ANÁLISE DA INTERRELAÇÃO ENTRE TEMPO OCIOSO DAS MÁQUINAS E TEMPO DE ESPERA DAS TAREFAS EM PROBLEMAS DE SEQUENCIAMENTO

Maria Filomena de Jesus Costa

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

Claudio Thomás Bornstein

Nelson Maculan Filho

João Lizardo Hermes Araújo

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 1977

COSTA, MARIA FILOMENA DE JESUS

Análise da Interrelação entre Tempo Ocioso das Máquinas e Tempo de Espera das Tarefas em Problemas de Sequenciamento. |Rio de Janeiro| 1977.

VI, 98p. 29,7cm (COPPE/UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas, 1977).

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro. Fac. Engenharia.

1. Assunto: Problema de Sequenciamento.

I. COPPE/UFRJ II. Título (Série).

A MEUS PAIS

AGRADECIMENTOS

Ao terminar este trabalho, agradeço a Deus e a todos aqueles que de algum modo me ajudaram, especialmente a:

- Cláudio Thomás Bornstein pela excelente orientação, feita com dedicação, pelas sugestões valiosas e pela amizade que demonstrou no decorrer do trabalho.
- Nelson Maculan Filho e João Lizardo Hermes Araújo por participarem da banca.
- Aos colegas, professores e funcionários da COPPE e da Biblioteca que de alguma forma me auxiliaram.
- À CAPES pela ajuda financeira.
- A Eliana pela datilografia.
- E a minhas irmãs e os meus amigos que me incentivaram a chegar ao final deste trabalho.

RESUMO

Este trabalho aborda um problema de sequenciamento, mais especificamente, a ordenação de peças em máquinas. Inicialmente foi feita uma análise do significado do tempo ocioso das máqüinas, do tempo de espera das peças e da interrelação entre os dois, considerando n peças e duas máquinas. Foi feita uma comparação entre os dois critérios de otimização, o de minimizar o tempo de espera e o de minimizar o tempo ocioso. O trabalho é finalizado abordando-se o caso mais geral e mais ligado à prática, isto é, considerando-se diversos lotes de peças e sem restringir o número de máquinas. Neste caso, chegamos à conclusão que a minimização do tempo ocioso em cada lote leva a uma minimização do tempo de espera de todas as peças em todos os lotes, isto é, chegamos a uma coincidência entre os dois objetivos.

n/2, m/flow shop/minimizing F_{max} and $\overline{F}$/analytic methods.

ABSTRACT

This work is concerned with sequencing problems, now specifically, the problem of ordering jobs is machines. It begins with an analysis of the meaning of machine time, waiting time of jobs and the relationship between the two, restricted to the n-jobs, two-machines problem. Then we draw comparisons between two optimization criteria: minimization of waiting time and minimization of idle time.

The work ends presenting an approach of the general and more real case, by considering several groups of jobs, without restrictions on the number of machines. In this case, we come to the conclusion that the minimization of idle time for each group of jobs leads to the minimization of waiting times for all jobs in very group, that is, we get an equivalence between the two objective functions.

n/2, m/flow shop/minimizing F_{max} and $\bar{F}$/analytic methods.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

O objeto deste nosso estudo é o problema de sequenciamento, que ocorre sempre que há uma variedade de ordenações segundo as quais um número de tarefas podem ser executadas.

O problema de sequenciamento pode ser resumido da seguinte forma:

"Suponhamos que temos que produzir um determinado número de peças, sendo que cada uma precisa passar por algumas operações usando um certo número de máquinas. Para as peças é dado, por motivos tecnológicos, uma ordem na qual as operações devem ser processadas, isto é, uma ordem na qual as máquinas devem ser utilizadas. Consideraremos, inicialmente, o caso de duas máquinas onde a ordem é tal que as peças passam em primeiro lugar pela máquina 1 e depois pela máquina 2. O processamento de uma operação requer o uso de uma máquina por um tempo determinado: o tempo de processamento da operação ou tempo de processamento da peça ou tarefa. Dadas algumas funções, como tempo de espera da peça, tempo ocioso da máquina, tempo médio ou tempo máximo que uma peça permanece na fábrica, desejamos encontrar uma ordem de processamento das peças de tal forma que os tempos citados sejam minimizados".

Tal problema ocorre em diferentes circunstâncias. A terminologia aqui usada sugere que o problema trata originalmente de um contexto de produção industrial, contudo, várias outras interpretações são possíveis: peças e máquinas podem ser substituidas por pacientes e equipamentos de hospital, por classe e professores, jantares e cozinheiros, navios e estaleiros, programas e computadores ou mesmo por cidades e caixeiros viajantes.

Neste trabalho procuramos analisar a interrelação entre o tempo ocioso das máquinas e o tempo de espera das peças ou tarefas.

Diversos autores entre os quais Muller-Merbach |5| e Gutenberg |3| mencionam a aparente contradição entre estės dois critérios de otimização, sem, no entanto, se aprofundarem na análise desta contradição.

Realmente é possível encontrar casos em que a minimização do tempo ocioso das máquinas leva a grandes valores para o tempo de espera das peças ou tarefas e vice-versa. No capítulo 4 estabelecemos até mesmo um exemplo onde a sequência que minimiza os tempos ociosos é inversa à sequência que minimiza os tempos de espera.

Por outro lado, parece lógico supor que um bom aproveitamento das máquinas, isto é, a minimização do tempo ocioso acarreta, a longo prazo, que as peças tenham a menor espera possível.

Como é possível, de um lado encontrarmos casos onde os dois critérios são contraditórios e concorrentes e, por outro lado, termos uma argumentação convincente que nos leva a crer serem os dois critérios coincidentes?

É com este dilema que se ocupa o presente trabalho. Foi feita uma análise exaustiva do significado do tempo ocioso, do tempo de espera e da interrelação entre os dois e foi possível resolver e solucionar a aparente contradição.

Na prática trabalhamos sempre com lotes de peças e nos interessa a minimização de tempos de espera ao longo de um horizonte muito grande. Isto é, nos interessa a minimização dos tempos de espera para um grande número de lotes de peças. Conseguimos demonstrar que a minimização dos tempos ociosos em cada lote leva à minimização dos tempos de espera, se considerarmos todas as peças de todos os lotes dados, e se o número destes últimos for suficientemente grande.

Dentro de cada lote é que pode haver contradição, isto é, minimizando em cada lote os tempos ociosos podem ocorrer grandes tempos de espera para as peças de um determinado lote. Mas isto somente se nós nos restringirmos a um determinado lote, isto é, sem abordar o conjunto de todos os lotes e todas as peças neles contidas. Ora, mas é esta última perspectiva que na prática nos interessa.

Podemos concluir portanto, que do ponto

de vista prático e considerando diversos lotes de peças, temos a coincidência dos dois critérios de otimização.

Esta conclusão tem resultados ainda mais importantes do que resolver a aparente contradição entre os dois objetivos. Existindo a coincidência, torna-se possível a utilização dos algoritmos desenvolvidos para a minimização dos tempos ociosos, com o objetivo de minimizar o tempo de espera. Isto é particularmente importante pois existe um grande número de algoritmos que atingem o primeiro objetivo enquanto faltam algoritmos eficientes para o segundo caso.

A seguir fazemos um resumo do trabalho realizado:

No capítulo 2 estabelecemos algumas restrições que usualmente são assumidas na literatura do sequenciamento e fazemos a apresentação da nomenclatura utilizada no decorrer do trabalho. A nomenclatura usada é baseada na empregada por Conway |1|.

No capítulo 3 damos algumas definições básicas e desenvolvemos fórmulas para o tempo de espera das peças e o tempo ocioso das máquinas. Verificamos que a minimização do tempo de espera das peças equivale ao problema da minimização da soma dos tempos que as peças permanecem na fábrica. Por outro lado provamos que a minimização do tempo ocioso das máquinas é equivalente à minimização do tempo máximo de permanência das peças na fábrica (F max).

Terminamos o capítulo 3 procurando estabelecer uma relação funcional entre tempo ocioso e tempo de espera o que provamos ser impossível.

Cabe ressaltar, que nesse capítulo, consideramos somente um lote de peças e analisamos o caso de duas máquinas.

Uma vez que não conseguimos estabelecer uma relação funcional entre o tempo ocioso e o tempo de espera, o passo seguinte foi comparar os critérios de otimização. Em primeiro lugar, no capítulo 4, fazemos uma análise detalhada do teorema de Johnson que estabelece critérios de otimização (prioridade para o estabelecimento de uma sequência para o tempo ocioso no caso de duas máquinas. A seguir, também para o caso de duas máquinas, estabelecemos uma sequência que minimiza o tempo de espera para um problema especial em que as peças possuem características bem definidas.

A comparação entre os dois critérios é feita num exemplo onde fica bem clara a contradição entre eles, pois somos levados a sequências opostas no caso de seguirmos um ou outro critério. Consideramos aqui também, duas máquinas e um lote de peças.

Finalmente, no capítulo 5, passamos a considerar vários lotes de peças, chegando ao resultado mais importante do trabalho. Como foi dito, provamos, para este caso, existir a coincidência dos dois objetivos. Este resultado é atingido sem que haja restrições quanto ao número de máquinas, isto é, ele é o mais geral possível.

O trabalho é finalizado com uma bibliografia atualizada sobre a teoria do sequenciamento e suas várias abordagens.

CAPÍTULO 2

RESTRIÇÕES E SIMBOLOGIA

Neste capítulo abordaremos algumas restrições que se tornam necessárias, quanto às peças e às máquinas e também explicitaremos as variáveis usadas no nosso trabalho. A simbologia adotada foi baseada em Conway |1|.

2.1 - RESTRIÇÕES

1) O conjunto P de peças é conhecido e fixado: $P = \{1,2,..,n\}$.

2) O conjunto M de máquinas, é conhecido e fixado: $M = \{1,2\}$.

3) Todas as peças são consideradas de igual importância.

4) O tempo de processamento de cada operação é conhecido e fixado.

5) Cada operação, uma vez iniciada, precisa ser terminada sem interrupção.

6) Todas as peças estão disponíveis num mesmo tempo $t_i = 0$.

7) As máquinas começam a funcionar num mesmo tempo $t_i = 0$.

8) A ordem de processamento de cada peça por todas as máquinas é conhecida e fixada (primeiro na máquina 1 e depois na máquina 2). Esta restrição determina o que na literatura anglo-saxônica é conhecido por "flow-shop" ou "identical routing".

9) Cada operação pode ser executada somente por uma máquina da fábrica.

10) Nenhuma das duas máquinas pode processar mais do que uma peça num determinado tempo.

11) É dado um tempo finito para a execução de cada operação e o intervalo de tempo é independente da ordem na qual as operações são processadas.

12) Todas as peças podem ser processadas durante um intervalo de tempo tão grande quanto se queira, isto é, não há tempo fixado para o início do processamento ou então, não há prazo de entrega.

13) Todas as máquinas estão à disposição por um tempo indeterminado.

14) A sequência das tarefas nas diversas máquinas, é idêntica, isto é, em cada máquina temos a mesma sequência. Esta restrição é conhecida por "passing not permited".

15) Cada peça está em uma das três situações: esperando pela máquina, sendo operada por uma máquina ou ter acabado de passar pela última máquina.

16) Cada máquina está em uma das três situações: esperando por uma peça, operando uma peça ou ter terminado sua última peça.

17) O tempo requerido para transporte de peças entre as máquinas pode ser considerado nulo ou como parte do tempo de processamento na máquina seguinte.

Obviamente algumas destas suposições, ou restrições, tem consequências teóricas mais extensas que outras.

Talvez a suposição mais importante diz respeito à chegada das peças, permitindo classificar os problemas em estáticos e dinâmicos. Nos problemas estáticos todas as peças a serem ordenadas encontram-se à nossa disposição, sendo que a respeito dessas peças possuimos todos os dados necessários ao processo de otimização. Nos problemas dinâmicos temos que contar com uma constante chegada de novas peças, o que exige uma abordagem estatística do problema. Neste último caso necessitamos da teoria de filas para a resolução do problema. No presente trabalho será analisado somente o problema estático. Rinnoy Kan |7| se ocupa extensivamente com este problema.

2.2 - SIMBOLOGIA

A_i - tempo de processamento da peça i na máquina 1.

$A_{|i|}$ - tempo de processamento da i-ésima peça, isto é, da peça que ocupa a posição i na sequência, na máquina 1.

B_i - tempo de processamento da peça i na máquina 2.

$B_{|i|}$ - tempo de processamento da i-ésima peça, isto é, da peça que ocupa a posição i na sequência, na máquina 2.

W_{i1} - tempo de espera da i-ésima peça pela máquina 1.

W_{i2} - tempo de espera da i-ésima peça pela máquina 2.

$W_i = W_{i1} + W_{i2}$ → tempo total de espera da i-ésima peça.

$W = \sum_{i=1}^{n} W_i$ → tempo total de espera de todas as n peças.

R_{i1} → tempo de espera da máquina 1 pela i-ésima peça.

R_{i2} → tempo de espera da máquina 2 pela i-ésima peça.

$R_i = R_{i1} + R_{i2}$ → tempo total de espera das máquinas pela i-ésima peça.

$R = \sum_{i=1}^{n} R_i$ → tempo total de espera das máquinas pelas n peças.

C_{i1} → término da i-ésima peça na máquina 1.

C_{i2} → término da i-ésima peça na máquina 2.

F_i → tempo que a peça permanece na fábrica.

$\bar{F} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F_i \rightarrow$ tempo médio que as peças permanecem na fábrica.

$F_{max} = \max_{\forall i} \{F_i\} \rightarrow$ tempo que é gasto até que a última peça seja processada na fábrica.

$i \succ j \rightarrow$ a peça i precede a peça j.

$i \succ\succ j \rightarrow$ a peça i precede a peça j, considerando duas posições consecutivas.

Devido à restrição (6) temos que $C_{i2} = F_i$ pois $t_i = 0$.

Isto é, o tempo que a peça i permanece na fábrica é igual ao tempo de término de execução da peça na máquina 2 pois todas as peças chegam a um mesmo tempo ($t_i = 0$) na fábrica.

CAPÍTULO 3

TENTATIVA DE ESTABELECIMENTO DE UMA RELAÇÃO FUNCIONAL ENTRE R, W, $\bar{F}$ e F_{max}

Esta parte do trabalho tem como objetivo principal tentar estabelecer uma relação funcional entre R, W, $\bar{F}$ e F_{max}.

Inicialmente procuraremos encontrar fórmulas para o tempo de espera das peças (W) e para o tempo de ociosidade das máquinas (R) e estabelecer algum paralelo entre eles. A seguir, considerando já ter encontrado os valores de W e R tentaremos chegar a uma fórmula para os valores do tempo médio que as peças permanecem na fábrica ($\bar{F}$) e do tempo máximo que uma peça permanece na fábrica (F_{max}).

Terminaremos este capítulo procurando estabelecer alguma relação funcional entre W e $\bar{F}$, entre R e F_{max} e também entre W e R ou seja $\bar{F}$ e F_{max}.

3.1 - CÁLCULO DE W e R

Ilustremos primeiramente o significado de algumas das variáveis utilizadas:

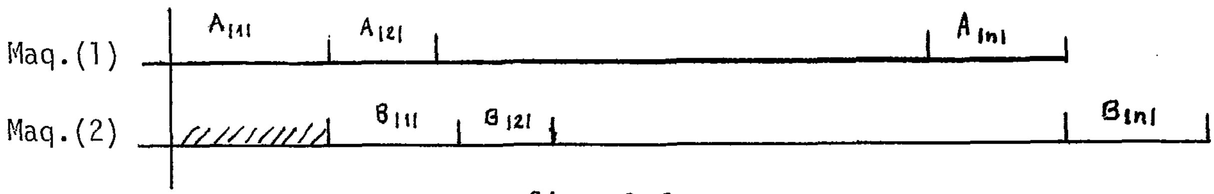

fig. 3.1

Na figura 3.1 temos por exemplo:

$A_{|2|}$ - tempo de processamento da segunda peça na máquina 1.

