DESENVOLVIMENTO DE UM ALGORÍTMO PARA O PROBLEMA DE TRANSPORTES COM RESTRIÇÕES ADICIONAIS

Elizabeth de Souza Penna

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

Nelson Maculan Filho

Prof. Nelson Maculan Filho
(Presidente)

Cláudio Thomas Bornstein

Prof. Cláudio Thomas Bornstein

Roberto Diéguez Galvão

Prof. Roberto Diéguez Galvão

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JANEIRO DE 1978

PENNA, ELIZABETH DE SOUZA

Desenvolvimento de Um Algorítmo para o Problema de Transportes com Restrições Adicionais |Rio de Janeiro| 1978.

XI, 86p. 29,7cm (COPPE-UFRJ, M.Sc., Engenharia de Sistemas, 1978).

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro. Fac. Engenharia.

1. Assunto I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

AGRADECIMENTO

Félix Eduardo V. Obando

José Augusto de Carvalho

Roberto Dieguez Galvão

RESUMO

Este trabalho apresenta um método de resolução de problemas de transporte com várias restrições adicionais. O método, desenvolvido anteriormente por D. Klingman e R. Russel, é basicamente o método primal simplex, especializado para explorar a estrutura topológica embebida no problema. O método acopla a técnica de Poly-ω de Charnes e Cooper com o método da soma linha-coluna que resultam na compactificação da matriz inversa, minimizando desta forma as informações a serem geradas em cada iteração e os cálculos requeridos no pivoteamento.

Um sumário do problema de transporte puro e da técnica de Poly-ω são apresentados a fim de facilitar a compreensão da parte principal da tese. Um programa em linguagem FORTRAN, baseado no método de D. Klingman e R. Russel e desenvolvido como parte do trabalho, é também incluido, fartamente documentado.

ABSTRACT

This work presents a specialized method for solving transportation problems with several additional linear constraints. The method has been developed originally by D. Klingman and R. Russel; it is basically the primal simplex method, specialized to exploit fully the topological structure embedded in the problem. The method couples the Poly-ω technique of Charnes and Cooper with the Row-column-sum method to yield an "inverse compactification", that minimizes the basis information to be stored between sucessive iterations and minimizes the arithmetic calculations required in pivoting.

A summary of both the pure transportation problem an the Poly-ω technique have been included in order to facilitate the understanding of the main part of the thesis. A FORTRAN code, based on the method of D. Klingman and R. Russel, and developed as part of the thesis work, is also included, fully documented.

Í N D I C E

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Existem vários modelos de programação linear cuja matriz dos coeficientes das restrições possui uma estrutura particular que permite particioná-la em duas ou mais submatrizes. Nesta classe de problemas está incluido o problema de transporte restrito, que é, basicamente, o problema de transporte, ao qual foram adicionadas várias restrições lineares. Devido às diversas aplicações existentes do problema de transporte restrito, entre os quais estão incluidos: "Warehouse-funds-flow" e o modelo de mistura de petróleo desenvolvido por Charnes e Cooper [7], gerou-se um grande interesse em torno da criação de um método especializado para sua resolução. Existem, inclusive, técnicas, como a desenvolvida por Glover, Klingman e Ross [3] que permitem a transformação de um problema com restrições extras em um problema de transporte puro equivalente. No entanto, como nem sempre é possível essa transformação, os algorítmos existentes e que solucionam o problema de transporte puro, não poderão ser sempre aplicados ao problema de transporte restrito. Em vista disso, D Klingman e R. Russel [1] desenvolveram um método especializado para sua resolução. O método em questão, apresentado neste trabalho, é basicamente o método simplex, adaptado para aproveitar os esquemas computacionais usados na codificação do método da soma linha coluna

[11] e do método dual [12] e deste modo reduzir o tempo de processamento.

A obtenção de uma solução ótima para o problema de transporte restrito, através do algorítmo proposto por Klingman e Russel [1] exige o conhecimento de uma parte mínima da tábua simplex associada ao problema em cada iteração, ou seja: a representação do vetor que entrará na base, as q últimas componentes da linha pivô (onde q é o nº de restrições adicionais); Q^{-1}, uma submatriz da matriz inversa generalizada à esquerda da base, o vetor de fluxos básicos, e os valores de $z_j - c_j$. O procedimento acima reduz o nº de informações geradas e o número de cálculos usados no pivoteamento em cada iteração. Isto se torna possível, devido ao acoplamento da técnica de Poly-ω de Charnes e Cooper [7] com o método da soma-linha-coluna [11], que associados à partição da base, proposta por Charnes e Cooper no método de reversão dupla [7], geram a compactificação da matriz inversa [8]. Deste modo não é necessário gerar integralmente a matriz inversa generalizada e sim uma sub-matriz $(q + 1) \times q$ e uma árvore geradora para cada base. A partição da base permite a exploração da árvore geradora e simplifica os cálculos necessários para obtenção de $z_j - c_j$ e das representações dos vetores não básicos em termos dos vetores básicos.

Devido ao método em questão explorar a estrutura da árvore geradora inerente ao problema de transporte puro, foram desenvolvidos na segunda parte deste trabalho os aspectos mais significativos deste problema e que são de vital importância para a compreensão do método de solução do problema de transporte restrito. Estes ítens foram desenvolvidos tendo como base os trabalhos de Hadley [5], Simmonard [6], Charnes e Cooper [7] e Saul J. Gass [9].

A técnica de Poly-ω, de Charnes e Cooper [7] que permite a geração de uma linha completa da matriz inversa generalizada da base, sem calculá-la, é abordada em um capítulo em separado.

Na quarta parte deste trabalho é apresentado o método especializado para solução de problemas de transporte com restrições extras desenvolvido por D. Klingman e R. Russel [1], ao qual foram adicionados alguns exemplos e algumas demonstrações que não constam no texto original. Finalmente, na última parte da tese, tendo como base o algorítmo geral de Klingman e Ross [1], para a solução do problema de transporte restrito, foi elaborado um programa em linguagem Fortran. Os detalhes para a utilização do programa, a listagem e os resultados obtidos em cada iteração, para o exemplo apresentado na quarta parte, são também partes integrantes deste capítulo.

CAPÍTULO 2

O PROBLEMA DE TRANSPORTE

2.1 Formulação Matemática do Problema

O problema de transporte "puro" consiste em:

Minimizar: $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$

s.a

$$(2.1) \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m \qquad a_i \geq 0$$

$$(2.2) \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n \qquad b_j \geq 0$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m \ ; \ j = 1, 2, \ldots, n)$$

onde a_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ - quantidade disponível na origem i;

b_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ - quantidade que pode ser recebida pelo destino j;

c_{ij} - custo unitário de transporte.

x_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, m \ ; \ j = 1, 2, \ldots, n)$ - quantidade a ser transportada da origem i ao destino j.

Às restrições (2.1) chama-se restrições oferta e às restrições (2.2), restrições demanda.

Somando-se as m restrições oferta tem-se:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \sum_{i=1}^{m} a_i \qquad (2.3)$$

A soma das n restrições demanda é dada por:

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (2.4)$$

Por (2.3) e (2.4) estabelece-se que a quantidade total enviada é igual à quantidade total recebida.

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (2.5)$$

O problema de transporte poderá ainda ser formulado como:

Minimize c_x s.a [7]

$$Ax = P_0 \qquad (2.6)$$

$$x \geq 0$$

onde $c = (c_{11}, \ldots, c_{1n}, c_{21}, \ldots, c_{2n}, \ldots, c_{m1}, \ldots, c_{mn})$

$P_0 = (a_1, a_2, \ldots, a_m\ , \ b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$x = (x_{11}, \ldots, x_{1n}, x_{21}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mn})$

A - matriz dos coeficientes das restrições

Desenvolvendo as restrições do problema (2.1) e (2.2) tem-se:

$$
\begin{array}{ccccccccccccl}
x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n} & & & & & & & & & & & & = a_1 \\
 & & & & x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n} & & & & & & & & = a_2 \\
 & & & & & & \ddots & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & & & x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn} & & & & = a_m \\
x_{11} & & & & +x_{21} & & & & +\ldots+x_{m1} & & & & = b_1 \\
 & x_{12} & & & & +x_{22} & & & & +\ldots+x_{m2} & & & = b_2 \\
 & & \ddots & & & & \ddots & & & & \ddots & & \vdots \\
 & & & x_{1n} & & & & +x_{2n} & & & & +\ldots+x_{mn} & = b_n
\end{array}
$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m \ ; \ j = 1, 2, \ldots, n)$$

A Matriz A dos coeficientes será:

$$A = \left[\begin{array}{ccccc} 1_n & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1_n \\ I_n & I_n & I_n & \dots & I_n \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \text{m linhas} \\ \\ \\ \\ \text{n linhas} \end{array} \qquad (2.7)$$

$A\ [(m+n) \times (mn)]$

onde $1_n = (1, 1, \dots , 1)$ vetor linha com n componentes.

I_n - matriz unitária de ordem n.

2.2 Propriedades da Matriz A: [5, 6]

i) A matriz A pode também ser escrita como:

$$A = [P_{11}, P_{12}, \dots, P_{1n}, P_{21}, P_{22}, \dots, P_{2n}, \dots, P_{m1}, P_{m2}, \dots, P_{mn}]$$

Cada vetor P_{ij} ($i = 1, 2, \dots , m$, $j = 1, 2, \dots , n$) é um vetor de m+n componentes, das quais somente a i-ésima e a (m+j)-ésima componentes diferem de zero e são iguais a 1; e, portanto, pode ser escrito como uma soma de dois vetores unitários

$$P_{ij} = e_i + e_{m+j} \tag{2.8}$$

ℓ_i - vetor unitário de m+n componentes cuja i-ésima componente é igual a 1.

ℓ_{m+j} - vetor unitário tendo 1 na (m+j)-ésima componente.

Exemplo: Matriz A de um problema de transporte (2x3)

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{21} & P_{22} & P_{23} \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{c} \\ 2 \\ \\ 3 \\ \\ \end{array}$$

$$2 \times 3$$

$$P_{13} = \ell_1 + \ell_5$$

ii) Rank de A é igual a m+n-1. [9]

Somando as primeiras linhas de A, desde a 2ª até a m-ésima linha e, subtraindo este total da soma das n-últimas linhas de A, encontra-se como resultado a 1ª linha de A. Verifica-se que esta linha é uma combinação linear, com coeficientes não nulos, das outras m+n-1 linhas restantes. Generalizando, qualquer linha de A pode ser escrita como uma combinação linear, com coeficientes não nulos, das outras m+n-1 linhas. Em A, existe então, um conjunto de m+n-1 linhas linearmente independentes e rank A = m+n-1.

Como consequência, apenas m+n-1 das restrições (2.1) e (2.2) são linearmente independentes e portanto uma equação do sistema (2.1) e (2.2) poderá ser eliminada.

iii) Toda sub-matriz quadrada de A tem determinante igual a 0, + 1 ou -1. [5, 6].

Seja A_k uma sub-matriz quadrada de A cuja ordem é K ($1 \leq k \leq m + n$). Visto que cada vetor de A possui apenas dois elementos não nulos, um vetor coluna de A_k possuirá no máximo dois elementos diferentes de zero. Se cada coluna de A_k contiver dois elementos não nulos ter-se-á $|A_k| = 0$, pois sendo um deles coeficiente de uma restrição origem e o outro coeficiente de uma restrição destino, a soma das m primeiras linhas de A_k será igual à soma das n últimas linhas e a diferença entre esses dois resultados será uma linha nula. Substituindo-se uma linha de A_k por essa linha nula o determinante de A_k será zero.

Se existir uma coluna de A_k que contenha menos de duas entradas não nulas,

$$|A_k| = 0 \quad \text{ou} \quad |A_k| = \pm |A_{k-1}|$$

Visto que $|A_1| = 0$ ou 1 resulta que:

$$|A_k| = \pm 1 \text{ ou } 0 \quad \forall K, \quad 1 \le k \le m + n.$$

iv) A sub-matriz formada por m+n-1 colunas linearmente independentes de A constituirá uma base para o problema de transporte |11, 6| e será chamada de B. Note que toda linha de B pode ser escrita como uma combinação linear das m+n-1 linhas restantes. Então rank (B) = m+n-1.

v) Os vetores P_{ij} de A $(i = 1, 2, \ldots, m ; j = 1, 2, \ldots, n)$ podem apresentar um índice único K, sendo $K = n(i-1) + j$ e

$$A = \left[P_1, P_2, \ldots, P_{mn}\right]$$

2.3 Tábua associada ao problema de transporte

A tábua associada ao problema de transporte é uma tábua retangular, com m linhas que correspondem às origens O_i e n colunas que correspondem aos destinos D_j. Cada cela (i, j) conterá o custo C_{ij} e o valor da variável x_{ij}. Para cada cela (i, j) há em correspondência um vetor P_{ij} da matriz A.

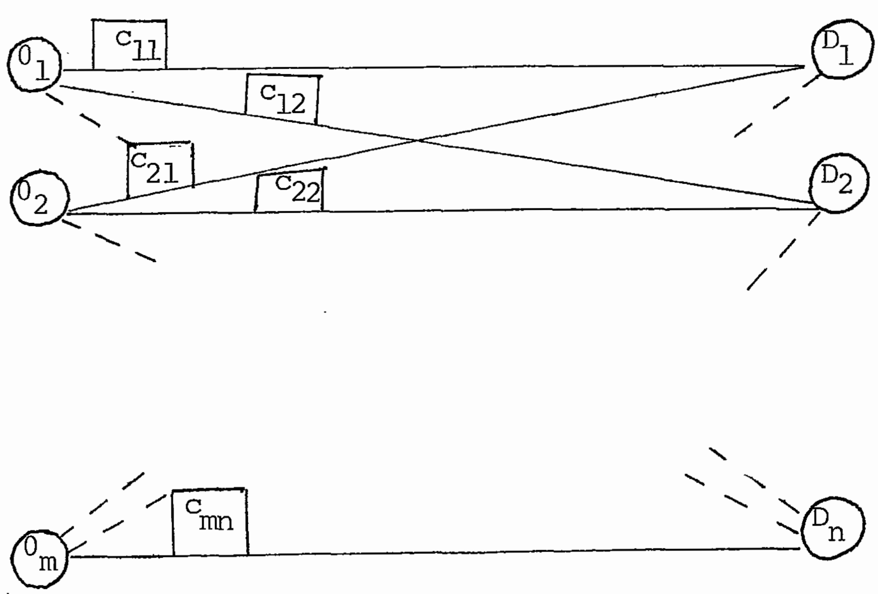
$O_i \backslash D_j$	D_1	D_2	...	D_n	Origem
O_1	$\boxed{c_{11}}$ x_{11}	$\boxed{c_{12}}$ x_{12}	...	$\boxed{c_{1n}}$ x_{1n}	a_1
O_2	$\boxed{c_{21}}$ x_{21}	$\boxed{c_{22}}$ x_{22}	...	$\boxed{c_{2n}}$ x_{2n}	a_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	...	$\vdots$	$\vdots$
O_m	$\boxed{c_{m1}}$ x_{m1}	$\boxed{c_{m2}}$ x_{m2}	...	$\boxed{c_{mn}}$ x_{mn}	a_m
destino	b_1	b_2		b_n	α

(2.9)

$$\alpha = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

2.4 Grafo G e Grafo T associados ao problema de Transporte |6|

Ao problema de transporte associamos um grafo bipartido G com $\underline{m}$ nós origem e $\underline{n}$ nós destino.



A cada arco (O_i, D_j) associa-se um custo unitário de transporte C_{ij}, $(i = 1, 2, \ldots, m \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n)$

O grafo T é um grafo associado à tábua do problema de transporte, onde cada vértice de T é centro de uma cela (i, j) e, cada aresta de T é o segmento que une os vértices, situados na mesma linha ou coluna da tábua.

Chama-se de π-grafos aos grafos parciais de T, cujos vértices são subconjuntos quaisquer do conjunto de vértices de T e cujas arestas são arestas de T, que unem os vértices adjacentes desses subconjuntos.

Observações:

i) Há uma correspondência biunívoca entre os vértices (i, j) de um π-grafo e as arestas $|O_i, D_j|$ de um grafo G.

ii) A cada vetor P_{ij} da matriz A está associada uma aresta $|O_i, D_j|$ de G e um vértice (i, j) de T. À matriz B, base para o problema de transporte, está associado um grafo parcial de G e um π-grafo a que denominar-se-á árvore geradora.

Comentário - Um grafo parcial de G com (m+n-1) arestas é uma árvore se, e somente se, as colunas da matriz de incidência de A, associadas com as arestas, são linearmente independentes.

Existe uma correspondência biunívoca entre as bases do problema de transporte e os grafos parciais de G que são árvores.

2.5 Método Simplex aplicado ao problema de transporte

Do mesmo modo que no método geral simplex, requer-se uma solução inicial básica viável para iniciar o processo de obtenção de uma solução ótima para o problema. Existe uma variedade de algorítmos de iniciação para o problema de transporte. Os métodos de iniciação primal, incluem, entre outros: Regra da Esquina Noroeste [7], Método de Aproximação de Vogel [10] Regra do mínimo da linha coluna [11], Regra do mínimo da matriz [5], etc.

A existência de uma solução inicial é assegurada pelo teorema abaixo:

<u>Teorema</u>: Um problema de transporte tem sempre uma solução básica e toda solução é limitada se a_i e b_j forem limitados [6].

Dem: Os valores $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{\alpha}$, $\alpha = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, constituem uma solução viável e para toda solução, tem-se necessariamente:

$$x_{ij} \leq \min \left[a_i, b_j\right]$$

Examinando-se A, observa-se que A não contém a matriz identidade e, portanto, seria necessária a adição de m+n variáveis artificiais para iniciar o processo. Por outro lado, devido à redundância que há no conjunto de restrições (2.1) e (2.2), uma solução ótima para o problema conterá apenas uma variável artificial ao nível zero [5]. Em vista do problema de transporte ter sempre uma solução viável, a variável artificial pode ser escrita ao nível zero na fase inicial e, portanto, considerar-se-á a base B para o problema de transporte, consistindo apenas de m+n-1 vetores colunas linearmente independentes de A. Todo vetor coluna P_{ij} de A pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores básicos.

$$P_{ij} = \sum_{\alpha\beta} Y_{ij}^{\alpha\beta} P_{\alpha\beta}^{B} \tag{2.10}$$

ou, em notação matricial

$$P_{ij} = B\, Y_{ij} \tag{2.11}$$

$\sum_{\alpha\beta}$ - somatório sobre os vetores básicos

$P_{\alpha\beta}^{B}$ - vetores básicos

Y_{ij} - representação do vetor P_{ij} em relação à base B.

