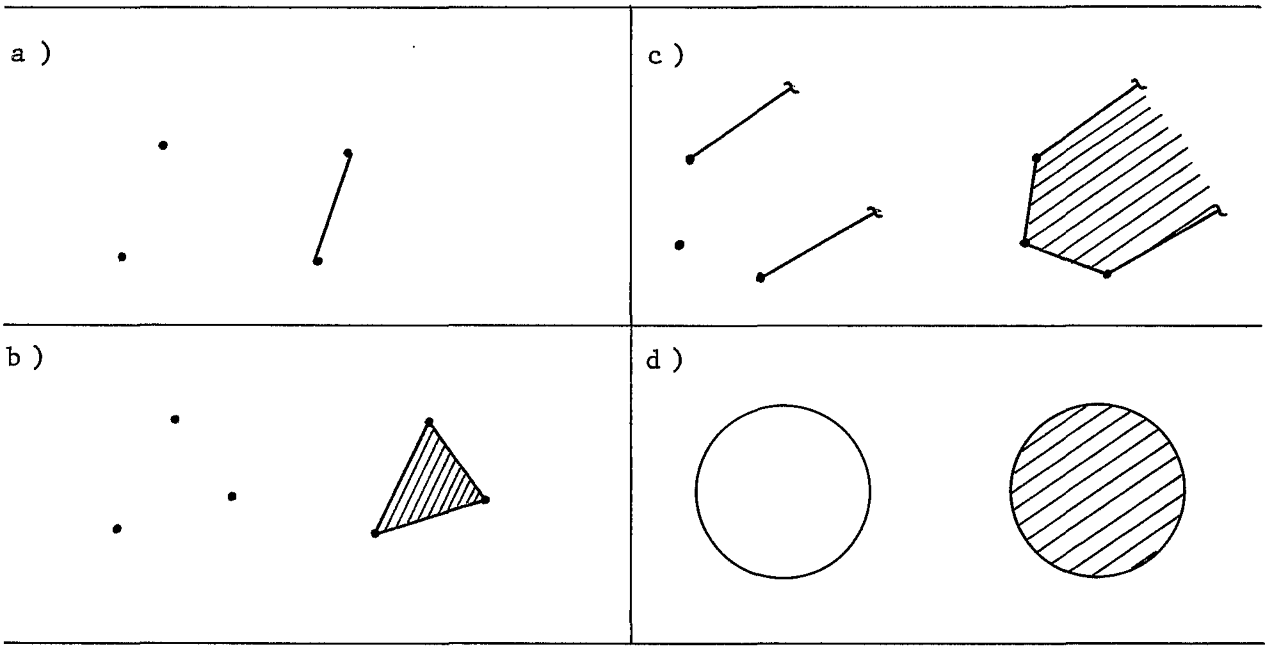


fig. 1 - 2

3 - Superfícies

Seja $X = \{x^0, x^1, \ldots\ldots x^k\}$

um subconjunto de k + 1 elementos independentes do R^n.

3.1 - k-superfície

Uma k-superfície π em R^n, é definida como,

$$\pi = \{x \in R^n / x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i x^i, \quad \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1, \quad \lambda_i \in R\}$$

Vê-se claramente, que π é um conjunto de dimensão k, constituido de todas as combinações afim de X.

O conjunto X é o conjunto gerador de π.

Equivalentemente, π pode ser definido como

$$\pi = \{x \in R^n / Ax = b\}$$

onde A é uma matriz (n - k) x n de posto n - k e b é um elemento fixo do R^{n-k} definido por

$$Ax^i = b, \quad x^i \in X$$

Uma k-superfície em R^n, é conhecida também, como um sub-espaço afim de dimensão k.

3.2 - Hiperplano

Uma (n - 1)-superfície é um hiperplano

$$h = \{x \in R^n / a.x = \beta\}$$

aqui, a é um elemento fixo do R^n, o ponto . indica o produto interno e β é um real.

Vê-se, a partir de 3.1, que uma k-superfície é a interseção de n - k hiperplanos independentes e que se k = n, Ax não poderá ser igual a nenhum vetor fixo b, pois o produto matricial não estará definido.

Assim, uma n-superfície em R^n, só poderá ser o próprio R^n.

Por outro lado, se k = 0, π se reduz a um simples ponto do R^n.

ex. 1 - 2

Considere o R^2, então

0 - superfície —— A é uma matriz 2 x 2 de posto 2.
Logo o sistema Ax = b define um ponto do R^2.

1 - superfície —— A será uma matriz 1 x 2 e tem-se uma reta.

2 - superfície —— A não estará definida e portanto se tem o pro

prio R^2, isto é

$$\pi = \{x \in R^2\}$$

Note que, uma 0-superfície é um conjunto limitado e que se $0 \leq k \leq n$ a k-superfície é um conjunto ilimitado.

A partir de 3.1, prova-se o

<u>lema I - 2</u>

Dado um conjunto $X = \{x^0, x^1 .... x^k\}$ de $k + 1$ elementos independentes do R^n, então existe uma e somente uma k-superfície contendo estes elementos.

3.3 - k-semi-superfície

Uma k-semi-superfície T em R^n, $1 \leq k \leq n$ é um subconjunto convexo ilimitado do R^n, cuja dimensão é k.

$$T = \{x \in R^n / Ax = b \quad e \quad \alpha x \leq \beta\}$$

onde $Ax = b$, define uma k-superfície, $\underline{\alpha}$ um vetor linearmente independente com as linhas de $\underline{A}$ e $\underline{\beta}$ um real fixo.

Nota-se claramente, que o conjunto

$$T' = \{x \in R^n / Ax = b \quad e \quad \alpha x = \beta\}$$

é uma $(k - 1)$-superfície.

Esta superfície T', é o conjunto fronteira da k-semi-superfície.

ex. 1 - 3

A figura da página seguinte mostra uma 1-semi-superfície T e o seu conjunto fronteira uma 0-superfície T' em R^2

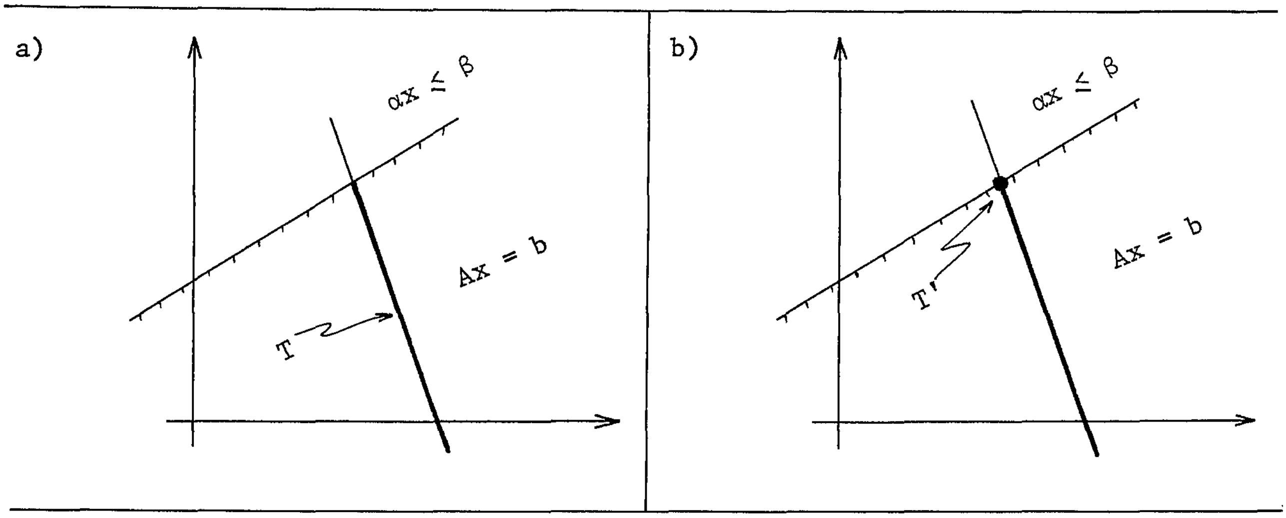


fig. 1 - 4

ex. 1 - 4 Em R^3 uma

1 - semi-superfície é uma semi-reta

2 - semi-superfície é um semi-plano

3 - semi-superfície é um semi-espaço

Os conjuntos fronteira destas semi-superfícies, são respectivamente

0 - superfície - um ponto

1 - superfície - uma reta

2 - superfície - um plano.

3.4 - Semi-espaço

Sejam $\alpha \neq 0$ um vetor do R^n e $\beta \in R$.

Um semi-espaço, é o conjunto

$$E = \{x \in R^n / \alpha x \leq \beta\}$$

e o seu conjunto fronteira é o hiperplano

$$\psi = \{x \in R^n / \alpha x = \beta\}$$

Vê-se facilmente, que

$$\overline{E} = \{x \in R^n / \alpha x \geq \beta\}$$

e também um semi-espaço cujo conjunto fronteira é $\underline{\psi}$.

Portanto

$$\psi = E \wedge \overline{E}$$

Note que, essa interseção seria vazia, se as inequações que definem os dois semi-espaços fossem $\alpha x > \beta$ ou $\alpha x < \beta$.

3.5 - Semi-espaço Suporte

Seja $\underline{X}$ um subconjunto do R^n.

Um semi-espaço do R^n, que contém $\underline{X}$ e cujo hiperplano fronteira contém um ou mais pontos de $\underline{X}$, é <u>um semi-espaço suporte de X</u>.

O hiperplano, fronteira do semi-espaço e que contém pontos de $\underline{X}$ é <u>um hiperplano suporte</u> de X.

4 - <u>Poliedro Convexo</u>

Um poliedro convexo $\underline{P}$ em R^n, é a interseção não vazia de um número finito de semi-espaços em R^n,

$$P = \{x \in R^n / Ax \leq b\}$$

onde $\underline{A}$ é uma matriz m x n e $\underline{b}$ pertence ao R^m.

Se $\underline{A}$ tiver posto igual a $\underline{k}$, dir-se-á que $\underline{P}$ é um <u>(n,k)-poliedro</u>.

P pode ser limitado ou ilimitado e assumir todas as dimensões entre 0 e m.

Note que superfícies e semi-superfícies são casos particulares de poliedros convexos.

4.1 - Face

Uma face de P é uma interseção não vazia de P com um ou mais dos seus hiperplanos suportes.

Seja $a^i x \leq b_i$ uma das desigualdades de $Ax \leq b$ definindo P.

O semi-espaço

$$E = \{x \in R^n / a^i x \leqslant b_i\}$$

pode ou não, ser um semi-espaço suporte de P.

Esse conjunto, é um semi-espaço suporte de P, se

$$P_i = \{x \in P / a^i x = b_i\}$$

é diferente do vazio.

Entretanto, pode-se considerar um subconjunto S de índices de A de modo que se tenha

$$P_S = \{x \in P / A_S x = b_S\}$$

onde A_S é a submatriz de A, constituida dessas linhas e b_S as correspondentes componentes de b.

Vê-se claramente, que P_S está contido em P.

Se P_S é não vazio, ele é uma face de P.

Além disso, cada face de P pode ser expressa dessa forma lema I - 3

Se P_S é uma face de P e $S' \subset S$ designa um conjunto maximal de linhas de A_S linearmente independente, então

$$P_S = P_{S'}$$

prove i) $P_S \subseteq P_{S'}$

$$P_S = \{x \in P / A_S x = b_S\}$$

$$P_{S'} = \{x \in P / A_{S'} x = b_{S'}\}$$

tem-se

$$x \in P_S \Longrightarrow A_S x = b \Rightarrow \begin{bmatrix} A_{S-S'} \\ A_{S'} \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} b_{S-S'} \\ b_{S'} \end{bmatrix}$$

$$x \in P_{S'} \quad \text{pois} \quad A_{S'} x = b_{S'}$$

logo $P_S \subseteq P_{S'}$

ii) $P_{S'} \subseteq P_S$

As linhas de $A_{S'}$, constituem um conjunto maximal de linhas de A_S que são linearmente independentes.

Daí, as linhas de $A_{S-S'}$, podem ser obtidas como combinação linear das linhas de $A_{S'}$.

Seja $a^i_{S-S'}$ a i-ésima linha de $A_{S-S'}$ e sejam $a^1_{S'}, a^2_{S'}, \ldots a^{S'}_{S'}$ as linhas de $A_{S'}$.

Tem-se

$$a^i_{S-S'} = \lambda^i_1 \, a^1_{S'} + \lambda^i_2 \, a^2_{S'} + \ldots + \lambda^i_{S'} \, a^{S'}_{S'}$$

Se $\overline{x} \varepsilon P_{S'}$, então $A_{S'}\overline{x} = b_{S'}$, logo é claro que

$$a^{i}_{S-S'}\ \overline{x} = b^{i}_{S-S'} \quad \text{onde} \quad i = S' + 1,\ S' + 2, \ldots S \text{ e } b^{i}_{S-S'}$$ é a

i-ésima componente de $b_{S-S'}$ dada por

$$b^{i}_{S-S'} = \lambda^{i}_{1}\ b_{S'} + \lambda^{i}_{2}\ b_{S'} + \ldots + \lambda^{i}_{S'}\ b^{S'}_{S'}$$

onde $$b^{j}_{S'} = a^{j}_{S'}\ \overline{x}\ , \quad j = 1,2 \ldots S'$$

Assim $\overline{x}$ P_S e de i e ii

$$P_S = P_{S'}$$

4.2 - Subconjunto Face

O conjunto <u>S'</u> de linhas de <u>A</u> linearmente independente, do lema 1-3, é um <u>subconjunto face</u>.

Vê-se, que todas as faces de <u>P</u>, podem ser geradas, considerando-se somente esses conjuntos de índices de linhas de <u>A</u>, linearmente independentes.

Um caso especial, é aquele em que $S = \emptyset$.

Nesse caso, $P_{\emptyset} = P$.

A partir daí, existe um número finito de passos para formar P. Isto quer dizer que <u>P</u> tem um número finito de faces.

As faces de <u>P</u> são poliedros convexos.

4.3 - k-face

Se uma face de <u>P</u>, tem dimensão <u>k</u>, ela é uma k-face.

Assim é fácil concluir que

0 - face é um vértice de P
1 - face é uma aresta de P.

4.4 - Sub-face

Se P_S e $P_{S'}$ são faces de P e $P_S \subseteq P_{S'}$, então P_S é uma sub-face de $P_{S'}$.

Claramente, se $S' \subseteq S$ então P_S é uma sub-face de $P_{S'}$

ex. 1 - 5 Na figura abaixo $P_{\{4,5\}}$ é sub-face de $P_{\{4\}}$

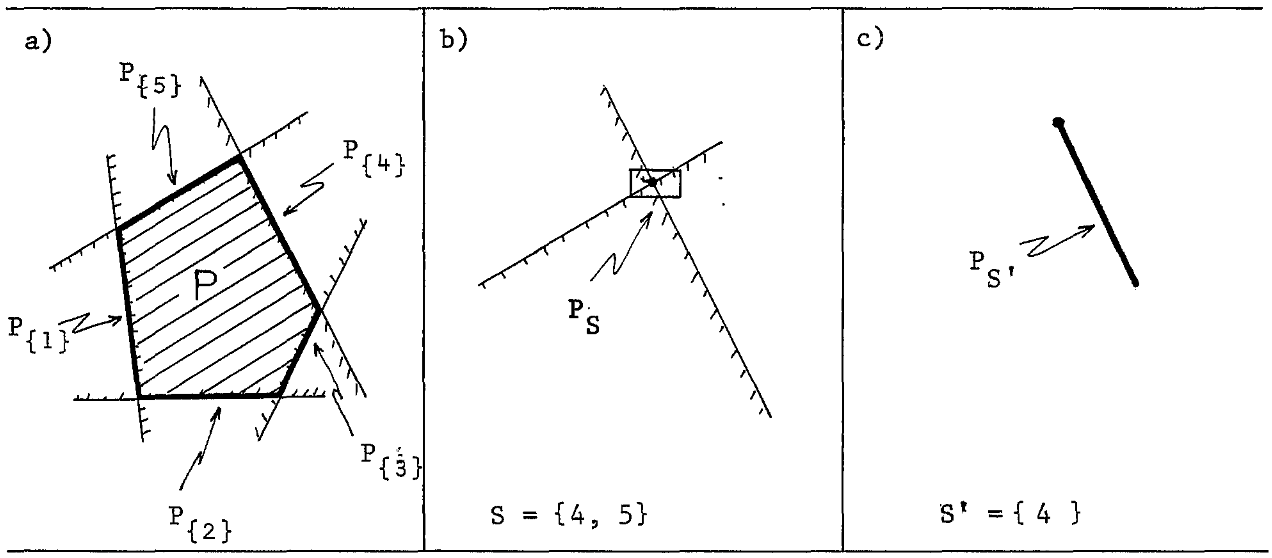


fig. 1 - 4

4.5 - Face Minimal

Uma face minimal de P, é aquela que não tem sub-face própria.

<u>lema I - 4</u> (Hoffman and Kruskal[15])

Seja <u>P</u> um (n, k)-poliedro convexo, então uma face P_S de <u>P</u> é minimal, se e só se, A_S consiste de <u>k</u> linhas de <u>A</u>, linearmente independentes.

<u>lema I - 5</u> (Hoffman and Kruskal[15])

Se P_S é uma face minimal de $\underline{P}$, então

$$P_S = \{x \in R^n / A_S x = b_S\}$$

ou seja, toda face minimal de $\underline{P}$, é uma (n - k)-superfície.

O conjunto de faces de (n,k)-poliedro convexo $\underline{P}$ é parcialmente ordenado por $\subseteq$.

O maior elemento desse conjunto parcialmente ordenado, é o próprio P.

Em geral, não existe o menor membro dessa ordem parcial.

Todas as faces têm seus postos e cada posto é composto de todas as faces de uma mesma dimensão.

As faces minimais de P, que são (n-k)-superfícies, constituem o posto mais baixo, pois elas têm sub-faces próprias.

O posto seguinte, consiste de todas as (n-k+1)-faces de P e assim por diante.

O posto maior, consiste de P somente, cuja dimensão está entre $\underline{n-k}$ e $\underline{n}$ inclusive.

4.5 - Fronteira de uma Face

Fronteira de uma face de um poliedro convexo $\underline{P}$ é a união de todas as sub-faces próprias dessa face.

Daí, vê-se que uma face minimal de P, não tem fronteira. Isto é, sua fronteira é vazia.

A fronteira de $\underline{P}$ é a união de todas as suas sub-faces.

ex. I - 6 A figura abaixo, mostra vários poliedros em R^2 e os respectivos diagramas de ordem parcial de suas estruturas de faces.

Cada número exibido, representa a i-ésima desigualdade $a^i x \leq b_i$ do sistema que define $\underline{P}$.

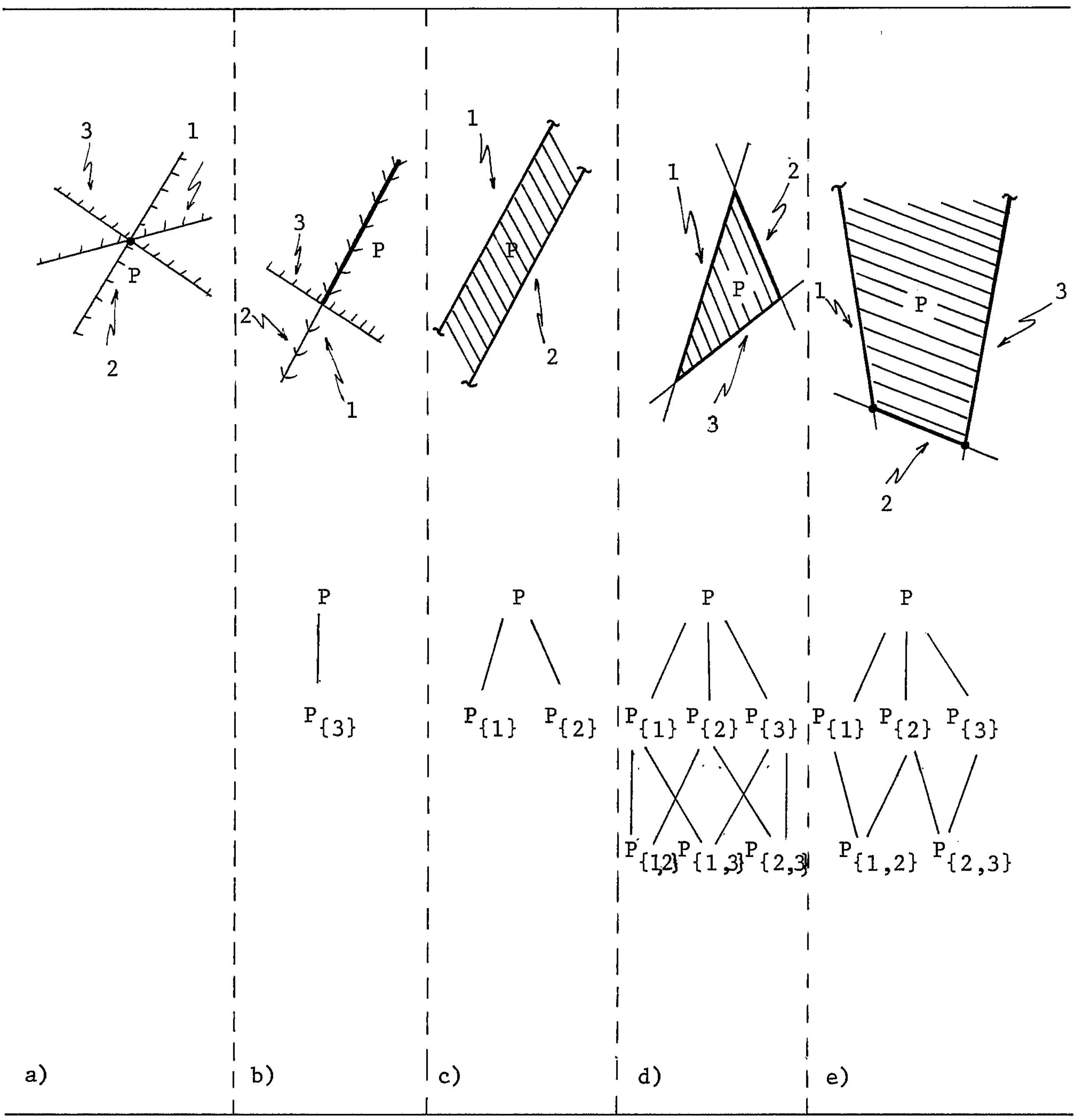


fig. 1 - 5

lema I - 6 (Hadley[13])

Um poliedro convexo limitado é igual a envoltória convexa dos seus vértices.

Se P é um poliedro convexo limitado, então, cada face de P é limitada.

Desde que, uma face minimal de P, é uma superfície e uma superfície limitada só pode ser uma 0-superfície; segue que, cada face minimal de P é uma 0-superfície, isto é, um vértice.

Daí, P é um (n, n)-Poliedro. Isto é, o posto de A é n.

4.6 - Face redutível

Uma face de um poliedro convexo é redutível, se ela é igual a envoltória convexa da união de todas as suas sub-faces próprias. Isto é, se ela é igual a envoltória convexa da sua fronteira.

Se uma face não é redutível, ela é irredutível.

lema I - 7 (Klee[19])

Uma face de um poliedro convexo P é irredutível, se e só se, ela é uma superfície ou uma semi-superfície.

Além disso, P é igual a envoltória convexa de suas faces irredutíveis.

Um resultado, imediato, da definição e do lema acima, é que toda face minimal de P é irredutível.

A recíproca não é verdadeira, pois uma semi-superfície é irredutível, mas não é minimal.

Porém, no caso de um poliedro convexo, limitado, a recíproca é verdadeira. Isto é verdade, pelo fato de P ser limitado e daí, nenhuma face de P é uma semi-superfície. Assim, elas são superfícies que por sua vez, são também limitadas e portanto são 0-superfícies.

Disto se conclue que são faces minimais de P.

Se uma face irredutível de P é uma semi-superfície, então sua fronteira é uma superfície que também é uma face irredutível de P.

4.7 - Face Maximal Irredutível

Uma face de P é maximal irredutível se ela não contém nem uma outra face irredutível de P.

Klee[19] prova que:

Um poliedro convexo P é igual a envoltória convexa de suas faces maximais irredutíveis.

Note que, neste caso, se P é um poliedro convexo limitado, então suas faces maximais irredutíveis, são 0-superfícies, isto é são os próprios vértices de P.

ex. 1 - 7 A figura da página seguinte, refere-se aos poliedros apresentados na fig. 1 - 5.

	limitado ilimitado	faces minimais	faces irredutíveis	faces irredutíveis maximais
a)	limitado	P	P	P
b)	ilimitado	$P_{\{3\}}$	P, $P_{\{3\}}$	P
c)	ilimitado	$P_{\{1\}}$, $P_{\{2\}}$	$P_{\{1\}}$, $P_{\{2\}}$	$P_{\{1\}}$, $P_{\{2\}}$
d)	limitado	$P_{\{1,2\}}$, $P_{\{1,3\}}$ $P_{\{2,3\}}$	$P_{\{1,2\}}$, $P_{\{1,3\}}$ $P_{\{2,3\}}$	$P_{\{1,2\}}$, $P_{\{1,3\}}$ $P_{\{2,3\}}$
e)	ilimitado	$P_{\{1,2\}}$, $P_{\{2,3\}}$	$P_{\{1\}}$, $P_{\{3\}}$ $P_{\{1,2\}}$, $P_{\{2,3\}}$	$P_{\{1\}}$, $P_{\{3\}}$

fig. 1 - 6

4.8 - Poliedro de um Problema de Programação Linear

Um problema de programação linear, tem a forma:

Maximize cx sujeito à

$$Ax \leq b$$
$$x \geq 0$$

onde c é um ponto fixo do R^n, A é uma matriz real $m \times n$ e b um ponto fixo de R^m.

A função linear cx é a função objetivo do problema.

O conjunto

$$P = \{x \in R^n / Ax \leq b,\ x \geq 0\}$$

é um poliedro convexo.

P é o poliedro do P P L.

lema 1 - 8

P é igual a envoltória convexa da união finita de 0-superfícies e 1-semi-superfícies.

prova: P pode ser reescrito como

$$P = \{x \in R^n / A'x \leq b'\}$$

onde A' contém uma submatriz identidade (negativa) n x n e b' é um vetor do R^{m+n} cujas n últimas componentes são zeros.

Vê-se que o posto de A' é n. E daí, segue P é um (n, n)-poliedro cujas faces minimais são 0-superfícies.

Por outro lado, o conjunto

$$Q = \{x \in R^n / x \geq 0\}$$

obviamente, não contém 1-superfícies. E daí, Q não contém k-superfícies, $1 \leq k \leq n$ e nem contém k-semi-superfícies para $2 \leq k \leq n$.

Assim, as faces irredutíveis de P são 0-superfícies ou 1-semi-superfícies, pois P está contido em Q. Isto se conclue com o lema 1 - 7.

Deste modo

i) se as faces irredutíveis de P, são 0-superfícies (vértices), elas serão maximais irredutíveis e, portanto, pelo lema 1-6, o presente lema fica provado em sua primeira asserção;

ii) se as faces irredutíveis de P, são 1-semi-superfícies, suas fronteiras são 0-superfícies em P e portanto vértices de P. Assim, tem-se o caso i.

Agora, que P tem um número finito de faces, já foi visto, quando o conjunto de faces P forma um conjunto parcialmente ordenado por $\subseteq$ em que $P = P_{\emptyset}$ é o maior membro, onde $\emptyset$ é o conjunto vazio.

5 - Conjunto Convexo Integral

Seja J o anel dos inteiros.

Seja J^n o módulo de dimensão n sobre J.

Seja $X \subseteq R^n$ e I(X) o conjunto de pontos inteiros de X.

Isto é

$$I(X) = \{x \in J^n / x \in X\}$$

5.1 - Conjunto convexo integral

$X \subseteq R^n$ é convexo integral, se e só se, X é igual a envoltória convexa dos seus pontos inteiros. Isto é

$$X = H(I(X))$$

ex. 1 - 8 Seja $X = \{x^0, x^1 \ldots\}$ um subconjunto infinito de $\underline{J^n}$ definido por

$$x^0 = (0, 0)$$

$$x^{n+1} = x^n + (n + 1, 1)$$

A figura abaixo, mostra os primeiros elementos de $\underline{X}$, bem como uma parte da fronteira de $H(X)$.

Vê-se claramente, que $H(X)$ é a interseção de um número contável de semi-planos e portanto não é um poliedro convexo.

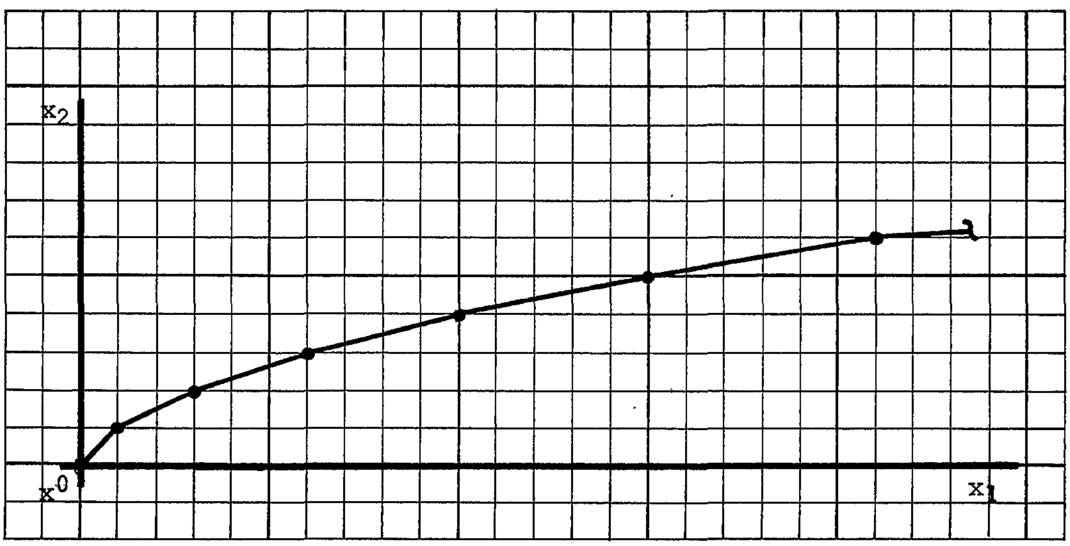


fig. 1 - 7

Já foi visto que se $\underline{X}$ é um subconjunto do R^n, então existe um único subconjunto convexo do R^n, que é a envoltória convexa de $\underline{X}$.