$B_{|1|}$ - tempo de processamento da primeira peça na máquina 2.

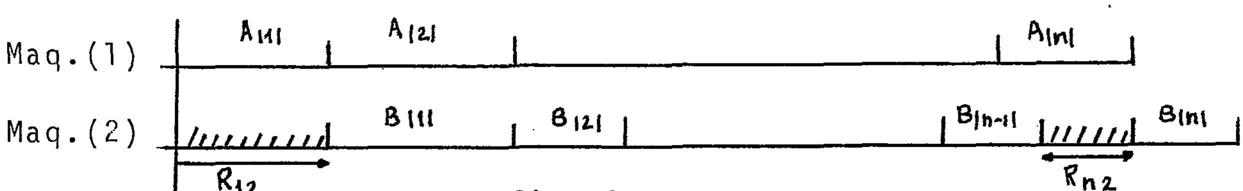

fig. 3.2

Na figura 3.2 temos por exemplo:

R_{12} - tempo de espera da máquina 2 pela primeira peça.

$R_{i1} = 0, \forall_i$, isto é, a máquina 1 não tem tempo ocioso

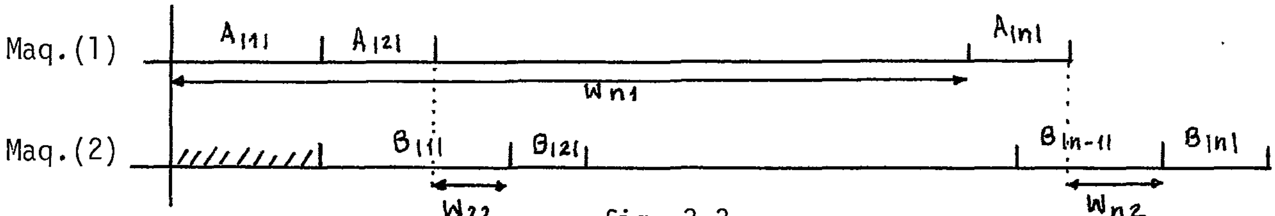

fig. 3.3

Na figura 3.3 temos por exemplo:

W_{n1} - tempo de espera das n-ésima peça pela máquina 1.

W_{22} - tempo de espera da segunda peça pela máquina 2.

3.1.1 - CÁLCULO DE W

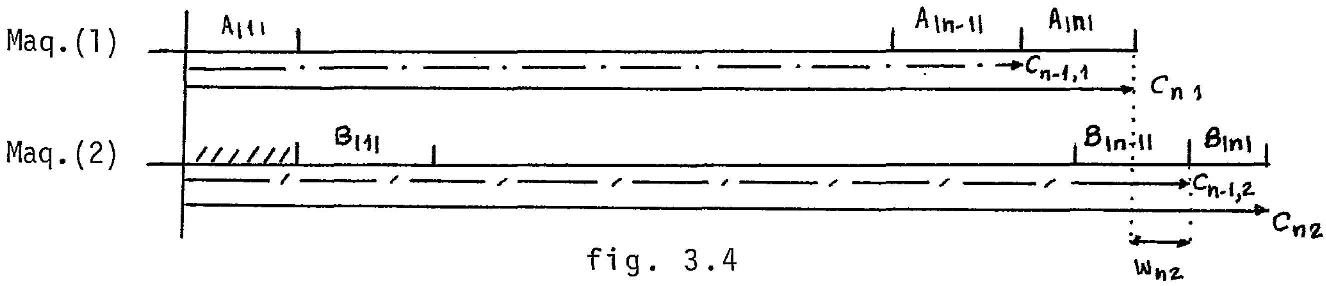

fig. 3.4

Na figura 3.4, temos por exemplo:

C_{n1} - tempo de término da n-ésima peça, isto é, da peça que ocupa a posição n, na máquina 1.

$C_{n-1,\,2}$ - tempo de término da (n-1)-ésima peça, isto é, da peça que ocupa a posição (n-1), na máquina 2.

Obs. 1:

R_{ij} , W_{ij} e C_{ij} não se referem à peça número i na máquina j, mas sim à i-ésima peça na máquina j, isto é, à peça que ocupa a posição i na sequência considerada. Teria sido mais coerente com a nomenclatura adotada escrevermos $R_{|i|,\,j}$, $W_{|i|,\,j}$ e $C_{|i|,\,j}$. Para maior facilidade na transcrição e para não sobrecarregar e complicar a simbologia, omitimos os colchetes.

Observando a figura 3.4, podemos concluir que:

$$C_{i1} = \sum_{k=1}^{i} A_{|k|} \qquad (1)$$

$$C_{i2} = C_{i1} + W_{i2} + B_{|i|} \qquad (2)$$

Ou então, observando a figura 3.5, abaixo:

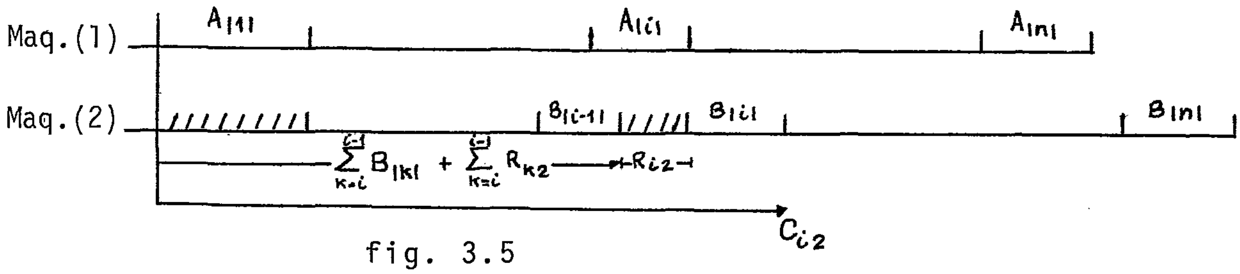

fig. 3.5

Temos:

$$C_{i2} = \sum_{k=1}^{i-1} B_{|k|} + \sum_{k=1}^{i-1} R_{k2} + R_{i2} + B_{|i|} \qquad (3)$$

Substituindo (1) em (2), obtemos:

$$C_{i2} = \sum_{k=1}^{i} A_{|k|} + W_{i2} + B_{|i|} \qquad (2')$$

Subtraindo (2') de (3) obtemos:

$$0 = \sum_{k=1}^{i-1} B_{|k|} + \sum_{k=1}^{i-1} R_{k2} + R_{i2} + B_{|i|} - \sum_{k=1}^{i} A_{|k|} - W_{i2} - B_{|i|}$$

Logo, podemos obter o valor de W_{i2}.

$$W_{i2} = \sum_{k=1}^{i-1} B_{|k|} + \sum_{k=1}^{i} R_{k2} - \sum_{k=1}^{i} A_{|k|} \qquad (4)$$

Vejamos a figura abaixo:

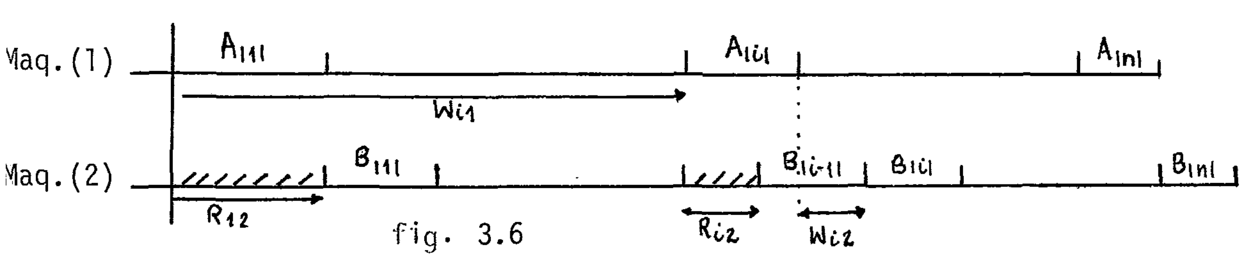

fig. 3.6

Na figura 3.6 temos:

Para a máquina 1:

$$W_{i1} = \sum_{k=1}^{i-1} A_{|k|} \qquad (5)$$

E, para a máquina 2, como já foi deduzido.

$$W_{i2} = \left(\sum_{k=1}^{i-1} B_{|k|} + \sum_{k=1}^{i} R_{k2} \right) - \sum_{k=1}^{i} A_{|k|} \qquad (4)$$

Somando-os resultados encontrados em (4) e (5) obteremos o tempo total de espera da i-ésima peça.

$$W_{i1} + W_{i2} = \sum_{k=1}^{i-1} A_{|k|} + \sum_{k=1}^{i-1} B_{|k|} + \sum_{k=1}^{i} R_{k2} - \sum_{k=1}^{i} A_{|k|}$$

Logo:

$$W_i = W_{i1} + W_{i2} = \sum_{k=1}^{i-1} B_{|k|} + \sum_{k=1}^{i} R_{k2} - A_{|i|} \qquad (6)$$

Para uma quantidade n de peças, o tempo total de espera das n peças será:

$$W = \sum_{i=1}^{n} W_i = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{k=1}^{i-1} B_{|k|} + \sum_{k=1}^{i} R_{k2} - A_{|i|} \right]$$

$$W = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i-1} B_{|k|} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} R_{k2} - \sum_{i=1}^{n} A_{|i|} \qquad (7)$$

Onde:

(a) $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i-1} B_{|k|} = 0 + B_{|1|} + \sum_{k=1}^{2} B_{|k|} + \ldots\ldots + \sum_{k=1}^{n-1} B_{|k|}$$

$$= 0 + B_{|1|} + (B_{|1|} + B_{|2|}) + \ldots\ldots + (B_{|1|} + \cdots + B_{|n-1|})$$

$$= (n-1)\, B_{|1|} + (n-2)\, B_{|2|} + \ldots\ldots + B_{|n-1|}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\, B_{|k|}$$

(b) $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} R_{k2} = \sum_{k=1}^{1} R_{k2} + \sum_{k=1}^{2} R_{k2} + \ldots\ldots + \sum_{k=1}^{n} R_{k2}$$

$$= R_{12} + (R_{12} + R_{22}) + \ldots\ldots + (R_{12} + \ldots + R_{12})$$

$$= n\, R_{12} + (n-1)\, R_{22} + \ldots\ldots + R_{n2}.$$

$$= \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)\, R_{k2}$$

(c) $\sum_{i=1}^{n} A_{|i|} = A_{|1|} + A_{|2|} + \ldots + A_{|n|}$

Logo, substituindo os resultados encontrados em (a), (b), (c) em (7), teremos:

$$W = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\, B_{|k|} - \sum_{k=1}^{n} A_{|k|} + \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)\, R_{k2} \qquad (7')$$

ou

$$W = (n-1)\, B_{|1|} + (n-2)\, B_{|2|} + \ldots + B_{|n-1|} - (A_{|1|} + A_{|2|} + \\ + \ldots + A_{|n|}) + n\, R_{12} + (n-1)\, R_{22} + \ldots + R_{n2}. \qquad (7'')$$

3.1.2 - <u>CÁLCULO DE R</u>:

Analisemos, agora R_{i2}:

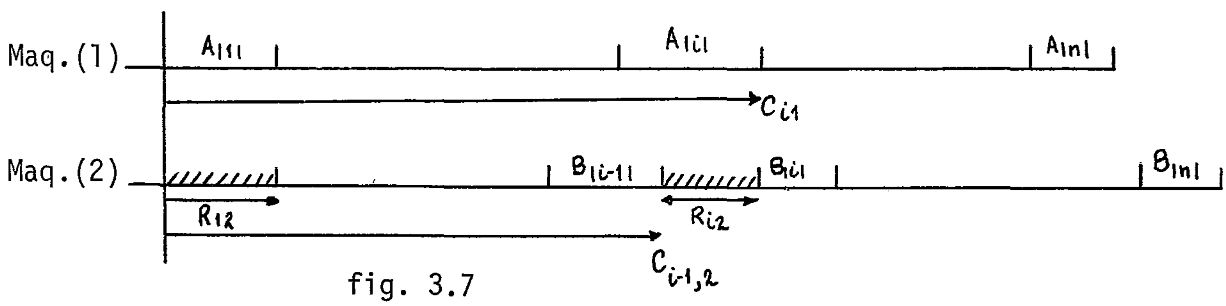

fig. 3.7

Na figura 3.7, temos por exemplo:

$C_{i1} - C_{i-1,\ 2} > 0$ e $R_{i2} > 0$

$R_{i2} = C_{i1} - C_{i-1,\ 2}$

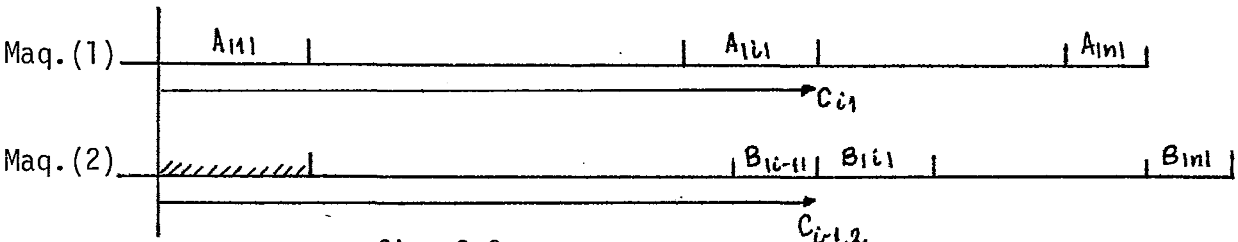

fig. 3.8

Na figura 3.8 observamos por exemplo que:

$R_{i2} = 0$

$C_{i1} - C_{i-1,\ 2} = 0$

$R_{i2} = C_{i1} - C_{i-1,\ 2}$

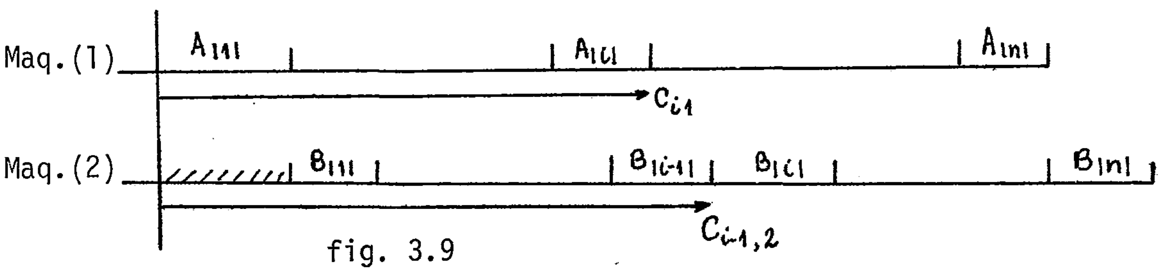

fig. 3.9

Na figura 3.9 temos:

$R_{i2} = 0$

$C_{i1} - C_{i-1,\ 2} < 0$

Observando os três casos podemos concluir que:

$$R_{i2} = \max\,(C_{i1} - C_{i-1,\,2}\,,\,0)$$

Substituindo C_{i1} e $C_{i-1,\,2}$ pelos seus respectivos valores, encontrados em (1) e (3) teremos:

$$R_{i2} = \max\,\left(\sum_{k=1}^{i} A_{|k|} - \sum_{k=1}^{i-2} B_{|k|} - B_{|i-1|} - \sum_{k=1}^{i-2} R_{k2} - R_{i-1,\,2}\,,\,0\right)$$

$$R_{i2} = \max\,\left(\sum_{k=1}^{i} A_{|k|} - \sum_{k=1}^{i-1} B_{|k|} - \sum_{k=1}^{i-1} R_{k2}\,,\,0\right) \qquad (8)$$

Seja R a soma de todos os tempos ociosos nas duas máquinas. Isto é:

$$R = \sum_{i=1}^{n} (R_{i1} + R_{i2})$$

Como $R_{i1} = 0 \quad \forall\ i \in \{1, 2, .., n\}$, isto é, a máquina 1 não tem tempo ocioso.

