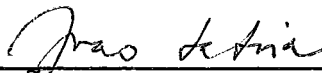


UMA CRÍTICA QUANTITATIVA À LEI DE PARETO

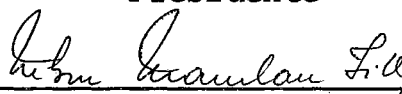
Maria de Fátima Coutinho da Silva

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO
DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA
DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO
REQUISITO NECESSÁRIO PARA A OBTENÇÃO DO GRAU
DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M. Sc.)

Aprovada por:



Prof. João Luiz Maurity Saboia
Presidente



Prof. Nelson Maculan Filho



Prof. Luiz Fernando Loureiro Legey

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
DEZEMBRO DE 1978

AGRADECIMENTOS

Ao Professor João Luiz Maurity Saboia, pela excelente orientação dada durante o desenvolvimento deste trabalho;

Aos Professores Luiz Fernando Loureiro Legey e Nelson Maculan Filho pela participação na banca de tese;

À Maria de Lourdes de Almeida e ao Eduardo Conceição; pelos excelentes trabalhos de datilografia e execução gráfica, respectivamente;

À COMISSÃO NACIONAL DE ENERGIA NUCLEAR, nas pessoas dos doutores Julio Jansen Laborne e Edgard Meyer, respectivamente, chefe do Departamento de Normas e Especificações e chefe da Divisão de Normas de Radioproteção, por me cederem o horário de trabalho para execução da tese e pelo apoio e estímulos prestados;

Ao CNPq pelo auxílio financeiro concedido;

Às demais pessoas que de alguma forma contribuíram para a execução deste trabalho.

Ao meu filho Andrē Vinicius

RESUMO

A lei de Pareto tem sido utilizada para descrever diversos fenômenos sócio-econômicos tais como, a renda dos indivíduos, o capital das firmas, o tamanho das cidades etc.

Esta lei nos fornece uma medida da desigualdade da distribuição da variável considerada entre os elementos da população - o coeficiente de Pareto.

Inicialmente apresentamos a lei de Pareto e sua crítica. Em seguida mostramos outras formas de se medir a desigualdade da distribuição da renda (índices de Gini, Theil e Variância dos Logaritmos).

Posteriormente é apresentado o modelo de Champernowne. Este modelo utiliza elementos da teoria de cadeias de Markov, e sua distribuição estacionária satisfaz a lei de Pareto.

Finalmente utilizamos dados das declarações de imposto de renda de pessoas físicas no Brasil no período 1968 a 1975 para verificar a validade ou não da lei de Pareto. Esta aplicação nos mostra que ela só se ajusta satisfatoriamente aos dados das mais altas faixas de rendimentos. Desta forma, para efeitos práticos, o coeficiente de Pareto é de muito pouca utilidade como medida da distribuição de renda.

ABSTRACT

Pareto's law has been frequently used to describe various social-economic phenomena, such as, personal income, capital of firms, size of cities etc.

This law provides us a measure of the inequality in the distribution of the considered variable - the Pareto's coefficient.

We first present Pareto's law and its critique. After that, we show other means to measure the inequality in the income distribution (Gini's index, Theil and Variance of Logarithms).

After that, we develop Champernowne's model. This model utilizes concepts from the theory of Markov chains, and its stationary distribution suggests the Pareto's law.

We finally utilize data from personal income tax returns in Brazil for the period 1968 to 1975, to verify the validity of Pareto's law. This application shows us that it only adapts itself satisfactorily to the highest income data. Thus, for all practical purposes, Pareto's coefficient is of little value as a measure of income distribution.

Í N D I C E

	pg.
CAPÍTULO I - Introdução	1
CAPÍTULO II - A Lei de Pareto e sua Crítica	9
II.1 - A Lei de Pareto	9
II.2 - Crítica à lei de Pareto	15
CAPÍTULO III - Outros Índices de Concentração	20
III.1 - A Curva de Lorenz e o Índice de Gini	20
III.2 - Variância dos Logs	25
III.3 - O Índice de Theil	27
CAPÍTULO IV - O Modelo de Champernowne	34
IV.1 - O Modelo de Champernowne e a Lei de Pareto	34
IV.2 - Críticas ao Modelo de Champer nowne	54
CAPÍTULO V - Aplicação e Conclusões	56
APÊNDICE - Dados utilizados e Gráficos da Lei de Pareto	67
Bibliografia	92

CAPÍTULO I

INTRODUÇÃO

A preocupação pela maneira com que a renda é distribuída entre os componentes de uma sociedade tem crescido nos últimos anos. Esse tema vem interessando aos economistas desde a época dos fisiocratas - a primeira escola de economistas propriamente dita. No entanto, somente no final do século passado, surgiu a primeira tentativa de medir a distribuição de renda através de *VILFREDO PARETO* [12], que conduz uma investigação econométrica e descobre uma certa regularidade na distribuição da renda em um bom número de sociedades por ele estudadas. Os estudos de Pareto nos fornecem a primeira medida objetiva de distribuição de renda de que se tem notícia.

Recentemente, no Brasil, o tema da repartição da renda passou a ter maior interesse a partir da divulgação dos dados do Censo de 1970, os quais, comparados com os de 1960, mostraram que a renda se tinha tornado ainda mais desigual ao longo dessa década (veja Tabelas I.1 e I.2).

A renda real dos 50% da população remunerada de rendas mais baixas apresentou um aumento de apenas 1% durante essa década, enquanto que a renda real dos 5% da população remunerada de rendas mais altas aumentou de 72% [3].

O salário mínimo real diminuiu durante o período mencionado. Um índice do valor do salário mínimo real médio, na cidade de São Paulo, tendo por base o triênio 1959-61=100, caiu para 82 no triênio 1962-64, para 75 no triênio 1965-67 e 71 no triênio 1968-70 [4].

Dados divulgados pelo IPEA [7] mostram que o salário real médio dos empregados na indústria caiu de um nível 100 em 1963 para 85 em 1967, mantendo-se no nível 90 em 1968 e 1969.

TABELA I.1: Distribuição da Renda no Brasil em 1960

Percentagem da população (pessoas de 10 anos ou mais) que recebe renda e respectiva percentagem da renda total recebida (em ordem crescente de renda)

População remunerada		Renda	
Percentagem	Percentagem acumulada	Percentagem	Percentagem acumulada
30	30	6,37	6,37
10	40	4,83	11,20
10	50	6,49	17,69
10	60	7,49	25,18
10	70	9,03	34,21
10	80	11,31	45,52
10	90	15,61	61,13
10	100	38,87	100,00
5% superiores		27,35	
1% superiores		11,72	

Fonte: HOFFMANN R. e J. C. DUARTE [5].

TABELA I.2: Distribuição da Renda no Brasil em 1970

Percentagem da população (pessoas de 10 anos ou mais) que recebe renda e respectiva percentagem da renda total recebida (em ordem crescente de renda)

População remunerada		Renda	
Percentagem	Percentagem acumulada	Percentagem	Percentagem acumulada
40	40	9,05	9,05
10	50	4,69	13,74
10	60	6,25	19,99
10	70	7,20	27,19
10	80	9,63	36,82
10	90	14,83	51,65
10	100	48,35	100,00
5% superiores		36,25	
1% superiores		17,77	

Fonte: HÖFFMANN R. e J.C. DUARTE [5].

Recentemente, LANGONI [10] apresentou uma teoria, - entre as várias teorias explicativas da repartição da renda - chamada teoria do "Capital Humano", na qual introduz cinco variáveis independentes "explicativas" da desigualdade na distribuição de renda: educação, idade, sexo, atividade e região.

O modelo de Langoni consiste em realizar regressões log-lineares em que a renda individual é função das cinco variáveis independentes. Os resultados dessas regressões mostram que em 1960 essas cinco variáveis "explicavam" 51% das diferenças individuais de renda, enquanto que em 1970 passaram a "explicar" 59%. A contribuição conjunta das variáveis sexo, idade, atividade e região permaneceu a mesma durante essa década enquanto a "variável" educação respondia pela quase totalidade desse aumento de poder explicativo.

De acordo com o trabalho de Langoni, entre 1960 e 1970, as pessoas que possuíam escolaridade de nível superior tinham renda 10 vezes superior a dos analfabetos. A renda real dos primeiros subiu 51% ao passo que a dos últimos permaneceu no mesmo nível. A relação entre a renda real dos possuidores de escolaridade superior e a dos que tinham apenas curso primário também aumentou nesse período, passando de 1:5,3 em 1960 para 1:7,1 em 1970.

Ainda com base nos dados do Censo Demográfico de 1960 e 1970, RODOLFO HOFFMANN e JOÃO CARLOS DUARTE [5] fizeram um estudo comparativo e obtiveram uma série de resultados. Esses autores mostram que a distribuição da renda é sensivelmente mais

desigual no setor urbano que no setor primário. O valor menor para os índices obtidos no setor primário pode ser causado, em grande parte, pela não-inclusão das pessoas que declararam renda nula.

O grau de concentração da renda é maior nas regiões Nordeste e Leste, mas difere pouco do grau de concentração no País como um todo.

O aumento no grau de concentração da distribuição da renda foi mais acentuado nas regiões mais industrializadas, de modo que, em 1970, as diferenças entre os índices do Nordeste e do Sul apresentam-se menos acentuadas que no início de 1960.

O perfil da distribuição da renda pessoal no Brasil apresenta, em 1970, marcadas descontinuidades. Metade da população das pessoas remuneradas recebe 13,74% da renda total. Nos decis de população seguintes, os incrementos na participação percentual na renda gerada são pequenos (ver Tabela I.2), mas quando se atinge o decil superior ocorre um salto brusco: 10% da população apropria-se de quase metade da renda total, (48,35%).

Comparando os perfis da distribuição da renda, em 1960 e 1970 (ver Tabelas I.1 e I.2), parece inegável que, neste último ano, a concentração da renda na cúpula da distribuição reforçou-se, ao passo que os decis inferiores da população tiveram sua participação percentual na renda total reduzida. A metade da população remunerada, situada no extremo inferior da

distribuição, viu cair sua participação na renda total de 17,69% para 13,74%.

Nos três decis subseqüentes, as rendas médias sofreram acréscimos pouco significativos. Os aumentos significativos na renda média ficaram reservados para o 9º e 10º decis e, especialmente, para os 5% da população detentores de altas rendas.

A conclusão a que chegaram Hoffmann e Duarte foi que metade da população não foi atingida pelos benefícios do crescimento econômico (pelo menos em termos monetários) e outros 30% tiveram acesso apenas marginal a esses benefícios.

Um dos objetivos principais deste trabalho é o teste da verificação ou não da Lei de Pareto para a distribuição de renda no Brasil.

A validade dos resultados encontrados fica limitada pela escassez de dados relativos ao grau de concentração da renda e da riqueza em nosso país. Esses dados foram retirados do Anuário Econômico Fiscal, do Ministério da Fazenda, que não fornece informações sobre a distribuição de renda abaixo de uma certa faixa salarial. Entretanto, apesar das limitações, os resultados encontrados mostram-se coerentes com a discussão teórica feita durante este trabalho.

O Capítulo II contém uma descrição da Lei de Pareto e o índice de Pareto, seguidos de uma crítica.

Procederemos, no Capítulo III, ao estudo de outros índices de concentração, conforme se segue, respectivamente: a curva de Lorenz e o índice de Gini, o índice de Theil e a Redundância, e a Variância dos Logs.

No Capítulo IV, é apresentado o modelo de Champernowne, o qual mostra, utilizando cadeias de Markov, como se pode sugerir o aparecimento da Lei de Pareto.

Finalmente, apresentamos no Capítulo V, uma aplicação da Lei de Pareto a dados brasileiros de declarantes do imposto de renda no período 1968-1975, a qual mostra as dificuldades de utilização desta lei a dados reais de rendimentos.

CAPÍTULO IIA LEI DE PARETO E SUA CRÍTICAII.1 - A Lei de Pareto

A preocupação pela maneira com que a renda é distribuída, entre os componentes de uma sociedade, é um tema que já vem interessando os economistas durante longa data. No entanto, somente no século passado, é que um instrumental para medir-se objetivamente a distribuição de renda dentro de uma sociedade passa a existir. A primeira tentativa de medir a distribuição de renda coincide com o surgimento da econometria e marca o seu início como ramo auxiliar da economia. VILFREDO PARETO |12| conduz a primeira investigação econométrica e descobre uma certa regularidade na distribuição da renda em um bom número de sociedades por ele investigadas. Essas sociedades variam no espaço, do "Peru às comunidades européias" e variam no tempo de 1471 a 1894. As investigações de Pareto, na determinação da regularidade na distribuição da renda, nos fornece a primeira medida objetiva de distribuição de renda de que se tem notícia.

No sistema de duas coordenadas cartesianas, Pareto escalou a renda por família no eixo horizontal (x), enquanto que no eixo vertical (y) escalou o número de famílias que tinham

renda igual ou superior a \underline{x} . Pareto mostrou que, em todos os casos por ele estudados, as curvas representativas da distribuição da renda tinham o mesmo formato, isto é, hipérbolas com a equação

$$y = \frac{A}{(x-a)^\alpha} \quad (\text{II.1})$$

onde \underline{a} representa a menor renda e \underline{A} e $\underline{\alpha}$ são parâmetros positivos.

A curva pode ser representada conforma a Figura II.1.

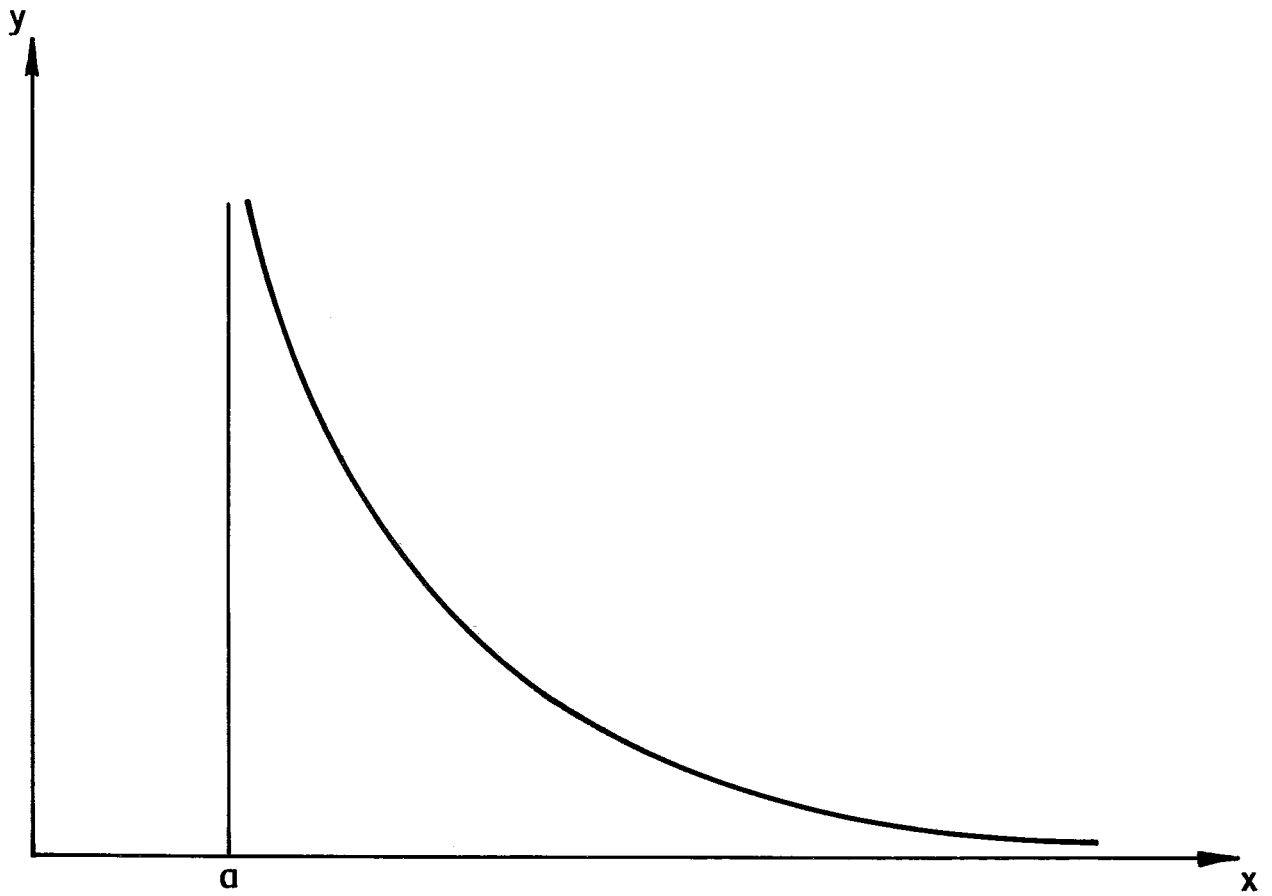
Quando $x \rightarrow a$, $y \rightarrow \infty$, e quando $x \rightarrow \infty$, $y \rightarrow 0$, logo a curva tem duas assíntotas: $x = a$ e $y = 0$. Se deslocarmos o eixo y ao ponto \underline{a} correspondente à menor renda, então $a = 0$ e a distribuição de Pareto toma a forma:

$$y = \frac{A}{x^\alpha} \quad (\text{II.2})$$

Esta é a expressão mais comum da distribuição de Pareto, devido ao fato que a maior parte dos dados sobre a renda omite rendas baixas. Como veremos adiante, se tivéssemos informações sobre a população mais pobre, veríamos que a curva cortaria o eixo $x = a$ em algum ponto, onde a distribuição de Pareto deixaria de ter validade.

O parâmetro α indica a convexidade da hipérbole em relação à origem. Se α tender ao infinito, a hipérbole é absorvida por sua assíntota vertical, o que indica que todos os com

FIGURA II.1 : REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA LEI DE PARETO



ponentes de uma sociedade têm aquela renda (α na Figura II.1). Quando α tende a zero, a desigualdade na renda cresce, e a curva tende para uma reta horizontal.

Ao calcular o parâmetro α , Pareto descobriu que ele variava de 1,13 em Ausburg em 1536, a 1,89 na Rússia em 1852, com uma média de 1,51. Supondo, uma distribuição normal da variável alfa, sabemos que 99% das observações encontrar-se-ão dentro de três desvios padrões da média, ou seja, entre 0,8447 e 2,5235.

Pareto considerava que a distribuição da renda e da riqueza nas sociedades humanas tendia a se ajustar à lei que ele estabeleceu, independentemente da sua organização econômico-social. Ele verificou que a sua "curva de rendas" era semelhante para diferentes países e em diversos períodos (Inglaterra, Prússia e Saxônia no século XIX, Peru no século XVIII, na Basília medieval etc.). Com base em dados apresentados por HUBERMAN [6], verifica-se que a curva de Pareto ajusta-se bastante bem à distribuição dos escravos entre seus senhores, nos Estados Unidos, em 1850.

O sistema social (capitalista, feudal, escravista) varia, mas a lei de distribuição, conforme afirmava Pareto, permanece válida.

LANGE [9] nega que a lei descoberta por Pareto seja uma lei natural, válida em todos os sistemas sociais. Esse au

tor conclui que as rendas de um grupo social homogêneo distribuem-se segundo uma curva normal simples ou logarítmica. Mostra ainda que a distribuição dos trabalhadores e empregados na Polônia, segundo seus salários no mes de setembro de 1965, ajusta-se à distribuição logarítmica-normal e não à distribuição de Pareto. Essa lei é, portanto, uma característica de sistemas sociais em que a riqueza acumulada possibilita controlar o trabalho criador de nova riqueza, e não de qualquer sociedade humana.

Em relação a certas interpretações da lei de Pareto é interessante lembrar os seguintes comentários feitos por TAWNEY [14], em 1929: "há leis científicas que estabelecem relações invariáveis entre fenômenos, e há leis que não são nem jurídicas nem, no seu sentido mais completo, científicas, embora elas pertençam, sem dúvida, à mesma categoria das últimas. Tais leis não estabelecem relações invariáveis nem indicam uma conduta, mas descrevem como, no geral, sob determinadas condições históricas e legais, e quando condicionados por certas convenções e idéias, grupos específicos de pessoas tendem, em regra, a se comportar". ...

"É evidente que, como os economistas têm frequentemente nos lembrado, muitas leis econômicas são do terceiro tipo, não do primeiro nem do segundo. Elas indicam a maneira pela qual, dadas certas condições históricas, certa forma de organização social, e certas instituições jurídicas, a produção tende a ser conduzida e a riqueza distribuída.