<u>Comentário</u> - Os valores de Y_{ij}^{B} serão iguais a 0, + 1 ou - 1. [5, 7]

Desenvolvendo (2.10) ter-se-á um sistema com m+n equações e m+n-1 incógnitas $Y_{ij}^{\alpha\beta}$. Da matriz B pode ser removida uma linha, resultando uma matriz B_1, não singular. Seja i o número da linha a ser removida de (2.10). O vetor

P_{ij} que possui 1 na i-ésima e na (m+j)-ésima componentes, se transformará em um vetor unitário ℓ_{m+j-1} com m+n-1 componentes, e o novo sistema será:

$$B_1 \; Y_{ij} = \ell_{m+j-1} \tag{2.12}$$

Sendo B_1 não singular, pode-se escrever:

$$Y_{ij} = B_1^{-1} \; \ell_{m+j-1} = a_{m+j-1} \tag{2.13}$$

onde a_{m+j-1} é a (m+j-1)-ésima coluna de B_1^{-1}

Cada componente de a_{m+j-1} pode ser determinada pelo quociente de algum menor de ordem m+n-2 por $|B_1|$. Sendo os menores de B_1, menores de B, cada elemento a_{m+j-1} é igual a +1, -1 ou 0 e portanto $Y_{ij}^{\alpha\beta} = +1, -1, \text{ ou } 0$ (2.14)

Este resultado gera várias simplificações na aplicação do método simplex, desde o pivoteamento, até a determinação da variável que sairá da base, posto que a tábua simplex será constituída de valores 1, -1, ou 0.

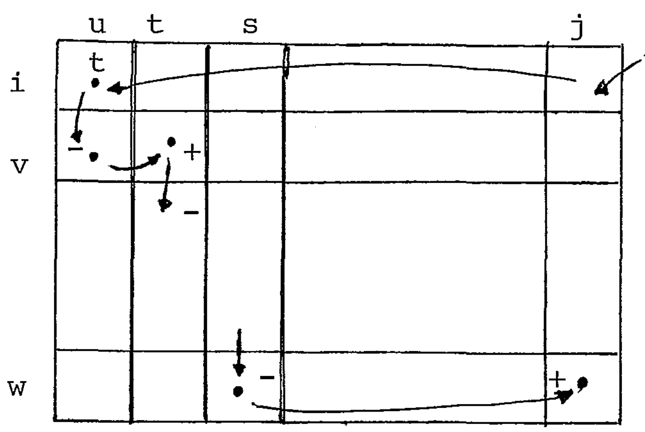
De (2.10) e (2.14) tem-se:

$$P_{ij} = \sum \; (\pm) \; P_{\alpha\beta}^{B} \tag{2.15}$$

Omite-se os vetores $P_{\alpha\beta}^{B}$ para os quais $Y_{ij}^{\alpha\beta} = 0$.

Desenvolvendo (2.15) ter-se-á:

$$P_{ij} = P^B_{i\cancel{u}} - P^B_{\cancel{v}\cancel{u}} + P^B_{\cancel{v}\cancel{t}} - \ldots - P^B_{\cancel{w}\cancel{s}} + P^B_{\cancel{w}j} \qquad (2.16)$$



(2.17)

O quadro acima mostra as celas básicas que representam o caminho único do vetor P_{ij}, desde o nó origem i ao nó destino j.

Os sinais da combinação linear (2.16) são alternados, isto é, caminha-se em linha, positivamente, e em coluna, negativamente. Note que o primeiro e último vetores da combinação linear recebem sinais positivos. O caminho termina quando se chega à mesma coluna de onde se tinha partido.

O vetor Y_{ij}, cujas componentes são +1, -1, ou 0, será a representação do vetor P_{ij} em relação à base B e esta representação será única. Diz-se então, que o vetor $P^B_{\alpha\beta}$ cujo coeficiente é +1 ou -1 está no caminho único de P_{ij}, da origem i ao destino j.

Exemplo:

Seja $B = [P_{11}, P_{13}, P_{22}, P_{23}, P_{32}, P_{34}]$ base para um problema de transporte (3x4)

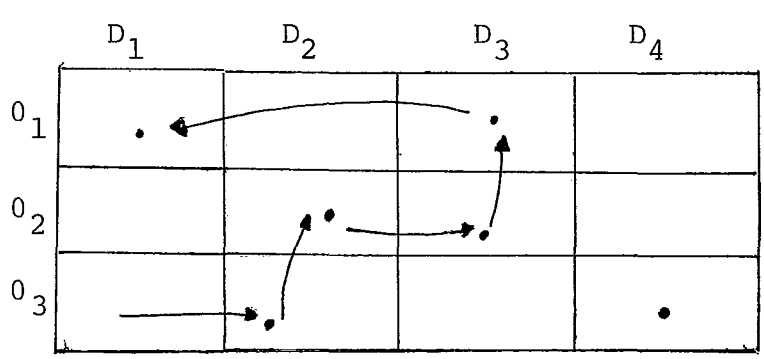
O vetor P_{31}, não básico, será escrito na forma de (2.16) como:

$$P_{31} = P_{32} - P_{22} + P_{23} - P_{13} + P_{11}$$

Sua representação em relação à base será:

$$Y_{31} = (1, -1, -1, 1, 1, 0)$$

Os vetores $P_{11}, P_{13}, P_{22}, P_{23}, P_{32}$ estão no caminho único de P_{31}, do nó origem 3 ao nó destino 1.



Cálculo de $z_j - c_j$

Seja $C^B_{\alpha\beta}$ os preços correspondentes aos vetores básicos $P^B_{\alpha\beta}$ então:

$$Z_{ij} - c_{ij} = \sum_{\alpha\beta} Y_{ij}^{\alpha\beta} \, c_{\alpha\beta}^{B} - c_{ij} \qquad (2.18)$$

$$Z_{ij} - c_{ij} = \sum_{\alpha\beta} (\pm) \, C_{\alpha\beta}^{B} - c_{ij} \qquad (2.19)$$

$$Z_{ij} - c_{ij} = C_{iu}^{B} - c_{uv}^{B} + c_{vt}^{B} - \ldots - C_{ws}^{B} + c_{wj}^{B} - c_{ij} \qquad (2.20)$$

Usando (4.20) poderá ser obtido o índice st do vetor a entrar na base.

$$Z_{st} - c_{st} = \text{máx}\ (Z_{ij} - c_{ij}) \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \ ; \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

2.6 Quadro Simplex associado ao problema de transportes (Exemplo)

Minimize:

$$x_{11} + 6x_{12} + 3x_{13} + 5x_{14} + 7x_{21} + 3x_{22} + 1x_{23} + 6x_{24} + 9x_{31} + $$
$$+ 4x_{32} + 5x_{23} + 4x_{34}$$

s.a

$$
\begin{array}{lllll}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} & & & & = 20 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} & & & = 10 \\
& & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} & & = 25 \\
x_{11} & + x_{21} & + x_{31} & & = 11 \\
\quad x_{12} & \quad + x_{22} & \quad + x_{32} & & = 13 \\
\qquad x_{13} & \qquad + x_{23} & \qquad + x_{33} & & = 17 \\
\qquad\quad x_{14} & \qquad\quad + x_{24} & \qquad\quad + x_{34} & & = 14
\end{array}
$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2, 3 \qquad j = 1, 2, \ldots , 4$$

A solução inicial básica, encontrada utilizando o método da esquina noroeste é apresentada na tábua abaixo:

	D_1	D_2	D_3	D_4	
0_1	1 / 11	6 / 9	3	5	20
0_2	7	3 / 4	1 / 6	6	10
0_3	9	4 / →3	5 / 11	4 / 14	25
	11	13	17	14	

O vetor a entrar na base será P_{32}, pois: $\max(z_{ij} - c_{ij}) = 3 > 0$ e sua representação em relação aos vetores básicos $\{P_{11}, P_{12}, P_{22}, P_{23}, P_{32}, P_{34}\}$ será:

$$Y_{32} = \{0, 0, 1, -1, 1, 0\}$$

Os novos quadros serão:

	D_1	D_2	D_3	D_4
0_1	11	9	4	
0_2			10	
0_3		4	7	14

	D_1	D_2	D_3	D_4
0_1	11	2	7	
0_2		5	10	
0_3		11		14

A solução ótima é dada obtida no quadro abaixo:

	D_1	D_2	D_3	D_4
0_1	11		9	
0_2		2	8	
0_3		11		14

$x^*_{11} = 11$ $x^*_{13} = 9$ $x^*_{22} = 2$ $x^*_{23} = 8$ $x^*_{32} = 11$ e $x^*_{34} = 14$

$$CX^* = 152$$

Quadro simplex associado à solução ótima [7]

B	P_0	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_{24}	P_{31}	P_{32}	P_{33}	P_{34}
P_{11}	11	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0
P_{13}	9	0	1	1	1	-1	0	0	0	-1	0	0	0
P_{22}	2	0	1	0	1	0	1	0	1	-1	0	-1	0
P_{23}	8	0	-1	0	-1	1	0	1	0	1	0	1	0
P_{32}	11	0	0	0	-1	0	0	0	-1	1	1	1	0
P_{34}	14	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1
z_j-c_j	152		-1		0	-8			-3	-9		-11	

2.7 Problema Dual

$$\text{Max} \sum_{i=1}^{m} a_i R_i + \sum_{j=1}^{n} b_j k_j \qquad \text{s.a} \qquad (2.21)$$

$$R_i + k_j \leq c_{ij}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$R_i, k_j \quad \text{livres}$$

O dual do problema de transporte é constituído de m n restrições e m+n variáveis.

Se x_{ij} e (R_i, k_j) são soluções ótimas para o problema de transporte e para o dual do problema, respectivamente, então, segundo o Teorema das folgas complementares, são satisfeitas as condições

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m) \; ;$$

$$(j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$c_{ij} - R_i - k_j \geq 0$$
$$x_{ij}\,(c_{ij} - R_i - k_j) = 0 \qquad (2.22)$$

Sendo x_{ij} uma variável básica então $x_{ij} > 0$ e de (2.22) ter-se-á:

$$C_{ij} - R_i - k_j = 0 \qquad (2.23)$$

Então: $R_i + k_j = c_{ij}$ para os índices (i, j) relativos às variáveis básicas.

Pelo método da soma-linha-coluna de Dantzig, os seguintes resultados são estabelecidos:

i) $R_i + k_j = c^B_{ij}$ para cada cela básica da tábua associada ao problema.

ii) $R_i + k_j = Z_{ij}$ para toda cela não básica (2.24)

As m+n-1 equações do sistema (2.23) podem ser facilmente resolvidas estabelecendo-se $R_i = 0$ para uma cela básica (i, j).

O cálculo de $z_{ij} - c_{ij}$ torna-se mais simples, do que o realizado anteriormente, quando foi aplicado o método de "Stepping-Stone", e será dado por:

$$Z_{ij} - c_{ij} = R_i + k_j - c_{ij} \qquad (2.25)$$

Para a solução ótima do último exemplo, serão calculados os valores de $z_{ij} - c_{ij}$, dados no quadro abaixo, com os respectivos valores de R_i $(i = 1, 2, \ldots , m)$ e k_j, $(j = 1, 2, \ldots , n)$.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	1 / 11	6 / -1	3 / 9	5 / 0	$R_1=0$
O_2	7 / -8	3 / 2	1 / 8	6 / -3	$R_2=-2$
O_3	9 / -9	4 / 11	5 / -3	4 / 14	$R_3=-1$
	$K_1=1$	$K_2=5$	$K_3=3$	$K_4=5$	

Para as celas básicas:

$R_1 + K_1 = C_{11}$	$R_1 + K_1 = 1$	$R_1 = 0$	$K_1 = 1$
$R_1 + K_3 = C_{13}$	$R_1 + K_3 = 3$	$R_2 = -2$	$K_2 = 5$
$R_2 + K_2 = C_{22}$	$R_2 + K_2 = 3$	$R_3 = -1$	$K_3 = 3$
$R_2 + K_3 = C_{23}$	$R_2 + K_3 = 1$		$K_4 = 5$
$R_3 + K_2 = C_{32}$	$R_3 + K_2 = 4$		
$R_3 + K_4 = C_{34}$	$R_3 + K_4 = 4$		

Logo $(R^T, K^T) = (0, -2, -1, 1, 5, 3, 5)$

$$Z_{12} - C_{12} = R_1 + K_2 - C_{12} = 0 + 5 - 6 = -1$$

$$Z_{14} - C_{14} = R_1 + K_4 - C_{14} = 0 + 5 - 5 = 0$$

$$Z_{21} - C_{21} = R_2 + K_1 - C_{21} = -2 + 1 - 7 = -8$$

$$Z_{24} - C_{24} = R_2 + K_4 - C_{24} = -2 + 5 - 6 = -3$$

$$Z_{31} - C_{31} = R_3 + K_1 - C_{31} = -1 + 1 - 9 = -9$$

$$Z_{33} - C_{33} = R_3 + K_3 - C_{33} = -1 + 3 - 5 = -3$$

Para as celas bāsicas $Z_{ij} - C_{ij} = 0$

CAPÍTULO 3

TÉCNICA DE POLY-ω

A técnica de Poly-ω foi desenvolvida por Charnes e Cooper [7] a fim de se poder gerar uma linha completa da matriz inversa da base de um problema de programação linear, sem calculá-la, previamente. Visto que em muitos problemas a base não é quadrada, e portanto, não possui inversa, a geração de uma linha da matriz inversa generalizada, à esquerda ou à direita, facilita muito a resolução dos mesmos.

A técnica recebeu o nome de "Poly-ω" devido a necessidade de se gerar um vetor, semelhante a w (vetor das variáveis do problema dual), para se obter a r-ésima linha requerida e também por permitir a determinação de várias linhas.

Seja um problema de programação linear escrito na forma standard.

Minimizar cx

s.a

$$Ax = P_0 \tag{3.1}$$

$$x \geq 0$$

onde $A = (P_1, P_2, \ldots , P_n)$

Seja B uma base para o problema, não necessariamente, quadrada. Existe uma única matriz Y tal que:

$$A = B\ Y \tag{3.2}$$

onde a r-ésima linha de Y é dada por $(y_{r1}, y_{r2}, \dots , y_{rn})$

Seja $w^{(r)}$ uma solução de:

$$w^{(r)^T} B = e_r^T \tag{3.3}$$

e_r - vetor unitário tendo 1 na r-ésima componente.

De (3.2) e (3.3) tem-se:

$$w^{(r)^T} A = w^{(r)^T} B\ Y = e_r^T\ Y = (y_{r1}, y_{r2}, \dots , y_{rn}) \tag{3.4}$$

$(y_{r1}, y_{r2}, \dots , y_{rn})$ é a r-ésima linha de Y, matriz das representações dos vetores P_j, $j = 1, 2, \dots , n$ em relação à base B.

O processo pode ser utilizado para o cálculo de qualquer linha de Y e, se a matriz A for extendida a fim de conter os elementos de C, como no método simplex modificado, os elementos da linha $z_j - c_j$ podem ser determinados.

O nº r da linha a ser gerada, está associado à r-ésima variável básica, ou r-ésimo vetor da base B. As componentes da linha r, correspondem à expressão da r-ésima variável básica em termos das variáveis não básicas.

Exemplo:

Considere o problema de transporte abaixo, com 2 origens e 4 destinos.

$$
\begin{array}{lllllllllllllllll}
\text{Minimize} & 3x_{11} & + & x_{12} & + & 5x_{13} & + & 2x_{14} & + & x_{21} & + & 2x_{22} & + & 4x_{23} & + & 3x_{24} & \\
\text{s.a} & x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & + & x_{14} & & & & & & & & & = 15 \\
& & & & & & & & & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & + & x_{24} & = 10 \\
& x_{11} & & & & & & & + & x_{21} & & & & & & & = 5 \\
& & & x_{12} & & & & & & & + & x_{22} & & & & & = 8 \\
& & & & & x_{13} & & & & & & & + & x_{23} & & & = 7 \\
& & & & & & & x_{14} & & & & & & & + & x_{24} & = 5
\end{array}
$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i = 1, 2 \qquad j = 1, 2, \ldots, 4$$

O quadro abaixo mostra a solução inicial para o problema, a qual foi obtida pelo método dual, tendo sido os fluxos alterados

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	3 / -5 / $\boxed{1}$	1 / 8 / $\boxed{0}$	5 / 7 / $\boxed{0}$	2 / 5 / $\boxed{0}$	15
O_2	1 / 10 / $\boxed{0}$	2	4	3	10
	5	8	7	5	

(3.5)

Segundo, o método dual, x_{11} é a variável a deixar a base pois $x_{11} < 0$. Esta variável x_{11} é usada para designar a r-ésima linha a ser gerada.

Ao quadro (3.5) associa-se um vetor e_r^T, colocado no canto inferior esquerdo das celas básicas. Os elementos de e_r^T, serão considerados como pseudos custos unitários referentes às celas básicas. Em correspondência aos pseudos-custos, um conjunto de pseudo-avaliadores duais, componentes do vetor $w^{(r)'}$, pode ser calculado.