Então:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_{i2}$$

$$R = R_{12} + R_{22} + \ldots\ldots\ldots + R_{n2}$$

Por (8) temos:

$R_{12} = A_{|1|}$, pois $A_{|i|} \geq 0 \quad \forall_i$

$R_{22} = \max(\sum_{k=1}^{2} A_{|k|} - B_{|1|} - R_{12}, 0)$

$R_{32} = \max(\sum_{k=1}^{3} A_{|k|} - \sum_{k=1}^{2} B_{|k|} - \sum_{k=1}^{2} R_{k2}, 0)$

$\vdots$

$R_{n2} = \max(\sum_{k=1}^{n} A_{|k|} - \sum_{k=1}^{n-1} B_{|k|} - \sum_{k=1}^{n-1} R_{k2}, 0)$

Para n = 1, teremos:

$R = R_{12}$

$R = A_{|1|}$

Para n = 2, teremos:

$R = R_{12} + R_{22}$

Substituindo os valores de R_{12} e R_{22} , teremos:

$R = A_{|1|} + \max(\sum_{k=1}^{2} A_{|k|} - B_{|1|} - R_{12}, 0)$

$\quad = A_{|1|} + \max(A_{|1|} + A_{|2|} - B_{|1|} - A_{|1|}, 0)$

$$= A_{|1|} + \max(A_{|2|} - B_{|1|}, 0)$$

Adicionando $A_{|1|}$ aos dois termos de $\max(A_{|2|} - B_{|1|}, 0)$, obteremos:

$$R = \max(A_{|1|} + A_{|2|} - B_{|1|}, A_{|1|})$$

Logo, para $n = 2$, $R = \max(\sum_{k=1}^{2} A_{|k|} - B_{|1|} , A_{|1|})$

Temos então:

Para $n = 1 \rightarrow R = R_{12} = A_{|1|}$

Para $n = 2 \rightarrow R = R_{12} + R_{22} = \max(\sum_{k=1}^{2} A_{|k|} - B_{|1|}, A_{|1|})$

Através de indução, vamos provar que, para uma quantidade n, qualquer, de peças:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_{i2} = \max(\sum_{k=1}^{n} A_{|k|} - \sum_{k=1}^{n-1} B_{|k|}, \sum_{k=1}^{n-1} A_{|k|} - \sum_{k=1}^{n-2} B_{|K|}, \ldots, A_{|1|}) \qquad (9)$$

Tomemos como verdadeiro o valor de R em (9) para uma quantidade n de peças e calculemos o valor de R para $n + 1$ peças:

$$R = \sum_{i=1}^{n+1} R_{i2} = \sum_{i=1}^{n} R_{i2} + R_{n+1,2}$$

Substituindo o valor de $R_{n+1,2}$ encontrado em (8), teremos:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_{i2} + \max\left(\sum_{i=1}^{n+1} A_{|i|} - \sum_{i=1}^{n} B_{|i|} - \sum_{i=1}^{n} R_{i2} \, , \, 0 \right)$$

Logo, adicionando $\sum_{i=1}^{n} R_{i2}$ aos dois termos de $\max(\sum_{i=1}^{n+1} A_{|i|} - \sum_{i=1}^{n} B_{|i|} - \sum_{i=1}^{n} R_{i2}, 0)$, teremos:

$$R = \max\left(\sum_{i=1}^{n+1} A_{|i|} - \sum_{i=1}^{n} B_{|i|}, \sum_{i=1}^{n} R_{i2} \right) \qquad (10)$$

Substituindo em (10) o valor de $\sum_{i=1}^{n} R_{i2}$ encontrado em (9), teremos:

$$R = \max\left(\sum_{i=1}^{n+1} A_{|i|} - \sum_{i=1}^{n} B_{|i|}, \sum_{i=1}^{n} A_{|i|} - \sum_{i=1}^{n-1} B_{|i|}, \ldots , A_{|1|} \right) \qquad (10')$$

O que nos prova que o valor de R encontrado em (9) é válido para uma quantidade qualquer de n peças.

3.2 - COMPARAÇÃO ENTRE W e R:

Como vimos, os valores encontrados para W e R, considerando n peças, foram os seguintes:

$$W = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\, B_{|k|} - \sum_{k=1}^{n} A_{|k|} + \sum_{k=1}^{n} (n-k+1)\, R_{k2}$$

$$R = \max\left(\sum_{k=1}^{n} A_{|k|} - \sum_{k=1}^{n-1} B_{|k|},\ \sum_{k=1}^{n-1} A_{|k|} - \sum_{k=1}^{n-2} B_{|k|},\ \ldots\ ,\ A_{|1|} \right)$$

Analisemos W

$$W = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\, B_{|k|} - \sum_{k=1}^{n} A_{|k|} + \sum_{k=1}^{n} R_{k2} + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\, R_{k2}$$

Temos que:

$\sum_{k=1}^{n} A_{|k|}$ é constante, isto é, não depende da ordenação das peças, logo podemos dizer que:

$\sum_{k=1}^{n} A_{|k|} = C$, onde C é uma constante

e, $\sum_{k=1}^{n} R_{k2} = R$

Logo:

$$W = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\, B_{|k|} - C + R + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\, R_{k2} \qquad (7''')$$

tomando $X = \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\, B_{|k|} + \sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\, R_{k2}$

$W = X + R - C \quad (7''')$, logo $W = f_1(X, R)$

Vemos portanto não ser possível exprimir W como função exclusiva de R, isto é, estabelecer uma relação funcional do tipo $W = f(R)$. Ora, o estabelecimento de tal relação é que teria permitido verificar a coincidência ou concorrência entre os dois objetivos: minimização de tempos ociosos e minimização de tempos de espera.

Como temos $W = f_1(X, R)$ e como a sequência que minimiza R não obrigatoriamente minimiza X, temos que a minimização de R não implica necessariamente na minimização de W, embora isto possa ocorrer em alguns casos especiais.

3.3 - CÁLCULO DE FÓRMULAS PARA $\bar{F}$ e F_{max}

Utilizando os valores de W e R encontrados na seção anterior vamos procurar encontrar uma fórmula para $\overline{F}$ e outra para F_{max}.

Chamemos Y_j à diferença $\sum_{k=1}^{j} A_{|k|} - \sum_{k=1}^{j-1} B_{|k|}$, isto é,

$$Y_j = \sum_{k=1}^{j} A_{|k|} - \sum_{k=1}^{j-1} B_{|k|} \qquad (11)$$

Então, substituindo (11) em (9), teremos:

$$R = \sum_{i=1}^{n} R_{i2} = \max\,(Y_1, \ldots, Y_n) \qquad (12),$$ que é o valor do tempo de espera das máquinas pelas n peças.

Observação 2.

$R \geq 0$ sempre, pois pelo menos $Y_1 \geq 0$.

Por outro lado seja:

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i$$, isto é, F é a sôma dos tempos que todas as peças permanecem na fábrica.

Logo,

$$\overline{F} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} F_i$$, que corresponde ao tempo médio que, as peças gastam na fábrica.

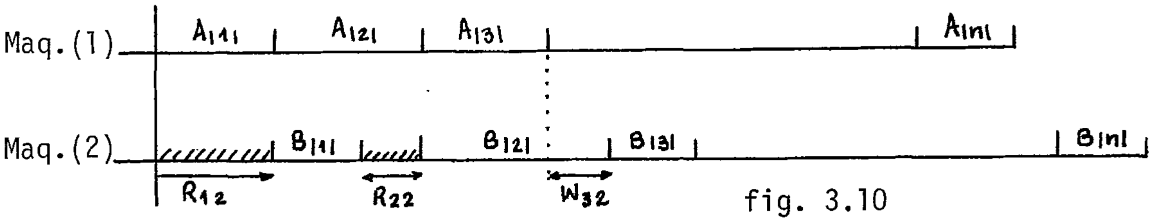

fig. 3.10

Observando a figura 3.10 temos:

$$F_i = A_{|i|} + W_{i1} + W_{i2} + B_{|i|}$$

$$F = \sum_{i=1}^{n} F_i = \sum_{i=1}^{n} [(W_{i1} + W_{i2}) + A_{|i|} + B_{|i|}]$$

$$F = \sum_{i=1}^{n} (W_{i1} + W_{i2}) + \sum_{i=1}^{n} A_{|i|} + \sum_{i=1}^{n} B_{|i|}$$

Temos portanto:

$$F = W + \sum_{i=1}^{n} A_{|i|} + \sum_{i=1}^{n} B_{|i|} \qquad (13)$$

Como $\sum_{i=1}^{n} A_{|i|} + \sum_{i=1}^{n} B_{|i|}$ é constante, isto é, não depende da ordenação das peças, podemos dizer que $\sum_{i=1}^{n} A_{|i|} + \sum_{i=1}^{n} B_{|i|} = k$

onde k é uma constante.

Logo teremos:

$$F = W + k \qquad (13')$$

Podemos então escrever $\bar{F}$ como função de W, isto é,

$$\bar{F} = \frac{1}{n} (W + k)$$

$\bar{F} = \frac{W}{N} + \frac{k}{N}$, chamando $\frac{k}{N}$ de k', teremos:

$$\bar{F} = \frac{1}{N} W + k' \qquad (14)$$

Das equações (13') e (14) podemos concluir que tanto F quanto $\bar{F}$ dependem do valor de W, isto é, variam diretamente com W: aumentando o tempo de espera das peças (W) aumentarão também o tempo total (F) e o tempo médio ($\bar{F}$) que as peças permanecem na fábrica ou, diminuindo o tempo de espera das peças (W) diminuirão também o tempo total (F) e o tempo médio ($\bar{F}$) que as peças permanecem na fábrica.

Substituindo em (13) o valor encontrado anteriormente, em (7), para W, teremos:

$$F = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\, B_{|i|} - \sum_{i=1}^{n} A_{|i|} + \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\, R_{i2} + \sum_{i=1}^{n} A_{|i|} + \sum_{i=1}^{n} B_{|i|}.$$

$$F = \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\, B_{|i|} + \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\, R_{i2} \qquad (15)$$

Como

$$\sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\, R_{i2} = n\, R_{12} + (n-1)\, R_{22} + \ldots\ldots + R_{n2} = R_{12} +$$

$$+ (R_{12} + R_{22}) + (R_{12} + R_{22} + R_{32}) + \ldots\ldots +$$

$$+ (R_{12} + \ldots\ldots + R_{n2})$$

$$\sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\, R_{i2} = R_{12} + \sum_{i=1}^{2} R_{i2} + \sum_{i=1}^{3} R_{i2} + \ldots\ldots + \sum_{i=1}^{n} R_{n2}$$

De acordo com (12) temos:

$\sum_{i=1}^{n} R_{i2} = \max (Y_1, \ldots, Y_n)$, para qualquer valor de n.

Logo, substituindo no resultado acima, teremos:

$$\sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\, R_{i2} = Y_1 + \max (Y_1, Y_2) + \max (Y_1, Y_2, Y_3) + \ldots +$$

$$+ \max (Y_1, \ldots, Y_n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\, R_{i2} = \sum_{i=1}^{n} \max (Y_1, \ldots, Y_i)$$

Teremos então para F:

$$F = \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\, B_{|i|} + \sum_{i=1}^{n} \max\,(Y_1, \ldots, Y_i) \tag{16}$$

E, para $\overline{F}$:

$$\overline{F} = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\, B_{|i|} + \sum_{i=1}^{n} \max\,(Y_1, \ldots, Y_i) \right] \tag{17}$$

Calculemos agora o valor de F_{max}, isto é, o valor do tempo máximo que uma peça permanece na fábrica.

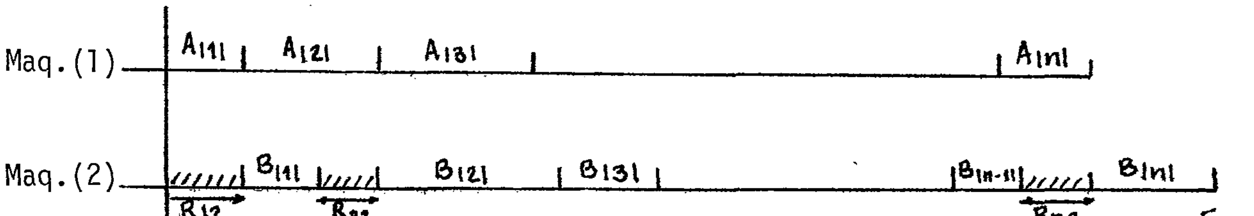

fig. 3.11

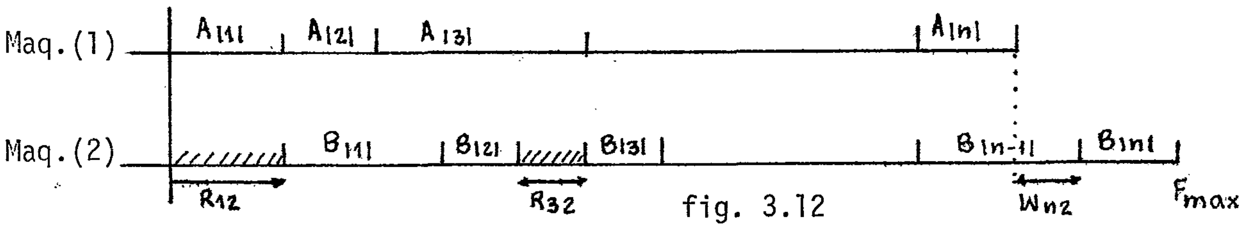

fig. 3.12

Analisemos os dois casos acima:

Pela figura 3.11 temos:

$$F_{max} = \sum_{i=1}^{n} A_{|i|} + B_{|n|}$$

Pela figura 3.12 temos:

$$F_{max} > \sum_{i=1}^{n} A_{|i|} + B_{|n|}$$

Como esses dois são os únicos casos possíveis de acontecer teremos:

$$F_{max} \geq \sum_{i=1}^{n} A_{|i|} + B_{|n|}$$

Ou, também para os dois casos podemos dizer que:

$$F_{max} = \sum_{i=1}^{n} B_{|i|} + \sum_{i=1}^{n} R_{i2} \qquad (18)$$

Substituindo $\sum_{i=1}^{n} R_{i2}$ por max $(Y_1, \ldots , Y_n)$ teremos:

$$F_{max} = \sum_{i=1}^{n} B_{|i|} + \max (Y_1, \ldots , Y_n) \qquad (18')$$

ou

$$F_{max} = K'' + R \qquad (18'')$$

Como $\sum_{i=1}^{n} B_{|i|}$ é constante, isto é, não depende da ordenação das peças, F_{max} varia diretamente com R, o que quer dizer que para minimizarmos F_{max} basta minimizarmos o valor de R, isto é, basta minimizar o max $Y_{i's}$.

