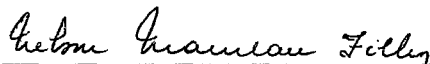


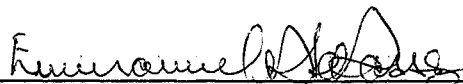
APLICAÇÃO DE ALGORITMOS APROXIMADOS  
AO PLANEJAMENTO AUTOMÁTICO DE  
SISTEMAS DE TRANSMISSÃO DE POTÊNCIA

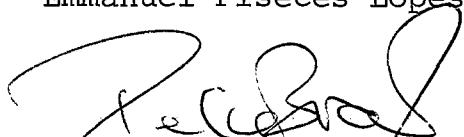
Celso da Cruz Carneiro Ribeiro

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM CIÊNCIAS (M.Sc.)

Aprovada por:

  
\_\_\_\_\_  
Nelson Maculan Filho  
(Presidente)

  
\_\_\_\_\_  
Emmanuel Piseces Lopes Passos

  
\_\_\_\_\_  
Paulo Oswaldo Boaventura Netto

  
\_\_\_\_\_  
Ruderico Ferraz Pimentel

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

ABRIL DE 1978

RIBEIRO, CELSO DA CRUZ CARNEIRO

Aplicação de Algoritmos Aproximados ao Planejamento Automático de Sistemas de Transmissão de Potência  
[Rio de Janeiro] 1978.

VI, 69p.                    29,7cm (COPPE-UFRJ, M.Sc. Engenharia de Sistemas, 1978).

Tese - Univ. Fed. Rio de Janeiro. Programa de Engenharia de Sistemas

1. Expansão de Redes I.COPPE/UFRJ II.Título (série).

AGRADECIMENTOS

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico, que tornou possível a realização deste trabalho através da concessão de uma bolsa durante o curso de Mestrado.

Ao Professor Nelson Maculan Filho, pelo apoio e orientação recebidos durante um ano de pesquisas que conduziram à forma final desta tese.

Aos amigos do Departamento de Estudos Energéticos da Eletrobrás, pela colaboração recebida durante a realização deste trabalho.

RESUMO

A determinação da configuração ótima de uma rede de transmissão de potência, assim como diversos tipos de estudos de planejamento envolvendo sistemas de grande porte, recai em um problema de síntese ou expansão de redes, considerando-se funções côncavas de custos. A aplicação de algoritmos convencionais de otimização a estes problemas torna-se bastante ineficiente com o aumento do tamanho da rede e do número de estágios de planejamento.

Assim sendo, torna-se bastante útil a resolução desses problemas por algoritmos que convirjam rapidamente para soluções aproximadas, suficientemente próximas das suas soluções ótimas, de forma tal que possam ser utilizadas em estudos de planejamento que não necessitem de uma grande precisão quanto à otimalidade da solução apresentada, ou como boas soluções iniciais para processos exatos de otimização.

O uso de modelos simplificados, resolvidos por algoritmos aproximados, é ilustrado por uma aplicação na área de expansão de sistemas de transmissão de potência, mostrando que seus resultados são bastante próximos dos obtidos através de modelos detalhados e algoritmos precisos.

ABSTRACT

The determination of the optimal configuration of a transmission network, as well as several types of similar planning studies involving large systems, lead to the problem of network synthesis and/or expansion when concave cost functions are considered. The use of conventional optimization algorithms for these problems becomes inefficient with the increase of the size of the network and the number of planning stages.

Thus it is very useful to solve such problems using algorithms that converge rapidly to near optimal solutions, close enough to the optimal to make them useful in planning studies that do not need great precision, or as good starting solutions for exact optimization processes.

The use of simplified models, solved by approximate algorithms, is illustrated by an application in the area of power transmission systems expansion, showing that their results are very close to those obtained through the use of detailed models and precise algorithms.

ÍNDICE

	Página
INTRODUÇÃO .....	1
CAPÍTULO I - CONCEITOS BÁSICOS DE PLANEJAMENTO DE SISTEMAS DE GERAÇÃO E TRANSMIS SÃO DE ENERGIA ELÉTRICA .....	4
CAPÍTULO II - FORMULAÇÃO DO MODELO DE EXPANSÃO .....	12
CAPÍTULO III - MÉTODOS DE SOLUÇÃO .....	28
CAPÍTULO IV - APLICAÇÃO .....	40
CAPÍTULO V - CONCLUSÕES .....	47
BIBLIOGRAFIA .....	53
ANEXO I - SÍNTESE DE REDES DE COMUNICAÇÕES .....	57
ANEXO II - OUTRO ENFOQUE PARA O PLANEJAMENTO ENERGÉTICO .....	63

## INTRODUÇÃO

O critério de planejamento atualmente empregado no setor energético objetiva a definição de um plano de expansão, considerando-se fatores energéticos e econômicos para determinação da melhor alternativa, tal que o mercado de energia elétrica previsto para o horizonte de planejamento em estudo possa ser atendido, com a entrada em operação das obras de geração e transmissão que compõem este plano.