Os números colocados no canto superior das celas do quadro serão os custos reais unitários para o problema de transporte.

$$\text{Seja} \quad w^{(r)'} = (R_1^{(r)}, R_2^{(r)}, \ldots, R_m^{(r)}, K_1^{(r)}, K_2^{(r)}, \ldots, K_n^{(r)}) \tag{3.6}$$

Para o exemplo: $w^{(r)'} = (R_1^{(r)}, R_2^{(r)}, K_1^{(r)}, K_2^{(r)}, K_3^{(r)}, K_4^{(r)})$

O vetor e_r^T corresponderá às componentes da r-ésima linha, associadas aos vetores básicos. Tendo-se e_r^T, basta calcular as componentes restantes, y_{rj}, associadas aos vetores não básicos, para que a linha r, seja gerada, integralmente. As componentes y_{rj} serão determinadas por:

$$y_{rj} = R_i^{(r)} + K_j^{(r)} \quad , \quad \forall\ (i,\ j) \quad \text{não básica} \tag{3.7}$$

Considerando-se o quadro (3.5) tem-se, por (3.3)

$$w^{(1)^T}\ B = e_1^T \tag{3.8}$$

onde $e_1 = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$, pois x_{11} é a variável a deixar a base e, como é a primeira componente básica, o nº r da linha a ser gerada é 1.

$$B = \{P_{11},\ P_{12},\ P_{13},\ P_{14},\ P_{21}\}$$

Desenvolvendo (3.8):

$$(R_1^{(1)}, R_2^{(1)},\ K_1^{(1)},\ K_2^{(1)},\ K_3^{(1)},\ K_4^{(1)}) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = (1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

$$R_1^{(1)} + K_1^{(1)} = 1$$

$$R_1^{(1)} + K_2^{(1)} = 0$$

$$R_1^{(1)} + K_3^{(1)} = 0$$

$$R_1^{(1)} + K_4^{(1)} = 0$$

$$R_2^{(1)} + K_1^{(1)} = 0$$

Fazendo-se $R_1 = 0$ tem-se:

$$R_1^{(1)} = 0 \qquad R_2^{(1)} = -1$$

$$K_1^{(1)} = 1 \qquad K_2^{(1)} = 0 \qquad K_3^{(1)} = 0 \qquad K_4^{(1)} = 0$$

$$w^{(1)^T} = (0,\ -1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0)$$

	$K_1^{(1)} = 1$	$K_2^{(1)} = 0$	$K_3^{(1)} = 0$	$K_4^{(1)} = 0$
$R_1^{(1)} = 0$	-5 / $\boxed{1}$	8 / $\boxed{0}$	7 / $\boxed{0}$	5 / $\boxed{0}$
$R_2^{(1)} = -1$	10 / $\boxed{0}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$	$\boxed{-1}$

Calculando-se y_{rj} por (3.7)

$$y_{r2} = R_2^{(r)} + K_2^{(r)} = -1 + 0 = -1$$

$$y_{r3} = R_2^{(r)} + K_3^{(r)} = -1 + 0 = -1$$

$$y_{r4} = R_2^{(r)} + K_4^{(r)} = -1 + 0 = -1$$

Os valores de y_{rj} serão colocados no canto inferior esquerdo das celas não básicas envolvidas por dupla linha pontilhada.

A r-ésima linha procurada, no caso, a 1ª linha, de Y é então: (1, 0, 0, 0, 0, -1, -1, -1).

3.1 <u>Determinação do vetor a entrar na base</u>

De acordo com o método dual, determina-se o índice K do vetor a entrar na base por:

$$\left| \frac{z_{ik} - c_{ik}}{y_{rk}} \right| = \min_{j/y_{rj}} \left| \frac{z_{ij} - c_{ij}}{y_{rj}} \right| \quad y_{rj} < 0 \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

O cálculo de $z_{ij} - c_{ij}$ será feito após o cálculo dos avaliadores duais R_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ e K_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ pois, $z_{ij} = R_i + K_j$, para as variáveis não básicas e $z_{ij} - c_{ij} = R_i + K_j - C_{ij}$. Sabendo-se que $R_i + K_j = C_{ij}$ para as celas básicas, obtém-se:

	$K_1 = 3$	$K_2 = 1$	$K_3 = 5$	$K_4 = 2$
$R_1 = 0$	3 -5 1	1 8 0	5 7 0	2 5 0
$R_2 = 0$	1 10 0	2 -3 -1	4 -1 -1	3 -3 -1

$$Z_{22} - C_{22} = R_2 + K_2 - C_{22} = -3$$

$$Z_{23} - C_{23} = R_2 + K_3 - C_{23} = -1$$

$$Z_{24} - C_{24} = R_2 + K_4 - C_{24} = -3$$

$$\text{Min} \left| \frac{z_{ij} - c_{ij}}{y_{rj}} \right| = \text{Min}\left\{ \left|\frac{-3}{-1}\right| , \left|\frac{-1}{-1}\right| , \left|\frac{-3}{-1}\right| \right\} = \left| \frac{1}{1} \right| = 1$$

Portanto P_{23} é o vetor a entrar na base e atualizando B:

$$B = \{P_{12}, P_{13}, P_{14}, P_{21}, P_{23}\}$$

A solução ótima será assegurada por:

$x^*_{12} = 8$ $\quad x^*_{13} = 2$ $\quad x^*_{14} = 5$ $\quad x^*_{21} = 5$ $\quad x^*_{23} = 5$

CAPÍTULO 4

O PROBLEMA DE TRANSPORTE COM RESTRIÇÕES ADICIONAIS

4.1 Formulação Matemática

Minimize $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} \, x_{ij}$ s.a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m \; ; \; a_i \geq 0)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n \; ; \; b_j \geq 0) \tag{4.1}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n).$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}^{r} \, x_{ij} \geq d_r \quad (r = 1, 2, \ldots, q) \, , \tag{4.2}$$

$$f_{ij}^{r} < = > 0$$

Para desenvolvimento do algorítmo assume-se, do problema de transporte puro que

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$$

As restrições (4.1) se referem ao problema de transporte puro.

Em (4.2) tem-se as restrições extras ou adicionais, que juntamente com (4.1) formam o conjunto de restrições para o problema de transporte restrito.

Na construção das restrições (4.2) procurou-se a forma mais geral, podendo portanto também considerar-se os sinais ($\leq$) ou ($=$).

<u>Forma Standard</u> [1]

Minimize $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{r=1}^{q} 0 \, s_r$ s.a

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m \; ; \; a_i \geq 0)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n \; ; \; b_j \geq 0)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n) \; . \tag{4.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f_{ij}^{r}\, x_{ij} - s_r = d_r \quad (r = 1, 2, \ldots, q)$$

$$s_r \geq 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, q)$$

(4.4)

Matriz A associada ao problema

$$A = \begin{bmatrix} 1_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_n & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ I_n & I_n & I_n & \cdots & I_n & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ f_{1n}^{1} & f_{2n}^{1} & f_{3n}^{1} & \cdots & f_{mn}^{1} & -s_1 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_{1n}^{q} & f_{2n}^{q} & f_{3n}^{q} & & f_{mn}^{q} & 0 & & -s_q & 0 & a_q \end{bmatrix}$$

(4.5)

$$A = \left[(m + n + q) \times (mn + i \ , \quad i \leq 2q) \right]$$

onde:

$1_n = (1, 1, \ldots, 1)$ vetor linha com n componentes

I_n - matriz unitária de ordem n

$f^r_{in} = (f^r_{i1}, f^r_{i2}, \ldots, f^r_{in})$ $i = 1, 2, \ldots, m$ - vetor linha com n componentes

$-s_1, -s_2, \ldots, -s_q$ - variáveis de folga

$a_1, a_2, \ldots, a_q$ - variáveis artificiais

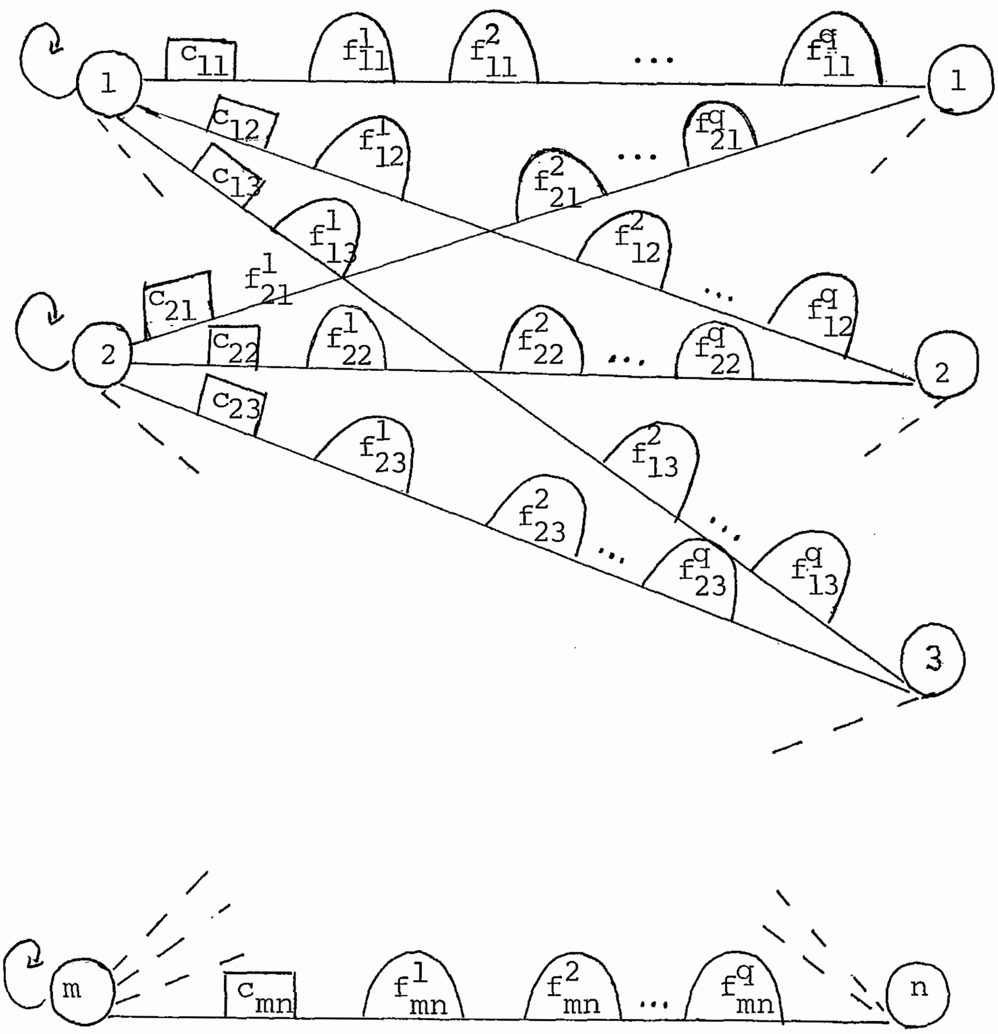
A matriz A pode ainda ser escrita como:

$$A = \left[\hat{P}_{11}, \hat{P}_{12}, \ldots, \hat{P}_{1n}, \hat{P}_{21}, \hat{P}_{22}, \ldots, \hat{P}_{2n}, \ldots, \hat{P}_{m1}, \hat{P}_{m2}, \ldots, \right.$$
$$, \ldots, \hat{P}_{mn}, \hat{P}_{s1}, \ldots, \hat{P}_{s1}, \ldots, \hat{P}_{sr}, \hat{P}_{a1}, \ldots,$$
$$\left. , \ldots, \hat{P}_{ar}\right]$$

Cada vetor coluna de A é um vetor com m + n + q componentes.

4.2 Grafo G associado ao problema

Ao problema de transporte restrito associa-se um grafo bipartido cujos arcos possuem "flags" correspondendo aos coeficientes das restrições adicionais. A cada vetor $\hat{P}_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, m \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n)$ de A há em correspondência um arco (i, j) de G. Se os vetores $\hat{P}_{ij}$ de A tiverem mais de duas entradas não nulas, isto é, um ou mais coeficientes referentes às restrições extras, não nulos, haverá, respectivamente, um ou mais "flags" nos arcos (i, j) de G. Os arcos correspondentes aos vetores de folga $\hat{P}_{s1}$, $\hat{P}_{s2}$, ... , $\hat{P}_{sr}$ ou artificiais $\hat{P}_{a1}$, $\hat{P}_{a2}$, ... , $\hat{P}_{ar}$ são colocados arbitrariamente nos nós origem.



(4.6)

$\boxed{c_{ij}}$ - custo unitário (i = 1, 2, ... , m ; j = 1, 2, ... , n)

f_{ij}^{r} - "flags" associados aos arcos (i, j) (i = 1, 2, ... , m);
j = 1, 2, ... , n)

4.3 Base para o problema de Transporte Restrito

Uma sub-matriz de A composta de $m + n + q - 1$ vetores colunas linearmente independentes constituirá uma base para o problema de transporte restrito e será chamada de B. Esta sub-matriz é obtida, inicialmente, a partir da base do problema de transporte puro, a qual já é previamente conhecida. Sabe-se que esta base é formada por $m + n - 1$ vetores colunas linearmente independentes. Estes vetores, quando retirados da matriz A, terão mais q componentes, referentes aos coeficientes das restrições extras. Adicionando-se a este conjunto de m+n-1 vetores q vetores de folga ou artificiais, uma vez que as q restrições adicionais (4.4) envolvem vetores de folga ou artificiais), tem-se $m + n + q - 1$ vetores linearmente independentes que constituirão a base para o problema de transporte restrito, cujo rank será $m + n + q - 1$.

Inversamente; considerando-se os vetores que formam a base B, e deles retirando-se as q componentes relativas às restrições adicionais, tem-se $m + n + q - 1$ vetores colunas reduzidos, com $m + n$ componentes, dos quais somente $m + n - 1$ vetores linearmente independentes, visto que os q vetores artificiais ou de folga de B, quando reduzidos, tornam-se nulos. A matriz $[(m+n) \times (m+n-1)]$ composta dos $m + n - 1$ vetores linearmente independentes terá rank $= m + n - 1$ e será a base para o problema de transporte puro, cuja notação é B_T.

A notação matricial da base B será:

$$B = \begin{bmatrix} B_T & B_A \\ F_T & F_A \end{bmatrix} \tag{4.7}$$

onde:

B_T $[(m+n) \times (m+n-1)]$ - base para o problema de transporte puro.

F_T $[q \times (m+n-1)]$ - matriz de "flags", associada a B_T

B_A $[(m+n) \times q]$ - matriz dos arcos adicionais reduzidos

F_A $[q \times q]$ - matriz de "flags" associada a B_A.

A matriz B poderá também ser escrita como:

$$B = [\hat{B}_T, \hat{B}_A] \text{ onde } \hat{B}_T = \begin{bmatrix} B_T \\ F_T \end{bmatrix} \text{ e } \hat{B}_A = \begin{bmatrix} B_A \\ F_A \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

$\hat{B}_T$ $[(m+n+q) \times (m+n-1)]$

$\hat{B}_A$ $[(m+n+q) \times q]$

Esta partição da base corresponde ao esquema geral de partição proposta por Charnes e Cooper [7] no método de reversão dupla.

Aos $m + n - 1$ vetores colunas de B que formam a matriz $\hat{B}_T$ associa-se um grafo parcial de G cujos arcos pos suem "flags". Este grafo parcial denomina-se árvore geradora com arcos "flagged". Os vetores colunas de B que formam a matriz $\hat{B}_A$ são vistos, simplesmente, como arcos adicionais à árvore geradora $\hat{B}_T$. Adicionando-se um vetor de $\hat{B}_A$ à árvore geradora $\hat{B}_T$, cria-se um ciclo e. se forem adicionados q vetores de $\hat{B}_A$, cria-se-ão q ciclos fechados diferentes em $\hat{B}_T$. Portanto a base B para o problema de transporte restrito pode ser vista como um grafo conexo tendo pelo menos q ciclos fechados.

De acordo com o que foi visto anteriormente uma base viável inicial para o problema de transporte restrito pode ser formada a partir de uma base viável ou ótima para o problema de transporte puro a qual adiciona-se q vetores de folga ou artificiais.

Exemplo:

Seja o problema de transporte (2x3) com duas restrições adicionais.

$$\text{Min} \quad 1x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 3x_{21} + 5x_{22} + 2x_{23} + 0s_1 + 0s_2 + Ma_1 + Ma_2$$

$$\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} &= 10 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} &= 8 \\
x_{11} + x_{21} &= 6 \\
x_{12} + x_{22} &= 7 \\
x_{13} + x_{23} &= 5 \\
x_{12} + x_{13} - s_1 + a_1 &= 4 \\
x_{11} + x_{23} - s_2 + a_2 &= 6
\end{aligned}$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, 2 \ ; \ j = 1, 2, 3) \qquad s_r \geq 0 \quad a_r \geq 0 \quad r = 1,2 \tag{4.9}$$

Matriz A associada ao problema

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccc} \hat{P}_{11} & \hat{P}_{12} & \hat{P}_{13} & \hat{P}_{21} & \hat{P}_{22} & \hat{P}_{23} & \hat{P}_{s1} & \hat{P}_{s2} & \hat{P}_{a1} & \hat{P}_{a2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Base inicial para o problema de transporte restrito: $B = \{\hat{P}_{11}\ \hat{P}_{12}\ \hat{P}_{22}\ \hat{P}_{23}\ \hat{P}_{a1}\ \hat{P}_{a2}\}$ sendo:

$B = \{P_{11}, P_{12}, P_{22}, P_{23}\}$ base ótima para o problema de transporte puro.

Usando-se a partição da base (4.7) tem-se:

$$B = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

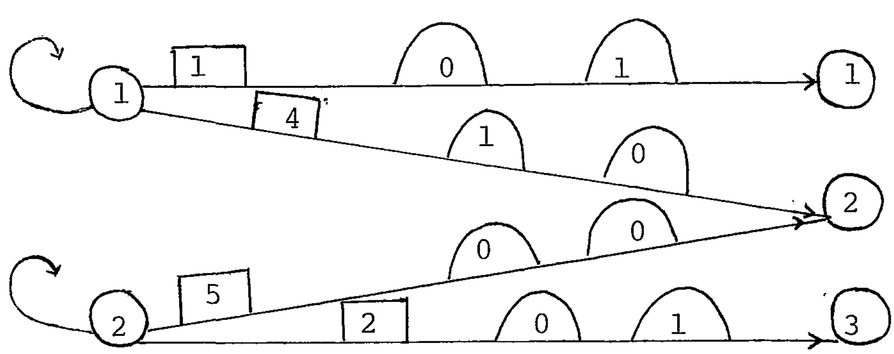
$$B_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad B_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$F_T = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad F_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e, por (4.8):

$$\hat{B}_T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \hat{B}_A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Grafo associado a B



Os vetores de $\hat{B}_A$ formam 2 ciclos fechados na árvore geradora $\hat{B}_T$ e foram associados arbitrariamente aos nós origem.