Elas não são menos instrutivas e úteis por causa disso, ao menos para aqueles que sabem interpretá-las. Mas aqueles que, embora bem sucedidos e ricos, não estão completamente conscientes das armadilhas preparadas aos incautos, e que se deleitam quando ouvem falar de uma lei que dá suporte, como parece a eles, as suas próprias preferências instintivas por sucesso e riqueza, algumas vezes encontram, nas leis econômicas, uma fonte de confusão intelectual, que é desesperador para qualquer pessoa enfrentar, e em particular, deve-se supor, para os economistas. Eles lançam mão de fórmulas elaboradas para demonstrar que o sistema social particular que foram acostumados a admirar é o produto de forças incontroláveis com as quais é perigoso a sociedade interferir. Eles se lançam à panacéia da moda no momento para se livrar de suas responsabilidades, jogando-as sobre algum autômato econômico.

Como um bêbado que argumenta com seu vício como desculpa para beber, eles apelam para leis econômicas, a maioria das quais são meramente uma descrição da maneira pela qual, em um certo ambiente e em certas circunstâncias, os homens tendem a se comportar, como uma prova de que é impossível para eles modificar seu comportamento."

II.2. Crítica à Lei de Pareto

A lei criada por Pareto, se aplicada à distribuição de rendas, só se ajusta às rendas das classes mais privilegiadas.

Trabalhando com dados de diversos países em diferentes períodos, Pareto chegou a uma curva de distribuição de rendas que acreditava "natural". Além de não ter nada de natural, sendo uma característica do sistema social considerado, gostaríamos de chamar a atenção para a inconveniência da utilização da lei de Pareto quando quisermos estudar a distribuição de rendas de uma determinada população.

Como vimos na seção II.1, a lei de Pareto pode ser representada pela equação (II.1) ou simplificada pela equação (II.2).

O coeficiente de Pareto é o parâmetro α das equações (II.1) ou (II.2). Quando α tende para o infinito o gráfico da Figura II.1 tende para sua assíntota vertical o que significa que a renda é mais igualmente distribuída. Quando α tende para zero, o gráfico da Figura II.1 tende para sua assíntota horizontal ($Y = A$) o que significa que a desigualdade na distribuição de rendas é máxima. Portanto, quanto maior for o valor de α , melhor será a distribuição de rendas.

A equação (II.2) pode ser linearizada tomando-se o lo-

garitmo dos dois lados da equação. Obtemos então

$$\log Y = \log A - \alpha \log x \quad (\text{II.3})$$

que permite a estimação do coeficiente de Pareto α pelo método dos mínimos quadrados lineares.

A imprefeição da lei de Pareto pode ser observada na equação (II.2) visto que Y tende para infinito à medida que x tende para zero. Na prática, existe um número finito de pessoas de forma que a situação real seria melhor representada pela Figura II.2, onde x_1 é a renda abaixo da qual a lei de Pareto deixa de ser válida, e Y_{\max} representa a população total.

Ao tomarmos os logaritmos das variáveis x e Y , obtemos a Figura II.3, onde somente a parte correspondente às rendas altas (a partir de x_1) aparece efetivamente linearizada.

Na prática, a renda x_1 tende a ser elevada, de forma que o coeficiente de Pareto só se aplica a rendas altas (este ponto será verificado empiricamente no Capítulo V).

Finalmente, a aplicação da lei de Pareto a fenômenos tais como distribuição de rendas, firma por capital, escravos entre seus senhores, artigos por autores, trabalhadores por sindicatos etc. não têm nada de especial, pois qualquer tipo de distribuição contínua possui a forma aproximada da Figura II.2 (linha cheia). Portanto, nada mais natural do que o fato da lei de Pareto se aplicar à parte superior das diversas distribuições. O que não deve ser esquecido é o fato de existir um

FIGURA II.2 : A DISTRIBUIÇÃO REAL DE RENDAS
E A CURVA DE PARETO

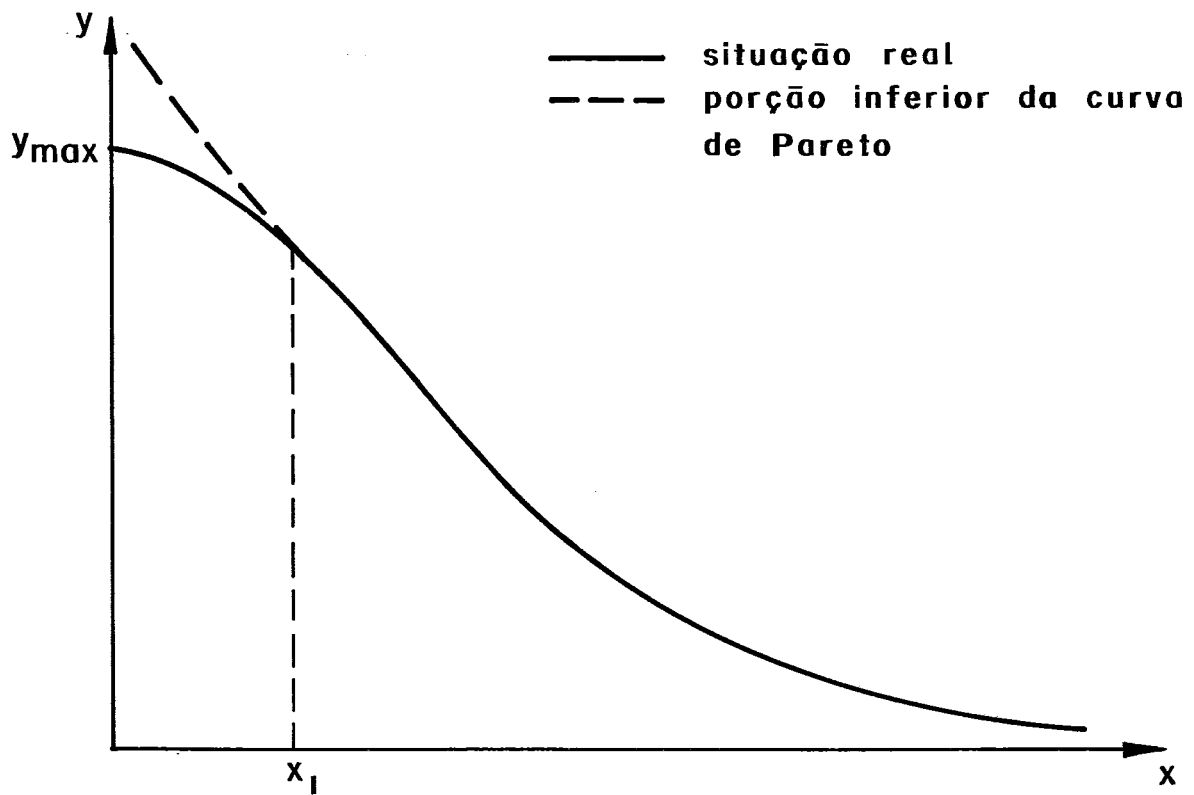
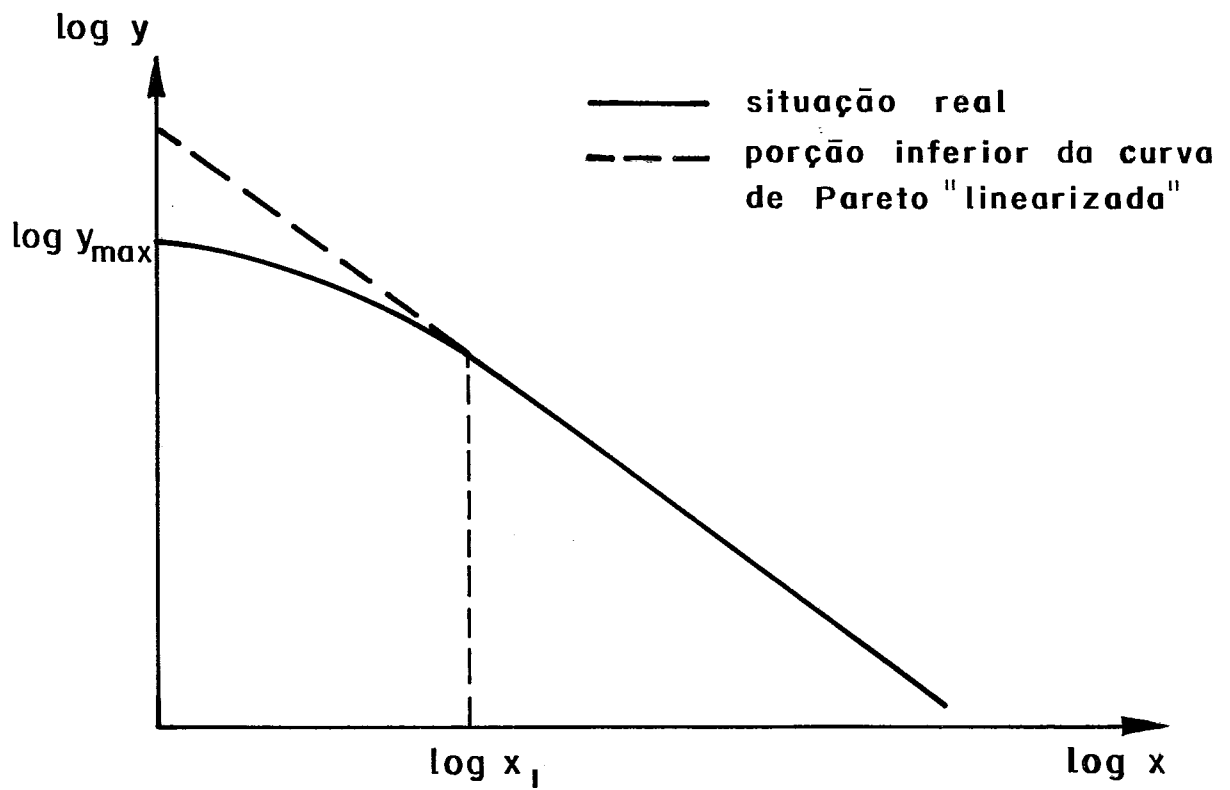


FIGURA II.3 : " LINEARIZAÇÃO " DA CURVA DE PARETO



valor mínimo da variável considerada x_1 , a partir do qual a distribuição em questão se aproxima da lei de Pareto.

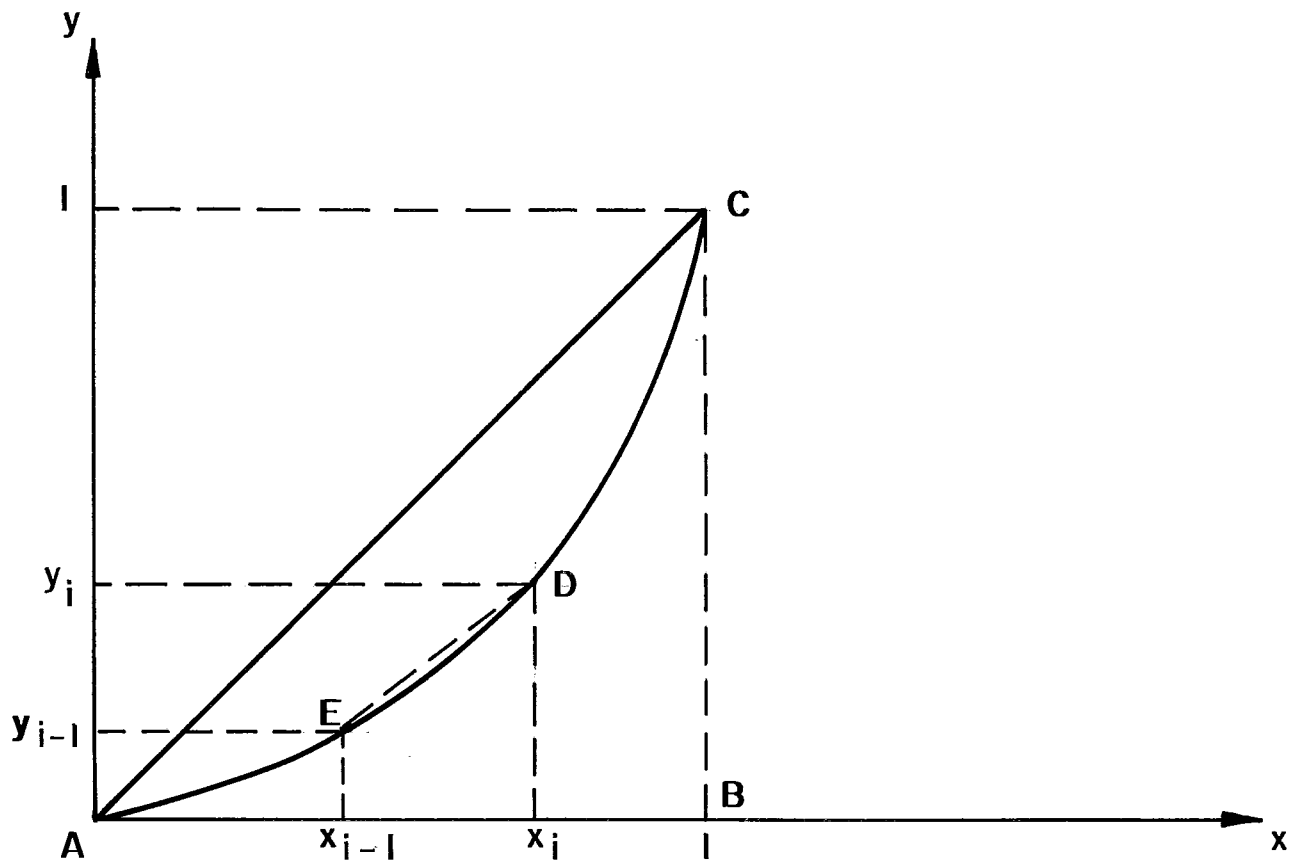
CAPÍTULO IIIOUTROS ÍNDICES DE CONCENTRAÇÃOIII.1. A Curva de Lorenz e o Índice de Gini

Lorenz teceu uma crítica à abordagem de Pareto sobre a distribuição de renda. Diz LORENZ [11]: "O método (de Pareto) é especialmente inaplicável a dados onde o intervalo mais alto é dado como aqueles recebendo mais que uma dada quantia, pois, imagine uma comunidade onde o indivíduo mais rico se torna multi-milionário sem nenhuma mudança na riqueza dos outros componentes da sociedade. A curva de Pareto nada nos mostraria acerca desta modificação".

Num sistema de eixos cartesianos ortogonais, Lorenz propôs que se lançasse, no eixo das abcissas, as frações acumuladas do número de pessoas, a partir daquelas de menor renda, e, no eixo das ordenadas, as frações acumuladas da renda total recebida (Veja Figura III.1). A curva resultante representaria a distribuição relativa da renda. Na opinião de Lorenz, esta representação resolveria a limitação da distribuição de Pareto, embora só tivesse um significado visual, pois nenhuma medida quantitativa foi associada a ela.

Ficou para GINI [2] sugerir uma medida quantitativa

FIGURA III.1 : CURVA DE LORENZ



que, associada à distribuição de Lorenz, nos daria um índice de desigualdade na distribuição.

Se a renda fosse igualitariamente distribuída, a cada fração acumulada do número de pessoas (x_i , $i = 1, 2, \dots, n$) corresponderia uma igual fração acumulada da renda (y_i , $i = 1, 2, \dots, n$), o que seria representado por uma reta de 45° relativa à origem (reta \overline{AC} na Figura III.1), chamada linha de perfeita igualdade ou reta de equidistribuição. No outro extremo teríamos o caso da perfeita desigualdade, representado pela poligonal ABC, a linha da perfeita desigualdade. Uma distribuição qualquer será simbolizada por uma curva localizada entre as linhas de perfeita igualdade e de perfeita desigualdade como a curva ADC no gráfico. O nível de desigualdade da distribuição pode ser medido pela área compreendida entre a reta de equidistribuição e a curva de Lorenz, chamada "área de desigualdade". O índice de Lorenz (L) é definido como a razão entre a área de desigualdade e a área do triângulo formado pela reta de equidistribuição e a linha de perfeita desigualdade. No caso do gráfico, temos:

$$L = \frac{\text{área ACD}}{\text{área ACB}} = \frac{\text{área ACD}}{\triangle}$$

Gini conseguiu um valor aproximado da área compreendida entre a curva de Lorenz e o eixo das abcissas, calculando a área do polígono cujos vértices são a origem dos eixos, o ponto B e os pontos (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$. Esse polígono pode ser decomposto em n trapézios (ou em um triângulo e $n-1$ trapézios). As bases do i -ésimo trapézio são y_i e y_{i-1} , e sua al-

tura é $(x_i - x_{i-1})$.

A área do i -ésimo trapézio é dada por

$$S_i = \frac{Y_i + Y_{i-1}}{2} (x_i - x_{i-1}) \quad (\text{III.1})$$

Um valor aproximado da área de desigualdade é dado por

$$0,5 - \sum_{i=1}^n S_i \quad (\text{III.2})$$

uma vez que a área do triângulo ABC é 0,5. O índice de Gini é dado por:

$$G = \frac{0,5 - \sum_{i=1}^n S_i}{0,5} = 1 - 2 \sum_{i=1}^n S_i \quad (\text{III.3})$$

Substituindo (III.1) em (III.3) temos

$$G = 1 - \sum_{i=1}^n (Y_i + Y_{i-1})(X_i - X_{i-1}) \quad (\text{III.4})$$

Observe que G é maior ou igual à zero e menor ou igual à unidade. Quanto maior seu valor pior será a distribuição da renda.

No cálculo do índice de Gini não se incluem, na área de desigualdade, as áreas compreendidas entre a curva de Lorenz e a poligonal cujos vértices são a origem dos eixos e os pontos (X_i, Y_i) . Isso faz com que o índice de Gini seja sempre uma subestimação da desigualdade real. Quando substituímos a curva de Lorenz pela poligonal estamos admitindo que, dentro dos es-

tratos, a renda seja igualitariamente distribuída.

DAVIS [2] deduziu uma formulação básica que relaciona o coeficiente de Pareto e o índice de concentração de Gini através da relação:

$$G = \frac{1}{2\alpha - 1} \quad (\text{III.5})$$

onde G é o índice de concentração de Gini e α é o coeficiente de Pareto.

Observe que (III.5) só é válida para α maior do que 1, pois caso contrário o índice de Gini seria superior à unidade.

Da definição do índice de concentração de Gini pode ser visto que, quanto maior for o seu valor, maior é a "área de desigualdade", com a curva de Lorenz mais próxima do eixo das abcissas, ou seja próxima à linha da perfeita desigualdade.

Valores baixos do índice de concentração de Gini indicam maior igualdade na distribuição de renda, e, no limite inferior, quando o índice de concentração é nulo, a curva de Lorenz coincide com a reta da perfeita igualdade, isto é, a cada fração acumulada do número de pessoas corresponde uma igual fração acumulada da renda recebida.

III.2. Variância dos Logaritmos

A variância dos logaritmos (variância dos logs), como o próprio nome sugere, é a variância da variável renda logaritmada, i.e.

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\log Z_i - \overline{\log Z})^2 \quad (\text{III.6})$$

onde

n é o número de indivíduos da população

Z_i é a renda do indivíduo i

$\overline{\log Z}$ é a média da variável renda logaritmada, i.e.

$$\overline{\log Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log Z_i. \quad (\text{III.7})$$

No caso em que as rendas são fornecidas por faixas podemos utilizar a fórmula aproximada

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f_i (\log Z_i - \overline{\log Z})^2 \quad (\text{III.8})$$

onde

f_i é a frequência de indivíduos na faixa i

Z_i é a renda média da faixa i

$\overline{\log Z}$ é a média da variável renda logaritmada, quando todos os indivíduos da faixa i são considerados recebendo a renda Z_i , i.e.

$$\overline{\log Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^m f_i \log z_i \quad (\text{III.9})$$

onde

m é o número de faixas.

A necessidade de se logaritmar as rendas para se tomar a variância é para se evitar que aumentos proporcionais de rendas acarretassem aumentos na variância. Assim, se considerássemos uma população composta por dois indivíduos onde a renda do primeiro fosse um cruzeiro e a do segundo fosse 9 cruzeiros teríamos a mesma variância dos logs que se considerássemos as rendas dos dois indivíduos iguais a 10 e 90 cruzeiros respectivamente. Neste caso, para a variância dos logs o que importa é a relação entre as rendas e não a diferença entre elas. Se utilizássemos a variância sem logaritmar as rendas, teríamos no segundo caso uma variância maior, quando na realidade a distribuição de renda entre os dois indivíduos nas duas populações é a mesma, i.e. 10% da renda para o indivíduo mais pobre e 90% para o indivíduo mais rico.

A variância dos logs é uma medida que tende para zero, à medida em que a distribuição da renda tende para uma situação igualitária, e tende para valores cada vez maiores quando a renda tende a ficar concentrada nas mãos de um único indivíduo. Portanto, quanto maior o seu valor pior a situação de distribuição de renda dos indivíduos.

Uma das vantagens da variância dos logs é que ela pode ser decomposta em duas parcelas onde uma mede a desigualdade entre os diversos grupos de renda, e a outra mede a desigualdade dentro de cada grupo [15].

