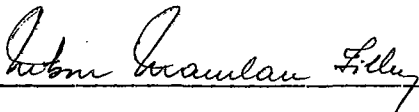



ESTUDO DE PROPRIEDADES DE CONJUNTOS E CO
NES POLIÉDRICOS CONVEXOS E SUAS APLICA
ÇÕES A ALGUNS ALGORITMOS DE GRANDE PORTE

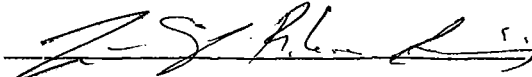
Maria Amelia Telles

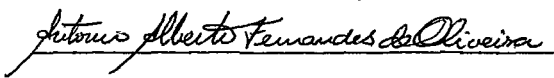
TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.).

Aprovada por:


Prof. Nelson Maculan Filho


Prof. Cláudio T. Bornstein


Prof. João Lizardo R.H. de Araújo


Prof. Antonio Alberto F. Oliveira

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 1978

TELLES, MARIA AMÉLIA

Estudos de Propriedades de Conjuntos e Cones Poliédricos Convexos e suas Aplicações a Alguns Algoritmos de Grande Porte |Rio de Janeiro| 1978.

IX, 106 p. 29,7cm (COPPE-UFRJ, M.Sc, Engenharia de Sistemas e Computação, 1978).

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro, Faculdade de Engenharia.

1. Assunto: Programação Linear, Estudo de Cones Poliédricos, Poliedros em Geral. I. COPPE/UFRJ. II. Título: Estudos de Propriedades de Conjuntos e Cones Poliédricos Convexos e suas Aplicações a Alguns Algoritmos de Grande Porte.

D E D I C A T Ó R I A

Aos meus pais.

A G R A D E C I M E N T O S

Ao Professor Nelson Maculan Filho pela sua dedicada orientação e apoio desde o meu ingresso na COPPE.

Ao Professor Antonio Alberto Fernandes de Oliveira por sua valiosa colaboração neste trabalho.

A CAPES pela contribuição financeira prestada durante o período de minha permanência nesta Instituição e ao CNPq pela contribuição no início de meus estudos em Pós-Graduação no IMPA.

A UFPb pela colaboração prestada para a conclusão deste meu trabalho.

Aos meus amigos e colegas que muito me incentivaram no decorrer dos meus estudos.

A Angela Maria Schwartz Cupolillo pelo seu trabalho preciso de datilografia e a Suely Klajman por seu incentivo.

R E S U M O

A finalidade deste trabalho foi apresentar uma colaboração didática sobre alguns conceitos matemáticos de fundamental importância em Programação Linear.

Dentre esses conceitos fixamos o nosso estudo em propriedades de Cones e Conjuntos Poliédricos Convexos do Espaço Real n -dimensional. Além disso incluímos algumas aplicações desses conceitos dentro dos Algoritmos de Partição de Benders e de Decomposição de Dantzig-Wolfe.

A B S T R A C T

This thesis consists mainly of a comprehensible presentation of relevant concepts and results in Linear Programming.

Among these, we concentrated in properties of polyhedral convex sets and cones in n -dimensional real space. Besides, we have dicressed some applications of these concepts in Bender's partitioning and Dantzig-Wolfe decomposition algorithms.

I N D I C E

	Páginas
INTRODUÇÃO	1
CAPÍTULO I - Sistemas Duais de Relações Lineares Homogêneas ..	3
I.1. INTRODUÇÃO	3
I.2. NOÇÕES PRELIMINARES	5
Lema 1	6
Corolário 1 (Lema de Farkas)	6
Corolário 2	7
Corolário 3	8
Teorema 1	9
Corolário	11
I.3. ASPECTOS FUNDAMENTAIS DO PGSD	11
Teorema 2	11
Definição	13
Teorema 3	13
Propriedade Característica do PGSD	16
Exemplo de um PGSD	16
CAPÍTULO II - Cones Poliédricos Convexos	18
II.1. INTRODUÇÃO	18
II.2. ESTRUTURA FACIAL DE UM CPC	22
II.2.1. Conceitos Fundamentais	22

	Páginas
Definição 1	22
Definição 2	23
Definição 3	24
Definição 4	24
II.2.2. Propriedades Fundamentais	24
Proposição	24
Lema 1	25
Teorema 1	29
Corolário 1	30
Corolário 2	32
II.2.3. Exemplo	33
II.3. ALGUNS TEOREMAS FUNDAMENTAIS	36
Definição 5	36
Teorema 2	37
Corolário	39
Teorema 3	39
Teorema 4	40
Corolário	42
Exemplo	43
II.4. FACES EXTREMAS E CONJUNTOS MÍNIMOS DE EXPANSÃO	47
II.4.1. Propriedades Relativas a uma Face Extre <u>ma</u>	47
Definição 6	47
Lema 2	47
Lema 3	48

	Páginas
Teorema 5	49
Lema 4	50
Lema 5	52
II.4.2. Escolha Mínima do Conjunto Expansão	53
Teorema 6	53
II.5. CONSIDERAÇÕES SUPLEMENTARES SOBRE CPC.....	54
Definição 7	54
Definição 8	55
Lema 6	60
Lema 7	63
Teorema 7	63
CAPÍTULO III - Conjuntos Poliédricos Convexos	64
III.1. INTRODUÇÃO	64
III.1.1. Caracterização de um Conjunto Poliédrico Convexo .	64
Definição	64
Observação	65
III.1.2. Caracterização do Cone Poliédrico Convexo C^{n+1} ...	67
Pré-Lema 1	67
III.2. CORRESPONDÊNCIA ENTRE CCPC (S) E CPC (C^{n+1}).....	68
Pré-Lema 2	68
Pré-Lema 3	68
Pré-Lema 4	70
Pré-Lema 5	70
Lema 1	71

	Páginas
Ilustração	72
III.3. RESOLUÇÃO DE CCPC	76
Teorema 1	76
III.4. CONSIDERAÇÕES SOBRE VETORES EXTREMOS DE UM CCPC	80
Lema 2	80
Corolário 1	84
Corolário 2.....	85
III.5. SEPARAÇÃO DE CCPC	86
Lema 3	86
Teorema 2	86
CAPÍTULO IV - Estudo dos Algoritmos de Dantzig-Wolfe e de Benders do Ponto de Vista da Teoria de Conjuntos e Cones Poliédricos Convexos ...	90
IV.1. INTRODUÇÃO	90
IV.2. CONSIDERAÇÕES SOBRE O ALGORITMO DE PARTIÇÃO DE BENDERS	90
IV.3. CONSIDERAÇÕES SOBRE O ALGORITMO DE DECOMPOSIÇÃO DE DANTZIG- WOLFE	98
BIBLIOGRAFIA	106

I N T R O D U Ç Ã O

Neste trabalho, procuramos apresentar uma exposição detalhada de alguns resultados matemáticos fundamentais da teoria de inequações lineares, que tem sido de grande importância às necessidades de Programação Linear e Matrizes dos Jogos.

O Capítulo I, estruturado principalmente com base no Artigo 1 de Kuhn-Tucker (ver referência [3]), tem a finalidade de fornecer alguma informação fundamental sobre sistemas lineares homogêneos, que formam a base dos sistemas lineares não homogêneos que aparecem em Programas Lineares Duais. Parte dessa informação vem apenas consolidar alguns resultados matemáticos já conhecidos. Mas em parte, é uma informação completamente nova sobre uma propriedade de Complementaridade de Folga que é uma característica dos sistemas duais de ampla generalidade. Os sistemas estudados consistem de inequações lineares homogêneas, escritas uniformemente ≥ 0 e possivelmente de equações lineares. Encontramos no Lema de Farkas (Corolário 1, (I.2)) um importante resultado que será usado em forma geométrica para provar o Teorema 4 (II.3) e Lema 3 (III.5).

No Capítulo II, baseado no Artigo 2 de Kuhn-Tucker ([3]), tomamos A^* , conjunto de soluções de um sistema finito $AX' \leq 0$ de inequações lineares homogêneas em n variáveis, representado em \mathbb{R}^n , como a interseção de um número

finito de semi-espacos fechados $A_i X' \leq 0$ ($i = 1, \dots, p$) (ver definição de Cone Poliédrico Convexo (I.1)). Inicialmente fazemos um estudo da estrutura facial do CPC A^* a fim de termos uma boa base para tomar A^* como sendo a envoltória convexa de um número finito de semi-retas (ver Teorema 2, (II.3)). Além desse importante resultado destacamos os Teoremas 3 e 4 (II.3), todos estabelecidos para uso no Capítulo III. Ainda chegamos ao fato de que A^* é a envoltória convexa de suas faces extremas e portanto pode ser gerado de um modo mínimo (II.4).

No Capítulo III tomamos S , conjunto solução do sistema de m inequações lineares não homogêneas $A_i X' \leq B_i$ a n incógnitas, como sendo a interseção de m semi-espacos fechados $A_i X' \leq b_i$ ($i = 1, \dots, m$), ver Definição de Conjunto Poliédrico Convexo (III.1.1). Entre todos os resultados mostramos que um tal conjunto (se não vazio) é a soma de um Poliedro Convexo Limitado P^Δ e um Cone Poliédrico Convexo $Q^<$. (Teorema 1, (III.3)). Nosso outro importante resultado (Teorema 2, (III.5)) mostra que P^Δ e $Q^<$ podem ser separados, se $P^\Delta \cap Q^< = \phi$. Este capítulo foi tirado principalmente do Artigo 3 de Kuhn-Tucker (|³|).

Finalmente apresentamos, num último capítulo, focalizações dos CPC e CCPC nos Algoritmos de Partição de Benders e Decomposição de Dantzig-Wolfe.

C A P I T U L O I

SISTEMAS DUAIS DE RELAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS

I.1. INTRODUÇÃO

O nosso objetivo neste capítulo é apresentar alguns resultados fundamentais sobre Sistemas Lineares Homogêneos, formados de equações e inequações lineares homogêneas.

Assim sendo o elemento principal deste capítulo é um Par Geral de Sistemas Duais, o qual chamamos de PGSD para simplificar a notação, apresentado como segue:

$$\begin{array}{ll}
 U \text{ livre} & - AX - BY = 0 \\
 & V \geq 0 \quad - CX - DY \geq 0 \\
 A'U + C' V \geq 0 & e \quad X \geq 0 \\
 B'U + D' V = 0 & Y \text{ livre}
 \end{array} \tag{I.1.1}$$

onde as letras A, B, C e D indicam matrizes U, V, X e Y vetores (matrizes de uma coluna) e o símbolo "'" indica transposição.

Para uma melhor análise deste PGSD, vamos descrevê-lo de uma maneira mais detalhada. Isto é, para

$$A = (a_{hj})_{p \times n}, \quad B = (b_{hk})_{p \times q}, \quad C = (c_{ij})_{m \times n} \quad e$$

$$D = (d_{ik})_{m \times q}$$

com valores reais arbitrários para os respectivos coeficientes

$$U = (u_1 \dots u_h \dots u_p) \in \mathbb{R}^p,$$

$$V = (v_1 \dots v_i \dots v_m) \in \mathbb{R}^m,$$

$$X = (x_1 \dots x_j \dots x_n) \in \mathbb{R}^n,$$

$$Y = (y_1 \dots y_k \dots y_q) \in \mathbb{R}^q.$$

temos o PGSD escrito do seguinte modo:

$$u_h \text{ livre} \quad - \sum_j a_{hj} x_j - \sum_k b_{hk} y_k = 0$$

$$v_i \geq 0 \quad - \sum_j c_{ij} x_j - \sum_k d_{ik} y_k \geq 0$$

$$\sum_h a_{hj} u_h + \sum_i c_{ij} v_i \geq 0 \quad x_j \geq 0$$

$$\sum_h b_{hk} u_h + \sum_i d_{ik} v_i = 0 \quad y_k \text{ livre}$$

$$h = 1, \dots, p; \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n; \quad k = 1, \dots, q$$

(I.1.2)

Observando o PGSD na forma (I.1.2) podemos não só entender melhor o sentido da palavra dual, bem como ter uma visão mais objetiva de uma característica das inequações in

dividuais de um PGSD, a ser focalizada mais tarde, com o nome de Propriedade de Complementaridade de Folga.

Por ora, notemos que existe uma correspondência biunívoca entre as variáveis livres de um sistema e equações do outro e entre as variáveis não negativas de um sistema e inequações do outro. Além disso observemos que a matriz dos coeficientes num sistema é a transposta, com sinal contrário, à matriz dos coeficientes do outro sistema.

I.2. NOÇÕES PRELIMINARES

Iniciemos com alguns resultados necessários ao nosso estudo que, dizem respeito a dois pares de sistemas duais obtidos do PGSD mediante algumas transformações.

Tomemos o seguinte par de Sistemas Duais

$$\begin{array}{ll} U \text{ livre} & AX = 0 \\ A'U \geq 0 & X \geq 0 \end{array} \quad \text{e} \quad \text{(I.2.1)}$$

que foi obtido do PGSD na forma (I.1.1), fazendo-se B, C e D vazias e trocando-se $-AX = 0$ por $AX = 0$.

Lema 1: "O par de sistemas duais (I.2.1) possui soluções U e X tais que $A'_1 U + x_1 > 0$. Sendo A_1 a primeira coluna da matriz A e x_1 a primeira componente do vetor X ".

Demonstração: esta prova é encontrada na referência [3].

Corolário 1: (Lema de Farkas) - "Se a inequação $A'_0 U \geq 0$ vale para toda solução U do sistema $A'U \geq 0$, então $A_0 = AX$ para algum $X \geq 0$ ".

Demonstração: seja o par de sistemas duais

$$\begin{array}{l} U \text{ livre} \quad [- A_0 \ A] \ [x_0 \ X]' = 0 \\ \text{e} \\ [- A_0 \ A]' \ U \geq 0 \quad [x_0 \ X]' \geq 0 \end{array}$$

Aplicamos o Lema 1 a este par, sendo que A_1 e x_1 são substituídos por $- A_0$ e x_0 respectivamente. Então estes sistemas possuem soluções \bar{U} e (x_0, \bar{X}) tais que:

$$- A'_0 \bar{U} + x_0 > 0 \quad (\text{I.2.2})$$

$$- A'_0 \bar{U} \geq 0, \ A' \bar{U} \geq 0$$

$$- A_0 x_0 + A\bar{X} = 0 \quad (\text{I.2.3})$$

$$x_0 \geq 0, \ \bar{X} \geq 0$$

Temos que

$$A'_0 \bar{U} \geq 0 \quad (I.2.4)$$

pois por hipótese, para toda solução U do sistema $A'U \geq 0$ tem-se que $A'_0 U \geq 0$.

De (I.2.2) vem que $x_0 > A'_0 \bar{U}$ e por (I.2.4) temos

$$x_0 > 0 \quad (I.2.5)$$

De (I.2.3) vem que $A_0 x_0 = A\bar{X}$ e por (I.2.5) temos

$$A_0 = AX^0 \quad \text{com} \quad X^0 = \frac{\bar{X}}{x_0} \geq 0$$

Logo $A_0 = AX^0$ para um $X^0 \geq 0$.

Corolário 2: "O par de sistemas duais (I.2.1) possui soluções U^* e X^* tais que $A'U^* + X^* > 0$ (isto é, todas as componentes de $A'U^* + X^*$ são positivas)."

Demonstração: O resultado do Lema 1 diz respeito à primeira coluna da matriz A , indicada por A_1 . Entretanto, se reenumerarmos as colunas de A , podemos ter no lugar de A_1 uma outra coluna qualquer A_j . Consequentemente o resultado do Lema 1, agora diz respeito a esta coluna A_j . Logo, para $j = 1, \dots, n$ existem U^j e X^j tais que

$$A' U^j \geq 0, A X^j = 0, X^j \geq 0 \quad e$$

$$A'_j U^j + x_j^j > 0 \quad (I.2.6)$$

Tomando-se

$$U^* = \sum_j U^j \quad e \quad X^* = \sum_j X^j$$

obtemos

$$A' U^* = \sum_j A' U^j \geq 0 \quad e \quad A X^* = \sum_j A X^j = 0, X^* \geq 0$$

Além disso, para $j = 1, \dots, n$, temos que

$$A'_j U^* + x_j^* = \sum_k (A'_j U^k + x_j^k) \geq A'_j U^j + x_j^j \quad (I.2.7)$$

De (I.2.6) e (I.2.7) temos que

$$A'_j U^* + x_j^* > 0$$

o que nos leva a concluir que $A' U^* + X^* > 0$.

Corolário 3: "O sistema de equações $A X = 0$ tem

i) uma solução X completamente positiva (ou seja $x_i > 0$ para $i = 1, \dots, m$) se não existe solução U tal que $A' U \geq 0$ e $A' U \neq 0$

ou

ii) uma solução X não negativa e não trivial (ou seja $x_i \geq 0$, $i = 1, \dots, n$ e $\exists j = 1, \dots, n$ tal que $x_j \neq 0$) se não existe U tal que $A'U > 0$ ".

Demonstração: Pelo Corolário 2 existem U^* e X^* tais que

$$A'U^* \geq 0, AX^* = 0, X^* \geq 0 \quad e$$

$$A'U^* + X^* > 0 \quad (I.2.8)$$

i) $\nexists U / A'U \geq 0$ e $A'U \neq 0 \implies A'U^* = 0$ implica por (I.2.8) que $X^* > 0$

ii) $\exists U / A'U > 0 \implies$ existe alguma coordenada j de $A'U^*$, $A'_j U^*$ tal que $A'_j U^* = 0 \implies$ por (I.2.8) $x_j^* > 0 \implies X^* \neq 0$

Observação: os itens (i) e (ii) são mutuamente exclusivos. Esta exclusividade é decorrente da propriedade de Complementaridade de Folga, (ver Teorema 3), propriedade esta, característica do PGSD e consequentemente do par de sistemas duais (I.2.1).

Tomemos agora o seguinte par de sistemas duais

$$\begin{array}{ll} V \geq 0 & - CX \geq 0 \\ C'V \geq 0 & X \geq 0 \end{array} \quad e \quad (I.2.9)$$

obtido do PGSD, fazendo-se A , B e D vazias.

Teorema 1: "O par de sistemas duais (I.2.9) possui soluções V^* e X^* tais que $V^* - CX^* > 0$ e $C'V^* + X^* > 0$."

Demonstração: Consideremos o seguinte par de sistemas duais

$$[I \quad C]' V \geq 0 \quad \text{e} \quad [I \quad C] \begin{bmatrix} W \\ X \end{bmatrix} = 0, \quad \begin{bmatrix} W \\ X \end{bmatrix} \geq 0$$

onde I é a matriz identidade.

Aplicando-se o Corolário 2 a este par, vemos que existem soluções V^* e (W^*, X^*) tais que:

$$[I \quad C]' V^* \geq 0 \quad (\text{I.2.10})$$

$$[I \quad C] \begin{bmatrix} W^* \\ X^* \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{I.2.11})$$

$$\begin{bmatrix} W^* \\ X^* \end{bmatrix} \geq 0 \quad (\text{I.2.12})$$

$$[I \quad C]' V^* + \begin{bmatrix} W^* \\ X^* \end{bmatrix} > 0 \quad (\text{I.2.13})$$

Por (I.2.10) temos que $V^* \geq 0$ e $C'V^* \geq 0$, logo V^* é uma solução do sistema

$$C' V \geq 0, \quad V \geq 0$$

Por (I.2.11) temos $W^* + CX^* = 0$ ou $-CX^* = W^*$. Como por (I.2.12) $W^* \geq 0$, então $-CX^* \geq 0$. Além disso ainda por (I.2.12) temos $X^* \geq 0$, logo X^* é uma solução do sistema

$$-C X \geq 0, \quad X \geq 0$$

Finalmente por (I.2.13) temos que $V^* + W^* > 0$ e como $W^* = -CX^*$, então $V^* - CX^* > 0$. Ainda por (I.2.13) temos que $C'V^* + X^* > 0$.

Corolário: " O par de sistemas duais (I.2.9) possui soluções V^* e X^* para as quais são verdadeiras as seguintes alternativas:

- i) ou $C'V^* \neq 0$ ou $X^* > 0$
- ii) ou $C'V^* > 0$ ou $X^* \neq 0$
- iii) ou $V^* > 0$ ou $-CX^* \neq 0$
- iv) ou $V^* \neq 0$ ou $-CX^* > 0$."

Demonstração: É uma consequência imediata do Teorema 1 que, se a primeira parte dos ítems (i)-(iv) não se verifica, então a segunda deve ser verdadeira. Se ao contrário, a primeira parte é verdadeira, então a segunda não deve valer porque

$$X^* \cdot C' \cdot V^* = 0$$

Essa exclusividade entre as duas situações a apresentadas em todos os ítems de (i)-(iv), é decorrente da propriedade de Complementaridade de Folga.