4.4 O Problema Dual

A formulação do problema dual é a seguinte:

Maximize:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i R_i + \sum_{j=1}^{n} b_j K_j + \sum_{r=1}^{q} d_r \delta_r \qquad \text{s.a}$$

$$R_i + K_j + \sum_{r=1}^{q} f_{ij}^{r} \delta_r \leq c_{ij} \qquad (i=1,2,\ldots,m;j=1,2,\ldots,n) \quad (r=1,2,\ldots,q) \tag{4.10}$$

$$\delta_r \geq 0 \qquad (r=1,2,\ldots,q)$$

R_i e K_j são livres $(i=1,2,\ldots,m \; ; \; j=1,2,\ldots,n)$

Um sistema de equações relativo às restrições (4.10) pode ser desenvolvido, aplicando-se o teorema das folgas complementares às restrições duais. Estas tomam a forma de igualdade, quando associadas às variáveis básicas do problema primal. Portanto, pode-se escrever utilizando a partição da base (4.7):

$$(R^T,\ K^T,\ \delta^T) \begin{bmatrix} B_T & B_A \\ F_T & F_A \end{bmatrix} = (C_T^T,\ C_A^T) \tag{4.11}$$

onde: C_T - vetor custo associado aos arcos básicos

C_A - vetor custo associado aos arcos extras

R, K, δ - avaliadores duais.

4.5 Cálculo dos avaliadores duais R, K e δ

Desenvolvendo (4.11) tem-se:

$$(R^T, K^T)B_T + \delta^T F_T = C_T^T \qquad (4.12)$$

$$(R^T, K^T)B_A + \delta^T F_A = C_A^T \qquad (4.13)$$

Os valores de R e K serão facilmente determinados por (4.12) após ter-se calculado o valor de δ.

Sabendo-se que δ está associado às restrições adicionais do problema primal e, que cada arco de $\hat{B}_A$, quando adicionado a $\hat{B}_T$, forma um ciclo, o valor de δ pode ser calculado utilizando as q condições impostas por cada arco adicional de $\hat{B}_A$ à árvore geradora $\hat{B}_T$.

Quando um ciclo é criado em $\hat{B}_T$ através de um arco de folga ou artificial, o valor da componente δ_r de δ será $\delta_r = 0$ ou $\delta_r = M$ $(M > > 0)$, respectivamente.

Se $\hat{B}_A$ for constituida de vetores de folga ou artificiais tem-se $B_A = 0$ e por (4.13)

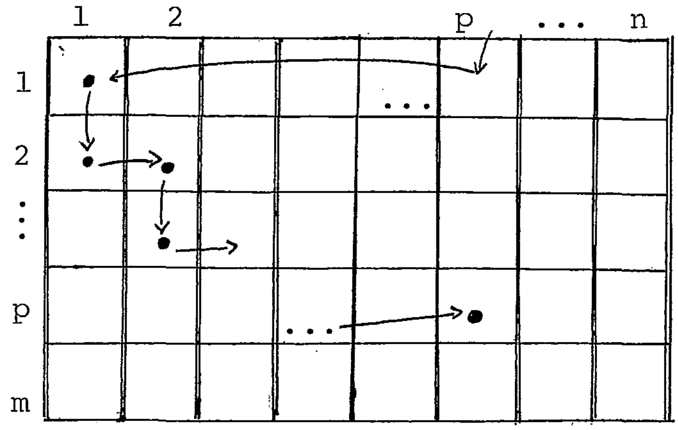
$$\delta^T F_A = C_A^T$$

F_A → matriz diagonal cujos elementos são -1 e/ou 1, respectivamente.

C_A^T → vetor custo cujos elementos serão 0 ou M, respectivamente aos vetores de folga ou artificiais e portanto os valores das componentes δ_r, de δ, serão $\delta_r = 0$ ou $\delta_r = M$ se os q vetores de $\hat{B}_A$ forem de folga ou artificiais. Se $\hat{B}_A$ contiver somente um vetor de folga ou artificial, o valor da componente de δ relativa a esse vetor será $\delta_r = 0$ ou $\delta_r = M$.

Quando um ciclo é criado em $\hat{B}_T$ por um arco de $\hat{B}_A$, sem ser de folga ou artificial, isto é, por um vetor de B_A que pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores básicos de B_T; o valor de δ_r será encontrado resolvendo o sistema de equações duais associadas aos arcos de $\hat{B}_T$ que entram na combinação linear, juntamente com a equação relativa ao arco de $\hat{B}_A$ que cria o ciclo em $\hat{B}_T$.

Seja, por exemplo, um arco (1, p) de $\hat{B}_A$ que cria um ciclo em $\hat{B}_T$, denotado pelos arcos {(1, 1), (2,1), (2,2), (3,2), ... , (p, p), (1, p)}. Neste caso o vetor P_{1p} pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores P_{11}, P_{21}, P_{22}, P_{32}, ... , P_{pp}; de acordo com o que mostra a tábua abaixo.



Sistema dual associado aos arcos do ciclo.

$$
\begin{array}{llll}
R_1 & + K_1 & + f_{11}^{1}\delta_1 + f_{11}^{2}\delta_2 + \dots + f_{11}^{q}\delta_q = c_{11} \\
\quad R_2 & + K_1 & + f_{21}^{1}\delta_1 + f_{21}^{2}\delta_2 + \dots + f_{21}^{q}\delta_q = c_{12} \\
\quad\ddots & \quad\ddots & \\
\qquad R_p & \qquad + K_p & + f_{pp}^{1}\delta_1 + f_{pp}^{2}\delta_2 + \dots + f_{pp}^{q}\delta_q = c_{pp} \\
R_1 & \qquad + K_p & + f_{1p}^{1}\delta_1 + f_{1p}^{2}\delta_2 + \dots + f_{1p}^{q}\delta_q = c_{1p}
\end{array}
$$

Os valores de δ que satisfazem ao sistema (4.14) satisfarão também a uma combinação linear de (4.14).

Multiplicando-se, alternadamente, por (-1) e (+1) as equações acima e somando-se as mesmas, obtém-se:

$$\begin{array}{llll}
R_1 & -K_1 & -f^1_{11}\delta_1 - f^2_{11}\delta_2 - \ldots - f^q_{11}\delta_q = & -c_{11} \\
R_2 & +K_1 & +f^1_{21}\delta_1 + f^2_{21}\delta_2 + \ldots + f^q_{21}\delta_q = & c_{12} \\
-R_2 & -K_2 & -f^1_{22}\delta_1 - f^2_{22}\delta_2 - \ldots - f^q_{22}\delta_q = & -c_{22} \\
\ddots & \ddots & & \\
-R_p & -K_p & -f^1_{pp}\delta_1 - f^2_{pp}\delta_2 - \ldots - f^q_{pp}\delta_q = & -c_{pp} \\
R_1 & +K_p & +f^1_{1p}\delta_1 + f^2_{1p}\delta_2 + \ldots + f^q_{1p}\delta_q = & c_{1p}
\end{array}$$

$$(f^1_{21} + f^1_{32} + \ldots + f^1_{1p})\delta_1 + \ldots + (f^q_{21} + f^q_{32} + \ldots + f^q_{1p})\delta_q - (f^1_{11} +$$

$$+ f^1_{22} + \ldots + f^1_{pp})\delta_1 - \ldots - (f^q_{11} + f^q_{22} + \ldots + f^q_{pp})\delta_q = c_{21} + \ldots +$$

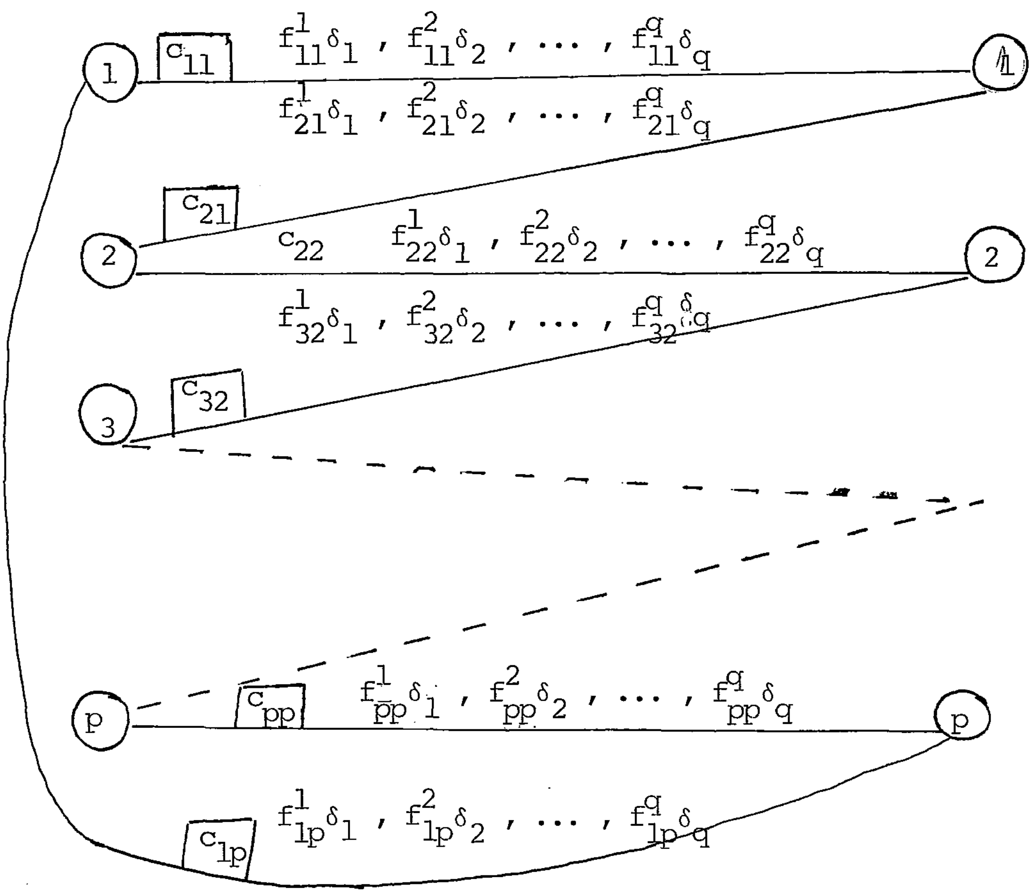
$$+ c_{1p} - (c_{11} + c_{22} + \ldots + c_{pp})$$

Este resultado pode ser escrito como:

$$\sum_{r=1}^{q} \left(\sum_{i=2}^{p} f^r_{ii-1} + f^r_{1p} - \sum_{i=1}^{p} f^r_{ii} \right) \delta_r = \sum_{i=2}^{p} c_{ii-1} + c_{1p} - \sum_{i=1}^{p} c_{ii}$$

Generalizando, por (4.15) temos que uma solução viável para o sistema de equações duais, associada a um ciclo, deve satisfazer a uma combinação linear destas equações duais.

O grafo correspondente ao ciclo (4.14) será:



De acordo com o que foi visto acima, cada ciclo em $\hat{B}_T$ determina uma equação que deve ser satisfeita pelos avaliadores duais δ_r, $r = 1, 2, \ldots, q$. Portanto os q ciclos em $\hat{B}_T$ determinam q equações com q variáveis $(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_q)$. A matriz dos coeficientes destas q equações será chamada de Q.

Cada equação em Q é determinada por uma combinação linear das equações (4.12) e (4.13) onde exatamente uma equação em (4.13) é multiplicada por um coeficiente diferente de zero e portanto esta equação de 4.13 pode ser substituida por essa combinação linear, de todas as linhas sem alterar a solução do sistema. Repetindo-se o mesmo processo para as q equações de (4.13) tem-se um sistema equivalente a (4.12) e (4.13)

$$(R^T, K^T)B_T + 0 = C_T^T - \delta^T F_T \tag{4.14}$$

$$0 + \delta^T Q = C_Q^T \tag{4.15}$$

onde C_Q^T é um vetor custo com q componentes associado às equações dos ciclos.

Determinando-se o valor de δ por (4.15) e substituindo o valor encontrado em (4.14) determina-se os valores de R e K, explorando a triangularidade da árvore geradora B_T. Tendo-se os valores de R, K e δ, calcula-se os valores de $Z_{ij} - C_{ij}$ onde $Z_{ij} = R_i + K_j + \sum_{r=1}^{q} f_{ij}^r \delta_r$ $(i = 1, 2, \ldots, m;$ $j = 1, 2, \ldots, n)$ e $r = 1, 2, \ldots, q$

4.6 Propriedades da matriz Q [1]

i) Q é não singular

Cada linha de Q é uma combinação linear não nula das linhas da matriz de coeficientes do sistema dual, que por sua vez, são linearmente independentes, pois são formadas pela transposta da base primal. Portanto as linhas de Q formam um conjunto linearmente independente. Sendo Q não singular existe Q^{-1} tal que $Q \cdot Q^{-1} = I$.

ii) Q^{-1} é uma sub-matriz da matriz inversa generalizada da base (à esquerda), denotada por $B^{\#}$, e ocupa as q últimas componentes das q últimas linhas de $B^{\#}$.

Usando a técnica de Poly-ω de Charnes e

Cooper [7] pode-se determinar uma linha completa de $B^{\#}$ (matriz inversa generalizada, à esquerda de B).

Seja (m+n) o índice da linha a ser gerada. Tem-se então:

$$(R^T,\ K^T,\ \delta^T) \begin{bmatrix} B_T & B_A \\ & \\ F_T & F_A \end{bmatrix} = e^T_{m+n} \qquad (4.16)$$

onde e_{m+n} é um vetor unitário com m+n+q-1 componentes, tendo 1 na (m+n)-ésima componente. A (m+n)-ésima linha de B é a primeira das q últimas linhas de B, visto que B possui m+n+q-1 linhas e (m+n+q) colunas.

Expandindo (4.16) tem-se:

$$(R^T,\ K^T) B_T + \delta^T F_T = 0 \qquad (4.17)$$

$$(R^T,\ K^T) B_A + \delta^T F_A = e^T_1 \qquad (4.18)$$

onde e_1 é um vetor unitário com q componentes tendo 1 na primeira componente.

Por (4.14) e (4.15) tem-se um sistema equivalente a (4.17) e (4.18) tendo Q como sub-sistema. No caso C_T é um vetor nulo e C_Q é um vetor unitário.

$$(R^T,\ K^T)B_T = -\delta^T F_T \tag{4.19}$$

$$\delta^T Q = e_1^T \tag{4.20}$$

De (4.20) tem-se $\delta^T = e_1^T Q^{-1}$, o que significa que δ^T compreende a 1ª linha de Q^{-1} e as q últimas entradas da (m+n)-ésima linha de $B^{\#}$. As restantes (m+n) ésimas componentes da (m+n)-ésima linha de B poderão ser calculadas substituindo-se o valor de δ em (4.19). Repetindo-se o processo para os vetores unitários $e_{m+n+1}, \ldots, e_{m+n+q-1}$, mostra-se que Q^{-1} ocupa as últimas q componentes das últimas q linhas de $B^{\#}$ e portanto é uma sub-matriz de $B^{\#}$.

iii) Se $\hat{B}_A$ for constituida de vetores de folga ou artificiais a matriz Q será uma matriz diagonal com -1 e/ou +1 na diagonal principal.

Sendo os elementos de $\hat{B}_A$ vetores de folga ou artificiais então $B_A = 0$ e F_A será uma matriz diagonal com -1 e/ou +1 na diagonal principal.

De (4.13) tem-se:

$$(R^T,\ K^T)B_A + \delta^T F_A = C_A^T \qquad \text{Fazendo} \quad B_A = 0$$

$$0 + \delta^T F_A = C_A^T$$

que é equivalente a (4.15) sendo $F_A = Q$ e $C_A^T = C_Q^T$.

Portanto Q é uma matriz diagonal com -1 e/ou +1 na diagonal principal

iv) Se Q é uma matriz diagonal (qxq) com +1 e/ou -1 na diagonal principal então $Q^{-1} = Q$.

De acordo com a estrutura de Q tem-se $Q.Q=I$. Sendo Q não singular, existe Q^{-1} tal que:

$$Q = IQ = (Q^{-1}Q)Q = Q^{-1}(QQ) = Q^{-1}I = Q^{-1}$$

$$\text{Logo} \quad Q = Q^{-1}$$

4.7 <u>Representação de um arco (s, t)</u>

Dentre as partes que se fazem necessárias conhecer da tábua simplex, associada ao problema de transporte restrito, está a representação Y do arco de entrada (s, t) em relação aos vetores básicos. Este arco será determinado através do critério de entrada do método simplex, isto é,

$$Z_{st} = \max(Z_{ij} - c_{ij}, Z_{sr} - C_{sr}) \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, m \ ; \\ j = 1, 2, \ldots, n \ ; \\ r = 1, 2, \ldots, q. \end{array}$$

De acordo com a partição da base B em (4.8) o vetor coluna de A, $\hat{P}_{st}$, correspondente ao arco (s, t), pode ser particionado em P_{st}, que é a parte de $\hat{P}_{st}$ relativa ao problema de transporte puro, e portanto, composta de suas m+n primeiras componentes e em F_{st}, parte de $\hat{P}_{st}$ relativa às restrições adicionais e, composta das q últimas componentes de $\hat{P}_{st}$. Do mesmo modo, Y, representação de $\hat{P}_{st}$ em relação aos vetores básicos, será particionado em Y_T e Y_A.

Sabendo-se que todo vetor de A pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores básicos, tem-se:

$$BY = \hat{P}_{st} \tag{4.21}$$

Usando a partição da base (4.7), em (4.21),

$$\begin{bmatrix} B_T & B_A \\ F_T & F_A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_T \\ Y_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{ST} \\ F_{ST} \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

O valor de Y poderia ser calculado por (4.21) e seria dado por $Y = B^{\#} \hat{P}_{st}$ (4.23)

O cálculo de Y, porém, fica mais simples, quando, em lugar de se calcular $B^{\#}$, o que é computacionalmente muito caro, usa-se uma sub-matriz de $B^{\#}$, notada por $B_L^{\#}$, que é composta das q últimas linhas de B e que contém Q^{-1} como sub-matriz.