3.4 - TENTATIVA DE ESTABELECER UMA RELAÇÃO ENTRE W e R OU $\overline{F}$ e F_{max}.

Temos que: $R = \max (Y_1, \ldots , Y_n)$, por (12)

$$W = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\, B_{|i|} - C + R + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\, R_{i2} \text{ , por } \quad (7''')$$

$$\overline{F} = \frac{1}{n} W + K' \qquad \text{por (14)}$$

ou

$$\overline{F} = \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\, B_{|i|} + \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\, R_{i2} \right| \text{, por (15)}$$

$$F_{max} = \sum_{i=1}^{n} B_{|i|} + \max (Y_1, \ldots , Y_n) \text{, por (18') ou}$$

$$F_{max} = K'' + R \qquad (18'')$$

Analisando $\overline{F}$, temos que:

$$\sum_{i=1}^{n} \max (Y_1, \ldots , Y_i) = \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\, R_{i2} = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\, R_{i2} + R$$

$$\sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\, B_{|i|} = \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\, B_{|i|} + \sum_{i=1}^{n} B_{|i|}$$

Fazendo a substituição deste valores em $\overline{F}$, teremos:

$$\overline{F} = \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{n-1} (n-1)\, B_{|i|} + \sum_{i=1}^{n} B_{|i|} + R + \sum_{i=1}^{n-1} (n-1)\, R_{i2} \right|$$

Como $\sum_{i=1}^{n} B_{|i|} + R = F_{max}$, teremos:

$$\overline{F} = \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\, B_{|i|} + F_{max} + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\, R_{i2} \right|$$

Como adotamos na seção 3.2 ,

$$\sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\, B_{|i|} + \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)\, R_{i2} = X$$

Substituindo X em W e $\overline{F}$, obtemos:

$W = X - C + R$, C constante

$$\bar{F} = \frac{1}{n}\left[X + F_{max}\right] \qquad (19)$$

A fórmula (14), obtida na seção anterior:

$$\bar{F} = \frac{1}{n} W + K'$$

estabelece que $\bar{F}$ é uma função estritamente monótona crescente de W, sendo também função exclusivamente de W.

A minimização dos tempos de espera ocasiona portanto a minimização do tempo médio das peças ($\bar{F}$) e vice-versa.

Analogamente, a fórmula (18'')

$$F_{max} = K'' + R$$

possibilita a constatação que F_{max} é função somente de R, sendo também função estritamente monótona crescente de R. Assim, a minimização do tempo máximo de processamento das peças leva a minimização do tempo ocioso.

Finalmente, a fórmula (19):

$$\bar{F} = \frac{1}{n}\left[X + F_{max}\right]$$

nos mostra que $\bar{F}$ é uma função de X e F_{max}.

Como a sequência que minimiza F_{max} não obrigatoriamente minimiza X, a minimização de F_{max} não implica na minimização de $\bar{F}$ e vice-versa.

3.5 - CONCLUSÕES

Relacionamos abaixo as principais fórmulas que estabelecem a interrelação entre W, R, $\bar{F}$ e F_{max}, para o caso de duas máquinas.

$$W = X + R - C \qquad (7''')$$

$$\bar{F} = \frac{1}{n} W + K' \qquad (14)$$

$$F_{max} = K'' + R \qquad (18'')$$

$$\bar{F} = \frac{1}{n} \left[X + F_{max} \right] \qquad (19)$$

C, K', K'' são constantes.

Constatamos por (14) e (18''):

a) Minimização dos tempos de espera W $\Longleftrightarrow$ minimização de $\bar{F}$

b) Minimização dos tempos ociosos R $\Longleftrightarrow$ minimização de F_{max}

Por outro lado, (7''') e (19) não permitem estabelecer uma relação funcional direta entre W e $\overline{F}$, respectivamente com R e F_{max} , o que significa que a minimização de W ou $\overline{F}$ não obrigatoriamente acarreta a minimização de R ou F_{max} respectivamente.

CAPÍTULO 4

COMPARAÇÃO ENTRE OS CRITÉRIOS DE OTIMIZAÇÃO DE F_{max} (OU R) e $\bar{F}$ (OU W)

Neste capítulo, utilizando os valores de W, R, $\bar{F}$ e F_{max} encontrados no capítulo anterior, analisaremos alguns critérios de otimização e faremos algumas comparações entre eles. Uma vez que não foi possível traçar um paralelo entre as fórmulas, isto é, estabelecer uma relação funcional entre $\bar{F}$ e F_{max}, passamos à comparação entre os critérios de otimização.

Abordaremos de início o teorema de Johnson |4| sobre a minimização de R e portanto de F_{max} e faremos algumas observações sobre ele. A seguir, utilizaremos o critério de otimização de $\bar{F}$ encontrado em Conway |1|. Quanto a minimização de $\bar{F}$ a literatura existente é muito restrita, poucos "autores" abordam este item, o que já não acontece para a minimização de F_{max}.

Terminaremos este capítulo com o estabelecimento de uma regra prática para a construção de uma sequência ótima para F_{max} e com a comparação entre os critérios de otimização de $\bar{F}$ e F_{max}.

4.1 - CRITÉRIO DE OTIMIZAÇÃO PARA F_{max} (OU R)

Tomemos para R o valor encontrado em (12) no capítulo anterior. Nossa tarefa é encontrar uma ordenação S* tal que R (S*) $\leq$ R (S) para toda sequência S; ela se reduz a encontrar uma ordenação das peças tal que o máximo dos n valores de Y_i seja minimizado.

Teorema 4.1 (Johnson 1954, |4|)

Em um problema com n peças, 2 máquinas, com todas as peças disponíveis simultâneamente, onde o objetivo é a minimização de R, se tivermos min $(A_r, B_s) < \min(A_s, B_r)$ para qualquer par de peças da sequência, então $r \succ s$ só pode ser melhor ou igual a $s \succ r$, isto é, $r \succ s$ torna o tempo ocioso da máquina, menor ou igual ao da ordenação com $s \succ r$.

Demonstração:

Prosseguiremos da seguinte maneira: Na primeira parte da demonstração mostraremos que dada a hipótese min $(A_r, B_s) <$ min (A_s, B_r), temos que <u>para duas posições consecutivas</u> $r \succ\succ s$ é melhor ou igual a $s \succ\succ r$.

Na segunda parte da demonstração ampliaremos o conceito de prioridade estabelecido na primeira parte. Mostraremos que se $r \succ s$ para duas posições consecutivas, então, de uma forma mais geral, podemos considerar válida a rela ção $r \succ s$ para duas posições quaisquer.

Para a demonstração dessa segunda parte, necessitaremos comprovar que a relação $r \succ s$ goza da propriedade da transitividade. Antes disto porém, será enunciado o teorema 4.2 que corresponde quase a uma recíproca da primeira parte do teorema 4.1. Mostraremos que se $r \succ\succ s$ é melhor que $s \succ\succ r$, teremos como consequência min $(A_r, B_s) <$ min (A_s, B_r).

Finalmente então será demonstrada a propriedade da transitividade para a relação $r \succ s$.

1ª Parte: (segundo Johnson |4|)

Mostraremos que, para duas posições consecutivas j e j + 1, $r \succ\succ s$ é melhor ou igual a $s \succ\succ r$.

Suponhamos duas posições consecutivas quaisquer j e j + 1.

A desigualdade da hipótese nos dá:

$$\text{Max}\ (-B_r, -A_s) < \max\ (-B_s, -A_r) \qquad (1)$$

Consideremos agora a diferença:

$$\sum_{i=1}^{j+1} A_{|i|} - \sum_{i=1}^{j-1} B_{|i|} \qquad (2)$$

e notemos que ela não depende de qual das duas peças ocupa a posição j.

Considerando que a peça r ocupa a posição j e a peça S ocupa a posição j + 1, adicionemos (2) a cada termo de (1) e, de acordo com (11) da seção anterior, teremos:

$$(3)\quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{j+1} A_{|i|} - \sum\limits_{i=1}^{j-1} B_{|i|} - B_r = Y_{j+1} \\[2ex] \sum\limits_{i=1}^{j+1} A_{|i|} - A_s - \sum\limits_{i=1}^{j-1} B_{|i|} = Y_j \end{cases}$$

Ou, considerando que a peça S ocupa a posição j e a peça r ocupa a posição j + 1 e, adicionando (2), a cada termo de (1), de acordo com (11) da seção anterior, teremos:

$$(4)\quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{j+1} A_{|i|} - \sum\limits_{i=1}^{j-1} B_{|i|} - B_s = Y'_{j+1} \\[2ex] \sum\limits_{i=1}^{j+1} A_{|i|} - A_r - \sum\limits_{i=1}^{j-1} B_{|i|} = Y'_j \end{cases}$$

Logo, por (1) em (3) e (4) temos:

$$\max (Y_j , Y_{j+1}) < \max (Y'_j , Y'_{j+1})$$

O que nos mostra que a desigualdade da hipótese se verifica, então, o maior destes dois valores de Y_i é reduzido colocando a peça r na posição j e a peça s na posição j + 1.

Nenhum dos (n-2) valores de (Y_1 , Y_2 ,...., Y_{j-1} , Y_{j+2} ,...., Y_n) é afetado por essa escolha de peças para a posição j. Todos os valores $Y_k = \sum_{i=1}^{k} A_{|i|} - \sum_{i=1}^{k-1} B_{|i|}$,

para k = 1, 2, ... , j-1, j+2, ... , n.

independem da escolha da peça r ou s para a posição j ou j + 1 [como pode ser facilmente verificado analisando a fórmula (11) da seção 3.3].

Se a peça r ocupa a posição j e a peça s ocupa a posição j + 1, temos:

$$R = \max (Y_1 , Y_2 , \ldots , Y_{j-1} , Y_j , Y_{j+1} , \ldots , Y_n)$$

Se a peça r ocupa a posição j + 1 e a peça s ocupa a posição j, temos:

$$R' = \max (Y_1 , Y_2 , \ldots , Y_{j-1} , Y'_j , Y'_{j+1} , \ldots , Y_n)$$

Como max $(Y_j , Y_{j+1}) < \max (Y'_j , Y'_{j+1})$ temos $R < R'$ logo, $r \succ\succ s$ é melhor que $s \succ\succ r$, como queríamos demonstrar.

Então, o máximo de todos os Y_i's é conservado ou reduzido colocando a peça r na posição j, isto é, o tempo de espera da máquina (R) é conservado ou reduzido se tivermos $r \succ\succ s$ na sequência.

Observação 4.1.

Se existir uma igualdade do tipo $\min (A_r , B_s) = \min (A_s , B_r)$ para algum par de peças, as ordenações $r \succ\succ s$ e $s \succ\succ r$ são equivalentes.

Exemplo 4.1 (referente à observação 4.1)

- Tomemos a seguinte sequência de peças a serem processadas.

	(1)	(2)	(3)
máquina (1)	3	2	1
máquina (2)	2	2	3

Mantendo esta ordenação $((1) \succ (2), (2) \succ (3))$, temos:

$R = \max (3, 3, 2) = \underline{3}$

- A ordenação (3), (1), (2) torna a sequência ótima

	(3)	(1)	(2)
máquina (1)	1	3	2
máquina (2)	3	2	2

R' = max (1, 1, 1) = $\underline{\underline{1}}$

Temos:

min (1, 2) < min (3, 3) , pelo teorema 4.1 , (3) ≻ (1)

min (3, 2) = min (2, 2) , pela observação 4.1 , (1) ≻ (2) ou (2) ≻ (1).

min (1, 2) < min (2, 3) , pelo teorema 4.1 , (3) ≻ (2)

- A ordenação (3), (2) , (1) também gera uma sequência ótima.

	(3)	(2)	(1)
máquina (1)	1	2	3
máquina (2)	3	2	2

R'' = max (1, 0, 1) = 1

Temos, portanto, R' = R'' , logo, se (1) ≻ (2) ou (2) ≻ (1) teremos sequências ótimas para o tempo de espera das máquinas.

<u>2ª Parte do teorema 4.1</u>

Vamos demonstrar que se r ≻ s para duas posições consecutivas j e j + 1, então também podemos, de uma forma mais geral, considerar válida a relação $r \succ s$ para duas posições quaisquer.

Consideremos introduzida uma peça t. Teríamos 4 alternativas quanto às relações de prioridade possíveis, considerando $r \succ s$.

a)	b)	c)	d)
$r \succ s$	$r \succ s$	$r \succ s$	$r \succ s$
$r \succ t$	$r \succ t$	$t \succ r$	$t \succ r$
$s \succ t$	$t \succ s$	$s \succ t$	$t \succ s$

Supomos que as prioridades acima foram determinadas de acordo com o que foi demonstrado na primeira parte do teorema. Esta determina as melhores ordenações para duas posições consecutivas quaisquer.

Por exemplo, em (a), as ordenações $r \succ s$; $r \succ t$ e $s \succ t$, considerando duas posições consecutivas, são melhores que $s \succ r$, $t \succ r$ e $t \succ s$.

Tomemos agora, três posições consecutivas j-1, j e j+1 e analisemos as quatro situações:

- Em (a) temos: $r \succ s \succ t$, isto é:

....	r	s	t	....
	j-1	j	j+1	

Trocando r e s contradizemos a primeira

parte do teorema 4.1 o que ocasiona, como já vimos, um aumento do tempo ocioso das máquinas.

Logo, neste caso $r \succ s$ é melhor que $s \succ r$.

- Em (d) temos $t \succ r \succ s$, isto é:

....	t	r	s	....
	j-1	j	j+1	

Da mesma forma que o item (a), se trocarmos r e s estaremos contradizendo a primeira parte do teorema 4.1, ocasionando um aumento do tempo ocioso das máquinas. Portanto, também neste caso, $r \succ s$ é melhor que $s \succ r$.

Analisemos as relações que constam de (b), isto é:

$r \succ s$ (1)

$r \succ t$ (2)

$t \succ s$ (3)

As prioridades (1), (2) e (3) são consideradas as melhores para duas posições consecutivas logo, nenhuma alteração nesta ordenação poderia melhorar a sequência pois estaríamos contradizendo o que foi demonstrado na primeira parte do teorema 4.1.

De acordo com as prioridades dadas temos a sequência:

$$\underline{\ldots. \mid r \mid t \mid s \mid \ldots.} \qquad r \succ t \succ s \qquad (i)$$
$$j-1 \quad j \quad j+1$$

Mostraremos que nenhuma alteração nesta sequência poderá melhorá-la. Em particular, veremos primeiramente que a troca entre r e s não ocasiona melhoria.

Trocando t com s contradizemos (3), o que leva a uma piora do sequenciamento, isto é, ocasiona um aumento do tempo ocioso das máquinas.

Ficaríamos com a seguinte sequência:

$$r \succ s \succ t \qquad (i_1)$$

Trocando r com s, em (i_1), contradizemos (1), o que levaria também a uma piora do sequenciamento.

Se fizéssemos a troca, ficaríamos com a seguinte sequência:

$$s \succ r \succ t \qquad (i_2)$$

Trocando t com r, em (i_2), contradizemos (2) o que nos levaria também a uma piora do sequenciamento, isto é, a um aumento do tempo ocioso das máquinas.

Ficaríamos então com a sequência:

$s \succ t \succ r$ (i_3)

Comparando (i) com (i_3) verificamos que o que houve foi uma troca de posição das peças r e s, agora não mais uma troca de posições consecutivas pois que adicionamos a peça t. Em (i) tínhamos $r \succ t \succ s$ enquanto em (i_3) $s \succ t \succ r$.