I.3. ASPECTOS FUNDAMENTAIS DO PGSD

Teorema 2: "O PGSD possui soluções (U^*, V^*) e (X^*, Y^*) tais que

$$V^* - CX^* - DY^* > 0$$

$$A'U^* + C'V^* + X^* > 0."$$

Demonstração: Sejam os sistemas duais

$$\begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} -A & -B & B \\ A & B & -B \\ C & D & -D \end{bmatrix}' \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ V \end{bmatrix} \geq 0 \quad e \quad \begin{bmatrix} -A & -B & B \\ A & B & -B \\ C & D & -D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \begin{bmatrix} X \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

Aplicando-se o Teorema 1 a este par de sistemas, existem soluções

$$U_1^* \geq 0, U_2^* \geq 0, V^* \geq 0 \quad e \quad X^* \geq 0, Y_1^* \geq 0, Y_2^* \geq 0$$

tais que:

$$\begin{array}{ll} -A'U_1^* + A'U_2^* + C'V^* & \geq 0 & AX^* + BY_1^* - BY_2^* \geq 0 \\ -B'U_1^* + B'U_2^* + D'V^* & \geq 0 & -AX^* - BY_1^* + BY_2^* \geq 0 \\ & & e \\ B'U_1^* - B'U_2^* - D'V^* & \geq 0 & -CX^* - DY_1^* + DY_2^* \geq 0 \\ -A'U_1^* + A'U_2^* + C'V^* + X^* & > 0 & V^* - CX^* - DY_1^* + DY_2^* > 0 \end{array}$$

Fazendo-se $U^* = U_2^* - U_1^*$ e $Y^* = Y_1^* - Y_2^*$, então

$$\begin{array}{ll} A'U^* + C'V^* & \geq 0 & -AX^* - BY^* = 0 \\ B'U^* + D'V^* & = 0 & e \quad -CX^* - DY^* \geq 0 \\ A'U^* + C'V^* + X^* & > 0 & V^* - CX^* - DY^* > 0 \end{array}$$

o que completa a prova.

Definição: denomina-se inequação com folga de um sistema, uma inequação (≥ 0) que é satisfeita estritamente (> 0) por alguma solução do sistema.

Observação: dado um sistema $A'U \geq 0$ $B'U = 0$, seja J o conjunto de índices j tal que $A'_j U_j > 0$ para alguma solução U_j do sistema. Então $\sum_j U_j$ é uma solução do sistema, tal que $A'_j (\sum_j U_j) > 0 \quad \forall j \in J$. Isto mostra que inequações com folga de um sistema, podem ser caracterizadas como o conjunto máximo de inequações do sistema que são satisfeitas estritamente por alguma solução do sistema. As inequações restantes são aquelas satisfeitas estritamente por todas as soluções do sistema.

Teorema 3: "No PGSD cada um dos $m + n$ pares de inequações correspondentes

$$v_i \geq 0 \quad - \sum_j c_{ij} x_j - \sum_k d_{ik} y_k \geq 0$$

$$\sum_h a_{hj} u_h + \sum_i c_{ij} v_i \geq 0 \quad x_j \geq 0$$

$$i = 1, \dots, m$$

$$j = 1, \dots, n$$

(I.3.1)

contêm exatamente uma inequação com folga (com relação ao seu respectivo sistema)".

Demonstração: Sejam (U, V) e (X, Y) soluções quaisquer do PGSD. Multiplicando-se itens correspondentes deste par de sistemas

duais, obtemos:

$$U'(-AX - BY) = -U'AX - U'BY = 0 \quad (I.3.2)$$

$$V'(-CX - DY) = -V'CX - V'DY \geq 0 \quad (I.3.3)$$

$$(A'U + C'V)X = U'AX + V'CX \geq 0 \quad (I.3.4)$$

$$(B'U + D'V)Y = U'BY + V'DY = 0 \quad (I.3.5)$$

Adicionando-se (I.3.2) a (I.3.4) e (I.3.3) a (I.3.5), obtemos

$$-U'BY + V'CX \geq 0 \quad \text{e} \quad U'BY - V'CX \geq 0. \quad \text{Logo temos}$$

que:

$$U'BY - V'CX = 0 \quad (I.3.6)$$

Combinando-se (I.3.6) com (I.3.2) e com (I.3.5), temos que:

$$-U'AX = U'BY = V'CX = -V'DY$$

e usando estas igualdades em (I.3.3) e (I.3.4) vemos que

$$0 = V'(-CX - DY) = \sum_i v_i (-\sum_j c_{ij} x_j - \sum_k d_{ik} y_k) \quad (I.3.7)$$

$$0 = (A'U + C'V)'X = \sum_j (\sum_h a_{hj} u_h + \sum_i c_{ij} v_i) x_j \quad (I.3.8)$$

A equação (I.3.7) mostra que: se $v_i > 0$ então $(-\sum_j c_{ij} x_j - \sum_k d_{ik} y_k) = 0$ e se $(-\sum_j c_{ij} x_j - \sum_k d_{ik} y_k) > 0$ então $v_i = 0$.

De modo análogo, por (I.3.8) verificamos que: se $(\sum_h a_{hj} u_h + \sum_i c_{ij} v_i) > 0$ então $x_j = 0$ e se $x_j > 0$ então $(\sum_h a_{hj} u_h + \sum_i c_{ij} v_i) = 0$. Isto é, que em cada par de inequações duais correspondentes (I.3.1), pelo menos um sinal de igualdade deve valer para todas as soluções. Portanto concluimos que:

- (i) cada par de inequações correspondentes contém no máximo uma inequação com folga.

Mas, pelo Teorema 1 existem soluções (U^*, V^*) e (X^*, Y^*) do PGSD, tais que:

$$v_i^* + (-\sum_j c_{ij} x_j^* - \sum_k d_{ik} y_k^*) > 0, \quad i = 1, \dots, m$$

$$(\sum_h a_{hj} u_h^* + \sum_i c_{ij} v_i^*) + x_j^* > 0, \quad j = 1, \dots, n$$

o que nos leva à conclusão seguinte:

- (ii) cada par de inequações correspondentes contém pelo menos uma inequação com folga.

Então de (i) e (ii) concluímos que cada par de inequações correspondentes do PGSD, contém exatamente uma inequação com folga (relativa ao seu respectivo sistema).

Propriedade Característica do PGSD: como podemos observar, o Teorema 3 atribui às inequações individuais do PGSD, uma propriedade que descrevemos coletivamente como

Complementaridade de Folga: o conjunto de inequações com folga de um sistema é o complementar do conjunto de inequações com folga do seu sistema dual.

Exemplo de um PGSD: seja o PGSD, em pequena escala, dado abaixo:

$$\begin{array}{rcll}
 u_1 & \text{(livre)} & -x_1 + x_2 & -x_4 - y_1 + y_2 = 0 \\
 v_1 & \geq 0^* & -x_1 + x_2 - x_3 & -y_1 \geq 0 \\
 v_2 & \geq 0 & x_1 + x_3 - x_4 - y_1 - y_2 & \geq 0^* \\
 v_3 & \geq 0^* & -x_2 - x_3 - x_4 & + y_2 \geq 0 \\
 u_1 + v_1 - v_2 & \geq 0 & x_1 & \geq 0^* \\
 -u_1 - v_1 + v_3 & \geq 0^* & x_2 & \geq 0 \\
 v_1 - v_2 + v_3 & \geq 0^* & x_3 & \geq 0 \\
 u_1 + v_2 + v_3 & \geq 0 & x_4 & \geq 0^* \\
 u_1 + v_1 + v_2 & = 0 & & y_1 \text{ (livre)} \\
 -u_1 + v_2 - v_3 & = 0 & & y_2 \text{ (livre)}
 \end{array}$$

Notemos que as inequações deste par de sistemas duais indicadas pelo asterísco "*" são inequações com folga e que exibem a propriedade Complementaridade de Folga

pois, tomando-se

$$(u_1; v_1, v_2, v_3) = (-1; 1, 0, 1) \text{ e}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4; y_1, y_2) = (2, 0, 0, 1; -2, 1)$$

como soluções dos respectivos sistemas, observamos que estas soluções satisfazem estritamente (> 0) as inequações indicadas com "*" e as restantes (que não são de folga, consequentemente devido ao item (i) da demonstração do Teorema 3) como equações ($= 0$).

C A P I T U L O I I

CONES POLIÉDRICOS CONVEXOS

II.1. Introdução

Iniciaremos este capítulo, recordando alguns conceitos que estarão constantemente em uso no decorrer do nosso trabalho.

É conveniente ainda, especificarmos que todo o nosso estudo foi feito no espaço vetorial real de dimensão n , ou seja, em \mathbb{R}^n .

Produto Escalar: Sejam X e Y dois vetores quaisquer de \mathbb{R}^n , isto é, $X = (x_1, \dots, x_n)$ e $Y = (y_1, \dots, y_n)$ com x_i e y_i em \mathbb{R} para $i = 1, \dots, n$. Chama-se produto escalar de X por Y ao número real $YX' = \sum_{i=1}^n y_i x_i$.

Reta: Sejam X_1 e X_2 dois vetores quaisquer de \mathbb{R}^n e λ um real qualquer. Chama-se reta em \mathbb{R}^n , ao conjunto

$$R = \{X \in \mathbb{R}^n / X = \lambda X_2 + (1 - \lambda) X_1\}.$$

Segmento de reta: Sejam X_1 e X_2 dois vetores quaisquer de \mathbb{R}^n e λ um real tal que $0 \leq \lambda \leq 1$. Chama-se segmento de reta que une os vetores X_1 e X_2 , ao conjunto

$$s = \{X \in \mathbb{R}^n / X = \lambda X_2 + (1 - \lambda) X_1\}.$$

Semi-reta (ou raio) gerada por um vetor: Seja $V \neq 0$ um vetor de \mathbb{R}^n e $\mu \geq 0$ um real. Chama-se semi-reta gerada por V , ao conjunto

$$r = \{X \in \mathbb{R}^n / X = \mu V\}.$$

Hiperplano: Chama-se hiperplano em \mathbb{R}^n , ao conjunto

$$H = \{X \in \mathbb{R}^n / CX' = z\} \quad \text{onde } C \neq 0 \text{ é um vetor de } \mathbb{R}^n \text{ e } z \in \mathbb{R}.$$

Observemos que o vetor C é ortogonal a qualquer vetor do hiperplano, o que nos leva a ver que C é normal ao hiperplano. Ainda é conveniente lembrar que o hiperplano H divide \mathbb{R}^n em semi-espacos

$$S_1 = \{X \in \mathbb{R}^n / CX' < z\}, \quad S_2 = \{X \in \mathbb{R}^n / CX' > z\} \text{ abertos e}$$

$$S_3 = \{X \in \mathbb{R}^n / CX' \leq z\}, \quad S_4 = \{X \in \mathbb{R}^n / CX' \geq z\} \text{ fechados.}$$

Conjunto Convexo: Diz-se que um conjunto C de \mathbb{R}^n é convexo se,

$$C = \{X \in \mathbb{R}^n / X = \lambda X_2 + (1 - \lambda) X_1\} \quad \text{onde } X_1 \text{ e}$$

X_2 estão em C e $0 \leq \lambda \leq 1$.

Observemos que, tanto um conjunto unitário de \mathbb{R}^n como o conjunto vazio são convexas.

Vetor Extremo de um Conjunto Convexo: um vetor X de \mathbb{R}^n é extremo de um conjunto convexo se e somente se não existem vetores X_1 e X_2 do conjunto com $X_1 \neq X_2$ tais que $X = \lambda X_2 + (1-\lambda) X_1$, $0 < \lambda < 1$ para $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nota: faremos a seguir algumas afirmações apenas como lembrete, pois estas são fáceis de serem verificadas.

- i) A interseção de dois conjuntos convexos é um conjunto convexo:
- ii) A interseção de dois hiperplanos é um hiperplano.
- iii) A interseção de dois semi-espacos (aberto-fechado) é um semi-espaço (aberto-fechado).

Combinação Convexa de um número finito de vetores: Sejam os vetores X_i de \mathbb{R}^n com $i = 1, \dots, m$. Chama-se combinação convexa desses m vetores ao vetor $X = \sum_{i=1}^m \mu_i X_i$ com reais $\mu_i \geq 0$ e $\sum_{i=1}^m \mu_i = 1$.

Lembremo-nos que, um conjunto formado por todas as combinações convexas de um número finito de vetores ainda é um conjunto convexo.

Envoltória Convexa de um Conjunto A não convexo: Dado um conjunto não convexo A de \mathbb{R}^n , chama-se envoltória convexa de A , ao menor conjunto convexo que contenha A .

Poliedro Convexo gerado por um número finito de vetores: Chama-se poliedro convexo gerado por um número finito m , de vetores de \mathbb{R}^n , à envoltória convexa desses m vetores.

Notemos que o poliedro assim gerado, terá no máximo m vetores extremos. Isso nos sugere que o poliedro convexo pode ser representado pelo conjunto das combinações convexas desses m vetores extremos.

Cone: Diz-se que um conjunto C de \mathbb{R}^n é um cone se, para todo vetor X de C e para todo escalar (real) $\lambda \geq 0$, tem-se λX em C .

Vértice de um cone: Diz-se que um cone tem vértice se, o vetor 0 de \mathbb{R}^n está em C . Neste caso o cone pode ser chamado de "pontudo".

Cone Polar: Tomemos um conjunto qualquer A de \mathbb{R}^n e formemos o conjunto $A^* = \{X \in \mathbb{R}^n / AX' \leq 0\}$ chamado Polar de A , consistindo de todos os vetores X de \mathbb{R}^n tais que $YX' \leq 0$ para cada Y do conjunto A .

Observemos que o conjunto A^* , assim definido, é um cone convexo.

Cone Poliédrico Convexo: Seja A um conjunto finito de \mathbb{R}^n tal que $A = \{A_1, \dots, A_p\}$ com A_i em \mathbb{R}^n para $i = 1, \dots, p$. Ou ainda, seja a matriz $A = (a_{ij})_{p \times n}$ com $a_{ij} \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, p$ e $j = 1, \dots, n$ tal que $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ é a i -ésima linha da matriz A .

Chama-se cone poliédrico convexo, ao conjunto $A^* = \{X \in \mathbb{R}^n / A_1 X' \leq 0, \dots, A_p X' \leq 0\}$.

Podemos observar que A^* é a interseção de

um número finito de semi-espacos da forma $A_i X' \leq 0$ ($i=1, \dots, p$) cujos hiperplanos fronteiras, $A_i X' = 0$ ($i = 1, \dots, p$), passam pela origem.

De um ponto de vista mais concreto, A^* é o conjunto de soluções de um sistema homogêneo finito de p inequações lineares a n incógnitas.

É de nosso interesse desenvolver nas partes subsequentes deste capítulo, toda uma teoria em relação a um Cone Poliédrico Convexo, o qual indicaremos por CPC, apenas para simplicidade de notação.

II.2. ESTRUTURA FACIAL DE UM CPC

II.2.1. Conceitos Fundamentais

Definição 1: Face Aberta genérica de um CPC.

Dado o CPC A^* tal que

$$A^* = \{X \in \mathbb{R}^n / A_1 X' \leq 0, \dots, A_p X' \leq 0\}$$

e tomando-se o conjunto de índices $I = \{1, \dots, p\}$, diz-se que, a cada subconjunto H (que pode ser vazio) de I corresponde um subconjunto F_H de A^* , definido como o conjunto

$$F_H = \{X \in \mathbb{R}^n / A_h X' < 0, \forall h \in H; A_h X' = 0, \forall h \in (I-H)\}$$

e chamado Face Aberta de A^* correspondente a H :

Podemos observar que A^* apresenta 2^p faces, sendo que alguma delas pode ser vazia, se para isso observamos que H pode ser recolhido de 2^p maneiras possíveis e que faces não vazias, correspondentes a subconjuntos de índices distintos, são disjuntas.

Se $F_H \neq \emptyset$ então $F_H = 0_H \cap L_H$, onde 0_H é o conjunto (aberto) tal que

$$0_H = \{X \in \mathbb{R}^n / A_h \quad X' < 0, \forall h \in H\}$$

e L_H é o subespaço linear tal que

$$L_H = \{X \in \mathbb{R}^n / A_h \quad X' = 0, \forall h \in (I-H) \text{ ou } \forall h \notin H\}$$

Definição 2: Dimensão de uma F_H (genérica) não vazia de A^* .

Sejam

n = dimensão de \mathbb{R}^n

$r = r_\phi$ = posto da matriz A = número máximo de vetores linearmente independentes de A .

r_H = número máximo de vetores linearmente independentes de L_H = número máximo de equações linearmente independentes no subespaço linear L_H .

$d = d_\phi = n - r =$ dimensão da face F_ϕ (face de A^* de menor dimensão).

d_H = dimensão de uma face genérica F_H de A^* .

Diz-se que F_H é uma face de dimensão d_H , com $d_H = n - r_H$.

Definição 3: Face Limite de uma F_H .

Seja I o conjunto de índices e $G \subset H \subset I$. Se $F_G \neq \emptyset$ e $F_H \neq \emptyset$, diz-se que F_G é uma face limite de F_H .

Definição 4: Chama-se Conjunto Limite de uma F_H ao conjunto formado pelas faces limites de F_H .

II.2.2. Propriedades Fundamentais

Proposição: "Se F_G é uma face limite de F_H , então $d_G < d_H$ ".

Demonstração: Como por hipótese F_G é uma face limite de F_H , temos que

$$G \subset H \subset I, F_G \neq \emptyset, F_H \neq \emptyset, \text{ onde}$$

$$F_G = 0_G \cap L_G = \{X \in \mathbb{R}^n / A_g X' < 0, \forall g \in G; A_g X' = 0, \forall g \in (I-G)\} \text{ e}$$

$$F_H = 0_H \cap L_H = \{X \in \mathbb{R}^n / A_h X' < 0, \forall h \in H; A_h X' = 0, \forall h \in (I-H)\}.$$

Se $G \subset H$ então $(I-G) \supset (I-H)$ o que implica em que o sistema de equações que define L_H é um subconjunto do sistema de equações

que define L_G . Logo

$$d_G \leq d_H \quad (\text{II.2.2.1})$$

Seja $g \in (H-G)$, isto é $g \in H$ e $g \notin G$. Suponhamos que $d_G = d_H$. Como $d_H = d(L_H) = n - r_H$ e $d_G = d(L_G) = n - r_G$, temos que $r_G = r_H$. Então a equação

$$A_g X' = 0 \quad (\text{II.2.2.2})$$

é linearmente dependente das equações

$$A_h X' = 0, \quad \forall h \notin H \quad (\text{II.2.2.3})$$

de tal modo que qualquer X que satisfaça (II.2.2.3) satisfaz (II.2.2.2).

Temos então que $F_H = \phi$, o que vai contra a hipótese. Logo

$$d_g \neq d_H \quad (\text{II.2.2.4})$$

Por (II.2.2.1) e (II.2.2.4) concluímos que $d_G < d_H$.

Lema 1: "Um vetor X_0 situado na face F_H de dimensão $d_H > d + 1$, pode ser expresso como a soma $X_0 = X_1 + X_2$, onde X_1 e X_2 são vetores das faces limites de F_H de dimensões $> d$ (e necessariamente $< d_H$)."

Demonstração: Como o subespaço linear L_H tem dimensão $d_H > d + 1$,

onde $d = d_\phi$ ($H = \phi$), podemos achar em L_H um vetor \bar{X} tal que $\bar{X} \notin S$, sendo S o subespaço linear gerado por X_0 e pelos vetores de F_ϕ .

Assim com X_0 e \bar{X} podemos definir um espaço linear bidimensional L^0 formado por vetores X tais que

$$X = t X_0 + s \bar{X} \quad (\text{II.2.2.5})$$

com t e s em \mathbb{R} .

L^0 é um subespaço de L_H pois, como $X_0 \in L_H$ (porque $X_0 \in F_H$) e $\bar{X} \in L_H$, temos que:

$$\forall X \in L^0 \implies X \in L_H \implies L^0 \subset L_H$$

Seja

$$M^0 = L^0 \cap A^* = \{X/A_h X' \leq 0, \forall X \in L^0 \text{ e } \forall h \in I\}, \text{ portanto}$$

$$X \in M^0 \implies A_h X' = A_h (t X_0 + s \bar{X})' \leq 0 \implies$$

$$\implies t(A_h X'_0) + s(A_h \bar{X}') \leq 0 \quad (\text{II.2.2.6})$$

Um vetor X da forma (II.2.2.5) está em L_H e portanto automaticamente satisfaz (II.2.2.6) $\forall h \notin H$. Assim $X \in M^0$, se e somente se, X satisfaz (II.2.2.6) $\forall h \in H$.

Observemos que $H \neq \phi$ porque, por hipótese, $d_H > d + 1 > d = d_\phi$.

Como $t(A_h X'_0) + s(A_h \bar{X}') \leq 0 \forall h \in H$, t e s em \mathbb{R} então $A_h X'_0 < 0$. Logo

$$t \geq - \frac{A_h \bar{X}'}{A_h X'_0} \cdot s \quad \forall h \in H$$

• Fazendo-se $f_h = - \frac{A_h \bar{X}'}{A_h X'_0}$, temos que

$$t \geq f_h \cdot s \quad \forall h \in H. \quad (\text{II.2.2.7})$$

Observemos que (II.2.2.7) é (II.2.2.6) reescrita para $\forall h \in H$. Em (II.2.2.6), levando-se em conta somente a igualdade, temos as equações

$$t(A_h X'_0) + s(A_h \bar{X}') = 0 \quad \forall h \in H \quad (\text{II.2.2.8})$$

que são representadas, num plano (s, t) , por um conjunto de retas passando pela origem, com inclinações

$$f_h = - \frac{A_h \bar{X}'}{A_h X'_0} \quad \forall h \in H$$

Notemos que se f fosse constante, teríamos o conjunto de retas, dado pelas equações (II.2.2.8), com apenas um elemento, isto é, uma reta de equação

$$A_h (f X'_0 + \bar{X}') = 0 \quad \forall h \in H \quad (\text{II.2.2.9})$$

passando pela origem com inclinação f .