Visto que Y_A denota as q últimas componentes de Y, pode-se escrever:

$$Y_A = B_L^{\#} \hat{P}_{st} \tag{4.24}$$

Esquema:

$$\underset{q}{\left\{\overset{1}{\boxed{}}\right.} = q \left[\underbrace{}_{m+n} \Big| \underbrace{Q^{-1}}_{q}\right] \begin{bmatrix} P_{sT} \\ \hdashline F_{sT} \end{bmatrix} \begin{matrix} \} \, m+n \\ \} \, q \end{matrix}$$

Não sendo $\hat{P}_{st}$ um vetor de folga ou artificial, o vetor reduzido P_{st} conterá apenas duas entradas não nulas, s e m+t, e, ao multiplicar-se as (m+n) primeiras entradas das q linhas de $B_L^{\#}$ por P_{st} verifica-se que somente a s-ésima e a (m+t)-ésima colunas de $B_L^{\#}$ precisam ser conhecidas para o cálculo de Y_A. Estas colunas serão determinadas usando a técnica de Poly-w, onde, nas q linhas geradas determinar-se-ão somente o s-ésimo e o (m+t)ésimo elementos.

Às duas entradas não nulas de P_{st} há em correspondência os pseudo-avaliadores duais R_s e K_t, associados ao apropriado pseudo-vetor δ em Q^{-1}. Assumindo-se que o sistema em (4.19) tem um grau de liberdade, ter-se-á cada valor de $R_s = 0$ na s-ésima coluna de $B_L^{\#}$, bastando calcular as q entradas na (m+t)-ésima coluna de $B_L^{\#}$, isto é, os valores de K_t.

Os valores de K_t serão gerados usando (4.16), num total de q iterações. Os vetores unitários serão respectivamente e_{m+n}, e_{m+n+1} ..., $e_{m+n+q-1}$. Em cada etapa o valor de R_s será zero.

Conhecendo-se os q valores de K_t, que constituem o vetor $\bar{K}_t$(qxl), e a matriz Q^{-1}, Y_A pode ser escrito como:

$$Y_A = \overline{K}_t + Q^{-1}F_{st} \tag{4.25}$$

No cálculo acima assume-se que $\hat{P}_{st}$ não é um vetor de folga ou artificial, pois, se o for, o vetor reduzido P_{st} será um vetor nulo e neste caso, $\overline{K}_t$ não precisa ser determinado e Y_A será:

$$Y_A = Q^{-1}F_{st} \tag{4.26}$$

Expandindo (4.22) tem-se:

$$B_T Y_T = P_{st} - B_A Y_A \tag{4.27}$$

$$F_T Y_T = F_{st} - F_A Y_A \tag{4.28}$$

As equações (4.27) e (4.28) terão única solução, em virtude de $\hat{P}_{st}$ ter uma única representação em relação à base B, e deste modo, Y_T poderá ser calculado usando somente a equação (4.27).

Sendo B_T, base para o problema de transporte puro, sua inversa (à esquerda) será notada por $B_T^{\#}$. De (4.27) vem:

$$Y_T = B_T^{\#} P_{st} - B_T^{\#} B_A Y_A \tag{4.29}$$

$$Y_T = Y_{st} - \sum_{k=1}^{q} Y_{ak} Y_k \tag{4.30}$$

Y_{st} - representação de P_{st} em relação à base B_T

Y_K - representação do k-ésimo vetor coluna de B_A em relação à base B_T $K = 1, 2, \ldots, q$.

Y_{ak} - K-ésima componente de Y_A.

Os vetores Y_{st} e Y_k podem ser calculados por (4.29), entretanto o cálculo das representações de P_{st} e dos q vetores de B_A torna-se mais rápido utilizando o método de "Stepping-Stone". Em particular, para determinar Y_{st} basta encontrar um caminho único na árvore geradora B_T, do nó origem s, ao nó destino t. Esta representação será única. O que foi feito para Y_{st}, será realizado para os q vetores de B_A. Portanto, para o cálculo de Y_T por 4.30 basta determinar q+1 caminhos únicos. Note que se B_A for constituida de vetores de folga ou artificiais, as representações de Y_k destes vetores serão nulas.

4.8 Implementação da mudança de base

Para efetuar-se a mudança da base B através do processo usual de programação linear, necessitar-se-á do valor atualizado de P_0 e da representação Y, do arco de entrada (s, t).

O vetor P_0 é obtido, inicialmente, dos algorítmos de iniciação para o problema de transporte puro e o seu valor, atualizado, através de pivoteamento em cada iteração.

Além de P_0, é imprescindível conhecer os valores atualizados de Q^{-1} e δ, em cada iteração; pois verifica-se, de acordo com o que foi abordado anteriormente, que Q^{-1} e δ desempenham um papel fundamental para o desenvolvimento do algorítmo.

Tendo-se a representação Y de um vetor de entrada $\hat{P}_{st}$ e a representação atualizada de P_0, determina-se o vetor que sairá da base, de acordo com o critério de saída do método simplex, isto é:

$$\frac{A_{r0}}{Y_{rk}} = \min \{\frac{A_{i0}}{Y_{ik}} , Y_{ik} > 0 \ ; \ i = 1, 2, \ldots , m+n+q-1\}$$

onde r é o nº da linha pivô.

Conhecendo-se o nº $\underline{r}$ da linha pivô, torna-se necessário calcular somente suas q últimas componentes, que serão chamadas de δ_Q; importante para a atualização de Q^{-1}, pois Q^{-1} ocupa as q últimas entradas das q últimas linhas de $B^{\#}$.

Se $r = m+n+i$, $i = 1, 2, \ldots , q-1$, então δ_Q será a i-ésima linha de Q^{-1} cujo valor é conhecido.

Se $r \neq m+n+i$, $i = 1, 2, \ldots , q-1$, a r-ésima linha de $B^{\#}$ pode ser determinada através da técnica de poly-ω. O cálculo de δ_Q, porém, se torna mais simplificado, usando as informações geradas para a representação do vetor de entrada $\hat{P}_{st}$.

Por (4.23) vem $\quad Y = B^{\#}\ \hat{P}_{st}$

Esquema:

$$\begin{bmatrix} Y_T \\ \hdashline Y_A \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} & \\ \hdashline D & Q^{-1} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} P_{sT} \\ \hdashline F_{sT} \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

D - sub-matriz de $B_L^{\#}$ formada pelas m+n primeiros vetores coluna de $B_L^{\#}$.

Por (4.29) tem-se $Y_T = B_T^{\#}\, P_{st} - B_T^{\#}\, B_A Y_A$ onde

Sabe-se por (4.24) que $Y_A = B_L^{\#}\, \hat{P}_{st}$. Utilizando (4.31) vem:

$$Y_A = D \,.\, P_{st} + Q^{-1} F_{st} \tag{4.32}$$

Substituindo-se (4.32) em $Y_T = B_T^{\#}\, P_{st} - B_T^{\#}\, B_A Y_A$

$$Y_T = B_T^{\#}\, P_{st} - B_T^{\#}\, B_A (D\, P_{st} + Q^{-1} F_{st})$$

$$Y_T = B_T^{\#}\, P_{st} - B_T^{\#}\, B_A\, D\, P_{st} - B_T^{\#}\, B_A Q^{-1} F_{st}$$

$$Y_T = (B_T^{\#} - B_T^{\#}\, B_A\, D)\, P_{st} + (-B_T^{\#}\, B_A Q^{-1}) F_{st}$$

Portanto $B^{\#}$ pode ser particionada em:

$$B^{\#} = \left[\begin{array}{c:c} B_T^{\#} - B_T^{\#} B_A D & -B_T^{\#} B_A Q^{-1} \\ \hdashline D & Q^{-1} \end{array}\right]$$

Sabe-se por (4.30) que $B_T^{\#} B_A = \left[Y_k\right]$ $K = 1, 2, \ldots , q$. Substituindo-se em $-B_T^{\#} B_A Q^{-1}$ tem-se:

$$- \left[Y_k\right] Q^{-1}.$$

Seja $\bar{Y}^T(r)$ o vetor formado pelas r-ésimas componentes das q representações de cada um dos vetores de B_A em relação a B_T. Sabendo-se que δ_Q é o vetor formado pelas q últimas componentes da linha pivô r tem-se:

$$\delta_Q = - \bar{Y}^T(r) Q^{-1} \qquad (4.33)$$

Antes de se realizar a mudança de base, é importante verificar, se a partição da base B, dada por (4.7) é mantida, isto é, se o vetor que entra em $\hat{B}_T$ não destrói a estrutura da árvore geradora $\hat{B}_T$. Portanto, dado um arco de entrada (s, t), três casos podem ocorrer:

i) O vetor que entra, $\hat{P}_{st}$, substitui um vetor em $\hat{B}_A$, não alterando a base $\hat{B}_T$. Neste caso o pivoteamento pode ser realizado imediatamente.

ii) O vetor que entra, $\hat{P}_{st}$, substitui um vetor em $\hat{B}_T$, mas não destrói a estrutura da árvore geradora $\hat{B}_T$, isto é, não forma ciclo. Neste caso, o pivoteamento pode ser realizado imediatamente.

iii) O vetor que entra, $\hat{P}_{st}$, substitui um vetor em $\hat{B}_T$ e destrói a estrutura da árvore geradora, pois, forma um ciclo em $\hat{B}_T$. Neste caso, antes do pivoteamento tem-se que efetuar uma troca entre o vetor $\hat{P}_r$, que deixa a base, por um vetor $\hat{P}_x$ de B_A. Deste modo o vetor $\hat{P}_{st}$ entrará em $\hat{B}_A$, mantendo a estrutura da árvore geradora $\hat{B}_T$.

Examinando-se a representação Y_{st} de um vetor de entrada P_{st}, pode-se constatar se $\hat{P}_{st}$ cria ou não um ciclo na árvore geradora $\hat{B}_T$. Se a r-ésima componente de Y_{st} for diferente de zero, o vetor $\hat{P}_{st}$ não cria um ciclo em $\hat{B}_T$, pois P_r, que deixa a base, está no caminho único de P_{st}, do nó origem s ao nó destino t. O vetor $\hat{P}_{st}$ criará um ciclo, se o vetor P_r não for usado na representação de P_{st}, isto é, se a r-ésima componente de Y_{st} for nula.

Quando o ciclo é formado, existe um arco $\hat{P}_x$ em $\hat{B}_A$ que substituirá $\hat{P}_r$. O vetor $\hat{P}_x$ de $\hat{B}_A$, cuja r-ésima componente de sua representação Y_x for diferente de zero, será o vetor escolhido para ser trocado por $\hat{P}_r$; mantendo desta maneira, a estrutura da árvore geradora $\hat{B}_T$. De fato, o vetor $\hat{P}_{st}$ substituirá um vetor $\hat{P}_r$ em $\hat{B}_T$, se o elemento pivô estiver nas m+n-1 primeiras componentes da representação Y. Denotando-se o elemento pivô por $Y_T(r)$, ter-se-á, $Y_T(r) \neq 0$, ou seja, por

(4.30):

$$Y_{st}(r) + \sum_{k=1}^{q} y_{ak} Y_k(r) \neq 0 \qquad (4.34)$$

Visto que P_r não se encontra no caminho único de P_{st}, então $Y_{st}(r) = 0$. Isto implica na existência de pelo menos um vetor $\hat{P}_x$ em B_A cuja representação, Y_x, possui a r-ésima componente não nula, ou seja, $Y_x(r) \neq 0$, sendo $Y_{ax} \neq 0$.

<u>Passos a seguir quando se faz necessária a troca de vetores</u>

i) Encontre um vetor $\hat{P}_x$ em B_A tal que $Y_x(r) \neq 0$. Mude as posições básicas de $\hat{P}_x$ e $\hat{P}_r$.

ii) Troque a linha em Q^{-1} associada com $\hat{P}_x$ com δ_Q e reordene P_0 e a representação Y, de $\hat{P}_{st}$. Uma vez feita a mudança, pode-se dar início ao pivoteamento.

4.9 <u>Algorítmo geral</u>

<u>Passo 1</u> - Obtenha uma solução inicial viável para o problema de transporte puro. Selecione da matriz de coeficientes do problema de transporte restrito os vetores básicos e adicione q vetores de folga ou artificiais. Determine os fluxos nos arcos básicos.

<u>Passo 2</u> - Particione a base em uma árvore geradora $\hat{B}_T$ e uma matriz $\hat{B}_A$ constituida de q vetores de folga ou artifi-

ciais. Inicialize o vetor $\delta(1xq)$ fazendo $\delta_i = 0$ ou $\delta_i = M$ se a i-ésima coluna de $\hat{B}_A$ é um vetor de folga ou artificial, respectivamente. Forme Q, matriz diagonal (qxq) tendo o i-ésimo elemento diagonal igual a -1 ou +1, se o i-ésimo vetor coluna de $\hat{B}_A$ é um vetor de folga ou artificial, respectivamente. Faça $Q^{-1} = Q$.

Passo 3 - Determine os valores dos avaliadores duais (R, K), explorando a triangularidade da árvore geradora $\hat{B}_T$ usando $(R^T, K^T)B_T = C_T^T - \delta^T F_T$. Encontre $Z_{ij} - C_{ij}$ para $(i = 1, 2, \ldots, m \; ; \; j = 1, 2, \ldots, n)$. Faça $Z_{sr} - c_{sr} = -\delta - M$ e $Z_{Ar} - C_{ar} = \delta - M$ se os vetores forem de folga ou artificiais. Se os preços básicos forem ótimos vá para 13, de outro modo encontre o vetor que entra P_{st} sendo $Z_{st} - C_{st} = \min (Z_{ij} - C_{ij}, Z_{sr} - C_{sr})$ e vá para 4 .

Passo 4 - Use $(R^T, K^T, \delta^T)B = e_{m+n+i}$, $i = 1, 2, \ldots, q-1$ para gerar $\bar{K}_t$, as q últimas componentes do vetor coluna na tábua, que corresponde ao avaliador dual K_t.

Passo 5 - Use a expressão (4.25) para gerar Y_A, as últimas q componentes da representação de $\hat{P}_{st}$.

Passo 6 - Use (4.30) para gerar as primeiras m+n-1 componentes de Y, representação de $\hat{P}_{st}$.

Passo 7 - Tendo P_0 e Y use o usual critério de saída de progra mação linear para determinar o vetor que deixa a base.

Passo 8 - Use a expressão (4.33) se necessário, para gerar as q entradas da linha pivô r, $r \neq m + n - i$, $i=1,2,\ldots,q-1$.

Passo 9 - Se $\hat{P}_{st}$ entra em $\hat{B}_A$, vá para 12, caso contrário vá para 10.

Passo 10 - Determine se $\hat{P}_{st}$ cria um ciclo em $\hat{B}_T$. Se criar vá para 11, caso contrário vá para 12.

Passo 11 - Implemente uma troca de vetor para manter a partição da base como uma árvore geradora, mais q vetores adicionais.

Passo 12 - Dados Y e δ_Q ache os valores atualizados de Q^{-1}, δ e P_0 através de pivoteamento. Vá para 3 .

Passo 13 - Se todas as variáveis artificiais estiverem fora da base, a solução é ótima, de outro modo o problema é inviável. Em qualquer caso PARE.

4.10 Exemplo numérico

Considere o problema de transporte com duas restrições adicionais, (3x4) abaixo.

Minimize $x_{11} + 6x_{12} + 3x_{13} + 5x_{14} + 7x_{21} + 3x_{22} + 1x_{23} + 6x_{24} +$
$+ 9x_{31} + 4x_{32} + 5x_{33} + 4x_{34} + 0s_1 + 0s_2 + MA_1 + MA_2$

s.a

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 20 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 10 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 25 \\
x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 11 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 13 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 17 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 14 \\
x_{12} + x_{14} + x_{24} - s_1 + a_1 &= 6 \\
x_{21} + x_{31} + x_{33} - s_2 + a_2 &= 18
\end{aligned}
$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad s_1,\ s_2,\ a_1,\ a_2 \geq 0$$

Por conveniência os coeficientes não nulos das restrições adicionais são coeficientes unitários.

<u>1ª iteração</u>

1) Obtenção da solução viável para o problema de transporte puro pelo processo de custos mínimos de linhas.

	D_1	D_2	D_3	D_4	
0_1	1 / 11	6	3 / 9	5	20
0_2	7	3 / 2	1 / 8	6	10
0_3	9	4 / 11	5	4 / 14	25
	11	13	17	14	

$B_T = \{P_{11}, P_{13}, P_{22}, P_{23}, P_{32}, P_{34}\}$.

Adicionando-se os vetores artificiais $\hat{P}_{a1}$ e $\hat{P}_{a2}$ tem-se

$B = \{\hat{P}_{11}, \hat{P}_{13}, \hat{P}_{22}, \hat{P}_{23}, \hat{P}_{32}, \hat{P}_{34}, \hat{P}_{a1}, \hat{P}_{a2}\}$

Fluxos básicos associados:

$x_{11} = 11 \quad x_{13} = 9 \quad x_{22} = 2 \quad x_{23} = 8 \quad x_{32} = 11 \quad x_{34} = 14$

$x_{A1} = 6 \quad x_{A2} = 18$

$P_0 = (11, 9, 2, 8, 11, 14, 6, 18)$

2)

$$\left[\begin{array}{cccccc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\delta^T = (M,\ M) \qquad Q^{-1} = Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3) Usando $(R^T,\ K^T)B_T = C_T^T - \delta^T F_T$

F_T - matriz nula, para essa iteração

$$(R^T,\ K^T)B_T = C_T^T$$

$R_1 + K_1 = 1$	$R_2 + K_3 = 1$	$R_1 = 0$	$K_1 = 1$
$R_1 + K_3 = 3$	$R_3 + K_3 = 4$	$R_2 = -2$	$K_2 = 5$
$R_2 + K_2 = 3$	$R_3 + K_4 = 4$	$R_3 = -1$	$K_3 = 3$
			$K_4 = 5$

$$(R^T,\ K^T) = (0,\ -2,\ -1,\ 1,\ 5,\ 3,\ 5)$$

$$R_i + K_j + f_{ij}^r \delta_r = C_{ij}$$

$Z_{ij} - C_{ij} = (0,\ -1 + M,\ 0,\ M,\ M-8,\ 0,\ 0,\ M-3,\ M-9,\ 0,\ M-3,\ 0,$

$M,\ -M,\ 0,\ 0)$

vetor que entra é $\hat{P}_{14}$.