O programa energético brasileiro, no que tange ao setor elétrico, prevê aplicações anuais médias que atingem o montante de quatro bilhões de dólares, nos quais os investimentos em obras de geração são sensivelmente maiores, representando 50% do total, enquanto as obras de transmissão correspondem a 30%, e as de distribuição e instalações gerais a 20%. Tal fato faz com que, na comparação de alternativas energeticamente equivalentes, sejam analisadas principalmente as obras de geração e seus custos respectivos, utilizando-se estimativas para os custos de transmissão, distribuição e instalações gerais. Torna-se necessário então, após a escolha de uma alternativa como a que melhor atende os critérios energéticos e econômicos de planejamento, que sejam refeitos os estudos relativos às obras de transmissão, principalmente, com um maior nível de detalhe e precisão com relação a custos.

Existem diversos modelos e algoritmos aplicáveis ao problema de otimização da expansão de uma rede de transmissão, através da determinação de quais ramos devem ser expandidos, e por

qual tipo de linha|15|. Entretanto, a determinação de uma solução ótima para este problema encontra as seguintes dificuldades:

- Os dados necessários são, muitas vezes, estimados e portanto não muito precisos, não apresentando um nível adequado de confiabilidade.
- Nem sempre uma solução matematicamente ótima será uma solução ótima em termos empresariais. Por exemplo, um determinado programa pode levar uma empresa a níveis de endividamento tão elevados que não compensem os investimentos envolvidos.
- Além disto, à medida em que o porte dos problemas aumenta, os algoritmos tornam-se em geral ineficientes em termos computacionais, e nem sempre são aplicáveis na prática.

Esta é a situação do setor elétrico. Como as obras no setor são extremamente demoradas<sup>1</sup> e o atendimento ao mercado, que cresce a um ritmo de expansão bem acelerado<sup>2</sup>, é uma necessidade legalmente estabelecida, o número de usinas que compõem o parque gerador e a rede de transmissão devem crescer rapidamente. Tem-se então, associado à grande quantidade de aproveitamentos energéticos viáveis e às grandes dimensões do país, um grande número de possíveis alternativas de expansão do sistema a serem analisadas e comparadas entre si.

---

(<sup>1</sup>) A construção de uma usina hidroelétrica demora de cinco a oito anos e a de uma nuclear aproximadamente nove anos. Uma linha de 345 kV como a que liga a usina de Três Marias a Belo Horizonte, percorrendo uma distância de 244 km, é construída a um ritmo de 10 km/mês e sua construção demora cerca de dois anos.

(<sup>2</sup>) O mercado de energia elétrica cresce a uma taxa de aproximadamente 10% ao ano |12,26|, o que faz com que os requisitos de energia dobrem a cada sete anos.



Assim sendo, é necessária a existência de modelos que sejam flexíveis e de fácil utilização, e que selecionem alternativas mais promissoras que são então analisadas através de técnicas mais precisas, e por isto mesmo de aplicação mais complexa e demorada. Este trabalho se propõe a mostrar a utilização de modelos e algoritmos para determinação de aproximações eficientes da configuração ótima da expansão de um sistema de transmissão de potência, obtidas através de pequeno esforço computacional, com a finalidade de fornecer rapidamente informações sobre determinadas alternativas.

Na sequência deste estudo serão apresentadas inicialmente algumas características do planejamento no setor elétrico, para em seguida proceder-se à formulação do problema de expansão de um sistema de transmissão de potência, quando serão então discutidas algumas técnicas aproximadas de resolução que serão aplicadas a dois problemas, com a finalidade de tirar-se conclusões sobre a aplicabilidade e as vantagens decorrentes do emprego destas técnicas.

## CAPÍTULO I

### CONCEITOS BÁSICOS DE PLANEJAMENTO DE SISTEMAS DE GERAÇÃO E TRANSMISSÃO DE ENERGIA ELÉTRICA

O suprimento de energia elétrica a um centro consumidor é composto pelas fases de geração, transmissão e distribuição. Na maioria dos estudos de planejamento energético analisa-se apenas os problemas de geração e transmissão (principalmente geração), em razão do sistema de distribuição não depender diretamente dos anteriores [6], razão pela qual só serão apresentados neste capítulo os conceitos básicos associados aos problemas de geração e transmissão.

#### 1. Planejamento da Geração

Na figura I.1 é feita a apresentação de uma curva de carga diária típica que um parque gerador de energia elétrica deve atender. De acordo com esta curva, o sistema de usinas deve ser capaz não só de fornecer diariamente a quantidade de energia demandada (mercado de energia), representada pela área sob a curva de carga, como também a potência requerida hora a hora, inclusive o pico diário (mercado de ponta). Assim sendo, a operação do sistema gerador como um todo deve ser tal que o intercâmbio entre os sistemas que compõem o parque gerador proporcione o atendimento às demandas de energia e ponta de todos os mercados.