Assim podemos escrever

$$V = \sum_{i=1}^m x_i (\log w_i)^2 + \sum_{i=1}^m x_i V_i \quad (\text{III.10})$$

onde

x_i é a participação relativa dos indivíduos do grupo i no total da renda;

w_i é a renda relativa do grupo i ;

V_i é a variância dos logs dentro do grupo i .

III.3. O Índice de Theil

Antes de desenvolvermos o índice de Theil, torna-se necessário apresentar os conceitos básicos da teoria na qual esse índice foi baseado - a teoria da informação.

Suponha que um evento E irá ocorrer com probabilidade p , $0 \leq p \leq 1$. Suponha ainda que, mais tarde, é recebida uma mensagem garantindo que E ocorreu. Se p estivesse próxima de 1, não seria surpresa saber que o evento E ocorreu. Ao contrário, se p estivesse próxima de zero, não seria surpresa saber que o evento E não ocorreu. No primeiro caso ($p \sim 1$)

diz-se que a mensagem tem pouco conteúdo de informação, enquanto que no segundo caso ($p \sim 0$) diz-se que a mensagem tem grande conteúdo de informação.

Pelo que foi dito acima, conclui-se que o conteúdo de informação $h(p)$ da mensagem deve ser uma função decrescente da probabilidade de ocorrência p do evento E , função essa que pode ser definida como o logaritmo do inverso de p , ou seja:

$$h(p) = \log \frac{1}{p} = - \log p \quad (\text{III.11})$$

A escolha dessa função pode ser entendida com base nos seguintes axiomas:

- 1º axioma: "A informação depende unicamente da probabilidade p "
- 2º axioma: " $h(p)$ é uma função contínua de p , $0 < p < 1$ "
- 3º axioma: "A surpresa é infinita quando se é informado que alguma coisa que tinha probabilidade zero ocorreu, enquanto que a surpresa é nula quando ocorre um evento que tem probabilidade unitária, $h(0) = \infty$ e $h(1) = 0$ "
- 4º axioma: " $h(p)$ é uma função monotonicamente decrescente, $h(p_1) > h(p_2)$ se $0 < p_1 < p_2 < 1$ "
- 5º axioma: "há aditividade no caso de eventos independentes, $h(p_1, p_2) = h(p_1) + h(p_2)$ se $0 < p_1, p_2 < 1$ "

O ganho de informação, segundo Theil, pode ser definido como segue:

$$h(p_0) - h(p_1) = \log \frac{p_1}{p_0} \quad (\text{III.12})$$

onde:

p_1 é a probabilidade do evento depois que a mensagem é recebida;

p_0 é a probabilidade do evento antes que a mensagem se ja recebida.

Suponhamos que $\{E_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$ forme um sistema completo de eventos (exatamente um deles ocorrerá) com probabilidades associadas $\{p_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}$. Devemos ter

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1, \quad p_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Se uma mensagem definitiva e confiável nos assegura que E_i ocorreu, definimos conteúdo esperado da informação por:

$$H(p) = \sum_{i=1}^n p_i h(p_i) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i \quad (\text{III.13})$$

onde

$$p \equiv (p_1, p_2, \dots, p_n)$$

e

$$H(p) \geq 0$$

Utilizando o método dos multiplicadores (λ) de Lagrange, para obtermos o máximo da função $H(p)$ temos que maximizar a função:

$$- \sum_{i=1}^n p_i \log p_i - \lambda \left(\sum_{i=1}^n p_i - 1 \right) \quad (\text{III.14})$$

Diferenciando em relação a p_i , e igualando a zero obtemos

$$- 1 - \log p_i = \lambda \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{III.15})$$

expressão que nos informa serem todos os p_i , $i = 1, 2, \dots, n$, equiprováveis, isto é

$$p_i = \frac{1}{n} \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (\text{III.16})$$

Assim, substituindo (III.16) em (III.13), obtemos

$$H_{\max} = \log n \quad (\text{III.17})$$

donde

$$0 \leq H(p) \leq \log n \quad (\text{III.18})$$

A informação esperada da distribuição é freqüentemente chamada de entropia.

Theil estabeleceu seu índice a partir de considerações sobre a renda.

Consideremos um grupo arbitrário de receptores de rendimentos e vamos assumir que nenhum dos rendimentos é negativo (não há perdas) e que pelo menos algum deles é positivo. Então, quando existem n indivíduos, existem n quantidades não ne-

gativas de rendimento individual que somam uma quantidade positiva de rendimento total. Equivalentemente, cada indivíduo ganha uma fração não negativa y_i , $i = 1, 2, \dots, n$, do rendimento total, e a soma dos y 's é 1:

$$\sum_{i=1}^n y_i = 1 \quad y_i \geq 0 \quad i = 1, 2, \dots, n$$

A teoria da informação nos fornece uma medida "natural" da desigualdade de rendimentos, entre os n indivíduos, baseada nestes y_i 's. Temos igualdade completa quando todos os indivíduos ganham os mesmos rendimentos. Esta quantidade é $y_i = \frac{1}{n}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Temos desigualdade completa quando um rendimento individual é igual ao rendimento total, com todos os outros indivíduos sem nada receber. Então, $y_i = 1$ para algum i , $y_j = 0$ para cada $j \neq i$. O primeiro caso (igualdade completa) fornece o valor máximo, $\log n$, para a expressão $H(y)$ abaixo:

$$H(y) = - \sum_{i=1}^n y_i \log y_i$$

e o segundo caso (desigualdade completa) corresponde ao mínimo de $H(y)$, zero.

Para se trabalhar com uma medida "natural" da desigualdade de rendimentos, basta subtrair $H(y)$ de seu valor máximo, ou seja

$$\log n - H(y) = \sum_{i=1}^n y_i \log \frac{y_i}{\frac{1}{n}} \quad (\text{III.19})$$

onde [15]

$$\sum_{i=1}^n y_i \log \frac{y_i}{\frac{1}{n}} = \sum_{k=1}^K y_k \log \frac{Y_k}{n_k/n} + \sum_{k=1}^K y_k \left[\sum_{i \in S_k} \frac{y_i}{Y_k} \log \frac{y_i/Y_k}{1/n_k} \right] \quad (\text{III.20})$$

é a medida desejada. Nesta relação, K indica o número de subconjuntos S_1, S_2, \dots, S_K tal que cada indivíduo pertença a exatamente um dos $S_k, k = 1, 2, \dots, K$; n_k é o número de indivíduos em S_k tal que $\sum_{k=1}^K n_k = n$ e Y_k é definido por

$$Y_k = \sum_{i \in S_k} y_i, \quad k = 1, 2, \dots, K.$$

Em (III.20), a primeira parcela trata da desigualdade entre conjuntos. As probabilidades anteriores são as frações n_k/n dos vários conjuntos no número total de indivíduos (porções da população). As probabilidades posteriores são as porções de rendimento Y_k dos vários conjuntos. Quando os rendimentos per capita de todos os conjuntos K são os mesmos, as porções de rendimento e população são paralelamente iguais:

$$Y_k = \frac{\text{rendimento de } S_k}{\text{rendimento total}} = \frac{n_k \times \text{rendimento per capita de } S_k}{n \times \text{rendimento per capita total}} = \frac{n_k}{n} \quad \text{se todos os rendimentos per capita forem iguais.}$$

Nesse caso, a primeira soma em k em (III.20) desaparece

ce.

Na segunda soma em k , na equação (III.20), as probabilidades anteriores são todas iguais a $1/n$ e, portanto, iguais à fração da população que cada indivíduo representa no conjunto de todos os indivíduos. Nas expressões separadas intra conjunto, no membro à direita, temos $1/n_k$ como as probabilidades anteriores, as quais são as frações da população dentro do conjunto relevante. Em ambos os casos, as probabilidades anteriores são independentes de i . As probabilidades posteriores dependem de i : no membro à esquerda, elas são da forma y_i , que são frações de renda não condicionais; no membro à direita temos y_i/Y_k , que são frações de renda condicionais. Obtemos, então, consistência na agregação quando interpretamos a medida da desigualdade como a informação esperada de uma mensagem que transforma frações da população em frações de renda.

CAPÍTULO IVO MODELO DE CHAMPERNOWNEIV.1. O Modelo de Champernowne e a Lei de Pareto

CHAMPERNOWNE [1] desenvolveu um modelo de distribuição de renda onde a modelagem estocástica é feita mediante a utilização das cadeias de Markov.

No processo descrito por Champernowne, os sucessivos estados buscam retratar a renda anual de uma pessoa, mas esse mesmo processo pode ser adaptado também para outros estudos como, por exemplo, o crescimento de firmas.

No modelo de Champernowne, os sucessivos estados da cadeia de Markov indicam os níveis de renda, com as linhas da matriz indicando as diferentes classes discriminadas pelos níveis alternativos de rendas no ano corrente enquanto as colunas da matriz discriminam as diferentes classes pelos níveis alternativos de renda no ano seguinte. Cada elemento da matriz nos fornecerá a probabilidade de transição da classe de renda R_r no ano corrente para a classe de rendas R_s no próximo ano.

Champernowne supõe que os rendimentos são divididos nu

ma infinidade enumerável de faixas de rendimentos, as quais têm extensão proporcionalmente uniforme. Por exemplo, podemos considerar as faixas de rendimentos anuais serem CR\$ 1.000,00 a CR\$ 2.000,00, CR\$ 2.000,00 a CR\$ 4.000,00, CR\$ 4.000,00 a CR\$ 8.000,00 etc.

Os estados das cadeias de Markov são as diversas faixas de rendimento. Assim, o estado 0 pode representar rendimentos entre CR\$ 1.000,00 e CR\$ 2.000,00; o estado 1 pode representar rendimentos entre CR\$ 2.000,00 e CR\$ 4.000,00; o estado 2 pode representar rendimentos entre CR\$ 4.000,00 e CR\$... 8.000,00 etc.

Dentro das considerações do modelo de Champernowne, a evolução da distribuição das rendas poderia ser resumida numa descrição em termos dos seguintes vetores e matrizes:

$X_r(t)$ nos fornecendo o número de pessoas componentes da classe de nível de rendas R_r , $r = 1, 2, \dots$ no ano t .

$P'_{rs}(t)$ nos fornecendo a probabilidade de transição dos ocupantes no ano t da classe de nível de renda R_r para a classe R_s no ano $t+1$.

Com estas definições, a distribuição de rendimentos $X_r(t)$ nos sucessivos períodos de tempo será gerada por:

$$X_s(t+1) = \sum_{r=0}^{\infty} X_r(t) P'_{rs}(t) \quad (\text{IV.1})$$

Podemos supor, como é conveniente, que as classes de rendas são ordenadas de acordo com o tamanho, havendo uma faixa de renda mínima R_0 .

Podemos agora definir um novo conjunto de probabilidades de transição

$$P_{ru}(t) = P'_{r, r+u}(t)$$

e reescrever (IV.1) na seguinte forma

$$X_s(t+1) = \sum_{u=-\infty}^s X_{s-u}(t) P_{s-u,s}(t) \quad (\text{IV.2})$$

$P_{ru}(t)$, então, representa a proporção dos ocupantes em R_r que se deslocaram u faixas de rendimentos para cima.

A vantagem principal da equação IV.2, segundo Champowne, decorre do fato que, no mundo real, os deslocamentos têm amplitude razoavelmente limitada, de modo que cada $P_{ru}(t)$, encarada como uma distribuição de frequência em u , está aproximadamente centrada em torno de $u = 0$.

Para obtenção de modelos simples, seria interessante que se pudesse supor que $P_{ru}(t)$, encarada como uma distribuição de frequência em u , diferísse muito pouco na sua forma para variações numa grande amplitude de valores de r e t .

Quando se considera a contrapartida prática para esta

suposição, nota-se que as perspectivas de deslocamentos ascendentes e descendentes, entre os ocupantes de diferentes classes de rendimento, diferem muito pouco, bem como tais perspectivas se mantêm aproximadamente constantes de ano para ano.

Tais hipóteses não podem ser aplicadas a todas as classes de rendimento. Por exemplo, do rendimento de um homem rico pode ser deduzido algum risco (através da morte ou má sorte) de ser rebaixado a uma faixa menor no ano seguinte, mas dos rendimentos na faixa mínima não pode, por definição, ser deduzida esta possibilidade.

Champernowne procura contornar o problema da relativa constância da distribuição de frequência em u , para uma grande amplitude de valores de r , da seguinte forma:

"... as mudanças absolutas na renda são de se esperar muito mais altas para rendas de £1.000.000 do que para rendas de £100 de modo que as mudanças devem ter uma amplitude de valor absoluto maior para as rendas altas do que para as baixas, se nossa simplificação pretende ter alguma plausibilidade. A escolha óbvia de intervalos de classe é aquela indicada anteriormente, onde cada classe tem igual extensão proporcional, pois então, fenômenos universais tais como movimentos nos preços e taxas de juro, que são prováveis de alternar, aproximadamente da mesma forma em termos proporcionais, perspectivas de renda para classes distintas R_r e R_s , irão afetar as diferentes funções $P_{ru}(t)$

e $P_{su}(t)$ aproximadamente da mesma forma".

Champernowne reconhece que a suposição de relativa constância das funções, em sucessivos períodos de tempo, é uma hipótese muito forte e bastante simplificadora mas, mesmo assim, ele se propõe a sustentá-la, argumentando a necessidade de um estudo do equilíbrio estático gerado por um conjunto fixo de funções $P'_{rs}(t)$ como sendo um passo preliminar no estudo do equilíbrio dinâmico, com $P'_{rs}(t)$ mutáveis no tempo.

Champernowne busca explicitar, dentro dos pressupostos de seu modelo, as condições para um estado de equilíbrio estacionário. Consideremos uma população e sua estrutura etária. A população, naturalmente, está em estado de contínuo fluxo: as pessoas nascem e morrem de forma não determinística. No entanto, a longo prazo, a estrutura etária tenderá para uma distribuição estável (supondo-se a inexistência de migrações) determinada pelas probabilidades de nascimento e de morte para as diferentes idades.

Suponhamos agora a intervenção de um fator externo (por exemplo, uma epidemia) que altere a estrutura etária anterior. Se as probabilidades de nascimento e morte para as diferentes idades forem mantidas as mesmas após tal evento, a longo prazo, a população tenderá a observar uma estrutura etária de equilíbrio estável que seria a mesma observada anteriormente.

Segundo Champernowne, a aplicação repetida de uma matriz $P'_{rs}(t)$, sob algumas condições gerais, fará com que qualquer distribuição inicial de rendimentos se aproxime eventualmente de uma única distribuição de equilíbrio que é determinada apenas pela matriz de probabilidades $P'_{rs}(t)$.

A Tabela IV.1 mostra uma estimativa da matriz de transição para a Inglaterra e País de Gales, apresentada por Champernowne.

Esta tabela mostra algum grau de regularidade nos dados, em cada diagonal, com uma tendência para os menores rendimentos subirem mais faixas do que os altos rendimentos.

TABELA IV.1

Estimativas para as probabilidades de transição para a Inglaterra e País de Gales (1951-52)

Faixa de renda (em libras)	s=	P _{rs}														
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
£ 89-E 111	0	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
£ 112-E 141	1	0.020	0.672	0.202	0.083	0.023	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
£ 142-E 177	2	0.015	0.020	0.674	0.204	0.068	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
£ 177-E 221	3	0.007	0.014	0.030	0.676	0.205	0.019	-	-	-	-	-	-	-	-	-
£ 222-E 281	4	-	0.012	0.015	0.040	0.672	0.053	0.015	-	-	-	-	-	-	-	-
£ 282-E 354	5	-	-	0.016	0.017	0.052	0.207	0.043	0.011	-	-	-	-	-	-	-
£ 355-E 445	6	-	-	-	0.015	0.018	0.666	0.209	0.033	0.007	-	-	-	-	-	-
£ 446-E 562	7	-	-	-	-	0.013	0.075	0.666	0.200	0.023	0.004	-	-	-	-	-
£ 563-E 707	8	-	-	-	-	-	0.020	0.096	0.658	0.198	0.013	0.002	-	-	-	-
£ 708-E 892	9	-	-	-	-	-	0.016	0.035	0.100	0.632	0.200	0.015	0.002	-	-	-
£ 893-E 1119	10	-	-	-	-	-	-	0.018	0.049	0.104	0.607	0.205	0.015	0.010	0.002	-
£ 1120-E 1409	11	-	-	-	-	-	-	-	0.017	0.050	0.106	0.625	0.190	0.010	0.005	0.001
										0.015	0.051	0.108	0.646	0.178	0.005	0.001

Fonte: CHAMPERNOWNE, D.G. [1].

Feitas estas considerações, podemos discutir a existência ou não de uma distribuição estacionária dentro das hipóteses do modelo de Champernowne.

Champernowne faz a suposição adicional de que as transições sejam possíveis somente dentro de uma amplitude contida no intervalo $[-n, 1]$, ou seja, transições para faixas de rendimentos inferiores podem se dar até n faixas para baixo, durante um ano, e, neste mesmo período de tempo as transições para faixas de rendimentos superiores só podem ocorrer para o estado imediatamente acima.

Teremos assim:

$$P_{ru}(t) = \begin{cases} P_u > 0 & \text{se } -n \leq u \leq 1 \quad \text{e } u > -r \\ \sum_{j=-n}^{-r} P_j & \text{se } r < n \quad \text{e } u = -r \\ 0 & \text{se } u > 1 \quad \text{ou } u < -n \end{cases} \quad (\text{IV.3})$$

onde $\sum_{u=-n}^1 P_u = 1$

A matriz de probabilidades de transição do modelo de Champernowne pode ser descrita, para $n = 5$, como vemos na Tabela IV.2:

Observando a matriz de transição do modelo de Champernowne, podemos afirmar que ela retrata um processo markoviano onde todos os estados são comunicantes, isto é, partindo de um estado inicial qualquer podemos ir a qualquer outro estado, e, partindo deste estado, podemos voltar ao estado que lhe deu origem. Portanto, existe apenas uma classe, e tal matriz é dita irredutível. Além disso ela é aperiódica pois $P_{r0}(t) = P_0$ para todo r . Portanto, para que exista uma distribuição estacionária é preciso apenas que a cadeia de Markov seja recorrente-positiva.

O seguinte teorema, cuja prova está apresentada em ROSS [13], confirma as afirmações do parágrafo acima:

"Numa cadeia de Markov irredutível, aperiódica e recorrente-positiva, temos que:

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^n > 0$$

Neste caso, $\{\pi_j, j = 0, 1, 2, \dots\}$ é uma distribuição estacionária, e não existe nenhuma outra distribuição estacionária, onde P_{ij}^n significa a probabilidade do processo saindo do estado i entrar no estado j , após n transições".

Existindo a distribuição estacionária, a equação (IV.

1) se transforma em:

$$X_s = \sum_{u=-n}^1 X_{s-u} P_u \quad (\text{IV.4})$$

Tomando $X_s = z^s$ e fazendo as substituições adequadas em (IV.4), encontramos:

$$z^s = \sum_{u=-n}^1 P_u z^{s-u}$$

e, dividindo ambos os membros por z^{s-1}

$$z = \sum_{u=-n}^1 P_u z^{1-u}$$

obtemos então a seguinte equação:

$$\sum_{u=-n}^1 P_u z^{1-u} - z = 0 \quad (\text{IV.5})$$

ou, equivalentemente,

$$g(z) = 0 \quad (\text{IV.6})$$

onde

$$g(z) = \sum_{u=-n}^1 P_u z^{1-u} - z \quad (\text{IV.7})$$

Champernowne introduz as seguintes condições de estabilidade que, como veremos adiante, são suficientes para garantir que a matriz seja recorrente-positiva:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } g(0) = P_1 > 0 \\ \text{ii) } g'(1) = - \sum_{u=-n}^1 u P_u > 0 \end{array} \right. \quad (\text{IV.8})$$

Para obtermos $g(0) = P_1$, basta desenvolver o polinômio $g(Z)$.

Teremos então

$$g(Z) = P_1 - Z + P_0 Z + P_{-1} Z^2 + P_{-2} Z^3 + P_{-3} Z^4 + \dots$$

Colocando Z em evidência, encontramos:

$$g(Z) = P_1 + (P_0 - 1 + P_{-1} Z + P_{-2} Z^2 + P_{-3} Z^3 + \dots) Z$$

Substituindo $Z = 0$, obtemos

$$g(0) = P_1$$

Para obtermos $g'(1) = - \sum_{u=-n}^1 u P_u$, observe-se que:

$$g'(Z) = -1 + \sum_{u=-n}^1 (1-u) P_u Z^{-u}$$

$$g'(Z) = -1 + \sum_{u=-n}^1 (P_u - u P_u) Z^{-u}$$

Portanto,

$$g'(1) = -1 + \sum_{u=-n}^1 P_u - \sum_{u=-n}^1 u P_u$$

$$g'(1) = -1 + 1 - \sum_{u=-n}^1 u P_u$$

$$g'(1) = - \sum_{u=-n}^1 u P_u$$

A primeira condição de estabilidade do modelo de Champernowne garante que o rendimento de uma pessoa possa aumentar, enquanto que a segunda condição implica em que a amplitude esperada do salto, nas transições entre os diferentes níveis de rendimentos, seja negativa, isto é, para todos os rendimentos, em qualquer uma das faixas salariais, o número médio de faixas deslocadas durante o próximo ano é negativo.