Agora, se $\underline{X}$ é convexo, então existe um único conjunto $X' \subset R^n$ tq

$$X' = H(I(X))$$

em outras palavras, X' é a envoltória convexa dos pontos inteiros de X.

lema 1 - 9

Sejam X e X' dois subconjuntos convexos do R^n, então

$$X' = H(I(X)$$

se e só se,

i) X' é integral

ii) $I(X') = I(X)$

prova: a) assume-se X' integral e $I(X') = I(X)$

deve-se mostrar que

$$X' = H(I(X)$$

tem-se

$$X' \text{ integral} \Longrightarrow X' = H(I(X'))$$

mas $I(X') = I(X)$ por hipótese.

logo $X' = H(I(X))$

b) assume-se $X' = H(I(X))$

deve-se mostrar que X' é integral e $I(X') = I(X)$

tem-se

$$X' = H(I(X)) \Longrightarrow I(X) \subseteq I(X')$$

considere $\bar{X} \in I(X')$.

como $X' = H(I(X))$, segue que $\bar{X}$ é uma combinação convexa de pontos

Mas X é convexo. Logo $\bar{X} \in X$.

Por outro lado, $\bar{X}$ é inteiro

daí $\overline{X} \varepsilon I(X)$ e segue que $I(X') \subseteq I(X)$

logo $I(X) = I(X')$

portanto X' é integral.

5.2 - Integralização

Para dois subconjuntos convexos do R^n, X e X' onde

$X' = H(I(X)$

diz-se que X foi integralizado para se obter X'.

Essa transformação recebe o nome de INTEGRALIZAÇÃO.

Nos capítulos seguintes, serão vistas condições necessárias e suficientes de integralização de poliedros convexos.

Ver-se-á agora, alguns exemplos que ilustrarão os conceitos de poliedro convexo integral e de integralização.

ex. 1 - 9 Considere os sistemas de desigualdades

(a) $4x \leq 15$

(b) $2x \leq 9$

(c) $-3x \leq -1$

A figura da página seguinte, mostra a região viável do sistema e a envoltória convexa dos seus pontos inteiros.

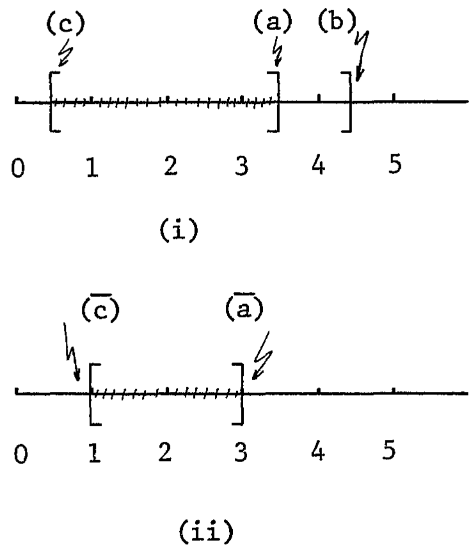


fig. 1 - 8

Vê-se que, a figura 1-8, (i) representa a região viável e (ii) a envoltória convexa dessa região viável que é dada pelo sistema

$$(\bar{a}) \qquad x \leq \left\lfloor \frac{15}{4} \right\rfloor = 3$$

$$(\bar{c}) \qquad -x \leq \left\lfloor \frac{-1}{3} \right\rfloor = -1$$

onde o símbolo $\lfloor \lambda \rfloor$, denota o maior inteiro menor ou igual a $\underline{\lambda}$.

(i) é um exemplo de poliedro convexo

(ii) é um exemplo de poliedro convexo integral.

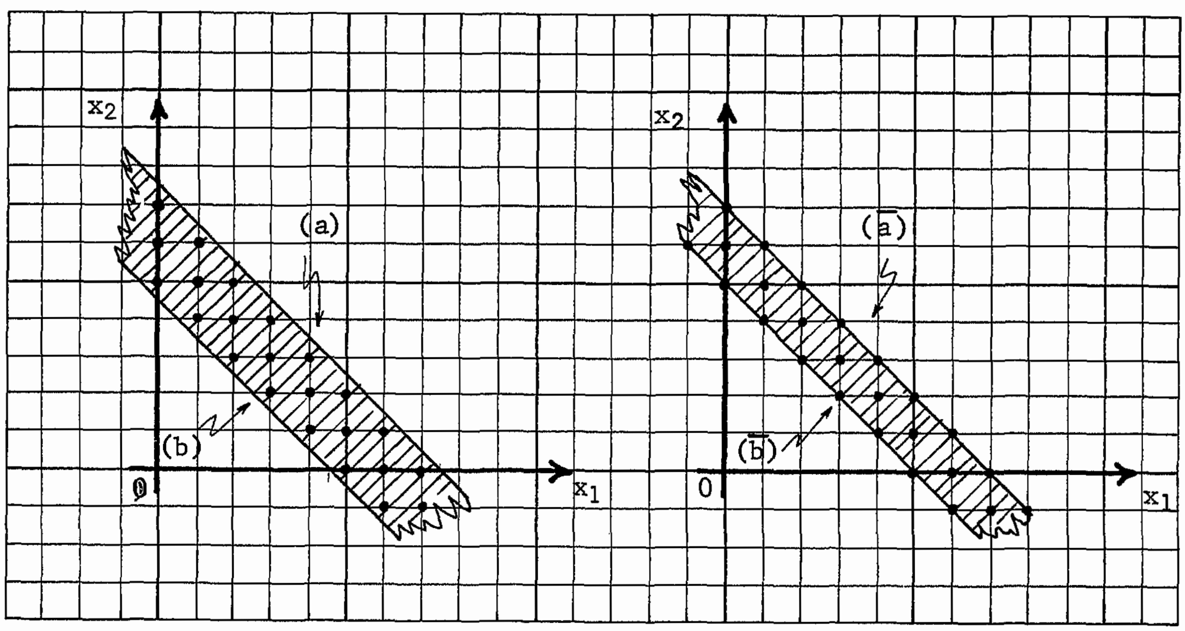
O processo de transformação do primeiro sistema no segundo é um exemplo de integralização.

ex. 1 - 10 Considere agora, o sistema

$$(\text{a}) \quad 2x_1 + 2x_2 \leqslant 15$$

$$(\text{b}) \quad -4x_1 - 4x_2 \leqslant -18$$

A figura 1-9, mostra (i) a região viável do sistema e (ii) a envoltória dos seus pontos inteiros.



(i) (ii)

fig. 1 - 9

A envoltória convexa da região viável é dada por:

$$(\bar{\text{a}}) \quad x_1 + x_2 \leq \left\lfloor \frac{15}{2} \right\rfloor = 7$$

$$(\text{b}) \quad -x \;\; - x \;\; \leq \left\lfloor \frac{-18}{4} \right\rfloor = -5$$

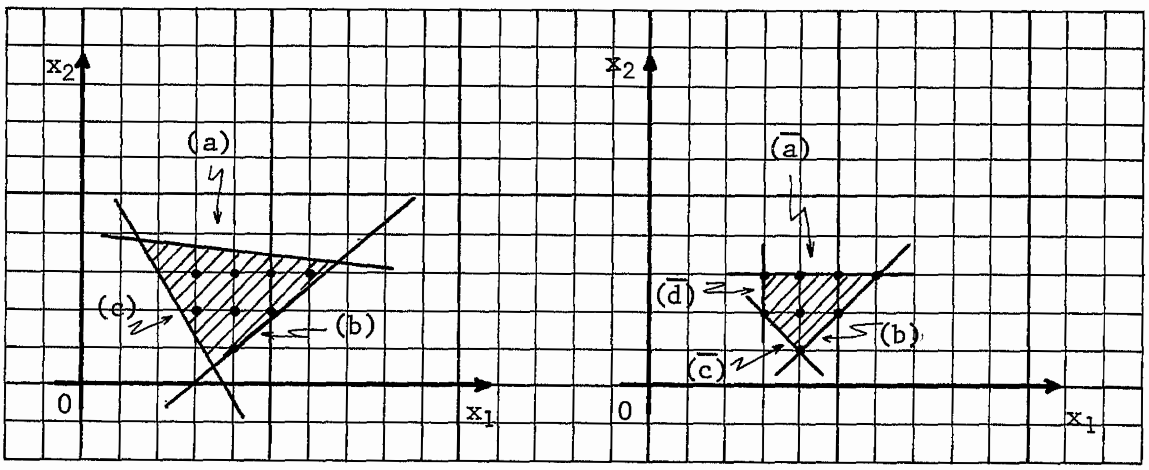
ex. 1 - 11 Seja o sistema

$$(a) \quad x_1 + 7x_2 \leqslant 29$$

$$(b) \quad 4x_1 - 5x_2 \leqslant 12$$

$$(c) \quad -7x_1 - 4x_2 \leqslant -27$$

A figura abaixo, mostra a região viável desse sistema, bem como a envoltória convexa dos seus pontos inteiros.



- região viável - (i)

fig. 1 - 10

- envoltória convexa - (ii)

Vê-se claramente, que a envoltória convexa dos pontos inteiros da região viável, é dada pelo sistema

$$(\bar{a}) \quad x_2 \leqslant 3$$

$$(\bar{b}) \quad x_1 - x_2 \leqslant 3$$

$$(\bar{c}) \quad -x_1 - x_2 \leqslant -5$$

$$(\bar{d}) \quad -x_1 \leqslant -3$$

Nesses exemplos que foram vistos agora, a integralização foi feita, a partir da solução gráfica do sistema dado.

No entanto, duas questões básicas podem ser colocadas neste momento:

i) Dado um poliedro convexo, como saber se ele é um poliedro convexo integral.

ii) Dado um poliedro convexo não-integral, como integralizá-lo.

essas suas questões básicas, serão objeto de estudo dos próximos capítulos.

CAPÍTULO II

Neste capítulo serão desenvolvidos vários resultados ligados a poliedros convexos que têm a propriedade integral.

Nele, ver-se-á condições necessária e suficiente para que um poliedro convexo seja integral.

1 - Superfície Integral

Uma k-superfície π em R^n, é gerada por um conjunto de $\underline{k+1}$ pontos independentes.

Isto é, π é o conjunto de todas as combinações afins desses $\underline{k+1}$ pontos independentes.

lema II - 1

Uma k-superfície π é integral, se e só se, π é gerada por um conjunto de $\underline{k+1}$ pontos inteiros independentes.

prova: i) Assume-se π uma k-superfície integral deve-se mostrar, que π é gerada por um conjunto de $\underline{k+1}$ pontos inteiros.

tem-se π é uma k-superfície, portanto, ela é gerada por um conjunto $\underline{X}$ de $\underline{k+1}$ pontos do R^n.

Por outro lado, π é integral.

Daí segue, que cada ponto de $\underline{X}$ é uma combinação convexa de pontos inteiros em $I(\pi)$.

Como $I(\pi) \subset \pi$, segue que a dimensão de $I(\pi)$ é menor ou igual a dimensão de π.

Suponha que $I(\pi)$ tem dimensão menor que k.

Daí segue, que X tem dimensão menor que k, o que contradiz a hipótese.

Logo, π é gerado por $k + 1$ pontos inteiros.

ii) Assume-se agora, que π é gerada por um conjunto de $k + 1$ pontos inteiros independentes.

Deve-se mostrar, que π é integral. Isto é, todo $x \in \pi$ é uma combinação convexa de pontos inteiros de π.

tem-se

seja $x \in R^n$ um ponto arbitrário de π e $X = \{x^0, x^1 \ldots x^k\}$ o conjunto de pontos inteiros que gera π.

Daí,

$$x = \lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1 + \ldots + \lambda_k x^k$$

$$1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$$

$$\lambda_i \in R, \quad \lambda_i \geqslant 0 \qquad i = \overline{0,k}$$

equivalentemente, pelo lema I - 1, pode-se escrever

$$X = x^0 + \lambda_1 (x^1 - x^0) + \lambda_2 (x^2 - x^0) + \ldots + \lambda_k (x^k - x^0) \qquad (2 - 1)$$

Sejam agora, as seguintes funções

$$h_0 : R \to J$$

$$h_1 : R \to J$$

tais que

$h_0(\lambda_i)$ = maior inteiro, menor ou igual a λ_i.

$h_1(\lambda_i)$ = menor inteiro, maior que λ_i.

vê-se facilmente, que

$$h_1(\lambda_i) - h_0(\lambda_i) = 1 \quad \forall \ \lambda_i \in R$$

considere agora, o conjunto de todas as k-úplas binárias $\{0, 1\}^k$, onde um membro desse conjunto será

$$b = (b_1, b_2 \dots b_k)$$

$$b_i \in \{0, 1\}$$

afirmação 1

todo $x \in \pi$, é uma combinação convexa de $\underline{2^k}$ pontos inteiros de π,

$$X^b = x^0 + \sum_{i=1}^{k} h_{b_i}(\lambda_i)(x^i - x^0)$$

$$b \in \{0, 1\}^k$$

geometricamente, esses $\underline{2^k}$ pontos inteiros são vértices de um cubo de dimensão k.

A fim de exibir $\underline{x}$ como combinação convexa desses pontos inteiros, serão definidas as seguintes funções

$$g_0 : R \to R$$

$$g_1 : R \to R$$

tais que

$$g_0(\lambda_i) = h_1(\lambda_i) - \lambda_i$$

$$g_1(\lambda_i) = \lambda_i - h_0(\lambda_i)$$

e também a função

$$g_b(\lambda) = \prod_{i=1}^{k} g_{b_i}(\lambda_i)$$

*afirmação 2

$$X = \sum_{b \in \{0,1\}^k} g_b(\lambda) X^b \qquad (2 - 2)$$

* Note que a afirmação - 2 explicita a afirmação - 1.

$$0 \leq g_b(\lambda) \leq 1 \quad \forall \; b \in \{0,1\}^k \tag{2 - 3}$$

$$1 = \sum_{b \in \{0,1\}^k} g_b(\lambda) \tag{2 - 4}$$

em (2 - 2), $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2 \ldots \lambda_k)$, são os coeficientes que aparecem em (2 - 1).

Antes de prosseguir com a prova da afirmação 2, observe que (2 - 3) é verdade, uma vez que

$$0 < g_b(\lambda_i) \leq 1$$

$$0 < g_b(\lambda_i) < 1$$

$$\lambda_i \in R$$

Por outro lado, a equação (2 - 4), prova-se por indução sobre k, como segue

<u>k = 1</u>

$$\sum_{b \in \{0,1\}^1} g_b(\lambda) = g_0(\lambda_1) + g_1(\lambda_1)$$

$$= h_1(\lambda_1) - \lambda_1 + \lambda_1 - h_0(\lambda_1)$$

$$= 1$$

Suponha agora, que (2 - 4) é verdade para algum <u>k</u>, $1 \leq k \leq n$.

então

$$\sum_{b \in \{0,1\}^{k+1}} g_b(\lambda) = \sum_{b \in \{0,\, 1\}^{k+1}} \left[\prod_{j=1}^{k+1} g_{b_j}(\lambda_j) \right]$$

$$= \left[g_0(\lambda_{k+1}) + g_1(\lambda_{k+2}) \right] \sum_{b \in \{0,1\}^k} \left[\prod_{j=1}^{k} g_{b_j}(\lambda_j) \right]$$

$$= g(\lambda_{k+1}) + g_1(\lambda_{k+1})$$

$$= 1$$

Assim, (2 - 4) está provada

Agora,

$$\sum_{b \,\varepsilon\, \{0,1\}^k} g_b(\lambda)x^b =$$

$$= \sum_{b \,\varepsilon\, \{0,1\}^k} g_b(\lambda) \left[x^0 + \sum_{i=1}^{k} h_{b_i}(\lambda_i)(x^i - x^0)\right]$$

$$= \left[\sum_{b \,\varepsilon\, \{0,1\}^k} g_b(\lambda)\right] x^0 + \sum_{b \,\varepsilon\, \{0,1\}^k} g_b(\lambda) \left[\sum_{i=1}^{k} h_{b_i}(\lambda_i)(x^i - x^0)\right]$$

$$= x^0 + \sum_{i=1}^{k} \left[\sum_{b \,\varepsilon\, \{0,1\}^k} g_b(\lambda)h_{b_i}(\lambda_i)\right] (x^i - x^0)$$

e desenvolvendo-se a expressão entre colchetes obtem-se

$$\sum_{b \,\varepsilon\, \{0,1\}} g_b(\lambda)h_{b_i}(\lambda_i) = \sum_{b \,\varepsilon\, \{0,1\}^k} \left[\prod_{j=1}^{k} g_{b_i}(\lambda_j)\; h_{b_i}(\lambda_i)\right]$$

$$= \left[g_0(\lambda_i)h\;(\lambda_i) + g_1(\lambda_i)h_1(\lambda_i)\right] \cdot \frac{1}{2} \sum_{b \,\varepsilon\, \{0,1\}^k} \left[\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq 1}}^{k} g_{b_j}(\lambda_j)\right]$$

$$= g_0(\lambda_i)h\;(\lambda_i) + g_1(\lambda_i)h_1(\lambda_i)$$

$$= \lambda_i$$

Logo

$$\sum_{b \,\varepsilon\, \{0,1\}^k} g_b(\lambda)x^b = x^0 + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i(x^i - x^0)$$

$$= x$$

De modo, $x \,\varepsilon\, \pi$ foi expresso como combinação de pontos inteiros da superfície π.

Daí, segue que π é integral, e a segunda asserção do lema está provada.

Agora, considere $\underline{A}$ uma matriz inteira $(n - k) \times m$ de posto $\underline{n - k}$ e $\underline{b}$ um ponto inteiro do R^{n-k}.

problema

que condições, $\underline{A}$ e $\underline{b}$ devem satisfazer a fim de que o sistema $Ax=b$, defina uma k-superfície integral.

Em outras palavras, que condições $\underline{A}$ e $\underline{b}$ devem satisfazer para que o espaço solução de $Ax = b$, contenha m conjunto de $\underline{k + 1}$ pontos inteiros.

Para responder essa questão, será usada a seguinte notação

dada $\underline{B}$ uma matriz inteira $\underline{r \times s}$ de posto $\underline{r}$, $1 \leq r \leq s$,

$\text{m d c} \left[B \right] = \left[\text{m d c de todos os } \binom{s}{r} \text{ menores de } \underline{B}, \text{ de ordem } r \right]$.

onde

i) m d c é o máximo divisor comum

ii) $\binom{s}{r}$ coeficiente binomial

Note que $\text{m d c} \left[B \right] = \left[\det B \right]$ se $r = s$.

Enquanto que, se $r = 1$, $\underline{B}$ é uma linha e $\text{m d c} \left[B \right]$ é o máximo divisor comum de suas componentes.

Teorema II - 1

Seja $\underline{A}$ uma matriz inteira $(n - k) \times n$ de posto $\underline{n - k}$ e $\underline{b}$ um ponto do R^{n-k}

então $\qquad Ax = b$

define uma k-superfície integral, se e só se,

$$m\,d\,c\,[A] = m\,d\,c\,[A \,\vdots\, b]$$

prova i) assume-se que Ax = b define uma k-superfície integral deve-se mostrar que

$$m\,d\,c\,[A] = m\,d\,c\,[A \,\vdots\, b]$$

tem-se

se Ax = b define uma k-superfície integral, então, pelo lema II - 1, π é gerada por um conjunto de k + 1 pontos inteiros independentes.

Seja x^0 um ponto inteiro em π.

daí

$$Ax^0 = b$$

Seja S um subconjunto arbitrário de índices de n - k - 1 colunas de A e A^S a sua submatriz, compreendida dessas colunas. A^S é (n - k)(n - k - 1)

segue que

$$\det\,[A^S \,\vdots\, b] = \det\,[A^S \,\vdots\, Ax^0]$$

donde se conclue, que o determinante da matriz $[A^S \,\vdots\, b]$, é uma combinação inteira dos menores de A de ordem n - k.

Logo

$$m\,d\,c\,[A] \,/\, \det\,[A^S \,\vdots\, b]$$

e uma vez que isto vale para todo subconjunto S, segue que

$$m\,d\,c\,[A] = m\,d\,c\,[A \,\vdots\, b]$$

ii) Assume-se agora, que $m\,d\,c\,[A] = m\,d\,c\,[A \,\vdots\, b]$ deve-se mostrar que

Ax = b, define uma k-superfície integral.

De acordo com Jacobson[18], existe uma matriz inteira R, (n-k)x(n-k) tal que det $R = \pm 1$ e uma matriz inteira $\underline{C}$ $n \times n$ cujo det $C = \pm 1$ tal que

$$A = R \bar{A} C$$

onde $\bar{A}$ é uma matriz diagonal $(n - k) \times n$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 & & & & \vdots & \\ & \bar{a}_2 & & & \vdots & \\ & & \ddots & & \vdots & 0 \\ & & & \bar{a}_{n-k} & \vdots & \\ & & & & & \end{bmatrix}$$

além disso

$$\text{m d c } [A] = \text{m d c } [\bar{A}]$$

e a partir daí, vê-se facilmente, que

$$\text{m d c } \bar{A} =: \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 \ldots \bar{a}_{n-k}$$

como $A = R \bar{A} C$, pode-se escrever

$$[R \bar{A} C]x = b$$

ou

$$\bar{A}y = \bar{b}$$

onde

$$y = Cx$$

$$\bar{b} = R^{-1}b$$

uma vez que $\underline{R}$ e $\underline{C}$ são matrizes elementares cujos determinantes são diferentes de zero e portanto inversíveis.

Considere $\underline{C'}$ a matriz inteira $(n + 1) \times (n + 1)$ dada por

$$C' = \left[\begin{array}{c:c} C & 0 \\ \hdashline 0 & 1 \end{array}\right]$$

Vê-se que det C' = ± 1 e que

$$[A \vdots b] = R\,[\bar{A} \vdots \bar{b}\ C']$$

e como já foi visto, o m d c de menores de mesma ordem de matrizes equivalentes são iguais

$$\text{mdc}\,[A \vdots b] = \text{mdc}\,[\bar{A} \vdots \bar{b}\,]$$

logo

$$\text{mdc}\,[A] = \text{mdc}\,[A \vdots b]$$
$$= \text{mdc}\,[\bar{A}]$$
$$= \text{mdc}\,[\bar{A} \vdots \bar{b}]$$

Isto é,

$$\text{mdc}\begin{bmatrix} \bar{a}_1 & & & \vdots \\ & \bar{a}_2 & & \vdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \bar{a}_{n-k} \vdots \end{bmatrix} = \text{mdc}\begin{bmatrix} \bar{a}_1 & & & \vdots & & \vdots & \bar{b}_1 \\ & \bar{a}_2 & & \vdots & 0 & \vdots & \bar{b}_2 \\ & & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & \bar{a}_{n-k} \vdots & & \vdots & \bar{b}_{n-k} \end{bmatrix}$$

daí, segue que

$$\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \bar{a}_{n-k} \ /\ \bar{b}_1\ \bar{a}_2 \ldots\ldots\ldots \bar{a}_{n-k}$$
$$\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \bar{a}_{n-k} \ /\ \bar{a}_1\ \bar{b}_2 \ldots\ldots\ldots \bar{a}_{n-k}$$
$$\vdots$$
$$\bar{a}_1\ \bar{a}_2 \ldots\ldots\ldots\ldots \bar{a}_{n-k} \ /\ \bar{a}_1\ \bar{a}_2 \ldots\ldots\ldots \bar{b}_{n-k}$$

mas isto é dizer que

$$\bar{a}_1/\bar{b}_1, \quad \bar{a}_2/\bar{b}_2, \quad \bar{a}_3/\bar{b}_3 \ \ldots\ \bar{a}_{n-k}/\bar{b}_{n-k}$$

e tem-se que, a k-superfície $\bar{\pi}$ definida por $\bar{A}y = \bar{b}$ contém o seguinte conjunto de k + 1 pontos inteiros independentes.

$$
\begin{bmatrix} \bar{b}_1 / \bar{a}_1 \\ \bar{b}_2 / \bar{a}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_{n-k}/\bar{a}_{n-k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_1 / a_1 \\ b_2 / a_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_{n-k}/\bar{a}_{n-k} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} b_1 / a_1 \\ b_2 / a_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_{n-k}/\bar{a}_{n-k} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
\cdots\cdots
\begin{bmatrix} \bar{b}_1 \quad \bar{a}_1 \\ \bar{b}_2 / \bar{a}_2 \\ \vdots \\ \bar{b}_{n-k}/\bar{a}_{n-k} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Note-se que $\bar{A}y^i = \bar{b} \quad \forall \quad i = \overline{0,k}$

Portanto, $\bar{\pi}$ é gerada por esse conjunto de $\underline{k+1}$ pontos inteiros e daí, pelo lema II - 1, ela é integral.

Agora, uma vez que a k-superfície π definida por $Ax = b$ é a imagem de $\bar{\pi}$ sob a transformação linear inteira $\underline{C}^{-1}$, segue que π também é uma k-superfície integral.

Corolário II - 1

O sistema $Ax = b$ define uma k-superfície integral, se e só se, esse sistema tem uma solução inteira.

prova

i) Se a k-superfície π definida por $Ax = b$ é integral, então pelo lema II - 1, esse sistema tem uma solução inteira.

ii) Assume-se agora, que $Ax = b$ tem uma solução inteira $\underline{x}^0$. Deve-se mostrar que π é integral.

tem-se

o sistema $Ax = b$, tendo $\underline{x}^0$ como uma solução inteira, segue do teo-

II - 1 que

$$\mathrm{mdc}\,[A] = \mathrm{mdc}\,[A : b]$$

Logo, ainda pelo teorema II-1, π é integral e o corolário está pro_ vado.

Suponha agora, que se tem o sistema $Ax = b$ de $n - k$ equações definindo uma k-superfície integral.

Seja A_S uma submatriz de $\underline{A}$, onde $\underline{S}$ é um subconjunto de índices de linhas de $\underline{A}$ que constituem A_S.

Então

Corolário II - 2

Se $Ax = b$ define uma k-superfície integral então

$$A_S x = b_S$$

define uma k'-superfície integral onde $k \leq k' \leq n$ e $\underline{S}$ tendo $n - k'$ índices.

prova : i) Assume-se $Ax = b$ definindo uma k-superfície integral deve-se mostrar que $A_S x = b_S$ define uma k'-superfície integral

$$k \leq k' \leq n$$

tem-se

se $Ax = b$, define uma k-superfície integral, então pelo corolário anterior, $Ax = b$ tem uma solução inteira $\underline{x}^0$.

Mas se $\underline{x}^0$ é solução de $Ax = b$, ele também, é solução de

$$A_S x = b_S$$

daí, ainda pelo corolário II - 1, $A_S x = b_S$ define uma k'-superfície integral.

2 - Semi-superfície Integral

Seja $\underline{T}$ uma k-semi-superfície em R^n, isto é

$$T = \{x \in R^n / Ax = b \quad e \quad \alpha x \leq \beta\}$$

onde $\underline{A}$ é uma matriz inteira $(n-k) \times n$, $\underline{b}$ é um ponto do R^{n-k} inteiro, $\alpha \in R^n$ inteiro, e $\beta \in R$.

a(k - 1)-superfície, definida por

$$\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ \alpha \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b \\ \cdots \\ \beta \end{bmatrix}$$

é o conjunto fronteira da k-semi-superfície T.

Teorema II - 2

Uma k-semi-superfície T é integral, se e só se, seu conjunto fronteira, a(k - 1)-superfície π é integral.

prova i) Assuma T integral

mostre que π é integral

tem-se

T integral, implica $I(T) \neq \emptyset$

daí, duas hipóteses exclusivas, podem ser formuladas

π contém um ponto inteiro

ou

π não contém um ponto inteiro.

Se a primeira hipótese ocorre, pelo corolário II-1, π é integral.

Se a segunda ocorre, ter-se-á

$$\alpha x < \beta \qquad \forall \quad x \in I(T)$$

ou

$$\alpha x < \beta - 1 \quad \forall \quad x \in I(T)$$

com isto, $Ax = b$ e $\alpha x < \beta - 1$, definem uma nova k-semi-superfície T', tal que

$$T' \subset T \qquad e \qquad I(T') = I(T)$$

Mas isto contradiz o fato de que T é integral.

Se assim não fosse, T' estaria contida propriamente, na envoltória convexa dos seus pontos inteiros, o que caracteriza esta contradição.

Assim, π contém um ponto inteiro.

Logo, pelo corolário II - 1, é integral.

ii) Assuma agora, que π é integral

mostre que π é integral, ou equivalente, que T é a envoltória convexa de um número infinito contável de (k - 1)-superfícies integrais.

tem-se

Seja

$$\Delta = \text{m d c} \begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ \alpha \end{bmatrix}$$

e seja π_j a(k - 1)-superfície definida por

$$\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ \cdots\cdots \\ \beta - j\Delta \end{bmatrix}$$

<u>Afirmação 1</u>

πj é integral para todo $j = 0, 1, 2 \ldots$

tem-se

π_0 é integral por hipótese

daí, pelo teorema II - 1

$$\text{mdc}\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ \alpha \end{bmatrix} = \text{mdc}\begin{bmatrix} A & \vdots & b \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \alpha & \vdots & \beta \end{bmatrix} \qquad (2-5)$$

Agora, observe que cada menor de ordem (n - k + 1) da matriz

$$\begin{bmatrix} A & \vdots & b \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \alpha & \vdots & \beta - j\Delta \end{bmatrix}$$

difere do seu menor correspondente, na matriz

$$\begin{bmatrix} A & \vdots & b \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \alpha & \vdots & \beta \end{bmatrix}$$

de um múltiplo de $\underline{\Delta}$.

daí, segue que

$$\text{m d c}\begin{bmatrix} A \\ \cdots \\ \alpha \end{bmatrix} = \text{m d c}\begin{bmatrix} A & \vdots & b \\ \cdots & \vdots & \cdots \\ \alpha & \vdots & \beta - j\Delta \end{bmatrix}$$

e pelo teorema II - 1, $\underline{\pi_j}$ é integral:

Agora, desde que cada $x \in T$ é uma combinação convexa de pontos em π_0, π_1, $\pi_2, \ldots$, cada dos quais, é uma combinação convexa de pontos inteiros em T, segue que $x \in T$ é uma combinação convexa de pontos inteiros em T.