4) Cálculo de $\bar{K}_4$ utilizando

$$(R^T,\ K^T) B_T = -\delta^T F_T$$

$$\delta^T = \ell_1\ Q^{-1} = (1,0)$$

$$(R^T,\ K^T) B_T = -\ (1,0) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(R^T,\ K^T) B_T = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$$

$$R_1 + K_1 = 0 \qquad R_2 + K_3 = 0$$

$$R_1 + K_3 = 0 \qquad R_3 + K_2 = 0$$

$$R_2 + K_2 = 0 \qquad R_3 + K_4 = 0$$

Fazendo $R_1 = 0$, pois P_{14} é o vetor que entra

$$K_4 = 0$$

Repetindo o processo para:

$$(R^T,\ K^T)B_T = -\delta^T F_T$$

tem-se $K_4 = 0$

$$\delta^T = \ell_2 Q^{-1} = (0,1)$$

Logo $\bar{K}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

5) Cálculo de Y_A

$$Y_A = \bar{K}_t + Q^{-1}F_{14}$$

$$Y_A = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

6) Cálculo de Y_{st}

$$P_{14} = P_{13} - P_{23} + P_{22} - P_{32} + P_{34}$$

$$B_T = \{P_{11},\ P_{13},\ P_{22},\ P_{23},\ P_{32},\ P_{34}\}$$

$$Y_{14} = (0,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1)$$

$Y_k = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$ para $K = 1,\ 2$, pois são artificiais.

$$Y_T = Y_{st} - \sum_{k=1}^{q} Y_{ak}\ Y_k$$

$$Y_T^T = (0,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1)$$

$$Y = \begin{bmatrix} Y_T \\ \\ Y_A \end{bmatrix} \qquad Y^T = (0,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 0)$$

7) $$P_0^T = \begin{array}{cccccccc} P_{11} & P_{13} & P_{22} & P_{23} & P_{32} & P_{34} & P_{a1} & P_{a2} \\ (11, & 9, & 2, & 8, & 11, & 14, & 6, & 18) \end{array}$$

$$Y^T = (0,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 0)$$

$$\min \left\{\frac{9}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{14}{1},\ \frac{6}{1}\right\} = \frac{2}{1}$$

$\hat{P}_{22}$ é o vetor que sairá da base.

$\hat{P}_{14}$ não cria ciclo, pois P_{22} está no caminho único, isto é, a 3ª componente de Y_{14} é não nula.

8) Como todos os vetores de B_A são nulos

$$\delta_Q^T = -\ \bar{Y}^T(r)Q^{-1} = -\ (0,\ 0)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (0,\ 0)$$

$$\delta_Q^T = (0,\ 0)$$

Pivoteando tem-se:

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \delta = (M, M)$$

$$P_0^T = (11, 7, 2, 10, 13, 4, 18)$$

$$B = \{\hat{P}_{11}, \hat{P}_{13}, \hat{P}_{14}, \hat{P}_{23}, \hat{P}_{32}, \hat{P}_{a1}, \hat{P}_{a2}\}$$

<u>2ª iteração</u>:

1) $(R^T, K^T) = (0, -2, M-1, 1, 5-M, 3, 5-M)$

$$Z_{ij} - C_{ij} = (0, -1, 0, 0, -8+M, -M, 0, -3, 2M-9, 0, 2M-3,$$
$$0, -M, -M, 0, 0)$$

Vetor que entra é $\hat{P}_{33}$.

Cálculo de $\overline{K}_3$

$$F^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\delta^T = (1, 0) \text{ e } (0, 1)$$

$(R^T, K^T) = \delta^T F_T$ Fazendo $R_3 = 0$ obtém-se $\overline{K}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$Y_A = \overline{K}_3 + Q^{-1} F_{33} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Y_{33}^T = (0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1)$$

$$Y_T^T = (0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1)$$

$$Y^T = (0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1)$$

Sendo $P_0^T = (11,\ 7,\ 2,\ 10,\ 13,\ 12,\ 4,\ 18)$

$$Y^T = (0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1)$$

$$\min \left\{\frac{7}{1},\ \frac{12}{1},\ \frac{4}{1},\ \frac{18}{1}\right\} = \frac{4}{1}$$

$\hat{P}_{a1}$ é o vetor que sai da base

A nova base será $\{\hat{P}_{11},\ \hat{P}_{13},\ \hat{P}_{14},\ \hat{P}_{23},\ \hat{P}_{32},\ \hat{P}_{34},\ \hat{P}_{33},\ \hat{P}_{a2}\}$

Pivoteando tem-se:

$$P_0^T = (11,\ 3,\ 6,\ 10,\ 13,\ 8,\ 4,\ 14)$$

$$\delta_Q = (1,\ 0)$$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta^T = (3-M,\ M)$$

P_{33} é um vetor de B_A que forma um ciclo em B_T

$$C_{33} - C_{34} + C_{14} - C_{13} = 5 - 4 + 5 - 3 = 3$$

$$\delta^T = (3,\ M) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = (3-M,\ M)$$

<u>3ª iteração</u>:

$(R^T,\ K^T) = (0,\ -2,\ 2-M,\ 1,\ 2+M,\ 3,\ 2+M)$

$$Z_{ij} - C_{ij} = (0,\ -1,\ 0,\ 0,\ M-8,\ M-3,\ 0,\ -3,\ -6,\ 0,\ 0,\ 0,\ M-3,\ -M,\ 3-2M,\ 0)$$

Vetor que entra é $\hat{P}_{22}$

<u>Cálculo de $\overline{K}_2$</u> $\qquad \overline{K}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$Y_A = \overline{K}_2 + Q^{-1}F_{22} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Y_{22}^T = (0,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1)$$

$$Y_T^T = (0,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1) + (0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1) = (0,0,\ 0,\ 1,\ 1)$$

$$Y^T = (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ -1,\ 1)$$

$$P_0^T = (11,\ 3,\ 6,\ 10,\ 13,\ 8,\ 4,\ 14)$$

$$Y^T = (0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 0,\ -1,\ 1)$$

$$\text{Min}\ \{\frac{10}{1},\ \frac{13}{1},\ \frac{14}{1}\} = \frac{10}{1}$$

Vetor que sai é $\hat{P}_{23}$

A nova base será $\{\hat{P}_{11},\ \hat{P}_{13},\ \hat{P}_{14},\ \hat{P}_{22},\ \hat{P}_{32},\ \hat{P}_{34},\ \hat{P}_{33},\ \hat{P}_{a2}\}$

$$\delta_Q = (0,\ 0)$$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta^T = (3-M,\ M)$$

$$P_0^T = (11,\ 3,\ 6,\ 10,\ 3,\ 8,\ 14,\ 4)$$

<u>$4^{\underline{a}}$ iteração</u>:

$$(R^T,\ K^T) = (0,\ 1-M,\ 2-M,\ 1,\ 2+M,\ 3,\ 2+M)$$

$$Z_{ij} - C_{ij} = (0,\ -1,\ 0,\ 0,\ -5,\ 0,\ 3\text{-}M,\ 3\text{-}M,\ -6,\ 0,\ 0,\ 0,\ M\text{-}3,$$
$$-M,\ 3\text{-}2M,\ 0)$$

Vetor que entra na base é $\hat{P}_{s1}$

$$Y_A = Q^{-1}F_{st} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Representação de $\hat{P}_{s1}$

$$Y_T^T = Y_{ST} - \sum_{k=1}^{q} Y_{ak}Y_k = (0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1)$$

$$Y^T = (0,\ 1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ -1,\ 1)$$

$$P_0^T = (11,\ 3,\ 6,\ 10,\ 3,\ 8,\ 14,\ 4)$$

$$\text{Min } \{\frac{3}{1}\ ,\ \frac{8}{1}\ ,\ \frac{4}{1}\} = \frac{3}{1}$$

O vetor que sai é $\hat{P}_{13}$

$\hat{P}_{S1}$ criará um ciclo em $\hat{B}_T$

Trocando-se as posições básicas de $\hat{P}_{13}$ e $\hat{P}_{33}$ tem-se:

$$B = (\hat{P}_{11},\ \hat{P}_{33},\ \hat{P}_{14},\ \hat{P}_{22},\ \hat{P}_{32},\ \hat{P}_{34},\ \hat{P}_{13},\ \hat{P}_{a2})$$

Reordenando P_0 tem-se:

$$P_0^T = (11,\ 14,\ 6,\ 10,\ 3,\ 8,\ 3,\ 4)$$

$$Y^T = (0,\ -1,\ -1,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1)$$

$\hat{P}_{S1}$ entrará no lugar de $\hat{P}_{13}$.

Nova base $(\hat{P}_{11},\ \hat{P}_{33},\ \hat{P}_{14},\ \hat{P}_{22},\ \hat{P}_{32},\ \hat{P}_{34},\ \hat{P}_{s1},\ \hat{P}_{a2})$

Pivoteando $P_0^T = (11,\ 17,\ 9,\ 10,\ 3,\ 5,\ 3,\ 1)$

$$\delta_Q^T = (-1,0) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = (-1,0)$$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\delta^T = (0,\ M)$$

<u>5ª iteração</u>:

$(R^T,\ K^T) = (0,\ -2,\ -1,\ 1,\ 5,\ 6-M,\ 5)$

$$Z_{ij} - C_{ij} = (0,\ -1,\ 3-M,\ 0,\ M-8,\ 0,\ 3-M,\ -3,\ M-9,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -M,\ -M,\ 0)$$

Vetor que entra é $\hat{P}_{21}$.

Cálculo de $\bar{K}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$Y_A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Y^T = (1,\ 0,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1)$$

$$P_0^T = (11,\ 17,\ 9,\ 10,\ 3,\ 5,\ 3,\ 1)$$

Vetor que sai é $\min \{\frac{11}{1}, \frac{10}{1}, \frac{5}{1}, \frac{1}{1}\}$ é $\hat{P}_{a2}$

Nova base $\{\hat{P}_{11}, \hat{P}_{33}, \hat{P}_{14}, \hat{P}_{22}, \hat{P}_{32}, \hat{P}_{34}, \hat{P}_{s1}, \hat{P}_{21}\}$

Pivoteando P_0, tem-se: $P_0^T = (10,\ 17,\ 10,\ 9,\ 4,\ 4,\ 1)$

$$\delta_Q^T = (0,\ 1) \qquad\qquad \delta^T = (0,\ 8)$$

$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

6ª iteração:

Tendo em vista que $Z_{ij} - C_{ij} < 0 \qquad \forall_i,\ \forall_j$

A solução é ótima e será dada por:

$$x^*_{11} = 10 \quad x^*_{14} = 10 \quad x^*_{21} = 1 \quad x^*_{22} = 9 \quad x^*_{32} = 4 \quad x^*_{33} = 17$$

$$x^*_{34} = 4 \quad s_1 = 4$$

$$cx^* = 211$$

CAPÍTULO 5

No anexo é apresentado um programa em linguagem FORTRAN, destinado à resolução de problemas de transporte com restrições adicionais e, que foi elaborado, tendo como base o algorítmo desenvolvido por D. Klingman e R. Russel.

O programa em questão é constituido do programa principal e três sub-rotinas. Através da primeira sub-rotina obtém-se a solução ótima para o problema de transporte puro. Utilizando-se a segunda sub-rotina tem-se os valores dos avaliadores duais R_i e $K_j(V_j)$ $(i = 1, 2, \ldots, m ; j=1,2,\ldots,n)$ e do vetor $\overline{K}_T(KF)$. A terceira sub-rotina determina a representação (Y_{st}) de um arco de entrada P_{st} em relação à base do problema de transporte puro B_T.

5.1 Dados de entrada

Os dados de entrada são perfurados em cartões que estão dispostos em cinco grupos.

1º grupo - é constituido de um cartão onde se lê, m, n, q, q_1, q_2 no formato 5I5.

m - nº de origens.

n - nº de destinos.

q - número de restrições adicionais.

q_1 - número de variáveis de folga.

q_2 - número de variáveis artificiais.

2º grupo - é constituido de um cartão onde se lê RT, vetor com q componentes cujos elementos são 1, -1 ou 0. Estes elementos estão associados às restrições adicionais, seguindo o seguinte critério:

1 - se a restrição adicional apresentar o sinal ($\geq$).

-1 - se a restrição adicional apresentar o sinal ($\leq$).

0 - se a restrição adicional apresentar o sinal (=).

Os elementos de RT serão perfurados no formato(q F5.2)

3º grupo - são lidos m cartões, contendo os custos unitários para o problema de transporte puro, que estão dispostos em uma matriz mxn. Os custos são lidos por linha, tendo-se portanto, m cartões, e em cada um deles, n custos a serem lidos no formato (nI7).

4º grupo - são lidos os coeficientes das restrições adicionais, incluindo os coeficientes das variáveis de folga e/ou variáveis artificiais. Tem-se neste caso, para cada restrição, um cartão (ou mais) a ser perfurado no formato (J6 F5.2) onde J6 = m x n + q_1 + q_2.

5º grupo - são lidos m+n+q cartões contendo nos m primeiros a capacidade de produção para cada origem, ou seja,

a_i (i = 1, 2, ... , m); nos n cartões, a seguir, b_j, capacidade de demanda para cada destino e nos q últimos os valores de d_r, r = 1, ... , q. Em cada cartão será lido um valor no formato (F8.2).

5.2 Dados de saída

Os dados de saída incluem os dados de saída para o programa principal e os dados de saída correspondentes à primeira sub-rotina.

5.2.1 Para a primeira sub-rotina há três conjuntos de saída:

i) "shadow-price" para as origens, ou seja, os coeficientes de R_i, i = 1, 2, ... , m.

ii) "shadow-price" para os destinos, ou seja, os coeficientes de K_j, j = 1, 2, ... , n.

iii) solução ótima na sequência das origens.

Há quatro erros detetados pelo programa, que serão impressos quando ocorrerem. Nenhum poderá acontecer. Se um deles ocorrer o "shadow-price" será sem sentido, mas a solução será a melhor que pode ocorrer.

Erro 1 - não há elemento da base na linha que contém elemento de entrada em uma iteração.

Erro 2 - não há base em ciclo.

Erro 3 - o ciclo da base tem mais elementos do que os elementos da base.

Erro 4 - não há elemento no ciclo da base menor que K2.

5.2.2 Dados de saída para o programa principal

Para cada iteração tem-se:

i) IBASE - vetor com $m + n + q - 1$ componentes cujos elementos são os índices dos vetores básicos para o problema de transporte restrito. O duplo índice de cada vetor P_{ij}, básico, foi transformado em um índice único K, através da operação $K = (i-1)n+j$.

ii) R e V(K) - avaliadores duais.

iii) J max - índice do vetor a entrar na base.

iv) $\overline{K}_t$ ou seja VF.

v) Representação Y do vetor que entrará na base.

vi) Vetor P_0, de fluxos básicos.

vii) Vetor CT, de custos básicos.

viii) Q^{-1}, submatriz da inversa generalizada da base.

ix) δ

Quanto à solução final, pode-se ter três saídas.

i) solução ótima e valor do custo total (Zo).

ii) solução inviável - se $Z_k - C_k \leq 0$, $K = 1, 2, \ldots, mxn+q_1$ e ainda houver variáveis artificiais na base.

iii) solução ilimitada - se os elementos de Y forem todos não positivos.

BIBLIOGRAFIA

1. D. Klingman e R. Russel - "Solving Constrained Transportation Problems" Operations Research, vol. 23, nº 1, 91-106 (1975).

2. M. D. Bakes, "Solution of Special Linear Programming Problems with Additional Constrainsts" Opnal. Res. Quart 17, 425-445 (1966).

3. F. Glover, D. Klingman e T. Ross, "Finding Equivalent Transportation Formulations for Constrained Transportation Problems", Naval Res. Logist Quart 21, 247-254.

4. D. Karney e D. Klingman, "Locating Stepping-Stone Paths in Distribution Problems via Predecessor Index method", Transportation Sci. 4, 213-224 (1970).

5. G. Hadley, Linear Programming, Addison-Wesley, Reading, Mass, 1962.

6. Michel Simmonard, Linear Programming, traduzido por S. Jewell, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1966.

7. A. Charnes e W. W. Cooper, Management Models and Industrial Applications of Linear Programming vols. I e II, Wiley, N. York, 1961.

8. A. M. Geoffrion, "Elements of Large - Scale Mathematical Programming", Management Sci., 16, 652-191 (1970).

9. Saul I Gass, Programacion Lineal, traduzido por José Resendo S. Palma, Compañia E. Continental, México, 1972.

10. N. V. Reinfeld e W. R. Vogel, Mathematical Programming, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1958.

11. G. B. Dantzig, Linear Programming and Extensions, Princeton University Press, Princeton, N. J. 1963.

12. C. LEMKE, "The Dual Method of Solving Linear Programming Problems", Naval Res. Logist Quart 11, 177-187 (1964).

13. Charnes, F. Glover e D. Klingman, "The Lower Bounded and Partial Upper Bounded Distribution Model", Naval Res. Logist. Quart. 18, 277-281 (1971).