Para confirmarmos esta afirmação observe-se que:

$$g'(1) = -1P_1 + 0P_0 + 1P_{-1} + 2P_{-2} + 3P_{-3} + \dots$$

$$\dots + nP_{-n}$$

$$g'(1) = -(1P_1 - 1P_{-1} - 2P_{-2} - 3P_{-3} - \dots - nP_{-n})$$

$$g'(1) = - (\text{valor médio do tamanho do salto})$$

Como uma das condições do modelo de Champernowne é $g'(1) > 0$ (hipótese de estabilidade), o valor médio do tamanho do salto será negativo.

Esta condição é necessária pois, do contrário, o processo seria dissipativo, isto é, os rendimentos aumentariam i limitadamente.

Passaremos agora ao estudo das raízes do polinômio.

$$g(Z) = \sum_{u=-n}^1 P_u Z^{1-u} - Z$$

Observamos que

$$\lim_{Z \rightarrow +\infty} g(Z) = +\infty$$

visto que o termo de maior grau do polinômio tem coeficiente positivo.

Observamos ainda que:

$Z = 1$ é uma raiz da equação $g(Z) = 0$, pois tomando-se $Z = 1$, temos

$$\sum_{u=-n}^1 P_u - 1 = 0, \text{ o que é uma identidade}$$

Observamos ainda que pela lei dos sinais de Descartes, o número de raízes positivas da equação $f(Z) = a_0 Z^n + a_1 Z^{n-1} + \dots + a_n = 0$ ($a_0 \neq 0$) é igual ao número de mudanças de sinal na seqüência a_0, a_1, \dots, a_n ou é menor por um número ímpar.

No caso de $g(Z)$ temos duas mudanças de sinal pois

o coeficiente de Z^0 será igual a $P_1 > 0$

o coeficiente de Z^1 será igual a $P_0 - 1 < 0$

o coeficiente de Z^2 será igual a $P_{-1} > 0$

o coeficiente de Z^3 será igual a $P_{-2} > 0$

⋮

o coeficiente de Z^i será igual a $P_{-(i-1)} > 0$

⋮

o coeficiente de Z^{n+1} será igual a $P_{-n} > 0$

Com duas trocas de sinal podemos ter então duas raízes positivas, ou ainda, uma raiz positiva.

Graficamente, o comportamento de $g(Z)$ pode ser descrito conforme Figura IV.1.

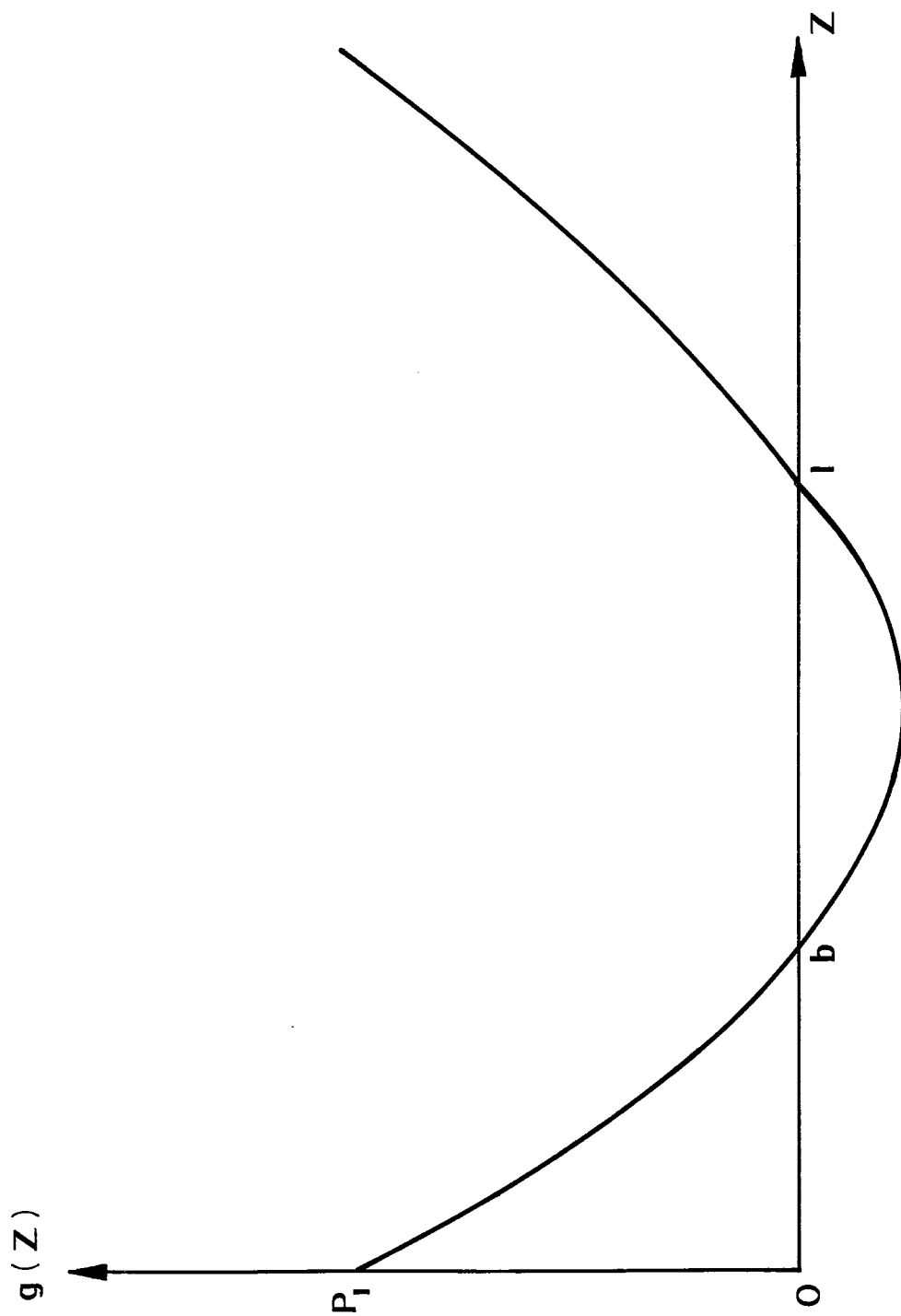
Tornam-se agora claros os motivos para a necessidade formal das "condições de estabilidade" impostas por Champernowne, visto que elas nos garantem a existência da segunda raiz b , tal que $0 < b < 1$. A primeira condição nos diz que o gráfico estava acima dos eixos das abcissas no ponto $Z = 0$, e a segunda condição, $g'(1) > 0$ estabelece que o gráfico corte o eixo das abcissas no ponto 1 de baixo para cima, de forma que a derivada em tal ponto seja positiva.

Portanto, a segunda raiz de $g(Z) = 0$ está contida no intervalo $(0,1)$, e, portanto, $X_s = b^s$ decresce com s .

Se $X_s = b^s$ é o número de pessoas na classe s , o número total de pessoas em todas as classes será dado então pela soma de uma progressão geométrica infinita de razão b , ou seja, o número total de pessoas será $\frac{1}{1-b}$.

Em termos probabilísticos isto quer dizer que se o processo de crescimento dos rendimentos estivesse sujeito à matriz de transição do modelo de Champernowne, então, após um tempo suficientemente grande, teríamos a probabilidade $(1-b)b^s$ de encontrar uma pessoa na classe s .

FIGURA IV.1 : GRÁFICO REPRESENTATIVO DO COMPORTAMENTO DE $g(Z)$



Consideraremos agora que contamos com uma população de N pessoas. A distribuição estacionária de equilíbrio pode ser obtida como se segue:

Total	Classes
$\frac{1}{1-b}$	b^s
N	X_s

Assim,

$$X_s = \frac{Nb^s}{\frac{1}{1-b}} = N(1-b)b^s$$

Suporemos agora que os intervalos de classe para os diversos rendimentos sejam 2^h e que o menor rendimento considerado seja Y_{\min} . Assim, ao estado 0 da cadeia de Markov correspondem rendimentos no intervalo Y_{\min} a $Y_{\min} 2^h$, ao estado 1 correspondem rendimentos no intervalo $Y_{\min} 2^h$ a $Y_{\min} 2^{2h}$, ao estado 2 correspondem rendimentos no intervalo $Y_{\min} 2^{2h}$ a $Y_{\min} 2^{3h}$, e assim sucessivamente.

Na Tabela IV.3 foi considerado $Y_{\min} = 1$ e $h = 1$ de forma que ao estado 0 corresponde então a faixa de rendimentos entre 1 e 2; ao estado 1 corresponde a faixa de rendimentos entre 2 e 4 etc.

TABELA IV.3

Estados e respectivas faixas de rendimentos do
 modelo de Champernowne para $Y_{\min} = 1$
 e $h = 1$

estado	rendimentos (em mil cruzeiros)
0	1 - 2
1	2 - 4
2	4 - 8
3	8 - 16
⋮	

X_s será então o número de pessoas com rendimentos no intervalo de classe s cujo limite inferior será dado por:

$$Y_s = 2^{sh} Y_{\min}$$

Tomando-se o logaritmo na base 2, encontramos

$$\log Y_s = sh + \log Y_{\min}$$

Temos ainda que o número de pessoas com rendimento superior a Y_s será dado pela soma das pessoas componentes das classes de níveis de rendimentos maiores ou iguais a s . Teremos assim uma progressão geométrica infinita cujo primeiro termo será $N(1-b)b^s$ e cuja razão será b . Denotando por $F(Y_s)$ o número de pessoas com nível de rendimentos superior a Y_s , tere

mos então:

$$F(Y_s) = \frac{N(1-b)b^s}{1-b} = Nb^s$$

Portanto

$$\log F(Y_s) = \log N + s \log b$$

Definimos, a seguir, α e γ da seguinte forma:

$$\alpha = -\frac{1}{h} \log b \quad e$$

$$\gamma = \log N + \alpha \log Y_{\min}$$

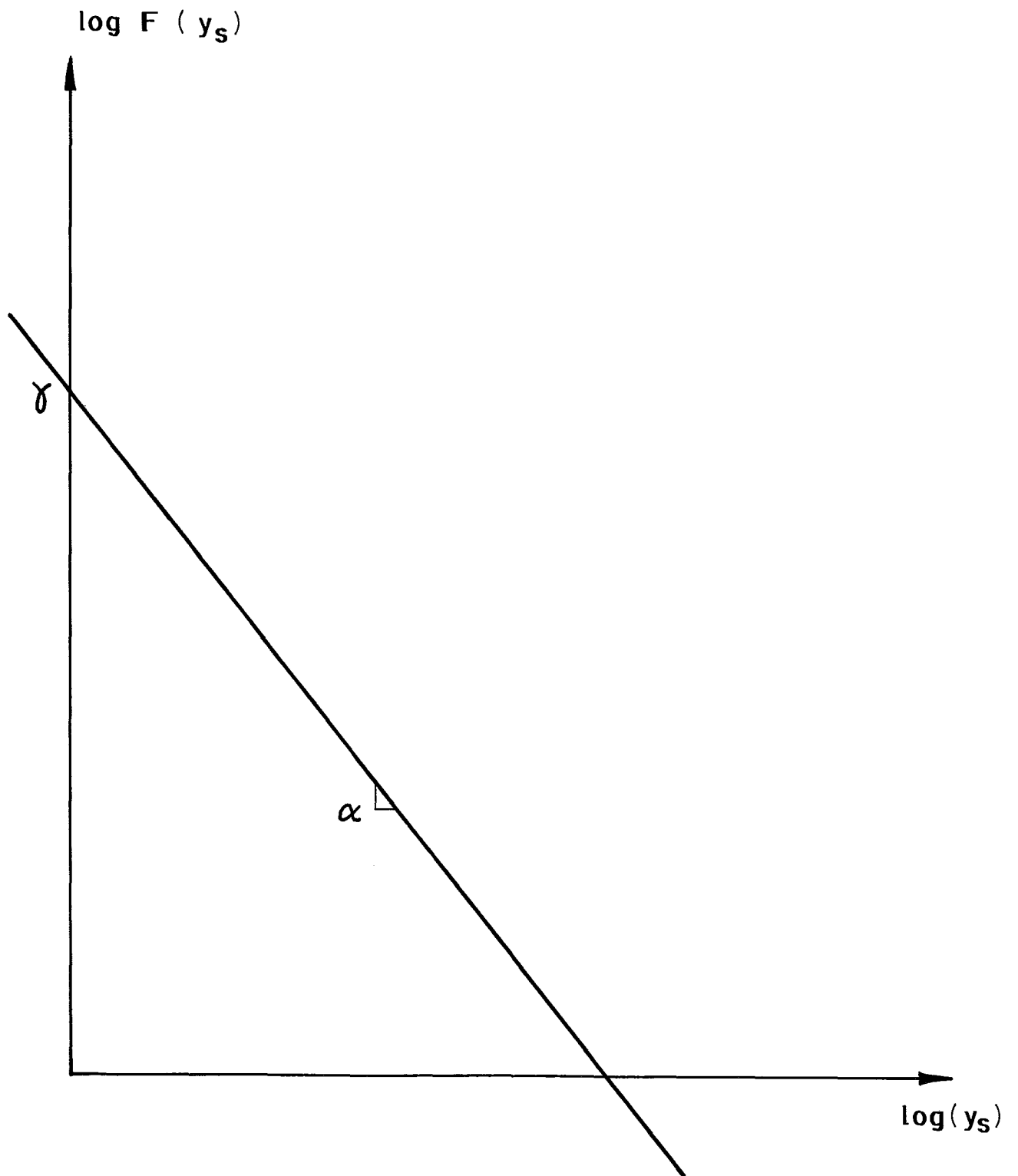
Recaímos, então, na seguinte equação que retrata a "lei de Pareto":

$$\log F(Y_s) = \gamma - \alpha \log Y_s \quad (\text{IV.9})$$

Desta forma, o modelo de Champernowne nos indica que, para qualquer valor de Y_s , o logaritmo do número de pessoas com rendimentos iguais ou superiores a Y_s é uma função linear do $\log Y_s$.

Graficamente, esta equação é representada da seguinte forma:

FIGURA IV.2 : REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DA EQUAÇÃO
(IV.9)



O coeficiente α da lei de Pareto dá uma idéia da distribuição de renda. Baixos valores de α significam uma tendência à centralização, ou seja, apenas uma pequena parte da população percebe bons rendimentos enquanto a maior parte da população é mal remunerada. Valores de α mais elevados significam que a renda é descentralizada, isto é, não existem grandes desníveis na distribuição dos rendimentos. A sociedade é "mais justa".

IV.2. Críticas ao Modelo de Champernowne

Um dos pontos críticos do Modelo de Champernowne é a hipótese, bastante simplificadora, de considerar apenas um número fixo de rendimentos e não levar em conta o problema criado por mortes, supondo que para qualquer receptor de renda, que por algum motivo deixe de existir, passará a haver exatamente um herdeiro. Em suas próprias palavras: "Na realidade novos receptores de renda aparecem a cada ano e antigos deixam de existir, mas uma suposição simplificadora, óbvia e fecunda será a de admitir que para cada morte de um receptor de renda corresponderá um herdeiro para sua renda no próximo ano, e vice-versa. Esta suposição implicará em que o número de rendas seja uma constante através do tempo e que as rendas existam individualmente embora seus recipientes sejam transitórios. Não haveria muita dificuldade em se assumir mais ou menos um herdeiro para cada morte, mas, no global, a perda de simplicidade iria provavelmente contrabalançar as vantagens devidas aos ganhos em verossimilhança".

Champernowne desenvolveu também outros modelos em que pequenas generalizações são feitas, tornando seus modelos mais próximos da realidade. Em suas generalizações, a "lei de Pareto" continua a vigorar. As duas principais generalizações feitas por Champernowne são:

- 1) a possibilidade de transições para diversos estados superiores e não apenas para o estado imediatamente acima;
- e 2) a limitação de probabilidades de transição independentes do rendimento apenas para os rendimentos mais altos.

É claro que, apesar das generalizações, o modelo de Champernowne ainda parece estar bastante distante da realidade. Entretanto, seu modelo consegue mostrar que, a partir de uma renda mínima, a "Lei de Pareto" seria adequada para a distribuição de rendimentos.

Diversos estudos empíricos, inclusive o nosso, têm demonstrado esta lei. O grande problema, entretanto, é que esta renda mínima, a partir da qual a lei de Pareto parece se ajustar, é bastante alta, como veremos no Capítulo V.

CAPÍTULO VAPLICAÇÃO E CONCLUSÕES

Neste capítulo, utilizamos dados referentes às rendas dos declarantes do imposto de renda no Brasil para o estudo empírico da Lei de Pareto e de seu coeficiente. Os dados utilizados foram retirados do Anuário Econômico Fiscal, edições de 1968 a 1975. Esses dados contêm as diversas faixas de rendimentos e o número de pessoas declarantes que pertencem a cada faixa (veja Tabelas A.1 a A.8 do Apêndice).

No tratamento dos dados de nossa amostra, utilizamos o programa de computador Statistical Package for Social Science (SPSS). Inicialmente, trabalhamos com a totalidade da amostra para cada ano, testando um ajustamento log-linear e plotando os gráficos respectivos. Posteriormente, fizemos "cortes" na amostra, eliminando as faixas inferiores, isto é, as faixas de menor rendimento, com a finalidade de, trabalhando com uma amostra menor, conseguirmos uma melhor linearização, testando o ajustamento da Lei de Pareto e traçando os gráficos respectivos.

Apresentamos, a seguir, os resultados obtidos, mostrando para cada ano, inicialmente, a situação relativa à amostra total, e, posteriormente, a situação relativa ao restante da população após o corte feito nas faixas inferiores.

É interessante observarmos que, para a segunda amostra, onde só se trabalha com rendas acima de uma certa renda mínima, foi conseguido um ajuste muito melhor. Isto está em concordância com o que foi dito na crítica à lei de Pareto, ou seja, esta lei só tem validade a partir de uma certa faixa de renda. Nos gráficos onde foram utilizados todos os pontos (1ª amostra) não se conseguiu uma boa linearização.

Os resultados das regressões para os anos do período 1968 a 1975 estão apresentados na Tabela V.1 (os gráficos respectivos são apresentados nas Figuras A.1 a A.8 do Apêndice).