Daí T é integral.

Assim o teorema está provado.

3 - Poliedro Convexo Integral

O que se viu até agora, foi uma preparação para se chegar às condições em que um poliedro convexo tem a propriedade integral.

Seja $\underline{P}$ um poliedro convexo em R^n

$$P = \{x \in R^n / Ax \leq b\}$$

onde A é uma matriz inteira m x n e b um ponto do R^m, inteiro.

Teorema II - 3

P é integral, se e só se, cada face de P é integral.

prova i) Assume-se cada face de P, integral

deve-se mostrar que P é integral

tem-se

pelo lema I - 7, P é igual a envoltória convexa de suas faces irredutíveis.

Como por hipótese, todas as faces de P são integrais, segue que P é integral.

ii) Assume-se agora, P integral

deve-se mostrar que cada face de P, é integral

tem-se

se P é uma superfície

$$P = \{x \in R^n / Ax = b\}$$

segue que P é sua única face, e por hipótese, integral.

Se P não é uma superfície, então ele tem uma ou mais subfaces próprias.

Seja.

$$P_S = \{x \in P / A_S x = b_S\}$$

uma subface própria de P.

Seja $x \in P_S$.

Então, x ε P e por isso mesmo é uma combinação convexa de pontos inteiros em P, x^1 , x^2 ... x^m.

Ou seja

$$x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i \,, \qquad \lambda_i \in [0,1]$$

$$1 = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i$$

<u>Afirmação</u>

$$x^1, x^2 \dots x^m \in P_S$$

isto é

$$A_S x^i = b_S \qquad i = \overline{1,m}$$

suponha que isto não é verdade.

Logo

$$A_S x^i < b_S \quad \text{para algum } i$$

daí

$$A_S x = A_S \left[\sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i \right] = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i A_S x^i < b_S$$

o que contradiz o fato de que

$$x \in P_S$$

Assim, x é uma combinação convexa de pontos inteiros em P_S.

Daí, P_S é integral e o teorema está provado.

<u>Corolário II - 3</u>

P é integral, se e só se,

$$\text{m d c}\left[A_S\right] = \text{m d c}\left[A_S \,\vdots\, b_S\right]$$

para todo subconjunto face $\underline{S}$.

prova

i) Assume-se $\underline{P}$ integral

deve-se mostrar que para toda face de $\underline{P}$ vale

$$\mathrm{mdc}\,[A_S] = \mathrm{mdc}\,[A_S \vdots b_S]$$

tem-se

pelo teorema II - 3, cada face de P é integral.

Seja π_S a superfície definida por

$$A_S x = b_S$$

desde que $P_S \subseteq \pi_S$, segue que $\underline{\pi_S}$ deve conter pelo menos um ponto inteiro.

Daí, pelo corolário II - 1 π_S é integral.

Logo, pelo teorema II - 1

$$\mathrm{mdc}\,[A_S] = \mathrm{mdc}\,[A_S \vdots b_S]$$

ii) Assume-se agora, $\mathrm{mdc}\,[A_S] = \mathrm{mdc}\,[A_S \vdots b_S]$ para todo subconjunto face de P.

Deve-se mostrar que $\underline{P}$ é integral

tem-se

Considere as faces irredutíveis de P. Pelo lema I - 7, uma face irredutível de $\underline{P}$ é uma superfície ou uma semi-superfície.

Se $\underline{P_S}$ é uma superfície, pelo teorema II - 1, ela é integral.

Se $\underline{P_S}$ é uma semi-superfície, então seu conjunto fronteira é uma face irredutível de $\underline{P}$ que é integral, pelo teorema II - 1.

Assim, usando o teorema II - 2, P_S é integral.

Finalmente, uma vez que $\underline{P}$ é a envoltória convexa de suas faces irredutíveis, todas das quais são integrais, segue que $\underline{P}$ é integral.

O corolário está provado.

Corolário II - 4

$\underline{P}$ é integral, se e só se,

$$\text{m d c } [A_S] = \text{m d c } [A_S \vdots b_S]$$

para todo subconjunto face-minimal $\underline{S}$ de $\underline{P}$.

prova: i) a condição necessária, segue diretamente do corolário II-3.

ii) Assume-se $\underline{S}$ subconjunto face-minimal e

$$\text{m d c } [A_S] = \text{m d c } [A_S \vdots b_S]$$

deve-se mostrar, $\underline{P}$ integral

tem-se

considere todas as faces irredutíveis de $\underline{P}$.

Fazendo uso do lema I - 7, uma face irredutível de $\underline{P}$ é

uma superfície, que é uma face minimal de P

ou

uma semi-superfície, cuja superfície fronteira é uma face minimal de P.

No primeiro caso, $\underline{P_S}$ é integral pelo teorema II - 1.

No segundo caso, a superfície fronteira de $\underline{P_S}$ é integral pelo teorema II - 1 e daí $\underline{P_S}$ é integral pelo teorema II - 2.

Desde que $\underline{P}$ é envoltória convexa de suas faces irredutíveis, todas as quais são integrais, segue que $\underline{P}$ é integral e o corolário está provado.

O corolário II - 4, diz que $\underline{P}$ é integral, se todas as suas faces minimais o são.

Se P é um (n, k)-poliedro, então o posto de A é k e uma face minimal de P é uma (n - k)-superfície.

Se k = n, as faces minimais de P são todos os vértices de P.

Por exemplo, esse é o caso de todo poliedro dos problemas de programação linear, desde que a condição não-negativa $x \geqslant 0$, assegure que o posto de A é n.

Em tais casos, o corolário II - 4, assegura que P é integral, se e só se, cada vértice de P é um ponto inteiro.

CAPÍTULO III

No presente capítulo, será definida a propriedade, totalmente integral.

Será mostrado, que a classe de poliedros tendo essa propriedade, é uma subclasse própria de poliedros integrais.

Considerar-se-á a classe dos poliedros de problemas de programação linear, tendo a propriedade totalmente integral e será visto que essa classe de poliedros, pode ser caracterizada, algebricamente, usando-se aspectos da teoria dos grupos, idéia esta desenvolvida por Gomory[9].

Seja P um poliedro convexo, definido por

$$Ax \leq b$$

A e b inteiros.

1 - Superfície de P.

Considere-se a submatriz A_S de A, constituida de S linhas linearmente independentes de A.

Então, o conjunto

$$\pi_S = \{x \in R^n / A_S x = b_S\}$$

é uma superfície de P.

O subconjunto de índices S é chamado, subconjunto superfície.

Note, que um subconjunto face (definido no capítulo I), é sempre um subconjunto superfície.

Porém, um subconjunto superfície, nem sempre é um subconjunto face.

Para se ver isso, é suficiente que

$$P_S = P \cap \pi_S$$

seja igual ao conjunto vazio $\emptyset$

2 - Poliedro Totalmente Integral.

Um poliedro convexo, é totalmente integral, se e só se, cada superfície $\underline{\pi_S}$ de $\underline{P}$, é integral.

ex. A figura abaixo, mostra um poliedro totalmente integral e um poliedro integral que não é totalmente integral.

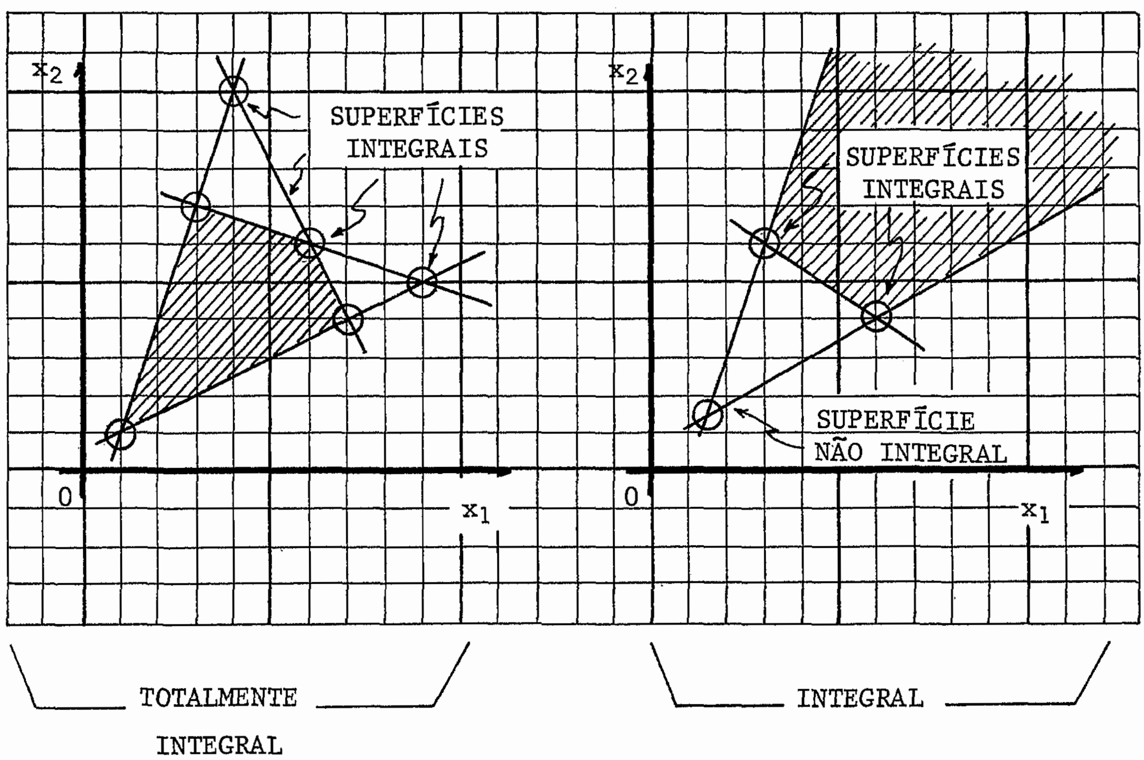


fig. 3 - 1

O lema seguinte, dá as condições necessária e suficiente, para que um poliedro convexo P, seja totalmente integral.

lema III - 1

P é totalmente integral se e só se,

$$\text{m d c}\left[A_S\right] = \text{m d c}\left[A_S \vdots b_S\right]$$

para todo subconjunto superfície S.

prova i) Assume-se P totalmente integral

tem-se daí, que todas as superfícies de P são integrais.

Logo, pelo teorema III - 1

$$\text{m d c}\left[A_S\right] = \text{m d c}\left[A_S \vdots b_S\right]$$

ii) Assume-se agora, que para toda superfície π_S de P, tem-se

$$\text{m d c}\left[A_S\right] = \text{m d c}\left[A_S \vdots b_S\right]$$

daí, pelo teorema II - 1, π_S é integral.

Logo P é totalmente integral.

3 - Superfície Minimal

Uma superfície π_S de P é minimal, se e só se, S identifica n-k linhas de A, linearmente independentes, onde n - k é o posto de A.

Com isto, tem-se o seguinte lema.

lema III - 2

P é totalmente integral, se e só se,

$$\text{m d c}\,[A_S] = \text{m d c}\,[A_S \,\vdots\, b_S]$$

para todo conjunto $\underline{S}$ de superfícies minimais.

prova i) Assume-se $\underline{P}$ totalmente integral

pelo lema III - 1, para toda superfície de $\underline{P}$, tem-se

$$\text{m d c}\,[A_S] = \text{m d c}\,[A_S \,\vdots\, b_S]$$

ii) Assume-se agora, que

$$\text{m d c}\,[A_S] = \text{m d c}\,[A_S \,\vdots\, b_S]$$

para todo subconjunto $\underline{S}$ de superfícies minimais.

Seja $\underline{R}$ um subconjunto superfície de $\underline{P}$, contido propriamente em $\underline{S}$.

Pode-se aumentar $\underline{R}$, acrescentando-se-lhe linhas de $\underline{A}$, se necessário, até obter-se um subconjunto de superfícies minimais, tal que $R \leqslant S$.

Daí, pelo o que foi assumido, pelo corolário II - 2 e pelo teorema II - 1, o sistema

$$A_R x = b_R$$

define uma superfície integral e portanto

$$\text{m d c}\,[A_R] = \text{m d c}\,[A_R \,\vdots\, b_R]$$

Logo, pelo lema III - 1, $\underline{P}$ é totalmente integral.

Vê-se, então, que se um poliedro convexo é totalmente integral, então ele é integral. Isto, pelo fato de que cada face minimal de P, ser uma superfície minimal de P.

Por definição, $\underline{P}$ é totalmente, se e só se, toda face de $\underline{P}$ que é minimal, for integral. Como, neste caso, as faces minimais de $\underline{P}$ são integrais, segue que $\underline{P}$ é integral.

A recíproca não é verdadeira.

— Veja-se o exemplo anterior.

Suponha agora, que se tem uma matriz inteira $\underline{A}$, $m \times n$ e seja $T(A)$, o conjunto de todos os vetores inteiros $\underline{b}$ do R^m, tais que $Ax \leq b$, define poliedros convexos totalmente integrais.

lema III - 3

T(A) forma um grupo aditivo abeliano

prova i) existência do zero

aplicando o lema III - 1 como b = 0, segue que

$$m\,d\,c\,[A_S] = m\,d\,c\,[A_S \;\vdots\; 0]$$

para todo subconjunto superfície $\underline{S}$.

Daí,

$$Ax \leq 0$$

define um poliedro convexo totalmente integral e $0 \in T(A)$

ii) fechamento

sejam b^1, $b^2 \in T(A)$.

Pelo lema III - 1

$$m\,d\,c\,[A_S] = m\,d\,c\,[A_S \;\vdots\; b_S^1]$$

e

$$m\,d\,c\,[A_S] = m\,d\,c\,[A_S \;\vdots\; b_S^2]$$

para todo subconjunto superfície $\underline{S}$. Daí, segue imediatamente, que

$$\text{m d c}\left[A_S\right] = \text{m d c}\left[A_S \;\vdots\; b_S^1 + b_S^2\right]$$

para todo subconjunto superfície $\underline{S}$.

Logo, $[b^1 + b^2] \in T(A)$

iii) elemento inverso

seja $b \in T(A)$. Ainda pelo lema III - 1

$$\text{m d c}\left[A_S\right] = \text{m d c}\left[A_S \;\vdots\; b_S\right]$$

e também

$$\text{m d c}\left[A_S\right] = \text{m d c}\left[A_S \;\vdots\; -b_S\right]$$

para todo subconjunto superfície $\underline{S}$.

Logo $-b \in T(A)$

iv) A comutatividade e a associatividade são óbvias.

Portanto T(A) é um grupo aditivo abeliano.

4 - Poliedro de Problema de Programação Linear Totalmente Integral.

Considere o poliedro convexo, definido por

$$\begin{aligned} Ax &\leqslant b \\ x &\geqslant 0 \end{aligned} \qquad (3 - 1)$$

onde $\underline{A}$ é uma matriz inteira m x n e $\underline{b}$ um ponto inteiro do R^m.

Seja T(A), o conjunto de vetores inteiros $\underline{b}$, para os quais (3 - 1) define um poliedro convexo, totalmente integral.

O próximo objetivo desse estudo, é a caracterização algébrica de T(A) desenvolvida por Gomory[9].

Mais especificamente, será mostrado que T(A) pode ser caracterizado implicitamente, como um conjunto de soluções inteiras, para uma equação expressa sobre um grupo abeliano.

Veja-se.

O poliedro definido em (3 - 1), pode ser escrito como

$$\begin{bmatrix} A \\ \cdots\cdots \\ -I \end{bmatrix} x \leqslant \begin{bmatrix} b \\ \cdots\cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

onde I é a matriz indentidade n x n e o posto de

$$\begin{bmatrix} A \\ \cdots\cdots \\ -I \end{bmatrix}$$

é n.

A partir dessa conclusão, todas as superfícies minimais de P, são 0-superfícies, ou vértices.

Juntando esse resultado ao lema III - 2, segue que P é totalmente integral, se e só se, todas as superfícies minimais de P são pontos inteiros.

E ainda, juntando-se este resultado ao corolário II - 4, P é integral, se e só se, toda face minimal de P são pontos inteiros.

Agora, considere ou restrições de P em (3 - 1), para escrevê-las equivalentemente, como

$$\begin{bmatrix} A & \vdots & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \cdots \\ z \end{bmatrix} = b \qquad (3 - 2)$$

$$x \geqslant 0, \quad z \geqslant 0 \qquad (3 - 3)$$

onde I é a matriz identidade m x m, z é o vetor das variáveis de folga.

5 - Solução Básica

Seja $\underline{B}$ uma base de $[A \vdots I]$, isto é, uma submatriz m x m, não-singular e $\underline{x_B}$ o seu subvetor correspondente, em

$$\begin{bmatrix} x \\ \cdots\cdots \\ z \end{bmatrix}$$

Seja $\underline{N}$ a submatriz restante m x n e $\underline{x_N}$ o seu subvetor correspondente, no vetor acima.

Desse modo, (3 - 2), pode ser reescrito como

$$[B \vdots N] \begin{bmatrix} x_B \\ \cdots\cdots \\ x_N \end{bmatrix} = b \qquad (3 - 4)$$

A solução única, para (3 - 4)

$$x_B = B^{-1} b$$

$$x_N = 0$$

é uma solução básica para (3 - 2).

Se além disso, $x_B \geq 0$, então essa solução básica, é também viável e $\underline{B}$ uma base viável para (3 - 2).

Note que $\underline{B}$, ser ou não, uma base viável de $[A \vdots I]$, depende exclusivamente, do vetor $\underline{b}$ em (3 - 2).

Vê-se facilmente, que 0-superfícies de $\underline{P}$, correspondem a soluções básicas de (3 - 2), isso porque, essas 0-superfícies são definidas por submatrizes de $\underline{A}$, formadas de $\underline{m}$ linhas linearmente independentes.

De modo análogo, o 0-faces ou vértices de $\underline{P}$, são soluções básicas viáveis de (3 - 2).

Assim

i) P é totalmente integral, se e só se, cada solução básica de (3 - 2) é um ponto inteiro.

ii) P é integral, se e só se, cada solução básica viável de (3 - 2) é um ponto inteiro.

A seguir a caracterização de T(A).

6 - Caracterização de T(A)

Aqui, ver-se-á uma condição para que P seja totalmente integral, sob um ponto de vista diferente e por demais interessante.

Seja B uma base de $[A \vdots I]$ e seja M(B) o conjunto de todas as combinações inteiras das colunas de B.

Então, a solução básica

$$\begin{bmatrix} x_B \\ \cdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

é um ponto inteiro, se e só se, a solução x_B do sistema

$$Bx_B = b$$

é um ponto inteiro.

Equivalentemente, se e só se, $b \in M(B)$.

Entretanto, uma vez que a matriz m x (n + m) é de posto m, segue que essa matriz tem $\binom{n+m}{m}$ bases e que serão denotadas por $B_1, B_2 \ldots B_k$.

Assim, pode-se afirmar, que P é totalmente integral, se e só se,

$$b \in M(B_i)$$

ou equivalentemente, se e só se,

$$b \in \bigcap_{i=1}^{k} M(B_i)$$

Relembrando que T(A), é o conjunto de todos os vetores $b \in R^m$ para os quais P definido por (3 - 2) e (3 - 3), com A fixo é totalmente integral, vê-se que

$$T(A) = \bigcap_{i=1}^{k} M(B_i) \qquad i = 1, 2 \dots k$$

Note, que todo $M(B_i)$, $i = 1, 2 \dots k$, forma um grupo abeliano aditivo. Além disso, cada grupo $M(B_i)$ é um subgrupo abeliano de M(I), onde I é a matriz identidade m x m.

Daí, segue que T(A) como uma interseção de subgrupos de M(I), é também, um subgrupo de M(I).

Antes de prosseguir com a caracterização de T(A), note que um desenvolvimento equivalente a esse, para propriedade integral, não é possível.

A maior dificuldade em se lidar com a propriedade integral, reside no fato de que suas bases, devem ser viáveis e isto depende da escolha do vetor b, membro direito do sistema.

Assim, dada uma matriz A m x n, suponha que Q(A) seja o conjunto de todos os vetores inteiros b para os quais (3 - 2) e (3 - 3) definem um poliedro convexo integral.

Então, se b^1 e b^2 pertencem a Q(A), não é verdade, em geral, que $b^1 + b^2 \in Q(A)$.

Isto, se deve ao fato de que a base viável associada com b^1, poder não ser a mesma base viável associada com b^2.

Assim, Q(A) não é fechado para a adição.

A principal vantagem, em si lidar com a propriedade totalmente integral, é que ela envolve todas as bases da matriz $[A \vdots I]$ para escolha do vetor b.

Seja $\underline{B}$ uma base de $[A \vdots I]$.

Será mostrado agora, como M(B) é caracterizado como o conjunto de soluções para uma equação expressa sobre um grupo abeliano finito, cuja estrutura é bem determinada.

Um vetor inteiro $\underline{b}$, está em M(B), se e só se, $\underline{B^{-1}b}$ é inteiro.

Isto é óbvio, pois

$$Bx = b$$

Teorema III - 1

$\underline{B^{-1}b}$ é inteiro, se e só se,

$$\Delta B^{-1} b \equiv 0 \pmod{\Delta} \qquad (3 - 5)$$

onde $\Delta = [\det B]$ e a congruência é tomada componente a componente.

prova: i) Aplicando CRAMER a $Bx = b$

tem-se

$$x_i = \pm \frac{\Delta i}{\Delta} \quad \text{onde } \Delta_i = (\text{det de } x_i)$$

Isto é

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots\cdots & b_{1i-1} & b_1 & \cdots\cdots & b_{1m} \\ b_{21} & \cdots\cdots & b_{2i-1} & b_2 & \cdots\cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & \cdots\cdots & b_{ii-1} & b_i & \cdots\cdots & b_{im} \\ b_{m1} & \cdots\cdots & b_{im} & b_m & \cdots\cdots & b_{mm} \end{bmatrix}$$

daí, desenvolvendo $\underline{\Delta_i}$ segundo a coluna $\underline{b}$ pelo teorema de LAPLACE, para determinantes, segue

$$\Delta_i = b_1 D_1 + b_2D_2 + \ldots + b_m D_m$$

onde D_i é o co-fator de b_i.

Com raciocínio análogo, vê-se que D_i, é também um co-fator de bk_i, $k = 1, 2 \ldots m$.

Ora, de

$$x_i = \pm \frac{\Delta_i}{\Delta}$$

conclue-se que x_i será inteiro, se e só se,

$$\Delta_i \equiv 0 \pmod{\Delta}$$

Por outro lado

$$\Delta B^{-1} b = \frac{\Delta}{\det B}[\text{Adj } B] b = \pm 1 \begin{bmatrix} D_{11} & D_{21} & \cdots & D_{m1} \\ D & D & & D_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ D_{1m} & D_{2m} & \cdots & D_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} D_{11}b_1 + D_{21}b_2 + \ldots + D_{m1}b_m \\ D_{12}b_1 + D_{22}b_2 + \ldots + D_{m2}b_m \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ D_{1m}b_1 + D_{2m}b_2 + \ldots + D_{mm}b_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \vdots \\ \Delta_m \end{bmatrix}$$

Logo, se conclue que $x = B^{-1}b$ é inteiro, se e só se

$$\Delta B^{-1} b \equiv 0 \pmod{\Delta}$$

Considere agora, o grupo $M(\Delta B^{-1})$.

Se for introduzida a relação de congruência em $M(\Delta B^{-1})$, tal que, dois vetores inteiros são congruentes módulo Δ, componente a componente, então, o grupo quociente com respeito a essa relação de congruência é

$$G = \frac{M(\Delta B^{-1})}{M(\Delta I)}$$

onde $\underline{I}$ é a matriz identidade m x m.

Além disso, se β_1, β_2 ... β_m são as classes de congruência contendo cada das colunas de ΔB^{-1} e se $\overline{0}$ é a classe de congruência contendo o vetor nulo, então (3 - 5) pode ser expressa como uma equação sobre o grupo G.

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \beta_i = \overline{0} \tag{3 - 6}$$

Vê-se que $\overline{0}$ é a classe dos múltiplos de Δ.

Assim, o vetor inteiro $\underline{b}$ está em M(B), se e só se, $\underline{b}$ satisfaz a equação (3 - 6) sobre G.

A seguir, será mostrado que a equação (3 - 6), pode ser transformada em uma nova equação sobre um novo grupo isomórfico a $\underline{G}$, cujo índice e estrutura são mais acessíveis à percepção.

Inicialmente, note que, se H é um grupo isomórfico a $\underline{G}$, com isomorfismo

$$\phi : G \to H$$

então, a equação (3 - 6) sobre $\underline{G}$ é satisfeita por algum vetor $\underline{b}$, se e só se, a equação sobre H

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \phi(\beta_i) = \phi\,(\overline{0})$$

é satisfeita por $\underline{b}$.

<u>Afirmação 1</u>

O grupo $\quad G = \dfrac{M(\Delta B^{-1})}{M(\Delta I)}$

é isomórfico ao grupo

$$G' = \frac{M(I)}{M(B)}$$

onde a transformação linear, não-singular,

$$\phi = \frac{1}{\Delta} B$$

é o isomorfismo de $M(\Delta B^{-1})$ em $M(I)$ e de $M(\Delta I)$ em $M(B)$.

Daí, segue que $\underline{\phi}$, leva uma classe de congruência de $\underline{G}$, em uma classe de congruência em $\underline{G'}$.

Afirmação 2

O grupo $$G' = \frac{M(I)}{M(B)}$$

é isomórfico ao grupo

$$G'' = \frac{M(I)}{M(\overline{B})}$$

onde $\overline{B}$ é a matriz diagonal obtida a partir de $\underline{B}$, através de operações elementares de linhas e colunas, de acordo com Smith[25].

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} E_1 & & & \\ & E_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & E_m \end{bmatrix}$$

onde, E_1, E_2 ... E_m são inteiros e positivos.

Além disso

$$E_i / E_{i+1} \qquad i = 1, 2 \ldots m - 1$$

e

$$E_1 \,.\, E_2 \ldots E_m = \Delta$$

A matriz $\overline{B}$, pode ser expressa em termos da matriz $\underline{B}$ como

$$\overline{B} = R\ B\ C$$

onde $\underline{R}$ e $\underline{C}$ são matrizes inteiras com a condição

$$|\det R| = |\det C| = 1$$

A transformação linear não-singular $\underline{R}$ é o isomorfismo de $\underline{G'}$ em $\underline{G''}$.
Veja-se

i) desde que $|\det R| = 1$, $\underline{R}$ é um isomorfismo de $M(I)$ em $M(I)$;

ii) obviamente, $\underline{R}$ é um isomorfismo de $M(B)$ em $M(RB)$.

Resta mostrar que $M(RB) = M(\overline{B})$

i) Seja $Y \varepsilon M(\overline{B})$.
Então, $Y = RBCx = RB(Cx)$ para algum vetor inteiro $\underline{x}$.

Assim, $Y \quad M(RB)$ e desse modo $M(\overline{B}) \subseteq M(RB)$

ii) Seja $Y \varepsilon M(RB)$
Então, $Y = RBx = TBC\left[C^{-1}x\right] = \overline{B}\left[C^{-1}x\right]$ para algum vetor $\underline{x}$ inteiro.

Desde que, o $|\det C| = 1$, $C^{-1}x$ é um vetor inteiro e daí, segue que

$$Y \varepsilon M(\overline{B})$$

Logo $M(RB) \subseteq M(\overline{B})$

Então $M(RB) = M(\overline{B})$ e $\underline{R}$ é um isomorfismo entre $\underline{G'}$ e $\underline{G''}$.

Desse resultado, segue que R leva uma classe de congruência em $\underline{G'}$ a uma classe de congruência em $\underline{G''}$.

Agora, seja J_k o grupo aditivo dos inteiros módulo k, então, vê-se que G'' é isomórfico ao produto direto H.

$$H = J_{E_1} \times J_{E_2} \times \dots J_{E_m}$$

o isoformismo de $\underline{G''}$ para $\underline{H}$, transforma uma classe de congruência de $\underline{G''}$ em um vetor inteiro do R^m obtido como segue:

Toma-se um membro de uma classe de $\underline{G''}$ e reduz-se-lhe as componentes, módulo $\underline{E_i}$ $i = 1, 2 \dots m$.

Note que

$$E_1 \,.\, E_2 \dots E_m = \Delta$$

é igual a ordem de H.

No caso em que $E_i = 1$, em nada contribue para a estrutura de H e portanto, pode ser omitido.

O diagrama abaixo, resume a sequência de grupos isomórficos apresentados até aqui

$$\begin{array}{ccccccc}
\dfrac{M(\Delta B^{-1})}{M(\Delta I)} & \overset{\frac{1}{\Delta} B}{\cong} & \dfrac{M(I)}{M(B)} & \overset{R}{\cong} & \dfrac{M(I)}{M(\overline{B})} & \overset{\substack{\text{redução módulo} \\ (E_i,\ i = \overline{1,m})}}{\cong} & J_{E_1} \times J_{E_2} \times \dots \times J_{E_m} \\
 & & & & & & \\
G & & G' & & G'' & & H
\end{array}$$

Por fim, pode-se agora, estabelecer o isomorfismo ϕ de $\underline{G}$ sobre $\underline{H}$ que dá a caracterização procurada para M(B).

Assim

$$\sum_{i=1}^{m} b_i h_i = 0 \qquad (3 - 7)$$

onde

$$h_i = \phi(\beta_i) = \frac{1}{\Delta} RB(\Delta B^{-1})_i \bmod \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_m \end{bmatrix}$$

$$= R_i \bmod \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_m \end{bmatrix}$$

onde o índice $\underline{i}$ denota a i-ésima coluna da matriz $\underline{R}$.

Assim, um vetor inteiro $\underline{b}$, está em M(B), se e só se, $\underline{b}$ satisfaz a equação (3 - 7).

Agora será vista, a caracterização de T(A), o grupo de todos os vetores $\underline{b}$, inteiros, para os quais as restrições (3 - 2) e (3 - 3), definem um poliedro convexo totalmente integral.