A N E X O

Programa FORTRAN

```
C      PROGRAMA DESTINADO AO CALCULO DAS SOLUCOES DO PROBLEMA DE
C      TRANSPORTE RESTRITO
FILE   8=CARTOES,UNIT=READER
FILE   5=IMPRESS,UNIT=PRINTER
       DIMENSION A(25,111),IBASE(24),CY(19),DELTA(2),PB(24),C5(19),
      1QUEI(2,2),AUX1(1,2),AUX2(1,2),AUX3(1,6),QUAD1(20,10,2),R(10),
      1V(10),RA(10),Z(110),ZC(110),DELTA1(2),VF(2),AUX4(2,1),YA(2),
      1YST(19),YAUX(19),AUX(2),AUX5(2,1),YT(20),Y1(19),AUX8(2,6),C4(19),
      1C6(2),RT(2),DELTA2(1,2),AUX9(1,2)
       INTEGER B1(10),B2(10),C(10,10),A1(25),C1(100)
       REAL MAT(19,2)
       COMMON IL(10),IC(10),IP,ICO,IRES,M,N,QUAD1
       READ(8,15)M,N,Q,Q1,Q2
 15    FORMAT(5I5)
       READ(8,16)(RT(I),I=1,Q)
 16    FORMAT(2F5.2)
       DO 3 I=1,M
       READ(8,2)(C(I,J),J=1,N)
 2     FORMAT(4I8)
 3     CONTINUE
       DO 6 I=1,M
       DO, 6 J=1,N
       K=(I-1)*N+J
       C1(K)=C(I,J)
 6     CONTINUE
       NL=M+N+Q
       NC=M*N+Q1+Q2+1
       DO 18 I=1,NL
       DO 18 J=1,NC
       A(I,J)=0.
 18    CONTINUE
C      CONSTRUCAO DA MATRIZ A DE COEFICIENTES DAS RESTRICOES REFERENTES
C      AO PROBLEMA DE TRANSPORTE PURO
       DO 19 I=1,M
       K1=(I-1)*N+1
       K2=K1+N-1
       DO 19 J=K1,K2
       A(I,J)=1.
 19    CONTINUE
       J1=M+1
       J2=M+N
       J3=M*N
       J4=NC-Q2
```

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

```
      J5=J4-1
      J6=NC-1
      J7=M*N+01
      DO 20 I=J1,J2
      DO 20 J=1,J3,N
      A(I,J+I-J1)=1
   20 CONTINUE
C     LEITURA DOS COEFICIENTES DAS RESTRICOES ADICIONAIS,INCLUSIVE COE-
C     FICIENTES DAS VARIAVEIS DE FOLGA E VARIAVEIS ARTIFICIAIS
      DO 22 I=1,Q
      READ(8,21)(A(J2+I,J),J=1,J6)
   21 FORMAT(16F4.1)
   22 CONTINUE
      DO 24 J=1,NL
      READ(8,23)A(J,NC)
   23 FORMAT(F8.2)
      ATR=A(J,NC)
      A1(J)=IFIX(ATR)
   24 CONTINUE
      NB=M+N+Q-1
      NT=M+N-1
      DO 241 J=1,M
      B1(J)=0
      B1(J)=B1(J)+A1(J)
  241 CONTINUE
      DO 242 I=1,N
      JL=M+I
      B2(I)=0
      B2(I)=B2(I)+A1(JL)
  242 CONTINUE
C     CALCULO DE IBASE,PO E CT
      CALL TRANSP(M,N,C,B1,B2,IBASE,PO,CT)
      DO 27 J=1,Q
      K=NT+J
      PO(K)=A((J2+J),NC)
   27 CONTINUE
      I1=0
      I2=0
      DO 28 I=1,Q
      IF(RT(I).LT.0)GO TO 272
      I1=I1+1
      K1=J3+Q1+I1
      IBASE(NT+I)=K1
      DELTA2(1,I)=999999.
```

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

```
      DELTA(I)=999999.
      CT(NT+I)=999999.
      DO 271 J=1,Q
      QUEI(J,I)=A(J2+J,K1)
  271 CONTINUE
      IF(RT(I).NE.0) GO TO 28
      I2=I2+1
      GO TO 28
  272 I2=I2+1
      IBASE(NT+I)=J3+I2
      DELTA(I)=0.
      DELTA2(1,I)=0.
      CT(NT+I)=0.
      DO 28 J=1,Q
      QUEI(J,I)=A(J2+J,J3+I2)
   28 CONTINUE
      DO 30 J=1,Q
      DO 29 I=1,NT
      MAT(I,J)=0
   29 CONTINUE
   30 CONTINUE
   31 DO 32 I=1,Q
      AUX1(1,I)=DELTA(I)
   32 CONTINUE
C     CONSTRUCAO DA MATRIZ FT
      DO 33 I=1,Q
      DO 33 J=1,NT
      K=IBASE(J)
      AUX8(I,J)=A(I+J2,K)
   33 CONTINUE
      WRITE(5,331)(IBASE(J),J=1,NB)
  331 FORMAT('1',5X,"IBASE(J)=",8I5)
C     CALCULO DO PRODUTO DE DELTA POR FT
      K1=1
      DO 332 I=1,NT
      AUX3(K1,I)=0
      DO 332 J=1,Q
      AUX3(K1,I)=AUX3(K1,I)+AUX1(K1,J)*AUX8(J,I)
  332 CONTINUE
      DO 34 I=1,NT
      C4(I)=AUX3(1,I)
      C4(I)=CT(I)-C4(I)
   34 CONTINUE
C     CONSTRUCAO DO QUADRO ASSOCIADO AO PROBLEMA DE TRANSPORTE PURO
```

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

```
      DO 35 J=1,M
      DO 35 K=1,N
      QUAD1(J,K,1)=0
      QUAD1(J,K,2)=0
      L=(J-1)*N+K
      I1=0
      DO 35 I=1,NT
      I1=I1+1
      IF(L.NE.IBASE(I)) GO TO 35
      QUAD1(J,K,1)=1
      QUAD1(J,K,2)=C4(I1)
35    CONTINUE
      CALL AVALO(M,N,1,QUAD1,R,V)
      WRITE(5,36)(R(I),I=1,M)
36    FORMAT('0',5X,"R(I)=",3F14.2)
      WRITE(5,37)(V(J),J=1,N)
37    FORMAT('0',5X,"V(J)=",4F14.2)
      DO 43 I=1,J6
      Z(I)=0
43    CONTINUE
C     CALCULO DE ZJ
      K=0
      DO 46 I=1,M
      DO 46 J=1,N
      K=K+1
      DO 44 L=1,G
      Z(K)=Z(K)+A(J2+L,K)*DELTA(L)
44    CONTINUE
      Z(K)=Z(K)+R(I)+V(J)
46    CONTINUE
C     CALCULO DE ZJ-CJ
      DO 48 I=1,J3
      DO 47 I2=1,NB
      K=IBASE(I2)
      IF(I.EQ.K)GO TO 471
47    CONTINUE
      ZC(I)=Z(I)-C1(I)
      GO TO 48
471   ZC(I)=0.
48    CONTINUE
      DO 50 I=1,Q1
      K=I+J3
      ZC(K)=-DELTA(I)
50    CONTINUE
```

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

```
      DO 52 I=1,Q2
      ZC(I+J3+Q1)=DELTA(I)*999999.
   52 CONTINUE
C     DETERMINACAO DO VETOR A ENTRAR NA BASE
      ZCMAX=ZC(1)
      JMAX=1
      DO 54 I=1,J6
      IF(ZCMAX.GE.ZC(I)) GO TO 54
      ZCMAX=ZC(I)
      JMAX=I
   54 CONTINUE
      IF(ZCMAX.EQ.0)GO TO 130
      WRITE(5,541)JMAX
  541 FORMAT('0',5X,"JMAX=",I5)
      KK=JMAX
   55 IF(KK.LE.N) GO TO 56
      KK=KK-N
      GO TO 55
   56 DO 60 K=1,Q
      VF(K)=0
   60 CONTINUE
      DO 68 JJ=1,Q
      DO 61 II=1,Q
      DELTA1(II)=-QUEI(JJ,II)
   61 CONTINUE
      IF(JMAX.GT.J3)GO TO 69
      DO 64 I1=1,Q
      AUX1(1,I1)=DELTA1(I1)
   64 CONTINUE
      K1=1
      DO 65 I2=1,NT
      AUX3(K1,I2)=0
      DO 65 J1=1,Q
      AUX3(K1,I2)=AUX3(K1,I2)+AUX1(K1,J1)*AUX8(J1,I2)
   65 CONTINUE
      L=0
      DO 66 I=1,M
C     CALCULO DE VF
      DO 66 J=1,N
      L=(I-1)*N+J
      I3=0
      DO 66 K=1,NT
      I3=I3+1
      IF(IBASE(K).NE.L)GO TO 66
```

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

```
      QUAD1(I,J,2)=AUX3(1,I3)
 66   CONTINUE
      J9=(JMAX-KK)/N+1
      CALL AVALD(M,N,J9,QUAD1,R,V)
      VF(JJ)=V(KK)
      WRITE(5,67)VF(JJ)
 67   FORMAT('0',5X,"VF(JJ)=",F5.2)
 68   CONTINUE
 69   DO 70 I=1,Q
      AUX4(I,1)=A((J2+I),JMAX)
 70   CONTINUE
      DO 71 K=1,Q
      I=1
      AUX5(K,I)=0
      DO 71 J=1,Q
      AUX5(K,I)=AUX5(K,I)+QUEI(K,J)*AUX4(J,I)
 71   CONTINUE
C     CALCULO DE YA
      DO 72 I=1,Q
      C6(I)=AUX5(I,1)
      YA(I)=VF(I)+C6(I)
 72   CONTINUE
      DO 73 I=1,NT
 73   CONTINUE
      IF(JMAX.GT.J3)GO TO 77
 74   IP=0
      IRES=0
      ICO=KK
      II=(JMAX-KK)/N+1
C     CALCULO DA REPRESENTACAO DE UM VETOR QUE ENTRA NA BASE
      CALL CAMMIN(II,KK,1)
      I=1
      DO 76 J=1,IP
      K=(IL(J)-1)*N+IC(J)
      DO 76 L=1,NT
      IF(IBASE(L).NE.K)GO TO 76
      YST(L)=I
      I=-I
 76   CONTINUE
 77   DO 80 I=1,NT
      YAUX(I)=0
      DO 78 J=1,Q
      YAUX(I)=YAUX(I)+YA(J)*MAT(I,J)
 78   CONTINUE
```

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

```
      YT(I)=YST(I)-YAUX(I)
      Y1(I)=YT(I)
   80 CONTINUE
      DO 82 I=1,Q
      K=NT+I
      YT(K)=YA(I)
   82 CONTINUE
      WRITE(5,83)(YT(I),I=1,NB)
   83 FORMAT('0',5X,"YT(I)=",8F6.2)
C     CALCULO DO VETOR QUE SAI CA BASE
      AMIN=999999
      JMIN=0
      DO 84 I=1,NB
      IF(YT(I).LE.0) GO TO 84
      VA=PO(I)/YT(I)
      IF(VA.GE.AMIN) GO TO 84
      AMIN=VA
      JMIN=I
   84 CONTINUE
      IF(JMIN.EQ.0)GO TO 155
      IF(JMIN.GT.NT)GO TO 100
      DO 86 J=1,Q
      AUX1(1,J)=-MAT(JMIN,J)
   86 CONTINUE
      K=1
      DO 88 I=1,Q
      AUX2(K,I)=0
      DO 88 J=1,Q
      AUX2(K,I)=AUX2(K,I)+AUX1(K,J)*QUEI(J,I)
   88 CONTINUE
      IF(YST(JMIN).NE.0)GO TO 100
      DO 94 JS=1,Q
C     O VETOR QUE ENTRA FORMA UM CICLO EM BT
C     TROCA DAS POSICOES BASICAS DE PO,IBASE,CT,YT
      IF(AUX1(1,JS).EQ.0)GO TO 94
      I=NT+JS
      X=IBASE(I)
      IBASE(I)=IBASE(JMIN)
      IBASE(JMIN)=X
      X=CT(I)
      CT(I)=CT(JMIN)
      CT(JMIN)=X
      X=PO(I)
      PO(I)=PO(JMIN)
```

```
      PO(JMIN)=X
      X=YT(I)
      YT(I)=YT(JMIN)
      YT(JMIN)=X
      DO 90 I1=1,Q
      AUX1(1,I1)=-MAT(JMIN,I1)
      X=AUX1(1,I1)
      AUX1(1,I1)=QUEI(JS,I1)
      QUEI(JS,I1)=X
 90   CONTINUE
      JMIN=NT+JS
 94   CONTINUE
C     ATUALIZACAO DE IBASE
 100  IBASE(JMIN)=JMAX
      CT(JMIN)=C1(JMAX)
      PO(JMIN)=PO(JMIN)/YT(JMIN)
      IF(JMIN.LE.NT)GO TO 104
      J=JMIN-NT
      DO 102 K=1,Q
      AUX2(1,K)=QUEI(J,K)/YT(JMIN)
 102  CONTINUE
C     ATUALIZACAO DE QUEI
      K=JMIN-NT
      DO 101 I=1,Q
      IF(I.EQ.K)GO TO 1010
      DO 101 J=1,Q
      QUEI(I,J)=QUEI(I,J)+AUX2(1,J)*(-YT(NT+I))
      GO TO 101
 1010 DO 101 J1=1,Q
      QUEI(I,J1)=QUEI(I,J1)/YT(JMIN)
 101  CONTINUE
C     O VETOR QUE ENTRA E DE FOLGA.A COMPONENTE DE DELTA ASSOCIADA AO
C     VETOR E NULA
      DO 103 I=1,Q1
      K=J3+I
      IF(JMAX.NE.K)GO TO 103
      J=JMIN-NT
      DELTA(J)=0.
      DELTA2(1,J)=0.
 103  CONTINUE
C     ATUALIZACAO DE  PO
 104  DO 106 J=1,NB
      IF(J.EQ.JMIN)GO TO 105
      PO(J)=PO(J)+PO(JMIN)*(-YT(J))
```

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

```
  106   CONTINUE
        IF(JMIN.GT.NT)GO TO 108
C       ATUALIZACAO DE QUEI
        DO 107 I=1,Q
        DO 107 J=1,Q
        K=NT+I
        QUEI(I,J)=QUEI(I,J)+AUX2(1,J)*(-YT(K))
  107   CONTINUE
C       ATUALIZACAO DA MATRIZ DE REPRESENTACOES DOS VETORES DE BA
  108   DO 119 I1=1,Q
        DO 110 K2=1,NT
        YST(K2)=0.
  110   CONTINUE
        L=NT+I1
        K1=IBASE(L)
        IF(K1.GT.J3)GO TO 116
        KK=K1
  111   IF(KK.LE.N)GO TO 112
        KK=KK-N
        GO TO 111
  112   IP=0
        IRES=0
        ICO=KK
        II=(K1-KK)/N+1
        CALL CAMMIN(II,KK,1)
        I=1
        DO 113 J=1,IP
        K=(IL(J)-1)*N+IC(J)
        DO 113 L1=1,NT
        IF(IBASE(L1).NE.K)GO TO 113
        YST(L1)=I
        I=-I
  113   CONTINUE
        DO 115 JK=1,NT
        MAT(JK,I1)=YST(JK)
  115   CONTINUE
        GO TO 119
  116   DO 118 JL=1,NT
        MAT(JL,I1)=0.
  118   CONTINUE
  119   CONTINUE
        DO 121 JJ=1,Q
        CQ=0.
        DO 120 I2=1,NT
```

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

```
      CQ=CQ+CT(I2)*MAT(I2,JJ)
120   CONTINUE
      K=NT+JJ
      DELTA2(1,JJ)=CT(K)-CQ
121   CONTINUE
      K3=1
      DO 122 I3=1,Q
      AUX9(K3,I3)=0
      DO 122 JJ=1,Q
      AUX9(K3,I3)=AUX9(K3,I3)+DELTA2(K3,JJ)*QUEI(JJ,I3)
122   CONTINUE
      DO 123 I4=1,Q
      DELTA(I4)=AUX9(1,I4)
123   CONTINUE
      WRITE(5,124)(PQ(I),I=1,NB)
124   FORMAT('0',5X,"PQ(I)=",8F10.2)
      WRITE(5,125)(CT(I),I=1,NB)
125   FORMAT('0',5X,"CT(I)=",8F10.2)
      DO 128 I=1,Q
      WRITE(5,127)(QUEI(I,J),J=1,Q)
127   FORMAT('0',5X,"QUEI(I,J)=",2F8.2)
128   CONTINUE
      WRITE(5,129)(DELTA(I),I=1,Q)
129   FORMAT('0',5X,"DELTA(I)=",2F14.2)
      GO TO 31
130   DO 135 L=1,NB
      IF(IBASE(L).GT.J7)GO TO 133
135   CONTINUE
      GO TO 148
133   WRITE(5,132)
132   FORMAT('  INVIAVEL ')
      GO TO 160
148   WRITE(5,149)
149   FORMAT('1','      SOLUCAO OTIMA ')
      DO 1500 L=1,NB
150   WRITE(5,152)IBASE(L),PQ(L)
152   FORMAT(1H,I6,F14.2)
1500  CONTINUE
      WRITE(5,1521)
1521  FORMAT('     ORIGEM    DESTINO    QUANTIDADE    CUSTO UNITARIO')
      DO 154 I=1,NB
      K1=IBASE(I)
      KK=K1
151   IF(KK.LE.N)GO TO 153
```