TABELA V.1

Resultado da regressão linear para o período
1968-1975 considerando-se todas as faixas de
rendimentos

Ano	$\log \hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$S_{\hat{\beta}}$	R^2	d	N
1968	4.690	2.035	0.048	0.992	0.486	17
1969	5.331	2.137	0.066	0.989	0.420	14
1970	5.353	2.007	0.085	0.979	0.226	14
1971	5.488	1.947	0.084	0.978	0.235	14
1972	5.589	1.863	0.072	0.982	0.209	14
1973	5.894	1.906	0.081	0.979	0.233	14
1974	6.210	1.948	0.095	0.972	0.260	14
1975	6.755	2.034	0.078	0.978	0.172	17

$\log \hat{\alpha}$ é o estimador de mínimos quadrados de $\log \alpha$

$\hat{\beta}$ é o estimador de mínimos quadrados de β

$S_{\hat{\beta}}$ é o estimador para o desvio padrão de $\hat{\beta}$

R^2 é o coeficiente de determinação

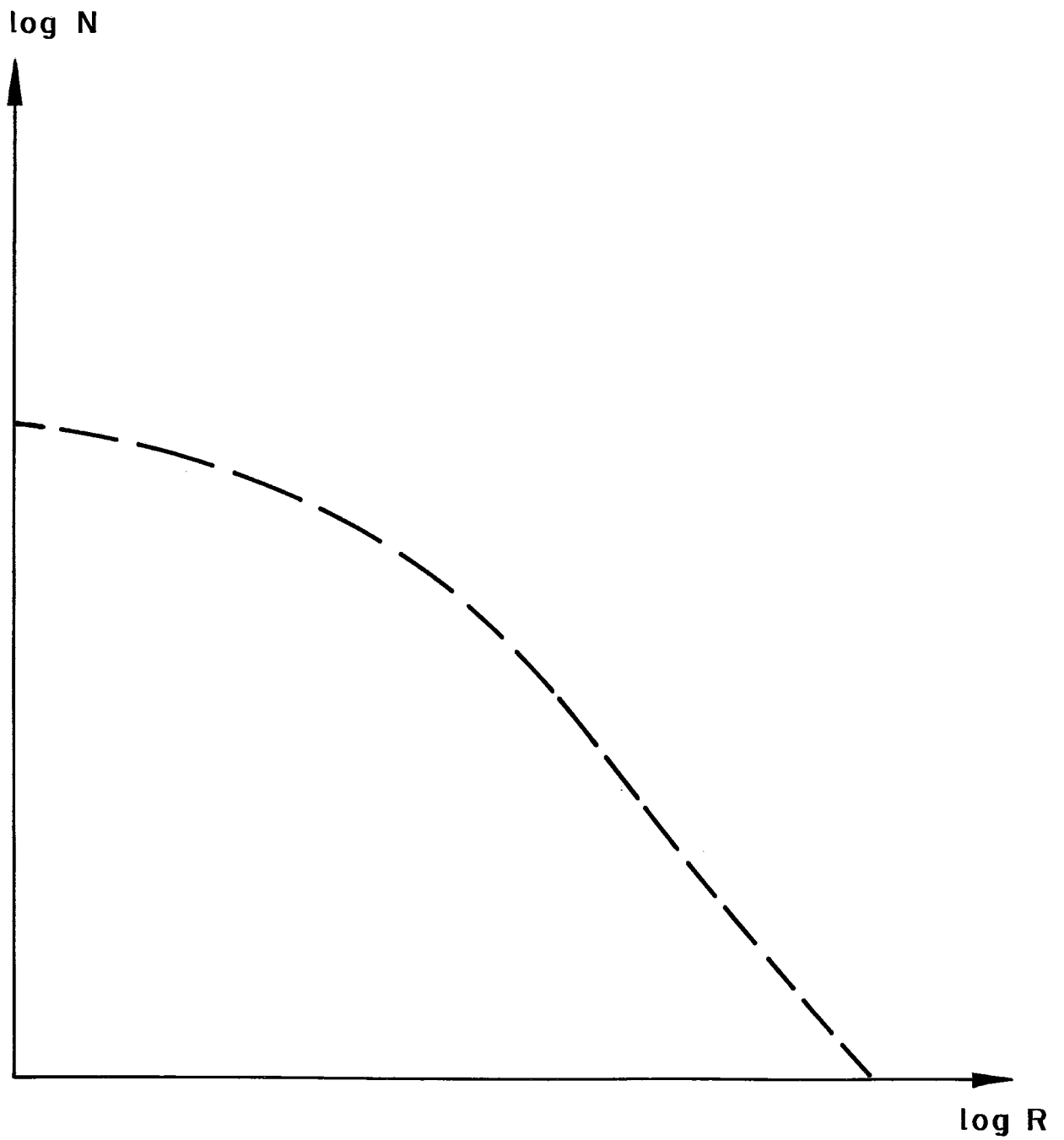
d é a estatística de Durbin-Watson

N é o número de faixas consideradas

Para verificarmos a linearização dos dados, utilizamos os resultados obtidos pela estatística de Durbin-Watson.

Se houver a não-linearização discutida no Capítulo II teremos a situação apresentada na Figura V.1 (veja também Figura II.3):

FIGURA V.1 : GRÁFICO REPRESENTATIVO DA NÃO-LINEARIZAÇÃO DA LEI DE PARETO.



Ao se ajustar a reta de regressão linear, teremos a situação apresentada na Figura V.2.

Para se testar se o modelo é adequado, podemos utilizar o teste de Durbin-Watson a um nível de significância de, digamos 1%, supondo a hipótese nula de que não há auto-regressão, isto é, existe linearização

$$H_0 : \rho = 0$$

onde ρ é o coeficiente de correlação entre resíduos vizinhos.

A hipótese alternativa é a de que existe auto-regressão positiva, isto é, existe não-linearização do tipo apresentado na Figura V.2.

$$H_A : \rho > 0$$

Utilizando o teste de Durbin-Watson para auto-regressão positiva, temos três possibilidades:

- i) não existe linearização, se $d < d_L$
- ii) existe linearização, se $d > d_u$
- iii) o teste é inconclusivo, se $d_L \leq d \leq d_u$

Os valores de d_L (para "limites inferiores") e d_u (para "limites superiores") foram obtidos da referência [8]. Estes valores são fornecidos a partir de 15 observações. Foi feita então uma extrapolação linear baseada nos dados fornecidos na tabela de Durbin-Watson, obtendo-se os resultados da

FIGURA V.2 : AJUSTE DA RETA DE REGRESSÃO LINEAR
À CURVA DE PARETO

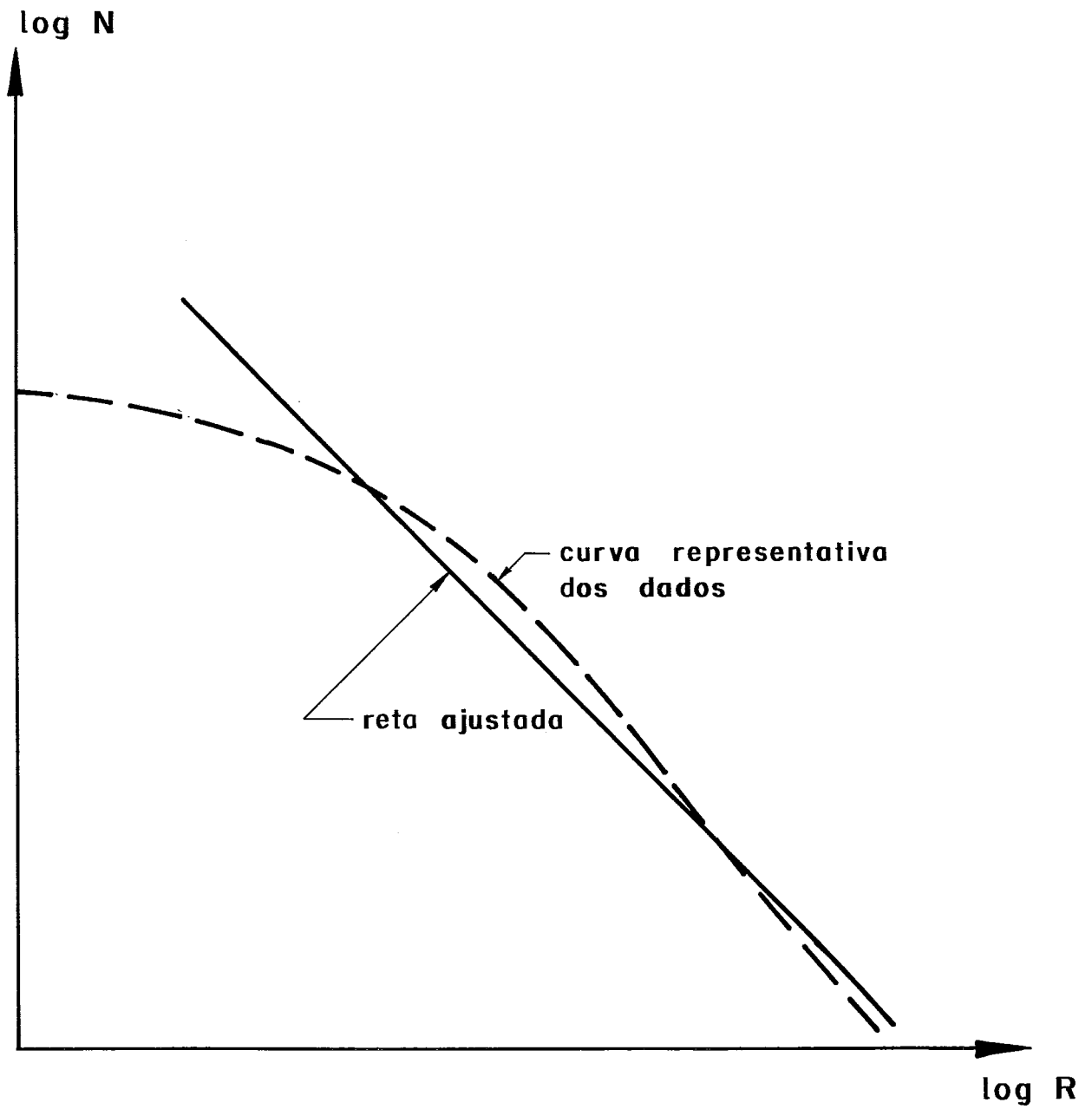


Tabela V.2:

TABELA V.2

Valores de d_L e d_u entre 8 e 14 observações ($\alpha = 1\%$)

n	d_L	d_u
8	0.60	0.93
9	0.63	0.95
10	0.66	0.97
11	0.69	0.99
12	0.72	1.01
13	0.75	1.03
14	0.78	1.05

De acordo com os resultados da estatística de Durbin-Watson (d), da Tabela V.1, obtemos os resultados para os testes descritos na Tabela V.3.

TABELA V.3

Resultados do teste de hipóteses utilizando-se todos os dados

Ano	Resultado do teste
1968	H_a ($d < d_L$) (não-linearização)
1969	idem
1970	idem
1971	idem
1972	idem
1973	idem
1974	idem
1975	idem

Como pode ser observado, em nenhum dos casos aceitou-se a hipótese de existência de linearização, quando se considera todas as faixas de rendimentos (1a. amostra). Isto vem confirmar o que foi dito no Capítulo II, ou seja, de que a lei de Pareto só é válida para as faixas superiores de renda.

Vamos trabalhar, agora, com a segunda amostra, onde foi feito um "corte" nas faixas de menor rendimento. O número de faixas eliminadas foi, de certa forma, arbitrário, procurando-se, entretanto, acompanhá-las ao longo do período. Os resultados das novas regressões estão apresentados na Tabela V. 4. (Os gráficos respectivos são apresentados nas Figuras A.9 a A.16 do Apêndice).

TABELA V.4

Resultado da regressão linear para o período 1968-1975 considerando-se apenas as faixas de rendimentos superiores

Ano	$\log \hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$S_{\hat{\beta}}$	R^2	d	N
1968	4.690	2.122	0.052	0.993	0.805	14
1969	5.809	2.337	0.020	0.999	1.584	11
1970	6.205	2.402	0.038	0.999	0.992	8
1971	6.373	2.342	0.035	0.999	0.841	8
1972	6.344	2.191	0.037	0.998	1.448	8
1973	6.811	2.289	0.036	0.999	1.392	8
1974	7.354	2.405	0.044	0.998	0.760	8
1975	7.652	2.378	0.046	0.997	0.889	10

$\log \hat{\alpha}$ é o estimador de mínimos quadrados de $\log \alpha$

$\hat{\beta}$ é o estimador de mínimos quadrados de β

$S_{\hat{\beta}}$ é o estimador para o desvio padrão de $\hat{\beta}$

R^2 é o coeficiente de determinação

d é a estatística de Durbin-Watson

N é o número de faixas consideradas

Utilizando-se a estatística de Durbin-Watson, com as mesmas hipóteses que foram consideradas para a primeira amostra, chegamos aos resultados descritos na Tabela V.5.

TABELA V.5

Resultado do teste de hipóteses utilizando-se apenas as faixas superiores

Ano	Resultado do teste
1968	teste inconclusivo ($d_L < d < d_u$)
1969	H_0 ($d > d_u$) - linearização
1970	H_0 ($d > d_u$) - linearização
1971	teste inconclusivo ($d_L < d < d_u$)
1972	H_0 ($d > d_u$) - linearização
1973	H_0 ($d > d_u$) - linearização
1974	teste inconclusivo ($d_L < d < d_u$)
1975	teste inconclusivo ($d_L < d < d_u$)

Comparando-se esses resultados com os obtidos na Tabela V.3, quando se considerou todas as faixas de rendimento, vemos que, para a nossa segunda amostra, os resultados obtidos foram bem melhores. Para quatro casos foi aceita a linearização e para os outros quatro casos o teste foi inconclusivo.

A conclusão que podemos tirar de nossos resultados empíricos é que a lei de Pareto descreve aproximadamente os dados de rendas apenas para as mais altas faixas de renda. Se levarmos em consideração que os declarantes de imposto de renda no Brasil representam uma pequena parcela da população brasileira, e que mesmo assim é preciso eliminar diversas faixas para que a lei de Pareto se aplique, podemos concluir que, pa-

ra efeitos práticos, o coeficiente de Pareto é de muito pouca utilidade para o estudo da distribuição de renda.

APÊNDICEDADOS UTILIZADOS E GRÁFICOS DA LEI DE PARETO

Os dados utilizados neste trabalho correspondem às declarações do Imposto de Renda no período 1968-1975, e foram retirados de diversas edições do Anuário Econômico Fiscal (1970-1975). Para os anos base de 1974 e 1975 foram utilizadas tabulações preliminares ainda não publicadas. Estes dados estão apresentados nas Tabelas A.1 a A.8.

Os gráficos referentes à "linearização" dos dados de renda, antes e depois da eliminação das faixas inferiores de renda, são apresentados nas Figuras A.1 a A.16.

TABELA A.1

Classes de rendimentos brutos, números de declarantes e rendimento bruto total dos declarantes de Imposto de Renda durante o ano de 1969, referentes ao ano-base de 1968

Classes de rendimentos brutos (em cruzeiros do ano-base)	Número de Declarantes	Rendimento bruto (em cruzeiros do ano-base)
até 3.500	1.511.750	2.453.184
3.501 - 6.240	1.373.865	6.477.205
6.241 - 12.480	1.009.257	8.748.510
12.481 - 18.720	277.872	4.177.787
18.721 - 24.960	96.463	1.991.408
24.961 - 37.440	89.169	2.570.546
37.441 - 49.920	22.809	952.787
49.921 - 68.640	11.952	655.265
68.641 - 93.600	5.285	388.566
93.601 - 24.800	2.241	214.727
124.801 - 162.240	986	123.002
162.241 - 205.920	502	72.144
205.921 - 255.840	275	51.251
255.841 - 312.000	130	27.909
312.001 - 374.400	83	18.457
374.401 - 449.280	56	13.418
449.281 - 898.560	76	9.174
898.561 - 1.797.120	14	2.096
1.397.121 - 3.594.240	12	478
acima de 3.594.240	3	3.983
TOTAL	4.402.800	28.943.931

TABELA A.2

Classes de rendimentos brutos, números de declarantes e rendimento bruto total dos declarantes do Imposto de Renda durante o ano de 1970, referentes ao ano-base de 1969

Classes de rendimentos brutos (em cruzeiros do ano-base)	Número de Declarantes	Rendimento bruto (em cruzeiros do ano-base)
até 4.200	2.523.469	6.031.729
4.200 - 7.480	1.752.756	10.844.636
7.481 - 14.960	1.247.700	13.679.183
14.961 - 22.440	375.714	6.671.244
22.441 - 29.920	158.001	3.802.233
29.921 - 44.480	133.985	4.126.393
44.481 - 59.840	47.149	1.910.260
59.841 - 82.280	26.574	1.356.193
82.281 - 112.200	12.195	794.032
112.201 - 149.600	5.155	444.370
149.601 - 194.480	2.271	268.596
194.481 - 374.000	2.155	397.941
374.001 - 1.077.120	595	251.109
1.077.121 - 2.154.240	51	60.267
acima de 2.154.240	9	20.675
TOTAL	6.287.779	50.658.861

TABELA A.3

Classes de rendimentos brutos, números de declarantes e rendimento bruto total dos declarantes de Imposto de Renda durante o ano de 1971, referentes ao ano-base de 1970

Classes de rendimentos brutos (em cruzeiros do ano-base)	Número de Declarantes	Rendimento bruto (em cruzeiros do ano-base)
até 5.040	3.681.469	8.260.299
5.041 - 5.400	243.696	1.272.776
5.401 - 7.200	1.078.711	6.758.231
7.201 - 10.080	1.017.238	8.686.707
10.081 - 14.400	802.948	9.629.581
14.401 - 19.800	507.857	8.529.117
19.801 - 27.000	329.953	7.571.296
27.001 - 36.000	198.172	6.141.544
36.001 - 54.000	168.523	7.308.404
54.001 - 72.000	60.110	3.709.242
72.001 - 108.000	40.323	3.464.751
108.001 - 144.000	12.045	1.479.066
144.001 - 288.000	8.687	1.625.612
288.001 - 864.000	1.621	677.773
acima de 864.000	141	203.176
TOTAL	8.151.492	75.317.575

TABELA A.4

Classes de rendimentos brutos, números de declarantes e rendimento bruto total dos declarantes de Imposto de Renda durante o ano de 1972, referentes ao ano-base de 1971

Classes de rendimentos brutos (em cruzeiros do ano-base)	Número de Declarantes	Rendimento bruto (em cruzeiros do ano-base)
até 6.048	4.857.196	8.162.729
6.049 - 6.480	240.863	1.508.079
6.481 - 8.640	1.106.470	8.293.195
8.641 - 12.096	1.073.874	11.006.810
12.097 - 17.280	857.159	12.338.411
17.281 - 23.760	547.071	11.012.747
23.761 - 32.400	359.655	9.907.244
32.401 - 43.200	224.695	8.365.773
43.201 - 64.800	194.494	10.138.850
64.801 - 86.400	73.374	5.430.620
86.401 - 129.600	49.232	5.077.855
129.601 - 172.800	14.431	2.128.993
172.801 - 345.600	11.011	2.482.222
345.601 - 1.036.800	2.323	1.183.210
acima de 1.036.800	197	345.752
TOTAL	9.612.045	97.382.690

TABELA A.5

Classes de rendimentos brutos, números de declarantes e rendimento bruto total dos declarantes de Imposto de Renda, durante o ano de 1973, referentes ao ano-base de 1972

Classes de rendimentos brutos (em cruzeiros do ano-base)	Número de Declarantes	Rendimento bruto (em cruzeiros do ano-base)
até 7.600	5.667.852	11.381.722
7.601 - 8.200	308.025	2.434.939
8.201 - 10.900	1.125.516	10.650.815
10.901 - 15.200	1.096.776	14.141.388
15.201 - 21.700	911.160	16.457.363
21.701 - 29.700	557.796	14.065.747
29.701 - 40.300	371.182	12.757.212
40.301 - 53.400	234.204	10.817.938
53.401 - 79.700	211.004	13.570.898
79.701 - 104.200	76.155	6.880.977
104.201 - 152.700	55.978	6.912.493
152.701 - 198.700	17.270	2.973.239
198.701 - 397.400	14.649	3.795.847
397.401 - 1.192.300	3.408	2.041.603
acima de 1.192.300	442	847.647
TOTAL	10.651.417	129.729.828

TABELA A.6

Classes de rendimentos brutos, números de declarantes e rendimento bruto total dos declarantes de Imposto de Renda, durante o ano de 1974, referentes ao ano-base de 1973.

Classes de rendimentos brutos (em cruzeiros do ano-base)	Número de Declarantes	Rendimento bruto (em cruzeiros do ano-base)
até 10.700	6.992.066	7.681.435
10.701 - 11.550	321.612	3.571.324
11.551 - 15.300	1.071.452	14.237.850
15.301 - 21.250	1.053.025	19.019.521
21.251 - 30.050	840.774	21.182.655
30.051 - 40.750	517.283	18.009.866
40.751 - 54.600	342.779	16.095.624
54.601 - 71.250	224.017	13.915.013
71.251 - 103.000	199.407	16.847.738
103.001 - 130.750	73.749	8.507.371
130.751 - 180.750	56.382	8.538.465
180.751 - 222.550	18.757	3.737.713
222.551 - 457.000	22.571	6.579.750
457.001 - 1.371.100	4.135	2.787.165
acima de 1.371.100	443	995.759
TOTAL	11.738.452	161.707.249

TABELA A.7

Classes de rendimentos brutos, números de declarantes e rendimento bruto total dos declarantes do Imposto de Renda durante o ano de 1975, referentes ao ano-base de 1974.