Verificamos que, ao passar de (i) para (i_3), houve uma piora consecutiva das sequências, isto é, o tempo ocioso da máquina foi aumentado ou ficou igual. Logo, (i_3) é pior ou igual a (i), o que mostra que também para este caso $r \succ s$ é melhor que $s \succ r$.

<u>Observação 4.2</u>:

Podemos demonstrar que as duas sequências $t \succ r \succ s$ (inversão da prioridade (2)) e $t \succ s \succ r$ (inversão das prioridades (1) e (2)) que ainda faltam, conduzem também a piores resultados o que mostra ser $r \succ t \succ s$ a melhor sequência para este caso.

Resumindo, para as três alternativas (a), (b) e (d), podemos dizer que a prioridade $r \succ s$, demonstrada para duas posições consecutivas, tem na verdade uma validade bem mais ampla. Mesmo depois de introduzida uma peça t, verificamos que r deve vir antes de s. Pode-se portanto dizer que $r \succ s$ é melhor que $s \succ r$ sem considerar as posições das duas peças.

<u>Observação 4.3</u>

As relações do caso (c), isto é, $r \succ\succ s$ é melhor que $s \succ\succ r$, $s \succ\succ t$ é melhor que $t \succ\succ s$ e $t \succ\succ r$ é melhor que $r \succ\succ t$, considerando sempre duas posições consecutivas, são impossíveis pois é válida a propriedade da transitividade, como veremos logo a seguir.

Se as relações em (c) fôssem válidas, de uma forma geral, e não somente para posições consecutivas, resultaria uma contradição.

Antes de demonstrarmos a propriedade da transitividade, demonstraremos o teorema 4.2 que equivale praticamente a uma recíproca da primeira parte do teorema 4.1.

Analisaremos agora o quase recíproca da primeira parte do teorema 4.1, dizemos quase recíproca porque há casos em que a recíproca não é verdadeira. Daremos um exemplo em que temos duas ordenações ótimas e não se verifica a recíproca do teorema.

Exemplo: 4.2

- Seja dada a seguinte sequência de peças:

	(1)	(2)	(3)
máquina (1)	1	4	3
máquina (2)	2	2	3

Segundo esta ordenação, (1) $\succ$ (2) $\succ$ (3), temos:

R = max (1, 3, 4) = 4

(a) - A ordenação (1) $\succ$ (3) $\succ$ (2) gera uma sequência ótima:

	(1)	(3)	(2)
máquina (1)	1	3	4
máquina (2)	2	3	2

Temos: R' = max (1, 2, 3) = 3

(b) - A ordenação (3) $\succ$ (1) $\succ$ (2) também dá origem a uma sequência ótima.

	(3)	(1)	(2)
máquina (1)	3	1	4
máquina (2)	3	2	2

Temos, para esta ordenação:

$R'' = \max(3, 1, 3) = 3$

Pela primeira parte do teorema 4.1 temos:

$\min(1, 3) \leq \min(3, 2) \rightarrow (1) \succ\succ (3)$ é melhor ou igual a $(3) \succ\succ (1)$.

$\min(3, 2) \leq \min(4, 3) \rightarrow (3) \succ\succ (2)$ é melhor ou igual a $(2) \succ\succ (3)$.

$\min(1, 2) \leq \min(4, 2) \rightarrow (1) \succ\succ (2)$ é melhor ou igual a $(2) \succ\succ (1)$.

No exemplo dado verificamos a exatidão da primeira parte do teorema:

Já a recíproca não seria verdadeira pois no caso (b) $(3) \succ\succ (1)$ melhor ou igual levaria pela recíproca à conclusão:

$\min(3, 2) \leq \min(1, 3)$, o que evidentemente não é verdade

- Como temos $R' = R''$, para $(1) \succ\succ (3)$ ou $(3) \succ\succ (1)$, as sequências serão ótimas.

<u>Teorema 4.2</u> (quase recíproca da primeira parte do teorema 4.1)

Se, para duas posições consecutivas j e $j+1$, a ordenação das peças tendo $r \succ\succ s$ é melhor que com $s \succ\succ r$, isto é, se $r \succ\succ s$ torna o tempo ocioso da máquina menor do que se tivermos $s \gg r$, então podemos afirmar que min $(A_r , B_s) <$ min (A_s , B_r).

Demonstração:

Tomemos as duas posições consecutivas j e j+1.

Se a peça r ocupar a posição j e a peça s a posição j+1 chamaremos:

$$R = \max (Y_1, \ldots , Y_j, Y_{j+1}, \ldots , Y_n)$$

Se acontecer o inverso, isto é, se a peça s ocupar a posição e a peça r a posição j+1, então:

$$R' = \max (Y_1, \ldots , Y'_j, Y'_{j+1}, \ldots , Y_n)$$

Como só alteramos as peças nas posições j e j+1, os demais Y_i's não se alteram.

Pela hipótese temos que $R < R'$, substituindo os valores encontrados para R e R', teremos:

$$\max (Y_1, \ldots , Y_j, Y_{j+1}, \ldots, Y_n) < \max (Y_1, \ldots , Y'_j, Y'_{j+1}, \ldots, Y_n) \qquad (5)$$

Podemos no entanto afirmar que:

$$\max (Y_1, \ldots, Y'_j, Y'_{j+1}, \ldots, Y_n) = \max (Y'_j, Y'_{j+1})$$

Se, contrariando esta afirmativa, tivermos:

$\max (Y_1, \ldots, Y'_j, Y'_{j+1}, \ldots, Y_n) = Y_k$, para algum $k \in \{1, 2, \ldots, j-1, j+2, \ldots, n\}$.

então, em particular,

$$\max (Y_1, \ldots, Y_{j-1}, Y_{j+2}, \ldots, Y_n) = Y_k$$

podemos portanto escrever, eliminando os termos $Y_1, \ldots, Y_{j-1}, Y_{j+2}, \ldots, Y_n$ que são agora desnecessários, de acordo com (5).

$$\max (Y_j, Y_{j+1}, Y_k) < Y_k$$

Ora, esta relação é impossível pois, evidentemente:

$$\max (Y_j, Y_{j+1}, Y_k) > Y_k$$

Logo, $\max (Y_1, \ldots, Y'_j, Y'_{j+1}, \ldots, Y_n) = \max (Y'_j, Y'_{j+1})$

Já para o max $(Y_1, \ldots, Y_j, Y_{j+1}, \ldots, Y_n)$ nada podemos afirmar, isto é, qualquer Y_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, poderá ser o max $(Y_1, \ldots, Y_j, Y_{j+1}, \ldots, Y_n)$

Chegaremos então à seguinte desigualdade:

$$\max (Y_1, \ldots, Y_j, Y_{j+1}, \ldots, Y_n) < \max (Y'_j, Y'_{j+1})$$

Em particular:

$$\max (Y_j, Y_{j+1}) < \max (Y'_j, Y'_{j+1}) \qquad (6)$$

Seja: $\max (Y_j, Y_{j+1}) = \max (I)$

$\max (Y'_j, Y'_{j+1}) = \max (II)$

Analisando a desigualdade (6) temos as seguintes alternativas:

$$1^{\underline{a}} \begin{cases} \max (I) = Y_j \\ \max (II) = Y'_j \end{cases}$$

Então:

(a) $Y_j < Y'_j$

Pela definição dos Yi's:

$$\sum_{i=1}^{j-1} A_{|i|} + A_r - \sum_{i=1}^{j-1} B_{|i|} < \sum_{i=1}^{j-1} A_{|i|} + A_s - \sum_{i=1}^{j-1} B_{|i|}$$

que resulta em: $A_r < B_s$

(b) $Y_j \geq Y_{j+1}$

Substituindo pelos valores dos Yi's, teremos:

$$\sum_{i=1}^{j-1} A_{|i|} + A_r - \sum_{i=1}^{j-1} B_{|i|} \geq \sum_{i=1}^{j-1} A_{|i|} + A_r + A_s - \sum_{i=1}^{j-1} B_{|i|} - B_r$$

onde, cancelando os termos iguais dos dois lados da desigualdade, obtemos: $B_r \geq A_s$

(c) $Y'_j \geq Y'_{j+1}$

Pela substituição dos Yi's:

$$\sum_{i=1}^{j-1} A_{|i|} + A_s - \sum_{i=1}^{j-1} B_{|i|} \geq \sum_{i=1}^{j-1} A_{|i|} + A_s + A_r - \sum_{i=1}^{j-1} B_{|i|} - B_s$$

que, após o cancelamento dos termos iguais, resulta em:

$B_s \geq A_r$

2º) $\begin{cases} \max \ (I) = Y_j \\ \max \ (II) = Y'_{j+1} \end{cases}$

Teremos:

(a') $Y_j < Y'_{j+1}$

Onde:

$$\sum_{i=1}^{j-1} A_{|i|} + A_r - \sum_{i=1}^{j-1} B_{|i|} < \sum_{i=1}^{j-1} A_{|i|} + A_s + A_r - \sum_{i=1}^{j-1} B_{|i|} - B_s$$

Após o cancelamento dos termos iguais resulta em:

$B_s < A_s$

(b') $Y_j \geq Y_{j+1}$

por (b), temos que $B_r \geq A_s$

(c') $Y'_{j+1} \geq Y'_j$

Substituindo os valores dos Yi's:

$$\sum_{i=1}^{j-1} A_{|i|} + A_s + A_r - \sum_{i=1}^{j-1} B_{|i|} - B_s \geq \sum_{i=1}^{j-1} A_{|i|} + A_s - \sum_{i=1}^{j-1} B_{|i|}$$

que, após os devidos cancelamentos, resulta em:

$$A_r \geq B_s$$

$$(3^{\underline{a}}) \begin{cases} \max \ (I) = Y_{j+1} \\ \max \ (II) = Y'_j \end{cases}$$

Teremos:

(a'') $Y_{j+1} < Y'_j$

Onde, com a substituição dos Yi's:

$$\sum_{i=1}^{j-1} A_{|i|} + A_r + A_s - \sum_{i=1}^{j-1} B_{|i|} - B_r < \sum_{i=1}^{j-1} A_{|i|} + A_s - \sum_{i=1}^{j-1} B_{|i|}$$

resultando em $A_r < B_r$

(b'') $Y_{j+1} \geq Y_j$

Substituindo os valores dos Yi's:

$$\sum_{i=1}^{j-1} A_{|i|} + A_r + A_s - \sum_{i=1}^{j-1} B_{|i|} - B_r \geq \sum_{i=1}^{j-1} A_{|i|} + A_r - \sum_{i=1}^{j-1} B_{|i|}$$

Obtendo como resultado $A_s \geq B_r$

(c'') $Y'_j \geq Y'_{j+1}$

Por (c) temos que: $B_s \geq A_r$

$$(4^{a}) \begin{cases} \max \ (I) = Y_{j+1} \\ \max \ (II) = Y'_{j+1} \end{cases}$$

(a''') $Y_{j+1} < Y'_{j+1}$

Fazendo a substituição dos Yi's:

$$\sum_{i=1}^{j-1} A_{|i|} + A_r + A_s - \sum_{i=1}^{j-1} B_{|i|} - B_r < \sum_{i=1}^{j-1} A_{|i|} + A_s + A_r - \sum_{i=1}^{j-1} B_{|i|} - B_s$$

então, após o cancelamento, $B_s < B_r$

(b''') $Y_{j+1} \geq Y_j$

Por (b'') temos que $A_s \geq B_r$

(c''') $Y'_{j+1} \geq Y'_j$

Por (c') temos que $A_r \geq B_s$

Resumindo:

- da ($1^{\underline{a}}$) alternativa obtivemos as seguintes desigualdades:

$$A_r < A_s$$

$$B_r \geq A_s$$

$$B_s \geq A_r$$

Logo, podemos concluir que: $A_r < A_s \leq B_r$ e $A_r \leq B_s$

- da ($2^{\underline{a}}$) alternativa obtivemos:

$$B_s < A_s$$

$$B_r \geq A_s$$

$$A_r \geq B_s$$

Podemos então concluir que: $B_s < A_s \leq B_r$ e $B_s \leq A_r$

- da ($3^{\underline{a}}$) alternativa obtivemos:

$$A_r < B_r$$

$$A_s \geq B_r$$

$$B_s \geq A_r$$

Logo, podemos dizer que: $A_r < B_r \leq A_s$ e $A_r \leq B_s$

- da (4ª) alternativa obtivemos:

$$B_s < B_r$$

$$A_s \geq B_r$$

$$A_r \geq B_s$$

isto é, $B_s < B_r \leq A_s$ e $B_s \leq A_r$

Logo, para satisfazer a desigualdade (6) e assim também a desigualdade (5), basta que os valores dos tempos de processamento das peças citadas satisfaçam a uma das quatro alternativas resultantes.

Chamemos de X, Y, Z e W o conjunto de valores de A_r, B_r, A_s e B_s que obedecem às condições respectivamente da primeira, segunda, terceira e quarta alternativas.

Logo, se para duas posições consecutivas j e j+1, $r \succ\succ s$ é melhor que $s \succ\succ r$, os valores A_r, B_r, A_s e B_s devem pertencer ao conjunto XUYUZUW.

Da teoria de conjuntos sabemos que:

XUYUZUW = XUZUYUW (prop. comutativa)

= (XUZ)U(YUW) (prop. associativa)

Calculemos primeiramente XUZ:

A desigualdade $A_r \leq B_s$ é comum às duas alternativas:

De X temos que $A_r < A_s \leq B_r$

De Z temos que $A_r < B_r \leq A_s$

Logo, de XUZ resulta:

1º) $A_r < A_s, B_r$

2º) $A_r \leq B_s$

3º) $A_s \leq B_r$ ou $B_r \leq A_s$ - o que significa que qualquer relação entre A_s e B_r satisfaz, logo podemos abandonar esta restrição.

Calculemos agora YUW.

A desigualdade $B_s \leq A_r$ é comum às duas alternativas, logo também satisfaz a YUW.

De Y temos que $B_s < A_s \leq B_r$

De W temos que $B_s < B_r \leq A_s$

Logo, de YUW resulta:

1º) $B_s < A_s, B_r$

2º) $B_s \leq A_r$

3º) $A_s \leq B_r$ ou $B_r \leq A_s$ - o que significa, também, que qualquer relação entre A_s e B_r satisfaz, logo podemos abandonar esta restrição.

Resumindo, temos para XUZ:

$A_r < A_s, B_r$ e $A_r \leq B_s$ (a)

Para YUW temos:

$B_s < A_s, B_r$ e $B_s \leq A_r$ (b)

Para (a) podemos escrever:

$A_r < \min(A_s, B_r)$ quando $A_r \leq B_s$

Para (b) podemos escrever:

$B_s < \min(A_s, B_r)$ quando $A_r \geq B_s$

Procurando reunir as condições (a) e (b), isto é, levando em consideração (XUZ)U(YUW) temos finalmente:

$\min(A_r, B_s) < \min(A_s, B_r)$ c. q. d.

<u>Observação 4.4:</u>

$r \succ\succ s$ é igual a $s \succ\succ r \rightarrow R = R'$

Suponhamos, além disso que $R = \max (Y_j, Y_{j+1})$ e $R' = \max (Y'_j, Y'_{j+1})$ então, $\max (Y_j, Y_{j+1}) = \max (Y'_j, Y'_{j+1})$; logo é possível demonstrar que $\min (A_r, B_s) = \min (A_s, B_r)$

Observação 4.5:

Se as posições j e j+1 são tais que $r \succ\succ s$ é igual a $s \succ\succ r$ e $R = Y_k$ $(k \neq j, j+1)$ e $R' = Y_h$ $(h \neq j, j+1)$, então nada é possível afirmar.