Como X_0 e \bar{X} estão em L_H , (II.2.2.9) seria ainda válida para $h \notin H$, o que significaria que

$$A_h(f X_0 + \bar{X})' = 0 \quad \text{tal que } f X_0 + \bar{X} \in F_\phi$$

e isto iria em contradição à maneira pela qual \bar{X} foi escolhido. Logo f não pode ser constante, isto é, no plano (s, t) teremos mais de uma reta.

Portanto o conjunto de retas contém retas de inclinação máxima $(f_{h'})$ e mínima $(f_{h''})$ correspondendo a h' e h'' em H ($f_{h'} \neq f_{h''}$).

Fazendo-se $X_1 = t_1 X_0 + s_1 \bar{X}$ e $X_2 = t_2 X_0 + s_2 \bar{X}$ para $X_0 = X_1 + X_2 = (t_1 + t_2)X_0 + (s_1 + s_2)\bar{X}$, obtemos o sistema linear homogêneo de 4 equações a 4 incógnitas

$$\begin{aligned} t_1 + t_2 &= 1 \\ s_1 + s_2 &= 0 \\ t_1 - f_{h'} s_1 &= 0 \\ t_2 - f_{h''} s_2 &= 0 \end{aligned}$$

cuja solução é:

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{f_{h''}}{f_{h'} - f_{h''}}, & t_2 &= -\frac{f_{h'}}{f_{h'} - f_{h''}} \\ s_1 &= \frac{1}{f_{h'} - f_{h''}}, & s_2 &= -\frac{1}{f_{h'} - f_{h''}} \end{aligned}$$

Para X_1 e X_2 a equação (II.2.2.7) se reduz a

$$f_{h'} \geq f_h \quad \text{e} \quad f_h \geq f_{h''}$$

Vemos que X_1 satisfaz (II.2.2.7) (logo satisfaz também (II.2.2.6)) como uma equação para $h = h'$ e como uma inequação estrita para $h = h''$; enquanto X_2 satisfaz (II.2.2.7) (logo satisfaz também (II.2.2.6)) como uma equação para $h = h''$ e como uma inequação estrita para $h = h'$.

Assim cada X_1 e X_2 satisfaz (II.2.2.6) como inequação estrita para algum, mas nem todo, h de H . Ainda, como X_1 e X_2 estão em L_H , eles satisfazem (II.2.2.6) como uma equação para cada h não de H . Consequentemente X_1 e X_2 estão situados em faces limites de F_H de dimensão maior que d (e necessariamente menor que d_H).

Teorema 1: "Dado A^* ou, A^* é sua própria face F_ϕ ou, A^* é a envoltória convexa de sua face F_ϕ e de suas faces de dimensões $d + 1$ ".

Demonstração: a) sabe-se que a face de menor dimensão de A^* é a face F_ϕ (onde $H = \phi$ e $d_\phi = d$). Isto é, A^* não tem faces com dimensões menores que d . Logo temos que A^* tem faces de dimensões iguais ou maiores que d .

No caso de A^* ter somente a face F_ϕ , temos que

$$A^* = F_\phi$$

b) suponhamos agora que A^* não seja constituído apenas da face F_ϕ , mas sim desta e de outras faces, cujas dimensões são maiores que d .

Tomemos um vetor X situado numa face de A^*

de dimensão maior que $d + 1$. Temos, pelo Lema 1, que

$$X = \sum_{i=1}^m X_i \quad \text{com } X_i \in F_{H_i} \quad \text{e} \quad d_{H_i} = d + 1$$

e para $m > 0$ temos $m X_i \in F_{H_i}$, logo

$$X = \sum_{i=1}^m \frac{1}{m} (m X_i) \quad \text{com} \quad \sum \frac{1}{m} = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1}{m} > 0$$

isto é, X é igual à combinação convexa dos vetores das faces F_{H_i} , donde concluímos que X está na envoltória convexa das faces F_{H_i} .

Os demais vetores de A^* estão em F_ϕ ou em F_{H_i} , logo estarão também na envoltória convexa da face F_ϕ e das faces F_{H_i} .

i) Assim concluímos que A^* está contido na envoltória convexa da face F_ϕ e das faces F_{H_i} .

ii) Como A^* é convexo e contém F_ϕ e as faces F_{H_i} , então A^* contém a envoltória convexa das faces F_ϕ e F_{H_i} .

Por (i) e (ii) temos que A^* é a envoltória convexa das faces F_ϕ ($d_\phi = d$) e F_{H_i} ($d_{H_i} = d + 1$).

Corolário 1: "A interseção de um número finito de semi-espacos é:

a) um subespaço linear de dimensão d , ou

b) a envoltória convexa de um número finito de semi-espacos

de dimensões $d + 1$, limitados por um subespaço comum de di mensão d' .

Demonstração: Vimos em (II.1.10) que o CPC A^* pode ser interpretado como sendo a interseção de um número finito de semi espaços fechados, $A_i: X' \leq 0$, ou seja

$$A = \{X \in \mathbb{R}^n / \bigcap_{i=1}^p A_i: X' \leq 0, \forall A_i \in A\}$$

Observemos que A^* ainda é um semi-espaço.

Pelo Teorema 1, temos que

a) $A^* = F_\phi$, onde

$$F_\phi = 0_\phi \cap L_\phi = \{X \in \mathbb{R}^n / A_h X' < 0, \forall h \in \phi; A_h X' = 0, \forall h \in (I-\phi)\}$$

portanto $F_\phi = L_\phi$ e $d_\phi = d_{L_\phi} = d$. Logo A^* é um subespaço linear de dimensão d . Ou,

b) A^* é a envoltória convexa de sua face F_ϕ e de suas faces, F_{H_i} , de dimensões $d + 1$.

$$F_{H_i} = \{X \in \mathbb{R}^n / A_h X' < 0, \forall h \in H_i; A_h X' = 0, \forall h \in (I-H_i)\}$$

para $i = 1, \dots, \ell$ ($\ell < p$), são semi-espaços de dimensões $d+1$. F_ϕ - face limite das faces F_{H_i} é um subespaço de dimensão d . Logo A^* é a envoltória convexa de um número finito de semi-espaços (F_{H_i}) de dimensões $d + 1$, limitados por um subespaço comum (F_ϕ) de dimensão d .

Corolário 2: "Se o posto da matriz A é igual a n então A^* é:

a) $\{0\}$ ou

b) a envoltória convexa de $\{0\}$ e dos raios de A^* ."

Demonstração:

i) se $d = d_\phi = n - r_\phi$, onde $r_\phi = n =$ posto da matriz A , então $d = 0$. Logo $F_\phi = \{0\}$, ou seja, F_ϕ consiste apenas do vetor zero de \mathbb{R}^n .

Pela parte (a) do Teorema 1 e por (i), temos que $A^* = \{0\}$, ou seja, A^* tem apenas uma face cuja dimensão é zero (isto é, F_ϕ é um "vértice" de A^*). Geometricamente dizemos que o CPC A^* é "pontudo".

ii) se $d_{H_i} = d + 1$ e $d = 0$, então $d_{H_i} = 1$. Logo as faces F_{H_i} são semi-retas abertas ou raios de A^* .

Pela parte (b) do Teorema 1 e por (ii) temos então que A^* é a envoltória convexa de $\{0\}$ e dos raios de A^* .

Nota: vale a pena assinalar que estas semi-retas abertas ou raios de A^* podem ser achadas por um processo direto (embora trabalhoso). Este processo consiste em escolhermos (de todos os modos possíveis) um subconjunto de $n-1$ vetores linearmente independentes de A . O conjunto solução do sistema de equações homogêneas correspondente, consiste de todos os múltiplos tX de uma solução particular, não trivial, X . Se X satisfaz $AX' \leq 0$, então a semi-reta aberta tX , para $t > 0$, é um raio de A^* ; se X satisfaz $AX' \geq 0$ então a semi-reta aberta $t(-X)$, para $t > 0$, é um raio de A^* .

II.2.3. Exemplo

Seja A um conjunto finito de \mathbb{R}^2 , tal que

$A = \{A_1, A_2\}$ com $A_1 = (-1, 0) \in \mathbb{R}^2$ e $A_2 = (0, -1) \in \mathbb{R}^2$. Ou ainda

da:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{com } A_i \in \mathbb{R}^2 = i\text{-ésima linha da matriz } A \text{ para } i = 1, 2.$$

Então o CPC A^* é o conjunto de \mathbb{R}^2 tal que

$$A^* = \{X \in \mathbb{R}^2 / A_1 X' \leq 0, A_2 X' \leq 0\}, \text{ isto é:}$$

$$A^* = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 / (-1 \ 0) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \leq 0, (0 \ -1) \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \leq 0\},$$

ou seja, $A^* = \{(X_1, X_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$.

Como $I = \{1, 2\}$ então A^* terá, no máximo, 4 (2^2) faces, achadas do seguinte modo:

$$\text{Se } H = \{1\} \text{ então } F_H = F_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / (-1, 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} < 0,$$

$$(0 \ -1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0\}.$$

$$F_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 > 0, x_2 = 0\} \text{ com } d_H = d_1 = 2-1=1.$$

Logo F_1 é uma semi-reta, ou raio, de A^* .

$$\text{Se } H = \{2\} \text{ então } F_H = F_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / (0 \ -1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} < 0,$$

$$(-1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0\}.$$

$$F_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_2 > 0, x_1 = 0\} \text{ com } d_H = d_2 = 2-1 = 1. \text{ Lo}$$

go F_2 é uma semi-reta, ou raio, de A^* .

$$\text{Se } H = \phi, \text{ então } F_H = F_\phi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / (-1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$(0 \ -1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0\}.$$

$$F_\phi = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 = 0, x_2 = 0\} \text{ com } d_H = d_\phi = d = 2-2=0.$$

Logo $F_\phi = \{(0, 0)\}$ é um vértice de A^* .

$$\text{Se } H = I, \text{ então } F_H = F_{12} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / (-1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} < 0,$$

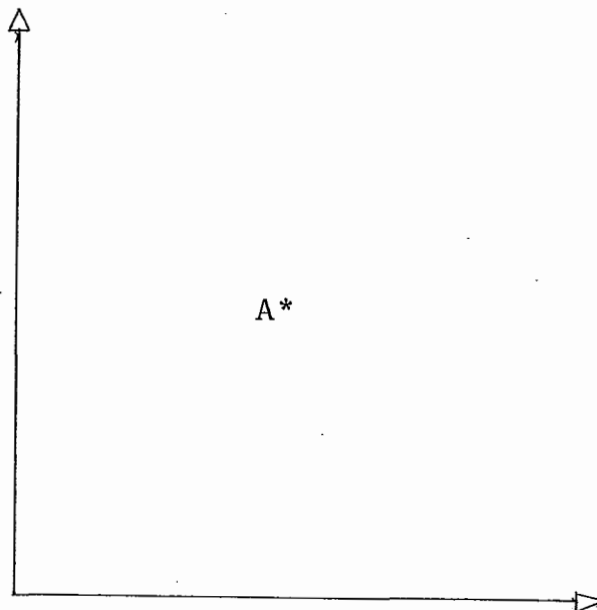
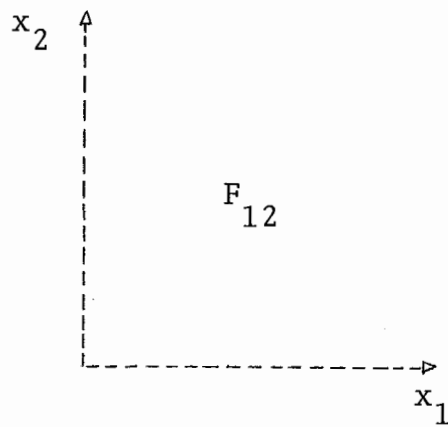
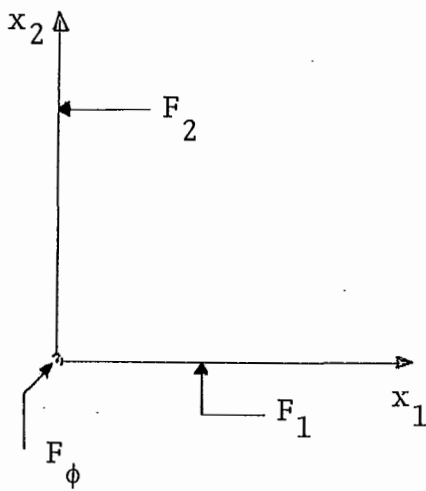
$$(0 \ -1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} < 0\}.$$

$$F_{12} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 > 0, x_2 > 0\} \text{ com } d_H = d_{12} = 2-0=2.$$

Logo esta face, nada mais é, do que o interior de A^* .

Temos que A^* tem quatro faces, onde as faces F_1 , F_2 e F_ϕ são faces limites de F_{12} e F_ϕ é a face limite para F_1 e F_2 .

Graficamente temos que:



II.3. ALGUNS TEOREMAS FUNDAMENTAIS

Definição 5: Conjunto Expansão.

Seja $B = \{B_1, \dots, B_q\}$ com B_j em \mathbb{R}^n , para $j = 1, \dots, q$ e $V = (v_1, \dots, v_q)$ um vetor de \mathbb{R}^q tal que $V \geq 0$ (isto é: $v_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, q$). Chama-se conjunto expansão de B , ao cone convexo, indicado por $B^<$, tal que

$$B^< = \{X \in \mathbb{R}^n / X = VB, V \geq 0\} = \{X \in \mathbb{R}^n / X = v_1 B_1 + \dots + v_q B_q; v_j \geq 0\}.$$

Ou seja, o conjunto expansão $B^<$, consiste de todas as combinações lineares finitas, com coeficientes não negativos, de vetores de B .

Observação: podemos pensar em B , como sendo a matriz de coeficientes reais

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \dots & b_{qn} \end{pmatrix}$$

onde $B_j \in \mathbb{R}^n$ é a j -ésima linha de B , com $j = 1, \dots, q$.

É de fácil verificação cada afirmativa abaixo:

i) $B^<$ é a envoltória convexa das semi-retas $v_j B_j$, $v_j \geq 0$ ge

radas pelos vetores B_j de B .

- ii) Inversamente, a envoltória convexa de qualquer família finita de semi-retas, pode ser escrita na forma $B^<$.
- iii) Para formar B escolhamos um vetor não nulo para cada semi-reta não degenerada. (Se quisermos escolher $B = \{0\}$, basta usarmos um vetor $V = 0$ e teremos a semi-reta degenerada).

Teorema 2: (Teorema de Minkowski): "Dado um conjunto finito A de vetores em \mathbb{R}^n , existe um conjunto finito B de vetores em \mathbb{R}^n , tal que $A^* = B^<$."

Demonstração: Pelo Teorema 1, é suficiente mostrarmos que a face F_ϕ tem um conjunto expansão e cada uma das faces de dimensões $d + 1$ também têm conjuntos expansões e que $B^<$ pode ser tomado como a união desses conjuntos.

- i) Se $d = 0$ então $F_\phi = \{0\}$. Portanto $\{0\}$ é um conjunto expansão para F_ϕ , isto é, $B^< = \{0\}$. Como temos pela parte (a) do Teorema 1, que $A^* = F_\phi$, então $A^* = F_\phi = \{0\} = B^<$.
- ii) Se $d > 0$, tomemos $\{B_1, \dots, B_d\}$ como uma base para F_ϕ . Logo:

$$\forall X \in F_\phi \implies X = c_1 B_1 + \dots + c_d B_d$$

porém nada nos garante que todos os c_i ($i = 1, \dots, d$) sejam ≥ 0 . Então fazamos:

$u_i = \max(c_i, 0) \geq 0$ e $v_i = \max(-c_i, 0) \geq 0$. Portanto

$$X = u_1 B_1 + \dots + u_d B_d + v_1 (-B_1) + \dots + v_d (-B_d).$$

Segue que $\bar{B} = \{B_1, \dots, B_d, -B_1, \dots, -B_d\}$ expande F_ϕ , ou seja se, X pertence à face F_ϕ então X pertence ao conjunto expansão de \bar{B} (isto é: $X \in F_\phi \implies X \in \bar{B}^<$).

Seja F_H uma face qualquer de A^* de dimensão $d + 1$.

Como $\phi \subset H$, $F_\phi \neq \phi$ e $F_H \neq \phi$ então F_ϕ é face limite de F_H (com $d = d_\phi$ e $d_H = d + 1$).

Temos que a dimensão de F_H é dada por L_H e que $L_H \supset F_\phi$, portanto L_H é gerado linearmente pelos vetores de F_ϕ e (mais) pelo vetor B_H (isto é: $B_H \in L_H$ ($\because B_H \in F_H$) tal que $B_H \notin F_\phi$). Portanto

$$\bar{X} \in F_H \implies \bar{X} = X + c B_H \text{ com } X \in F_\phi$$

Como $H \neq \phi$, então

$$\forall h \in H, A_h \bar{X}' = A_h X' + c A_h B_H' \implies c > 0.$$

Logo, $\underline{B} = \bar{B} \cup \{B_H\}$ é uma base para F_H . Portanto

$$\forall \bar{X} \in F_H \implies \bar{X} \in \underline{B}^<$$

A expansão total $B^<$, seria a expansão das faces F_H e da face F_ϕ , isto é:

$$B^< = \overline{B}^< \cup \underline{B}^<$$

Com este fato e pela parte (b) do Teorema 1, temos que $A^* = B^<$.

Corolário: "Uma interseção finita de vários semi-espacos é uma envoltória convexa finita de várias semi-retas".

Demonstração: Este resultado é uma consequência imediata do Teorema 2.

Teorema 3: (Teorema de Farkas). "Se A é um conjunto finito de vetores de \mathbb{R}^n , então $A^{**} = A^<$ ".

Demonstração: De acordo com as definições de CPC e Conjunto expansão, temos que

$$A^{**} = (A^*)^* = \{Y \in \mathbb{R}^n / \forall X \in A^* \quad \langle X, Y \rangle \leq 0\} \text{ e}$$

$$A^< = \{Y \in \mathbb{R}^n / Y = \sum_{i=1}^p u_i A_i, \quad u_i \geq 0\}.$$

$$u_i \geq 0\}.$$

Provemos que (i) $A^{**} \subset A^<$ e que (ii) $A^< \subset A^{**}$.

i) Seja o Corolário 1 (Lema de Farkas) do (I.2) e façamos a seguinte troca entre:

Corolário 1

A'	por
A_0	por
U	por
X	por

Teorema 3

A
$Y \in \mathbb{R}^n$
$(-X) \in \mathbb{R}^n$
$U \in \mathbb{R}^p$

Portanto temos que: se a inequação $XY' \leq 0$ vale para todos os vetores X tais que $AX \leq 0$, então $Y = u_1 A_1 + \dots + u_p A_p$ para algum $U = (u_1, \dots, u_p)$ de \mathbb{R}^p com $u_i \geq 0$, $i = 1, \dots, p$. Ou seja:

$$\forall Y \in A^{**} \implies Y = \sum_{i=1}^p u_i A_i, u_i \geq 0 \text{ com } i = 1, \dots, p \implies$$

$$\implies Y \in A^<$$

$$\text{Logo } A^{**} \subset A^<$$

ii) Temos que

$$\forall Y \in A^< \implies Y = \sum_{i=1}^p u_i A_i, u_i \geq 0 \text{ com } i = 1, \dots, p \quad e$$

$$\forall X \in A^* \implies A_i X' \leq 0, \forall A_i \in A, \text{ o que implica}$$

$$XY' = X \left(\sum_{i=1}^p u_i A_i \right)' = \sum_{i=1}^p u_i (A_i X') \leq 0 \implies Y \in A^{**}$$

$$\text{Logo } A^< \subset A^{**}.$$

$$\text{Por (i) e (ii) temos então que } A^{**} = A^<$$

Teorema 4: (Teorema de Weyl): "Seja A um conjunto finito de vetores de \mathbb{R}^n . Existe um conjunto finito B de vetores de \mathbb{R}^n tal

que $A^* = B^{\leq}$ e $A^{\leq} = B^*$."

Demonstração:

a) Pelo Teorema 2, existe um conjunto finito B de vetores de \mathbb{R}^n tal que $A^* = B^{\leq}$.

b) Provamos que $(B^{\leq})^* = B^*$.