Relembre que

$$T(A) = \bigcap_{i=1}^{k} M(B_i)$$

onde $\underline{B_i}$ $i = 1, 2 \ldots k$ são todas as bases de $[\, A \,\vdots\, I \,]$.

Para cada base $\underline{B_i}$, foi visto que $M(B_i)$, pode ser caracterizado por um conjunto de soluções inteiras para uma equação

$$\sum_{j=1}^{m} b_j h_{ij} = 0$$

sobre um grupo abeliano finito H_i de ordem

$$\Delta_i = |\det B_i|$$

Daí, segue que T(A) pode ser caracterizado como um conjunto de todas as soluções inteiras para $\underline{k}$ equações simultâneas, dadas por

$$\sum_{j=1}^{m} b_j h_{ij} \qquad i = 1, 2 \ldots k$$

Sobre os grupos abelianos

$$H_1, H_2, \ldots H_k$$

equivalentemente, T(A) pode ser caracterizado como o conjunto de todas as soluções inteiras para uma única equação

$$\sum_{j=1}^{m} b_j k_j = 0$$

sobre o grupo abeliano k, onde

$$k = H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_k$$

e

$$k_j = (h_{1j}, h_{2j} \ldots h_{kj})$$

$$j = 1, 2 \ldots m$$

Note que a ordem de k é

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot \ldots \Delta_k$$

Esses resultados, resumem-se no seguinte teorema.

Teorema III - 2

Dada uma matriz inteira A m x n, o conjunto T(A) de todos os vetores inteiros b, para os quais

$$[A \vdots I] \begin{bmatrix} x \\ \ldots \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \end{bmatrix}$$

$$x \geqslant 0 \ , \quad z \geqslant 0$$

define um poliedro convexo totalmente integral, é igual ao conjunto de todos os vetores inteiros b, que satisfazem a equação.

$$\sum_{j=1}^{m} b_j k_j = 0$$

Sobre um grupo abeliano finito k, derivado de todas as bases $B_1 \ldots B_k$ de $[A \vdots I]$

A ordem de $\underline{k}$ é

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 \cdot \ldots \cdot \Delta_k$$

onde $$\Delta_i = |\det B_i|.$$

Uma conclusão óbvia, pode ser tirada do teorema III - 1.

— T(A) nunca consiste apenas do vetor nulo.

Agora, para ver isto, seja $O(k_j)$ a ordem do elemento $\underline{k_j}$ no grupo $\underline{k}$ e $\emptyset$ a matriz diagonal m x m

$$\emptyset = \begin{bmatrix} O(k_1) & & & \\ & O(k_2) & & \\ & & \ddots & \\ & & & O(k_m) \end{bmatrix}$$

Tem-se que

$$M(\emptyset) \subseteq T(A)$$

Isto pelo de que

$$O(k_j) \leq \text{mmc}(E_m^1, E_m^2 \ldots E_m^k)$$

onde $\underline{\text{mmc}}$ é o mínimo múltiplo comum e E_m^i é obtido através de $\underline{B_i}$ como foi visto anteriormente.

A partir desse resultado, T(A) tem um número infinito contável de vetores.

Em termos de poliedro convexo com a propriedade totalmente integral, ele diz que para uma matriz $\underline{A}$ existe um número infinito contável de vetores inteiros $\underline{b}$ tais que (3 - 2) e (3 - 3) definem um poliedro convexo totalmente integral.

CAPÍTULO IV

Em geral, o problema de se integralizar um (n, k)-poliedro definido por $Ax \leqslant b$, onde $\underline{A}$ é uma matriz inteira m x n e $\underline{b}$ um ponto inteiro do R^m, pode ser tratado a partir dos parâmetros, $\underline{n}$ e $\underline{k}$.

O que se quer dizer com isto, é que existe uma transformação linear T

$$T : R^n \rightarrow R^k$$

que transforma o (n, k)-poliedro $\underline{P_n}$, em um (k, k)-poliedro $\underline{P_k}$, preservando a integralização.

O diagrama abaixo, apresenta este aspecto.

$$\begin{tikzcd}
P_n \arrow[r, "T"] \arrow[d, "(-)"'] & P_k \arrow[d, "(-)"] \\
\overline{P}_n \arrow[r, "T"'] & \overline{P}_k
\end{tikzcd}$$

Aqui, (-) é a operação integralização.

Tem-se

$$T(\overline{P}_n) = \overline{T(P_n)} = \overline{P}_k$$

A partir daí, para integralizar P_n e obter $\overline{P}_n$, toma-se o seguinte procedimento

i) Aplica-se $\underline{T}$ a $\underline{P_n}$ para obter $\underline{P_k}$

$$T(P_n) = P_k$$

ii) integraliza-se $\underline{P_k}$, isto é

$$P_k \overset{(-)}{\rightarrow} \overline{P}_k$$

iii) aplica-se a transformação inversa T^{-1} a $\overline{P}_k$ e se obtém $\overline{P}_n$, isto é

$$T^{-1}(\overline{P}_k) = \overline{T^{-1}(P_k)} = \overline{P}_n$$

Resumindo

$$P_n \overset{T}{\rightarrow} P_k \overset{(-)}{\rightarrow} \overline{P}_k \overset{T^{-1}}{\rightarrow} \overline{P}_n$$

Aqui cabe dizer que para $y \in R^k$

$$T^{-1}(y) = \{x \in R^n / T(x) = Y\}$$

e é com essa interpretação que

$$T^{-1}(\overline{P}_k) = \overline{P}_n$$

Desse modo, o problema de se integralizar um (n, k)-poliedro, se reduz ao problema de se integralizar um (k, k)-poliedro, objeto de menores dificuldades.

1 - Existência da Transformação

Como foi estabelecido, $\underline{A}$ é uma matriz inteira m x n de posto $\underline{k}$.

Toda matriz inteira $\underline{T}$ k x n de posto $\underline{k}$, cujas linhas expandem o espaço das linhas de $\underline{A}$, quando vista como uma transformação linear do $\underline{R^n \text{ no } R^k}$, transforma um (n, k)-poliedro $\underline{P_n}$, em um (k, k)-poliedro $\underline{P_k}$

$$P_k = \{y \in R^k / \; Cy \leq b\}$$

onde $\underline{C}$ é uma matriz m x k de posto $\underline{k}$, não-necessariamente inteira, definida por

$A = CT$.

Entretanto, para que T preserve a operação de integralização, ela deverá satisfazer às condições

i) $\text{m d c}\,[T] = 1$

ii) cada linha de A é uma combinação inteira de linhas de T.

lema IV - 1

Se A é uma matriz inteira de posto k, então existe uma matriz T, inteira m x n de posto k, tal que

i) $\text{m d c}\,[T] = 1$

ii) cada linha de A é uma combinação inteira de linhas de T.

prova:

Seja U uma submatriz de A k x n, tendo posto k.

De acordo com Jacobson[18], U pode ser escrito como

$$U = R\,\overline{U}\,C$$

onde

R é uma matriz inteira k x k

C é uma matriz inteira n x n

$\det R = \pm 1$, $\det C = \pm 1$

$\overline{U} = [U' \,\vdots\, 0]$

sendo U' uma matriz diagonal k x k e 0 a matriz nula kx(n - k).

Seja agora

$$\overline{T} = [I \vdots 0]$$

$$T = R\,\overline{T}\,C \qquad (4-1)$$

onde $\underline{I}$ é a matriz identidade k x k.

Claramente

$$\text{mdc}\,[\overline{T}] = 1$$

e daí, por Jacobson[18]

$$\text{mdc}\,[\overline{T}] = \text{mdc}\,[T] = 1$$

<u>Afirmação 1</u>

Cada linha de $\underline{A}$ é uma combinação inteira de linhas de $\underline{T}$.

Tem-se

Seja $\underline{a}$ uma linha de $\underline{A}$.

Desde que $\underline{A}$ tem posto $\underline{k}$ e $\underline{U}$ é uma submatriz de $\underline{A}$, que também tem posto $\underline{k}$, segue que as linhas de $\underline{U}$, geram o espaço de linhas de $\underline{A}$.

Daí, a linha $\underline{a}$ de $\underline{A}$, pode ser escrita como combinação linear de linhas de $\underline{U}$. Isto é

$$a = c\,U$$

onde $\underline{c}$ é um vetor linha do R^k.

Daí,

$$a = cU = cR\,[U'\overline{T}]\,C = c\,[RU'R^{-1}]\,[R\,\overline{T}\,C]$$

$$= c'T$$

onde $$c' = c\,[R\,U'\,R^{-1}]$$

Afirmação 2

$\underline{c'}$ é um ponto inteiro do R^k

tem-se

$$\text{seja } c' = \lfloor c' \rfloor + \langle c' \rangle$$

onde: $\lfloor c' \rfloor$ denota a função maior inteira aplicada a $\underline{c'}$

$\langle c' \rangle$ é o vetor das partes fracionárias de $\underline{c'}$.

Note que, cada componente de $\langle c' \rangle$ é não-negativa e menor que $\underline{1}$.

Tem-se

$$a = c'T = \lfloor c' \rfloor T + \langle c' \rangle T$$

daí, pelo fato de $\underline{a}$ e $\lfloor c' \rfloor T$ serem inteiros, $\langle c' \rangle T$ também é inteiro.

logo $\langle c' \rangle = 0$, o que será mostrado a seguir.

O vetor $\langle c' \rangle$, pode ser representado de modo único por

$$\langle c' \rangle = \frac{1}{d} (e_1, e_2 \ldots e_k) \qquad (4 - 2)$$

onde $\underline{d}$ é um número inteiro e positivo e $\underline{e_i}$ $i = 1, 2 \ldots k$ são inteiros não-negativos, tais que

$$0 < e_i < d$$

$$mdc(e_1, e_2 \ldots e_k) = 1$$

Seja $\underline{S}$ um subconjunto de índices de $\underline{k}$ colunas de $\underline{T}$, tal que a submatriz $\underline{T_S}$, tem determinante diferente de zero.

Daí, desde que $c'\,T$ é um vetor inteiro, o vetor $\langle c' \rangle T_S$ é também um ponto inteiro.

Seja

$$a' = \langle c' \rangle T_S$$

resolvendo esse sistema ver-se-á que

$$\langle c' \rangle = \frac{1}{\Delta}(f_1, f_2 \ldots f_k)$$

onde $\Delta = |\det T_S|$

$f_1, f_2 \ldots f_k$ são inteiros

comparando esse resultado com (4 - 2) e lembrando que $mdc(e_1, e_2 \ldots e_k) = 1$ conclue-se que

$$d / \det T_S$$

De modo análogo, seria mostrado, que d divide todos os menores de ordem k de T.

Assim

$$d / mdc\,[T]$$

logo

$$d = 1$$

daí, segue que

$$e_1 = e_2 = \ldots = e_k = 0.$$

O lema está provado

2 - Preservação da Integralização

A transformação T, cuja existência é garantida pelo lema IV - 1, transforma o (n, k)-poliedro P_n definido por $Ax \leq b$, em um (k, k)-poliedro P_k, definido por $Cy \leq b$, onde $Y = Tx$ e $A = CT$.

A segunda propriedade de T, assegura que C é uma matriz inteira.

Afirmação

$\underline{T}$ transforma uma face de $\underline{P_n}$ em uma face de $\underline{P_k}$.

Seja $(P_n)_S$ uma face de $\underline{P_n}$ e $(P_k)_S$ uma face de $\underline{P_k}$.

$$(P_n)_S = \{x \in P_n / A_S x = b_S\}$$

$$(P_k)_S = \{y \in P_k / C_S y = b_S\}$$

desde que A = CT, segue que

$$A_S = C_S T$$

e

$$T((P_n)_S) = (P_k)_S$$

e ainda

$$T^{-1}((P_k)_S) = (P_n)_S$$

Assim, $\underline{T}$ e $\underline{T^{-1}}$ preservam a estrutura de face.

Lembre que as faces minimais de P_n, são (n - k)-superfícies do R^n.

Suas imagens sob $\underline{T}$, são faces minimais de $\underline{P_k}$, portanto, 0-superfícies do $\underline{R^k}$.

Suponha agora, que o (k, k)-poliedro integral

$$\overline{P}_k = \{y \in R^k / \overline{C} y \leq \overline{b}\}$$

foi encontrado, onde $\overline{C}$ é uma matriz inteira $\overline{m}$ x k de posto $\underline{k}$ e $\overline{b}$ um ponto inteiro do $\underline{R^k}$.

Então

$$T^{-1}(\overline{P}_k) = \{x \in R^n / \overline{A}\, x \leq \overline{b}\}$$

onde $\overline{A}$ é $\overline{m}$ x n dada por $\overline{A} = \overline{C}\,T$ e o conjunto acima é um (n, k)-poliedro, pois T preserva a estrutura de face e $\overline{C}$ é de posto $\underline{k}$.

lema IV - 2

$$\overline{P}_n = T^{-1}(\overline{P}_k)$$

prova: i) inicialmente, será mostrado que $T^{-1}(\overline{P}_k)$ é integral.

tem-se

Cada face minimal de $T^{-1}(\overline{P}_k)$ e a imagem de uma face minimal de $\overline{P}_k$ sob T^{-1} e reciprocamente, pois T^{-1} preserva a estrutura de face.

Faces minimais de $\overline{P}_k$ é integral; seus vértices são pontos inteiros do R^k.

Seja Y^0 um vértice de $\overline{P}_k$.

Então $T^{-1}(Y^0)$ é uma face minimal de $T^{-1}(\overline{P}_k)$.

$$T^{-1}(Y^0) = \{x \in R^n / Tx = Y^0\}$$

que é uma (n - k)-superfície do R^n.

Como mdc $[T] = 1$, segue que

$$\text{mdc}\,[T] = \text{mdc}\,[T : Y^0]$$

daí, pelo teorema II - 1, a superfície $T^{-1}(Y^0)$ é integral.

Por outro lado, essa superfície é uma face minimal de $T^{-1}(\overline{P}_k)$.

Logo, toda face minimal de $T^{-1}(\overline{P}_k)$ é integral.

Então pelo corolário II - 4, $T^{-1}(\overline{P}_k)$ é integral.

ii) Agora, será mostrado que $I(T^{-1}(\overline{P}_k)) = I(P_n)$

1) $I(T^{-1}(\overline{P}_k)) \subseteq I(P_n)$

desde que $\overline{P}_k \subseteq P_k$ e $T^{-1}(P_k) = P_n$, segue que $T^{-1}(\overline{P}_k) \subseteq P_n$

daí, $$I(T^{-}(\overline{P}_k)) \subseteq I(P_n)$$

$$2)\ I(P_n) \subseteq I(T^{-1}(\overline{P}_k))$$

considere o conjunto diferença

$$M = I(P_n) - I(T^{-1}(\overline{P}_k)$$

suponha que $\exists\ x \in M$

daí, x $\quad I(P_n) \Longrightarrow Y = Tx$ é um ponto inteiro de $\underline{P_k}$ e portanto de $\overline{P}_k$.

Mas isto contradiz a hipótese.

Portanto $M = \emptyset$ e desse modo

$$I(T^{-1}(\overline{P}_k)) = I(P_n)$$

De ① e ② e pelo lema 1 - 9

$$T^{-1}(\overline{P}_k) = \overline{P}_n$$

Resumindo esses resultados, foi visto que dado um sistema de desigualdades lineares

$$Ax \leqslant b$$

definindo um (n, k)-poliedro $\underline{P_n}$, existe uma transformação $\underline{T}$, que transforma $\underline{P_n}$ em um (k, k)-poliedro $\underline{P_k}$ definido por

$$P_k = \{y \in R^k / Cy \leqslant b,\ y = Tx,\quad A = CT\}$$

além disso, integralizando P_k para obter $\underline{\overline{P}_k}$

$$\overline{P}_k = \{y \in R^k / \overline{C}y \leqslant \overline{b},\ y = Tx\}$$

então, $T^{-1}(\overline{P}_k)$ definido por $\overline{A}x \leqslant \overline{b}$, onde $\overline{A} = \overline{C}T$ é igual a $\overline{P}_n$.

Assim, sem perca de generalidade o problema de se integralizar um (n, k)-poliedro, pode ser restringido a integralização de um (k, k)-poliedro.

3 - Integralização de um (n, 1)-poliedro

Seja $\underline{P_n}$ um (n, 1)-poliedro definido por

$$Ax \leq b$$

A inteira m x n de ponto $\underline{1}$ e $\underline{b}$ um posto inteiro do R^m.

Seja

$$T = \frac{1}{\Delta_j} a_j$$

onde $\underline{a_j}$ é uma linha não-nula de $\underline{A}$ e

$$\Delta_j = \text{mdc}\,[a_j]$$

facilmente, se vê que

$$\text{mdc}\,[T] = 1$$

e

$\underline{a_i}$ (linha de A), i = 1, 2 ... m é uma combinação inteira de T

isto é

$$a_i = c_i T$$

$$c_i = \pm \text{mdc}[a_i]$$

Assim, $\underline{T}$ satisfaz as condições de uma transformação que preserva a integralização.

Note agora, que $T(P_n)$ é um (1, 1)-poliedro $\underline{P_1}$, definido por

$$Cy \leq b$$

onde y = Tx e $\underline{C}$ uma matriz inteira m x 1 definida por A = CT.

Daí, pelo lema IV - 2

$$T^{-1}(\overline{P_1}) = \overline{P}_n$$

O problema da integralização de $\underline{P_1}$, é resolvido facilmente.

Considere a semi-reta σ_i, definida por

$$c_i y \leq b_i \qquad c_i \neq 0$$

integraliza-se $\underline{\sigma_i}$, como segue.

Seja $\underline{\sigma_i}^*$ a semi-reta definida por

$$y \leq \left\lfloor \frac{b_i}{c_i} \right\rfloor \quad \text{se} \quad c_i > 0$$

e

$$-y \leq \left\lfloor \frac{b_i}{-c_i} \right\rfloor \quad \text{se} \quad c_i < 0$$

a fronteira de $\underline{\sigma_i}^*$ é um inteiro

daí, pelo teorema II - 2, $\underline{\sigma_i}^*$ é integral.

Além disso,

$$I(\sigma_i^*) = I(\sigma_i)$$

Logo, pelo lema I - 9

$$\sigma_i^* = \overline{\sigma}_i = H(I(\sigma_i))$$

Considere agora, todas as desigualdades $c_i y \leq b_i$, para as quais $c_i > 0$.

Seja $\underline{j}$ aquela em que a razão $\frac{b_i}{c_i}$ é menor.

Considere todas as desigualdades $c_i y \leq b_i$ em que $c_i < 0$.

Seja $\underline{k}$ aquela em que a razão $\frac{b_i}{-c_i}$ é menor.

Agora, seja $\underline{P_1}^*$ definido pelo sistema de pelo menos uma e no máximo duas desigualdades

$$y \leq \left\lfloor \frac{b_j}{c_j} \right\rfloor$$

$$-y \leq \left\lfloor \frac{b_k}{-c_k} \right\rfloor$$

Vê-se que

$$I(P_1^*) = I(P_1)$$

por outro lado, se

$$-\left\lfloor \frac{b_k}{-c_k} \right\rfloor > \left\lfloor \frac{b_j}{c_j} \right\rfloor$$

então $I(P^*) = I(P_1) = \emptyset$. Assim, $P_1^* = \overline{P} = \emptyset$. Do contrário, pelo corolário II - 4, $\underline{P_1}^*$ é integral.

Logo, pelo lema I - 9

$$P_1^* = \overline{P}_1$$

$T^{-1}(\overline{P}_1)$ é um (n, 1)-poliedro definido como segue por um sistema de pelo menos uma e no máximo duas desigualdades

$$Tx \leq \left\lfloor \frac{b_j}{c_j} \right\rfloor$$

$$-Tx \leq \left\lfloor \frac{b_k}{-c_k} \right\rfloor$$

e pelo lema IV - 2

$$T^{-1}(\overline{P}_1) = \overline{P}_n$$

ex. 4 - 1 Seja $\underline{P_3}$ um (3, 1)-poliedro definido por

$$\begin{bmatrix} -8 & 4 & 12 \\ 12 & -6 & -18 \\ -4 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{Seja} \quad T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -8 & 4 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

então $P_1 = T(P_3)$ é o (1, 1)-poliedro definido por

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -6 \\ 2 \end{bmatrix} y \leqslant \begin{bmatrix} 13 \\ 7 \\ 9 \end{bmatrix}$$

integralizando $\underline{P_1}$ obtem-se o (1, 1)-poliedro $\overline{P_1}$, definido por

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} y \leqslant \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

então $T^{-1}(\overline{P_1})$ é o (3, 1)-poliedro integral, definido por

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO V

Neste capítulo, ver-se-á a integralização de um (2, 2)-canto-poliédrico.

Seja

$$P = \{x \in R^2/Ax \leq b\}$$

onde $\underline{A}$ é uma matriz 2 x 2 de posto $\underline{2}$ e $\underline{b}$ um ponto inteiro do R^2.

Nesse caso, $\underline{P}$ é dito um <u>(2, 2)-canto-poliédrico</u>.

Integralizar $\underline{P}$ é construir um poliedro $\overline{P}$, tal que

$$\overline{P} = H(I(P))$$

Considere $\underline{P}$, como a interseção de dois semi-espaços

$$\sigma_i = \{x \in R /a^i . x \leq b_i, \quad i = 1, 2\}$$

onde $\underline{a^i}$ é uma linha de $\underline{A}$ e o ponto (.), denota o produto interno de $\underline{a^i}$ por $\underline{x}$.

Os semi-planos σ_1 e σ_2, são (2, 1)-poliedros e de acordo com o que foi visto no final do capítulo anterior, podem ser integralizados como segue:

i) seja $d_i = \text{mdc}(a_{i1}, a_{i2}), \qquad i = 1, 2$

ii) então

$$\overline{\sigma}_i = \{x \in R^2/\frac{1}{d_i} a^i . x \leq \left\lfloor \frac{b_i}{d_i} \right\rfloor, \quad i = 1, 2\}$$

são dois semi-planos integrais.

Agora, desde que

$$I(\overline{\sigma}_i) = 1 (\sigma_i)$$

segue que $\underline{P}$ pode ser substituido por $\sigma_1 \cap \sigma_2$, sem perda de generalidade, isto é,

$$I(P) = I(\sigma_1 \cap \sigma_2) = I(\overline{\sigma}_1 \cap \overline{\sigma}_2)$$

no restante desse capítulo, será assumido que este passo da integralização de $\underline{P}$, já foi executado.

Isto é, assumir-se-á que P é definido por $Ax \leqslant b$ onde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

e

$$\text{mdc}\,[a_{11},\ a_{12}] = 1$$

$$\text{mdc}\,[a_{21},\ a_{22}] = 1$$

e ainda que $\Delta = \det A > 0$

O objetivo a seguir, é gerar o sistema de desigualdades $\overline{A}x \leqslant \overline{b}$, definindo $\overline{P}$.

Lembre que (-) barra, denota a operação de integralização.

1 - <u>Ponto de Fronteira de I(P)</u>

Seja $x^0 = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_1^0 \end{bmatrix}$ um ponto inteiro de I(P). Então, $\underline{x^0}$ é um ponto de fronteira de I(P), se e só se, existe um vetor inteiro não-nulo.

$$\rho = \begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \end{bmatrix}$$

tal que $\rho.(x - x^0) \leq 0 \qquad x \in I(P)$

O vetor inteiro $\underline{\rho}$ é um <u>vetor suporte</u> de I(P) em $\underline{x^0}$.

A desigualdade $\rho.(x - x^0) \leq 0$, define um semi-plano suporte para I(P).

2 - <u>Vértice de I(P)</u>

Um ponto de fronteira $\underline{x^0}$ de I(P), é um vértice de I(P), se e só se, existem dois vetores suportes de I(P) em $\underline{x^0}$, linearmente independentes.

<u>lema V - 1</u>

Se π é uma reta definida por $a . (x - x^0) = 0$ onde $(a_1, a_2) = 1$ então $I(\pi)$ é o conjunto de pontos expressos por $x + k\,T\,a$ onde

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad k \in Z$$

prova: i) suponha $\underline{x}$ da forma $x^0 + K\,T\,a$

a) $\underline{x}$ é inteiro.

Isto é verdade, pois $\underline{x^0}$ e $\underline{K\,T\,a}$ o são.

b) $x \in \pi$

$$a . (x - x^0) = a . (x^0 + K\,T\,a - x^0) = a . (k\,T\,a)$$

mas

$$k\,T\,a = k \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_2 \\ -ka_1 \end{bmatrix}$$

Logo $\qquad a \,.\, (k\,T\,a) = (a_1 \;,\; a_2\;) \,.\, (ka_2,\; -ka_1)$

$$= ka_1a_2 - ka_1a_2 = 0$$

portanto, de a e b

$$x \in I(\pi)$$

ii) suponha agora, que $x \in I(\pi)$, $x \neq x^0$ e que x não é expressível na forma $x^0 + k\,T\,a$

tem-se

a) $x \in I(\pi) \Longrightarrow$ x inteiro, $x \in \pi$

b) $a \,.\, (x - x^0) = 0 \Longrightarrow a_1(x^0 - x_i) + a\,(x \;\; - x_2^0) = 0$

$$\Longrightarrow a_1(x_1 - x_1^0) = -a_2(x_2 - x_2^0)$$

como $\text{mdc}(a_1,\, a_2) = 1$, esta igualdade só se verifica quando:

$$(x_1 - x_1{}^0) = -ka_2$$

e $\qquad\qquad\qquad\qquad k \in Z$

$$(x_2 - x_2{}^0) = ka_1$$

mas, isto é dizer que

$$x - x^0 = k\,T\,a \quad \text{ou} \quad x = x^0 + k\,T\,a$$

o que contradiz a hipótese.

O lema está provado.

É algo bastante complexo, calcular alguns pontos de fronteira de I(P).

No entanto, fazendo uso de alguns resultados básicos da teoria dos números, isto torna-se possível.

Seja π uma linha integral, definida por

$$a \cdot x = b$$

onde $\underline{a}$ é inteiro

$$mdc(a_1, a_2) = 1$$

$$b \in Z$$

uma solução inteira $\underline{x^0}$ para $a \cdot x = b$, pode ser determinada como segue

i) usa-se o algoritmo de Euclides para determinar um vetor $\underline{r}$

$$r = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} \quad \text{tal que } a \cdot r = 1$$

ii) faz-se $x^0 = br$ e neste caso, esta é a solução procurada.

a partir daí, $a \cdot x = b$, pode ser escrita como

$$a \cdot (x - x^0) = 0$$

Considere agora, as linhas integrais $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$, fronteiras dos semi-planos σ_1 e σ_2 que definem $\underline{P}$,

$$\pi_i = \{x \in R^2 / a^i \cdot x = b_i\}$$

Como foi visto acima, pode-se determinar $\underline{x^i}$, $i = 1, 2,$ soluções de

$$a^i \cdot x = b_i$$

e a partir daí, escrever equivalentemente

$$a^i \cdot (x - x^i) = 0$$

Dessa forma, pelo lema V - 1, $I(\pi_i)$ é o conjunto de pontos inteiros, expressos como

$$x^i + k_i T a^i \,, \qquad k_i \in Z$$

Agora, note que pontos inteiros de $I(\pi_1)$, satisfazem a desigualdade de $a^2 . x \leq b$ e daí, são pontos de $I(P)$.

Afirmação 1

$I(\pi_1) \cap I(P)$ é o conjunto de pontos inteiros, expressíveis como

$$x^1 - k_1 T a^1$$

$$k_1 \leq \left\lfloor \frac{b_2 - a^2 . x^1}{\Delta} \right\rfloor$$

tem-se

i) $x = x^1 - k\ T a^1 \Longrightarrow x \in I(\pi_1)$. Isto pelo lema V - 1.

ii) se um ponto $x \in I(P)$, ele deve pertencer a $I(\sigma_1 \cap \sigma_2)$. Isto é, deve satisfazer ao sistema

$$a^1 . x \leq b_1$$

$$a^2 . x \leq b_2$$

No caso em ponta, $\underline{x}$ já satisfaz a primeira desigualdade.

Quanto a segunda desigualdade

$$a^2 . x = a^2 . (x^1 - k_1 T a^1) \leq b_2 \Longrightarrow a^2 . x^1 - k_1 [a^2 . Ta^1] \leq b_2$$

$$-k_1 [a^2 . T a^1] \leq b_2 - a^2 . x^1$$

$$-k_1 [a^2{}_1, a^2{}_2) . (-a^1{}_2, a^1{}_1)] \leq b_2 - a^2 . x^1$$

$$k_1 \Delta \leq b_2 - a^2 . x^1$$

$$k_1 \leq \left\lfloor \frac{b_2 - a^2 . x^1}{\Delta} \right\rfloor, \qquad k_1 \in Z$$

Agora, note que pontos inteiros de $I(\pi_2)$, satisfazem a $a^1 . x \leq b_1$ e portanto são pontos de $I(P)$.

De forma análoga, pode-se mostrar que

Afirmação 2

$I(\pi_2) \cap I(P)$ é o conjunto de pontos inteiros, expressíveis como

$$x^2 + k_2 T a^2$$

onde

$$k_2 \leq \left\lfloor \frac{b_1 - a^1 . x^2}{\Delta} \right\rfloor$$

ambos os conjuntos $I(\pi_1) \cap I(P)$ e $I(\pi_2) \cap I(P)$ são conjuntos de fronteira de $I(P)$.

3 - Vetor normal de I(P)

Se $\underline{x^0}$ é um ponto de fronteira de $I(P)$, o vetor $\underline{\rho}$ inteiro tal que

i) $\rho . (x - x^0) \leq 0 \qquad X \in I(P)$

ii) $x^0 \pm T\rho \in I(P)$ (5 - 1)

iii) $mdc(\rho_1, \rho_2) = 1$

é um vetor normal de $I(P)$ em $\underline{x^0}$.

A fronteira desse semi-plano, a reta $\underline{\pi}$ definida por $\rho . (x - x^0) = 0$, é uma reta suporte de $I(P)$ em $\underline{x^0}$.

Essa reta contém pelo menos dois pontos inteiros, que são $\underline{x^0}$ e um dos seguintes $x^0 + T\rho$ ou $x^0 - T\rho$, em $I(P)$.