Outro conceito importante é o de energia firme, que representa a maior quantidade de energia que pode ser gerada

(ou o maior mercado que pode ser atendido) segundo um critério de garantia de suprimento pré-estabelecido |12,31|.

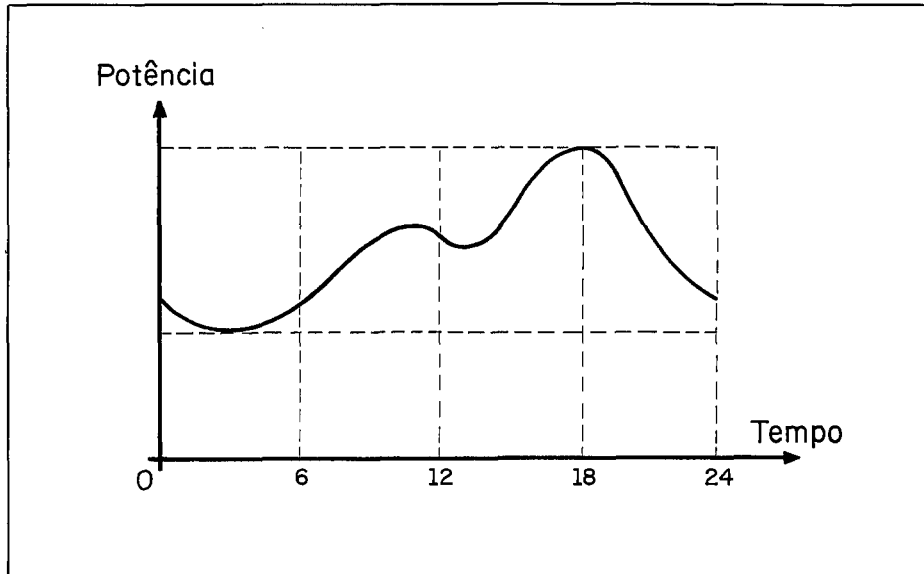


Figura I.1: Curva de carga típica

A primeira etapa para a definição de um plano de expansão consiste na ordenação dos projetos de usinas, segundo a relação custo/benefício (energia firme) correspondente à sua construção |6,16|. Procede-se então, dentro do conjunto de alternativas<sup>1</sup>, a estudos energéticos e econômicos<sup>2</sup> que irão definir o programa de obras a ser seguido nos anos seguintes |6|.

- 
- (<sup>1</sup>) Cada alternativa corresponde a uma sequência de projetos e um cronograma de entrada em operação que possibilite o atendimento do mercado previsto.
- (<sup>2</sup>) Estes estudos envolvem simulações estáticas e dinâmicas do comportamento do sistema gerador sob diferentes condições hidrológicas, balanços energéticos estáticos e dinâmicos, análise de intercâmbio entre sistemas e análise econômico-financeira das alternativas.

## 2. Planejamento da Transmissão

Para que seja analisada a configuração do sistema de transmissão que interliga um sistema de usinas geradoras e um conjunto de centros de carga, será feita a hipótese básica de que este sistema de geração é capaz de atender aos mercados de energia e ponta aos quais é solicitado. Para efeito deste estudo de dimensionamento da rede de transmissão, que deve ser feito preven<sub>do</sub>-se o caso mais desfavorável de carregamento, serão considerados os maiores valores absolutos das injeções de potência em cada barra; positivas, nulas ou negativas, conforme seja uma usina, sub<sub>est</sub>ação ou centro de carga.

Chama-se de ramo o sistema de transmissão entre dois nós (barras) da rede, incluídas as linhas de transmissão de um determinado tipo, e todos os equipamentos que se destinam a transportar uma potência de um sistema de geração para suas respectivas cargas. Com relação às linhas de transmissão, a legisla<sub>ção</sub> em vigor permite a instalação de apenas determinados tipos de linhas, caracterizadas pela sua tensão nominal. A cada um destes tipos de linha correspondem, por exemplo, diferentes valores de custos, resistência e reatância por quilômetro e limite térmico para o fluxo de potência de linha.

A capacidade máxima de fluxo de potência entre os nós  $i$  e  $j$ , transmitido por uma linha de transmissão do tipo  $k$  ( $c_{ij}^k$ ), de tensão nominal  $V^k$ , em função da distância  $d_{ij}$  entre estes nós, é uma função como a da figura I.2.