Para $B = \{B_1, \dots, B_q\}$ com B_j em \mathbb{R}^n ($j = 1, \dots, q$) temos que:

$$B^{\leq} = \{X \in \mathbb{R}^n / X = VB; V \geq 0\} = \{X \in \mathbb{R}^n / X = v_1 B_1 + \dots + v_q B_q; v_j \geq 0\}.$$

$$(B^{\leq})^* = \{Y \in \mathbb{R}^n / XY' \leq 0, X \in B^{\leq}\}$$

$$B^* = \{Y \in \mathbb{R}^n / B_j Y' \leq 0; \forall B_j \in B, j = 1, \dots, q\}$$

i) $\forall Y \in (B^{\leq})^* \implies Y \in \mathbb{R}^n / XY' \leq 0$ com $X \in B^{\leq} \implies$

$$\implies Y \in \mathbb{R}^n / \left(\sum_{j=1}^q v_j B_j \right) Y' \leq 0 \text{ com } v_j \geq 0 \text{ para } j = 1, \dots, q$$

$$\implies Y \in \mathbb{R}^n / \sum_{j=1}^q v_j (B_j Y') \leq 0 \implies Y \in \mathbb{R}^n / B_j Y' \leq 0 \text{ com}$$

$$B_j \in B \text{ e } j = 1, \dots, q \implies Y \in B^*. \text{ Logo}$$

$$(B^{\leq})^* \subset B$$

ii) $\forall Y \in B^* \implies Y \in \mathbb{R}^n / B_j Y' \leq 0, \forall B_j \in B$ para $j = 1, \dots, q$

$$\implies Y \in \mathbb{R}^n / v_j (B_j Y') \leq 0, \text{ com } v_j \geq 0 \implies$$

$$\implies Y \in \mathbb{R}^n / \sum_{j=1}^q v_j (B_j Y') \leq 0 \quad \text{com } B_j \in B \quad \text{e } v_j \geq 0 \implies$$

$$\implies Y \in \mathbb{R}^n / \left(\sum_{j=1}^q v_j B_j \right) Y' \leq 0 \quad \text{com } B_j \in B \quad \text{e } v_j \geq 0 \implies$$

$$\implies Y \in \mathbb{R}^n / X Y' \leq 0 \quad \text{com } X \in B^{\angle} \quad \text{e } X = \sum_{j=1}^q v_j B_j \implies$$

$$\implies Y \in (B^{\angle})^*. \quad \text{Logo}$$

$$B^* \subset (B^{\angle})^*.$$

Por (i) e (ii) vem que $(B^{\angle})^* = B^*$

c) Temos que: por (a) $A^* = B^{\angle}$ e por (b) $(B^{\angle})^* = B^*$, logo $A^{**} = B^*$.

Ainda pelo Teorema 3 $A^{**} = A^{\angle}$, então

$$A^{\angle} = B^*$$

Corolário: "Toda envoltória convexa finita de várias semi-retas é a interseção finita de vários semi-espacos e reciprocamente."

Demonstração: Iniciando com um conjunto B^{\angle} que é a envoltória convexa finita de várias semi-retas, então podemos inverter os papéis dos conjuntos A e B no Teorema 4. Daí podemos afirmar que existe um conjunto finito A tal que, $B^{\angle} = A^*$. Assim temos que B^{\angle} é expresso como a interseção finita de vários semi-espacos, do tipo $A_i X' \leq 0$ para $A_i \in A$.

A afirmação inversa é precisamente o Corolário do Teorema 2 (Teorema de Minkowski).

Exemplo:

Seja o conjunto $A = \{A_1, A_2\}$ de \mathbb{R}^3 , onde $A_1 = (-2, -1, -2) \in \mathbb{R}^3$ e $A_2 = (-3, -2, -1) \in \mathbb{R}^3$. Logo $A^* = \{X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / A_1 X' \leq 0, A_2 X' \leq 0\}$ é:

$$A^* = \{X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / (-2x_1 - x_2 - 2x_3) \leq 0;$$

$$(-3x_1, -2x_2 - x_3) \leq 0\} \quad \text{ou}$$

$$A^* = \{X = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 0; 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 0\}.$$

Vemos que A^* é definido pelos vetores X de \mathbb{R}^3 que são ortogonais (caso limite) e obtusos com os vetores A_1 e A_2 de A .

Como $I = \{1, 2\}$ então A^* tem $2^2 = 4$ faces, que são:

$$H = \emptyset \implies F_H = F_\emptyset = \{X \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0; 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$$

com $d_\emptyset = d = n - r_\emptyset = 3 - 2 = 1$. Logo F_\emptyset é a reta definida pelos raios $\lambda (-3, 4, 1)$ e $\lambda (3, -4, -1)$, com $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \geq 0$.

$$H = \{1\} \implies F_H = F_1 = \{X \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 + x_2 + 2x_3 > 0; 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\}$$

com $d_H = d_1 = n - r_H = 3 - 1 = 2$. Logo F_1 é o plano $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$ limitado por F_\emptyset .

$$H = \{2\} \implies F_H = F_2 = \{X \in \mathbb{R}^3 / 3x_1 + 2x_2 + x_3 > 0; 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\}$$

com $d_H = d_2 = n - r_H = 3 - 1 = 2$. Logo F_2 é o plano $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$ limitado por F_ϕ .

$$H = \{1, 2\} \implies F_H = F_{12} = \{X \in \mathbb{R}^3 / 2x_1 + x_2 + 2x_3 > 0; 3x_1 + 2x_2 + x_3 > 0\}$$

com $d_H = d_{12} = n - r_H = 3 - 0 = 3$. Logo F_{12} é o interior do cone A^* , isto é, a parte do cone (parte aberta) limitada pelas faces F_ϕ , F_1 e F_2 .

A fim de caracterizarmos melhor o CPC A^* , procederemos do seguinte modo:

i) tomemos o caso limite da ortogonalidade, isto é, sejam os hiperplanos (no caso, planos)

$$(a) \quad 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$$

$$(b) \quad 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

Temos que o vetor A_1 é normal ao hiperplano (a) e que A_2 é normal ao hiperplano (b). Ainda vemos que a interseção de (a) e (b) é definida pelas semi-retas $\lambda(-3, 4, 1)$ e $\lambda(3, -4, -1)$ com $\lambda \geq 0$, que por sua vez são ortogonais a A_1 e A_2 simultaneamente. Logo o hiperplano $-3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$ (ou $3x_1 - 4x_2 - x_3 = 0$) contém A_1 e A_2 e é perpendicular (ou ortogonal) simultaneamente aos hiperplanos (a) e (b).

ii) fazendo-se a interseção do hiperplano $-3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$ com (a) e (b), obtemos dois pares de semi-retas.

Considerando-se uma das semi-retas interse-

ção de $-3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$ com (a), uma das semi-retas interseção de $-3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$ com (b) e a interseção de (a) e (b), temos o cone A^* perfeitamente caracterizado. Isto é, teremos uma base para construir A^* . Chamemos de B esta base.

A interseção dos hiperplanos $-3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$ e (a) é dada pelas semi-retas $\lambda(-7, -8, 11)$ e $\lambda(7, 8, -11)$ com $\lambda \geq 0$, porém a primeira delas não satisfaz $3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 0$, logo não pertence a A^* .

A interseção dos hiperplanos $-3x_1 + 4x_2 + x_3 = 0$ e (b) é dada pelas semi-retas $\lambda(-1, -3, 9)$ e $\lambda(1, 3, -9)$ com $\lambda \geq 0$, mas a segunda delas não satisfaz $2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 0$, logo não pertence a A^* .

Então, tomando-se $\lambda = 1$, temos que

$$B = \{(7, 8, -11) \text{ e } (-1, -3, 9), (-3, 4, 1) \text{ e } (3, -4, -1)\}.$$

$$\text{Logo } A^* = B^{\angle}$$

Consideremos agora o conjunto $B = \{B_1, B_2\}$ de \mathbb{R}^3 onde $B_1 = (7, 8, -11)$ e $B_2 = (-1, -3, 9)$. Temos que

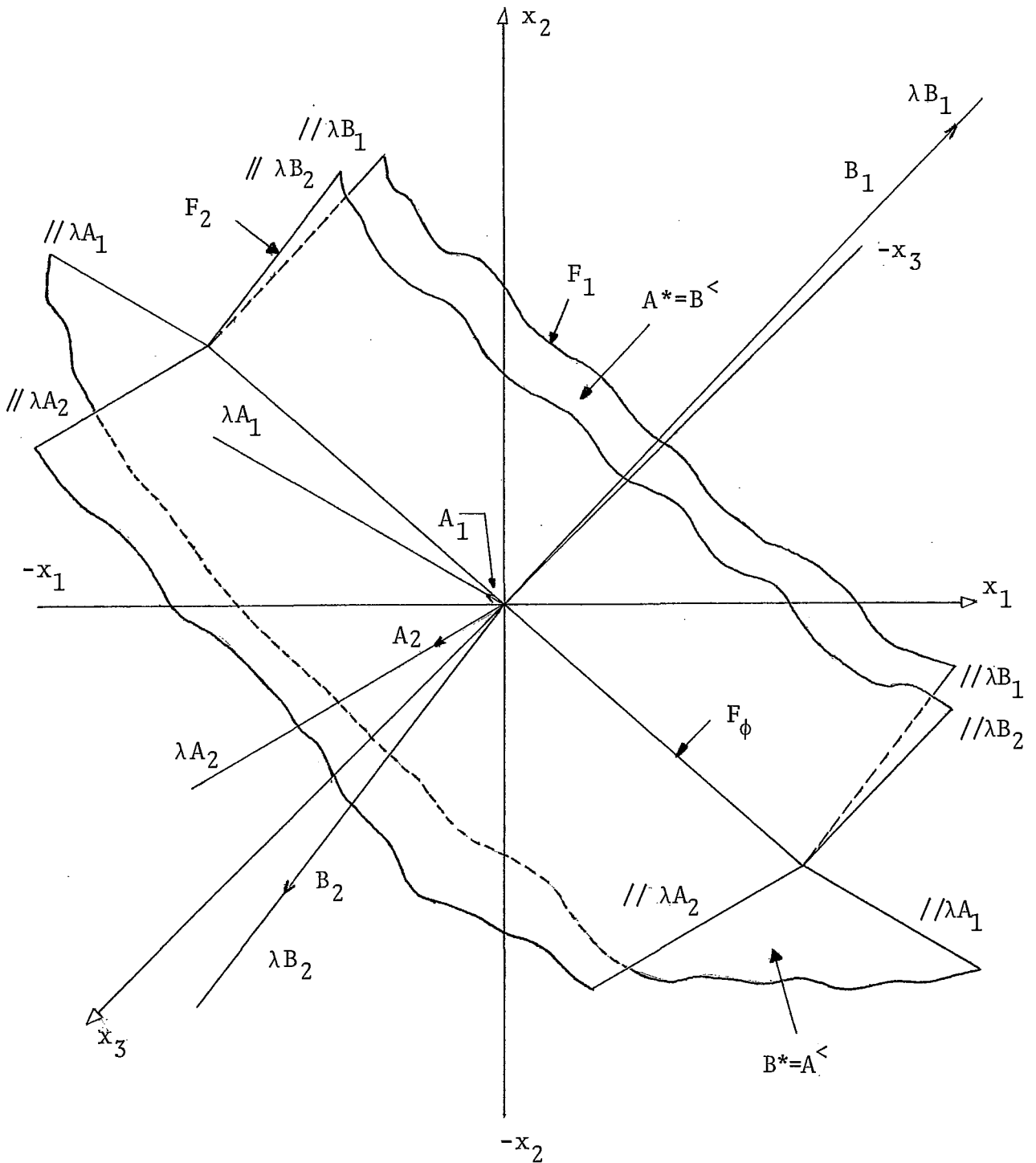
$$B^* = \{X \in \mathbb{R}^3 / 7x_1 + 8x_2 - 11x_3 \leq 0; -x_1 - 3x_2 + 9x_3 \leq 0\}$$

A caracterização de B^* , efetuando-se os mesmos procedimentos que anteriormente, nos levam a achar uma base A para B^* , tal que,

$$A = \{(-2, -1, -2) \text{ e } (-3, -2, -1), (-3, 4, 1) \text{ e } (3, -4, -1)\}$$

Logo $B^* = A^<$.

Graficamente temos que:



II.4. FACES EXTREMAS E CONJUNTOS MÍNIMOS DE EXPANSÃO

II.4.1. Propriedades Relativas a uma Face Extrema

Definição 6: Face Extrema de um CPC

Sejam F_H uma face de A^* , X_1 e X_2 vetores de A^* e X_H um vetor qualquer de F_H .

Diz-se que F_H é uma face extrema de A^* se, $X_H = X_1 + X_2$ com pelo menos um dos vetores X_1, X_2 em F_H .

Lema 2: "Se um vetor X está em uma face F_H de A^* e se $X = X_1 + \dots + X_m$ com $X_i \in A^*$ ($1 \leq i \leq m$), então cada X_i está ou em F_H ou em uma face limite de F_H ".

Demonstração:

$$\forall h \notin H, \text{ ou } h \in (I-H), \text{ temos que } A_h X' = A_h X'_1 + \dots + A_h X'_m = 0$$

e como por hipótese $X_i \in A^*$, também temos que $A_h X'_i \leq 0$ para $1 \leq i \leq m$. Logo temos que

$\forall h \notin H, A_h X'_i = 0$ para $1 \leq i \leq m$, o que torna implícita a afirmação do Lema.

Lema 3: "As faces extremas de A^* são precisamente a face F_ϕ de dimensão d e as faces de dimensões $d + 1$."

Demonstração: De acordo com o Lema 1 visto em (II.2.2) e com a Definição 6, vemos que nenhuma face de dimensão maior que $d + 1$, pode ser face extrema. Então faces extremas são faces cujas dimensões são d ou $d + 1$.

Mostremos que F_ϕ e que F_H ($d_H = d + 1$) são faces extremas.

i) Escolhamos um vetor $X_\phi \in F_\phi$ tal que

$$X_\phi = X_1 + X_2 \text{ com } X_1 \text{ e } X_2 \text{ em } A^*.$$

Como F_ϕ não tem faces limites, porque é a face de menor dimensão, temos pelo Lema 2 que X_1 e X_2 estão em F_ϕ . Logo, pela Definição 6, vemos que F_ϕ é uma face extrema de A^* .

ii) Seja F_H uma face qualquer de A^* com $d_H = d + 1$ e seja $X_H \in F_H$ tal que $X_H = \bar{X}_1 + \bar{X}_2$ com \bar{X}_1 e \bar{X}_2 em A^* .

Suponhamos que nem \bar{X}_1 e nem \bar{X}_2 estejam em F_H . Então, pelo Lema 2, \bar{X}_1 e \bar{X}_2 estão em faces limites de F_H , ou seja, \bar{X}_1 e \bar{X}_2 pertencem a F_ϕ . Logo $X_H \in F_\phi$ o que é absurdo pois partimos da hipótese de que $X_H \in F_H$ com $d_H = d + 1$. Logo \bar{X}_1 ou \bar{X}_2 (pelo menos um deles) está em F_H , o que indica (pela Definição 6) que F_H é uma face extrema de A^* .

Teorema 5: i) A^* é a envoltória convexa de suas faces extremas.

ii) Além disso, se A^* é a envoltória convexa de algum conjunto S de suas faces, então S deve incluir todas as faces extremas de A^* ."

Demonstração: i) Esta parte é consequência direta do Teorema 1 e do Lema 3.

ii) Seja S o conjunto das faces de A^* e usemos o termo face- S , para uma face de A^* que está em S .

Seja F_H uma face extrema qualquer de A^* e mostremos que F_H é uma face- S . Para isso, escolhemos um vetor X_H de F_H , então

$$X_H = t_1 X_1 + \dots + t_m X_m \text{ onde } X_i \text{ é face-}S \text{ com } i = 1, \dots, m \text{ para } 0 \leq t_i \leq 1 \text{ e } \sum_{i=1}^m t_i = 1.$$

Eliminando-se todos os $t_i = 0$ e reenumerando, se necessário, podemos assumir só os $t_i > 0$. Então os $t_i X_i$ estarão na mesma face que os X_i , logo os $t_i X_i$ pertencem à face- S .

Para provarmos que F_H é uma face- S , necessitamos somente mostrar que alguns $t_i X_i$ estão em F_H (faces distintas de A^* são disjuntas).

Pelo Lema 3, ou cada $t_i X_i$ está em F_H ou cada $t_i X_i$ está numa face limite de F_H . Logo:

a) se $F_H = F_\phi$ então F_H não tem face limite. Logo cada $t_i X_i$ está em F_H .

b) se F_H tem dimensão $d + 1$ então sua única face limite é F_ϕ .

Logo cada $t_i X_i$ está em F_ϕ ou cada $t_i X_i$ está em F_H :

c) se todos os $t_i X_i$ estão em F_ϕ , então $F_H = F_\phi$

d) se alguns dos $t_i X_i$ não pertencem a F_ϕ , então alguns $t_i X_i$ pertencem a F_H .

Tanto em (c) como em (d) temos alguns $t_i X_i$ em F_H .

Por (a) e (b) temos que F_H é uma face-S e como F_H é uma face extrema qualquer de A^* , então S contém todas as faces extremas de A^* .

Os lemas 4 e 5 especificam os argumentos usados na demonstração do Teorema 2.

Lema 4: "Sejam $d > 0$ e $\bar{B} = \{B_1, \dots, B_d, B_{d+1}\}$ onde B_1, \dots, B_d é uma base para F_ϕ e $B_{d+1} = -\sum_{i=1}^d B_i$. Então $F_\phi = \bar{B}^<$. Qualquer conjunto expansão para F_ϕ contém no mínimo $d + 1$ vetores."

Demonstração: Primeiramente, tentemos expressar F_ϕ como sendo $(B^0)^<$, onde B^0 é um conjunto de, no máximo, d vetores de F_ϕ . Ou seja, colocar $F_\phi = (B^0)^<$ onde $(B^0)^<$ é um subconjunto do subespaço linear gerado pelos vetores de $B^0 = \{B_1, \dots, B_d\}$.

Para que $F_\phi = (B^0)^<$, é necessário que B^0 seja uma base para F_ϕ . Porém esta condição ainda não é suficiente, porque o vetor $B_{d+1} = -\sum_{i=1}^d B_i$ pertence a F_ϕ e está sendo visto como uma combinação linear finita de vetores de B^0 , com todos os coeficientes iguais a -1 , o que implica em que o vetor B_{d+1} não pertence ao conjunto $(B^0)^<$. Entretanto, se tomar

mos o conjunto $\bar{B} = \{B_1, \dots, B_d, B_{d+1}\}$ então $F_\phi = (\bar{B})^<$. Provemos então esta afirmação:

$$\forall X \in F_\phi \implies X = \sum_{i=1}^d c_i B_i$$

i) $c_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, d$

$$\begin{aligned} \forall X \in F_\phi \implies X = \sum_{i=1}^d c_i B_i + 0(B_{d+1}) &\implies X \in (\bar{B})^< \implies \\ \implies F_\phi \subset (\bar{B})^< &\quad (\text{II.4.1.1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \forall X \in (\bar{B})^< \implies X = \sum_{i=1}^d c_i B_i + 0(B_{d+1}) &\implies X \in F_\phi \implies (\bar{B})^< \subset F_\phi \\ &\quad (\text{II.4.1.2}) \end{aligned}$$

Por (II.4.1.1) e por (II.4.1.2) temos que

$$F_\phi = (\bar{B})^<.$$

ii) algum $c_i < 0$

Seja $v = \max\{-c_1, \dots, -c_d\}$ e seja $v_i = c_i + v$.

Note que $v > 0$ e $v_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, d$.

$$\begin{aligned} \forall X \in F_\phi \implies X = \sum_{i=1}^d c_i B_i &= \sum_{i=1}^d (v_i - v) B_i = \sum_{i=1}^d v_i B_i + v \left(-\sum_{i=1}^d B_i\right) \implies \\ \implies X = \sum_{i=1}^d v_i B_i + v B_{d+1}, &\text{ com } v > 0 \text{ e } v_i \geq 0 \text{ (} i = 1, \dots, d \text{)} \implies \end{aligned}$$

$$\implies X \in (\bar{B})^<. \text{ Logo } F_\phi \subset (\bar{B})^< \quad (\text{II.4.1.3})$$

$$\begin{aligned} \forall X \in (\bar{B})^{\leq} &\implies X = \sum_{i=1}^d v_i B_i + v B_{d+1}, \text{ com } v > 0 \text{ e } v_i \geq 0 \implies \\ \implies X &= \sum_{i=1}^d (v_i - v) B_i = \sum_{i=1}^d c_i B_i \implies X \in F_{\phi} \implies (\bar{B})^{\leq} \subset F_{\phi} \end{aligned}$$

(II.4.1.4)

Por (II.4.1.3) e (II.4.1.4) temos que $F_{\phi} = (\bar{B})^{\leq}$.

Lema 5: "Seja B um conjunto finito de vetores de \mathbb{R}^n tal que $A^* = B^{\leq}$. Então:

- i) B contém pelo menos um vetor de cada face F_H de dimensão $d_H = d + 1$;
- ii) Se $d > 0$ então B contém um subconjunto B_0 tal que $F_{\phi} = (B_0)^{\leq}$ "

Demonstração: i) tomemos o conjunto S formado pela face F_{ϕ} e pelas faces $F_{H'_s}$ de A^* , onde cada face $F_{H'_s}$ contém um vetor de B .

Por hipótese geral temos que $A^* = B^{\leq}$. Logo pela parte (ii) do Teorema 5, vem que B contém, pelo menos, um vetor de cada face F_H de dimensão $d_H = d + 1$.

ii) seja o conjunto B_0 tal que $B_0 \subset B$ e B_0 é formado por todos os vetores de B que estão em F_{ϕ} . Como por hipótese parcial temos que $d > 0$, então basta provarmos que $B_0 \neq \emptyset$.

Se $d > 0$, então existe um vetor $X \neq 0$ em

F_ϕ tal que $X = u_1 B_1 + \dots + u_m B_m$, $u_i \geq 0$, $B_i \in B$ ($i=1, \dots, m$).

Como F_ϕ não tem faces limites, o Lema 2 nos permite afirmar que cada $u_i B_i$ pertence a F_ϕ e que $B_i \in F_\phi$ se $u_i > 0$. Em outras palavras, se $u_i = 0$ então $B_i \notin F_\phi$, portanto $B_i \notin B_0$. Mas como o vetor $X \neq 0$, nem todos os u_i são nulos, logo $B_0 \neq \phi$.