A condição, iii mdc(ρ_1, ρ_2) = 1, é incluida para que $\underline{\rho}$ esteja na sua forma canônica.

Se esta condição não fosse imposta, qualquer múltiplo inteiro de $\underline{\rho}$, também seria um vetor normal, o que não é conveniente para os propósitos aqui definidos.

Dois vetores de I(P) são evidentes.

Para cada ponto de fronteira x^1

$$x^1 \in I(\pi_1) \cap I(P)$$

$\underline{a^1}$ é um vetor normal a I(P) em $\underline{x^1}$.

Analogamente, para cada

$$x^2 \in I(\pi_2) \cap I(P)$$

$\underline{a^2}$ é um vetor normal a I(P) em $\underline{x^2}$.

Desde que, vetores normais são vetores suporte, vê-se que $\underline{x^0}$, ponto de fronteira de I(P) é um vértice, se existem dois vetores normais de I(P) em $\underline{x^0}$.

Vê-se também, que se $\underline{x^0}$ é um vértice de I(P) e $\underline{\rho}$ é um vetor normal de I(P) em $\underline{x^0}$, então

$$\rho \cdot (x - x\ ) \leq 0 \qquad X \in I(P)$$

definem um semi-plano, cuja reta fronteira, contém uma aresta de H(I(P)).

Daí, segue que o sistema de todas as desigualdades $\rho \cdot (x - x^0) \leq 0$ onde $\underline{x^0}$ é um vértice de I(P) e ρ um vetor normal de I(P) em $\underline{x^0}$, define H(I(P)).

4 - Formação de H(I(P))

Lembre que $\underline{A}$, a matriz inteira do sistema $Ax \leq b$, definindo o poliedro $\underline{P}$, é uma transformação linear do R^2 no R^2.

Uma vez que $\Delta \neq 0$, $\underline{A}$ é não-singular e assim tem uma inversa $\underline{A^{-1}}$, dada por

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Note, que A^{-1}, em geral, não é uma matriz inteira.

Agora, seja $X \subseteq R^2$.

O conjunto imagem de $\underline{X}$ através da transformação $\underline{A}$ é

$$X^* = \{ y \in R \,/ y = Ax,\ x \in X\}$$

uma vez que

$$P = \{x \in R^2 / Ax \leq b\}$$

segue que

$$P^* = \{ y \in R \,/ y \leq b\}$$

e se $M(A)$ denota o conjunto de todas as combinações inteiras de colunas de $\underline{A}$, então

$$I(P)^* = \{y \in M(A) / y \leq b\}$$

— A transformação $\underline{A}$, preserva a operação formação da envoltória convexa de $I(P)$.

Isto é ilustrado no diagrama abaixo

$$\begin{tikzcd}
I(P) \arrow[r, "A"] \arrow[d] & I(P)^* \arrow[d] \\
H(I(P)) \arrow[r, "A"] & H(I(P)^*)
\end{tikzcd}$$

lema V - 2

$$H(I(P))^* = H(I(P)^*)$$

prova: i) $H(I(P))^* \subseteq H(I(P)^*)$

$$y \in H(I(P))^* \Longrightarrow y = A(\lambda_0 x^0 + \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2)$$

$$1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$$

$$x^0, x^1, x^2 \in I(P)$$

daí, $y = \lambda_0 Ax^0 + \lambda_1 Ax^1 + \lambda_2 Ax^2$

$$= \lambda_0 y^0 + \lambda_1 y^1 + \lambda_2 y^2$$

onde $y^0, y^1, y^2 \in I(P)^*$

Logo $y \in H(I(P)^*)$

ii) $H(I(P)^*) \subseteq H(I(P))^*$

$$y \in H(I(P)^*) \Longrightarrow y = \lambda_0 y^0 + \lambda_1 y^1 + \lambda_2 y^2$$

$$1 = \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2$$

$$\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \geqslant 0$$

$$y^0, y^1, y^2 \in I(P)^*$$

daí, $y = \lambda_0 Ax^0 + \lambda_1 Ax^1 + \lambda_2 Ax^2$

$$x^0, x^1, x^2 \in I(P)$$

Logo $y \in H(I(P))^*$

Aqui, ocorre que se $\Delta \neq \pm 1$, $\underline{A}$ não preserva a operação de integralização.

Isto é

$$A(\overline{P}) \neq \overline{A(P)}$$

ou seja

$$(\overline{P})^* \neq \overline{(P^*)}$$

para ver isto, seja $\underline{P}^*$ definido por $y \leq b$. Desde que $y = b$, é um vértice de $\underline{P}^*$ e é um ponto inteiro, segue que P^* é integral. Isto é

$$P^* = (\overline{P^*})$$

Entretanto, se $\Delta = \pm 1$, não é verdade geral que

$$x = A^{-1}b$$

é um vértice de $\underline{P}$ que é inteiro.

Neste caso, $\underline{P}$ não é integral.

Isto é

$$P \neq \overline{P}$$

daí segue que

$$(\overline{P})^* \neq P^* = (\overline{P^*})$$

ex. V - 1

Seja $\underline{P}$ o (2, 2)-canto-poliédrico, definido por

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 23 \\ -5 \end{bmatrix}$$

a figura 5 - 1 (a), representa partes de $\underline{P}$, $I(\underline{P})$ e $H(I(P))$.

a figura 5 - 1 (b), representa partes de $\underline{P}^*$, $I(P)^*$ e $H(I(P)^*)$.

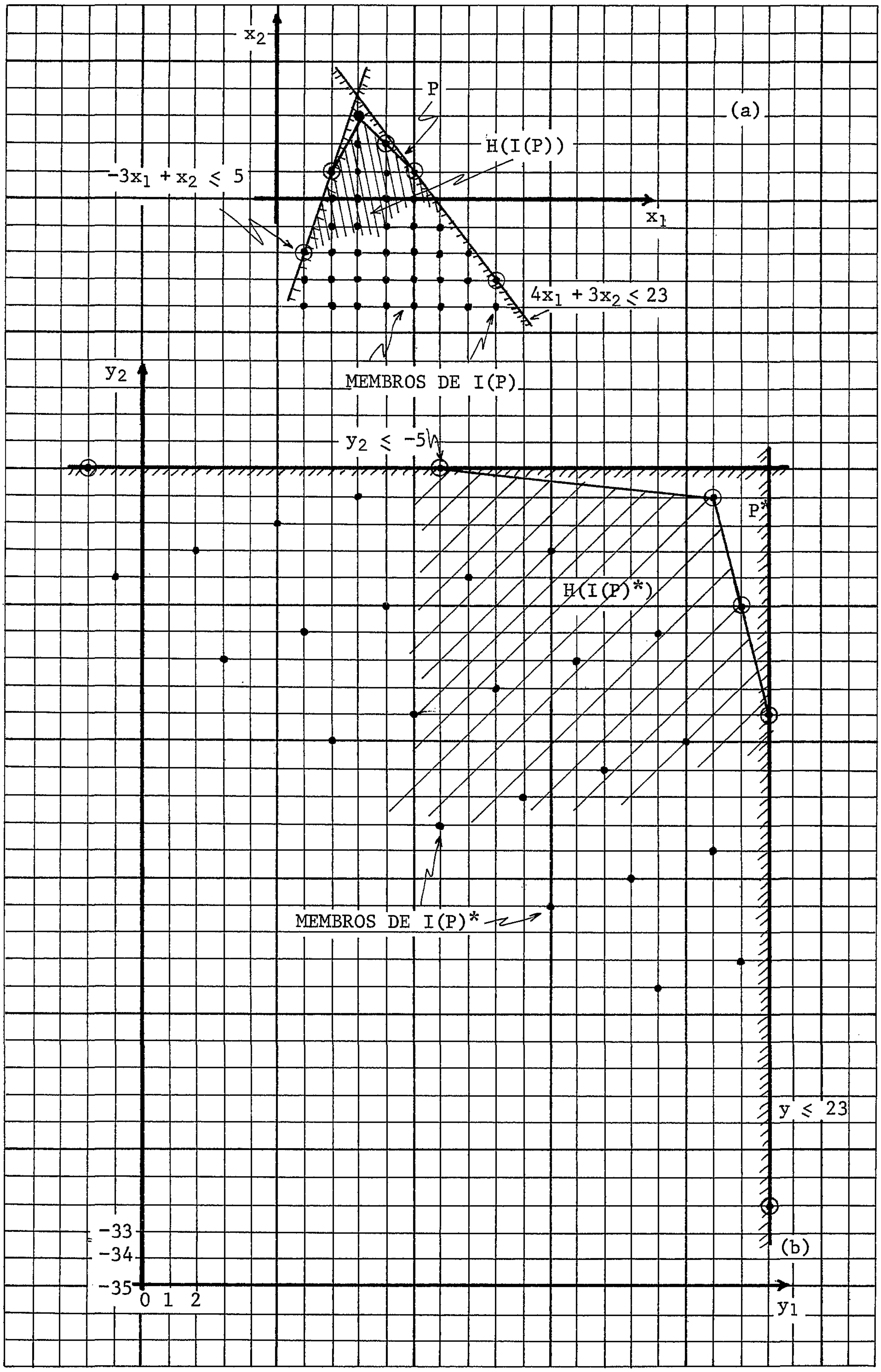

x2
P
(a)
H(I(P))
-3x1 + x2 ≤ 5
x1
4x1 + 3x2 ≤ 23
MEMBROS DE I(P)
y2
y2 ≤ -5
P*
H(I(P)*)
MEMBROS DE I(P)*
y ≤ 23
-33
-34
-35
0 1 2
(b)
y1

fig. 5 - 1

Pode ser mostrado que $\underline{A}$ preserva a estrutura de face de H(I(P)). Isto é, que a imagem de uma face de H(I(P)) é uma face de $H(I(P)^*)$ e reciprocamente.

5 - Vetor Normal de $I(P)^*$

Seja $\underline{x^0}$ um ponto de fronteira de I(P) e $\underline{\rho}$ o vetor normal a I(P) em $\underline{x^0}$ então

$$\rho \cdot (x - x^0) \leq 0 \qquad x \varepsilon I(P)$$

$$\rho \cdot A^{-1}(y - y^0) \leq 0 \tag{5 - 2}$$

pois $\qquad y = Ax \Longrightarrow x = A^{-1}y$

Isto é válido para todo $y \varepsilon I(P)^*$, onde $y^0 = Ax^0$, é um ponto de fronteira de $I(P)^*$.

Multiplicando (5 - 2) por $\Delta > 0$, vem

$$\rho \cdot (\Delta A^{-1})(y - y^0) \leq 0$$

Isto é, em termos de multiplicação matricial

$$\rho^T(\Delta A^{-1})(y - y^0) \leq 0$$

Fazendo

$$\gamma^T = \rho^T(\Delta A^{-1})$$

tem-se

$$\gamma \cdot (y - y^0) \leq 0 \tag{5 - 3}$$

Isto acontece para todo $y \varepsilon I(P)^*$.

Portanto, $\underline{\gamma}$ é um vetor normal de $I(P)^*$ em $\underline{y^0}$

O que se vê, imediatamente, é que a cada vetor normal $\underline{\gamma}$ de $I(P)^*$, está associado um vetor normal ρ de I(P), o que é dado pela equação

$$\gamma = \overline{A}\rho \tag{5 - 4}$$

onde $\bar{A} = (\Delta A^{-1})^T$

ou seja

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Vê-se que $\bar{A}$ é o cofator de $\underline{A}$.

Seja agora, $M(\bar{A})$ o grupo aditivo de todas as combinações inteiras de colunas de $\bar{A}$.

Da equação (5 - 4), $\gamma \in M(\bar{A})$.

Do que foi visto, se $\underline{y^0}$ é um ponto de fronteira de $I(P)^*$, então o vetor não nulo $\gamma \in M(\bar{A})$ é normal de $I(P)^*$ em $\underline{y^0}$, se e só se

$$\begin{aligned} &i) \ \gamma \cdot (y - y^0) \leq 0 \qquad \forall y \in I(P)^* \\ &ii) \ y^0 \pm T\gamma \in I(P)^* \qquad\qquad\qquad (5-5) \\ &iii) \ \lambda\gamma \notin M(\bar{A}) \qquad \forall \lambda \in (0,1) \end{aligned}$$

A condição $\underline{i}$, segue direto de (5 - 1)-i.

A condição $\underline{ii}$, diz que

$$y^0 \pm A\,T\rho \in I(P)^*$$

pois

$$AT = T\bar{A} \quad e \quad AT\rho = T\bar{A}\rho = T\gamma$$

Por fim, a condição $\underline{iii}$ vem do fato que $\lambda\rho$ é não-inteiro se $\lambda \in (0,1)$.

Desse modo, se ρ é um vetor inteiro que satisfaz (5 - 1) então $\gamma = \bar{A}\rho$ é um vetor inteiro que satisfaz (5 - 5) e reciprocamente.

ex. 5 - 2

Sendo $\underline{P}$ o (2, 2)-poliedro convexo, definido no exemplo V - 1, a tabela abaixo dá os vértices e vetores normais associados de I(P) e de I(P)*

I(P)	VÉRTICES	$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$
	VETORES NORMAIS	$\begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$
I(P)*	VÉRTICES	$\begin{bmatrix} 11 \\ -5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 21 \\ -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 23 \\ -14 \end{bmatrix}$
	VETORES NORMAIS	$\begin{bmatrix} 0 \\ 13 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 13 \\ 0 \end{bmatrix}$

fig. 5 - 2

Note que os vetores normais de I(P)* são imagens dos vetores normais de I(P) sob a transformação

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

6 - Átomos de um conjunto parcialmente ordenado

Nesta seção, será mostrado que os vetores normais de I(P)*, são átomos de um subconjunto de $M(\bar{A})$, parcialmente ordenado.

lema V - 3

Se $\underline{\gamma}$ é um vetor normal de I(P)* em $\underline{y}^0$,

então $\gamma \geqslant 0$

prova: se $\underline{\gamma}$ é normal, então

$$\gamma \cdot (y - y) \leqslant 0 \quad \forall\, y \in I(P)^* \qquad (5 - 7)$$

Lembre que

$$I(P)^* = \{y \in M(A)/y \leqslant b\}$$

Portanto, se $\underline{y}$ satisfaz (5 - 7), $y \in M(A)$ e $y \leqslant b$

Agora, considere $y^1 = y^0 - \begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \end{bmatrix}$.

Desde que $A^{-1}\begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \end{bmatrix}$ é um vetor inteiro, segue que $\begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \end{bmatrix} \in M(A)$.

Assim, $y^1 \in M(A)$ e desde que $y^0 \leqslant b$ e $\Delta \geqslant 0$, segue que $y^1 \leqslant b$.

Daí, $y^1 \in I(P)^*$

Fazendo $y = y^1$ em (5 - 7), obtém-se

$$\gamma_1\, \Delta \leqslant 0 \qquad \text{ou} \qquad \gamma_1 \geqslant 0$$

De modo análogo, fazendo

$$y^1 = y^0 - \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \end{bmatrix},$$

prova-se que $\gamma_2 \geqslant 0$

Isto prova o lema.

Por definição, um vetor normal $\underline{\gamma}$ de $I(P)^*$, é um elemento de $M(\overline{A})$.

Agora, seja o conjunto

$$M(\overline{A})^+ = \{z \in M(\overline{A})/z \geqslant 0\}$$

pelo lema V - 3, $\underline{\gamma}$ pertence a $M(\overline{A})^+$.

Considere o conjunto parcialmente ordenado $(M(\overline{A})^+, \leqslant)$ onde a relação ($\leqslant$) é a desigualdade usual, feita componente a componente.

O elemento $\underline{0}$, pertence a $M(\overline{A})^+$ e é o seu menor elemento.

Um <u>átomo</u> de $(M(\overline{A})^+,\ )$ é um elemento $a \in M(\overline{A})^+$ tal que $a \neq 0$ e

$$z \leqslant a \Longrightarrow z = 0 \quad \text{ou} \quad z = a$$

para todo $z \in M(\overline{A})^+$

Teorema V - 1

Se $\underline{\gamma}$ é um vetor normal de $I(P)^*$ em $\underline{y^0}$,
então, $\underline{\gamma}$ é um átomo de $(M(\overline{A})^+, \leqslant)$

prova: i) por definição, $\gamma \neq 0$ e $\gamma \in M(\overline{A})$ pelo lema V - 3, $\gamma \in M(\overline{A})^+$.

Agora, assume-se que existe $z \in M(A)^+$ distinto de <u>zero</u> e $\underline{\gamma}$, tal que $z \leqslant \gamma$.

<u>Afirmação 1</u>

$$y^0 \pm Tz \in I(P)^*$$

Tem-se

a) $Tz \in M(A)$, pois $z \in M(\overline{A})$ e $T\overline{A} = AT$

$z \in M(\overline{A})$, implica em $\underline{z}$ ser uma combinação inteira de colunas de $\overline{A}$.

$T\overline{A} = AT$, implica que $T\overline{A}$ é uma matriz, cujas colunas são combinações inteiras de colunas de A, isto é

$$AT = \left[0 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \right]$$

daí, $Tz \in M(A)$

b) y^0, $Tz \varepsilon M(A)$ $\qquad y^0 \pm Tz \varepsilon M(A)$

Agora, por (5 - 5)-ii

$$y^0 \pm T\gamma \ \varepsilon\ I(P)^*$$

Isto é

$$y^0 \pm T\gamma \leqslant b$$

Como por hipótese $0 \leqslant z \leqslant \gamma$, segue que

$$y^0 \pm Tz \leqslant b$$

Assim

$$y^0 \pm Tz \ \varepsilon\ I(P)^*$$

<u>Afirmação 2</u>

$$y^0 \pm T(\gamma - z) \ \varepsilon\ I(P)^*$$

Tem-se

a) $T(\gamma - z) \ \varepsilon\ M(A)$, pois $(\gamma - z) \ \varepsilon\ M(\bar{A})$ e $T\bar{A} = AT$ análogo, ao que foi visto na afirmação 1.

b) $y^0 \pm T(\gamma - z) \ \varepsilon\ M(A)$, pois

y^0, $T(\gamma - z) \ \varepsilon\ M(A)$

Como $\qquad y^0 \pm T\gamma \leqslant b$, segue que

$y^0 \pm T(\gamma - z) \leqslant b$

pois $\qquad 0 \leqslant \gamma - z \leqslant \gamma$, já que $z \leqslant \gamma$

daí $\qquad y^0 \pm T(\gamma - z) \ \varepsilon\ I(P)^*$

Afirmação 3

$$\gamma \,.\, (\pm Tz) = 0$$

Tem-se

a) na desigualdade $\gamma \,.\, (y - y^0) \leq 0$, fazendo $y = y^0 \pm Tz$, tem-se

$$\gamma \,.\, (y^0 \pm Tz - y^0) \leq 0$$

ou seja

$$\gamma \,.\, (\pm Tz) \leq 0$$

b) fazendo agora $y = y^0 \pm T(\gamma - z)$, segue

$$\gamma \,.\, (y^0 \pm T(\gamma - z) - y^0) = \gamma \,.\, (\pm T(\gamma - z) \leq 0$$

$$\gamma \,.\, (\pm T\gamma) - \gamma \,.\, (\pm Tz) \leq 0$$

mas $\gamma \,.\, (\pm T\gamma) = 0$

daí, $-\gamma \,.\, (\pm Tz) \leq 0$

$$\gamma \,.\, (\pm Tz) \geq 0$$

portanto, de a e b, segue que

$$\gamma \,.\, (\pm Tz) = 0$$

Ora, $\gamma \,.(\pm Tz) = 0 \Longrightarrow z = \lambda\gamma$ para alguns $\lambda \in R$.

Mas, $0 \leq z \leqslant \gamma$, $z \neq 0$ e $z \neq \gamma$

Logo, isto implica $\lambda \in (0, 1)$.

Porém, $z = \lambda\gamma$, $\lambda \in (0, 1)$ contradiz (5 - 5)-iii.

Isto leva à conclusão de que não existe $z \in M(\overline{A})^+$, distinto de 0 e γ tal que $z \leq \gamma$.

Assim, γ é um átomo de $(M(\overline{A})^+, \leq)$.

Mais adiante, será visto que existem no máximo, $\Delta + 1$ de tais ātomos.

7 - Divisão em duas dimensões

Essa divisão, será aplicada a cada dois vetores do R^2.

Será usada a seguinte notação

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

significando $a_1 > b_1$ e $a_2 < b_2$ onde as componentes, são inteiras.

Teorema V - 2

Dados $\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$, tais que

$$\begin{matrix} \\ 0 \leq \end{matrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} > 0 \\ \\ \end{matrix}$$

então, existem um único $\underline{q}$ inteiro e $\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$ também inteiro, tais que

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{matrix} \\ 0 < \end{matrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \geq 0 \\ \\ \end{matrix}$$

prova: i) existência

Seja $\underline{q}$ e $\underline{u_3}$ determinados pelo teorema da divisão, aplicado a $\underline{u_1}$ e $\underline{u_2}$,

$$u_1 = qu_2 - u_3$$

$$u_2 > u_3 \geqslant 0$$

desde que $u_1 > u_2 > 0$, segue que $\underline{q > 1}$.

Então, $\underline{v_3}$ é dado por

$$v_3 = q\,v_2 - v_1$$

$$0 \leqslant v_1 < v_2$$

desde que $q > 1$, segue que

$$0 < v_2 < v_3$$

Isto prova a existência de $\underline{q}$.

ii) unicidade

$$\underline{q} \quad e \quad \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \text{ são únicos}$$

assuma

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \qquad (5 - 8)$$

e

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = q' \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u'_3 \\ v'_3 \end{bmatrix} \qquad (5 - 9)$$

onde

$$0 < \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \geqslant 0 \quad e \quad 0 < \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{bmatrix} u'_3 \\ u'_3 \end{bmatrix} \geqslant 0 \qquad (5 - 10)$$

Subtraindo (5 - 9) de (5 - 8), segue

$$(q - q')\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u'_3 \\ v'_3 \end{bmatrix} \qquad (5 - 11)$$

de (5 - 10), segue que

$$u_2 > u_3 \geqslant 0 \qquad (5 - 12)$$

$$0 \geqslant -u'_3 > -u_2 \qquad (5 - 13)$$

Somando (5 - 12) com (5 - 13), obtém-se

$$u_2 > u_3 > u'_3 > -u_2$$

e essas desigualdades com a primeira equação de (5 - 11), dada por

$$(q - q')u_2 = u_3 - u'_3$$

implicam em

$$q - q' = 0$$

$$q = q'$$

e isto, por sua vez, acarreta

$$\begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u'_3 \\ v'_3 \end{bmatrix}$$

O teorema está provado.

Agora, dados dois pares ordenados de vetores inteiros

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

tais que

$$0 \leqslant \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} > 0$$

aplicação sucessiva do teorema V - 2, produzirá uma sequência de pares ordenados

$$0 \leq \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \cdots \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{bmatrix} u_{k-2} \\ v_{k-2} \end{bmatrix} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{bmatrix} u_{k-1} \\ v_{k-1} \end{bmatrix} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} = 0 \qquad (5 - 14)$$

A sequência (5 - 14), termina quando $u_k = 0$

Isto ocorre, em um número finito de passos, uma vez que $u_1, u_2 \ldots u_k$, é uma sequência monotônica decrescente e $\underline{u_1}$ é um inteiro positivo

O teorema V - 2, pode ser aplicado na direção reversa, isto é, a partir do par

$$\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \qquad 0 \leq \begin{bmatrix} v_3 \\ u_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{bmatrix} v_2 \\ u_2 \end{bmatrix} > 0$$

encontra-se-a $\underline{q}$ e $\begin{bmatrix} v_1 \\ u_1 \end{bmatrix}$ únicos tais que

$$\begin{bmatrix} v_3 \\ u_3 \end{bmatrix} = q \begin{bmatrix} v_2 \\ u_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} v_1 \\ u_1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad 0 \leq \begin{bmatrix} v_2 \\ u_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ u_1 \end{bmatrix} > 0$$

ex. V - 3

Seja $\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix}$

Aplicando o teorema V - 2, sucessivamente, obtém-se a sequência

$$\begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 7 \\ 8 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 5 \\ 21 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 3 \\ 34 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 47 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 107 \end{bmatrix}$$

Agora, aplicando o teorema na direção reversa, obtém-se a sequência extendida

$$\begin{bmatrix}107\\0\end{bmatrix} \begin{bmatrix}41\\1\end{bmatrix} \begin{bmatrix}16\\3\end{bmatrix} \begin{bmatrix}7\\8\end{bmatrix} \begin{bmatrix}5\\21\end{bmatrix} \begin{bmatrix}3\\34\end{bmatrix} \begin{bmatrix}1\\47\end{bmatrix} \begin{bmatrix}0\\107\end{bmatrix}$$

A sequência

$$u_1 > u_2 > \dots > u_k = 0$$

pode ser produzida pelo algoritmo de Euclides, aplicado a $\underline{u_1}$ e $\underline{u_2}$.

Daí, o conjunto de divisores, comuns a $\underline{u_1}$ e $\underline{u_2}$, é igual ao conjunto de divisores comuns a $\underline{u_i}$ e $\underline{u_i} + 1$, $i = 1, 2, \dots k - 1$.

Em particular, se $\underline{u_1}$ e $\underline{u_2}$ são primos entre si, então cada par consecutivo $\underline{u_i}$, $\underline{u_i+1}$ $i = 1, 2 \dots k - 1$, também o serão.

A sequência

$$v_k > v_{k-1} > \dots > v_1 \geq 0$$

também pode ser obtida aplicando-se o algoritmo de Euclides a $\underline{v_k}$ e $\underline{v_{k-1}}$.

Do mesmo modo, vale a observação feita acima para os $\underline{u_i}$.

Além disso, pode-se notar que quaisquer três pares ordenados, consecutivos da sequência (5 - 14), estão relacionados, pela equação

$$\begin{bmatrix}u_i\\v_i\end{bmatrix} = q_i \begin{bmatrix}u_{i+1}\\v_{i+1}\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}u_{i+2}\\v_{i+2}\end{bmatrix}, \quad i = 1, 2 \dots k - 2$$

Ademais, essa equação, pode ser usada para expressar todo elemento da sequência (5 - 14), como combinação inteira de dois pares ordenados consecutivos, quaisquer da sequência.

ex. V - 4

expressar $\begin{bmatrix}16\\3\end{bmatrix}$, como combinação inteira de $\begin{bmatrix}3\\34\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}1\\47\end{bmatrix}$

tem-se

$$\begin{bmatrix} 16 \\ 3 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 3 \\ 34 \end{bmatrix} -5 \begin{bmatrix} 1 \\ 47 \end{bmatrix}$$

8 - Geração de Átomos

Nesta seção, será mostrado como gerar o conjunto de átomos de $(M(\overline{A})^+, \leq)$.

Antes porém, serão estabelecidos alguns resultados do grupo $M(\overline{A})$.

Lembre que

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}$$

onde $\quad mdc(a_{11}, a_{12}) = 1$

$$mdc(a_{21}, a_{22}) = 1$$

e para simplicidade de notação, será escrito

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

onde $\quad \alpha_{11} = a_{22} \qquad \alpha_{21} = -a_{12}$

e

$$\alpha_{12} = -a_{21} \qquad \alpha_{22} = a_{11}$$

daí, $mdc(\alpha_{11}, \alpha_{12}) = 1$

e

$mdc(\alpha_{21}, \alpha_{22}) = 1$

Note que $(\overline{A})^{-1} = \frac{1}{\Delta} A^T$

Seja agora

$$\alpha^1 = \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{12} \end{bmatrix} \qquad e \qquad \alpha^2 = \begin{bmatrix} \alpha_{21} \\ \alpha_{22} \end{bmatrix}$$

O algoritmo de Euclides, pode ser usado para calcular dois vetores $\underline{r^1}$ e $\underline{r^2}$ tais que

$$\alpha^1 \cdot r^1 = 1 \qquad e \qquad \alpha^2 \cdot r^2 = 1$$

$$r^1 = \begin{bmatrix} r_{11} \\ r_{12} \end{bmatrix} \qquad e \qquad r^2 = \begin{bmatrix} r_{21} \\ r_{22} \end{bmatrix}$$

Considere agora, um número inteiro $\underline{g_1}$, tal que

$$g_1 \equiv \alpha^1 \cdot r^2 (\text{mod. } \Delta) \tag{5 - 15}$$

$$0 \leqslant g_1 < \Delta$$

e um inteiro $\underline{g_2}$, tal que

$$g_2 \equiv \alpha^2 \cdot r^1 (\text{mod } \Delta) \tag{5 - 16}$$

$$0 \leqslant g_2 < \Delta$$

onde $\Delta = \det \overline{A} = \det A > 0$

Os inteiros $\underline{g_1}$ e $\underline{g_2}$ são unicamente definidos embora os vetores $\underline{r^1}$ e $\underline{r^2}$ não o sejam.