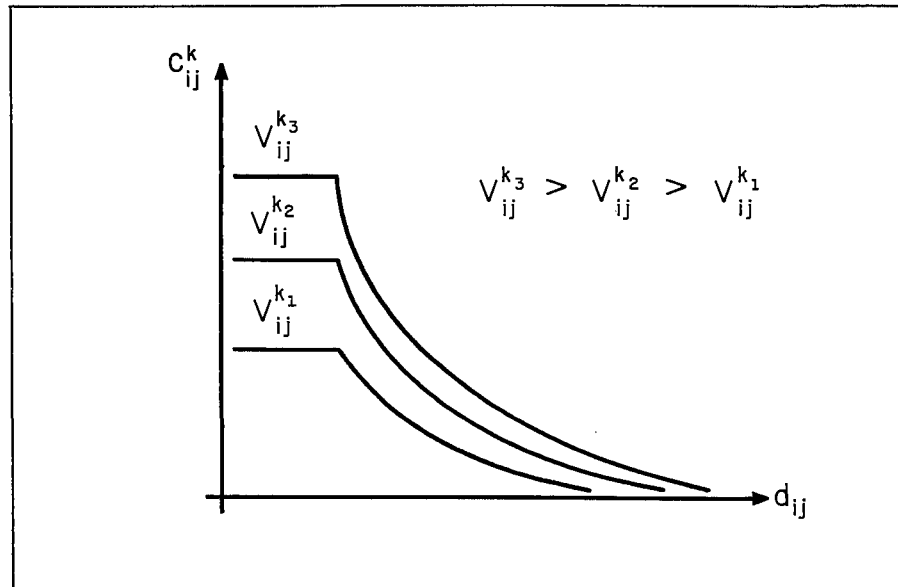


Figura I.2: Curva Capacidade x Distância

A configuração do sistema de transmissão deve ser tal que:

- não ocorra sobrecarga em linha alguma, ou seja, em nenhuma linha o fluxo de potência por ela transmitido pode ser superior à sua capacidade máxima.
- seja mantida a estabilidade do sistema, o que corresponde a serem conservados certos limites para as defasagens entre os ângulos de fase das cargas na rede.

Quanto a custos, são os seguintes os principais custos associados à construção/expansão de um ramo da rede:

(i) Custos de construção e expansão da capacidade de um ramo

A ligação de dois nós da rede através de uma linha de determinado tipo (tensão) delimita a capacidade de transmissão entre estes nós. Assim, para cada tipo de linha, entre cada barra, haverá uma parcela da função de custos que corresponde a uma fun-

ção degrau como a apresentada na figura I.3, na qual  $c_{\max}$  é o fluxo máximo de potência na linha, e  $I$  é o investimento correspondente à instalação de  $c_{\max}$ .

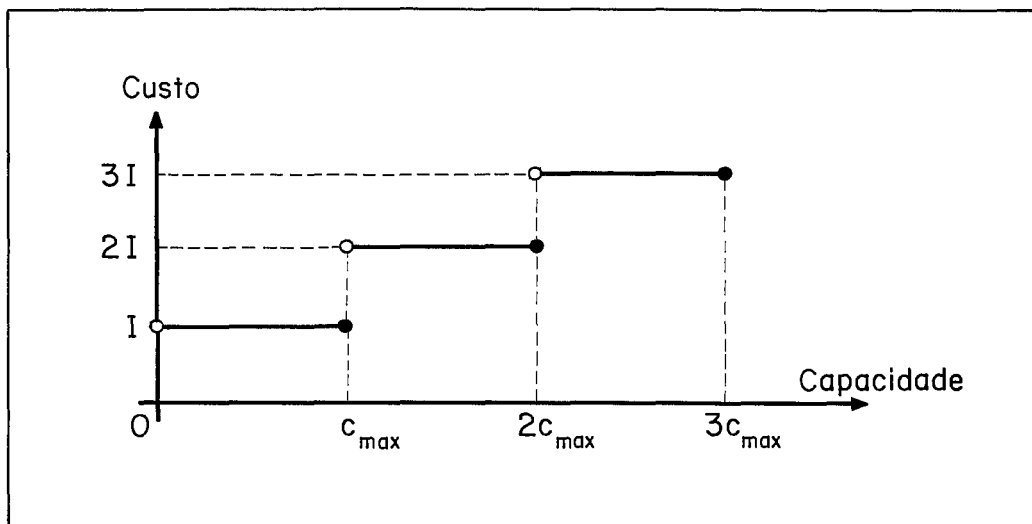


Figura I.3: Custos de expansão/construção de um ramo

(ii) Custos de Perdas

Quanto maior o fluxo de potência que percorre uma linha, maiores serão as perdas por transmissão, e também mais cedo se tornará necessária a expansão desta linha, representando então outra parcela da função de custos.