Notemos que se $X = 0$, $X \in (B_0)^\prec$.

II.4.2. Escolha Mínima do Conjunto de Expansão

Teorema 6: "Se $A^* \neq \{0\}$ então um conjunto mínimo B tal que $A^* = B^\prec$, é obtido pela escolha arbitrária de um vetor B_H em cada face F_H de dimensão $d + 1$ de A^* , aos quais se junta o conjunto \bar{B} tal que $F_\phi = (\bar{B})^\prec$ (para o caso de $d > 0$ é como foi visto no Lema 4)".

Demonstração: Seja $B = \{B_H\} \cup \bar{B}$ onde B_H é um vetor arbitrário de cada face F_H de $d_H = d + 1$ e \bar{B} é o conjunto tal que $F_\phi = (\bar{B})^\prec$.

Vamos dividir esta demonstração em duas partes, sendo que na primeira provamos que B expande A^* e na segunda que B , como foi escolhido, é mínimo. Então:

i) - Se $d > 0$, então B contém \bar{B} que expande F_ϕ e conjuntos que expandem cada face F_H de $d_H = d + 1$ (ou seja: cada F_H é expandida por $\underline{B} = \bar{B} \cup \{B_H\}$ com $B_H \in F_H$, como feito no Teorema 2). Por outro lado, o Teorema 1 nos garante que B expande A^* .

- Se $d = 0$, então cada face F_H de $d_H = d + 1$ é uma semi-reta, que é expandida pelo vetor B_H e $F_\phi = \{0\}$ está contida em B^\leq . Sendo assim a expansão também é garantida pelo Teorema 1.

ii) Cada conjunto expansão para A^* contém no mínimo um vetor de cada face F_H de $d_H = d + 1$ e se $d > 0$, então este conjunto deve conter também um conjunto de expansão para F_ϕ (Lema 5). Ainda o conjunto expansão para F_ϕ deve conter, no mínimo, $d + 1$ vetores (Lema 4), isto é, o mesmo número de vetores que foi escolhido para \bar{B} .

Observação: Seja v o número de faces de A^* , cujas dimensões são iguais a $d + 1$.

Se $v = d = 0$, então $A^* = \{0\}$ tal que $\{0\}$ é o conjunto mínimo de expansão para A^* .

II.5. CONSIDERAÇÕES SUPLEMENTARES SOBRE CPC

Definição 7: Sejam C^1 e C^2 dois cones poliédricos convexos quaisquer de \mathbb{R}^n , tais que

$$C^1 = \{X \in \mathbb{R}^n / A^1 X' \leq 0\} = (A^1)^* = \{A_1^1, \dots, A_p^1\}^*$$

$$C^2 = \{X \in \mathbb{R}^n / A^2 X' \leq 0\} = (A^2)^* = \{A_1^2, \dots, A_p^2\}^*$$

Chama-se Conjunto Interseção de C^1 e C^2 , ao cone poliédrico convexo, indicado por $C^1 \cap C^2$, tal que

$$C^1 \cap C^2 = \{X \in \mathbb{R}^n / A^1 X' \leq 0, A^2 X' \leq 0\} \{A_1^1, \dots, A_p^1; A_1^2, \dots, A_p^2\}^*$$

De acordo com esta definição, podemos observar que o conjunto interseção $C^1 \cap C^2$ é o "maior" cone convexo contido em C^1 e C^2 . Logo o símbolo " \cap " tem o mesmo significado que o usado para definir interseção na Teoria dos Conjuntos.

Definição 8: Sejam C^1 e C^2 dois cones poliédricos convexos quaisquer de \mathbb{R}^n , tais que

$$C^1 = \{X \in \mathbb{R}^n / X = V^1 B^1; V^1 \geq 0\} = (B^1)^< = \{B_1^1, \dots, B_q^1\}^<$$

$$C^2 = \{X \in \mathbb{R}^n / X = V^2 B^2; V^2 \geq 0\} = (B^2)^< = \{B_1^2, \dots, B_q^2\}^<$$

Chama-se Conjunto União de C^1 e C^2 ao cone poliédrico convexo, indicado por $C^1 \cup C^2$, tal que

$$C^1 \cup C^2 = \{X \in \mathbb{R}^n / X = V^1 B^1 + V^2 B^2; V^1 \geq 0, V^2 \geq 0\} =$$

$$= \{B_1^1, \dots, B_q^1; B_1^2, \dots, B_q^2\}^<$$

Observemos que o conjunto $C^1 \cup C^2$, como foi definido, é um CPC que está em algum cone convexo que contém C^1 e C^2 , isto é, $C^1 \cup C^2$ é o "menor" cone convexo que contém C^1 e C^2 . Assim sendo podemos ainda notar que o símbolo " \cup " usado aqui para união dos cones, não tem o mesmo significado que o usado para definir união de conjuntos na Teoria dos Conjuntos.

Estas definições nos mostram que o Sistema formado por todos os CPC de \mathbb{R}^n , forma um reticulado \mathcal{C} , levando-se em conta uma ordem parcial, aqui dada pela relação de inclusão (\subseteq).

O cone que consiste do único vetor 0 é o "menor elemento de \mathcal{C} ", enquanto que todo o \mathbb{R}^n constitui um cone que é o "maior" cone de \mathcal{C} .

Os subespaços lineares L de \mathbb{R}^n formam um interessante sub-reticulado \mathcal{L} de \mathcal{C} .

Afirmativa 1: \mathcal{L} é um reticulado modular, isto é,

$$L^1 \subseteq L^3 \implies L^1 \cup (L^2 \cap L^3) = (L^1 \cup L^2) \cap L^3 \quad \text{para}$$

todo L^2 de \mathcal{L} .

Demonstração: Sejam L^1 , L^2 e L^3 os subespaços lineares de \mathbb{R}^n definidos por:

$$L^1 = \{X \in \mathbb{R}^n / AX' = 0\}, \quad L^2 = \{X \in \mathbb{R}^n / BX' = 0\}, \quad L^3 = \{X \in \mathbb{R}^n / CX' = 0\}.$$

Por hipótese temos que $L^1 \subseteq L^3$, isto é,

$\forall X \in L^1 \implies X \in L^3$. Logo podemos ver que

$$C \subseteq A \quad (\text{II.5.1})$$

Para provarmos a igualdade de conjuntos da afirmativa, basta provarmos então que:

$$\text{i) } [L^1 \cup (L^2 \cap L^3)] \subseteq [(L^1 \cup L^2) \cap L^3] \text{ e}$$

$$\text{ii) } [(L^1 \cup L^2) \cap L^3] \subseteq [L^1 \cup (L^2 \cap L^3)]$$

$$\text{i) } \forall X \in [L^1 \cup (L^2 \cap L^3)] \implies X = \alpha X_1 + \beta X_2 \text{ com } \alpha \geq 0, \beta \geq 0,$$

$$X_1 \in L^1 \text{ e } X_2 \in (L^2 \cap L^3). \text{ Logo } AX'_1 = 0, BX'_2 = 0 \text{ e } CX'_2 = 0$$

De $AX'_1 = 0$, $BX'_2 = 0$ e $X = \alpha X_1 + \beta X_2$ com $\alpha \geq 0$, $\beta \geq 0$, $X_1 \in L^1$ e $X_2 \in L^2$, temos que

$$X \in (L^1 \cup L^2) \quad (\text{II.5.2})$$

De $X_1 \in L^1$ e de (II.5.1) vem que $CX'_1 = 0$. Ainda por

$$X = \alpha X_1 + \beta X_2 \text{ temos } CX' = \alpha CX'_1 + \beta CX'_2 = 0, 0 \text{ que impli-}$$

ca em $CX'_2 = 0$. Logo

$$X \in L^3 \quad (\text{II.5.3})$$

De (II.5.2) e (II.5.3) temos que $X \in [(L^1 \cup L^2) \cap L^3]$. Logo:

$$[L^1 \cup (L^2 \cap L^3)] \subset [(L^1 \cup L^2) \cap L^3]$$

ii) $\forall X \in [(L^1 \cup L^2) \cap L^3] \implies X \in (L^1 \cup L^2)$ e $X \in L^3$.

De $X \in (L^1 \cup L^2)$ temos que $X = \alpha X_1 + \beta X_2$ com $\alpha \geq 0$,

$\beta \geq 0$, $X_1 \in L^1$ e $X_2 \in L^2$. Portanto $AX_1' = 0$ e $BX_2' = 0$.

De $X \in L^3$ temos que $CX' = 0$. Ainda sendo o vetor $X = \alpha X_1 + \beta X_2$,

temos $CX' = \alpha CX_1' + \beta CX_2' = 0$. Então por (II.5.1) vemos que

$$CX_2' = 0.$$

De $BX_2' = 0$ e $CX_2' = 0$ temos que $X_2 \in (L^2 \cap L^3)$, de $AX_1' = 0$

vem que $X_1 \in L^1$ e sendo $X = \alpha X_1 + \beta X_2$ com $\alpha \geq 0$ e $\beta \geq 0$, en

tão $X \in [L^1 \cup (L^2 \cap L^3)]$. Logo

$$[(L^1 \cup L^2) \cap L^3] \subset [L^1 \cup (L^2 \cap L^3)]$$

Afirmativa 2: Para $n \geq 2$ ($n =$ dimensão do espaço) \mathcal{C} não é um reticulado modular.

Demonstração: Provemos esta afirmativa através de um exemplo em \mathbb{R}^2 .

Sejam C^1 , C^2 e C^3 cones poliédricos convexos de \mathbb{R}^2 , tais que:

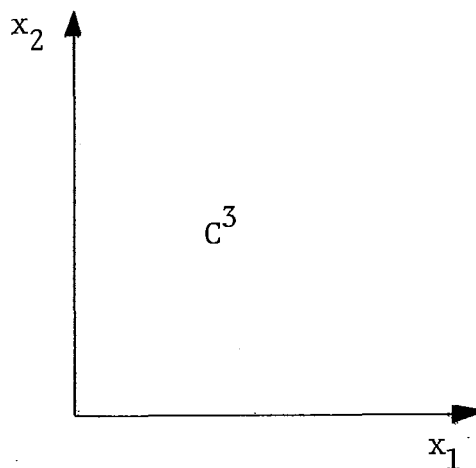
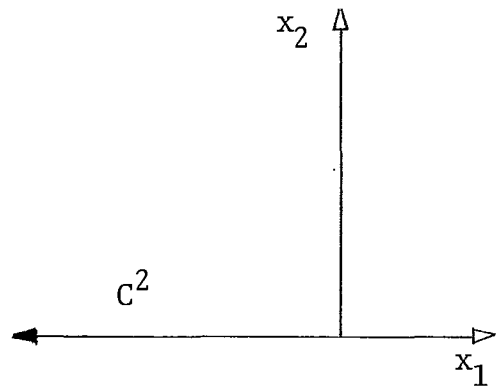
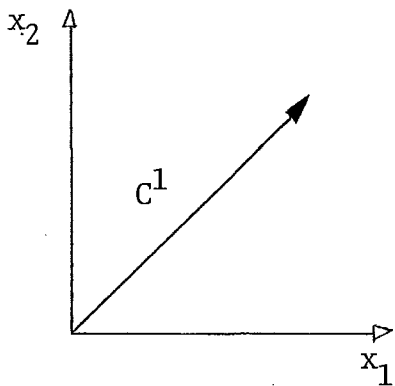
$$C^1 = \{X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 = x_2\}$$

$$C^2 = \{X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \leq 0, x_2 = 0\}$$

$$C^3 = \{X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$$

Neste caso temos $C^1 \cup (C^2 \cap C^3) = C^1$, mas $(C^1 \cup C^2) \cap C^3 = \{X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 \leq x_2\}$

Graficamente temos que:



Lema 6: "A correspondência $C \leftrightarrow C^*$ é um automorfismo dual (anti-automorfismo involuntário) sobre \mathcal{C} , isto é:

a) $C^{**} = C$

d) $(C^1)^* = (C^2)^* \leftrightarrow C^1 = C^2$

b) $\forall C \in \mathcal{C}, \exists D \in \mathcal{C} / C = D^*$

c) $(C^1)^* \subseteq (C^2)^* \leftrightarrow C^2 \subseteq C^1$

e) $(C^1 \cap C^2)^* = (C^1)^* \cup (C^2)^*$

f) $(C^1 \cup C^2)^* = (C^1)^* \cap (C^2)^*$.

Demonstração: Lembremo-nos que para $C = \{X \in \mathbb{R}^n / AX' \leq 0\} = A^*$ com A um conjunto finito de vetores de \mathbb{R}^n , temos que:

$$C^* = \{Y \in \mathbb{R}^n / XY' \leq 0, \forall X \in C\}$$

a) se $C = A^*$ então $C^* = A^{**} = A^{\leq}$, pelo Teorema 3. Portanto $(A^{\leq})^* = A^* = C$. Logo $C^{**} = C$.

d)

(\implies) $\forall X \in C^2 \implies XY' \leq 0$ para $Y \in (C^2)^*$. Mas por hipótese temos que $\forall Y \in (C^1)^* \implies Y \in (C^2)^*$. Logo $XY' \leq 0, \forall Y \in (C^1)^* \implies X \in C^1$.

$$\text{Então } C^2 \subseteq C^1$$

(\impliedby) $\forall Y \in (C^1)^* \implies XY' \leq 0, \forall X \in C^1$. Mas por hipótese temos que $\forall X \in C^2 \implies X \in C^1$. Logo $XY' \leq 0, \forall X \in C^2 \implies Y \in (C^2)^*$.

$$\text{Então } (C^1)^* \subseteq (C^2)^*.$$

b)

$$(C^1)^* = (C^2)^* \iff \left\{ \begin{array}{l} (C^2)^* \subseteq (C^1)^* \xleftrightarrow{(d)} C^1 \subseteq C^2 \\ e \\ (C^1)^* \subseteq (C^2)^* \xleftrightarrow{(d)} C^2 \subseteq C^1 \end{array} \right\} \iff C^1 = C^2$$

$$c) \forall C \in \mathcal{C} \implies C = C^{**} \text{ (por (a))} \implies$$

$$\implies \exists D = C^* \in \mathcal{C} \text{ tal que } C = D^*.$$

e) para provar esta igualdade precisamos mostrar que: (i) $(C^1 \cap C^2)^* \subseteq (C^1)^* \cup (C^2)^*$ e

$$(ii) (C^1)^* \cup (C^2)^* \subseteq (C^1 \cap C^2)^*.$$

i) Seja $Y \in (C^1 \cap C^2)^*$ tal que $Y \notin (C^1)^* \cup (C^2)^*$ e seja o conjunto $C_\lambda = \{\lambda Y \geq 0, \lambda \geq 0\}$. Vemos que

$$C_\lambda \cap [(C^1)^* \cup (C^2)^*] = \{0\}$$

Logo $[(C^1)^* \cup (C^2)^*]^0$ é um conjunto convexo disjunto de C_λ .

(Estamos indicando por $[]^0$ o conjunto interior de $[]$).

Então aplicando o Teorema da Separação para esses conjuntos, temos que:

existe um vetor de \mathbb{R}^n , $Z \neq 0$, tal que,

$$\forall V \in [(C^1)^* \cup (C^2)^*]^0, ZV' \leq 0 \text{ e com maior razão, por}$$

ser $[(C^1)^* \cup (C^2)^*]^0$ um conjunto aberto, temos que

$ZV' < 0$ e $\forall W \in C_\lambda$, $ZW' \geq 0$, isto é $ZY' > 0$.

Se $ZV' < 0$ então $Z \in [(C^1)^* \cup (C^2)^*]^0$, o que implica $CK' \leq 0$

com $K \in [(C^1)^* \cup (C^2)^*]$ e $K = Y + W$ com $Y \in (C^1)^*$ e $W \in (C^2)^*$.

Logo:

$$\begin{cases} ZY' \leq 0, \forall Y \in (C^1)^* \\ e \\ ZW' \leq 0, \forall W \in (C^2)^* \end{cases} \implies \begin{cases} Z \in C^1 \\ e \\ W \in C^2 \end{cases} \implies Z \in (C^1 \cap C^2)$$

Então temos $Y \in (C^1 \cap C^2)^*$; $ZY' > 0$ e que $Z \in (C^1 \cap C^2)$, o que é uma contradição. Logo $\forall Y \in (C^1 \cap C^2)^*$, temos $Y \in [(C^1)^* \cup (C^2)^*]$.

Então:

$$(C^1 \cap C^2)^* \subseteq (C^1)^* \cup (C^2)^*$$

ii) Seja $Y \in (C^1)^* \cup (C^2)^* = \{Y/Y = Y_1 + Y_2, Y_1 \in (C^1)^*$ e $Y_2 \in (C^2)^*\}$. Portanto:

$\forall Y \in (C^1)^* \cup (C^2)^* \implies Y = Y_1 + Y_2$ com $XY'_1 \leq 0$, $X \in C^1$ e

$XY'_2 \leq 0$, $X \in C^2 \implies XY' = XY'_1 + XY'_2 \leq 0$ para $X \in (C^1 \cap C^2) \implies$

$\implies Y \in (C^1 \cap C^2)^*$. Logo temos

$$(C^1)^* \cup (C^2)^* \subseteq (C^1 \cap C^2)^*$$

f)

$$((C^1)^* \cap (C^2)^*)^* \stackrel{(e)}{=} (C^1)^{**} \cup (C^2)^{**} \stackrel{(a)}{=} C^1 \cup C^2 \implies$$

$$\implies [(C^1)^* \cap (C^2)^*]^{**} = (C^1 \cup C^2)^* \xrightarrow{(a)} (C^1 \cup C^2)^* = (C^1)^* \cap (C^2)^*$$

Lema 7: "O automorfismo dual $C \leftrightarrow C^*$ sobre \mathcal{C} , é uma ortocomplementação, isto é

$$C \cap C^* = \{0\} \quad \text{e} \quad C \cup C^* = \mathbb{R}^n$$

Demonstração:

i) provemos que $C \cap C^* = \{0\}$

$$\forall X \in (C \cap C^*) \implies X \in C \quad \text{e} \quad X \in C^* \quad \text{com} \quad C^* = \{Y \in \mathbb{R}^n / XY' \leq 0, \forall X \in C\}$$

Logo $XX' \leq 0$ para $X \in C$, o que implica em que $X = 0$. Portanto temos $C \cap C^* = \{0\}$.

ii) provemos que $C \cup C^* = \mathbb{R}^n$

Pela parte (a) do Lema 2 temos $C \cup C^* = C^{**} \cup C^*$ e pela parte (b) do Lema 2, $C^{**} \cup C^* = (C^* \cap C)^*$. Como $C \cap C^* = \{0\}$ então, $C \cup C^* = \{0\}^* = \mathbb{R}^n$.

Os resultados aqui apresentados podem ser resumidos num só teorema, que damos a seguir.

Teorema 7 (D. Gale): " Os cones poliédricos convexos de um espaço vetorial n-dimensional Euclidiano, formam um reticulado \mathcal{C} sob relação de inclusão. \mathcal{C} é ortocomplementado pelo automorfismo dual $C \leftrightarrow C^*$, mas não é modular para $n \geq 2$ ".

C A P Í T U L O I I I

CONJUNTOS POLIÉDRICOS CONVEXOS

III.1. INTRODUÇÃO

Desenvolvemos neste capítulo interessantes resultados em relação a um conjunto poliédrico convexo, situado no espaço vetorial real n -dimensional \mathbb{R}^n .

III.1.1. Caracterização de um Conjunto Poliédrico Convexo

Definição: um conjunto poliédrico convexo S , é a interseção de m semi-espacos (fechados) $A_i X' \leq b_i$ ($1 \leq i \leq m$) em posições arbitrárias em \mathbb{R}^n .

Mais concretamente, S é o conjunto solução do sistema

$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n \leq b_1$$

$$a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n \leq b_m$$

de m inequações lineares não homogêneas a n incógnitas.

Podemos ainda escrever S , como sendo o conjunto

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n / AX' \leq B'\} = \{X \in \mathbb{R}^n / A_1 X' \leq b_1, \dots, A_m X' \leq b_m\}$$

onde:

$$A = \{A_1, \dots, A_m\} \subset \mathbb{R}^n \text{ com } A_i \in \mathbb{R}^n \text{ para } i = 1, \dots, m \text{ ou}$$

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \text{ com } a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ para } i = 1, \dots, m \text{ e } j = 1, \dots, n,$$

sendo $A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \in \mathbb{R}^n$ a i -ésima linha da ma

triz A ; $B = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ e $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Notamos que um conjunto S , assim definido, pode ser vazio.