Mostrar-se-á que $\underline{g_1}$ é único e de modo análogo, $\underline{g_2}$ o é-

Tem-se

$$g_1 \equiv \alpha^1 \cdot r^2 (\text{mod } \Delta)$$

$$0 \leqslant g_1 < \Delta$$

i) sejam $\underline{r^2}$ e $\underline{(r^2)'}$ duas raízes de $\alpha^2 . x = 1$

daí

$$\alpha^2 . x = \alpha^2 . r^2 \Longrightarrow \alpha^2 . (x - r^2) = 0$$

como $\underline{(r^2)'}$ também é uma raiz da equação acima, segue pelo lema V - 1 que

$$(r^2)' = r^2 + k\,T\,\alpha^2 \qquad k \in z$$

ii) suponha agora, que para estas duas raizes $\underline{r^2}$ e $\underline{(r^2)'}$, existam $\underline{g_1}$ e $\underline{g'_1}$ satisfazendo a equação (5 - 15)

Isto é

$$g_1 \equiv \alpha^1 . r^2 \pmod{\Delta}$$

e

$$g_1' \equiv \alpha^1 . (r^2)' \pmod{\Delta}$$

como

$$(r^2)' = r^2 + k\,T\,\alpha^2,$$

segue que

$$g_1' \equiv \alpha^1 . (r^2 + k\,T\,\alpha^2) \pmod{\Delta}$$

$$\equiv (\alpha^1 . r^2 + k\alpha^1 . T\alpha^2) \pmod{\Delta}$$

$$\equiv (\alpha^1 . r^2 + k\Delta) \pmod{\Delta}$$

pois $\alpha^1 . T\alpha^2 = \Delta$

Assim, $\underline{g_1}$ é único, uma vez que

$$0 \leq g_1 < \Delta$$

<u>lema V - 4</u>

$$g_1\, g_2 \equiv 1 \pmod{\Delta}$$

prova: $g_1g_2 \equiv \alpha^1 \cdot r^2)(\alpha^2 \cdot r^1) \pmod{\Delta}$

$$\equiv \left[(\alpha^1 \cdot r^1)(\alpha^2 \cdot r^2) - (\alpha^1 \cdot T\alpha^2)(r^1 \cdot Tr^2)\right] \pmod{\Delta}$$

$$\equiv \left[\, 1 - \Delta(r^1 \cdot Tr^2)\right] \pmod{\Delta}$$

$$\equiv 1 \pmod{\Delta}$$

o lema está provado

Agora, considere $\underline{(r^1)'}$ e $\underline{(r^2)'}$, soluções das equações

$$\alpha^1 \cdot x = 1$$

e

$$\alpha^2 \cdot x = 1$$

e sejam $\underline{r^1}$ e $\underline{r^2}$ duas outras soluções, tais que

$$r^1 = (r^1)' + k_1 T\alpha^1$$

$$k_1 = \left[\frac{\alpha^2 \cdot (r^1)' - g_2}{\Delta}\right]$$

e

$$r^2 = (r^2)' + k_2 T\alpha^2$$

$$k_2 = \left[\frac{g_1 - \alpha^1 \cdot (r^2)'}{\Delta}\right]$$

então

$$\alpha^1 \cdot r^1 = 1 \qquad \text{e} \qquad \alpha^1 \cdot r^2 = g_1$$

e

$$\alpha^2 \cdot r^2 = 1 \qquad \text{e} \qquad \alpha^2 \cdot r^2 = g_2$$

A partir daí, define-se duas matrizes $\underline{C_1}$ e $\underline{C_2}$.

$$C_1 = \begin{bmatrix} \alpha_{22} & r_{21} \\ -\alpha_{21} & r_{22} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad C_2 = \begin{bmatrix} r_{11} & -\alpha_{12} \\ r_{12} & \alpha_{11} \end{bmatrix}$$

Note que det $C_1 = 1$ e det $C_2 = 1$

A partir de $\underline{C_1}$ e $\underline{C_2}$, sejam $G_1 = \bar{A}C_1$ e $G_2 = \bar{A}C_2$.

Então

$$G_1 = \begin{bmatrix} \Delta & g_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & \Delta \\ g_2 & 0 \end{bmatrix} \qquad (5 - 17)$$

<u>lema V - 5</u>

$$M(\bar{A}) = M(G_1) = M(G_2)$$

prova: será mostrado que $M(\bar{A}) = M(G_1)$

i) $M(\bar{A}) \subseteq M(G_1)$

$y \in M(\bar{A}) \Longrightarrow y = \bar{A}x$ para algum vetor inteiro $\underline{x}$

$y = \bar{A}x = \bar{A}[C_1 \; C_1^{-1}] \; x = \bar{A}C_1 [C_1^{-1} \; x] =$

$= G_1 [\; C^{-1} \; x \;]$

Mas isto implica em $x \in M(G \;)$, uma vez que $\underline{C_1^{-1}}$ é uma matriz inteira, pois det $C_1 = 1$ e daí $\underline{C_1^{-1}}x$ é um vetor inteiro.

ii) $M(G \;) \subseteq M(\bar{A})$

$y \in M(G \;) \Longrightarrow y = G_1x = [\bar{A}C_1]x = \bar{A}[C_1x]$

para algum vetor inteiro $\underline{x}$.

Como C_1x é um vetor inteiro, segue que $y \in M(\bar{A})$

Logo $M(G_1) \subseteq M(\bar{A})$

e de i e ii, segue que

$$M(\overline{A}) = M(G_1).$$

De modo análogo, seria provado que $M(\overline{A}) = M(G_2)$

Assim, o lema está provado.

<u>lema V - 6</u>

$$\mathrm{mdc}(\Delta,\ g_1) = 1$$

e

$$\mathrm{mdc}(\Delta,\ g_2) = 1$$

prova: será mostrado que $\mathrm{mdc}(\Delta,\ g_1) = 1$

De (5 - 17), tem-se

$$\begin{bmatrix} 1 \\ g_2 \end{bmatrix} \varepsilon\ M(G_2)$$

mas, pelo lema V - 5 $M(G_2) = M(G_1)$

Logo

$$\begin{bmatrix} 1 \\ g_2 \end{bmatrix} \varepsilon\ M(G_1)$$

daí

$$\begin{bmatrix} 1 \\ g_2 \end{bmatrix} = G_1 x$$

para algum vetor inteiro $\underline{x}$.

Isto é

$$\begin{bmatrix} 1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta & g_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} 1 \\ g_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 + g_1 x_2 \\ 0 + x_2 \end{bmatrix}$$

e daí

$$1 = x_1 \Delta + g_1 x_2$$

donde se conclue que $\mathrm{mdc}(\Delta, g_1)/1$.

Logo

$$\mathrm{mdc}(\Delta, g_1) = 1$$

Após esses resultados preliminares, mostrar-se-á, agora, como gerar os átomos do conjunto $(M(\overline{A})^+, \leqslant)$ parcialmente ordenado.

Assume que o teorema V - 2, foi aplicado, sucessivamente, as colunas de $\underline{G_1}$, gerando a sequência de vetores, ordenada

$$0 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \cdots \begin{matrix} > \\ < \end{matrix} \begin{bmatrix} u_{k-1} \\ v_{k-1} \end{bmatrix} > \begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} = 0 \qquad (5 - 18)$$

onde

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para $k \geqslant 2$.

Por simplicidade de notação, seja $\underline{W}$ a matriz $\underline{2 \times k}$, cujas colunas, são os elementos da sequência (5 - 18). Isto é

$$W = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & \cdots & u_{k-1} & u_k \\ v_1 & v_2 & v_1 & & v_{k-1} & v_k \end{bmatrix}$$

Assim

$$W = \left[\begin{array}{c|cccc} G_1 & u_3 & \cdots & u_{k-1} & u_k \\ & v_3 & & v_{k-1} & v_k \end{array} \right]$$

Afirmação 1

w^i coluna de $\underline{W}$ é um elemento de $M(\overline{A})^+$

Note, que as equações usadas para gerar as colunas de $\underline{W}$,

$$\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix} = q_i \begin{bmatrix} u_{i+1} \\ v_{i+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_{i+2} \\ v_{i+2} \end{bmatrix}$$

permite expressar, qualquer das colunas como uma combinação inteira das colunas de $\underline{G_1}$.

Assim, $w^i \varepsilon M(G_1)$

Mas, pelo lema V - 5, segue que $w^i \varepsilon M(\overline{A})$.

Porém, $u_i \geq 0$ e $v_i \geq 0$

Logo $w^i \varepsilon M(\overline{A})^+$

Afirmação 2

$$\begin{bmatrix} u_{k-1} & u_k \\ v_{k-1} & v_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ g_2 & \Delta \end{bmatrix}$$

Tem-se

i) $u_{k-1} = 1$

Do lema V - 6, $mdc(u_1, u_2) = 1$

Além disso, foi visto que

$$mdc(u_i, u_{i+1}) = mdc(u_1, u_2)$$

para $i = 1, 2 \ldots, k - 1$.

Assim, $mdc(u_{k-1}, u_k) = 1$

Mas, $u_k = 0$ e $u_{k-1} > 0$

Logo $u_{k-1} = 1$

ii) $v_k = \Delta$

Usando as equações, que expressam as colunas de $\underline{W}$, vem

$$
\begin{aligned}
w^1 &= q_1 w^2 - w^3 \\
w^2 &= q_2 w^3 - w^4 \\
&\vdots \\
w^{k-3} &= q_{k-3}\, w^{k-2} - w^{k-1} \\
w^{k-2} &= q_{k-2}\, w^{k-1} - w^k
\end{aligned}
\qquad (5 - 19)
$$

desta última equação, segue que

$$w^k = q_{k-2} w^{k-1} - w^{k-2} \qquad (5 - 20)$$

Ora, uma vez que $u_k = 0$ e $u_{k-1} = 1$ segue que

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_k \end{bmatrix} = q_{k-2} \begin{bmatrix} 1 \\ v_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{k-2} \\ v_{k-2} \end{bmatrix}$$

daí

$$q_{k-2} = u_{k-2}$$

Então, (5 - 20) pode ser reescrito como

$$w^k = u_{k-2}\, w^{k-1} - u_{k-1}\, w^{k-2} \qquad (5 - 21)$$

Agora, usando (5 - 21) e as equações (5 - 19), tem-se

$$
\begin{aligned}
w^k &= u_{k-2} \left[q_{k-3}\, w^{k-2} - w^{k-3} \right] - u_{k-1}\, w^{k-2} \\
&= \left[q_{k-3}\, u_{k-2} - u_{k-1} \right] w^{k-2} - u_{k-2}\, w^{k-3}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= u_{k-3}\, w^{k-2} - u_{k-2}\, w^{k-3} \\
&\;\vdots \\
w^k &= u_i\, w^{i+1} - u_{i+1}\, w^i \qquad\qquad (5-22)\\
&\;\vdots \\
&= u_2 w^3 - u_3\, w^2 \\
&= u_1 w^2 - u_2\, w^1
\end{aligned}
$$

e desta última equação

$$\begin{bmatrix} u_k \\ v_k \end{bmatrix} = u_1 \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} - u_2 \begin{bmatrix} v_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$$

Isto é

$$\begin{bmatrix} 0 \\ v_k \end{bmatrix} = \Delta \begin{bmatrix} g_1 \\ 1 \end{bmatrix} - g_1 \begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Logo

$$v_k = \Delta$$

iii) $v_{k-1} = g_2$

Desde que $w^{k-1} \varepsilon M(G\ )$, tem-se que

$$w^{k-1} = G_1 x$$

para algum vetor inteiro $\underline{x}$

Assim

$$w^{k-1} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 + g_1\, x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Isto é

$$\begin{bmatrix} u_{k-1} \\ v_{k-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_1 + g_1\, x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Logo $u_{k-1} \equiv g_1 \ v_{k-1} \pmod{\Delta}$

multiplicando ambos os membros por $\underline{g_2}$

$$g_2 \ u_{k-1} \equiv g_1 \ g_2 \ v_{k-1} \pmod{\Delta}$$

daí, pelo lema V - 4 e pelo fato de que u_{k-1}, tem-se

$$v_{k-1} \equiv g_2 \pmod{\Delta}$$

mas

$$0 \leqslant v_{k-1} < \Delta$$

Assim de i, ii e iii

$$W = \left[G_1 \ \vdots \begin{matrix} u_3 & & u_{k-2} \\ & \cdots\cdots & \\ v_3 & & v_{k-2} \end{matrix} \vdots \ G_2 \right]$$

Note que, de modo análogo, W poderia ser obtida a partir de G_2, aplicando o teorema V - 2 na direção reversa.

ex. V - 5 Seja

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 103 & -46 \\ -27 & 61 \end{bmatrix}$$

Tem-se

i) $\Delta = 5041$

ii) Pelo algoritmo de Euclides

$$1 = 21(103) + 47\ (-46)$$

$$1 = 9(-27) + 4\ (61)$$

daí, iii) $g_1 \equiv [\,9(103) + 4(-46)] \pmod{5041}$

$$\equiv 743 \pmod{5041}$$

e $$g_2 \equiv [21(-27) + 47(61)] \pmod{5041}$$

$$\equiv 2300 \pmod{5041}$$

Assim de iv)

$$G_1 = \begin{bmatrix} 5041 & 743 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad G_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2300 & 5041 \end{bmatrix}$$

Logo, a matriz $\underline{W}$ é gerada usando-se $\underline{G_1}$ ou $\underline{G_2}$ e o teorema V - 2

$$W = \left[\begin{array}{cc:ccccccc:cc} 5041 & 743 & 160 & 57 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 34 & 95 & 536 & 977 & 1418 & 1859 & 2300 & 5041 \end{array}\right]$$

<u>lema V - 7</u>

Seja $$G_i = \begin{bmatrix} u_i & u_{i+1} \\ v_i & v_{i+1} \end{bmatrix} \qquad i = 1, 2 \ldots k - 1$$

então $$M(G_i) = M(\overline{A})$$

e além disso

$$\det(G_i) = \det(\overline{A})$$

prova: i) $M(G_i) \subseteq M(\overline{A})$

As equações usadas para gerar as colunas de $\underline{W}$, permitem escrever as colunas de $\underline{G_i}$ como combinações inteiras das colunas de $\underline{G_1}$.

Assim

$$M(G_i) \subseteq M(G_1)$$

Mas pelo lema V - 5

$$M(G_1) = M(\overline{A})$$

Logo

$$M(G_i) \subseteq M(\overline{A})$$

ii) Do mesmo modo, aquelas equações, permitem escrever as colunas de $\underline{G_1}$, como combinações inteiras das colunas de $M(G_i)$.

Daí,

$$M(G\ ) \subseteq M(G_i)$$

Logo, usando ainda o lema V - 5, segue que

$$M(\overline{A}) \subseteq M(G_i)$$

portanto, de $\underline{i}$ e $\underline{ii}$, segue que

$$M(G_i) = M(\overline{A})$$

iii) $\det G_i = \det \overline{A}$

Da equação (5 - 22)

$$v_k = u_i\ v_{i+1} - u_{i+1}\ v_i$$

e desde que $v_k = \Delta$, segue que

$$\det G_i = A$$

Assim, o lema está provado.

Agora, considere o conjunto de todas as combinações inteiras não negativas de colunas de $\underline{W}$,

$$M^+(W) = \{z \in J^2 / z = Wx,\ x \in J^k,\ x \geq 0\}$$

<u>lema V - 8</u>

$$M^+(W) = M(\overline{A})^+$$

prova: i) $M^{+}(W) \subseteq M(\bar{A})^{+}$

Desde que as colunas de $\underline{W}$ são elementos de $M(\bar{A})^{+}$, segue que cada combinação inteira não-negativa de colunas de $\underline{W}$, estarão em $M(\bar{A})^{+}$.

ii) $M(\bar{A})^{+} \subseteq M^{+}(W)$

Seja $z \in M(\bar{A})^{+}$

se $z = 0$, então $z \in M(W)^{+}$

suponha $z \neq 0$, isto é, $z_1 > 0$ ou $z_2 > 0$ ou ainda, ambos maiores que $\underline{0}$.

Considere o determinante

$$\Delta_i = \begin{bmatrix} z & u_i \\ z_2 & v_i \end{bmatrix}$$

$i = 1, 2 \ldots k$

para $i = 1$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} z_1 & \Delta \\ z_2 & \end{bmatrix} = -z_2\Delta \leqslant 0 \qquad (5 - 23)$$

para $i = k$

$$\Delta_k = \begin{bmatrix} z & 0 \\ z & \Delta \end{bmatrix} = z_1\Delta \geqslant 0 \qquad (5 - 24)$$

<u>Afirmação 1</u>

$$\Delta_i < \Delta_{i+1} \quad i = 1, 2 \ldots k - 1 \qquad (5 - 25)$$

para provar esta afirmação, note que

$$0 \leqslant v_i < v_{i+1} \quad \text{e}$$
$$0 \leqslant u_{i+1} < u_i$$

Assim, como $z_1 > 0$ ou $z_2 > 0$ ou ambos são maiores que zero, segue que

$$\Delta_i < \Delta_{i+1}$$

ou seja

$$\begin{vmatrix} z_1 & u_i \\ z_2 & v_i \end{vmatrix} < \begin{vmatrix} z_1 & u_{i+1} \\ z_2 & v_{i+1} \end{vmatrix} \qquad (5 - 25)$$

Agora, de (5 - 23), (5 - 24) e (5 - 25) uma das situações ocorre

a) $\Delta_i < 0$ e $\Delta_{i+1} > 0$

para algum $\underline{i}$, $i < i < k$

ou

b) $\Delta_i = 0$

para algum $\underline{i}$, $1 \leqslant i < k$

primeiramente, considere o caso $\underline{a}$.

Pelo lema V - 7 $M(G_i) = M(\overline{A})$.

Assim $z \in M(\overline{A})^+ \Longrightarrow z \in M(G_i) \Longrightarrow z = G_i x$

para algum vetor inteiro $\underline{x}$.

Afirmação 2

$$x > 0$$

Pelo lema V - 7, det $G_i = \Delta$

Aplicando a regra de CRAMER, para resolver $z = G_i x$, segue que

$$x_1 = \frac{\Delta_{i+1}}{\Delta} > 0$$

$$x_2 = \frac{-\Delta_i}{\Delta} > 0$$

Disto se conclue que $\underline{z}$ é uma combinação inteira não negativa de colunas de $\underline{G_i}$.

Portanto, nesse caso $\underline{a}$

$$M(\overline{A})^{+} \subseteq M(G_i)$$

Considere agora, o caso $\underline{b}$.

Isto é, $\Delta_i = 0$

Por raciocínio análogo ao caso $\underline{i}$, concluir-se-á que

$$z = x_1 \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix}$$

onde x_1 é inteiro e positivo.

Daí, $z \in M^{+}(W)$ e portanto

$$M(\overline{A})^{+} \subseteq M^{+}(W)$$

Logo de $\underline{i}$ e $\underline{ii}$

$$M(\overline{A})^{+} = M^{+}(W)$$

Agora, será mostrado o resultado mais interessante a que se queria chegar.

<u>Teorema V - 3</u>

O conjunto de colunas de $\underline{W}$ é o conjunto de átomos de $(M(\overline{A})^{+}, \leqslant)$

prova: i) cada coluna $\underline{w^i}$ de $\underline{W}$ é um átomo de $(M(\overline{A})^{+}, \leqslant)$

Sabe-se que $\underline{w^i} \in M(\overline{A})^{+}$ e $w^i \neq 0$ pelo lema V - 8.

Agora, assuma que existe $z \in M(\overline{A})^{+}$ tal que

$$z \neq 0, \qquad z \neq w^i \quad e \quad z \leqslant w^i$$

Ainda pelo lema V - 8, z pode ser expresso como

$$z = \sum_{i=1}^{k} c_i w^i$$

onde c_i é inteiro não-negativo com $i = 1, 2 \ldots k$.

Se $c_i = 0$, com $i = 1, 2 \ldots k$, segue que $z = 0$, o que contraria a hipótese $z \neq 0$.

Desse modo $c_j > 0$, para algum j $1 \leqslant j \leqslant k$.

Nesse caso, $w^j \leqslant z$ e daí, $w^j \leqslant w^i$, pois $z \leqslant w^i$.

Mas isto implica em

$$w^j = w^i$$

pois

$$u_1 > u_2 > \ldots > u_k$$

$$v_1 < v_2 < \ldots < v_k$$

A partir daí,

$$w^j \leqslant z \leqslant w^i \quad e \quad w^j = w^i$$

Donde se conclue que $z = w^i$, o que também contraria a hipótese.

Logo, não existe o z proposto e segue que w^i é um átomo de $(M(\overline{A}), \leqslant)$

ii) cada átomo de $(M(\overline{A}), \leqslant)$ é uma coluna de W.

Seja a um átomo de $(M(\overline{A}), \leqslant)$.

Então $a \neq 0$ e

$$z \leqslant a \qquad z = 0 \qquad ou \qquad z = a \tag{5 - 27}$$

$$z \in M(\overline{A})^+$$

pelo lema V - 8, a pode ser expresso, como

$$a = \sum_{i=1}^{k} c_i w^i$$

onde $\underline{c_i}$ é inteiro não-negativo $i = 1, 2, \ldots k$.

Desde que $a \neq 0$, existe algum $c_j > 0$ para $1 \leq j \leq k$, nessa expressão.

Daí, $w^j \leq a$.

Então, de acordo com (5 - 27)

$$w^j = 0 \quad \text{ou} \quad w^j = a$$

Ora, é sabido que $w^j \neq 0$

Logo

$$w^j = a$$

A matriz $\underline{W}$ tem $\underline{\Delta + 1}$ colunas.

Daí, tem-se a ordem estrita

$$\Delta = u_1 > u_2 > \ldots > u_k = 0$$

$$0 = v_1 < v_2 < \ldots < v_k = \Delta$$

O teorema V - 3, afirma pois, que o conjunto $(M(\overline{A}), \leq)$ tem $\underline{\Delta + 1}$ átomos.

9 - Geração de Vetores Normais e Vértices

Foi visto anteriormente, que um vetor normal $\underline{\gamma}$ de $I(P)^*$ em $\underline{y^0}$, é um átomo de $(M(\overline{A})^+, \leq)$.

Foi visto também, como gerar a matriz $\underline{W}$, cujas colunas são os átomos de $(M(\overline{A})^+, \leq)$.

Aqui, nesta seção, será mostrado como gerar vetores normais e vértices de $I(P)^*$.

De início será respondida a seguinte questão:

— Dado um ponto de fronteira $\underline{y}^i$ de $I(P)^*$, como determinar que colunas de $\underline{W}$ são vetores normais de $I(P)^*$ em y^i?

Seja $y^i \in I(P)^*$ um ponto de fronteira. Tem-se

$$y^i \in I(P)^* \Longrightarrow y^i \leqslant b$$

Agora, seja

$$z^i = b - y^i$$

então $z^i \geqslant 0$, é o vetor das folgas de $\underline{y}^i$.

Usando este vetor de folgas de $\underline{y}^i$, rotule duas colunas de $\underline{W}$, como segue

$$z_2^i$$

$$\Delta = u_1 > \ldots\ldots > u_p > \ldots\ldots > u_q > \ldots\ldots > u_k = 0$$

$$0 = v_1 < \ldots\ldots < v_p < \ldots\ldots < v_q < \ldots\ldots < v_k = \Delta$$

$$z_1^i$$

1 - Rotule a coluna $\underline{w}^p$ se $\underline{v_p}$ é o maior elemento da segunda linha de $\underline{W}$, que é menor ou igual a $\underline{z_1^i}$.

2 - Rotule a coluna $\underline{w}^q$ se $\underline{u_q}$ é o maior elemento da primeira linha de $\underline{W}$, que é menor ou igual a $\underline{z_2^i}$.

Agora, lembre que se $\underline{\gamma}$ é um vetor normal de $I(P)^*$ em $\underline{y}^i$, então

i) $\gamma \cdot (y - y^i) \leqslant 0 \qquad \forall\ y \in I(P)^*$

ii) $y^i \pm T\gamma \in I(P)^*$

Teorema V - 4

Se $\underline{y}^i$ é um ponto de fronteira de $I(P)^*$, então as colunas $\underline{w}^p$ e $\underline{w}^q$, são vetores normais de $I(P)^*$ em $\underline{y}^i$.

prova: Pelos teoremas V - 1 e V - 3, vetores normais de $I(P)^*$ em y^i, são colunas de $\underline{W}$.

Afirmação 1

existe um vetor normal γ^{i+1} de $I(P)^*$ em $\underline{y}^i$ tal que

$$y^i - T^{i+1} \varepsilon I(P)^*$$

Seja $\underline{w}$ uma coluna de $\underline{W}$.

Como $M(\overline{A})^+ = M^+(W)$, segue que

$$w = \overline{A}x$$

para algum vetor inteiro $\underline{x}$.

Daí, $Tw = T\overline{A}x = ATx$

Logo, $Tw \varepsilon M(A)$

Por outro lado, $y^i \varepsilon I(P)^*$ implica $y^i \varepsilon M(A)$.

Logo $y^i \pm Tw \varepsilon M(A)$.

Agora, note que para toda coluna $\underline{w}^j$, $j < q$,

$$y^i - Tw^j \nleq b$$

pois $y_2^i + u_j > b_2$

Logo, se $j < q$ segue que

$$y^i - Tw^j \not\in I(P)^*$$

e portanto esses $\underline{w^j}$ não são vetores normais a $I(P)^*$ em $\underline{y^i}$.

Considere agora as colunas $\underline{w^j}$ para $q \leqslant j \leqslant k$

Tem-se

$$y^i - Tw^j \in I(P)^*$$

pois

$$\left.\begin{array}{l} y^i - v_j \leqslant b_1 \\ y^i + u_j \leqslant b_2 \end{array}\right. \qquad j = q,\ q+1,\ \ldots\ k$$

Afirmação 2

as colunas w^j, $j = q+1,\ q+2, \ldots\ k$ não satisfazem a desigualdade

$$w^j \,.\, (y - y^i) \leqslant 0$$

Como $y^i - Tw^j \in I(P)^*$ para $j = q, \ldots\ k$

Seja $y = y^i - tw^q$

Tem-se

$$w^j \,.\, (y^i - tw^q) - y^i) = w^j \,.\, (-tw^q)$$

$$= \begin{vmatrix} u_q & u_j \\ v_q & v_j \end{vmatrix}$$

Note que o determinante acima é maior que zero, se $j = q+1$, $q+2 \ldots k$ e igual a zero se $j = q$.

Logo $\quad \gamma^{i+1} = w^q$

De modo análogo, prova-se que existe um outro vetor $\underline{\gamma^{i-1}}$ de $I(P)^*$

em $\underline{y}^i$ tal que

$$y^i + T\gamma^{i-1} \in I(P)^*$$

e

$$\gamma^{i-1} = w^p$$

Assim o teorema está provado.

Note que, as colunas $\underline{w}^p$ e $\underline{w}^q$, não precisam ser distintas.

Se elas são distintas, significa que $\underline{y}^i$ é um vértice de $I(P)^*$.

Se elas não são distintas, $\underline{y}^i$ é um mero ponto de fronteira de $I(P)^*$.

Se $\underline{y}^i$ é um vértice, ter-se-á as desigualdades

$$\begin{aligned} \rho^{i-1} \cdot (x - x^i) &\leqslant 0 \\ \rho^{i+1} \cdot (x - x^i) &\leqslant 0 \end{aligned} \qquad (5 - 28)$$

A partir de

$$\rho^{i\pm1} = (\overline{A})^{-1}\gamma^{i\pm1}$$

$$x^i = A^{-1}y^i$$

e o sistema de desigualdade (5 - 28) define um poliedro $\overline{P}$ tal que

$$\overline{P} = H(I(P)).$$

Nesse momento, uma nova questão é colocada:

Dado um vértice $\underline{y}^i$ de $I(P)^*$, como gerar vértices numa vizinhança de $\underline{y}^i$ se eles existirem.

Seja $\underline{y}^i$ um vértice de $I(P)^*$.

Assuma que $z^i = b - y^i$ tem sido usado para rotular duas colunas de W, $\underline{w}^p$ e $\underline{w}^q$, como foi visto.

Será mostrado aqui, como gerar vetores de folga

$$z^{i-2} = b - y^{i-2}$$

$$z^{i+2} = b - y^{i+2}$$

para $\underline{y^{i-2}}$ e $\underline{y^{i+2}}$, vértices de $I(P)^*$, vizinhos a $\underline{y^i}$. Sejam

$$z^{i-2} = z^i - \left\lfloor \frac{z_1^i}{v_p} \right\rfloor Tw^p \qquad (5 - 29)$$

e

$$z^{i+2} = z^i + \left\lfloor \frac{z_2^i}{u_q} \right\rfloor Tw^q \qquad (5 - 30)$$

se $v_p > 0$ e $u_q > 0$, isto é, $p > 1$ e $q < k$

Se $p = 1$ e $q = k$, essas folgas não interessam.

Usando $\underline{z^{i-2}}$ e $\underline{z^{i+2}}$, rotule duas novas colunas de W, como segue

$$z_2^{i-2} \qquad z_2^i \qquad z_2^{i+2}$$

$$\Delta = u_1 > \dots > u_r > \dots > u_p > \dots > u_q > \dots > u_s > \dots > u_k = 0$$

$$0 = v_1 < \dots < v_r < \dots < v_p < \dots < v_q < \dots < v_s < \dots < v_k = \Delta$$

$$z_1^{i-2} \qquad z_1^i \qquad z_1^{i+2}$$

1 - Rotule $\underline{w^r}$ se $\underline{v_r}$ é o maior elemento da segunda linha de $\underline{W}$ que é menor ou igual a z_1^{i-2}.

2 - Rotule $\underline{w^s}$ se $\underline{u_s}$ é o maior elemento da primeira linha de $\underline{W}$ que é menor ou igual a z_2^{i+2}.

<u>lema V - 9</u>

$$y^{i-2} \quad \text{e} \quad y^{i+2} \quad \text{são vértices de } I(P)^*$$

prova: Mostrar-se-á que $\underline{w^q}$ e $\underline{w^s}$ são vetores normais de $I(P)^*$ em $\underline{y^{i+2}}$ e portanto $\underline{y^{i+2}}$ é um vértice de $I(P)^*$

Tem-se

$$y^i + z^i = b$$

$$y^{i+2} + z^{i+2} = b$$

Logo $y^{i+2} + z^{i+2} = y^i + z^i$

$$y^{i+2} = y^i - \left\lfloor \frac{z_2^i}{u_q} \right\rfloor Tw^q$$

daí, $y^{i+2} \leqslant b \Longrightarrow y^{i+2} \in I(P)^*$

Agora

$$w^q \cdot (y - y^{i+2}) = w^q \cdot (y - y^i) + \left\lfloor \frac{z^i}{u_q} \right\rfloor w^q T w^q$$

Mas $w^q T w^q = 0$

Logo $w^q \cdot (y - y^{i+2}) = w^q \cdot (y - y^i) \leqslant 0$

$$y \in I(P)^*$$

Além disso, uma vez que $\left\lfloor \frac{z_2^i}{u_q} \right\rfloor \geqslant 1$,

segue que

$$y^{i+2} + Tw^q \in I(P)^*$$

Assim, $\underline{w^q}$ é um vetor normal de $I(P)^*$ em y^{i+2}.

Pelo teorema V - 4, $\underline{w^s}$ também é um vetor normal de $I(P)^*$ em y^{i+2}.

Logo $\underline{y^{i+2}}$ é um vértice de $I(P)^*$

Com raciocínio análogo, mostra-se que y^{i-2} é também um vértice de $I(P)^*$.