Torna-se importante observar que estes dois custos comportam-se de formas opostas: enquanto os custos de construção e expansão aumentam quando são construídas linhas com maior capacidade de transmissão, caracterizadas por apresentarem tensão nominal maior e atenderem às necessidades do sistema sem necessidade de expansão durante mais tempo, a transmissão em um nível de tensão mais elevado provoca uma diminuição nas perdas e em seus custos.

Tendo sido analisados os principais aspectos associados a um sistema de geração/transmissão, na próxima seção será apresentado de forma precisa o problema a ser estudado e a metodologia a ser empregada.

### 3. Definição do Problema

O planejamento da expansão de um sistema de transmissão pode ser feito segundo diferentes metodologias, tais como:

- (i) A partir de estimativas anuais de consumo e geração, analisa-se a expansão anual do sistema de transmissão, de forma tal que seja a mais econômica em termos de valor atual total. Oferece como desvantagem o excessivo tempo de resolução devido à árvore de soluções se abrir muito rapidamente, apresentando um grande número de alternativas, porém converge para uma solução ótima em termos econômicos [17].
- (ii) Fornecidas as estimativas de consumo e geração ao final do horizonte de planejamento, determina-se a configuração ótima do sistema de transmissão para este ano e recupera-se ano a ano, até o início do horizonte, o caminho da evolução do sistema desde o ano inicial até a configuração final obtida. Este método apresenta como deficiência o fato de não levar em consideração a ocasião em que são feitos os investimentos, mas, por outro lado, apresenta mais rapidamente uma boa solução.

Este tipo de problema é, em geral, modelado e resolvido através da utilização de grafos. No entanto, para determinação de uma solução ótima para o problema, que atenda o crescimento do mercado e minimize os custos de expansão do sistema de trans

missão, a eficiência e a aplicabilidade dos algoritmos existentes [4] são sensivelmente prejudicadas com o aumento do porte do problema (número de barras e linhas), que eleva demasiadamente o número de possíveis alternativas. Este problema agrava-se ainda mais quando verifica-se que as funções de custo envolvidas são em geral côncavas, devido a economias de escala. Além disto, como já foi dito, nem sempre uma solução matematicamente ótima corresponderá a uma situação real ótima, ou mesmo a uma solução política, empresarial ou fisicamente interessante de ser implantada.

Assim sendo, o objetivo deste trabalho é a apresentação e a aplicação de uma metodologia que, a partir da configuração do parque gerador e do mercado previstos para o final do horizonte de planejamento, e de uma configuração inicial do sistema de transmissão, permita a determinação rápida de uma solução aproximada para a configuração ótima do sistema de transmissão ao final do horizonte de estudo. A utilização de tal metodologia é bastante variada, podendo ser aplicada também em estudos de síntese de redes de comunicações [18] e de distribuição de energia, caracterizadas por apresentarem um número de nós bem grande, assim como em projetos de planejamento de transporte e em diversos problemas de planejamento de sistemas de grande porte que envolvam síntese de redes, e que não necessitem de uma precisão absoluta quanto à otimalidade da solução.

Durante a formulação do modelo serão introduzidas uma série de simplificações com o objetivo de torná-lo o menos complexo possível, mas sempre com a preocupação de mantê-lo dentro de uma aproximação confiável do caso real. Deve ser enfatizado também que, devido à introdução de tais simplificações que per



mitirão a obtenção de um modelo linear, e à própria simplicidade do modelo em si, esta metodologia deverá ser encarada como auxiliar ao processo de planejamento, apresentando soluções viáveis e economicamente "boas" não necessariamente ótimas, que deverão então ser reanalisadas com um enfoque mais dirigido ao problema de engenharia.

## CAPÍTULO II

### FORMULAÇÃO DO MODELO DE EXPANSÃO

#### 1. Conceitos e Definições

Um grafo  $G = [X, U]$  corresponde a uma relação definida entre os elementos de um conjunto  $X$  de nós, através de um conjunto  $U$  de arcos. Sendo  $X = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$  o conjunto de nós, representa-se por  $|X|$  a sua cardinalidade, no caso igual a  $n$ . Da mesma forma, sendo  $U = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_m\}$  o conjunto de arcos,  $m$  é a sua cardinalidade.

Um grafo é dito orientado se qualquer arco  $u \in U$  pode ser percorrido em apenas um sentido pré-determinado. Um grafo é conexo se, para cada par ordenado de nós  $i$  e  $j \in X$ , sempre existe uma cadeia (no caso de um grafo não orientado) ou um caminho (no caso de um grafo orientado) formado por arcos  $u_a, u_b, \dots, u_\ell \in U$  que os interliga. Um arco  $u \in U$  interligando o par ordenado de nós  $i$  e  $j \in X$  também será designado pela notação  $(i, j)$  [11, 19].