Classes de rendimentos brutos (em cruzeiros do ano-base)	Número de Declarantes	Rendimento bruto (em cruzeiros do ano-base)
até 13.900	6.281.517	6.708.666
13.901 - 15.000	342.355	4.949.947
15.001 - 19.900	1.040.523	18.000.949
19.901 - 27.600	1.088.974	25.480.974
27.601 - 39.100	879.608	28.789.257
39.101 - 53.000	542.151	24.509.773
53.001 - 71.000	361.911	22.103.452
71.001 - 92.600	240.474	19.427.683
92.601 - 133.900	217.247	23.874.020
133.901 - 170.000	80.423	12.056.704
170.001 - 235.000	61.702	12.144.746
235.001 - 289.300	20.974	5.424.124
289.301 - 594.100	24.108	9.117.926
594.101 - 1.782.500	4.118	3.570.129
acima de 1.782.500	325	1.006.019
TOTAL	11.186.410	217.164.376

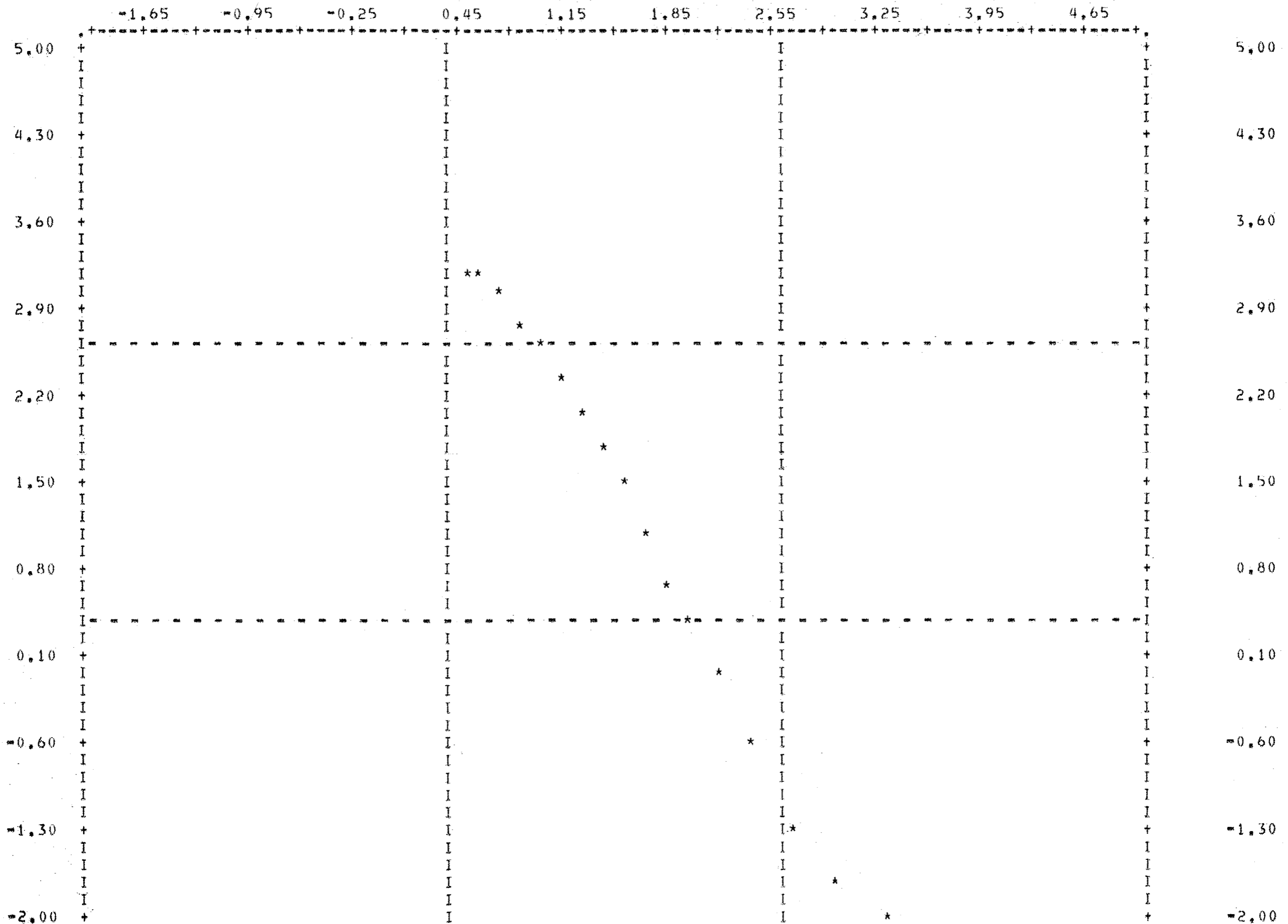
TABELA A. 8

Classes de rendimentos brutos, números de declarantes e rendimento bruto total dos declarantes do Imposto de Renda durante o ano de 1976, referente ao ano-base de 1975

Classes de rendimentos brutos (em cruzeiros do ano-base)	Número de Declarantes	Rendimento bruto (em cruzeiros do ano-base)
até 26.000	12.161.997	11.103.365
26.001 - 30.500	542.378	15.325.879
30.501 - 36.500	583.966	19.543.116
36.501 - 44.000	552.201	22.125.378
44.001 - 52.500	464.669	22.324.753
52.501 - 63.500	428.164	24.689.940
63.501 - 77.000	332.862	23.224.730
77.001 - 93.000	261.876	22.113.494
93.001 - 112.000	207.848	21.158.499
112.001 - 134.500	159.347	19.519.668
134.501 - 163.500	129.107	19.085.365
163.501 - 197.000	89.329	15.986.591
197.001 - 238.000	64.186	13.839.778
238.001 - 310.000	57.214	15.576.847
310.001 - 500.000	42.971	16.252.437
500.001 - 772.500	10.761	6.453.021
772.501 - 2.317.500	4.554	5.114.766
acima de 2.317.500	466	3.829.429
TOTAL	16.093.896	297.067.085

FILE VALORE (CREATION DATE = 06/06/77)
SCATTERGRAM OF (DOWN) Y1

(ACROSS) X1

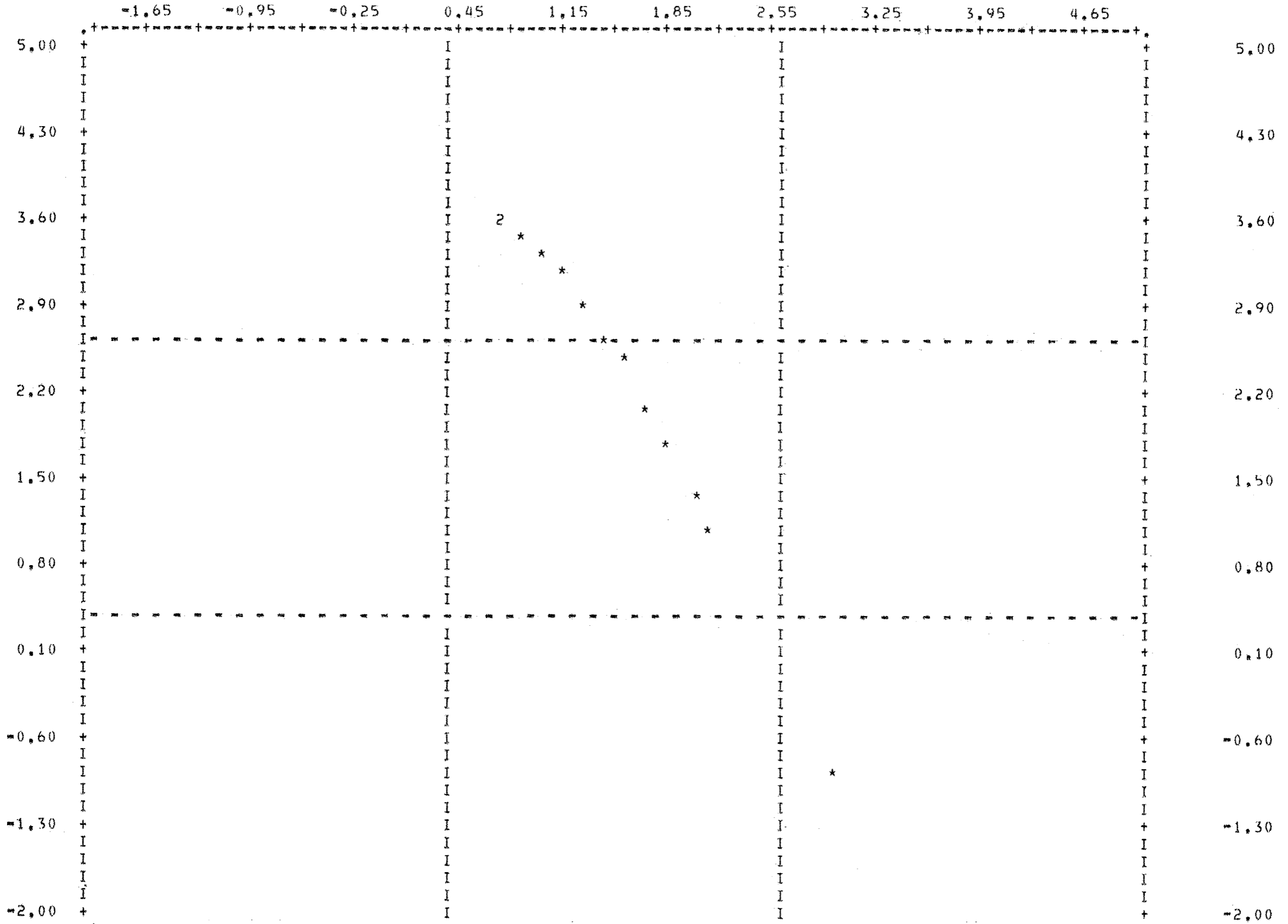


NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

FILE VALORE (CREATION DATE = 06/06/77)
SCATTERGRAM OF (DOWN) Y1

(ACROSS) X1



NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

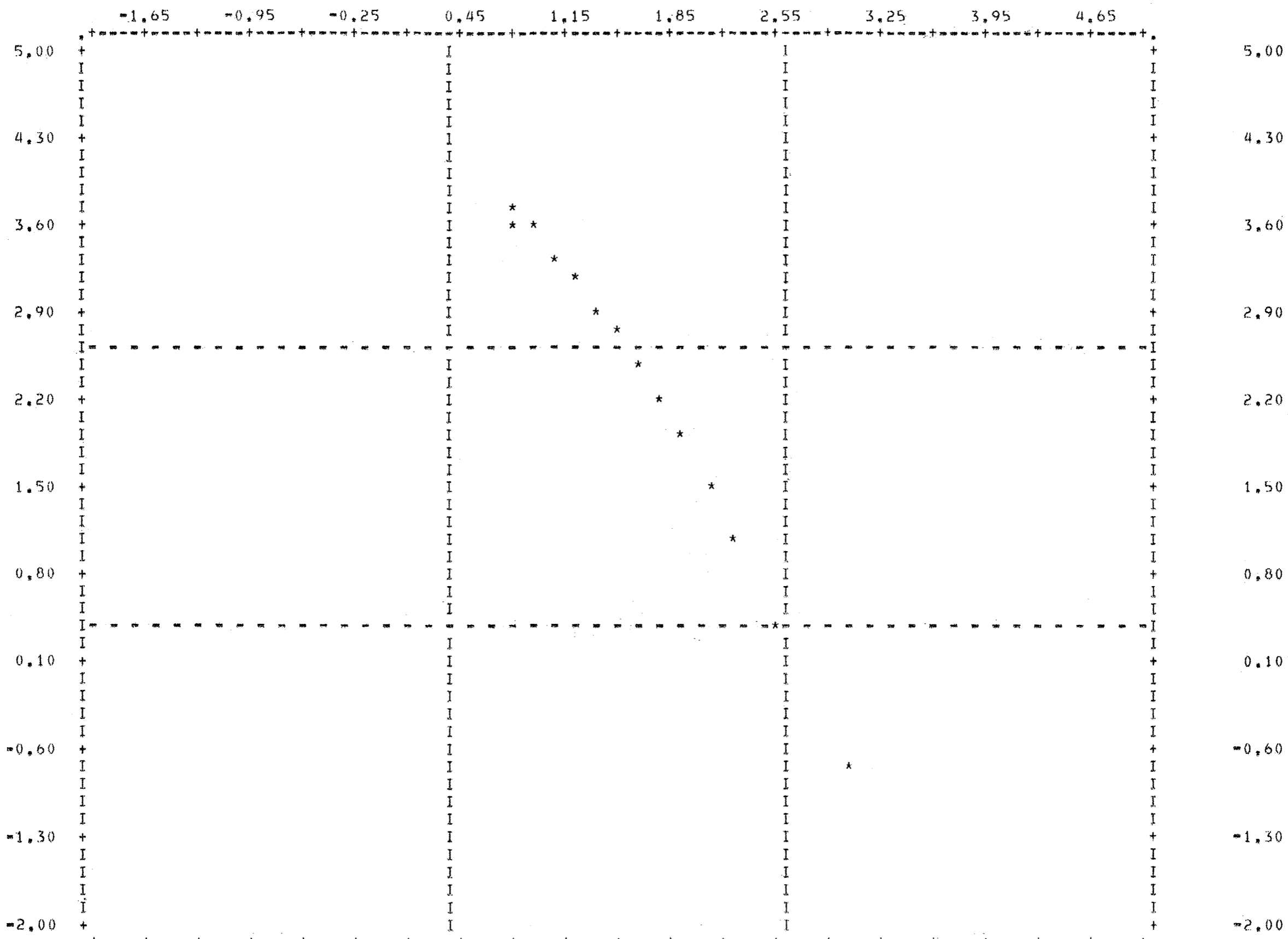
FR

NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

FR

FILE VALORE (CREATION DATE = 06/06/77)
SCATTERGRAM OF (DOWN) Y1

(ACROSS) X1



NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

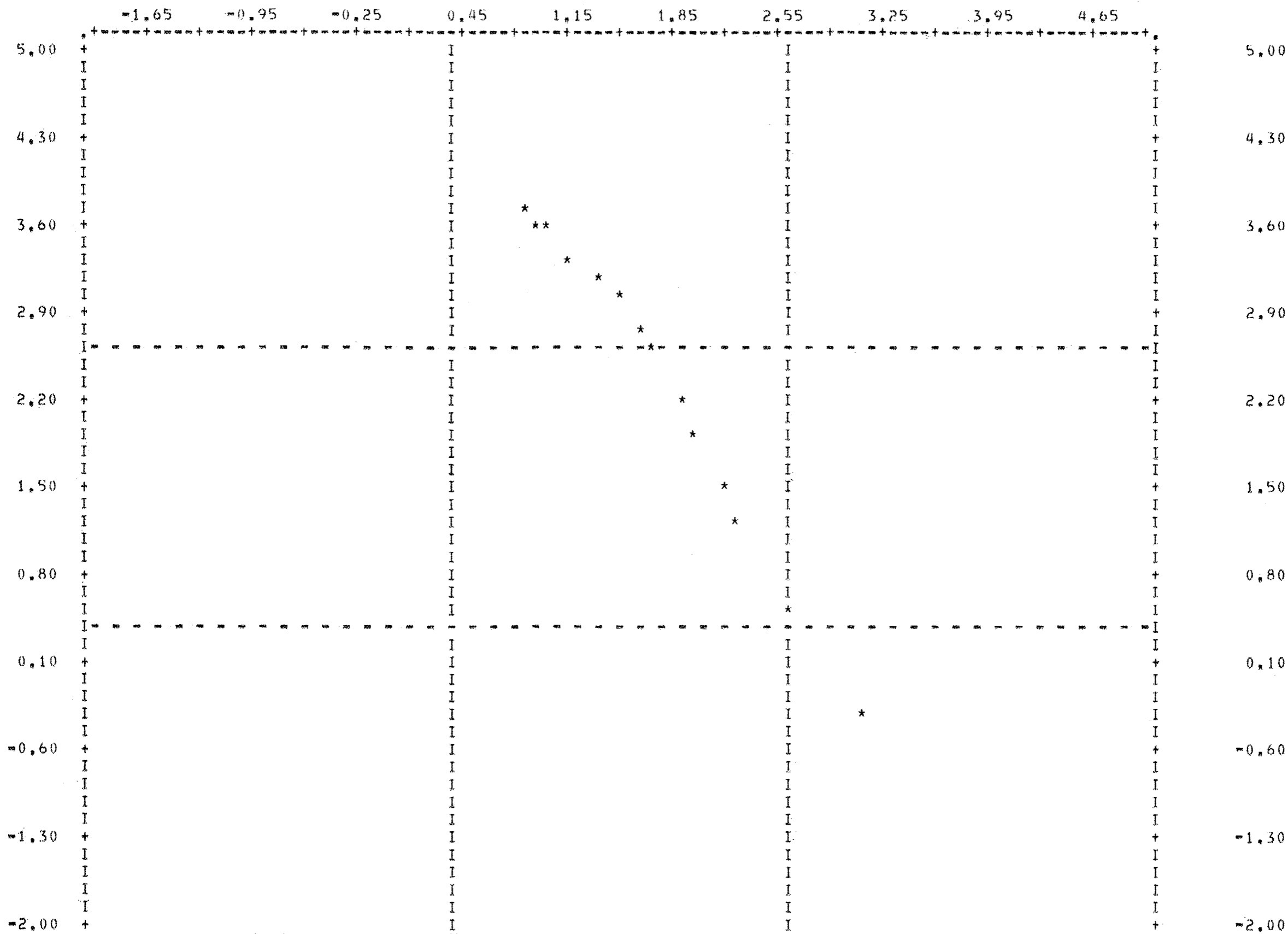
FR

NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

FR

FILE VALORE (CREATION DATE = 06/06/77)
SCATTERGRAM OF (DOWN) Y1

(ACROSS) X1



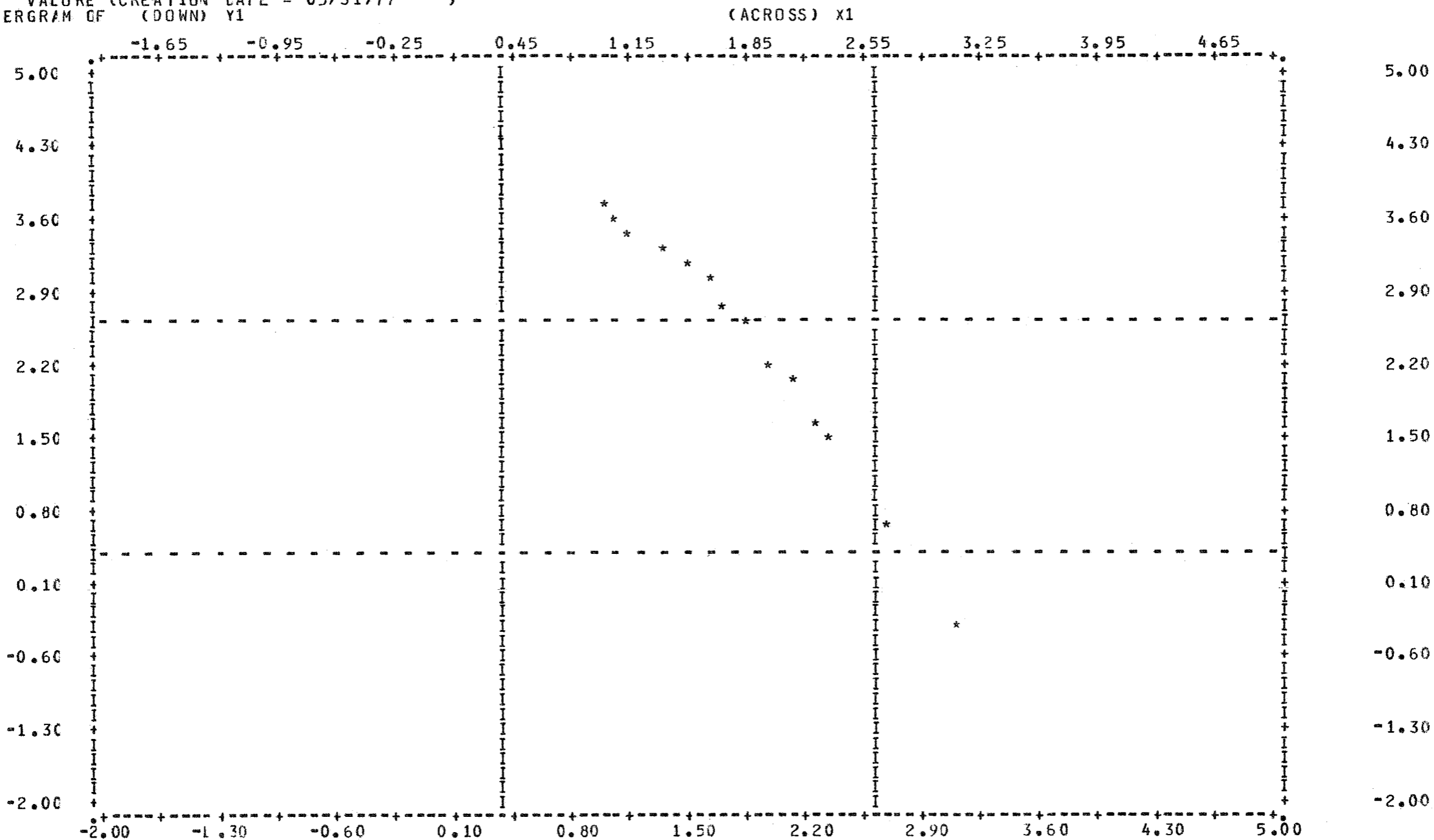


FIGURA A.6 : GRÁFICO DA "LINEARIZAÇÃO" DA LEI DE PARETO
(1ª AMOSTRA)