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

```
      KK=KK-N
      GO TO 151
153   IF(K1.GT.J3)GO TO 159
      II=(K1-KK)/N+1
      WRITE(5,1522)II,KK,PO(I),CT(I)
1522  FORMAT(5X,I5,5X,I5,5X,F8.2,5X,F8.2)
      GO TO 154
159   WRITE(5,1523)KK,PO(I),CT(I)
1523  FORMAT('             S',5X,I5,5X,F8.2,5X,F8.2)
154   CONTINUE
      ZO=0
      DO 157 L=1,NB
      ZO=ZO+CT(L)*PO(L)
157   CONTINUE
      WRITE(5,158)ZO
158   FORMAT('0',5X,"ZO=",F10.2)
      GO TO 160
155   WRITE(5,156)
156   FORMAT('    SOLUCAO ILIMITADA ')
160   CALL EXIT
      END

C     ESTA SUBROTINA DETERMINA AS SOLUCOES DO PROBLEMA DE TRANSPORTE
C     PURO
      SUBROUTINE TRANSP(NORIG,NDEST,ICOST,IORIG,IDEST,IBASE,PO,CT)
      DIMENSION IBAS(10,10),ICOST(10,10),IU(10),IU1(10),IV1(10),
     1IV(10),INET(50),INET1(10),INET2(10),IORIG(10),IDEST(10),
     1IBASE(24),PO(24),CT(19)
      EQUIVALENCE(IU(1),INET(1))
      NR=8
      NP=6
      NPR=5
1121  K1=10**7
      K2=10**8
      NDEST1=NDEST
      NORIG1=NORIG
1171  ISUMO=0
      ISUMD=0
      DO 102 I=1,NORIG
102   ISUMO=ISUMO+IORIG(I)
      DO 103 J=1,NDEST
103   ISUMD=ISUMD+IDEST(J)
1131  IF(ISUMO-ISUMD)1115,1112,1119
1119  NDEST=NDEST+1
```

```
      IDEST(NDEST)=ISUMO-ISUMO
 1101 DO 104 I=1,NORIG
  104 ICOST(I,NDEST)=999999
      GO TO 1112
 1115 NORIG=NORIG+1
 1125 DO 105 I=1,NDEST
  105 ICOST(NORIG,I)=999999
      IORIG(NORIG)=ISUMO-ISUMO
 1112 DO 106 I=1,NORIG
      DO 106 J=1,NDEST
  106 IBAS(I,J)=0
 1122 NCOL=1
      NROW=1
      ISAV=K1
      DO 107 I=1,NORIG
  107 IU(I)=1
      DO 108 J=1,NDEST
  108 IV(J)=1
 1142 IF(ICOST(NROW,NCOL)-ISAV)1152,1143,1143
 1143 NROW=NROW+1
 1133 IF(NROW-NORIG)1142,1142,1163
 1152 IF(IU(NROW)-1)1143,1162,1143
 1162 ISAV=ICOST(NROW,NCOL)
      NROW1=NROW
      GO TO 1143
 1163 IF(IORIG(NROW1)-IDEST(NCOL))1114,1173,1164
 1114 IBAS(NROW1,NCOL)=IORIG(NROW1)+K1
 1124 IDEST(NCOL)=IDEST(NCOL)-IORIG(NROW1)
      IU(NROW1)=0
      NROW=1
      ISAV=K1
      GO TO 1142
 1173 IBAS(NROW1,NCOL)=IORIG(NROW1)+K1
      IU(NROW1)=0
      NROW=1
      ISAV=K1
      IF(NCOL-NDEST)1183,1211,1211
 1183 IF(ICOST(NROW,NCOL)-ISAV)1193,1182,1182
 1193 IF(IU(NROW)-1)1182,1103,1182
 1103 ISAV=ICOST(NROW,NCOL)
      NROW1=NROW
 1182 NROW=NROW+1
      IF(NROW-NORIG)1183,1183,1174
 1174 IBAS(NROW1,NCOL)=K1
```

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

```
      NCOL=NCOL+1
 1184 IF(NCOL-NOEST)1194,1194,1211
 1194 NROW=1
      ISAV=K1
      GO TO 1142
 1164 IBAS(NROW1,NCOL)=IDEST(NCOL)+K1
      IORIG(NROW1)=IORIG(NROW1)-IDEST(NCOL)
 1165 NCCL=NCOL+1
      GO TO 1184
 1211 DO 109 I=1,NORIG
      IU(I)=0
  109 IU1(I)=0
      DO 110 J=1,NOEST
      IV(J)=0
  110 IV1(J)=0
 1221 IU1(1)=1
      NROW=1
      NCOL=1
 1231 IF(IBAS(NROW,NCOL)-K1)1232,1241,1241
 1241 IV(NCOL)=ICOST(NROW,NCOL)-IU(NROW)
      IV1(NCOL)=1
 1232 NCOL=NCOL+1
 1242 IF(NCCL-NDEST)1231,1231,1252
 1252 NROW=NROW+1
 1262 IF(NROW-NORIG)1272,1272,1261
 1272 IF(IU1(NROW)-1)1282,1252,1282
 1282 NCOL=1
 1292 IF(IBAS(NROW,NCOL)-K1)1202,1263,1263
 1202 NCOL=NCOL+1
 1203 IF(NCOL-NDEST)1292,1292,1252
 1263 IF(IV1(NCOL))1273,1202,1273
 1273 IU(NROW)=ICOST(NROW,NCOL)-IV(NCOL)
      IU1(NROW)=1
 1283 NCOL=1
      GO TO 1231
 1261 NROW=1
 1271 IF(IU1(NROW))1281,1282,1281
 1281 NROW=NROW+1
 1291 IF(NROW-NORIG)1271,1271,1213
 1213 ISAV=0
      NROW=1
 1223 NCOL=1
 1233 IF(IBAS(NROW,NCOL)-K1)1234,1243,1243
 1243 NCCL=NCOL+1
```


UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

```
1253 IF(NCOL-NDEST)1233,1233,1254
1254 NROW=NROW+1
1264 IF(NROW-NORIG)1223,1223,1274
1274 IF(ISAV)1311,1511,1311
1234 IS1=IU(NROW)+IV(NCOL)-ICOST(NROW,NCOL)
1244 IF(IS1-ISAV)1243,1243,1245
1245 ISAV=IS1
     NROW1=NROW
     NCOL1=NCOL
     GO TO 1243
1311 K=(NORIG+NDEST)*2
     DO 111 I=1,K
 111 INET(I)=0
     DO 112 I=1,NORIG
112  IORIG(I)=0
     DO 113 I=1,NDEST
113  IDEST(I)=0
     I=1
1321 INET(I)=NROW1
     INET(I+1)=NCOL1
     NROW=NROW1
     NCOL=1
     I=I+2
1331 IF(IBAS(NROW,NCOL)-K1)1332,1341,1341
1341 IF(NCOL-NCOL1)1351,1332,1351
1351 INET(I)=NROW
     INET(I+1)=NCOL
     I=I+2
     GO TO 1313
1332 NCOL=NCOL+1
1322 IF(NCOL-NDEST)1331,1331,1312
1312 I=1
     WRITE(NPR,3)I,NROW1,NCOL1
   3 FORMAT(14H ERROR NUMBER,I4,I6,I6)
     GO TO 1511
1313 IDEST(NCOL)=1
     NROW=1
1323 IF(IBAS(NROW,NCOL)-K1)1333,1324,1324
1333 NROW=NROW+1
1343 IF(NROW-NORIG)1323,1323,1353
1353 I=I-2
1363 IF(I)1315,1315,1373
1373 NROW=INET(I)
     NCOL=INET(I+1)
```

```
      IDEST(NCOL)=0
      GO TO 1375
 1315 I=2
      WRITE(NPR,3)I,NROW1,NCOL1
      GO TO 1511
 1324 IF(NROW-INET(I-2))1334,1333,1334
 1334 IF(IORIG(NROW))1353,1344,1353
 1344 INET(I)=NROW
      INET(I+1)=NCOL
      I=I+2
 1354 IF(NROW-NROW1)1364,1355,1364
 1355 I=I-2
      GO TO 1353
 1364 IORIG(NROW)=1
      NCOL=1
 1374 IF(IBAS(NROW,NCOL)-K1)1375,1384,1384
 1375 NCOL=NCOL+1
 1365 IF(NCOL-NDEST)1374,1374,1371
 1384 IF(NCOL-INET(I-1))1394,1375,1394
 1394 IF(IDEST(NCOL))1371,1395,1371
 1395 INET(I)=NROW
      INET(I+1)=NCOL
      I=I+2
 1305 IF(NCOL-NCOL1)1313,1411,1313
 1371 I=I-2
 1381 IF(I)1315,1315,1382
 1382 NROW=INET(I)
      NCOL=INET(I+1)
      IORIG(NROW)=0
      GO TO 1333
 1411 I=3
      ISAV=K2
 1421 NROW=INET(I)
      NCOL=INET(I+1)
 1431 IF(IBAS(NROW,NCOL)-ISAV)1432,1441,1441
 1432 ISAV=IBAS(NROW,NCOL)
      NROW2=NROW
      NCOL2=NCOL
 1441 IF(NCOL-NCOL1)1451,1442,1451
 1451 I=I+4
 1461 IF(I-K)1421,1421,1471
 1471 I=3
      WRITE(NPR,3)I,NROW1,NCOL1
      GO TO 1511
```

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

```
1442 IF(ISAV-K2)1443,1452,1452
1452 I=4
     WRITE(NPR,3)I,NROW1,NCOL1
     GO TO 1511
1443 J=-1
     NROW=INET(1)
     NCOL=INET(2)
     IBAS(NROW,NCOL)=ISAV
     ISAV=ISAV-K1
     I=3
1444 NROW=INET(I)
     NCOL=INET(I+1)
1453 IF(NROW-NROW2)1463,1454,1463
1454 IF(NCOL-NCOL2)1463,1455,1463
1455 IBAS(NROW,NCOL)=0
     GO TO 1473
1463 IBAS(NROW,NCOL)=IBAS(NROW,NCOL)+J*ISAV
1473 J=-J
     I=I+2
1483 IF(NCOL-NCOL1)1444,1211,1444
1511 WRITE(NPR,4)
   4 FORMAT(1H122HORIGIN      SHADOW PRICE)
   5 FORMAT(1H I6,I14)
1521 WRITE(NPR,5)(I,IU(I),I=1,NORIG1)
1531 WRITE(NPR,6)
   6 FORMAT(23H1DESTIN      SHADOW PRICE)
1541 WRITE(NPR,5)(J,IV(J),J=1,NDEST1)
1551 WRITE(NPR,7)
   7 FORMAT(49H1ORIGIN    DESTIN   QUANTITY    UNIT COST TOTAL COST)
     II19=0
1561 NCONT=0
     DO 114 I=1,NORIG1
     DO 114 J=1,NDEST1
     IF(IBAS(I,J)-K1)114,115,115
 115 ITEM=IBAS(I,J)-K1
     ITEM1=ICOST(I,J)
     ITEM2=ITEM*ITEM1
     WRITE(NPR,8)I,J,ITEM,ITEM1,ITEM2
   8 FORMAT(1H,I6,I9,I10,I12,I12)
     NCONT=NCONT+1
     IBASE(NCONT)=(I-1)*NDEST+J
     PO(NCONT)=ITEM
     CT(NCONT)=ITEM1
 114 CONTINUE
```


UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

```
 1581 DO 116 J=1,NOEST1
      DO 116 I=1,NORIG1
      IF(IBAS(I,J)-K1)116,117,117
  117 ITEM=IBAS(I,J)-K1
      ITEM1=ICOST(I,J)
      ITEM2=ITEM*ITEM1
      II19=II19+ITEM2
  116 CONTINUE
      WRITE(NPR,9999)II19
 9999 FORMAT(' ','TOTAL COST=' ,I9)
      RETURN
      END
```



```
C     ESTA SUBROTINA CALCULA OS AVALIADORES DUAIS R,V
      SUBROUTINE AVALD(M,N,II,QUAD1,R,V)
      DIMENSION QUAD1(20,10,2),R(10),V(10),RA(10),VE(5)
      DO 36 I=1,M
      R(I)=0
   36 CONTINUE
      DO 37 I=1,M
      RA(I)=0
   37 CONTINUE
      DO 43 J=1,N
      V(J)=0
   43 CONTINUE
      R(II)=0
   38 RA(II)=1
      DO 41 I=1,M
      IF(RA(I).NE.1) GO TO 41
      DO 40 J=1,N
      IF(QUAD1(I,J,1).NE.1) GO TO 40
      V(J)=QUAD1(I,J,2)-R(I)
      DO 39 K=1,M
      IF(QUAD1(K,J,1).NE.1) GO TO 39
      IF(RA(K).GT.0) GO TO 39
```

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA

```
      R(K)=QUAD1(K,J,2)*V(J)
      RA(K)=1
 39   CONTINUE
 40   CONTINUE
      RA(I)=2
 41   CONTINUE
      DO 42 I=1,M
      IF(RA(I).NE.2) GO TO 38
 42   CONTINUE
      RETURN
      END
```



```
C     SUBROTINA DESTINADA AO CALCULO DE CAMINHOS UNICOS NA ARVORE
C     GERADORA BT
      SUBROUTINE CAMMIN(I,J,LC)
      COMMON IL(10),IC(10),IP,ICO,IRES,M,N,QUAD1(20,10,2)
      IF(LC.EQ.2)GO TO 250
      DO 200 J1=1,N
      IF(J1.EQ.J)GO TO 200
      IF(QUAD1(I,J1,1).NE.1)GO TO 200
      IP=IP+1
      IL(IP)=I
      IC(IP)=J1
      IF(J1.EQ.ICO)GO TO 202
      CALL CAMMIN(I,J1,2)
      IF(IRES.EQ.1)GO TO 204
      IP=IP-1
 200  CONTINUE
      GO TO 204
 202  IRES=1
 204  RETURN
 250  DO 255 I1=1,M
      IF(I1.EQ.I)GO TO 255
      IF(QUAD1(I1,J,1).NE.1)GO TO 255
```

```
      IP=IP+1
      IL(IP)=I1
      IC(IP)=J
      CALL CAMMIN(I1,J,1)
      IF(IRES.EQ.1)GO TO 260
      IP=IP-1
255   CONTINUE
260   RETURN
      END
```



```
NO ERRORS DETECTED.  NUMBER OF CARDS = 779.
COMPILATION TIME = 47 SECONDS ELAPSED.  19.50 SECONDS PROCESSING.
D2 STACK SIZE = 13 WORDS.  FILESIZE = 140 WORDS.  ESTIMATED CORE STO
TOTAL PROGRAM CODE = 1944 WORDS.  ARRAY STORAGE = 4122 WORDS.
NUMBER OF PROGRAM SEGMENTS = 10.  NUMBER OF DISK SEGMENTS = 160.
PROGRAM CODE FILE = (CO504C01)BETH ON PACK, COMPILER COMPILED ON 11/
```

ORIGIN	SHADOW PRICE
1	0
2	-2
3	-1

DESTIN	SHADOW PRICE
1	1
2	5
3	3
4	5

```
IBASE(J)=    1     3     4     7    10    12    15    16
R(I)=            6.00          -2.00        999998.00
V(J)=            1.00     -999994.00              3.00     -999994.00
JMAX=    11
VF(JJ)=  1.00
VF(JJ)=  0.00
YT(I)=   0.00   1.00  -1.00   0.00   0.00   1.00   1.00   1.00
PD(I)=      11.00       3.00       6.00      10.00      13.00       8.00       4.00
CT(I)=       1.00       3.00       5.00       1.00       4.00       4.00       5.00
QUEI(I,J)=     1.00     0.00
QUEI(I,J)=    -1.00     1.00
DELTA(I)=    -999996.00      999999.00
```

```
IBASE(J)=    1     3     4     7    10    12    11    16
R(I)=            0.00          -2.00       -999997.00
V(J)=            1.00     1000001.00              3.00     1000001.00
JMAX=     6
VF(JJ)= -1.00
VF(JJ)=  1.00
YT(I)=   0.00   0.00   0.00   1.00   1.00   0.00  -1.00   1.00
PD(I)=      11.00       3.00       6.00      10.00       3.00       8.00      14.00
CT(I)=       1.00       3.00       5.00       3.00       4.00       4.00       5.00
QUEI(I,J)=     1.00     0.00
QUEI(I,J)=    -1.00     1.00
DELTA(I)=    -999996.00      999999.00
```

ORIGIN	DESTIN	QUANTITY	UNIT COST	TOTAL COST
1	1	11	1	11
1	3	9	3	27
2	2	2	3	6
2	3	8	1	8
3	2	11	4	44
3	4	14	4	56

TOTAL COST= 152

```
IBASE(J)=    1     3     6     7    10    12    15    16
R(I)=          0.00          -2.00          -1.00
V(J)=          1.00           5.00           3.00           5.00
JMAX=    4
VF(JJ)= 0.00
VF(JJ)= 0.00
YT(I)=  0.00  1.00  1.00  -1.00  -1.00  1.00  1.00  0.00
PO(I)=    11.00     7.00     2.00    10.00    13.00    12.00     4.00
CT(I)=     1.00     3.00     5.00     1.00     4.00     4.00 999999.00
QUEI(I,J)=    1.00    0.00
QUEI(I,J)=    0.00    1.00
DELTA(I)=    999999.00    999999.00
```

```
IBASE(J)=     1    3    4    6   10   12   11   16
R(I)=            0.00    -995998.00    -999997.00
V(J)=            1.00   1000001.00          3.00    1000001.00
JMAX=   13
YT(I)=  0.00  1.00 -1.00  0.00  0.00  1.00 -1.00  1.00
PO(I)=      11.00      17.00      9.00     10.00      3.00      5.00      3.00      1.00
CT(I)=       1.00       5.00      5.00      3.00      4.00      4.00      0.00 999999.00
QUEI(I,J)=   -1.00   3.00
QUEI(I,J)=    0.00   1.00
DELTA(I)=         0.00     999999.00
```

```
IBASE(J)=    1   11        6   10   12   13   16
R(I)=            0.00          -2.00          -1.00
V(J)=            1.00          5.00    -999993.00          5.00
JMAX=    5
VF(JJ)=-1.00
VF(JJ)= 0.00
YT(I)=  1.00  0.00 -1.00  1.00 -1.00  1.00 -1.00  1.00
PO(I)=      10.00      17.00     10.00      9.00      4.00      4.00      4.00      1.00
CT(I)=       1.00       5.00      5.00      3.00      4.00      4.00      0.00      7.00
QUEI(I,J)=   -1.00   1.00
QUEI(I,J)=    0.00   1.00
DELTA(I)=         0.00        8.00
```

```
IBASE(J)=     1     11     4     6     10     12     13     5
R(I)=              0.00              -2.00              -1.00
V(J)=              1.00               5.00              -2.00              5.00
```

```
SOLUCAO OTIMA
  1          10.00
 11          17.00
  4          10.00
  6           9.00
 10           4.00
 12           4.00
 13           4.00
  5           1.00
ORIGEM    DESTINO    QUANTIDADE    CUSTO UNITARIO
    1          1         10.00          1.00
    3          3         17.00          5.00
    1          4         10.00          5.00
    2          2          9.00          3.00
    3          2          4.00          4.00
    3          4          4.00          4.00
    S          1          4.00          0.00
    2          1          1.00          7.00

ZO=     211.00
```

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO
NÚCLEO DE COMPUTAÇÃO ELETRÔNICA