Agora, um aspecto importante e que não foi falado até aqui, mas que já se faz sentir:

É necessário conhecer-se, previamente, um vértice de $I(P)^*$ para se iniciar o processo.

Como resolver este problema?

Em seção anterior a esta, foi visto que $I(\pi_1) \cap I(P)$ e $I(\pi_2) \cap I(P)$ são conjuntos de pontos de fronteira de $I(P)$, onde $\underline{\pi_1}$ e $\underline{\pi_2}$ são as retas fronteiras dos semi-planos que definem P.

Além disso, foi visto que $I(\pi_1) \cap I(P)$, é o conjunto de pontos inteiros expressos como

$$x^1 - k_1 \, Ta^1$$

$$k_1 \leq \left\lfloor \frac{b_2 - a^2 \, . \, x^1}{\Delta} \right\rfloor$$

onde $\underline{x_1}$ está em $I(\pi_1)$ e é calculado com o uso do algoritmo de Euclides.

Uma caracterização análoga, é obtida para $I(\pi_2) \cap I(P)$.

Agora, considere a equação

$$y^1 = A(x^1)'$$

$$(x^1)' = x^1 - k_1 Ta^1$$

$$k_1 = \left\lfloor \frac{b_2 - a^2 \, . \, x^1}{\Delta} \right\rfloor$$

Calculando-se $z^1 = b - y^1$, é encontrado

$$z^1{}_1 = 0$$

$$z^1{}_2 < \Delta$$

Dessa forma, pelo teorema V - 4, $\underline{w^p}$ e $\underline{w^q}$, $p = 1$ e $q > 1$ são vetores normais de $I(P)^*$ em $\underline{y^1}$.

Portanto, $\underline{y^1}$ é um vértice de $I(P)^*$.

Analogamente, pode-se encontrar um vértice inicial de $I(P)^*$, a partir de $\underline{x^2}$ em $I(\pi_2) \cap I(P)$, satisfazendo $a^1 . x \leqslant b_1$.

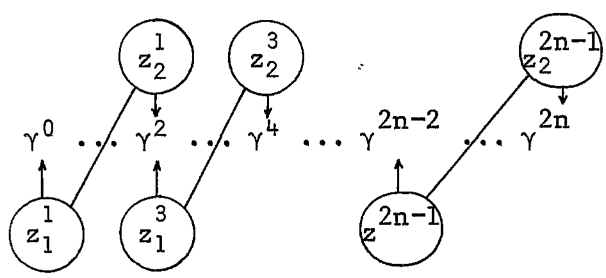
Agora, usando-se o vetor de folgas $\underline{z^1}$ do vértice $\underline{y^1}$ de $I(P)^*$, rotula-se duas colunas de $\underline{W}$, conforme o teorema V - 4.

Os vetores colunas de $\underline{W}$, rotulados, são vetores normais $\underline{\gamma^0}$ e $\underline{\gamma^2}$ de $I(P)^*$ em $\underline{y^1}$, respectivamente.

A partir daí, a equação (5 - 30) é usada para se obter novo vetor de folgas $\underline{z^3}$ que é usado para rotular nova coluna de $\underline{W}$.

Esses rótulos, a partir de $\underline{z^3}$, são $\underline{\gamma^2}$ e $\underline{\gamma^4}$ para o novo vértice $\underline{y^2}$ de $I(P)^*$ e obtido também a partir de $\underline{z^3}$.

Desse modo, o processo prossegue até que se obtenha



ex. V - 6 Suponha

$$W = \begin{bmatrix} 73 & 56 & 39 & 22 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 17 & 30 & 73 \end{bmatrix}$$

e que

$$z^1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 70 \end{bmatrix}$$

então, a matriz $\underline{W}$ rotulada será

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 70 & & & 14 & 4 & 1 & 0 \\
73 & 56 & 39 & 22 & 5 & 3 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 17 & 30 & 73 \\
0 & 1 & & & 9 & 26 & 56 &
\end{array}$$

No que

$$z^3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 70 \end{bmatrix} + \left[\frac{70}{56}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ -56 \end{bmatrix}$$

$$z^5 = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 14 \end{bmatrix} + \left[\frac{14}{5}\right] \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \end{bmatrix}$$

O processo termina, quando um vértice $\underline{y}^{2n-1}$ é encontrado, tal que $z_2^{2n-1} = 0$, o que deve ocorrer após $\underline{k}$ iterações, correspondentes às colunas de $\underline{W}$.

Se o processo foi feito da direita para a esquerda, o primeiro vetor de folgas será $\underline{z}^{-1}$ e o processo terminará quando for encontrado o vértice $\underline{y}^{-2n+1}$ em que $z_1^{-2n+1} = 0$.

No final, ter-se-á a matriz $\underline{W}$ rotulada e para cada vetor de folgas $\underline{z}^i$, haverá dois vetores normais $\underline{\gamma}^{i-1}$ e $\underline{\gamma}^{i+1}$ de $I(P)^*$ em $\underline{y}^i$.

Assim, a sequência

$$\gamma^0 \quad \gamma^2 \quad \gamma^4 \ \ldots \ \gamma^{2n}$$

$$\gamma^1 \quad \gamma^3 \ \ldots\ldots\ldots \ \gamma^{2n-1}$$

de vetores normais e vértices de $I(P)^*$ que pode ser transformada na sequência

$$\begin{array}{llll} \rho^0 & \rho^2 & \rho^4 \ \ldots\ldots & \rho^{2n} \\ x^1 & x^3 & \ldots\ldots\ldots\ldots & x^{2n-1} \end{array}$$

de vetores normais e vértices de I(P), pelas equações

$$\rho^{i\pm 1} = (\bar{A})^{-1}\gamma^{i\pm 1}$$

$$x^i = A^{-1}\ y^i$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots\ 2n-1$$

daí, tem-se o sistema

$$\begin{aligned} &\rho^0 \,.\, (x - x^1) \leq 0 \\ &\rho^2 \,.\, (x - x^1) \leq 0 \\ &\rho^4 \,.\, (x - x^3) \leq 0 \\ &\vdots \\ &\rho^{2n} .\, (x - x^{2n-1}) \leq 0 \end{aligned} \qquad (5-31)$$

Desde que $z_1^1 = 0$ e $z_2^{2n-1} = 0$, segue pelo teorema V - 4, que

$$\gamma^0 = \begin{bmatrix} \Delta \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^{2n} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta \end{bmatrix}$$

daí

$$\rho^0 = (\bar{A})^{-1}\ \gamma^0 = a^1$$

$$\rho^0 \,.\, x^1 = \frac{1}{\Delta}\gamma^0 \,.\, y^1 = y_1^1 = b_1$$

pois

$$\rho^0 \,.\, x^1 = (\bar{A})^{-1}\ \gamma^0 \,.\, A^{-1}\ y^1$$

$$= \left[(\bar{A})^{-1}\ \gamma^0\right]^T A^{-1} y^1$$

Logo, a primeira desigualdade em (5 - 31) é $a^1 \,.\, x \leq b_1$ onde $\underline{a^1}$ é a primeira linha da matriz $\underline{A}$.

Analogamente,

$$\rho^{2n} = (\bar{A})^{-1}\ \gamma^{2n} = a^2$$

e $$\rho^{2n} \cdot x^{2n-1} = \frac{1}{\Delta} \gamma^{2n} \cdot y^{2n-1} = y_2^{2n-1} = b^2$$

Portanto a última desigualdade de (5 - 31) é $a^2 \cdot x < b^2$.

Note que estas duas desigualdades, são aquelas que definem o poliedro P.

Além disso, se Q é o poliedro definido pelas desigualdades (5 - 31), então

$$Q = H(I(P))$$

Isto é mostrado, como segue

i) $I(P) \subseteq I(Q)$

cada semi-plano, cuja interseção é Q, contém I(P).

ii) $I(Q) \subseteq I(P)$

Desde que a interseção do primeiro com o último semi- plano de (5 - 31) é P, segue que, os pontos inteiros de Q são inteiros de P.

Assim, se i e ii, segue que

$$I(Q) = I(P)$$

Por outro lado, cada vértice de Q, por construção, é um ponto inteiro.

Logo Q é integral. Isto é

$$Q = H(I(Q))$$

Portanto, pelo lema I - 9

$$Q = H(I(P))$$

lema V - 10

H(I(P)) tem no máximo Δ vértices.

prova: Note que a matriz $\underline{W}$ tem no máximo $\underline{\Delta + 1}$ colunas.

Daí, rotulando as colunas de $\underline{W}$, tem-se que no máximo, Δ vértices são gerados.

Assim o lema está provado.

ex. V - 7 Seja $\underline{P}$ o poliedro definido por

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 72 \\ 2 \end{bmatrix}$$

então

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 2 \end{bmatrix} \qquad G_1 = \begin{bmatrix} 31 & 18 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 31 & 18 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 7 & 19 & 31 \end{bmatrix}$$

Um vértice inicial $\underline{(x^0)'}$, é dado por

$$(x^0)' = 72 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} -k \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$k = \left\lfloor \frac{2 - \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}}{31} \right\rfloor = -31$$

Assim

$$(x^0)' = \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix} \qquad e \qquad (z^0)' = \begin{bmatrix} 0 \\ 27 \end{bmatrix}$$

Isto, porque a partir do algoritmo de Euclides, se teve

$$2x_1 + 5x_2 = 72$$

e

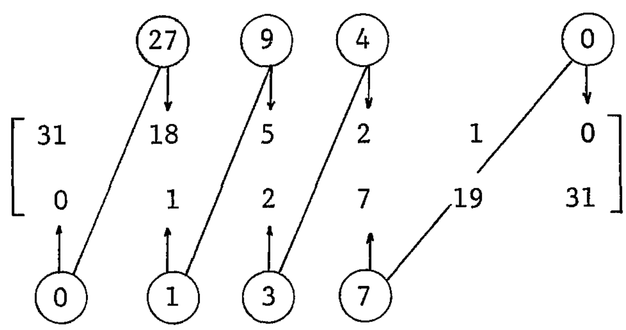
$$72 = 72 . 5 - 72 . 4$$

$$= 72 . 5 + (-2) . 72 . 2$$

Logo

$$x^0 = 72 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Agora, rotulando-se a matriz $\underline{W}$ a partir de (z)', obtem-se



O sistema de desigualdades resultantes, definindo

$$Q = H(I(P))$$

é

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \left(x - \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix} \right) \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \left(x - \begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix} \right) \leq 0 \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 72 \\ 41 \\ 11 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(x - \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix} \right) \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(x - \begin{bmatrix} 7 \\ 11 \end{bmatrix} \right) \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \left(x - \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix} \right) \leq 0$$

ex. V - 8 Seja $\underline{P}$ definido por

$$\begin{bmatrix} 488 & 216 \\ 46 & 103 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 279 \\ -317 \end{bmatrix}$$

Usando o algoritmo de Euclides, encontra-se

$$\text{mdc}(488,\ 216) = 8$$

$$\text{mdc}(\ 46,\ 103) = 1$$

desde que 8/279, a primeira desigualdade não define um semi-plano integral.

Dessa forma, integraliza-se esse semi-plano, para obter um novo poliedro $\underline{P_1}$ que é integral.

Isto é

$$61x_1 + 27x_2 \leq \left\lfloor \frac{279}{8} \right\rfloor = 34$$

e $\underline{P_1}$ é definido por

$$\begin{bmatrix} 61 & 27 \\ 46 & 103 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \\ -317 \end{bmatrix}$$

daí

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 103 & -46 \\ -27 & 61 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad G_1 = \begin{bmatrix} 5041 & 743 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$W = \begin{bmatrix} 5041 & 743 & 160 & 57 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 & 34 & 95 & 536 & 977 & 1418 & 1859 & 2300 & 5041 \end{bmatrix}$$

usando o algoritmo de Euclides, acha-se

$$x^0 = 34\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \end{bmatrix}$$

e daí $$(x^0)' = x - kTa^1$$

ou seja

$$(x^0)' = 34\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 27 \\ -61 \end{bmatrix}$$

onde

$$k = \left\lfloor \frac{-317 - \left| \begin{matrix} 46 \\ 103 \end{matrix} \right| \cdot 34 \left| \begin{matrix} 4 \\ -9 \end{matrix} \right|}{5041} \right\rfloor = 4$$

$$\text{Logo } (x^0)' = \begin{bmatrix} 28 \\ -62 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad (z^0)' = \begin{bmatrix} 0 \\ 4781 \end{bmatrix}$$

e a matriz $\underline{W}$ rotulada é

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
4781 & 323 & & & & & & & 3 & & 0 \\
\downarrow & \downarrow & & & & & & & \downarrow & & \downarrow \\
\end{array}
$$

$$
\begin{bmatrix}
5041 & 743 & 160 & 57 & 11 & 9 & 7 & 5 & 3 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 7 & 34 & 95 & 536 & 977 & 1418 & 1859 & 2300 & 5041
\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
\uparrow & \uparrow & \uparrow & & & & & & \uparrow & & \\
0 & 6 & 20 & & & & & & 1879 & &
\end{array}
$$

O sistema resultante definido H(I(P)) é:

$$\begin{bmatrix} 61 \\ 27 \end{bmatrix} \cdot \left(x - \begin{bmatrix} 28 \\ -62 \end{bmatrix} \right) \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} 9 \\ 4 \end{bmatrix} \cdot \left(x - \begin{bmatrix} 28 \\ -62 \end{bmatrix} \right) \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \left(x - \begin{bmatrix} 4 \\ -8 \end{bmatrix} \right) \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} 17 \\ 38 \end{bmatrix} \cdot \left(x - \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix} \right) \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} 46 \\ 103 \end{bmatrix} \cdot \left(x - \begin{bmatrix} -36 \\ 13 \end{bmatrix} \right) \leq 0$$

$$\begin{bmatrix} 61 & 27 \\ 9 & 4 \\ 2 & 1 \\ 17 & 38 \\ 46 & 103 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 34 \\ 4 \\ 0 \\ -118 \\ -317 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO VI

Neste capítulo, será visto como integralizar um (2, 2)-poliedro P, definido pelo sistema

$$Ax \leqslant b \qquad (6 - 1)$$

onde A é uma matriz inteira m x 2 de posto 2 e b é um vetor inteiro do R^m.

Inicialmente, se reduz P à interseção de semi-planos integrais, transformando cada desigualdade $a^i . x \leqslant b_i$ de (6 - 1), em

$$\frac{1}{d_i} a^i . x \leqslant \left\lfloor \frac{b_i}{d_i} \right\rfloor \qquad (6 - 2)$$

$$d_i = \mathrm{mdc}\left[a_{i1}, a_{i2}\right]$$

Note que, se σ_i é o semi-plano definido por $a^i . x \leqslant b_i$ e σ_i o semi-plano definido por (6 - 2), então

$$I(\sigma_i) = I(\overline{\sigma}_i) \qquad i = 1, 2 \dots m$$

assim

$$I(P) = \bigcap_{i=1}^{m} I(\sigma_i) = \bigcap_{i=1}^{m} I(\overline{\sigma}_i)$$

daí, segue que $\bigcap_{i=1}^{m} \overline{\sigma}_i$ pode ser tomado no lugar de P, sem alteração para I(P).

Daqui em diante, será assumido que este primeiro passo da integralização, já foi efetuado.

Isto é, assumir-se-á que cada linha a^i da matriz A, tem a propriedade

$$\mathrm{mdc}\left[a_{i1}, a_{i2}\right] = 1$$

Com este primeiro passo realizado, o que se pretende agora, é integralizar P, gerando todos os vértices e vetores normais de I(P).

1 - Canto suporte de I(P)

Um (2, 2)-canto poliédrico Q, é um canto suporte de I(P), se e só se,

i) $I(P) \subseteq I(Q)$

ii) I(Q) e I(P) têm pelo menos um vértice em comum.

No que segue, mostra-se como obter um canto suporte inicial de I(P).

A partir daí, cantos suporte serão usados para gerar vértices, vetores normais e outros cantos suporte de I(P).

Dantzig[5], mostra como encontrar um vértice v de P. Associado a este vértice, está um subsistema de duas desigualdades $Cx \leqslant d$ de $Ax \leqslant b$ tal que

i) $\det C \neq 0$

ii) $v = C^{-1}d$

iii) Q é o canto poliedrico definido por $Cx \leqslant d$ e $I(P) \leqslant I(Q)$.

Aplicando o método visto no capítulo anterior; a Q , obtem-se a sequência

$$\rho^0 \quad \rho^2 \quad \rho^4 \ \dots \ \rho^{2n}$$

$$x^1 \quad x^3 \ \dots \ x^{2n-1}$$

de vetores normais e vértices de I(Q).

Afirmação 1

Na sequência acima, se $x^i \in I(P)$ para algum i, $i = 1, 3 \dots 2n-1$, então

$$x^i \text{ é vértice de } I(P).$$

Tem-se

Isto é claro, pois

$$\rho^{i \pm 1} . (x - x^i) \leqslant 0 \quad \forall x \in I(Q)$$

mas

$$I(P) \subseteq I(Q)$$

Logo

$$\rho^{i \pm 1} . (x - x^i) \leqslant 0 \quad \forall x \quad I(P)$$

assim, $\underline{x^i}$ é vértice de I(P) e de I(Q).

Portanto, $\underline{Q}$ é um canto suporte de I(P).

Afirmação 2

Se $x^i \notin I(P)$, $i = 1, 3 \ldots 2n-1$, então

i) $I(P) = \emptyset$

ou

ii) P intercepta a fronteira de H(I(Q)) em uma única aresta de

$\overline{Q} = H(I(Q))$

Veja a figura da página seguinte.

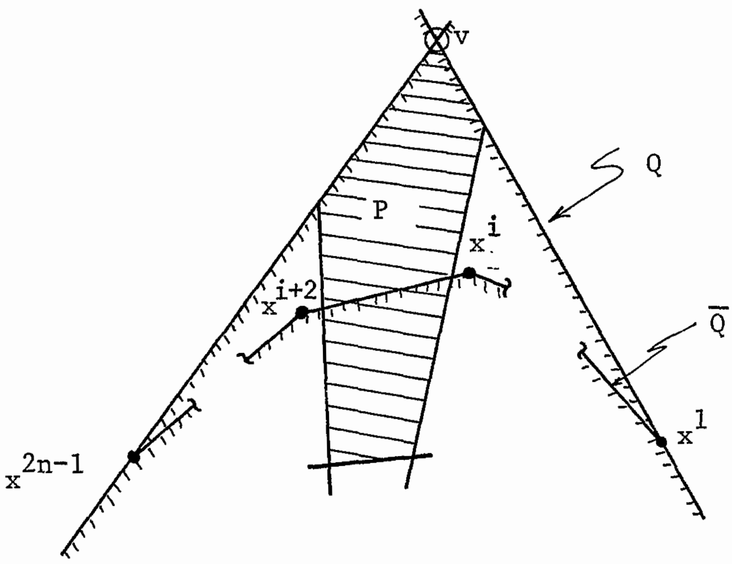


fig. 6 - 1

Note que, se $x^i \notin I(P)$, então $\underline{P}$ intercepta ou não a fronteira de $\overline{Q}$

i) Suponha que P não intercepta a fronteira de $\overline{Q}$.

Neste caso, desde que $v \in P$ e $\underline{P}$ é convexo, segue que $\underline{P}$ está totalmente contido em $Q - \overline{Q}$.

Daí, $I(P) = \emptyset$ e portanto $\overline{P} = \emptyset$

ii) Suponha agora, que $\underline{P}$ intercepta a fronteira de $\overline{Q}$.

seja

$$e^i = \{x \in R^2/x = x^i + \lambda[x^{i+} - x^i], \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$$

$i = 1, 3 \ldots 2n-3$, uma aresta de $\overline{Q}$.

primeiramente, note que nenhum dos dois conjuntos

$$\{x \in R^2/x = x^1 + \lambda[x^1 - v], \lambda \geqslant 0\}$$

e

$$\{x \in R^2/x = x^{2n-1}\lambda[x^{2n-1} - v], \lambda \geqslant 0\}$$

contém todos os pontos em P. Pois se isto acontecesse, ter-se-ia

$$x^1 \in P \quad \text{ou} \quad x^{2n-1} \in P$$

uma vez que $v \in \underline{P}$ e $\underline{P}$ é convexo. Mas isto contraria a hipótese $x^i \notin I(P)$.

Suponha agora, que duas arestas $\underline{e^i}$ e $\underline{e^j}$ $i < j$; de $\overline{Q}$, contenham ambas pontos em P.

Daí, uma vez que $\underline{P}$ é convexo, ter-se-á que

$$x^{i+2},\ x^{i+4} \ldots x^j \in I(P)$$

o que também contraria $x^i \notin I(P)$

Logo, conclue-se que a interseção de $\underline{P}$ com a fronteira de $\overline{Q}$, está contida exatamente em uma aresta $\underline{e^i}$ de $\overline{Q}$.

A partir desses dois resultados, forma-se um novo (2, 2)-poliedro $\underline{P}^1$, adicionando-se a desigualdade

$$\rho^{i+1}.(x - x^i) \leqslant 0$$

ao sistema $Ax \leqslant b$ e desligando o subsistema $Cx \leqslant d$.

Pode-se notar, que $\underline{P - P^1}$ está totalmente contido em $\underline{Q - \overline{Q}}$ e portanto não contém pontos inteiros de $\underline{P}$, uma vez que $I(P) \subseteq I(Q)$.

Desse modo, $I(P) = I(P^1)$ e foi possível reduzir o número de desigualdade definindo $\underline{P}$ sem alterar $I(P)$. Computacionalmente, para cada vértice x^i, este procedimento é implementado como segue

i) Calcule os vetores de folgas

$$Z^i = b - Ax^i$$

$$i = 1, 3 \ldots 2n - 1$$

ii) Se $Z^i \geqslant 0$, para algum $\underline{i}$, então $x^i \in I(P)$ e $x^i \in I(Q)$.
Logo $\underline{x^i}$ é um vértice comum e daí, $\underline{Q}$ é um <u>canto suporte</u> de $I(P)$.
PARE

iii) Se $Z^i \ngeq 0$, então $x^i \notin I(P)$

$i = 1, 3 \ldots 2n-1$

nesse caso, calcule $\underline{\lambda}$ tal que

$$z^i + \lambda\left[z^{i+2} - z^i\right] \geqslant 0 \qquad (6 - 3)$$

$$0 \leqslant \lambda \leqslant 1$$

Vê-se que (6 - 3) tem solução, se e só se, $\underline{P}$ intercepta a fronteira de $\underline{\bar{Q}}$ em uma aresta $\underline{e^i}$

Se não existe uma solução para (6 - 3), então $I(P) = \emptyset$ PARE

Caso exista

iv) Forme o novo (2, 2)-poliedro P^1, adicionando a desigualdade

$$\rho^{i+1}.(x - x^i) \leqslant 0$$

ao sistema $Ax \leqslant b$ e abandone $Cx \leqslant d$.

v) Aplique o processo tantas vezes quantas for preciso para obter:

a) um canto suporte de $I(P)$

ou

b) $I(P) = \emptyset$

ou

c) um (2, 2)-poliedro P^k definido por $\underline{m-k}$ desigualdades tais que

$$I(P^k) = I(P)$$

O processo descrito acima, termina, se observadas as duas regras de paradas já vistas, ou então se após $\underline{m - 2}$ aplicações do mesmo, não ocorrer nenhuma das duas. Ter-se-á aí, obtido um (2, 2)-canto poliédrico $\underline{P^{m-2}}$ de $\underline{P}$ tal que

$$I(P^{m-2}) = I(P)$$

pois por definição, P^{m-2} é um <u>canto suporte de I(P)</u>

Daqui em diante, será assumido que $I(P) \neq \emptyset$.

Assim, um canto suporte de $I(P)$ é obtido na k-ésima iteração do procedimento visto, $1 \leq k \leq m - 2$.

Agora, por conveniência, o (2, 2)-poliedro P^{k-1} obtido na (k-1)-ésima iteração, será tomado como $\underline{P}$ e o seu sistema como $Ax \leq b$.

2 - Geração de Vetores Normais e Vértices

Seja $\underline{Q}^k$ um canto suporte de $I(P)$ e $\underline{x}^i$ o vértice comum a $I(P)$ e $I(Q^k)$. Chamar-se-á ao par (Q^k, x^i) um estado do processo de integralização. Q^k é definido por duas desigualdades

$$C^k x \leq d^k$$

e será assumido $\det(C^k) > 0$

Geometricamente, serão movimentadas fronteiras de algumas desigualdades de $Ax \leq b$.

A desigualdade cuja fronteira estiver sendo movimentada, será chamada da <u>desigualdade objetivo</u>.

As desigualdades objetivo, estarão associadas aos cantos suportes $\underline{Q}^j$, onde $j = k + 1, \ldots m - 2$.

A desigualdade objetivo, associada com $\underline{Q}^k$, será

$$a^{j_k} \cdot x \leq b_{j_k}$$

e é a j_k-ésima desigualdade do sistema $Ax \leq b$.

O processo de integralização, é feito iterativamente, de estado para estado.

Assim, partindo de (Q^k, x^i), pode-se obter um seu sucessor, de modo que

i) será chamado um (+)-sucessor, se a segunda desigualdade do sistema $C^k x \leq d^k$, for a desigualdade objetivo.

ii) será um (-)-sucessor, se a primeira desigualdade de $C^k x \leq d^k$ for a desigualdade objetivo.

iii) cada sucessor é caracterizado por

a) um novo vértice

ou

b) um novo canto suporte

ou

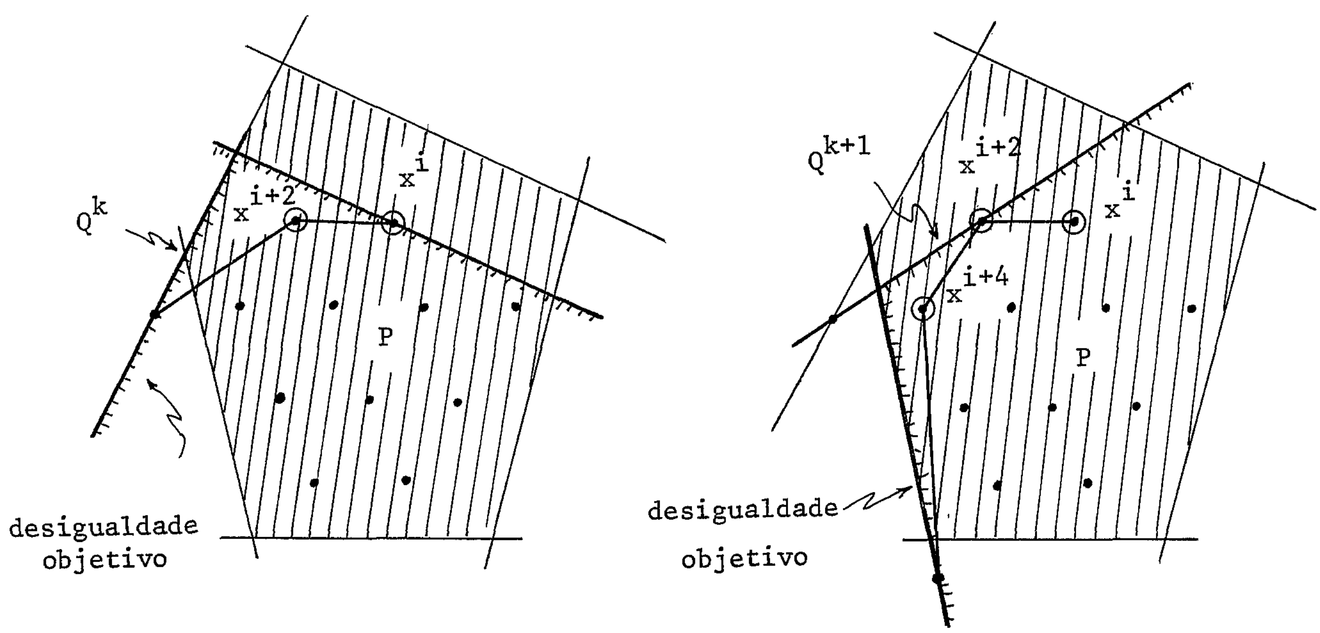
c) ambos

O diagrama abaixo, mostra essa caracterização

$$\begin{tikzcd} & (Q^k, x^i) \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\ (Q^k, x^{i\pm2}) & (Q^{k\pm1}, x^{i\pm2}) & (Q^{k\pm1}, x^i) \end{tikzcd}$$

ex. 6 - 1

As figuras abaixo 6 - 2(a) e 6-2(b), ilustram um sucessão de estados



(a) (b)

fig. 6 - 2

Nas figuras, tem-se a sucessão

$$(Q^k, x^i) \longrightarrow (Q^k, x^{i+2}) \longrightarrow (Q^{k+1}, x^{i+2}) \longrightarrow (Q^{k+1}, x^{i+4})$$

assim, as desigualdades objetivo, formam as segundas desigualdades de $C^k x \leq d^k$ e $C^{k+1} x \leq d^{k+1}$

Um estado inicial para o processo será denotado (Q^0, x^0), onde $\underline{Q^0}$ é definido por

$$C^0 x \leq d^0$$

formado por duas desigualdades de $Ax \leq b$.

Desse modo, ambos podem ser tomadas como desigualdade objetivo

$$a^{j_0} . x \leq b_{j_0}$$

O processo termina quando um estado não tiver um (+)-sucessor ou um (-)-sucessor.

Agora, será descrito o modo pelo qual se determina um ($\pm$)- sucessor de (Q^i, x^i), se ele existe.

P_1 - usando o método do capítulo 5, para se integralizar o (2, 2) canto poliédrico, calcula-se o vetor normal $\rho^{i \pm 1}$ de $I(Q^k)$ em $\underline{x^i}$

P_2 - Faz-se $\delta x^i = \mp T \quad \rho^{i \pm 1}$

$$\delta y^i = A \delta x^i$$

$$Z^i = b - Ax^i = b - y^i$$

P_3 - se todas as componentes de δy^i são não-positivas, então

$$x^i + n\delta x^i \in I(P) \qquad \forall\, n \in Z,\ n \geq 0$$

pois

$$\begin{aligned} A(x^i + n\delta x^i) &= Ax^i + nA\delta x^i \\ &= y^i + n\delta y^i \leq b \end{aligned}$$

assim, junte a desigualdade

$$\rho^{i+1}.(x - x^i) \leqslant 0$$

ao sistema que define $\overline{P}$.

onde $$\overline{P} = H(I(P))$$

O estado (Q^k, x^i) é terminal.