Exemplo da obs. 4.5:

Seja a sequência do exemplo 4.2.

Temos, para $(1) \succ (3) \succ (2) \rightarrow R = \max (1, 2, 3) = 3$

para $(3) \succ (1) \succ (2) \rightarrow R' = \max (3, 1, 3) = 3$

$R = R'$ para $(1) \succ (3)$ e $(3) \succ (1)$

mas $\min (A_1, B_3) \neq \min (A_3, B_1)$

Propriedade da transitividade:

Se tivermos determinado pela primeira parte do teorema 4.1, que $r \succ\succ s$ é melhor ou igual a $s \succ\succ r$ e $s \succ\succ t$ é melhor ou igual a $t \succ\succ s$, então também $r \succ\succ t$ é melhor que $t \succ\succ r$.

Demonstração:

Se, para duas posições consecutivas j-1 e j tivermos que $r \succ\succ s$ é melhor que $s \succ\succ r$ então, pelo teorema 4.2, min (A_r, B_s) < min (A_s, B_r) e, para as posições também consecutivas j e j+1, tivermos $s \succ\succ t$ melhor que $t \succ\succ s$, pelo mesmo teorema, min (A_s, B_t) < min (A_t, B_s). Mostraremos então que se min (A_r, B_s) < min (A_s, B_r) e min (A_s, B_t) < min (A_t, B_s) teremos min (A_r, B_t) < min (A_t, B_r) o que nos levará a concluir que $r \succ\succ t$ é melhor que $t \succ\succ r$, pelo teorema 4.1.

Das duas primeiras desigualdades resultam as quatro alternativas, que são:

$$A_r < B_s, A_s, B_r$$

(1) e

$$A_s < B_t, A_t, B_s$$

o que nos leva a $A_r < A_s, A_t$ e $A_r < B_r$

Logo, para (1), podemos dizer que $A_r <$ min (A_t, B_r)

$$A_r < B_s, A_s, B_r$$

(2) e

$$B_t < A_s, A_t, B_s$$

que nos leva a $A_r < B_r$ e $B_t < A_t$ ou então que min (A_r, B_t) < min (A_t, B_r)

$$(3) \quad \begin{array}{l} B_s < A_r, A_s, B_r \\ \text{e} \\ A_s < B_t, A_t, B_s \end{array}$$

esta alternativa é impossível pois teríamos $A_s < B_s$ e $B_s < A_s$.

$$(4) \quad \begin{array}{l} B_s < A_r, A_s, B_r \\ \text{e} \\ B_t < A_s, A_t, B_s \end{array}$$

que nos leva a $B_t < B_s < B_r$ e $B_t < A_t$, podemos portanto dizer que $B_t < \min (A_t, B_s)$

Das três alternativas possíveis de ser encontradas temos que, se min (A_r, B_s) < min (A_s, B_r) e min ((A_s, B_t) < min (A_t, B_s) então min (A_r, B_t) < min (A_t, B_r)

De acordo com o teorema 4.1 (primeira parte da demonstração) temos então que $r \succ\succ t$ é melhor que $t \succ\succ r$. Fica assim demonstrada a propriedade da transitividade.

Vamos apresentar a seguir, uma regra construtiva para a determinação da sequência ótima. Construtiva por permitir a construção desta sequência.

Escolheremos o menor dos 2n valores de A'_s e B'_s. Se este valor é um A_i, colocaremos primeiro a peça i na sequência tal que $A_{|i|} = \min_i A_{|i|}$, isto é, seja o menor possível. Se este valor é um B_i, colocaremos a peça i na última posição da sequência, tal que $B_{|n|} = \min_i B_{|i|}$, isto é, seja o menor possível. Com a posição de uma peça determinada, poderemos repetir o mesmo argumento para o conjunto das (n-1) peças que restarem e assim por diante.

Esta regra apresenta duas grandes vantagens:

a) Permite a <u>ordenação consecutiva</u> de tarefas, ora no sentido de frente para trás a partir da primeira tarefa, ora de trás para frente a partir da última tarefa. Esta regra permite, portanto, a aplicação direta dos resultados demonstrados na primeira parte do teorema 4.1.

b) Permite o estabelecimento de um número estritamente necessário de relações de prioridade, evitando a determinação de um número excessivo de prioridades, bem como a determinação de um número excessivamente pequeno de prioridades.

Com os teoremas que acabamos de demonstrar fica assim estabelecido um critério de otimização para

R, isto é, um critério para a minimização do tempo ocioso da máquina.

No capítulo anterior deste nosso trabalho chegamos a encontrar um valor para F_{max} em função de R, isto é, concluimos que:

$F_{max} = \sum_{i=1}^{n} B_{|i|} + R$, como $\sum_{i=1}^{n} B_{|i|}$ é uma constante, para minimizarmos F_{max} basta minimizar R. Logo, o critério de otimização de F_{max} é o mesmo critério de otimização de R que acabamos de demonstrar.

4.2 - ESTABELECIMENTO DE UM CRITÉRIO DE OTIMIZAÇÃO PARA $\bar{F}$(OU R)

Como vimos, no capítulo 3, o valor de $\bar{F}$ pode ser encontrado através das seguintes fórmulas:

$$\bar{F} = \frac{1}{n} W + K' \quad \text{onde} \quad K' = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^{n} A_{|i|} + \sum_{i=1}^{n} B_{|i|} \right)$$

ou (3.14)

$$\bar{F} = \frac{1}{n} \left[\sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\, B_{|i|} + \sum_{i=1}^{n} \max (Y_1, \ldots , Y_i) \right] \qquad (3.17)$$

Segundo Conway |1|, uma condição sufici

ente, mas não necessária, para minimizar o valor de $\overline{F}$ é que:

Se $A_i < A_{i+1}$ e $B_i < B_{i+1}$ então $i \succ i+1$ é melhor que $i+1 \succ i$, isto é, a peça i preceder a peça i+1 é melhor que a peça i+1 preceder a peça i.

Aqui não estabelecemos um critério de minimização de $\overline{F}$ válido para todos os problemas possíveis mas sim, estabelecemos uma condição suficiente para obtermos uma sequência ótima para $\overline{F}$, em alguns casos.

4.3 - COMPARAÇÃO ENTRE OS CRITÉRIOS DE OTIMIZAÇÃO:

A ordenação das peças obtidas segundo a minimização de $\overline{F}$ é diferente e, às vezes, até mesmo oposta à ordenação obtida para a minimização de F_{max}.

Suponhamos como caso particular o problema para a qual sejam válidas as seguintes relações:

$$(1) \quad \begin{array}{c} A_i < A_{i+1} \\ \vee \quad \vee \qquad \forall_i \\ B_i < B_{i+1} \end{array}$$

Temos que $A_i < A_{i+1}$ e $B_i < B_{i+1}$ $\forall_i$, logo, para minimizar $\bar{F}$ (Conway $|1|$) $i \succ i+1$ é melhor que $i+1 \succ i$, teremos então a seguinte ordenação na sequência para a minimização de $\bar{F}$: $1 \succ 2 \succ 3 \succ \ldots \succ i \succ i+1 \succ \ldots . \succ n$

Isto é:

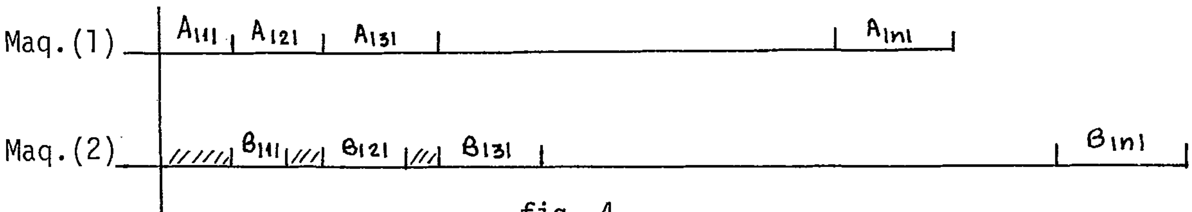

fig. 4

Das relações em (1), obtemos também:

$$\min (A_{i+1}, B_i) < \min (A_i, B_{i+1}) \quad , \quad \forall_i$$

logo, para minimizar F_{max}, pelo teorema 4.1, $i+1 \succ i$ é melhor que $i \succ i+1$. Portanto, para minimizarmos o valor de F_{max}, neste caso, teremos a seguinte ordenação na sequência:

$n \succ n-1 \succ \ldots\ldots \succ i+1 \succ i \ldots\ldots \succ 2 \succ 1.$

Isto é:

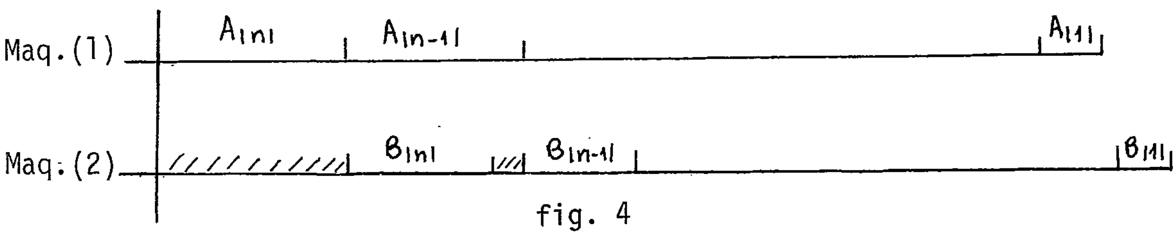

fig. 4

Temos assim, duas ordenações opostas, uma para $\bar{F}$ mínimo outra para F_{max} mínimo.

Seja:

$\overline{F}_{(\overline{F})}$ = tempo médio que as peças permanecem na fábrica se a sequência for determinada segundo o critério de minimização de $\overline{F}$.

$\overline{F}_{(F_{max})}$ = tempo médio que as peças permanecem na fábrica se a sequência for determinada segundo o critério de minimização de F_{max}.

Podemos afirmar então, para este caso, que:

$$\overline{F}_{(\overline{F})} \neq \overline{F}_{(F_{max})}$$

Isto é, $\overline{F}$ calculado com as peças ordenadas segundo a minimização de $\overline{F}$ é diferente de $\overline{F}$ obtido com as peças ordenadas segundo a minimização de F_{max}.

Demonstração:

Sabemos que:

$$\overline{F} = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\, B_{|i|} + \sum_{i=1}^{n} \max\,(Y_1, \ldots, Y_n)\right] \qquad (3.17)$$

$$\overline{F} = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\, B_{|i|} + Y_1 + \max\,(Y_1, Y_2) + \ldots + \max\,(Y_1, \ldots, Y_n)\right]$$

$$\overline{F} = \frac{1}{n} \Big| n\, B_{|1|} + (n-1)\, B_{|2|} + \dots + B_{|n|} + A_{|1|} + \max\, (A_{|1|},$$

$$A_{|1|} + A_{|2|} - B_{|1|}) + \dots + \max\, (A_{|1|}, A_{|1|} + A_{|2|} - B_{|1|}\, , \dots ,$$

$$A_{|1|} + \dots + A_{|n|} - B_{|1|} - \dots - B_{|n-1|}) \Big| \tag{7}$$

Como $1 \succ 2 \succ \dots \succ n$, para a minimização de $\overline{F}$, no caso analisado, teremos:

$$\overline{F}_{(\overline{F})} = \frac{1}{n} \Big[n\, B_1 + (n-1)\, B_2 + \dots + B_n + A_1 + \max\, (A_1, A_1 +$$

$$(A_2 - B_1)) + \dots + \max\, (A_1, A_1 + (A_2 - B_1), \dots , A_1 + (A_2 -$$

$$- B_1) + (A_3 - B_2) + \dots + (A_n - B_{n-1})) \Big]$$

Como, pelas relações em (1), $A_{i+1} > B_i \ \forall_i$, logo:

$$\overline{F}_{(\overline{F})} = \frac{1}{n} \Big[n\, B_1 + (n-1)\, B_2 + \dots + B_n + A_1 + (A_1 + A_2 - B_1) +$$

$$+ \dots + (A_1 + (A_2 - B_1) + \dots + (A_n - B_{n-1})) \Big|$$

Portanto, após alguns cancelamentos:

$$\overline{F}_{(\overline{F})} = \frac{1}{n} \Big[B_1 + B_2 + \dots + B_n + n\, A_1 + (n-1) A_2 + \dots + A_n \Big]$$

$$\mathcal{F}_{(\mathcal{F})} = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} B_i + \sum_{i=1}^{n} (n-i+1)\ A_i\right] \qquad (8)$$

Segundo a ordenação para minimização de F_{max}, $i+1 \succ i$ é melhor que $i \succ i+1$, logo teremos a seguinte ordenação das peças:

$n \succ n-1 \succ \ldots \succ i+1 \succ i \ \ldots \succ 1$

Logo, utilizando $\mathcal{F}$ encontrado em (7)

$$\mathcal{F}_{(F_{max})} = \frac{1}{n}\Big[n\ B_n + (n-1)\ B_{n-1} + \ldots + B_1 + A_n + \max\ (A_n, A_n+A_{n-1} - B_n) + \ldots + \max\ (A_n, A_n + A_{n-1} - B_n, \ldots, A_n + A_{n-1} - B_n + A_{n-2} - B_{n-1} + \ldots + A_1 - B_2\Big] \qquad (9)$$

Como em (1) não temos nenhuma relação entre A_i e B_{i+1}, analisemos as seguintes possibilidades:

a) Se $A_i \leq B_{i+1}$, $\forall_i$, teremos:

$$\overline{F}_{(F_{max})} = \frac{1}{n}\left[n\ B_n + (n-1)\ B_{n-1} + \ldots .\ B_1 + A_n + A_n + \ldots . + \right.$$

$$\left. + A_n\right]$$

$$\overline{F}_{(F_{max})} = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} i\ B_i + n\ A_n\right] \qquad (10)$$

b) Se $A_i > B_{i+1}$, $\forall_i$, teremos:

$$\overline{F}_{(F_{max})} = \frac{1}{n}\left[n\ B_n + (n-1)\ B_{n-1} + \ldots . + B_1 + A_n + (A_n + \right.$$

$$+ A_{n-1} - B_n) + \ldots . + (A_n + A_{n-1} + \ldots . + A_1 - B_n -$$

$$\left. - \ldots . - B_2)\right]$$

$$\overline{F}_{(F_{max})} = \frac{1}{n}\left[B_n + B_{n-1} + \ldots . + B_1 + n\ A_n + (n-1)\ A_{n-1} + \right.$$

$$\left. + \ldots . + A_1\right]$$

$$\overline{F}_{(F_{max})} = \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} B_i + \sum_{i=1}^{n} i\ A_i\right] \qquad (11)$$

c) Se $\exists$ i tal que $A_i \leq B_{i+1}$ e ao mesmo tempo $\exists\ j \neq i$ tal que $A_j > B_{j+1}$, então, de acordo com (9) temos:

$$\overline{F}_{(F_{max})} = \frac{1}{n}\Bigg[\sum_{i=1}^{n} i\ B_i + A_n + \max\ (A_n,\ A_n + (A_{n-1} - B_n)) +$$

$$+ \ldots + \max\ (A_n,\ A_n + (A_{n-1} - B_n),\ \ldots\ ,\ A_n +$$

$$+ (A_{n-1} - B_n) + \ldots + (A_1 - B_2))\Bigg] \qquad (12)$$

Comparando (10), (11), (12) com (8) temos que, provavelmente, para o problema examinado $\overline{F}_{(\overline{F})} \neq \overline{F}_{(F_{max})}$

4.4 - CONCLUSÕES

As conclusões que nos foram possíveis encontrar neste capítulo são as seguintes:

- Análise do teorema de Johnson que permite determinar uma sequência que minimize F_{max}; extensão dos conceitos desenvolvidos pelo teorema.