Observação:

i) se $S \neq \emptyset$ então S é convexo. De fato:

sejam X_1 e X_2 dois vetores quaisquer de S tais que $X_1 \neq X_2$ e

seja $\lambda \in [0, 1]$. Então temos que

$$\left. \begin{array}{l} \lambda AX_1' \leq \lambda B' \implies A(\lambda X_1') \leq \lambda B' \\ e \\ (1-\lambda)AX_2' \leq (1-\lambda)B' \implies A[(1-\lambda)X_2'] \leq (1-\lambda)B' \end{array} \right\} \implies A[\lambda X_1' + (1-\lambda)X_2'] \leq B'$$

$$\implies [\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2] \in S \implies S \text{ é convexo.}$$

ii) se $B = 0$, ou seja, se o sistema de inequações é homogêneo, então S é um Cone Poliédrico Convexo. Sendo assim S satisfaz toda a teoria de CPC do capítulo II. Particularmente, pelo Teorema 2 (II.3), S pode ser expresso como a envoltória cone convexa $Q^<$, de um conjunto finito de vetores de \mathbb{R}^n , $Q = \{Q_1, \dots, Q_q\}$, onde

$$\begin{aligned} Q^< &= \{X \in \mathbb{R}^n / X = VQ, V \in \mathbb{R}^q \text{ e } V \geq 0\} = \\ &= \{X \in \mathbb{R}^n / X = \sum_{j=1}^q v_j Q_j, v_j \geq 0\}. \end{aligned}$$

Mais concretamente temos que

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & & & \\ q_{q1} & q_{q2} & \cdots & q_{qn} \end{pmatrix} \text{ com } Q_j = (q_{j1}, \dots, q_{jn}) \in \mathbb{R}^n \text{ a } j\text{-ésima} \\ \text{linha da matriz } Q \text{ para } j = 1, \dots, q.$$

iii) chamamos S de conjunto poliédrico convexo, para acentuar o fato de que S é a interseção de um número finito de semi-espacos fechados.

iv) Daqui por diante, anotaremos conjunto poliédrico convexo, por CCPC, para simplificar a notação.

III.1.2. Caracterização do Cone Poliédrico Convexo C^{n+1}

Seja $\mathbb{R}^{n+1} = \{\bar{X} = (X, t) / X \in \mathbb{R}^n \text{ e } t \in \mathbb{R}\}$

Pré-Lema 1: "O conjunto $C^{n+1} = \{\bar{X} \in \mathbb{R}^{n+1} / AX' - B't \leq 0, t \geq 0\}$ é um cone poliédrico convexo, situado no semi-espaço $t \geq 0$ do \mathbb{R}^{n+1} ."

Demonstração: Seja o CCPC (S) definido em (III.1.1) e considere mos ainda o semi-espaço $t \geq 0$ de \mathbb{R}^{n+1} . Formemos então o sistema

$$\begin{pmatrix} A & - B' \\ 0 & - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X' \\ t \end{pmatrix} \leq 0$$

com $m + 1$ inequações (≤ 0) para $\bar{X} = (X, t)$ de \mathbb{R}^{n+1} , ou seja:

$$A_1 X' - b_1 t \leq 0$$

$$A_2 X' - b_2 t \leq 0$$

.....

$$A_m X' - b_m t \leq 0$$

$$- t \leq 0$$

Logo os vetores \bar{X} de \mathbb{R}^{n+1} que satisfazem este sistema formam um conjunto que é um cone poliédrico convexo situado no semi-espaço $t \geq 0$ do espaço \mathbb{R}^{n+1} .

Observação: Indicaremos o cone poliédrico convexo C^{n+1} por CPC (C^{n+1}).

III.2. CORRESPONDÊNCIA ENTRE CCPC (S) E CPC (C^{n+1})

Pré-Lema 2: " $S \neq \phi$, se e somente se, C^{n+1} tem interseção não vazia com o hiperplano $t = 1$ do \mathbb{R}^{n+1} ".

Demonstração:

\implies) se $S \neq \phi$ então existe algum vetor $X_0 \in S$ tal que

$$AX'_0 \leq B' \implies AX'_0 - B' \cdot 1 \leq 0 \implies \text{existe algum } \bar{X}_0 = (X_0, 1) \in C^{n+1}$$

ou seja, C^{n+1} intercepta o hiperplano $t = 1$ do \mathbb{R}^{n+1} .

\impliedby) se C^{n+1} tem interseção não vazia com o hiperplano $t = 1$

do \mathbb{R}^{n+1} , então existe algum $\bar{X}_0 = (X_0, 1) \in C^{n+1}$ tal que

$$AX'_0 - B' \cdot 1 \leq 0 \implies AX'_0 \leq B' \implies X_0 \in S \implies S \neq \phi.$$

Pré-Lema 3: "Se $S_1 = \{X \in \mathbb{R}^n / AX' \leq B'\}$ e $S_2 = \{X \in \mathbb{R}^n / CX' \leq D'\}$ tal que $S_1 \subseteq S_2$, então $C_1^{n+1} \subseteq C_2^{n+1}$ para

$$C_1^{n+1} = \{\bar{X} \in \mathbb{R}^{n+1} / AX' - B't \leq 0, t \geq 0\} \text{ e } C_2^{n+1} = \{\bar{X} \in \mathbb{R}^{n+1} / CX' - D't \leq 0,$$

$t \geq 0\}$ ".

Demonstração: Seja $\bar{X}_0 = (X_0, t_0) \in C_1^{n+1}$. Logo $AX'_0 - B't_0 \leq 0$,
 $t_0 \geq 0$.

i) Se $t_0 > 0$, então :

$$A \begin{pmatrix} X'_0 \\ t_0 \end{pmatrix} - B' \begin{pmatrix} t_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \leq 0 \implies A \begin{pmatrix} X'_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \leq B' \implies \begin{pmatrix} X_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \in S_1 \text{ e como}$$

$S_1 \subseteq S_2$, temos que

$$\begin{pmatrix} X_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \in S_2 \implies C \begin{pmatrix} X'_0 \\ t_0 \end{pmatrix} \leq D' \implies CX'_0 \leq D't_0 \implies CX'_0 - D't_0 \leq 0 \implies$$

$$\implies \bar{X}_0 \in C_2^{n+1}. \text{ Portanto } C_1^{n+1} \subseteq C_2^{n+1}.$$

ii) Se $t_0 = 0$, então:

$$AX'_0 - B'.0 \leq 0 \implies AX'_0 \leq 0 \implies X_0 \in \{X \in \mathbb{R}^n / AX' \leq 0\}.$$

Escolhendo-se um vetor fixo $X_1 \in S_1$, temos
 que $AX'_1 \leq B'$.

Daí para um $\lambda \in \mathbb{R}$ qualquer tal que $\lambda \geq 0$
 temos que $(X_1 + \lambda X_0) \in S_1$, porque

$$A(X_1 + \lambda X_0)' \leq AX'_1 + \lambda AX'_0 \leq B' + \xi \leq B', \text{ onde } \xi = \lambda AX'_0 \text{ e } \xi \leq 0.$$

Como $S_1 \subseteq S_2$ e $(X_1 + \lambda X_0) \in S_1$ vem que
 $(X_1 + \lambda X_0) \in S_2$ para $\lambda \geq 0$. Ou seja:

$$CX'_1 + \lambda CX'_0 \leq D' \quad \text{e como}$$

$$X_1 \in S_1 \text{ e } S_1 \subseteq S_2 \implies X_1 \in S_2 \implies CX'_1 \leq D' \text{ e } \lambda \geq 0$$

temos que

$$CX'_0 \leq 0 \implies \bar{X} = (X_0, 0) \in C_2^{n+1}. \text{ Portanto } C_1^{n+1} \subseteq C_2^{n+1}.$$

Pré-Lema 4: "Se $\phi \neq C_1^{n+1} = \{\bar{X} \in \mathbb{R}^{n+1} / AX' - B't \leq 0, t \geq 0\} \subseteq C_2^{n+1} =$

$= \{\bar{X} \in \mathbb{R}^{n+1} / CX' - D't \leq 0, t \geq 0\}$, ambos com interseção não

vazia com o hiperplano $t = 1$, então $S_1 \subseteq S_2$ onde

$$S_1 = \{X \in \mathbb{R}^n / AX' \leq B'\} \text{ e } S_2 = \{X \in \mathbb{R}^n / CX' \leq D'\}."$$

Demonstração:

$$\forall X_0 \in S_1 \implies AX'_0 \leq B' \implies \exists (X_0, 1) \in C_1^{n+1}. \text{ Ainda por hipótese,}$$

temos que $C_1^{n+1} \subseteq C_2^{n+1}$ e ambos tem interseção não vazia com

o hiperplano $t = 1$ do \mathbb{R}^{n+1} . Logo temos

$$(X_0, 1) \in C_2^{n+1} \implies CX'_0 \leq D' \implies X_0 \in S_2. \text{ Portanto } S_1 \subseteq S_2.$$

Pré-Lema 5: " $S_1 = \{X \in \mathbb{R}^n / AX' \leq B'\} = S_2 = \{X \in \mathbb{R}^n / CX' \leq D'\}$,

se e somente se, $C_1^{n+1} = \{\bar{X} \in \mathbb{R}^{n+1} / AX' - B't \leq 0, t \geq 0\} =$

$= C_2^{n+1} = \{\bar{X} \in \mathbb{R}^{n+1} / CX' - D't \leq 0, t \geq 0\}."$

Demonstração:

\implies) se $S_1 = S_2$ então $S_1 \subseteq S_2$ e $S_2 \subseteq S_1$. Ainda, pelo Pré

Lema 3, temos que $C_1^{n+1} \subseteq C_2^{n+1}$ e $C_2^{n+1} \subseteq C_1^{n+1}$. Logo

$$C_1^{n+1} = C_2^{n+1}.$$

\impliedby) se $C_1^{n+1} = C_2^{n+1}$ então $C_1^{n+1} \subseteq C_2^{n+1}$ e $C_2^{n+1} \subseteq C_1^{n+1}$. Ain-

da, pelo Pré-Lema 4, temos que $S_1 \subseteq S_2$ e $S_2 \subseteq S_1$. Por

tanto $S_1 = S_2$.

Lema 1: "A correspondência que associa os conjuntos

$\{X \in \mathbb{R}^n / AX' \leq B'\}$ e $\{\bar{X} \in \mathbb{R}^{n+1} / AX' - B't \leq 0, t \geq 0\}$ é uma correspondência biunívoca e preserva a inclusão entre os CCPC (S) não vazios de \mathbb{R}^n e os CPC (C^{n+1}) no semi-espaco $t \geq 0$ do \mathbb{R}^{n+1} , que têm interseção não vazia com o hiperplano $t = 1$ de \mathbb{R}^{n+1} ."

Demonstração: basta juntar-mos as demonstrações dos Pré-Lemas (1), (2), (3), (4) e (5).

Observação: a correspondência deste Lema pode ser escrita como

$$S \longrightarrow C^{n+1} = C^{n+1} (S)$$

$$C^{n+1} \longrightarrow S = S (C^{n+1}) \quad \text{e note que}$$

$$S (C^{n+1}) = \{X \in \mathbb{R}^n / (X, 1) \in C^{n+1}\} \quad \text{e}$$

$$C^{n+1} (S) = \{\bar{X} \in \mathbb{R}^{n+1} / X \in S \text{ e } t \geq 0\}.$$

Ilustração: Vejamos um exemplo de como caracterizar um CPC (C^{n+1}).

Sejam $S_1 = \{X \in \mathbb{R}^2 / AX' \leq B'\} \subset S_2 = \{X \in \mathbb{R}^2 / CX' \leq D'\}$, isto

é: S_1 é o conjunto solução do sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 8 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 2 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

e S_2 é o conjunto solução do sistema

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 8 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leq 6 \\ -x_1 + x_2 &\leq 2 \\ -x_1 &\leq 0 \\ -x_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

Então $C_1^{n+1} = \{\bar{X} \in \mathbb{R}^3 / AX' - B't \leq 0, t \geq 0\} \subset C_2^{n+1} = \{\bar{X} \in \mathbb{R}^3 / CX' -$

$- D't \leq 0, t \geq 0\}$, sendo

$$C_1^{n+1} : \begin{cases} x_1 + x_2 - 8t \leq 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 6t \leq 0 \\ -x_1 + 2x_2 - 2t \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ -t \leq 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad C_2^{n+1} : \begin{cases} x_1 + x_2 - 8t \leq 0 \\ 2x_1 - 3x_2 - 6t \leq 0 \\ -x_1 + x_2 - 2t \leq 0 \\ -x_1 \leq 0 \\ -x_2 \leq 0 \\ -t \leq 0 \end{cases}$$

Na figura 1 podemos ver claramente que $S_1 \subset S_2$,

onde:

$$S_1 = \{(0,0), (0,1), (14/3, 10/3), (6,2), (3,0)\}$$

(hachurado verticalmente)

$$S_2 = \{(0,0), (0,2), (3,5), (6,2), (3,0)\}$$

(hachurado horizontalmente).

E na Figura 2 temos $C_1^{n+1} \subset C_2^{n+1}$, sendo C_1^{n+1} o CPC com vértice $(0,0,0)$ dado pelos raios s, s', r_3, r_4 e r_5 e C_2^{n+1} o CPC com vértice $(0,0,0)$ dados pelos raios r_1, r_2, r_3, r_4 e r_5 .

FIGURA 1

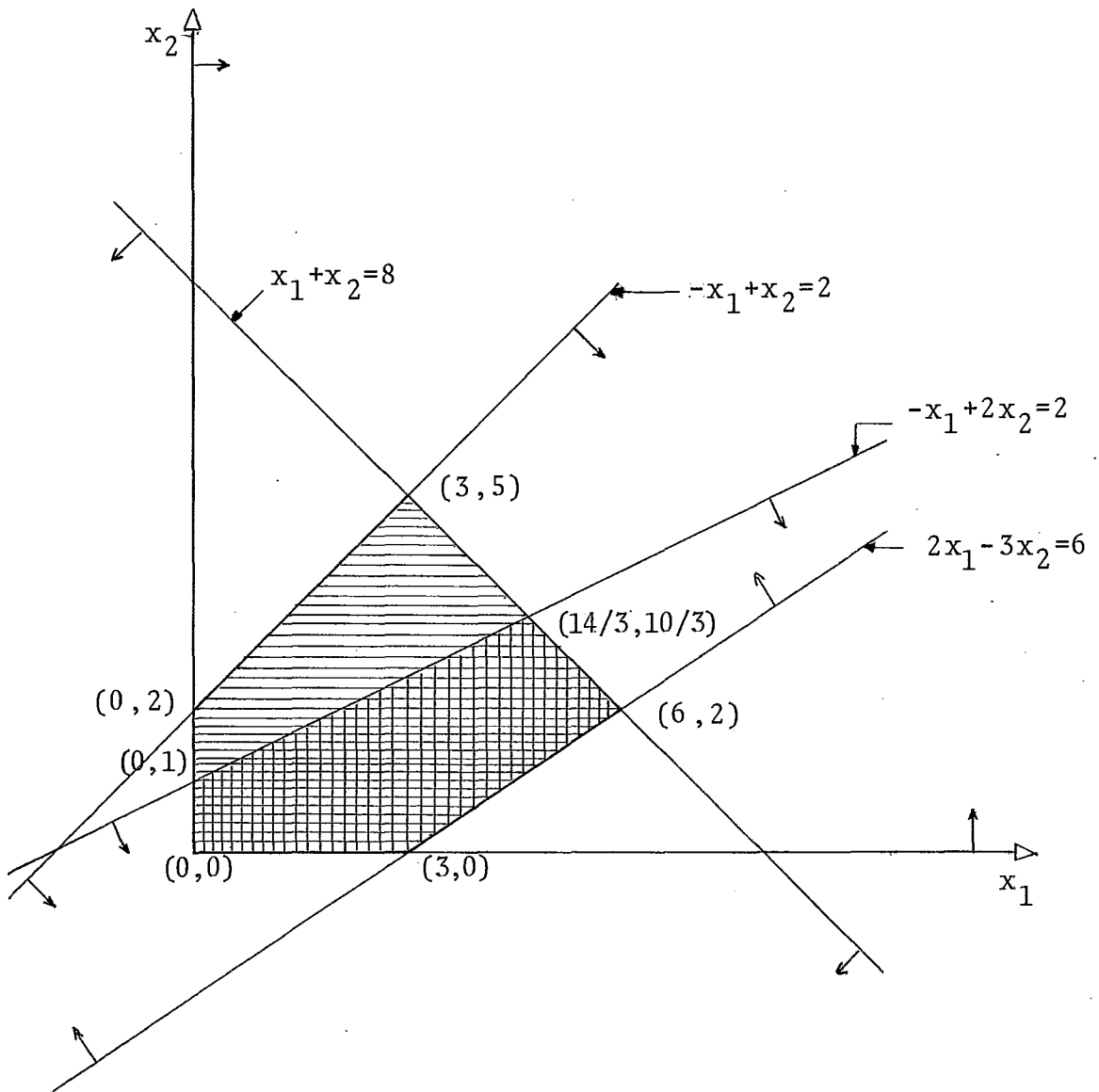
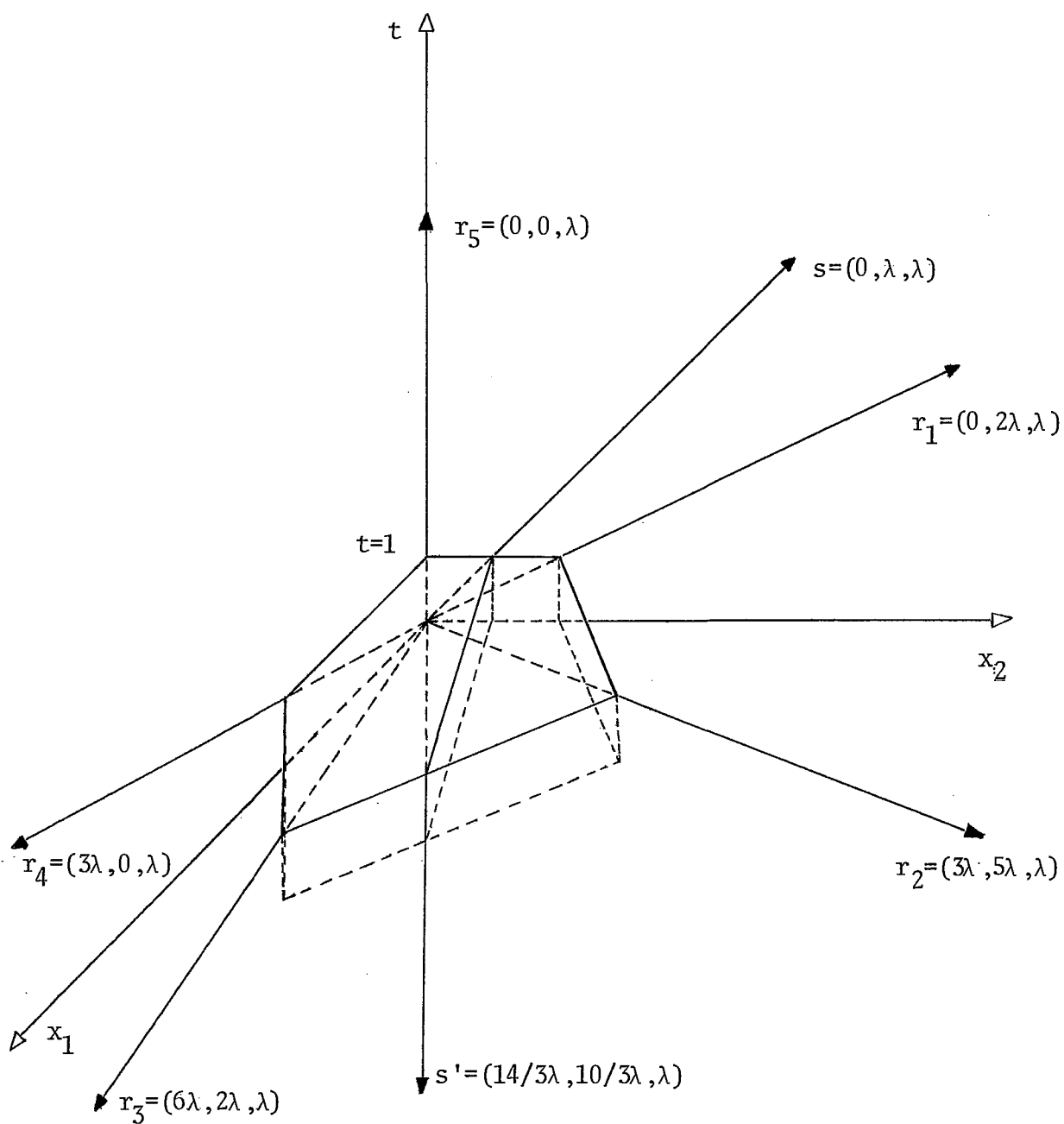


FIGURA 2



III.3. RESOLUÇÃO DE CCPC

Teorema 1: "Um conjunto poliédrico convexo não vazio

$S = \{X \in \mathbb{R}^n / AX' \leq B'\}$ pode ser expresso como a soma

$$P^\Delta + Q^< = \{X \in \mathbb{R}^n / X = X_1 + X_2, X_1 \in P^\Delta \text{ e } X_2 \in Q^<\}$$

de um Poliedro Convexo Limitado $P^\Delta = \{X \in \mathbb{R}^n / X = UP, U \geq 0, \sum_{i=1}^p u_i = 1\}$, onde $P = (p_{ih})_{p \times n}$ para $(p_{ih}) \in \mathbb{R}$, $P_i = (p_{i1}, \dots, p_{in})$

$\in \mathbb{R}^n$ é a i -ésima linha da matriz P e $U = (u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$ e um

Cone Poliédrico Convexo $Q^< = \{X \in \mathbb{R}^n / X = VQ, V \geq 0\}$, onde

$Q = (q_{jk})_{q \times n}$ para $(q_{jk}) \in \mathbb{R}$, $Q_j = (q_{j1}, \dots, q_{jn}) \in \mathbb{R}^n$ é a j -

ésima linha da matriz Q e $V = (v_1, \dots, v_q) \in \mathbb{R}^q$. Além disso

$Q^< = \{X \in \mathbb{R}^n / AX' \leq 0\}$. Inversamente, qualquer conjunto não va-

zio da forma $P^\Delta + Q^<$ é um conjunto poliédrico convexo".