A partir destes conceitos são definidos alguns conjuntos associados aos elementos de um grafo:

Conjunto dos nós sucessores de um nó  $i \in X$

$$\Gamma^+(i) = \{j \mid j \in X, (i, j) \in U\}$$

Conjunto dos nós predecessores de um nó  $i \in X$

$$\Gamma^-(i) = \{j \mid j \in X, (j, i) \in U\}$$

Conjunto dos nós vizinhos ao nó  $i \in X$

$$\Gamma(i) = \Gamma^-(i) \cup \Gamma^+(i)$$

Conjunto dos arcos incidentes para o exterior de um nó  $i \in X$

$$\omega^+(i) = \{(i,j) \mid (i,j) \in U, j \in \Gamma^+(i)\}$$

Conjunto dos arcos incidentes para o interior de um nó  $i \in X$

$$\omega^-(i) = \{(j,i) \mid (j,i) \in U, j \in \Gamma^-(i)\}$$

Como em geral associa-se a um grafo um fluxo de uma grandeza física (potência no caso em estudo), existem na maioria dos problemas reais restrições quanto às capacidades mínimas e máximas de fluxo que podem percorrer cada arco. Neste ponto torna-se interessante a apresentação do que seja um multigrafo, que corresponde a um grafo no qual existem vários arcos ligando diretamente um par ordenado de nós no mesmo sentido, como na figura II.1.

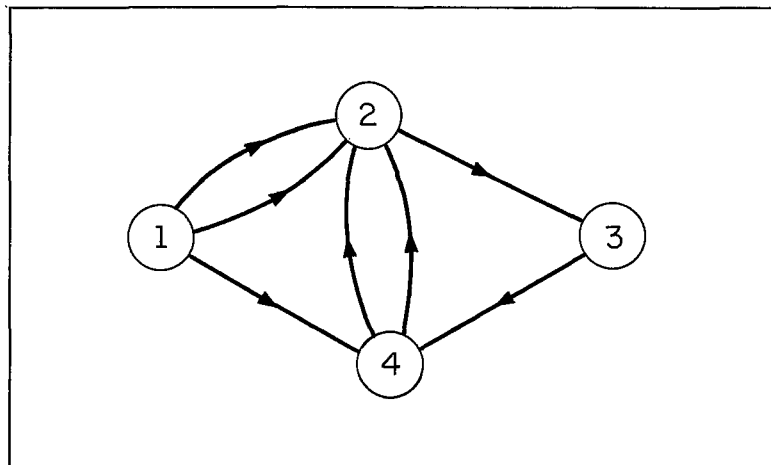


Figura II.1: Multigrafo

Como a legislação vigente só permite a instalação de determinados tipos de linhas de transmissão, a representação de uma rede de transmissão de potência por um multigrafo torna-se muito útil, pois desta forma pode-se representar a ligação de duas barras do sistema por diferentes tipos de linhas, através da

ligação dos dois nós que as representam por diversos arcos diretos, cada um representando um destes possíveis tipos de linhas.

Denota-se por

$$Y(t) = \begin{bmatrix} y_1^1(t) & y_1^2(t) & \dots & y_1^k(t) & \dots & y_1^p(t) \\ y_2^1(t) & y_2^2(t) & \dots & y_2^k(t) & \dots & y_2^p(t) \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ y_u^1(t) & y_u^2(t) & \dots & y_u^k(t) & \dots & y_u^p(t) \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ y_m^1(t) & y_m^2(t) & \dots & y_m^k(t) & \dots & y_m^p(t) \end{bmatrix}$$

a matriz que representa de forma genérica a capacidade  $y_u^k(t)$  instalada no arco  $u$  através de linhas do tipo  $k$  no ano  $t$ . Pode-se então formular o problema em estudo da seguinte forma:

Dados um horizonte de planejamento de  $T$  anos e uma projeção de crescimento de mercado para este horizonte, uma configuração  $X$  de nós (usinas, subestações e cargas) tal que sua capacidade de geração atenda o mercado esperado, e a configuração inicial do sistema de transmissão, determinar uma configuração de capacidades instaladas  $Y$  para o conjunto  $U$  de arcos que interligará os nós do conjunto  $X$ , de forma tal que seja atendido o mercado previsto para o final do horizonte de planejamento a um custo mínimo.

## 2. Formulação do Modelo

Inicialmente deve ser feita a hipótese de que o grafo base  $U$ , conjunto de arcos existentes ou possíveis de serem construídos ou expandidos, associado ao sistema de transmissão é conhecido e conexo.

Será representado por  $x_{ij}^k$  o fluxo de potência ativa entre os nós  $i$  e  $j$  através de linhas de transmissão do tipo  $k$ , com a seguinte convenção:

$$x_{ij}^k > 0 \quad - \quad \text{potência transmitida de } i \text{ para } j$$

$$x_{ij}^k = 0 \quad - \quad \text{fluxo de potência nulo através deste ramo}$$

$$x_{ij}^k < 0 \quad - \quad \text{potência transmitida de } j \text{ para } i$$

Observação:  $k \in C = \{c_1, c_2, \dots, c_p\}$  = conjunto de tipos de linhas de transmissão previstos pela legislação.