BRASIL 1973

NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

FILE VALORE (CREATION DATE = 05/31/77)
SCATTERGRAM OF (DOWN) Y1

(ACROSS) X1

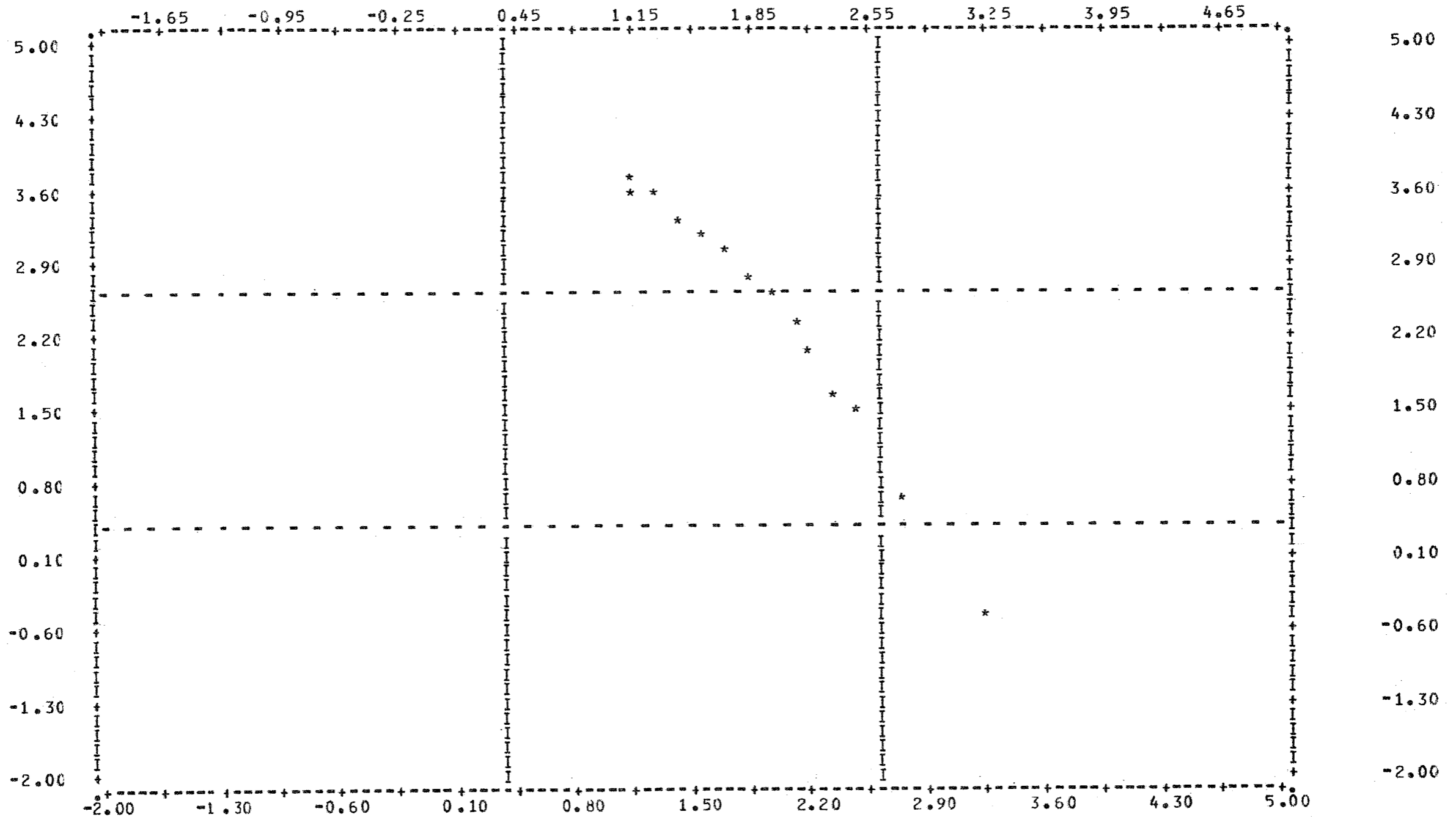


FIGURA A.7 : GRÁFICO DA " LINEARIZAÇÃO " DA LEI DE PARETO
(1ª AMOSTRA)

BRASIL 1974



FILE VALORE (CREATION DATE = 05/31/77)
SCATTERGRAM OF (DOWN) Y1

(ACROSS) X1

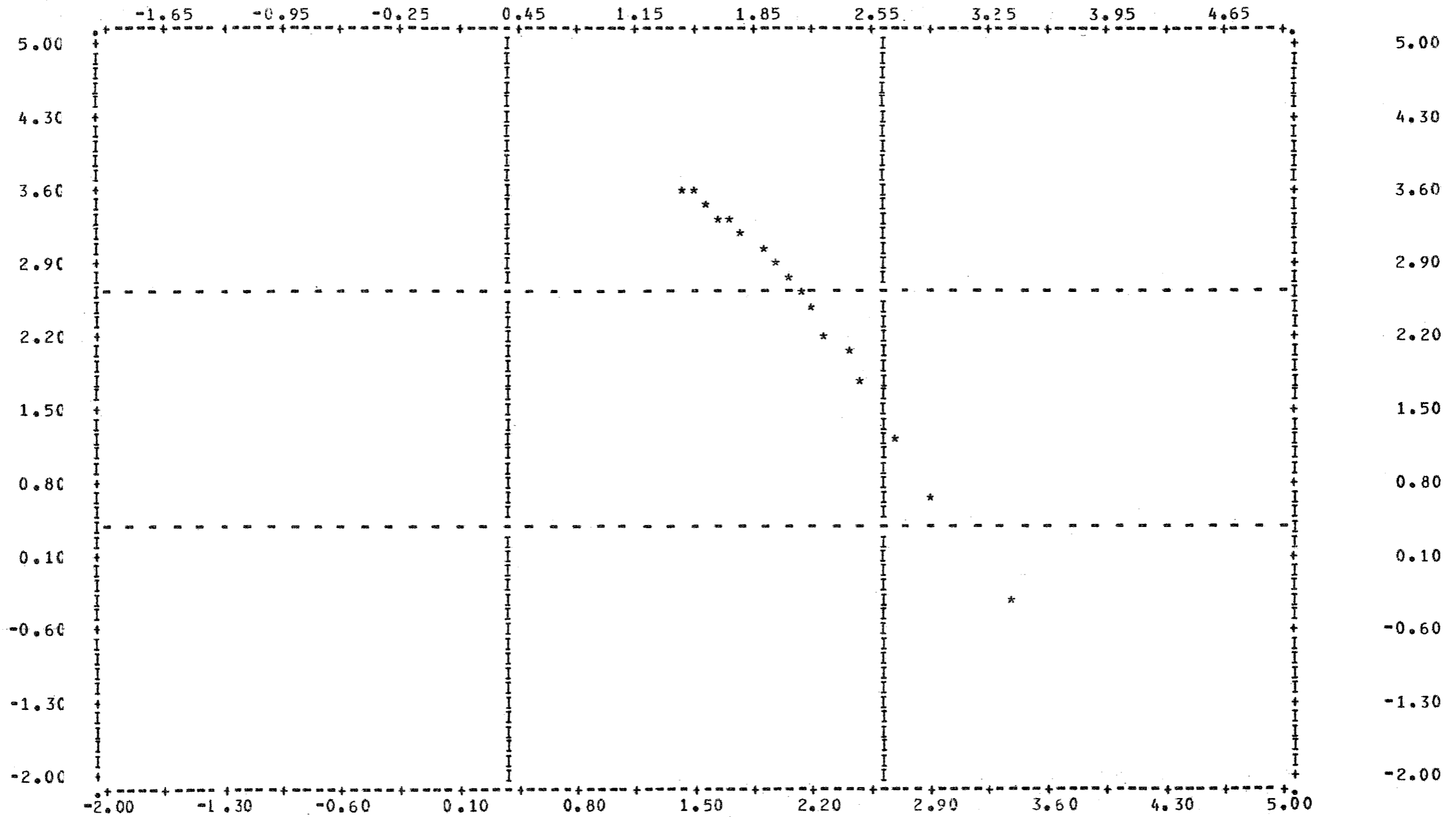


FIGURA A.8 : GRÁFICO DA "LINEARIZAÇÃO" DA LEI DE PARETO
(1ª AMOSTRA)

BRASIL 1975

NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

FILE VALORE (CREATION DATE = 06/23/77)
 SCATTERGRAM OF (DOWN) Y1

(ACROSS) X1

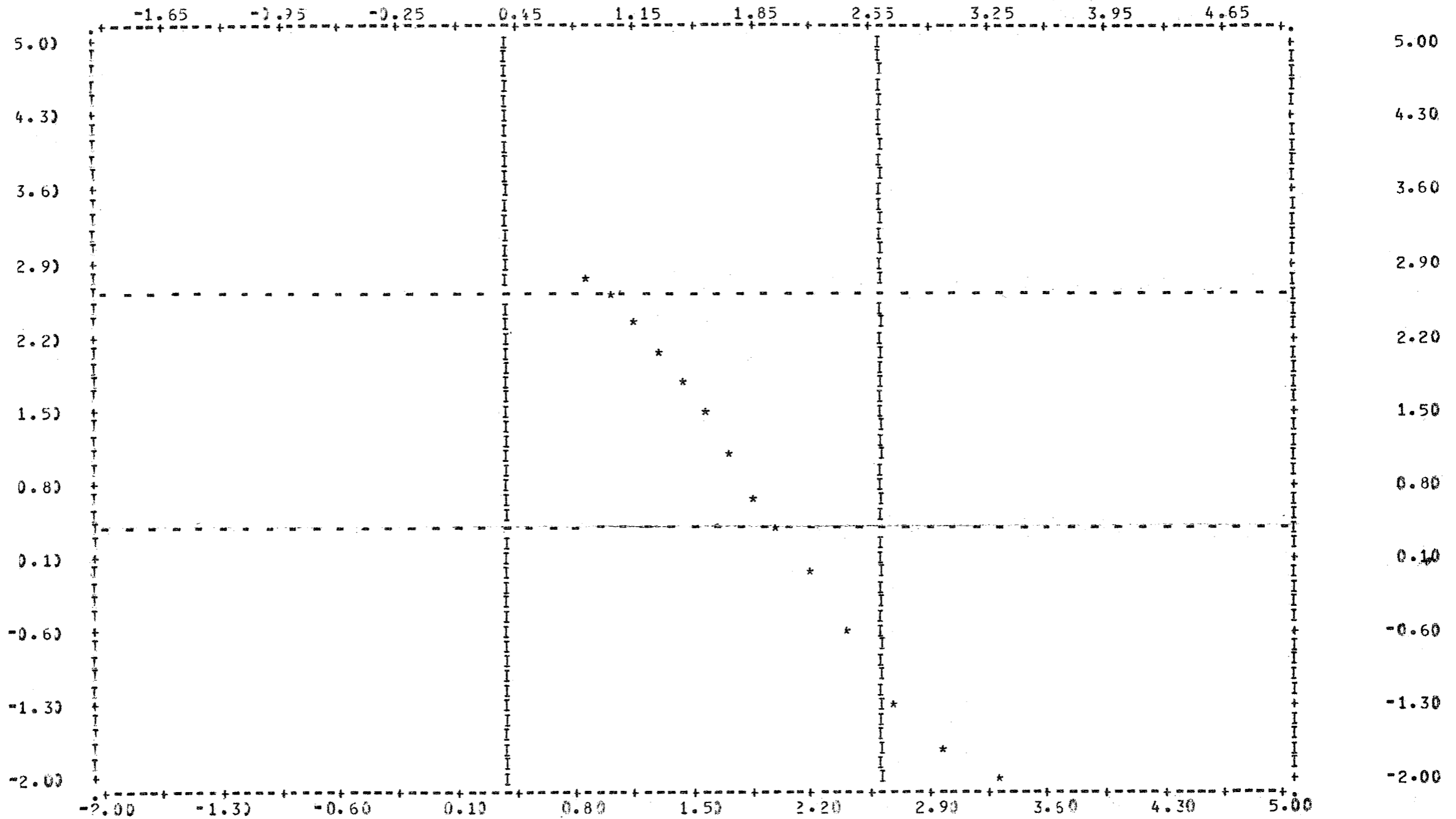


FIGURA A.9 : GRÁFICO DA "LINEARIZAÇÃO" DA LEI DE PARETO

BRASIL 1968

(2ª AMOSTRA)

FILE VALORE (CREATION DATE = 06/23/77)
SCATTERGRAM OF (DOWN) Y1

(ACROSS) X1

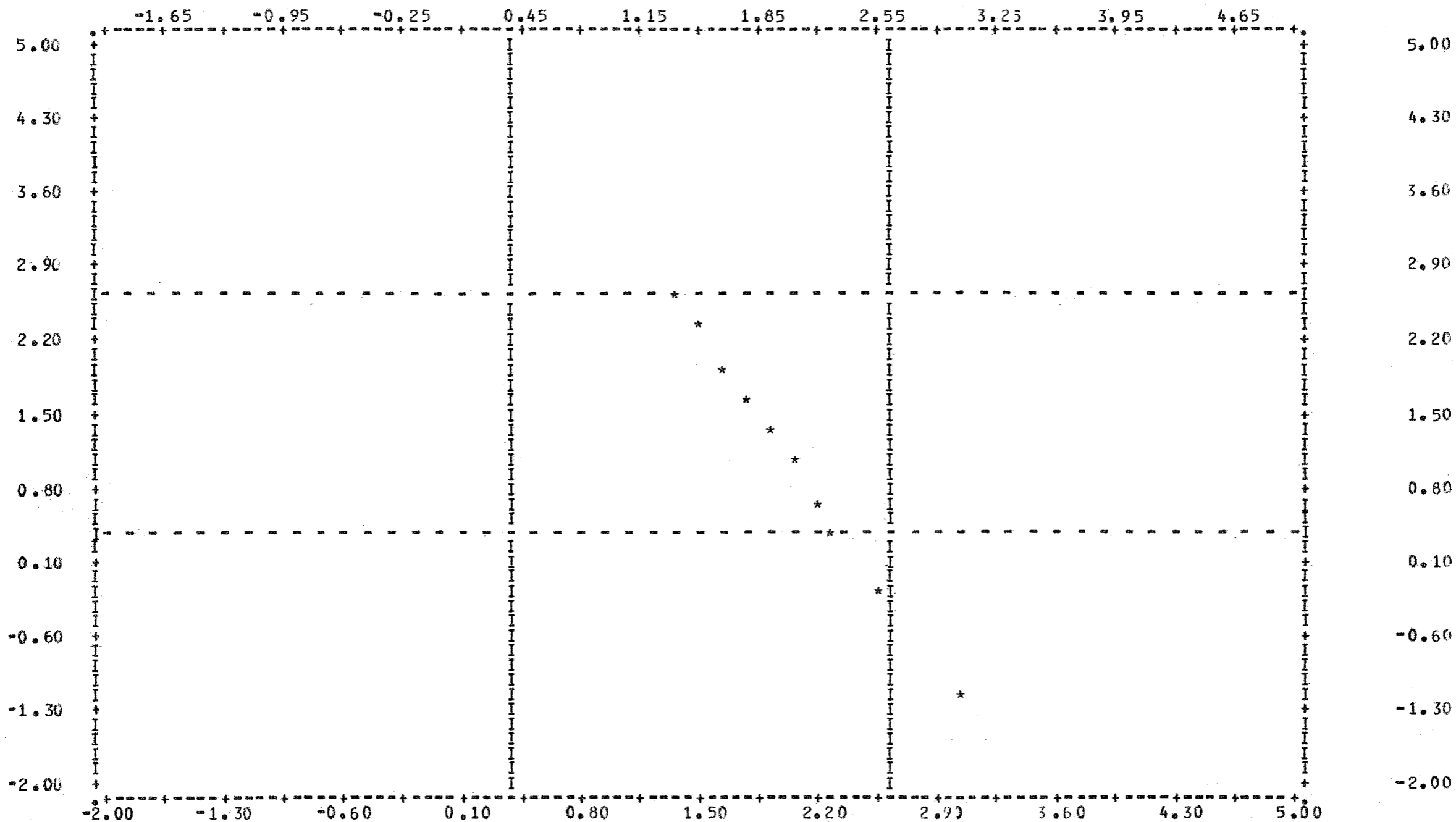


FIGURA A. 10 : GRÁFICO DA " LINEARIZAÇÃO " DA LEI DE PARETO BRASIL 1969
(2ª AMOSTRA)

NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

(ACROSS) X1

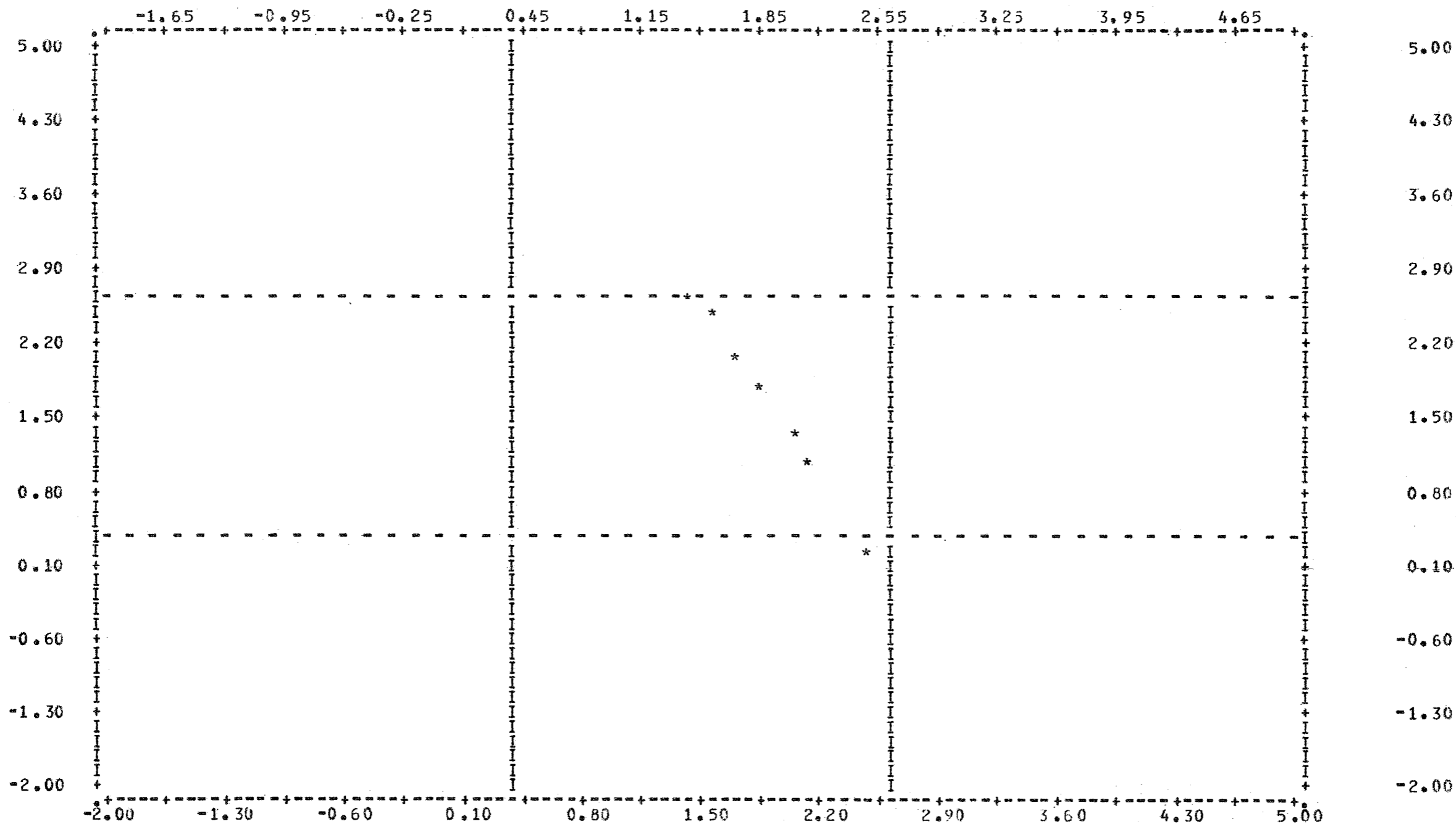


FIGURA . A . II : GRÁFICO DA "LINEARIZAÇÃO" DA LEI DE PARETO BRASIL 1970
(2ª AMOSTRA)

NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

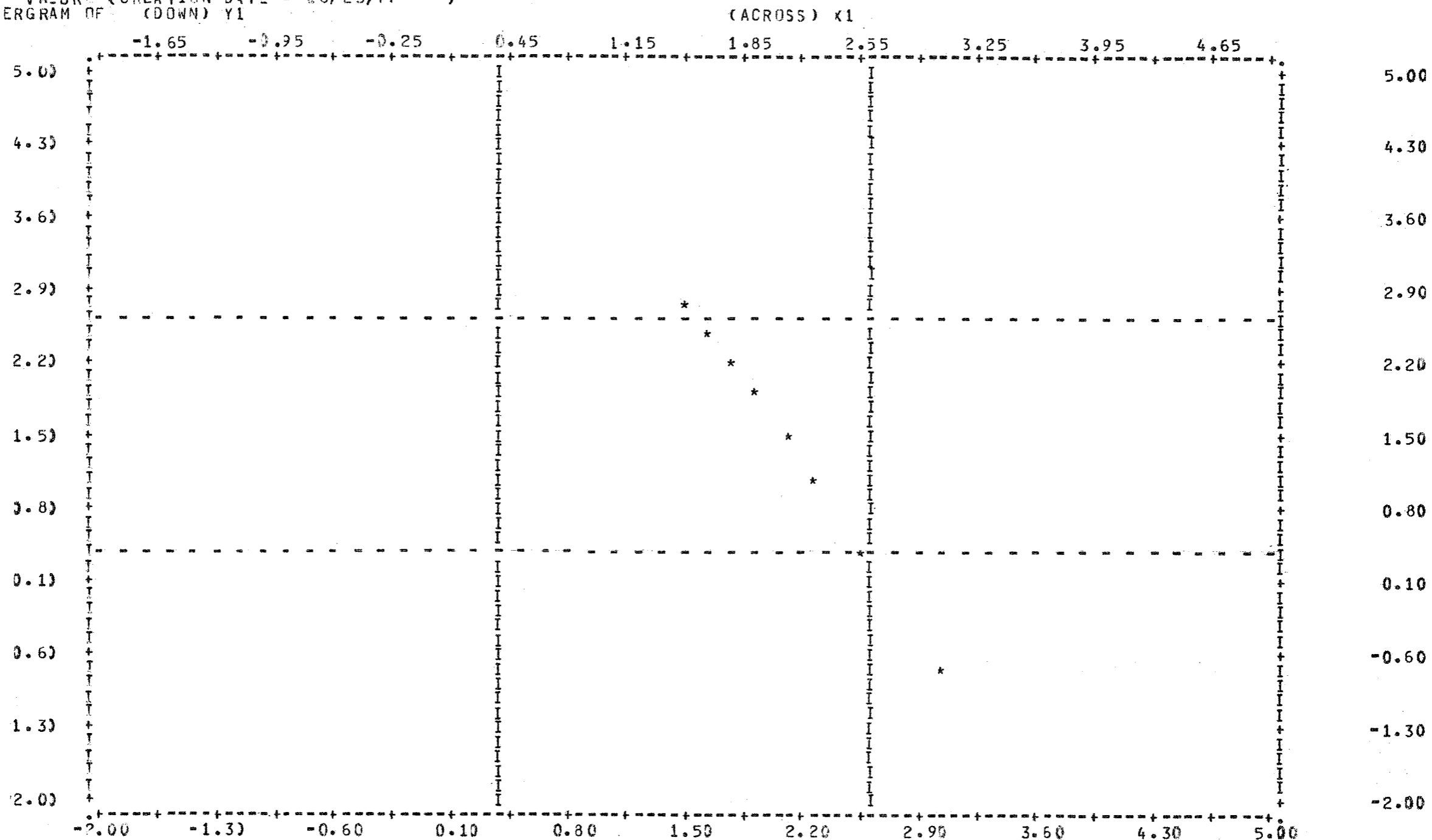


FIGURA A . 12 : GRÁFICO DA " LINEARIZAÇÃO " DA LEI DE PARETO
 (2ª AMOSTRA)

BRASIL 1971

DISTRIBUICAO DE RENDA NO BRASIL NO ANO 1972
 FILE VALORF (CREATION DATE = 06/23/77)
 SCATTERGRAM OF (DOWN) Y1

06/23/77

PAGE 2

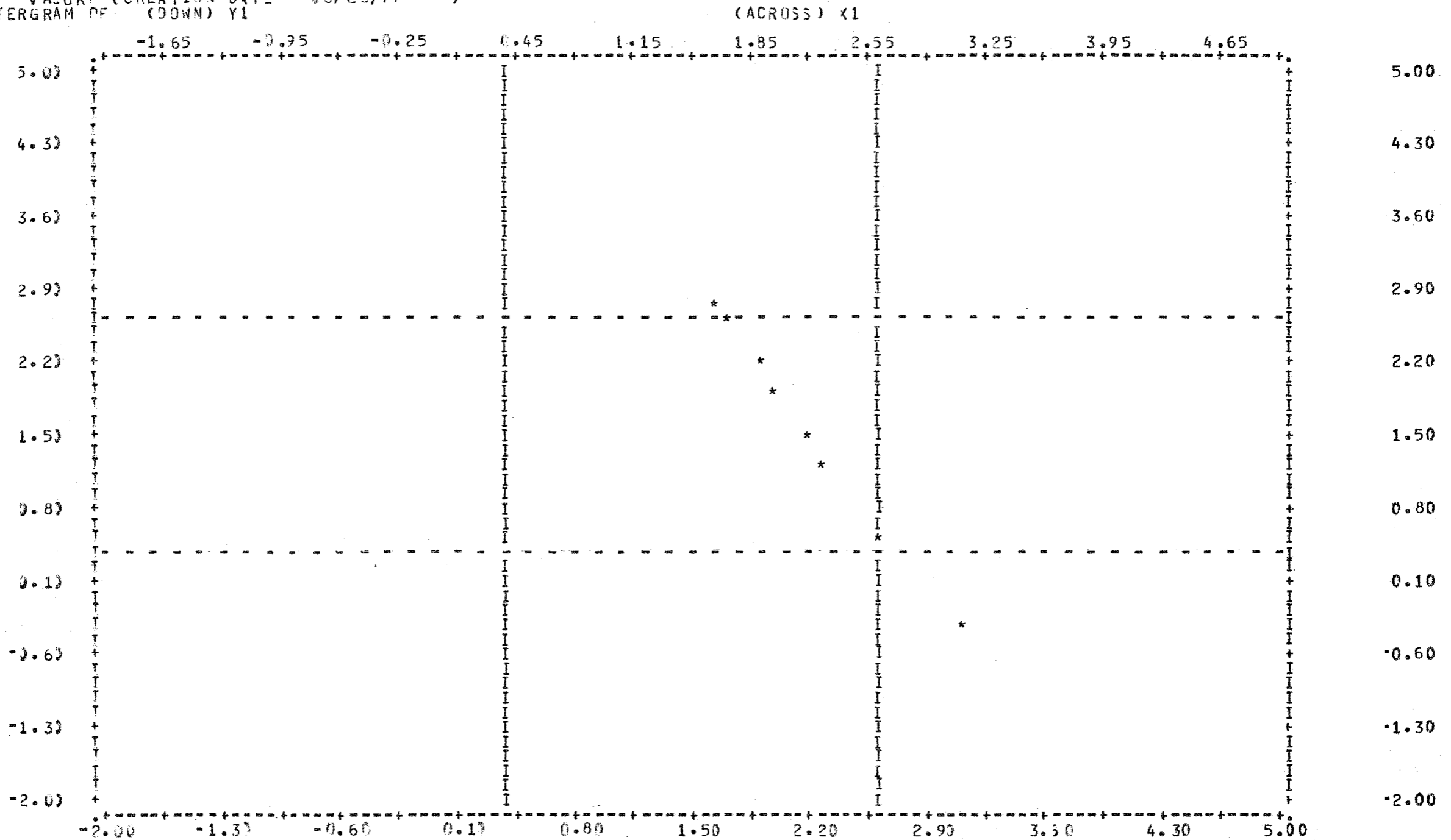


FIGURA A. 13 : GRÁFICO DA "LINEARIZAÇÃO" DA LEI DE PARETO

BRASIL 1972

(2ª AMOSTRA)

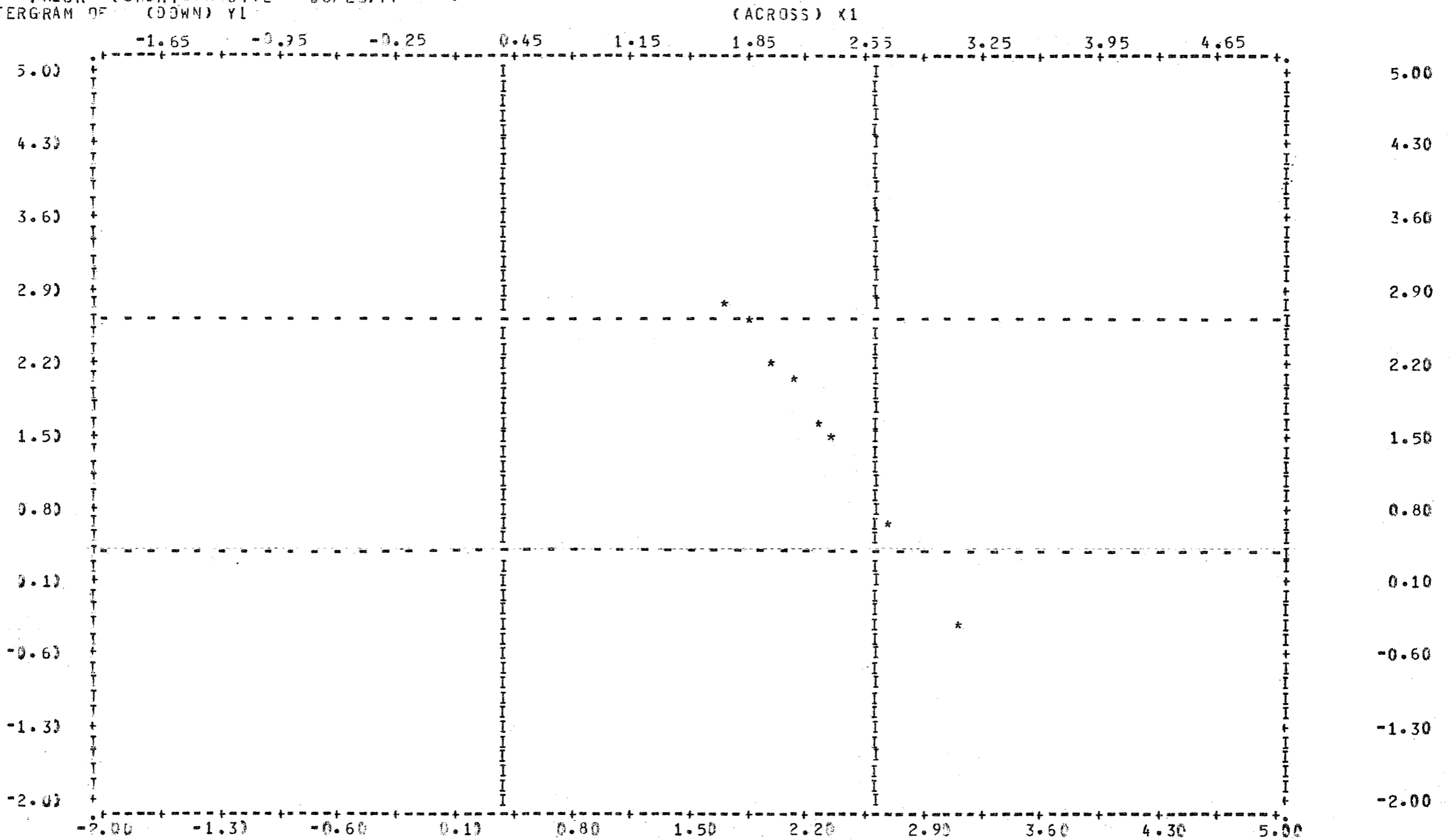


FIGURA A.14 : GRÁFICO DA "LINEARIZAÇÃO" DA LEI DE PARETO
 (2ª AMOSTRA)

BRASIL 1973

NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

(ACROSS) X1

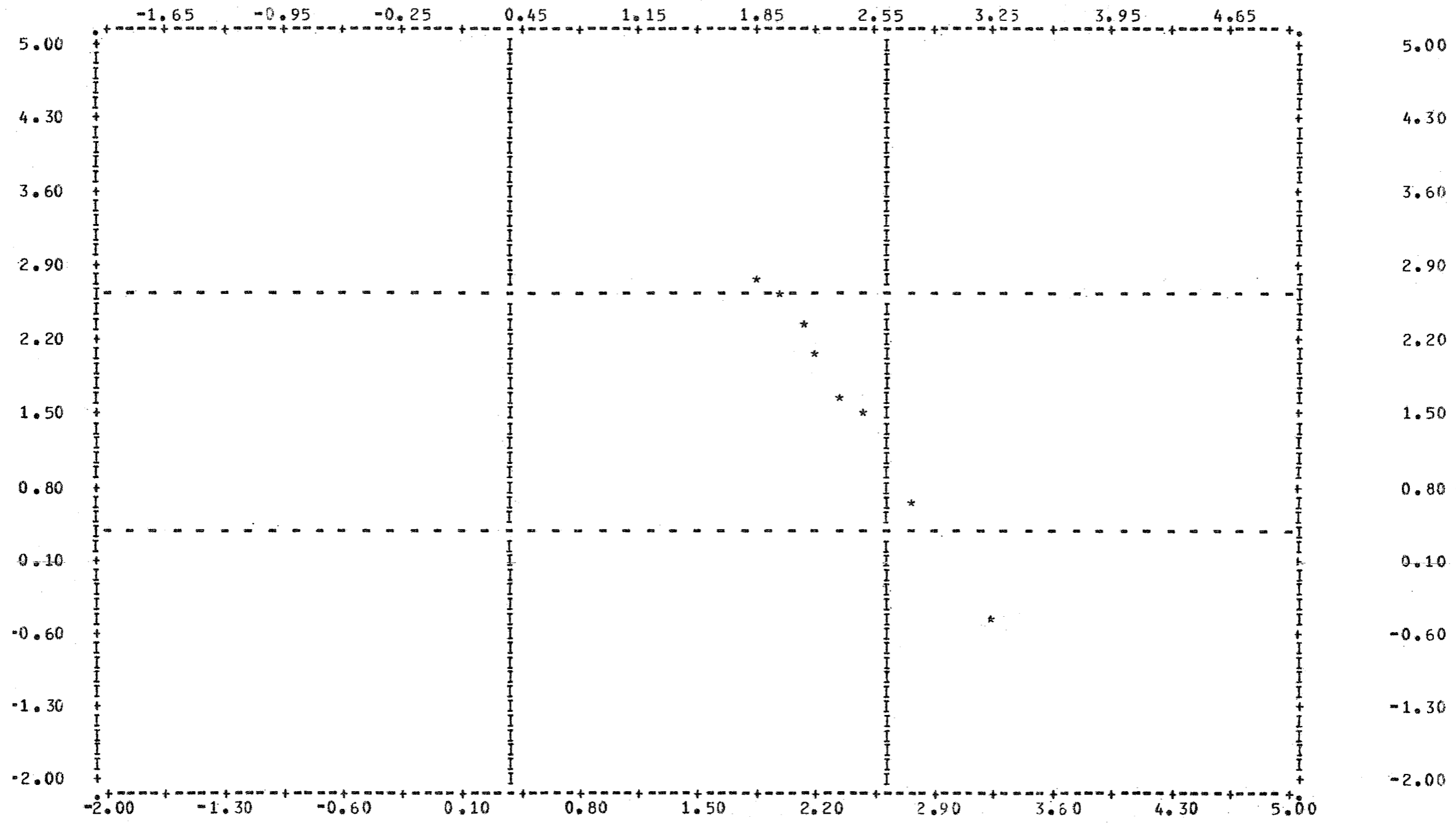


FIGURA A.15 : GRÁFICO DA "LINEARIZAÇÃO" DA LEI DE PARETO BRASIL 1974
(2ª AMOSTRA)

NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

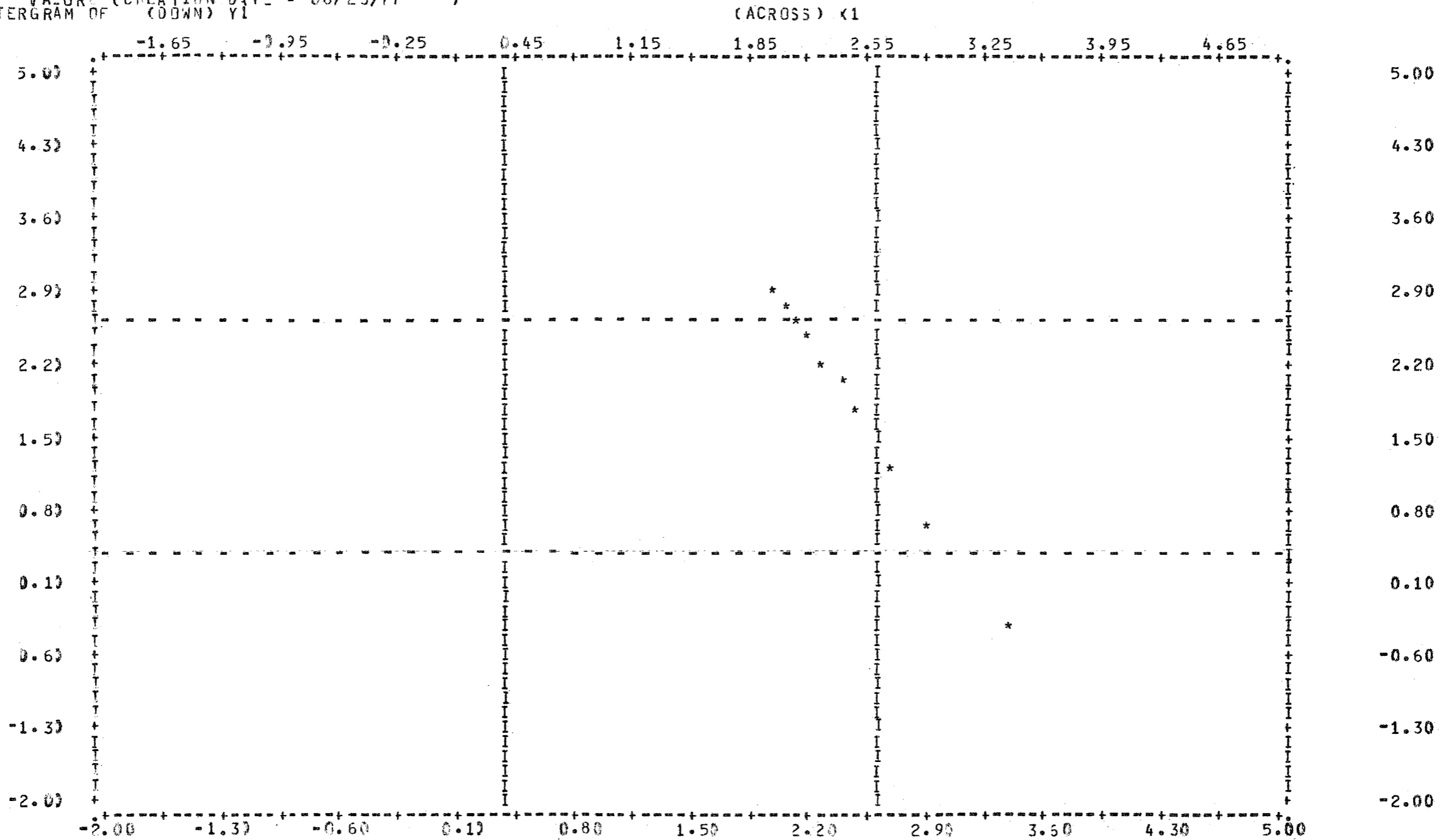


FIGURA A.16 : GRÁFICO DA " LINEARIZAÇÃO " DA LEI DE PARETO
 (2ª AMOSTRA)

BRASIL 1975

NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

BIBLIOGRAFIA

- [1] Champernowne, D.G., A Model of Income Distribution, The Economic Journal, June, 1953.
- [2] Davis, H., The Theory of Econometrics, Indiana, Principia Press, 1941.
- [3] Hoffmann, R., Considerações sobre a Evolução Recente da Distribuição da Renda no Brasil, Revista de Administração de Empresas, out/dez, 1973.
- [4] Hoffmann, R., Tendências da Distribuição de Renda no Brasil e suas Relações com o Desenvolvimento Econômico, em A Controvérsia sobre a Distribuição de Renda e Desenvolvimento, editado por R. Tolipan e A. C. Tinelli, Zahar Editores, 1975.
- [5] Hoffmann, R. e J. C. Duarte, A Distribuição da Renda no Brasil, Revista de Administração de Empresas, abril/junho, 1972.
- [6] Huberman, L. Nós o povo - a epopéia norte-americana, São Paulo, Editora Brasiliense, 1966.
- [7] IPEA, A Industrialização Brasileira: Diagnóstico e Perspectivas, Ministério do Planejamento e Coordenação Geral, Rio de Janeiro, 1969.
- [8] Kmenta, J., Elements of Econometrics, Macmillan Company, New York, 1971.

- [9] Lange, O. *Introdução à Econometria*, Editora Fundo de Cultura, 1967.
- [10] Langoni, C.G., *Distribuição da Renda e Desenvolvimento Econômico do Brasil*, Editora Expressão e Cultura, Rio de Janeiro, 1973.
- [11] Lorenz, M.O., *Methods of Measuring the Concentration on Wealth*. Publications of the American Statistical Association, vol. 9, 1905.
- [12] Pareto, V., *Cours d'Économie Politique*, Librairie Droz, Genève, 1964.
- [13] Ross, S.M., *Applied Probability Models with Optimization Applications*, Holden-Day, 1970.
- [14] Tawney, R.H., *Equality*, London, Unwin Books, 1964.
- [15] Theil, H., *Economics and Information Theory*, Rand Mac Naly and Company, Chicago, 1967.