Demonstração: a) seja o CCPC (S), isto é, $S = \{X \in \mathbb{R}^n /$

$AX' \leq B'\}$ não vazio, situado em \mathbb{R}^n . Pelo Lema 1 obtemos um

CPC (\mathbb{R}^{n+1}), ou seja $C^{n+1}(S) = \{\bar{X} \in \mathbb{R}^{n+1} / AX' - B't \leq 0, t \geq 0\}$

situado no semi-espaco $t \geq 0$ de \mathbb{R}^{n+1} , o qual tem interseção

não vazia com o hiperplano $t = 1$ de \mathbb{R}^{n+1} .

Pelo Corolário do Teorema 2 visto em (II.3), temos garantida a existência de um conjunto finito de vetores de \mathbb{R}^{n+1} , que expande o cone $C^{n+1}(S)$. Sendo que este conjunto é formado por vetores do tipo:

$$\text{i) } (P_1, t_1), \dots, (P_i, t_i), \dots, (P_p, t_p)$$

$$\text{ii) } (Q_1, 0), \dots, (Q_j, 0), \dots, (Q_q, 0)$$

Em (i) como $t_i > 0$ e por $C^{n+1}(S)$ ser um cone, a componente t_i pode ser normalizada de modo que $t_i = 1$.

Em (ii) a última componente é sempre nula, não podendo ser negativa porque o cone $C^{n+1}(S)$ está no semi-espaço $t \geq 0$ de \mathbb{R}^{n+1} . Ainda, o fato de que $C^{n+1}(S)$ intercepta o hiperplano $t = 1$ de \mathbb{R}^{n+1} , nos garante sempre que $p > 0$ e se $q = 0$ definimos $(Q_1, 0) = (0, 0)$. Logo $C^{n+1}(S)$ consiste de todos os vetores $\bar{X} = (X, t)$ de \mathbb{R}^{n+1} tais que:

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^p u_i (P_i, 1) + \sum_{j=1}^q v_j (Q_j, 0)$$

com $u_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^p u_i = 1$ e $v_j \geq 0$ para $i = 1, \dots, p$ e $j = 1, \dots, q$.

Ou seja $C^{n+1}(S)$ consiste de todos os vetores $\bar{X} = (X, t)$ de \mathbb{R}^{n+1} tais que:

$$\bar{X} = \left(\sum_{i=1}^p u_i P_i + \sum_{j=1}^q v_j Q_j, 1 \right)$$

Como $S = \{X \in \mathbb{R}^n / (X, 1) \in C^{n+1}\}$, temos que S é o conjunto de vetores da forma

$$X = \sum_{i=1}^p u_i P_i + \sum_{j=1}^q v_j Q_j$$

com $\sum_{i=1}^p u_i = 1$, $u_i \geq 0$, $v_j \geq 0$ para $i = 1, \dots, p$ e $j = 1, \dots, q$.

Portanto $C^{n+1}(S)$ consiste de todos os vetores $\bar{X} = (X, t)$ de \mathbb{R}^{n+1} tais que $X \in S$.

$$\text{Logo } S = P^\Delta + Q^<$$

b) seja um conjunto não vazio da forma

$$P^\Delta + Q^< = \{X \in \mathbb{R}^n / X = UP + VQ, U \geq 0, \sum_{i=1}^p u_i = 1 \text{ e } V \geq 0\}. \text{ (O fato deste conjunto ser diferente do vazio implica em } p > 0\text{).}$$

Mostremos que esse conjunto é um CCPC.

Para isso então, construamos no \mathbb{R}^{n+1} o CPC D^{n+1} consistindo de todos os vetores da forma

$$\bar{X} = (X, t) = \sum_{i=1}^p u_i (P_i, 1) + \sum_{j=1}^q v_j (Q_j, 0), \forall u_i \geq 0 \text{ e } \forall v_j \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, p \text{ e } j = 1, \dots, q.$$

ra $i = 1, \dots, p$ e $j = 1, \dots, q$.

Vemos claramente que

$$P^\Delta + Q^< = \{X \in \mathbb{R}^n / (X, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}\}$$

com D^{n+1} situado no semi-espço $t \geq 0$ e interceptando o hiper-

plano $t = 1$ de \mathbb{R}^{n+1} (porque $p > 0$). Logo pelo Lema 1, temos que:

$$S(D^{n+1}) = \{X \in \mathbb{R}^n / (X, 1) \in D^{n+1}\}$$

é um CCPC, ou seja, $P^\Delta + Q^< = S(D^{n+1})$ é um CCPC.

c) resta mostrarmos que, se $S = \{X \in \mathbb{R}^n / AX' \leq B'\} = P^\Delta + Q^<$ então $Q^< = \{X \in \mathbb{R}^n / AX' \leq 0\}$.

O cone D^{n+1} construído na parte (b) tem a propriedade

$$S = P^\Delta + Q^< = \{X \in \mathbb{R}^n / (X, 1) \in D^{n+1}\}$$

Portanto $S = S(D^{n+1})$.

Pelo Lema 1, S é tal que $D^{n+1} = C^{n+1}(S)$ (pois a correspondência é biunívoca). Portanto

$$D^{n+1} = \{\bar{X} \in \mathbb{R}^{n+1} / \bar{X} = \sum_{i=1}^p u_i (P_i, 1) + \sum_{j=1}^q v_j (Q_j, 0); u_i \geq 0,$$

$$v_j \geq 0, \sum_{i=1}^p u_i = 1\} = \{\bar{X} \in \mathbb{R}^{n+1} / AX' - B't \leq 0, t \geq 0\}. \text{ Logo}$$

$$Q^< = \{X \in \mathbb{R}^n / (X, 0) \in D^{n+1}\} = \{X \in \mathbb{R}^n / (X, 0) \in C^{n+1}\} = \{X \in \mathbb{R}^n /$$

$$AX' \leq 0\}.$$

Observemos que o problema fundamental é que o cone D^{n+1} obtido de $\{X \in \mathbb{R}^n / AX' \leq B'\}$ é o mesmo obtido de $P^\Delta + Q^<$, pelo Lema 1.

III.4. CONSIDERAÇÕES SOBRE VETORES EXTREMOS DE UM CCPC

Como visto em (II.1) um vetor X é extremo a um conjunto convexo S se, X pertence a S e X não pode ser expresso como combinação convexa de outros dois vetores distintos X_1 e X_2 de S . Particularmente temos que:

$$X = \frac{1}{2} (X_1 + X_2) \implies X = X_1 \text{ ou } X = X_2$$

Lema 2: "Seja $S = \{X \in \mathbb{R}^n / AX' \leq B'\}$ um CCPC não vazio, onde a matriz A tem posto n . Então X é um vetor extremo de S se, e somente se, $(X,1)$ está em uma aresta de $C^{n+1} = C^{n+1}(S)$ ".

Demonstração: se a matriz A tem posto n , então a matriz

$$\begin{pmatrix} A & -B' \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

tem posto $(n + 1)$. Portanto, pelo visto no capítulo II, o CPC

$$C^{n+1} = \{\bar{X} \in \mathbb{R}^{n+1} / AX' - B't \leq 0, t \geq 0\}$$

tem $F_\phi = \{0\}$, ou seja, o CPC (C^{n+1}) possui vértice.

Temos ainda, pelo Lema 1, que:

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n / (X,1) \in C^{n+1}\} \quad (\text{III.4.1})$$

Mostremos então que:

i) se $(X,1)$ está em uma aresta (semi - reta ou raio) de $C^{n+1} = C^{n+1}(S)$, então X é um vetor extremo de S .

Suponhamos que X não é um vetor extremo de S . Então, para X_1 e X_2 em S tais que $X_1 \neq X_2$, temos $X = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$. Assim temos que

$$(X,1) = \frac{1}{2}(X_1,1) + \frac{1}{2}(X_2,1)$$

com $\frac{1}{2}(X_1,1)$ e $\frac{1}{2}(X_2,1)$ em C^{n+1} .

Temos então que: $(X,1)$ está em uma aresta de C^{n+1} e que os vetores $\frac{1}{2}(X_1,1)$ e $\frac{1}{2}(X_2,1)$ de C^{n+1} não sendo nulos, não pertencem a face $F_\phi = \{0\}$ (única face limite de F_H). Ainda, sendo $\frac{1}{2}(X_1,1) \neq \frac{1}{2}(X_2,1)$ com a última componente igual, estes vetores não podem estar ambos, na mesma aresta F_H . Logo temos uma contradição ao Lema 2 (II.4.1). Portanto X é um vetor extremo de S .

ii) se X é um vetor extremo de S , então $(X,1)$ está em uma aresta de $C^{n+1} = C^{n+1}(S)$.

Suponhamos que $(X,1)$ não pertence a uma aresta de C^{n+1} . Então, pelo Lema 1 (II.2.2), temos que

$$(X,1) = (X_1, t_1) + (X_2, t_2) \quad (\text{III.4.2})$$

para $(X,1) \in F_H$ de $d_H > d + 1$, com (X_1, t_1) e (X_2, t_2) em C^{n+1} mas, que não estão na mesma face em que está o vetor $(X,1)$.

Se $t_2 \leq t_1$ então $t_2 \leq \frac{1}{2}$ (notemos que $t_1 + t_2 = 1$). Assim, a igualdade (III.4.2) fica:

$$\begin{aligned} (X,1) &= (X_1 + X_2, 1) = \left(\frac{t_1}{t_1} X_1 + X_2, 1 \right) = \left(\frac{1-t_2}{t_1} X_1 + X_2, 1 \right) = \\ &= \left(\frac{X_1}{t_1} - \frac{t_2}{t_1} X_1 + X_2, 1 \right) = \frac{1}{2} \left(2 \frac{X_1}{t_1} - 2 \frac{t_2}{t_1} X_1 + 2 X_2, 2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{X_1}{t_1}, 1 \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{X_1}{t_1} - \frac{2t_2}{t_1} X_1 + 2 X_2, 1 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{X_1}{t_1}, 1 \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{X_1}{t_1}, 1 \right) + \left(2 X_2 - \frac{2t_2}{t_1} X_1, 0 \right) \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{X_1}{t_1}, 1 \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{X_1}{t_1}, 1 \right) + \left(\frac{2t_2}{t_1} X_1, 2t_2 \right) + 2(X_2, t_2) \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{X_1}{t_1}, 1 \right) + \frac{1}{2} \left[(1 - 2t_2) \left(\frac{X_1}{t_1}, 1 \right) + 2 (X_2, t_2) \right] \quad (\text{III.4.3})$$

com $\left(\frac{X_1}{t_1}, 1 \right) \in C^{n+1}$ e $\left[(1 - 2t_2) \left(\frac{X_1}{t_1}, 1 \right) + 2(X_2, t_2) \right] \in C^{n+1}$

Observemos que a segunda parcela do lado direito da igualdade (III.4.3) se reduz a:

$$\frac{1}{2} \left((1 - 2t_2) \frac{X_1}{t_1} + 2 X_2, 1 \right)$$

Então, já que cada parcela do lado direito da igualdade (III.4.3) tem como última componente o valor 1, ambas estão no cone C^{n+1} . Portanto por este fato e por (III.4.1) podemos escrever que

$$X = \frac{1}{2} \frac{X_1}{t_1} + \frac{1}{2} \left[(1 - 2t_2) \frac{X_1}{t_1} + 2X_2 \right] \quad (\text{III.4.4})$$

notando-se que $\frac{X_1}{t_1} \neq X$ (senão (X_1, t_1) seria múltiplo positivo

de $(X, 1)$ e iniciamos esta prova do fato de que esses vetores estavam em faces diferentes de C^{n+1}).

Em (III.4.4) temos uma contradição à hipó-

tese de que X é um vetor extremo de S .

Logo $(X,1)$ pertence a uma aresta de C^{n+1} .

Corolário 1: "Seja $S = \{X \in \mathbb{R}^n / AX' \leq B'\}$ um CCPC não vazio e $n =$ posto da matriz A . Então S tem uma base mínima $\{P_1, \dots, P_p, Q_1, \dots, Q_q\}$ que é única (a menos de múltiplos positivos dos Q_j). Além disso $\{P_1, \dots, P_p\}$ é o conjunto de vetores extremos de S ".

Demonstração: Observa-se da demonstração do Teorema 1 que uma base (mínima) de S , provém de um conjunto (mínimo) que expande o cone $C^{n+1}(S)$.

Como $n =$ posto da matriz A , segue (tal a prova do Lema 2) que o cone $C^{n+1}(S)$ tem $d = 0$ (isto é, tem vértice). Além disso, como $C^{n+1}(S)$ tem interseção não vazia com o hiperplano $t = 1$ de \mathbb{R}^{n+1} (Pré-Lema 2), ele não consiste apenas do vetor nulo $(0,0)$ de \mathbb{R}^{n+1} . Pelo Teorema 6 (II.4.2), o cone $C^{n+1}(S)$ tem um conjunto que o expande, mínimo e único (a menos de múltiplos positivos) que está contido em qualquer outro conjunto que o expande. Este conjunto é obtido, escolhendo-se um vetor (P_i, t_i) com $t_i > 0$ em cada aresta de $C^{n+1}(S)$ que não esteja no hiperplano $t = 0$ e um vetor $(Q_j, 0)$ em cada aresta de $C^{n+1}(S)$ que esteja no hiperplano $t = 0$. Normalizando, de modo que $t_i = 1$, então temos que

$$\{P_1, \dots, P_p, Q_1, \dots, Q_q\}$$

é uma base mínima e única de S e o conjunto $\{P_1, \dots, P_p\}$, pelo

Lema 2, é o conjunto de vetores extremos de S .

Corolário 2: "Seja um conjunto poliédrico convexo não vazio $S = \{X \in \mathbb{R}^n / AX' \leq B'\}$. S é limitado se, e somente se, $Q^< = \{X \in \mathbb{R}^n / AX' \leq 0\} = \{0\}$. Neste caso S é um poliedro convexo limitado e é a envoltória convexa de seu conjunto finito de vetores extremos. Além disso, qualquer conjunto de vetores do qual S é a envoltória convexa, deve incluir todos os vetores extremos de S ".

Demonstração: Seja $S = \{X \in \mathbb{R}^n / AX' \leq B'\}$ um CCPC não vazio. Pelo Teorema 1, temos que $S = P^\Delta + Q^<$. Mostremos então que:

i) se S é limitado então $Q^< = \{X \in \mathbb{R}^n / AX' \leq 0\} = \{0\}$

Suponhamos que existe um vetor $X_0 \neq 0$ tal que $X_0 \in Q^<$. Então, S contém a semi-reta $\{X \in \mathbb{R}^n / X = X_1 + \lambda X_0, \lambda > 0\}$ onde X_1 é um vetor fixo de S . Portanto S é ilimitado.

ii) se $Q^< = \{X \in \mathbb{R}^n / AX' \leq 0\} = \{0\}$ então S é limitado.

Se $Q^< = \{0\}$ então $S = P^\Delta$, isto é, S é um poliedro convexo limitado. Além disso, pelo Corolário 1 do Lema 2, podemos tomar P como sendo o conjunto dos vetores extremos de S . Portanto, pela definição de poliedro gerado por um número finito de vetores (II.1), temos que P é a envoltória convexa dos vetores extremos de S . Logo, S é a envoltória convexa de seu conjunto finito de vetores extremos.

Além disso, se T é um conjunto de vetores tal que $S = P^\Delta$ é a envoltória convexa de T , então T é uma base para

S. Logo, pelo Corolário 1 do Lema 2, T deve incluir todos os vetores extremos de S, ou seja, $T \supset P$.

III.5. SEPARAÇÃO DE CCPC

Daremos aqui, alguns conceitos que nos permitem separar dois conjuntos poliédricos convexos disjuntos por um hiperplano.

Lema 3: "Um dado vetor X_0 de \mathbb{R}^n , ou pertence a um dado CPC $Q^< = \{X/X = VQ, V \geq 0\}$ ou, existe um hiperplano de \mathbb{R}^n , $YX' = 0$ que separa X_0 de $Q^<$, no sentido de que X_0 está situado no semi-espaço aberto $YX' > 0$ mas $Q^<$ está no semi-espaço fechado $YX' \leq 0$ ".

Demonstração: pelo Teorema 3 (Farkas) de (II.3) temos que

$$Q^< = \{X \in \mathbb{R}^n / X = VQ, V \geq 0\} = \{X \in \mathbb{R}^n / YX' \leq 0, \forall Y \in Q^*\} = Q^{**}$$

sendo $Q^* = \{X \in \mathbb{R}^n / YX' \leq 0, \forall Y \in Q\}$. Assim temos que $X_0 \notin Q^<$ se, e somente se, $\exists Y \in Q^* / YX'_0 > 0$. Além disso para esse $Y \in Q^*$, temos que

$$YX' \leq 0, \forall X \in Q^< = Q^{**}$$

Teorema 2: "Sejam dados um poliedro convexo limitado $P^\Delta = \{X \in$

$\mathbb{R}^n / X = UP, U \geq 0, \sum_{i=1}^p u_i = 1\}$ e um cone poliédrico convexo

$Q^< = \{X \in \mathbb{R}^n / X = VQ, V \geq 0\}$. Então, ou P^Δ e $Q^<$ se interceptam ou, existe um hiperplano $YX' = 0$ que separa P^Δ e $Q^<$, no sentido de que, P^Δ está situado no semi-espço aberto $YX' > 0$ mas $Q^<$ no semi-espço fechado $YX' \leq 0$.

Demonstração: Observemos que as duas alternativas do enunciado deste teorema são mutuamente exclusivas.

Seja $P = \{P_1, \dots, P_p\}$, se $p = 1$ então este teorema se reduz ao Lema 3. Suponhamos então que $p > 1$ e que $P^\Delta \cap Q^< = \phi$ (isto é, que a primeira alternativa não é válida). Mostremos que a segunda alternativa é válida.

Em primeiro lugar mostremos que:

$$\forall i, 1 \leq i \leq p, P_i \notin \{-P_1, \dots, -P_{i-1}, -P_{i+1}, \dots, -P_p\},$$

$$Q_1, \dots, Q_q \}^< \quad (\text{III.5.1})$$

Este fato realmente ocorre, porque senão teríamos:

$$\forall i, 1 \leq i \leq p, P_i = \sum_{k \neq i=1}^p \bar{u}_k (-P_k) + \sum_{j=1}^q \bar{v}_j Q_j \text{ com } \bar{u}_k \geq 0 \text{ e}$$

$$\bar{v}_j \geq 0.$$

$$\text{Portanto } P_i + \sum_{k \neq i=1}^p \bar{u}_k P_k = \sum_{j=1}^q \bar{v}_j Q_j. \text{ Fazem}$$

do-se

$$1 + \sum_{k \neq i=1}^p \bar{u}_k = a > 0, \quad u_k = \frac{\bar{u}_k}{a} \text{ para } k \neq i, \quad u_i = \frac{1}{a} \quad \text{e} \quad v_j = \frac{\bar{v}_j}{a}$$

obtemos que

$$\sum_{k=1}^p u_k P_k = \sum_{j=1}^q v_j Q_j \quad \text{com } u_k \geq 0, \quad \sum_{k=1}^p u_k = 1, \quad v_j \geq 0 \quad \text{para}$$

$j = 1, \dots, q$ o que implica em $P^\Delta \cap Q^< \neq \phi$. E isto contradiz a nossa suposição de que $P^\Delta \cap Q^< = \phi$. Logo (III.5.1) realmente ocorre.

Pelo Lema 3, temos que:

para cada $1 \leq i \leq p$ existe um vetor Y_i tal que

$$Y_i P_i' > 0 \text{ e } Y_i X' \leq 0 \quad \forall X \in \{-P_1, \dots, -P_{i-1}, -P_{i+1}, \dots, -P_p, \\ Q_1, \dots, Q_q\}^<$$

Portanto

$$Y_i P_i' > 0, \quad Y_i P_k' \geq 0 \quad \forall k \neq i \quad \text{e} \quad Y_i X' \leq 0 \quad \forall X \in Q^< \quad (\text{pois}$$

$Q^<$ está contido no cone $\{-P_1, \dots, -P_{i-1}, -P_{i+1}, \dots, -P_p, Q_1, \dots, Q_q\}^<$).

Logo, se definimos o vetor $Y = \sum_{i=1}^p Y_i$, em -

tão:

$$YX' = \sum_{i=1}^p Y_i X'_i \leq 0, \quad \forall X \in Q^< \quad \text{e} \quad YX' = \sum_{i=1}^p Y_i X'_i > 0 \quad \forall X \in P^\Delta.$$

Ou seja, existe um hiperplano $YX' = 0$ tal que P^Δ está situado no semi-espaço aberto $YX' > 0$ e $Q^<$ no semi-espaço fechado $YX' \leq 0$.

C A P Í T U L O I VESTUDO DOS ALGORITMOS DE DANTZIG-WOLFE E
DE BENDERS, DO PONTO DE VISTA DA TEORIA
DE CONJUNTOS E CONES POLIÉDRICOS CONVEXOSIV.1. INTRODUÇÃO

É de nosso interesse neste capítulo, mos-
trar apenas, algumas aplicações dos conceitos de Cones e Con-
juntos poliédricos convexos em determinados métodos de resolu-
ção para problemas de programação linear.