Sendo  $p_i$  a potência ativa injetada no nó  $i \in X$ , são as seguintes as restrições envolvidas no modelo:

### (i) Conservação de potência:

A partir da hipótese de que não há perdas de potência nas linhas, a diferença entre a potência que incide para o exterior de um nó e a que incide para o interior deste nó corresponde à potência nele injetada:

$$\sum_{k \in C} \sum_{j \in \Gamma(i)} x_{ij}^k = p_i \quad \forall i \in X$$

O modelo envolve então  $n$  restrições deste tipo, já que o número de nós é  $n$ .

(ii) Capacidades máximas:

O fluxo de potência  $x_{ij}^k$  transmitido através de linhas do tipo  $k$  entre os nós  $i$  e  $j$  não deve ultrapassar a capacidade máxima  $y_{ij}^k$  instalada, determinada para cada tipo de linha pelo limite de estabilidade transitória da linha. Em certos sistemas, envolvendo pequenas distâncias, este limite é determinado pelo limite térmico da linha:

$$|x_{ij}^k| \leq y_{ij}^k \quad \forall (i,j) \in U, \quad \forall k \in C$$

Esta restrição aplica-se aos  $m$  pares de nós do grafo base possíveis de serem diretamente conectados pelos  $p$  tipos de linhas existentes, existindo então  $mp$  restrições de fluxo máximo.

(iii) Capacidades mínimas:

Pode-se considerar como nulo o fluxo de potência mínimo através de uma linha. Na prática, entretanto, uma linha de transmissão deve estar energizada, e para que por ela possa circular um fluxo de potência bastante reduzido devem ser feitos, entre outros, investimentos em reatores e transformadores para compensar o efeito de cargas leves que tendem a elevar a tensão nas linhas [30]. A incorporação de tal restrição ao modelo o tornaria mais complexo, sem entre tanto acrescentar melhorias sensíveis nos resultados apresentados.

(iv) Tensão nos nós:

A introdução da hipótese de tensão constante em cada nó, correspondente ao seu valor nominal, simplifica a a-

nálise do problema sem introduzir imprecisões significativas.

(v) Confiabilidade e segurança:

Com relação ao modelo, que minimizará custos, os fluxos nas linhas serão bem próximos das capacidades instaladas, tendendo a saturá-las. Entretanto, a capacidade real será maior, visto ser instalada em degraus e o modelo trabalhar com uma função linear. Como efeito disto, por contingências tais como a retirada de uma linha de operação, poderão ocorrer sobrecargas em algumas linhas [17]. Esta hipótese não será incorporada ao modelo, mas poderia ser incluída através de um superdimensionamento do sistema de transmissão, de acordo com critérios que envolvessem a probabilidade de ocorrência destas contingências.

Neste ponto deve-se passar à formulação da função objetivo do problema, através da análise detalhada dos custos apresentados ao final da seção I.2:

(i) Custos de construção e expansão da capacidade de um ramo:

A instalação entre os nós  $i$  e  $j$  de uma linha do tipo  $k$  tem uma função de custos em forma de degraus, já que a instalação de uma nova linha a um custo  $I$  aumenta em um valor discreto a capacidade de transmissão no ramo. Sendo

$y_{ij}^k$  - capacidade instalada entre os nós  $i$  e  $j$  através de linhas do tipo  $k$ , ao final do horizonte de planejamento,

$y_{ij}^{k_0}$  - capacidade instalada entre os nós  $i$  e  $j$  através de linhas do tipo  $k$ , no sistema existente no ano inicial do horizonte.

$c_{ij}^k$  - acréscimo na capacidade de transmissão de potência en-

tre os nós  $i$  e  $j$ , proporcionado pela adição de uma linha do tipo  $k$ ,

- $I_{ij}^k$  - custo correspondente à instalação de tal linha, e
- $V_{ij}^k$  - valor do investimento em expansão de linhas do tipo  $k$  entre os nós  $i$  e  $j$ ,

a forma da função de custos de expansão e construção de um ramo é a da figura II.2.