- Para um problema particular tal que $A_i < A_{i+1}$ e $B_i < B_{i+1}$, estabelecimento de um critério de minimização de $\overline{F}$.

- Comparação de dois critérios em um problema particular

  . os critérios produzem sequências opostas.

  . $\overline{F}_{(\overline{F})} \neq \overline{F}_{(F_{max})}$, provavelmente

Vê-se portanto que não há relação entre os dois problemas de minimização (F_{max} e $\overline{F}$), não há relação funcional entre os dois critérios de otimização. Minimização do tempo ocioso ($R \rightarrow F_{max}$), no caso de considerarmos um lote de peças, não conduz obrigatoriamente à minimização do tempo de espera das peças ($W \rightarrow \overline{F}$).

CAPÍTULO 5

COMPARAÇÃO ENTRE CRITÉRIOS DE OTIMIZAÇÃO CONSIDERANDO DIVERSOS LOTES DE PEÇAS

Neste capítulo, como já foi dito no capítulo 1, analisaremos e faremos uma comparação entre critérios de otimização de F. Até o capítulo anterior trabalhamos somente com um lote de peças, neste capítulo porém, consideraremos diversos lotes de peças que vão ser processadas por m máquinas.

Inicialmente analisaremos o caso em que todos os lotes estão disponíveis na fábrica num mesmo tempo t=0, mais adiante, o caso em que cada lote j, de peças, chega à fábrica para ser processado num determinado tempo b_j após o início do processamento do lote 1 de peças.

5.1 - COMPARAÇÃO ENTRE OS CRITÉRIOS DE OTIMIZAÇÃO, CONSIDERANDO QUE TODOS OS LOTES TEM O MESMO TEMPO INICIAL E IGUAL A ZERO.

Consideremos os critérios abaixo:

(1) As peças são ordenadas segundo a minimização do tempo

máximo que as peças ficam na fábrica (F_{max}).

(2) As peças são ordenadas segundo a minimização do tempo médio que as peças ficam na fábrica ($\bar{F}$).

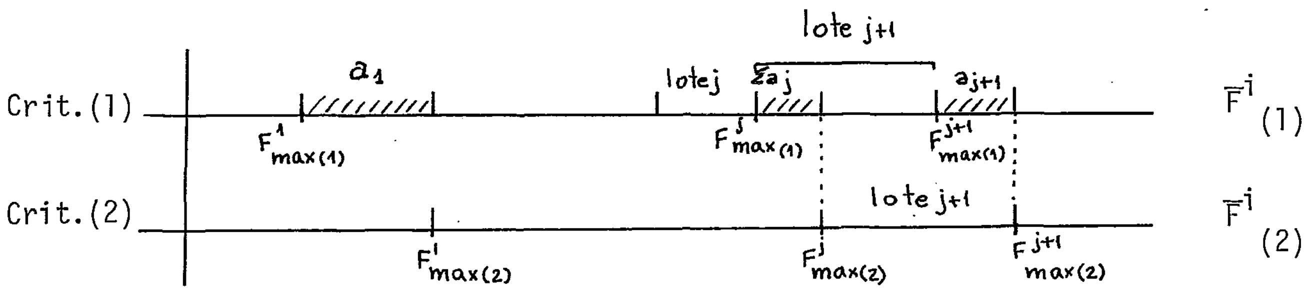

fig. 5.1

Observando a figura 5.1, temos:

$\bar{F}^j_{(1)}$ - representa o $\bar{F}$ para o lote j, caso as peças deste lote, bem como dos lotes anteriores (1, 2, ... , j-1), sejam ordenadas segundo o critério (1).

$\bar{F}^j_{(2)}$ - representa o $\bar{F}$ para o lote j, caso as peças deste lote, bem como dos lotes anteriores (1, 2, ... , j-1), sejam ordenadas segundo o critério (2).

$F^j_{max(1)}$ - representa o valor de F_{max} do lote j, caso as peças deste lote, bem como dos lotes anteriores (1, 2, ... , j-1), sejam ordenadas segundo o critério (1).

$F^j_{max(2)}$ - representa o valor de F_{max} do lote j, caso as peças deste lote, bem como dos lotes anteriores (1, 2, ... , j-1), sejam ordenadas segundo o critério (2).

Seja a_j definido da seguinte maneira:

$$a_0 = 0$$

$$a_1 = F^1_{max(2)} - F^1_{max}(1)$$

$$a_2 = F^2_{max(2)} - F^2_{max(1)} - a_1$$

ou seja, de maneira geral temos:

$$\sum_{i=0}^{j} a_i = F^j_{max}(2) - F^j_{max}(1)$$

a_j representa portanto a diferença entre os F_{max} do lote j, calculados segundo os critérios (1) e (2) e, devido unicamente ao lote j. Isto é, são desprezadas as diferenças provenientes das ordenações em lotes anteriores ou seja, para o cálculo de a_j consideramos os critérios (1) e (2) aplicados ao lote j, a partir de um mesmo instante inicial t.

O critério (1) ordena as peças segundo a minimização de F_{max} logo, o F_{max} calculado usando o critério (1) é melhor, isto é, é menor do que o F_{max} calculado segundo o critério (2) que ordena as peças segundo a minimização de $\bar{F}$.

Logo, $a_j \geq 0 \quad \forall_j$

ou seja: $\sum_{i=0}^{j} a_i \geq 0$

Por outro lado a_j é um valor finito pois é resultado da diferença de dois valores finitos.

Isto é: a_j finito $\forall_j$

<u>Definição 1</u>:

Consideremos $\bar{\mathcal{F}}^{j}_{(1)}$ como o tempo médio de término das peças do lote j, ordenadas segundo o critério (1) e, considerando que o tempo inicial para começar o processamento do lote j é o tempo zero isto é, a primeira peça do lote j é processada na primeira máquina a partir do tempo t=0.

Ordenação segundo o critério (1).

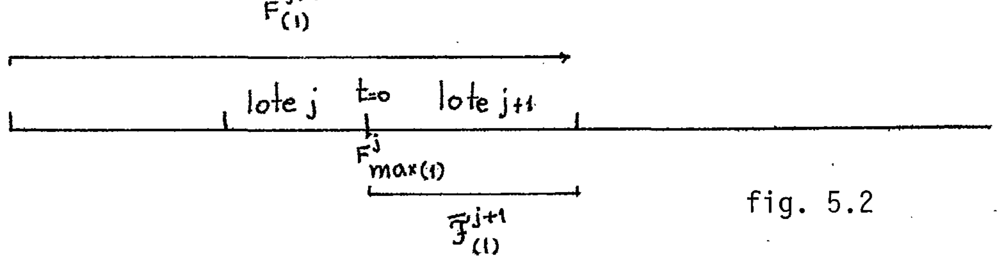

fig. 5.2

Definição 2:

Consideremos $\mathcal{F}^{j}_{(2)}$ como tempo médio de término das peças do lote j, ordenadas segundo o critério (2) e, considerando que o tempo inicial para começar o processamento do lote j é o tempo zero, isto é, a primeira peça do lote j é processada na primeira máquina a partir do tempo t=0.

Ordenação segundo o critério (2).

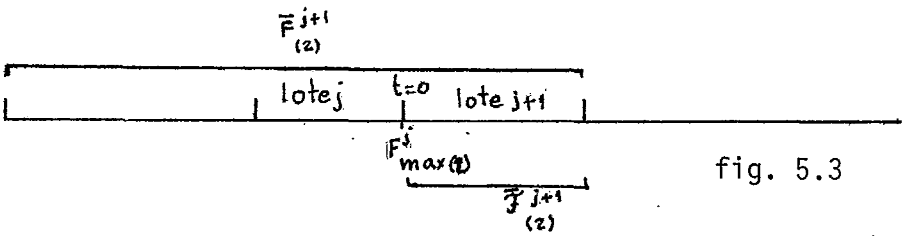

fig. 5.3

Pela definição 1, temos:

$$F^{j+1}_{(1)} = \mathcal{F}^{j+1}_{(1)} + F^{j}_{max\ (1)} \qquad (1)$$

se as peças dos lotes 1, 2, ... , j, j+1 forem ordenadas segundo o critério (1).

Por definição temos:

$$F^{j}_{max\ (1)} = F^{j}_{max\ (2)} - \sum_{i=0}^{j} a_i \qquad (2)$$

logo, substituindo (2) em (1):

$$F^{j+1}_{(1)} = \mathcal{F}^{j+1}_{(1)} + F^{j}_{max\ (2)} - \sum_{i=0}^{j} a_i \qquad (3)$$

Pela definição 2 temos:

$$F^{j+1}_{(2)} = \mathcal{F}^{j+1}_{(2)} + F^{j}_{max\ (2)} \qquad (4)$$

se as peças dos lotes 1, 2, ... , j, j+1, forem ordenadas segundo o critério (2).

Seja $\beta_{j+1} = \mathcal{F}^{j+1}_{(2)} - \mathcal{F}^{j+1}_{(1)}$, onde $\mathcal{F}^{j+1}_{(2)} \geq 0$ e $\mathcal{F}^{j+1}_{(1)} \geq 0$, $\forall_j$.

Podemos afirmar que $\beta_{j+1} \leq 0$ e β_{j+1} finito $\forall_j$, isto é,

$\mathcal{F}^{j+1}_{(2)} < \mathcal{F}^{j+1}_{(1)}$ pois o critério (2), como vimos no início do capítulo, ordena as peças segundo a minimização de $\overline{F}$, enquanto o critério (1) as ordena vizando a minimização de F_{max}, logo $\mathcal{F}^{j+1}_{(2)}$ é melhor que $\mathcal{F}^{j+1}_{(1)}$.

Chamemos $F^{T}_{(i)}$ a soma total dos tempos F_i de todas as peças i contidas em todos os n lotes, caso em cada lote as peças sejam ordenadas segundo o critério i (i = 1, 2).

Seja n_j a quantidade de peças contidas no lote j.

Suponhamos n lotes, então:

$$F^{T}_{(i)} = \sum_{j=1}^{n} n_j \, F^{j}_{(i)} \qquad i = 1, 2$$

Seja:

$$\Delta\ F^T = F^T_{(2)} - F^T_{(1)} \qquad (5)$$

Temos assim:

$$\Delta\ F^T = \sum_{j=1}^{n} n_j \left[F^j_{(2)} - F^j_{(1)} \right] \qquad (6)$$

Aplicando (3) e (4) temos:

$$\Delta\ F^T = \sum_{j=1}^{n} n_j \left[\mathcal{F}^j_{(2)} + F^{j-1}_{max}\ (2) - \mathcal{F}^j_{(1)} - F^{j-1}_{max}\ (2) + \sum_{i=0}^{j-1} a_i \right]$$

Como $\beta_j = \mathcal{F}^j_{(2)} - \mathcal{F}^j_{(1)}$, temos:

$$\Delta\ F^T = \sum_{j=1}^{n} n_j \left[\beta_j + \sum_{i=0}^{j-1} a_i \right] \qquad (7)$$

Sabemos que:

$a_j \geq 0$, a_j finito $\forall_j$

$\beta_j \leq 0$, β_j finito $\forall_j$

Seja:

$$\min_{\forall i,\ i \neq 0} \{a_i\} = a$$

$$\min_{\forall j} \{\beta_j\} = \beta$$

Temos então:

$$\Delta F^T \geq \sum_{j=1}^{n} n_j \left[\beta + (j-1)\ a\right] \quad , \quad \text{pois} \quad n_j \geq 0 \quad \forall_j$$

Consideremos que:

$$\min_{\forall j} \{n_j\} = \eta$$

$$\max_{\forall j} \{n_j\} = \zeta$$

onde n_j é finito $\forall_j$

Segue-se então que:

$$\Delta F^T \geq n\ \zeta\ \beta + \sum_{j=1}^{n} \eta\ (j-1)\ a$$

$$\Delta F^T \geq n\ \zeta\ \beta + \eta\ (a + 2a + \ldots + (n-1)a)$$

$$\Delta F^T \geq n \zeta \beta + \frac{\eta\, n(n-1)\, a}{2}$$

$$\Delta F^T \geq n \left(\zeta \beta + \frac{\eta (n-1)\, a}{2}\right)$$

Considerando um número muito grande de lotes, isto é, fazendo $n \to \infty$ e como temos $\eta \geq 0$ e $a \geq 0$, podemos dizer que:

$$\lim_{n\to\infty} \Delta F^T = \lim_{n\to\infty} (F^T_{(2)} - F^T_{(1)}) = \infty$$

Chegamos portanto ao importante resultado que, para um número muito grande de lotes, o critério (1) fornece menores tempos totais que o critério (2).

5.2 - COMPARAÇÃO ENTRE OS CRITÉRIOS DE OTIMIZAÇÃO, CONSIDERANDO QUE OS LOTES DE PEÇAS CHEGAM EM MOMENTOS DIFERENTES NA FÁBRICA.

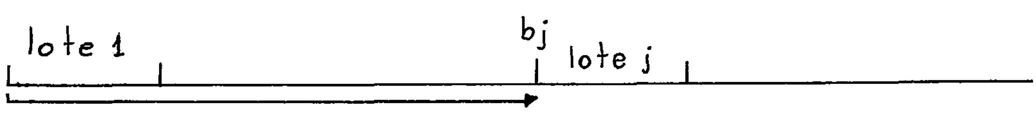

fig. 5.4

Chegamos portanto ao importante resultado que, para
nº muito grande de lotes, o critério (1) fornece menores tempos
s que o critério (2)

2 Considerando que os lotes de peças chegam em momentos
diferentes na fábrica.

lote 1 b_j lote j

Em I.1 vimos que:

n_j = nº de peças do lote j.

$$\Delta F^T = F^T_{(2)} - F^T_{(1)} \qquad (5)$$

Seja b_j = tempo inicial para o processamento do lote j.
$(b_j < F_i^j, \ \forall j, i)$

Seja $F^{*j}_{i(1)}$ = tempo

Em 5.1 vimos que:

n_j = número de peças do lote j.

$\Delta F^T = F^j_{(2)} - F^j_{(1)}$ (5)

Seja b_j = tempo inicial para o processamento do lote j

(logicamente, $b_j < F^j_i$, $\forall_j$, i)

Seja $F^{*j}_i(1)$ = tempo total que a peça i contida no lote j gasta na fábrica, considerando que o tempo inicial é b_j e que as peças, de cada lote j, foram ordenadas segundo o critério (1).