P_4 - se uma ou mais componentes de $\underline{\delta y}^i$ são positivas, calcule os racionais não-negativas

$$\lambda_j = \frac{Z_j^i}{\delta y_j^i}$$

para todo $\underline{j}$ tal que $\delta y_j^i > 0$

Seja $j_{k\pm 1}$ o índice dessas componentes tal que

$$\lambda_{j_{k\pm 1}} = \min \{ \lambda_j \}$$

então, três casos podem ocorrer na obtenção de um ($\pm$)-sucessor de (Q^k, x^i)

i) $j_{k\pm 1} = j_k$

ii) $j_{k\pm 1} \neq j_k$ e $\lambda_{j_{k\pm 1}} \geqslant 1$

iii) $j_{k\pm 1} \neq j_k$ e $0 \leqslant \lambda_{j_{k\pm 1}} < 1$

P_5 - se $j_{k\pm 1} = j_k$ então $\lambda_{j_k} \geqslant 1$

pois, $$y^i_{j_k} + \delta y^i_{j_k} = a^{j_k} . x^i + a^{j_k} . T \rho^{i\pm 1} \leqslant b_{j_k}$$

e $\quad y^i_{j_k} + z^i_{j_k} = b_{j_k}$

Daí
$$z^i_{j_k} \geqslant \delta y^i_{j_k} \Longrightarrow \lambda_{j_k} \geqslant 1$$

Agora, desde que $x^i + \delta x^i \in I(P)$, segue que ρ^{i+1} é um vetor normal de I(P) em $\underline{x}^i$.

Com este resultado, junta-se ao sistema definido $\overline{P}$, a desigualdade

$$\rho^{i\pm 1}.(x - x^i) \leqslant 0$$

Agora, seja

$$x^{i\pm 2} = x^i + \lfloor \lambda_{j_k} \rfloor \delta x^i$$

<u>Afirmação</u>

$$x^{i\pm 2} \text{ é um vértice comum a } I(Q^k) \text{ e } I(P)$$

Tem-se

i) $x^{i\pm 2} \in I(Q^k)$

imediato, pois

$$a^{j_k} . x^{i\pm 2} = a^{j_k} . (x^i + \lfloor \lambda_{j_k} \rfloor \delta x^i) =$$

$$= a^{j_k} . x^i + \lfloor \lambda_{j_k} \rfloor a^{j_k} . \delta x^i \leqslant b_{j_k}$$

ii) $x^{i\pm 2}$ é ponto de fronteira de $I(Q^k)$

Isto é verdade, pois pelo lema 5 - 1 $x^{i\pm 2}$ satisfaz a equação

$$\rho^{i\pm 1} .(x - x^i) = 0$$

iii) $x^{i\pm 2}$ é vértice de $I(Q^k)$

para mostrar este fato, considere o vetor

$$x = x^i + (\lfloor\lambda_{j_k}\rfloor + 1)\delta x^i$$

Tem-se

$$Ax = A[x^i + (\lfloor\lambda_{j_k}\rfloor + 1)\ x^i]$$

$$= Ax^i + \lfloor\lambda_{j_k}\rfloor A\delta x^i + A\delta x^i$$

$$= y^i + \lfloor\lambda_{j_k}\rfloor\delta y^i + \delta y^i$$

Note que $y^i + Z^i = b$

e $$y^i + \lfloor\lambda_{j_k}\rfloor\delta y^i \leq b$$

como $\delta y^i_j > 0$ por hipótese.

Segue que

$$y^i + \lfloor\lambda_{j_k}\rfloor\delta y^i + y^i \nleq b$$

e portanto $x \notin I(Q^k)$

Desse modo $\lfloor\lambda_{j_k}\rfloor$ é o maior inteiro tal que $x^{i\pm 2} \in I(Q^k)$
Logo $x^{i\pm 2}$ é vértice de $I(Q^k)$

Note que para $\theta = 0, 1 \ldots(\lfloor\lambda_{j_k}\rfloor - 1)$, os pontos obtidos serão meros pontos de fronteira.

Provar que $x^{i\pm 2}$ é vértice de $I(P)$, é bastante mostrar que $x^{i\pm 2} \in I(P)$ e usar o fato de $I(P) \subseteq I(Q^k)$ ou fazer prova análoga a anterior.

No item iii daquela prova, tem-se

$$x^{i\pm 2} \in I(P)$$

como ele é vértice de $I(Q^k)$ e $I(Q^k) \geq I(P)$ segue que $x^{i \pm 2}$ é vértice de $I(P)$.

Toma-se $(Q^k, x^{i \pm 2})$ como $(\pm)$-sucessor de (Q^k, x^i).

P_6 - $j_{k \pm 1} \neq$ e $\lambda_{j_{k \pm 1}} \geq 1$

Neste caso, desde que $x^i + \delta x^i \in I(P)$, segue que $\rho^{i \pm 1}$ é um vetor normal de $I(P)$ em x^i

Assim, junta-se a desigualdade

$$\rho^{i \pm 1} . (x - x^i) \leq 0$$

ao sistema de desigualdade definindo $\overline{P}$.

Agora, seja

$$x^{i \pm 2} = x^i + \lfloor \lambda_{j_{k \pm 1}} \rfloor \delta x^i$$

e seja $Q^{k \pm 1}$ o (2, 2) canto poliédrico, definido por

$$\rho^{i \pm 1} .(x - x^i) \leq 0$$

$$a^{j_{k \pm 1}} . x \leq b_{j_{k \pm 1}}$$

onde $a^{j_{k \pm 1}} x \leq b_{j_{k \pm 1}}$ é a desigualdade objetivo, tomada de $Ax \leq b$.

Vê-se que $I(P) \subseteq I(Q^{k \pm 1})$ e com prova similar a anterior que $x^{i \pm 2}$ é um vértice comum a $I(Q^{k \pm 1})$ e $I(P)$.

Daí, $Q^{k \pm 1}$ é um canto suporte de $I(P)$.

Aqui, toma-se $(Q^{k \pm 1}, x^{i \pm 1})$ como $(\pm)$-sucessor de (Q^k, x^i)

P_7 - $j_{k \pm 1} \neq j_k$ e $0 \leq \lambda_{j_{k \pm 1}} < 1$

Neste caso, $x^i + \delta x^i \notin I(P)$ e portanto, não se obtém um vértice novo.

Seja $Q^{k\pm 1}$ o (2, 2)-canto poliédrico definido por

$$\rho^{i\pm 1} \cdot (x - x^i) \leq 0$$

$$a^{j_{k\pm 1}} \cdot x \leq b_{j_{k\pm 1}}$$

onde a segunda desigualdade é a nova desigualdade objetivo, tomada de $Ax \leq b$.

Vê-se que $I(P) \leq I(Q^{k\pm 1})$ e que x^i é um vértice comum a ambos e $(a^{k\pm 1}, x^i)$ é o sucessor de (Q^k, x^i).

3 - Processo de Integralização

Começando por um estado inicial (a^0, x^0), a sequência $\underline{S}^+$ de (+)-sucessores é gerada, até que um estado (Q^k, x^{2n}) é obtido tal que

i) $n \geq 2$ e $x^{2n} = x^0$

ou

ii) (Q^k, x^{2n}) é um estado terminal, isto é, não tem sucessor

Se (Q^k, x^{2n}) é um estado terminal, então, começando por (Q^0, x^0), a sequência $\underline{S}^-$ de (-)-sucessores é gerada e um estado terminal (Q^{-k}, x^{-2n}) é obtido.

No caso i, a sequência $\underline{S}^+$ é caracterizada por n vértices distintos de $I(P)$, x^0, x^2, ... x^{2n-2} e retorna a $\underline{x}^0$.

Se $n > 2$, então as desigualdades geradas

$$\rho^{i\pm 1} \cdot (x - x^i) \leq 0$$

$i = 0, 2 \ldots 2n-2$, definem um (2, 2)-poliedro $\overline{P}$ com n vértices, sendo $\overline{P}$ um poliedro limitado. $\overline{P}$ está contido em P portanto $I(\overline{P}) \subseteq I(P)$.

Além disso, desde que

$$\rho^{i\pm 1} . (x - x^i) \leqslant 0 \qquad \forall x \in I(P)$$

seque que $$I(P) \subseteq I(\overline{P})$$

Como cada vértice de $I(\overline{P})$ é um ponto inteiro então $\overline{P}$ é integral.

Logo, pelo lema I - 9

$$\overline{P} = H(I(P))$$

se $n = 2$, então $H(I(P))$ é o segmento de reta tendo $\underline{x^0}$ e $\underline{x^2}$ como extremos e apenas duas desigualdades são geradas definindo a reta contendo $H(I(P))$.

No caso ii, a sequência de $\underline{S}^+$ de estados contém $\underline{n + 1}$ vértices distintos de $I(P)$ $x^0, x^2 \ldots x^{2n}$.

Após descoberto o vértice $\underline{x^{2n}}$, ter-se-á um número infinito de pontos de fronteira de $I(P)$ e nesse caso, $\underline{P}$ é ilimitado.

Raciocínio análogo pode ser feito sobre $\underline{S}^-$, onde se obtém $\underline{n' + 1}$ vértices distintos de $I(P)$ e após o vértice $x^{-2n'}$, estará um número infinito de pontos de fronteira de $I(P)$.

Recorde a figura 5 - 1 e veja isto.

Note agora, que as desigualdades

$$\rho^{i+1}.(x - x^i) \leqslant 0 \qquad i = 0, 2, \ldots 2n$$

$$\rho^{i-1}.(x - x^i) \leqslant 0 \qquad i = 0, -2, \ldots -2n'$$

definem um (2, 2)-poliedro $\overline{P}$, ilimitado, tendo $n + n' + 1$ vértices.

Com raciocínio análogo ao do caso i, concluir-se-á que

$$\overline{P} = H(I(P))$$

Afirmação

O processo de integralização termina, quando um número finito de estados tem sido gerado.

Tem-se

Considere a sequência $\underline{S}^+$ de (+)-sucessores de um estado inicial (Q^0, x^0).

Particionando $\underline{S}^+$ em subsequências S_0^+, S_1^+, S_2^+ ... onde S_k^+, para $k = 0, 1, 2 \ldots$ consiste dos estados que têm $\underline{Q}^k$ como primeira componente e lembrando que $\underline{Q}^k$ é definido por

$$C^k x \leq d^k$$

pelo lema 5 - 10, $H(I(Q^k))$ tem no máximo $\underline{\Delta_k}$ vértices, onde $\Delta_k = |\det C^k|$.

Daí, segue que a subsequência S_k^+ , contém no máximo $\underline{\Delta_k}$ estados.

Como a cada canto suporte $\underline{Q}^k$, está associada uma desigualdade objetivo tomada do sistema $Ax \leq b$ definindo P, seja $j_0, j_1 \ldots$ os índices dessas desigualdades. Então dois casos se tem a considerar, sobre esta sequência

1 - A sequência tem um elemento repetido, isto é $j_k = j_i$ com $i < k$.

Assuma $\underline{j_k}$ ser o primeiro repetido na sequência.

Nesse caso, pode ser mostrado que $\underline{x^0}$ é um vértice de $I(Q^k)$ e daí, para algum estado de S_k^+ , (Q^k, x^{2n}) tem-se

$$x^{2n} = x^0$$

se n = 0 então I(P) consiste apenas de x^0.

se $n \geq 2$ tem-se o caso $\underline{i}$ visto acima e portanto $\underline{S_k^+}$ é uma subsequência terminal de S^+.

Desde que cada membro da sequência $j_0, j_1 \ldots j_k$ tem $\underline{m}$ valores possíveis e $\underline{j_k}$ é o primeiro repetido, segue que $k \leq m$

2 - A sequência $j_0, j_1 \ldots$ contém um elemento $\underline{j_k}$ que identifica uma desigualdade objetivo cuja linha de fronteira contém uma semi-reta que é uma aresta de P.

Neste caso, algum estado (Q^k, x^{2n}) em $\underline{S_k^+}$ é terminal como no item ii acima.

Dessa forma $\underline{S_k^+}$ é uma subsequência terminal de $\underline{S}^+$ e a sequência $j_0, j_1 \ldots j_k$ não tem repetidos.

Daí $k < m$.

Em qualquer dos dois casos, o número de subsequências $S_0^+, S_1^+ \ldots S_k^+$ em $\underline{S}^+$ é no máximo $\underline{m + 1}$

Dessa forma $\underline{S}^+$ é uma sequência finita.

Analogamente mostra-se que $\underline{S}^-$ é uma sequência finita.

Daí o processo de integralização termina quando um número finito de estados é gerado.

ex. 6 - 2 Seja $\underline{P}$ definido por

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -18 & 8 \\ -9 & 12 \\ 4 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 21 \\ 56 \\ 45 \\ 68 \end{bmatrix}$$

De início, $\underline{P}$ é reduzido à interseção de semi-planos integrais

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ -9 & 4 \\ -3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ 18 \\ 45 \\ 68 \end{bmatrix}$$

Agora, um estado inicial (Q^0, X^0), é encontrado. $\underline{Q}^0$ é definido por

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

e $\underline{x}^0$ é o vetor nulo

Nesse exemplo será gerada uma sequência S^+ de sucessores de (Q^0,x^0)

Daí as desigualdades objetivo de cada estado, serão as segundas desigualdades dos sistemas que definem os cantos-suporte $\underline{Q}^k$.

Assim, a cada iteração será formado o sistema

$$\rho^{i+1} \cdot (x - x^i) \leqslant 0$$

$$a^{j_k} \cdot x \leqslant b_{j_k}$$

e os pontos inteiros que satisfazem a equação $\rho^{i+1} . (x - x^i) = 0$ e $a^{j_k} . x \leqslant b_{j_k}$, como já foi visto, são da forma

$$x^i + k_i T \rho^{i+1} = x^i + k_i \, \delta x^i$$

onde $$k_i = \left\lfloor \frac{b_{j_k} - a^{j_k} . x^i}{\Delta} \right\rfloor$$

e $\underline{x}^i$ um ponto inteiro que satisfaz a equação acima.

Dessa forma, para o exemplo

$$\delta x^i = + T \rho^{i+1}$$

será apresentada uma tabela com $\underline{Z}^i$ e δy^i, seguida da sequência de cantos-suporte e das matrizes $\underline{W}$ rotuladas.

Na tabela, as componentes de $\underline{Z}^i$ para as quais $\underline{\lambda_j}$ é mínimo, aparecem dentro de pequenos círculos e as desigualdades

$$\rho^{i+1} . (x - x^i) \leqslant 0$$

definindo $\overline{P} = H(I(P))$ estarão em retângulos.

		z^0	δy^0	z^2	δy^2	z^4	δy^4	z^4	δy^4	z^6	δy^6
-1	0	0	-1	8	0	8	1	8	1	7	1
0	-1	0	0	0	-1	1	-3	1	-2	3	-1
-9	4	10	-9	82	4	78	21	78	17	61	13
-3	4	18	-3	42	4	38	15	38	11	27	7
4	5	45	4	13	15	8	11	8	6	2	1
8	3	68	8	4	3	1	1	1	-2	3	-5

z^8	δy^8	z^8	δy^8	z^{10}	δy^{10}	z^{12}	δy^{12}	z^{12}	δy^{12}	z^{14}	δy^{14}	z^{16}
5	5	5	2	3	1	2	4	2	1	0	0	0
5	-4	5	-1	6	0	6	3	6	2	2	1	0
35	61	35	22	13	9	4	24	4	1	2	-4	10
13	31	13	10	3	3	0	0	0	-5	10	-4	18
0	0	0	-3	3	-4	7	-31	7	-14	35	-5	45
13	-28	13	-13	26	-8	34	-41	34	-14	62	-3	68

$$Q^0 : \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad (A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} x^0 & \gamma^1 & \rho^1 & \delta x^0 \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{-x_2 \leq 0}$$

$$Q^1 = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 8 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix}0\\ 68\end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix}3 & -8\\ 1 & 0\end{bmatrix} \quad (\bar{A})^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix}0 & 8\\ -1 & 3\end{bmatrix}$$

$$W = \begin{array}{c} \begin{matrix} & 4 & 1 & \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 8 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 3 & 8 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 & & \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} x^2 & \gamma^3 & \rho^3 & \delta^2 \\ \begin{bmatrix}8\\ 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{x_1 \leqslant 8}$$

$$\begin{array}{cccc} x^4 & \gamma^5 & \rho^5 & \delta x^4 \\ \begin{bmatrix}8\\ 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\ 3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}3\\ 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-1\\ 3\end{bmatrix} \end{array}$$

$$Q^2 = \begin{bmatrix}3 & 1\\ 4 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix}25\\ 45\end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix}5 & -4\\ -1 & 3\end{bmatrix} (\bar{A})^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix}3 & 4\\ 1 & 5\end{bmatrix}$$

$$W = \begin{array}{c} \begin{matrix} & 8 & 2 & 0 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 11 & 6 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 11 \end{bmatrix} \\ \begin{matrix} 0 & 1 & 5 & \end{matrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} x^4 & \gamma^5 & \rho^5 & \delta x^4 \\ \begin{bmatrix}8\\ 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}6\\ 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{2x_1 + x_2 \leqslant 17}$$

$$\begin{array}{cccc} x^6 & \gamma^7 & \rho^7 & \delta^6 \\ \begin{bmatrix}7\\ 3\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{x_1 + x_2 \leqslant 10}$$

$$\begin{array}{cccc} x^8 & \gamma^9 & \rho^9 & \delta x^8 \\ \begin{bmatrix}5\\ 5\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}0\\ 11\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}4\\ 5\end{bmatrix} & \begin{bmatrix}-5\\ 4\end{bmatrix} \end{array}$$

$$Q^3 : \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 45 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}, \quad (\bar{A})^{-1} = \frac{1}{31} \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{array}{cccccccc} & & & 3 & 3 & & & 0 \\ \end{array}$$
$$W = \begin{bmatrix} 31 & 24 & 17 & 10 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 13 & 22 & 31 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cccccccc} 0 & & & 3 & 7 & & & \end{array}$$

x^8	γ^9	ρ^9	δx^8
$\begin{bmatrix} 5 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\boxed{x_1 + 2x_2 \leqslant 15}$$

x^{10}	γ^{11}	ρ^{11}	δx^{10}
$\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\boxed{x_2 \leqslant 6}$$

x^{12}	γ^{13}	ρ^{13}	δx^{12}
$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 31 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -4 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$Q^4 : \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 18 \\ 10 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 4 & 9 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \quad (\bar{A})^{-1} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} -3 & -9 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} & & 4 & \end{array}$$
$$W = \begin{bmatrix} 24 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 24 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cccc} 0 & & & \end{array}$$

x^{12}	γ^{13}	ρ^{13}	δx^{12}
$\begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}$

$$\boxed{-2x_1 + x_2 \leqslant 2}$$

$$Q^5 = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \quad (\overline{A})^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} x^{14} & \gamma^{15} & \rho^{15} & \delta x^{14} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\boxed{-x_1 \leq 0}$$

$$x^{16} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A sequência de (+)-sucessores está terminada por $x^{16} = x^0$ e (Q^5, x^{16}) é o estado terminal.

A figura 6 - 3 mostra $\underline{P}$ e $H(I(P))$

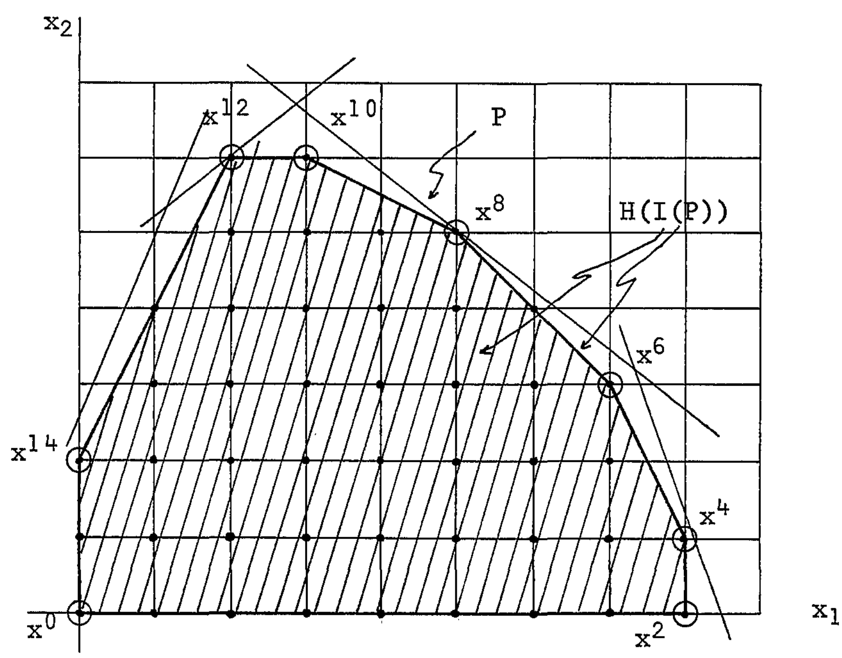


fig. 6 - 3

4 - Conclusão

O presente trabalho, como se pode ver, versa sobre poliedros convexos integrais e integralização de poliedros convexos.

Entretanto, no que tange à integralização, somente foi possível, integralizar um poliedro convexo $\underline{P}$, definido pelo sistema $Ax \leqslant b$, onde $\underline{A}$ é uma matriz $m \times 2$ de posto igual a $\underline{2}$.

O processo aqui empregado para este fim, não se permite generalizar, isto é, valer para $k > 2$, conquanto, quando da geração de vetores normais de $I(P)^*$, estes não serem átomos do conjunto parcialmente ordenado $(M(\overline{A})^+, \leqslant)$.

ex. 6 - 3 Seja $\underline{P}$ definido por

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 \\ 3 & -5 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leqslant \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

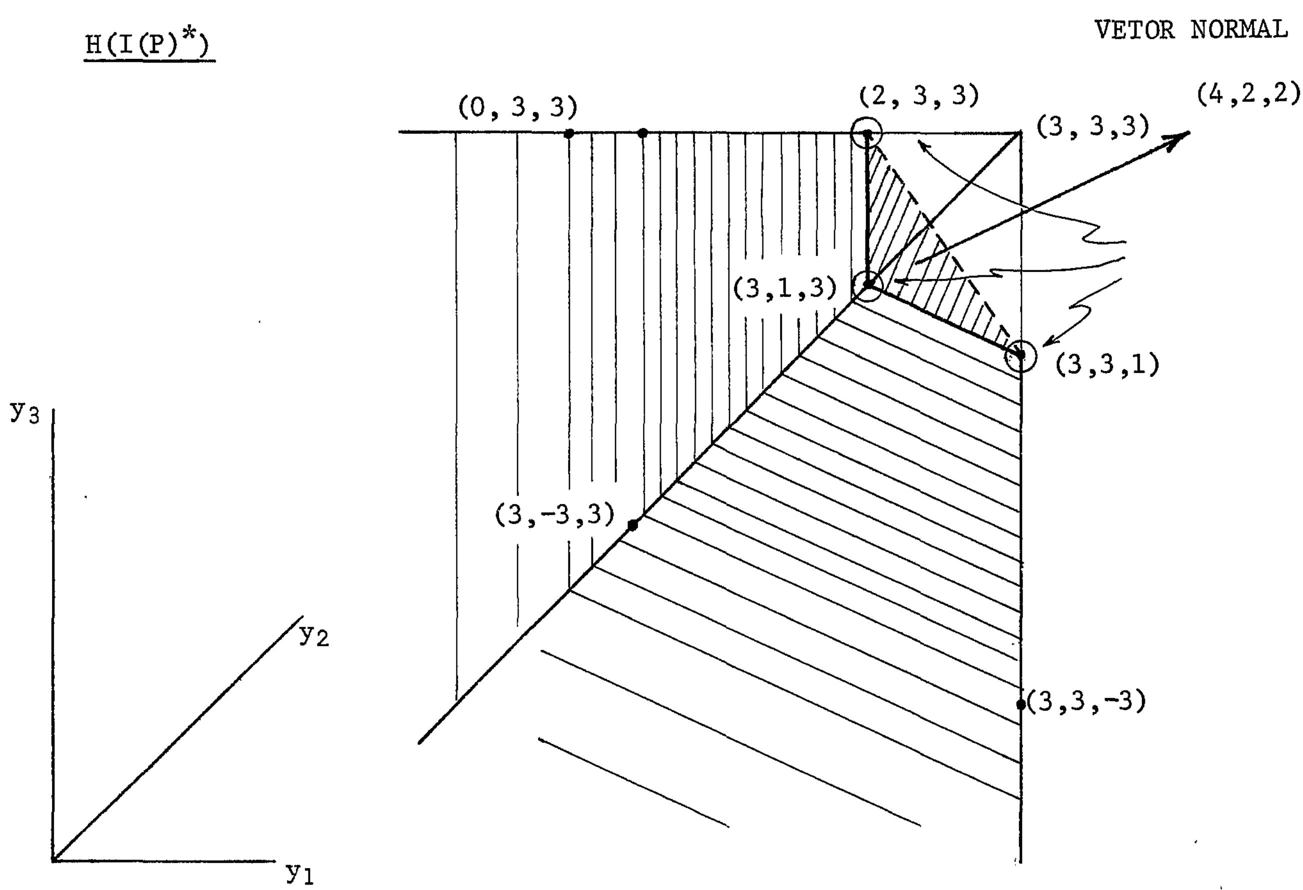


fig. 6 - 4

O vetor γ = (4, 2, 2) é um vetor normal de $I(P)^*$, nos vértices (3, 1, 3), (3, 3, 1) e (2, 3, 3).

É também de fácil verificação que $\gamma \in M(\overline{A})^+$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 6 \\ -5 & -11 & -9 \\ 9 & 19 & 17 \end{bmatrix}$$

Entretanto, os vetores (4, 0, 0) e (0, 2, 2) também pertencem a $M(\overline{A})$.

Desse modo, $\underline{\gamma}$ não é um átomo de $(M(\overline{A})^+, \leq)$, o que torna inviável a generalização do processo de integralização visto.

Todavia, formando os vetores normais de $I(P)^*$ um subconjunto de

$M(\overline{A})^{+}$, subconjunto este, finito, é de se esperar que exista um método para determiná-los, bem como, os respectivos vértices, a eles associados.

BIBLIOGRAFIA

1. Balinski, M. L. - Integer Programming: Methods, Uses, Computation - Manage Science, vol. XII nº 3, November 1965.

2. Balinski, M. L. - On Finding Integer Solutions to Linear Programs - Proceedings of the IBM Scientific Computing Symposium on Combinatorial Problems, IBM, New York, 1966.

3. Benson, R. V. - Euclidean Geometry and Convexity - Mc graw-till Book Co, New York, N. Y. 1966.

4. Bonnice, W. and Klee, V. L. - The generation of Convex Hulls -Mathematische annalen, vol. CLII, 1-29, 1963.

5. Dantzig, G. B. - Linear Programming and Extensions - Princeton University Press, Princeton, N. J., 1963.

6. Goldman, A. J. - Resolution and Separation Theorems for Polyhedral Sets, em (20).

7. Goldman, A. J. and Tucker, A. W. Polyhedral Convex Cones, em (20).

8. Gomory, R. E. - An Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs - Technical Report nº 1, Princeton - IBM Mathematics Research Project, November 1958.

9. Gomory, R. E. - On the Relation Between Integer and Non-Integer Solutions to Linear Programs - Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. LIII 260-265, 1965

10. Gomory, R. E. - Faces of an Integer Polyhedron - Proceedings of the National Academy of Sciences, vol. LVII, 16-18, 1967.

11. Gomory, R. E. - Some Polydra Related to Combinatorial Problems - Research Report RC - 2145, IBM Research Center, Yorktown Heights, N. Y., July 1968.

12. Grunbaum, B. - Convex Polytopes - Interscience Publishers, London, England, 1967.

13. Hadley, G. - Linear Algebra - Addison - Wesley Publishing Co., Reading, Mass. 1961.

14. Hoffman, A. J. - Some Recent Applications of the Theory of Linear Inequalities to Extremal Combinatorial Analysis - Combinatorial Analysis. Proceedings of the Symposia in applied Mathematics of the American Mathematical Society, vol. X, 1960.

15. Hoffman, A. J. and Krusbal, J. B. - Integral Boundary Points of Convex Polydra - em (20).

16. Hu, T. C. - On the Assymptotie Integer algorithm - Technical Summary Report nº 946, Mathematics Research Center, University of Wisconsin, 1968.

17. Hu, T. C. - Integer Programming and Network Flows - addison-wesley Publishing Co, Reading, Massachusetts, 1969.

18. Jacobson, N. - Lectures in abstract algebra - vol. II, Linear algebra, D. Van Nostrand Company, Princeton, New Jersey 1953.

19. Klee, V. - Some Characterizations of Convex Polyhedra - Acta Mathematica, vol. CII, 79-107, 1959.

20. Kuhn, H. and Tucker, A. W. (Editors), - Linear Inequalities and Related Systems, annals of Mathematics Studies nº 38 Princeton University Press, Princeton, N. J. - 1956.

21. Edelberg, M. - Integral Convex Polyhedra and an Approach to Integralization Massachusett, august 1970.

22. Rubin, D. S. - On The Unlimited Number of Faces in Integer Hulls of Linear Programs With a Single Constraint - Report 6922, Center for Mathematical Studies in Business and Economics, University of Chicago, June, 1969.

23. Shapiro, J. F. - Dynamic Programming Algorithms for the Integer Programming Problem -I: the Integer Programing Problem Viewed that a Knapsack Type Problem . Operations Research. vol. XVI, 103-121, 1968.

24. Shapiro, J. F. - Group Theoretic Algorithms, for the Integer Programming Problem II: Extension to a general algorithm - Operations Research vol. XVI, nº 15 - September - October, 1968.

25. Smith, D. A. - A Basis Theorem, for Finitely generated abelian groups - Mathematical algorithms, vol. I, 1966.

26. Weyl, H. - The Elementary Theory of Convex Polydra - Contributions to the Theory of games, annals of Mathematics Studies, nº 24, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 1950.