Particularmente, trabalharemos com o Algo-
ritmo de Partição de Benders para problema de programação li-
near de variável mista (ver referência |^{4~5~7}| e com o Algorit-
mo de Decomposição de Dantzig - Wolfe |^{4~8}| para problema de
programação linear generalizado .

IV.2. CONSIDERAÇÕES SOBRE O ALGORITMO DE PARTIÇÃO DE BENDERS

Seja o problema de programação linear mis-
ta:

Minimizar $CX' + FY'$

sujeito a: $AX' + DY' \geq B'$

$X \geq 0$ e inteiro

$Y \geq 0$, onde

$C = (c_1, \dots, c_p) \in \mathbb{R}^p$, $X = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, $F = (f_1, f_2, \dots, f_m) \in \mathbb{R}^m$,

$Y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, $B = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ e

$A = (a_{ih})_{n \times p}$ com $i = 1, \dots, n$ e $h = 1, \dots, p$,

$D = (d_{ji})_{n \times m}$ com $j = 1, \dots, n$ e $i = 1, \dots, m$.

Chamemos este problema de problema I.

Tomemos $X = \bar{X}$, onde $\bar{X} \geq 0$ e suas componentes são números reais inteiros. Então o problema I fica:

Minimizar $C\bar{X}' + FY'$

sujeito a: $A\bar{X}' + DY' \geq B'$

$Y \geq 0$, que é um problema de pro

gramação linear (PPL).

Como $C\bar{X}'$ é uma constante, então temos o seguinte PPL:

Minimizar FY'

sujeito a: $DY' \geq B' - A\bar{X}'$

$Y' \geq 0$, que chamamos de problema II.

Se o problema II admitir \bar{Y} como solução, então (\bar{X}, \bar{Y}) será uma solução viável para o problema I.

Tomemos agora, o dual do problema II, isto é, seja o PPL:

Maximizar $(B - \bar{X}A') U'$

sujeito a: $D'U' \leq F'$

$U \geq 0$, onde $U = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, o

qual chamamos de problema III.

Chamemos de U ao conjunto formado pelas restrições do problema III, isto é:

$$U = \{U \in \mathbb{R}^n / D'U' \leq F', U \geq 0\}$$

que é um conjunto poliédrico convexo, como visto em (III.1).

Como U foi definido para $U \geq 0$, isto impli-

ca na existência de, pelo menos, um vetor extremo (ou vértice) em U . Ou seja, $U \neq \emptyset$.

Como $U \neq \emptyset$, podemos escrever, pelo Teorema 1 (III.3), que:

$$U = P^\Delta + Q^< = \{U \in \mathbb{R}^n / U = X_1 + X_2, X_1 \in P^\Delta \text{ e } X_2 \in Q^<\},$$

onde $P^\Delta = \{X \in \mathbb{R}^n / X = \sum_{i=1}^p w_i P_i, \sum w_i = 1 \text{ e } w_i \geq 0 \text{ para}$

$i = 1, \dots, p\}$ é um poliedro convexo limitado com

$$P = (P_{ih})_{p \times n}, \quad i = 1, \dots, p \quad \text{e} \quad h = 1, \dots, n$$

$P_i \in \mathbb{R}^n$ é a i -ésima linha da matriz P

$$W = (w_1, \dots, w_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \text{e}$$

$$Q^< = \{X \in \mathbb{R}^n / X = \sum_{j=1}^q v_j Q_j, v_j \geq 0 \text{ para } j = 1, \dots, q\} \text{ é}$$

um cone poliédrico convexo com

$$Q = (q_{jk})_{q \times n}, \quad j = 1, \dots, q \text{ e } k = 1, \dots, n$$

$Q_j \in \mathbb{R}^n$ é a j -ésima linha da matriz Q

$$V = (v_1, \dots, v_q) \in \mathbb{R}^q.$$

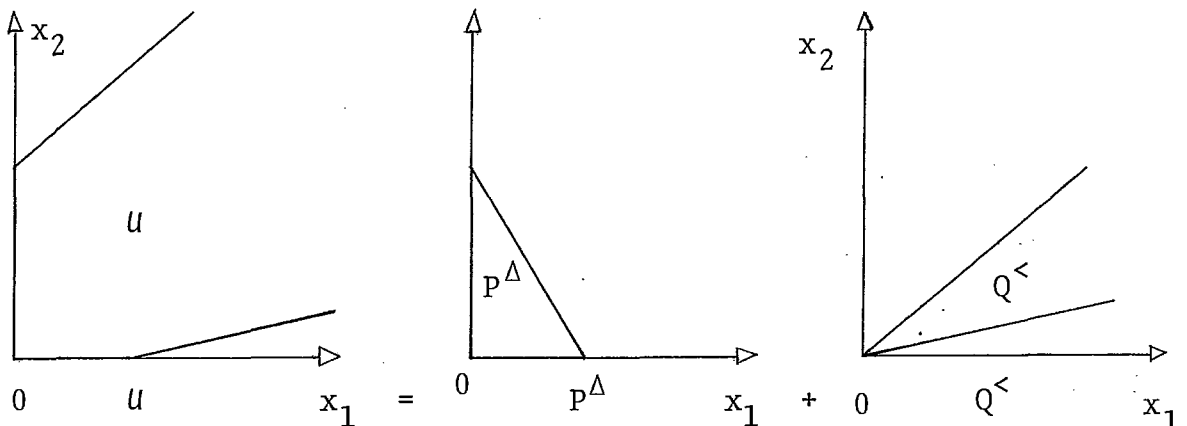
Portanto, para todo U vetor de u , temos:

$$U = \sum_{i=1}^p w_i P_i + \sum_{j=1}^q v_j Q_j \quad \text{com} \quad \sum_{i=1}^p w_i = 1, \quad w_i \geq 0 \quad \text{para}$$

$i = 1, \dots, p$ e $v_j \geq 0$ para $j = 1, \dots, q$. Ou ainda, podemos dizer que: o CCPC (u) é a soma da envoltória convexa do conjunto de seus vértices P_i , com o cone poliédrico convexo, formado pelas combinações lineares finitas não negativas de seus raios extremos Q_j .

Pelo Corolário 2 (III.3) temos também que, se u é limitado então $Q^< = \{0\}$. Portanto $u = P^\Delta$, isto é, u é a envoltória convexa de seu conjunto finito de vetores extremos P_i . (Nesse caso não há raios extremos).

Podemos esquematizar o resultado do seguinte modo:



Nota: os $U \in U$ independem de \bar{X} .

Façamos a seguir, alguns comentários em relação aos problemas I, II e III.

a) Se, no problema III $u = \phi$, isto é, III não admitir solução viável, então (pelo Teorema da Dualidade) os problemas II e I ou serão ilimitados ou não admitirão soluções viáveis.

b) Se o problema III admitir solução limitada, então ao menos uma será um vértice P_i de U .

c) Se o problema III, admitir para um certo $X = \bar{X}$, solução ilimitada isto é, se existir pelo menos um raio vetor Q_j tal que

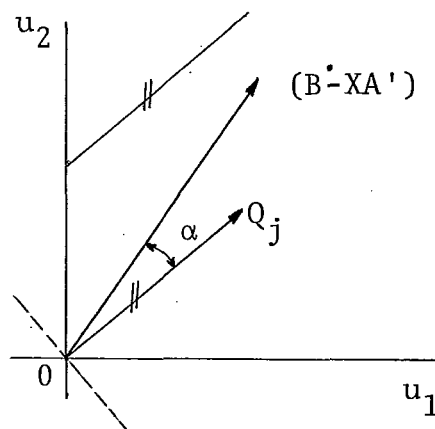
$$(B - XA') Q_j' > 0$$

então o conjunto solução do problema II será vazio (ou ainda, o problema II não admitirá solução viável) para $X = \bar{X}$, ou ainda, o problema I não admitirá \bar{X} como solução viável. Estamos interessados nos vetores X tais que

$$(B - XA') Q_j' \leq 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, q$$

pois caso estes X sejam também não negativos e inteiros, serão também soluções viáveis para o problema I.

Observação: verificamos este comentário com a ajuda da seguinte figura:



$(B - XA') \cdot Q_j$ é o produto escalar dos dois vetores que nos fornecem o sinal do $\cos \alpha$. Lembremos que $(B - XA')$ é o gradiente da função objetivo. Logo, enquanto os dois vetores fizerem um ângulo menor que 90° , a função objetivo não será limitada pela restrição cujo raio vetor é Q_j .

Seja $u \neq \phi$, então o problema III pode ser transformado no seguinte problema:

$$\text{Maximizar } (B - XA') \cdot P_i \quad \text{para } i = 1, \dots, p$$

$$\text{sujeito a: } (B - XA') \cdot Q_j \leq 0 \quad \text{para } j = 1, \dots, q$$

$$X \geq 0 \text{ e inteiro}$$

Podemos também reescrever o problema I, como sendo o seguinte problema:

Minimizar $\{CX' + \text{mínimo } FY'\}$
 Y

sujeito a: $DY' \geq B' - AX'$

$X \geq 0$ e inteiro

$Y \geq 0$

Quando houver solução limitada para o problema III, sabemos que:

Mínimo $FY' = \text{Máximo } (B - XA') P'_i$

logo, o problema I pode ser colocado sob outra forma:

Minimizar $\{CX' + \text{Máximo } (B - XA') P'_i\}$
 $i=1, \dots, p$

sujeito a: $(B - XA') Q'_j \leq 0, j = 1, \dots, q$

$X \geq 0$ e inteiro

Tomemos $z = CX' + \text{Máximo } (B - XA') P'_i$
 $i=1, \dots, p$

Logo, temos que

$z \geq CX' + (B - XA') P'_i, i = 1, \dots, p$

Portanto para o problema I pode ser escrito sob a seguinte forma:

Minimizar z

$$\text{sujeito a: } z \geq CX' + (B - XA')P_i' \quad , \quad i = 1, \dots, p \quad (\text{IV.2.1})$$

$$(B - XA')Q_j' \leq 0 \quad , \quad j = 1, \dots, q \quad (\text{IV.2.2})$$

$$X \geq 0 \quad \text{e inteiro}$$

que chamamos de problema IV. Este problema é um PPL mista on de somente z é contínua.

Se resolvermos o problema IV e encontrarmos uma solução X^* , levaremos esta solução para o problema II e encontraremos Y^* . O par (X^*, Y^*) será a solução do problema I.

A idéia desenvolvida neste método é a de encontrar uma solução para o problema IV sem trabalhar com tôdas as restrições, isto é, em cada iteração adiciona-se uma restrição do tipo (IV.2.1) ou (IV.2.2) ao problema IV. Então este novo problema dará uma cota inferior para o problema I e uma superior para o problema III.

IV.3. CONSIDERAÇÕES SOBRE O ALGORITMO DE DECOMPOSIÇÃO DE DANTZIG-WOLFE

Encontramos frequentemente problemas de programação linear com um número muito grande tanto de variáveis como de restrições. E, um caminho para lidar com esta dificuldade é apresentado pelo Algoritmo de Decomposição de Dantzig-

Wolfe.

A idéia básica, neste algoritmo, consiste em se transformar o problema original num problema equivalente, denominando Problema Mestre, com menos restrições e mais variáveis do que o problema original. Além disso resolve-se o Problema Mestre, sem calcular todas as suas colunas, mas sim gerando-as, quando o Método Simplex necessitá-las.

Consideremos então o seguinte problema de programação linear (PPL):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & z = CX' \\ \text{sujeito a:} \quad & AX' = B' \\ & X \geq 0 \end{aligned} \tag{IV.3.1}$$

Onde:

$$C = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$B = (b_1, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^m$$

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

Chamemos o conjunto das restrições do problema (IV.3.1) de S , isto é:

$$S = \{X \in \mathbb{R}^n / AX' = B', X \geq 0\}, \text{ que é um conjunto } \underline{po}$$

liédrico convexo, como visto em (III.1). Ou seja, mais concretamente S é o conjunto solução do sistema de m equações lineares não homogêneas a n incógnitas,

$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$a_{21} x_1 + \dots + a_{2n} x_n = b_2$$

.....

$$a_{m1} x_1 + \dots + a_{mn} x_n = b_m$$

Podemos escrever este sistema da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ \dots \\ A_2 \end{pmatrix} X' = \begin{pmatrix} B'_1 \\ \dots \\ B'_2 \end{pmatrix}$$

onde $A_1 = (a_{ij})_{m_1 \times n}$, $A_2 = (a_{ij})_{m_2 \times n}$, $B_1 = (b_1, \dots, b_{m_1})$,

$B_2 = (b_{m_1+1}, \dots, b_{m_2})$ e $m = m_1 + m_2$. Portanto, passa -

mos a ter dois subconjuntos de restrições, que são:

$$S_1 = \{X \in \mathbb{R}^n / A_1 X' = B'_1\} \text{ e } S_2 = \{X \in \mathbb{R}^n / A_2 X' = B'_2, X \geq 0\}.$$

Daí então podemos escrever o problema (IV.3.1) na seguinte forma:

$$\text{Minimizar } z = CX'$$

$$\text{sujeito a: } A_1 X' = B_1'$$

(IV.3.2)

$$A_2 X' = B_2'$$

$$X \geq 0$$

Se o conjunto poliédrico convexo S_2 é diferente do vazio, então pelo Teorema 1 (III.3) temos que:

$$S_2 = P^\Delta + Q^<$$

onde P^Δ é um poliedro convexo limitado e $Q^<$ um cone poliédrico convexo. Ou ainda:

$$P^\Delta = \{X \in \mathbb{R}^n / X = \sum_{i=1}^p u_i P_i, \sum_{i=1}^p u_i = 1, u_i \geq 0\}, \text{ onde } P_i = (p_{i1}, \dots,$$

$p_{in}) \in \mathbb{R}^n$ são os vértices (vetores extremos) de S_2 ;

$$Q^< = \{X \in \mathbb{R}^n / X = \sum_{j=1}^q v_j Q_j, v_j \geq 0\}, \text{ onde } Q_j = (q_{j1}, \dots, q_{jn}) \in \mathbb{R}^n$$

são os raios extremos de S_2 . Portanto temos que:

$$\forall X \in S_2 \implies X \in \mathbb{R}^n / X \geq 0 \text{ e } X = \sum_{i=1}^p u_i P_i + \sum_{j=1}^q v_j Q_j \text{ com}$$

$$\sum_{i=1}^p u_i = 1, u_i \geq 0, v_j \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, p \text{ e } j = 1, \dots, q.$$

Ou melhor, o CCPC (S_2) pode ser visto como sendo a soma da en voltória convexa de seus vértices com o cone poliédrico conve xo de S_2 , cujos vetores, são combinações lineares não negati- vas dos raios extremos de S_2 .

Podemos ver o PPL (IV.3.2) como segue: es colhe-se de todos os vetores X de S_2 , aqueles que estejam em S_1 e minimizam z . Isto ẽ:

seja X soluçãõ de (IV.3.2), entãõ

$$X \in S_2, \text{ ou seja, } X = \sum_{i=1}^p u_i P_i + \sum_{j=1}^q v_j Q_j \text{ com } \sum_{i=1}^p u_i = 1, u_i \geq 0,$$

$$v_j \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, p \text{ e } j = 1, \dots, q, \text{ tal que } A_1 X' = B_1', \text{ ou}$$

$$\text{seja, } \sum_{i=1}^p u_i A_1 P_i' + \sum_{j=1}^q v_j A_1 Q_j' = B_1' \text{ e } z = CX', \text{ ou seja,}$$

$$z = \sum_{i=1}^p u_i CP_i' + \sum_{j=1}^q v_j CQ_j'.$$

Definimos para cada índice:

$$i = 1, \dots, p \text{ um vetor } M_i = A_1 P_i' \text{ e um escalar } e_i = CP_i' \quad (\text{IV.3.3})$$

$$j = 1, \dots, q \text{ um vetor } R_j = A_1 Q_j' \text{ e um escalar } e_j = CQ_j' \quad (\text{IV.3.4})$$

Entãõ podemos escrever o seguinte PPL em u_i e v_j :

$$\text{Minimizar} \quad \sum_{i=1}^p e_i u_i + \sum_{j=1}^q e_j v_j \quad (\text{IV.3.5})$$

$$\text{sujeito a:} \quad \sum_{i=1}^p M_i u_i + \sum_{j=1}^q R_j v_j = B'_1 \quad (\text{IV.3.6})$$

$$\sum_{i=1}^p u_i = 1 \quad (\text{IV.3.7})$$

$$u_i \geq 0 \text{ para } i = 1, \dots, p \quad (\text{IV.3.8})$$

$$v_j \geq 0 \text{ para } j = 1, \dots, q$$

que é um PPL equivalente ao PPL (IV.3.2), denominado Problema Mestre.

Podemos ver que o Problema Mestre tem somente $(m_1 + 1)$ linhas, o que é um tamanho econômico se comparado com as $m_1 + m_2$ linhas do PPL (IV.3.2), para m_2 um número grande. Ainda o Problema Mestre tem tantas colunas quantos forem os vértices P_i do CCPC (S_2), que podem ser milhares se m_2 for grande.

Em vez de tabularmos todas essas colunas, usamos a técnica de geração de coluna, assim criando colunas para entrar na base quando essas forem necessárias. Vejamos como isto é feito: sejam

$$\bar{e}_i = e_i - \Pi \left(\dots \overset{M_i}{i} \dots \right), \text{ o coeficiente de custo relativo à variável } u_i$$

$$\bar{e}_j = e_j - \Pi \left(\dots \overset{R_j}{j} \dots \right), \text{ o coeficiente de custo relativo à variável } v_j$$

vel v_j .

Tomemos $\Pi = (\Pi_1, \Pi_0)$, onde Π_1 é o vetor correspondente as restrições (IV.3.6) e Π_0 o escalar correspondente à restrição (IV.3.7). Então usando-se as definições (IV.3.3) e (IV.3.4) em \bar{e}_i e \bar{e}_j , temos que:

$$\bar{e}_i = CP'_i - \Pi \begin{pmatrix} A_1 P'_i \\ 1 \end{pmatrix} = (C - \Pi_1 A_1) P'_i - \Pi_0$$

$$\bar{e}_j = CQ'_j - \Pi \begin{pmatrix} A_1 Q'_j \\ 0 \end{pmatrix} = (C - \Pi_1 A_1) Q'_j$$

O critério usual do Simplex exige que achemos o

$$\text{Min}_{i,j} \{ (C - \Pi_1 A_1) P'_i - \Pi_0, (C - \Pi_1 A_1) Q'_j \}$$

com o fim de escolhermos uma variável u_i ou v_j para entrar na base. Ou seja, precisamos resolver o subproblema

$$\begin{aligned} \text{Minimizar} \quad & (C - \Pi_1 A_1) X' \\ \text{sujeito a:} \quad & X' \in S_2 \end{aligned} \tag{IV.3.9}$$

Temos dois casos a considerar:

a) se $\text{Min} (C - \Pi_1 A_1) X'$ é limitado, então $(C - \Pi_1 A_1) Q'_j \geq 0$.

Logo chegamos à solução ótima $(C - \Pi_1 A_1)P'_i$

b) se $\text{Min } (C - \Pi_1 A_1) X'$ é igual a $-\infty$ então existe um raio vetor de S_2 , Q'_j , tal que $(C - \Pi_1 A_1) Q'_j < 0$. Podemos dizer que $(C - \Pi_1 A_1) Q'_j$ é uma solução viável, mas não se pode a firmar se é ótima.

Se resolvermos o subproblema (IV.3.9) e obtivermos uma solução ótima X'_s , então a coluna a entrar na base será:

$$\begin{pmatrix} A_1 & X'_s \\ \dots & \dots \\ & 1 \end{pmatrix}$$

com coeficiente de custo $e_s = CX'_s$.

O algoritmo ainda envolve iteração entre um conjunto de subproblemas independentes, do tipo do subproblema (IV.3.9), cujas funções objetivo contêm custos variáveis e o Problema Mestre. Essa iteração é feita da seguinte maneira: os subproblemas aceitam um conjunto de parâmetros (ou custos) do Problema Mestre. Estes enviam suas respectivas soluções para o Problema Mestre, que combina estas soluções com as soluções anteriores e calcula novos custos. Estes novos custos são outra vez enviados para os subproblemas e a iteração prossegue até que é satisfeito um teste de otimalidade.

B I B L I O G R A F I A

- |¹| GASS, S.I. - "Programacion Lineal", C.E.C.S.A., 1972.
- |²| HADLEY, G. - "Linear Programming", Addison-Wesley, 1962
- |³| KUHN, H.W. e TUCKER, A.W. - "Linear Inequalities and Related Systems", Annals of Mathematics Study n° 38, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1956.
- |⁴| LASDON, L.S. - "Optimization Theory for Large Systems", Macmillan, 1970.
- |⁵| Maculan Filho, N. - "Programação Linear Inteira", COPPE-UFRJ, Rio, 1978.
- |⁶| Mangasarian, O.L. - "Nonlinear Programming", McGraw-Hill, USA, 1969.
- |⁷| Sampaio Filho, O.A. - "Programação Mista com Variáveis Bivalentes. Programa de Aplicação do Método de Decomposição de Benders" - Tese de M.Sc., COPPE-UFRJ, Rio, 1975.
- |⁸| Vaca Obando, F.E. - "Método de Decomposição de Dantzig-Wolfe para Sistemas de Grande Porte", COPPE/UFRJ, Rio, 1976.
- |⁹| VARAYA, P.P. - "Notes on Optimization", Van Nostrand Reinhold, 1972.