Então:

$$F^{*j}_i(1) = F^j_i(1) - b_j \qquad (8)$$

$$F^{*j}_i(2) = F^j_i(2) - b_j \qquad (9)$$

Temos, portanto, que:

$$F^{*j}_{(1)} = \frac{1}{n_j} \sum_{\forall_i} F^{*j}_i(1) \qquad (10)$$

$$F^{*j}_{(2)} = \frac{1}{n_j} \sum_{\forall_i} F^{*j}_i(2) \qquad (11)$$

Substituindo (8) e (9) em (10) e (11), respectivamente, teremos:

$$\bar{F}^{*j}_{(1)} = \frac{1}{n_j} \sum_{\forall i} (F^j_{i\,(1)} - b_j) = \frac{1}{n_j} (F^j_{(1)} - n_j\, b_j) =$$

$$= \bar{F}^j_{(1)} - b_j \qquad (12)$$

Logo

$$\bar{F}^{*j}_{(2)} = \bar{F}^j_{(2)} - b_j \qquad (13)$$

Analogamente à seção anterior podemos definir:

$$F^{*T}_{(1)} = \sum_{j=1}^{n} n_j\, \bar{F}^{*j}_{(1)}$$

$$F^{*T}_{(2)} = \sum_{j=1}^{n} n_j\, \bar{F}^{*j}_{(2)}$$

Seja, então:

$$\Delta F^{*T} = F^{*T}_{(2)} - F^{*T}_{(1)}$$

Logo:

$\Delta F^{*T} = \sum_{j=1}^{n} n_j\, (\bar{F}^{*j}_{(2)} - \bar{F}^{*j}_{(1)})$, mas aplicando (12) e (13), teremos:

$$\Delta F^{*T} = \sum_{j=1}^{n} n_j (\bar{F}^j_{(2)} - b_j - \bar{F}^j_{(1)} + b_j)$$

$$\Delta F^{*T} = \sum_{j=1}^{n} n_j (\bar{F}^j_{(2)} - \bar{F}^j_{(1)})$$

O que nos leva a concluir, por (6), que:

$$\Delta F^{*T} = \Delta F^T$$

e, como $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta F^T = \infty$, então,

$$\lim_{n\to\infty} \Delta F^{*T} = \lim_{n\to\infty} (F^{*T}_{(2)} - F^{*T}_{(1)}) = \infty$$

Portanto, a conclusão obtida em 5.1, também é válida considerando diferentes tempos de chegada dos lotes de peças, isto é, o critério (1) fornece menores tempos totais que o critério (2), para um número muito grande de lotes, mesmo considerando que os lotes chegam em tempos diferentes.

5.3 - GENERALIZAÇÃO DA COMPARAÇÃO ENTRE OS CRITÉRIOS DE OTIMIZAÇÃO, CONSIDERANDO, AO INVÉS DE $\mathcal{F}$, QUALQUER CRITÉRIO $F_{(*)}$.

De forma análoga, a partir de 5.1 e 5.2, podemos demonstrar para qualquer critério (*) que:

$$\lim_{n\to\infty} F^{T}_{(*)} - F^{T}_{(1)} = \infty$$

Bastaria, para tal, definirmos:

$$\sum_{i=0}^{j} a^{*}_{i} = F^{j}_{max}\ (*) - F^{j}_{max}\ (1)$$

$$\beta^{*}_{j} = \mathcal{F}^{j}_{(*)} - \mathcal{F}^{j}_{(1)}$$

e procedermos de forma idêntica a seguida para o critério (2).

Podemos então dizer, de uma forma geral, que, para um número muito grande de lotes, o critério (1) aplicado a cada lote é aquele que minimiza a soma total dos tempos que todas peças i permanecem na fábrica.

Este resultado tem aplicação o mais geral possível uma vez que independe do número de máquinas ou de peças em cada lote.

Por um lado temos que a minimização da

soma total dos tempos F_i é o objetivo mais importante nos problemas de sequenciamento. Por outro lado é o critério (1) aquele que tem o maior número de algoritmos a sua disposição.

A análise feita possibilita portanto a utilização de um grande número de algoritmos relativos ao critério (1) na minimização da soma total dos tempos F_i.

REFERÊNCIAS NO TRABALHO

BIBLIOGRAFIA

|1| - CONWAY, R. W., W. L. Maxwell and L. W. Miller - "Theory of Scheduling", Addison - Wesley, (1967).

|2| - GUPTA, J. N. D. - "Economic Aspects of Production Scheduling Systems", J. Op. Res. Soc. of Japan, Vol. 13, S. 169-193, (1971).

|3| - GUTENBERG E. - "Grundlagen der Betricbsrwitschaftslehre", Bd. 1, Die Production (1967).

|4| - JOHNSON, S. M. - "Optimal Two - and Three-Stage Production Schedules with Set-up Time Included" in: "Industrial Scheduling", ed. by J. F. Muth and G. L. Thompson, Prentice Hall, Chapter 2, (1963).

|5| - MÜLLER - MERBACH, H. - "Optimale Reihenfolgen", Springer Verlage, Berlin-Heidelberg - New York, (1970).

|6| - RINNOOY KAN, A. H. G., "The Machine Scheduling Problem", Report BW 27/73, Mathematisch Centrum, Amsterdam, (1973).

|7| - RINNOOY KAN, A. H. G. - "The Machine Scheduling Problem", H E. Stenfekt Kroese B. V., Leiden (1976).

BIBLIOGRAFIA RECENTE SOBRE PROBLEMA DE SEQUENCIAMENTO

1) Esta bibliografia foi retirada sobre as referências: "job-shop" e "sequencing", da revista IAOR, dos anos 1975 e 1976. A numeração que precede cada artigo é a mesma utilizada pela revista como referência.

As barras usadas em cada item tem como finalidade classificar o problema abordado, sendo esta classificação a mesma adotada por Conway, que é a seguinte:

A|B|C|D|E

A - número de tarefas

B - número de máquinas

C - tipo de fluxo das tarefas nas máquinas

- flow-shop
- randomly routed job-shop
- completely general or arbitrary flow-pattern

D - critério de otimização

E - método utilizado

13.385 - The Dependent Shop Sequencing Algorithm. A General Algorithm for Solving Flow-Shop, Job Shop and Dependent Shop Sequencing Problems. - Don. L. Spencer (Univ. of Houston, Houston, Tx.) and Richard A. Dudek IJPR (U.K.) 11 (1973) 4 (Oct.), pp. 325-339.

- ?|?| pure job shop, flow-shop and dependent shop sequencing|minimizing makespan|heuristic algorithm

13.386 - Decision Analysis for Job Shop Scheduling - A. A. Cunningham (Univ. of Toronto, Toronto, Ontario, Canadã) and I. B. Turner OMEGA (U.K.) 1 (1973) 6 (Dec.), pp. 733-746.

- J|M|?| selecting schedules heuristic procedure Sequential Bayesian strategies are obtained for the search procedure

13.388 - Use of a Case Study in Sequencing|Scheduling Research- R.A. Dudek (Texas Tech. Univ., Lulbock, Tx.), M. L. Smith and S.S. Panwalkar. OMEGA (U.K.) 2 (1974) 2 (April), pp. 253-261.

- ?|?|?|?| descriptive method
This paper describes a study of an industrial sequencing.

13.689 - Effects of Shop Size and Labor Flexibility in Labor and Machine Limited Productions Systems - John S. Fryer (Univ. of South Carolina, Columbia, S.C.) Man. Sci. (U.S.) 21 (1975) 5 (Jan), pp. 507-515.

- ?|?|?|?| descriptive method
This paper describes a simulation study that examines the influence of system size and labor flexibility on the performance effects of dispatching and labor con-

trol decision rules in labor and machine limited production systems.

13.700 - Minimizing the Time-In-System Variance for a Finite Jobset - Linus Schrage (Univ. of Chicago, Chicago) Man. Sci. (U.S.) 21 (1975) 5 (Jan.), pp. 540-543.

- N|1|?|minimizing of completion time|?
A number of necessary conditions for an optimal sequencing.

13.701 - Flow-Shop Sequencing Problem with Ordered Processing Time Matrices - M. L. Smith (Texas Tech. Univ, Lulbock Tx.), S.S. Panwalkar, and R.A. Dudek, Man. Sci. (U.S.) 21 (1975) 5 (Jan.), pp. 544-549.

?|?| flow-shop|?| ordered matrix
An optimizing solucion procedure for a special class of ordered matrix problem is presented along with proof of optimality.

13.703 - Rules for Scheduling Semi-Automatic Machines with Deterministic Cycle Times - Colin L. Eden (Univ. of Bath, Somerset, England) IJPR (U.K.) 13 (1975) 1 (Jan.), pp. 41-55.

- ?|?|?|?|?
This paper show that the criteria for a scheduling semi-automatic machines using the rule: "serve the machine, awaiting service, with shortest required service time", performs best.

14.025 - Scheduling Jobs, with Exponentially Distributed Processing Times, on Two Machines of a Flow-Shop - Andrew A. Cunningham and Sujit K. Dutta (Univ. of Toronto, Toronto, Ont., Canadā) N. RLQ (U.S.) 20 (1973) 1 (March), pp. 69-81.

N|2| flow-shop| minimizing the expected job completion time|analytic and heuristic methods.
It proves an optimal ordering rule, previously conjecture by Talwar.

14.028 - Methematical Aspects of the 3xN Job Shop Sequencing Problem - Wlodzimiers Szwarc (Univ. of Wisconsin, Milwaukee, Wis) NRLQ (U.S.) 21 (1974) 1 (March), pp. 145-153).

3|N|?|?| analytic methods
In this paper is given a sufficient optimality condition for a solution obtained by Johnson's aproximate method.

14.029 - The Development and Evalution of a Cost-Based Composite Scheduling Rule - Sumer C. Aggarwal and Bruce A. Mc Carl (Pennsylvania State Univ., University Park, Pa.) NRLQ (U.S.) 21 (1974) 1 (March), pp. 155-169.

- ?|?|?|?| analytic methods
This paper presents an analysis of a cost-based composite scheduling rule, this cost rule permits the optimization of more than one performance measure at time.

14.030 - Sequencing with Due-Dates and Early start Times to Minimize Maximum Tardiness - Kenneth R. Baker (Duke Univ., Durham, N. C.) and Zaw-Sing Su. NRLQ (U.S.) 21 (1974) 1 (March), pp. 171-176.

- N|1|?| Minimizing the Maximum tardiness |?
The objective of this paper is to illustrate how basic properties of the static problem can effectively be utilized in solving the dynamic problem.

14.031 - Some Simple Scheduling Algorithm - W. A. Horn (National Bureau of Standards, Washington, D.C.) NRLQ (U.S.) 21 (1974) 1 (March), pp. 177-185.

?|1|flow-shop| Minimizing the Maximum lateness and total delay|algorithm.
A Simple flow problem formulation permits minimizing maximum lateness for the more general multi-machine case.

14.032 - An Experimental Comparison of Solution Algorithms for the Single-Machine Tardiness Problem - Kenneth R. Baker (Duke Univ., Durham, N. C.) and James B. Martin. NRLQ (U.S.) 21 (1974) 1 (March), pp. 187-199.

?|1|?| Minimizing the mean tardiness|comparative methods using computer programs.

14.033 - Order-Preserving Allocation of Jobs to Two Machines - S. Mehta, R. Chandrasekaran, and H. Emmons (Case Western Reserv Univ., Cleveland, Ohio) NRLQ (U.S.) 21 (1974) 2 (June), pp. 361-364.

?|2|?| Minimizing of the Mean flow-time|an algorithm based on dynamic programming is developed.

14.041 - Job Shop Scheduling. Is Manual Aplication of Dispatching Rules Feasible: - C. C. New (London Graduate School of Business Studies, London, U. K.) Operat. Res. Quart. (U.K.) 26 (1975) 1, i (March), pp. 35-43.

- ?|?|?|?|?

This paper discusses the relative merits of the more popular dispatching rules with regard to their implementation requeriments and their performance characteristics.

14.042 - Balancing Workloads and Minimizing Set-Up Costs in the Parallel Processing Shop-Richard H. Deane (Georgia Inst. of Tech., Atlanta, Ga.) and Emith R. White. Operat. Res. Quart. (U.K.) 26 (1975) 1, i (March), pp. 45-53.

M|N|?| Minimizing the sep-up cost in the parallel processing shop|a branch-and-bound algorithm.

14.044 - Search and Simulation Selection of a Job-Shop Sequencing Rule - James C. Hershawer (Arizona. State Univ., Tempe, Ariz.) and Ronald J. Ebert. Man Sci. (U.S.) 21 (1975) 7 (March), pp. 833-843.

?|?|?|?|?

In this paper a standardized approach to selecting a simple sequencing rule for descentralized application throughout a job shop is developed and illustrated.

14.045 - Decomposition Algorithms for Single-Machine sequencing with Precedence Relations and Deferral Costs - Jeffrey B. Sidney (Univ., of British Columbia, Vancouver, B. C.) Opns. Res. (U.S.) 23 (1975) 2 (March-April), pp. 283-298.

- ?|1|?| Minimizing the sum of the deferral costs|algorithm method.

14.047 - Coordinating Aggregate and Detailed Scheduling in the One-Machine Job Shop: II - Computation and Structure - L. Gelders (Catholic Univ. Leuven, Louvain, Belgium) and P. R. Kleindorfer Opns. Res. (U.S.) 23 (1975) 2 (March-April), pp. 312-324.

?|1|?|?| heuristic and computational methods.

14.048 - Computational Experience with a Cost-Based algorithm for the Shop Scheduling Problem - J. D. Exkew (Charmin Paper Products Co., Albany, Ga) and R. G.Parker - Operat. Res. Quart. (U.K.) 26 (1975) 1, ii (April), pp. 211-215.

?|?|?|?| computational methods.

This paper presents an economically structure algorithm for the static shop scheduling problem.

14.322 - Two machines Flow Shop Scheduling Problems with sequence Dependent Set up Times: A Dynamic Programming Approach-Burton D. Corwin (Univ., of Maryland,College Park, Md.) and Augustine O. Esoglwe NRLQ (U.S.) 21 (1974) 3 (Sept.), pp. 515-524.

- ?|2|flow shop scheduling problem minimizing the makespan) dynamic programming and branch-and-bound.

14.325 - A Heuristic Algorithm for the Flow Shop Problem with a Common Job Sequence on All Machines - Sumer C. Aggarwall (Penn. State, University Park Pa.) and Edward Stafford Decision Sciences (U.S.) 6 (1975) 2 (April), pp. 237-251.

- ?|?| flow shop problem|minimizing the makespan|heuristic algorithm.

14.641 - Job Shop Sequencing Problem with no Wait in Process - S. K. Goyal (Glamorgan Polytechnic, Pontpridd, Wales) IJPR (U.K.) 13 (1975) 2 (March), pp. 197-206.

- ?|?|flow-shop|minimizing the machine processing time|a systematic method.

14.643 - Job Shop Scheduling with Due Dates and Operations Overlap Feasibility - Charles A. Holloway (Stanford Univ., Stanford, Calif. 94305) and Rosser T. Nelson. AIIE Transactions (U.S.) 7 (1975) 1 (March), pp. 16-20.

?|?|?|?|?|

In this paper the comparative data provide useful tradeoff information for evalution of alternatives and indicate that multiple transport scheduling may sometimes be a very economical way to try to meet due dates without using overtimes operations.

14.929 - The Impact of Advancing Due Dates in a Pure Job Shop- James E. Day (Celanese Plastics Co., 504 Linden Rd., University Park, Pa. 16802) and Michael P. Hottenstein IJPR (U.K.) 13 (1975) 6 (Nov.), pp. 603-613.

- ?|5|?|?| Computer simulation

14.945 - A Possible Solution to the Simultaneous Planning of a Manufacturing Program and its Course of Execution in a Job Production Firm - Gunter Czeranowsky (Seminar fur Industrubetriebslehre und Organisation, Von-Melle-Park 9, D-2000 Hamburg 13, German F. R.) Feitschrift fur Bitriebswirtschaft (German F. R.) 45 (1975) 6 (June), pp. 353-370.

- ?|?|?|?|?

14.949 - Introduction to Sequencing and Scheduling-Kenneth R. Baker - John Wiley & Sons, Inc. (605 Thid Aven., New York, N. Y. 10016) 1974, 305 pp. $ 16,95

- ?|?|?|?|?