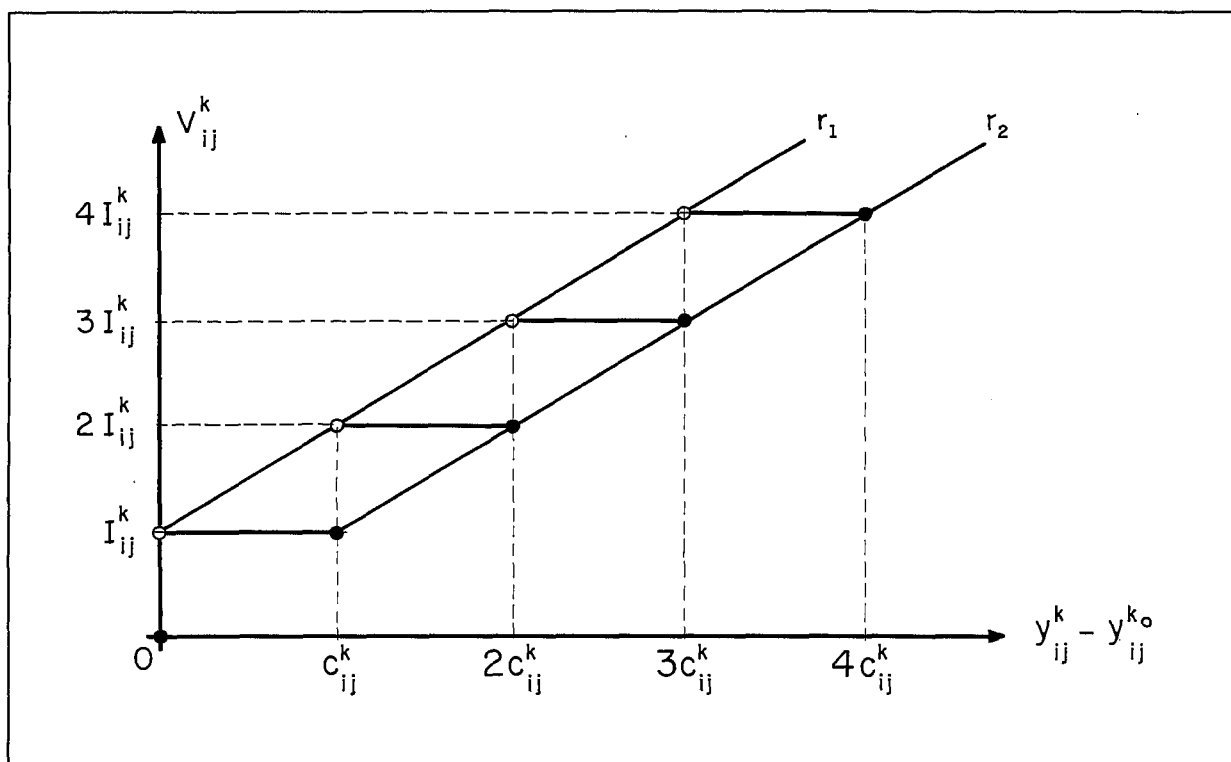


Figura II.2: Custos de expansão e construção

Para utilização desta função seria necessária a introdução de variáveis inteiras no modelo, que recairia então em um caso de programação mista com um número muito grande de variáveis inteiras, o que tornaria sua resolução demorada e ineficiente em termos computacionais.

Assim, torna-se interessante a aproximação desta



função de custos por outra mais simples e que torne mais eficiente a solução do problema pelos métodos conhecidos. Analisando-se a função anterior, observa-se que a reta  $r_1$  superestima os custos reais  $V_{ij}^k$ , ao passo que a reta  $r_2$  os subestima, de forma tal que a minimização dos custos através da função representada pela reta  $r_1$  - daqui em diante chamada de função aproximada de custos de expansão  $A_{ij}^k$  - significa que os custos reais serão ainda menores do que os encontrados, embora não se possa afirmar que leve ao mesmo resultado que a utilização de  $V_{ij}^k$ . A capacidade realmente instalada é então maior do que a obtida, a um custo real menor do que o fornecido pelo modelo. O custo aproximado de construção e expansão de cada ramo da rede é dado então por

$$A_{ij}^k = \begin{cases} l_{ij}^k + \alpha_{ij}^k (y_{ij}^k - y_{ij}^{k_0}), & \text{se há expansão da linha } \underline{k} \text{ entre os} \\ & \text{nós } \underline{i} \text{ e } \underline{j} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e as capacidades reais instaladas  $\bar{c}_{ij}^k$  são

$$\bar{c}_{ij}^k = \begin{cases} (\lfloor y_{ij}^k / c_{ij}^k \rfloor + 1) c_{ij}^k & \text{se } \lfloor y_{ij}^k / c_{ij}^k \rfloor \in N \\ \lfloor y_{ij}^k / c_{ij}^k \rfloor c_{ij}^k & \text{se } \lfloor y_{ij}^k / c_{ij}^k \rfloor \notin N \end{cases}$$

sendo  $N$  o conjunto dos inteiros e  $\lfloor y_{ij}^k / c_{ij}^k \rfloor$  a parte inteira de  $y_{ij}^k / c_{ij}^k$ . Cada função  $A_{ij}^k$  tem a representação gráfica apresentada na figura II.3.

Caso a instalação de uma linha do tipo  $\underline{k}$  entre os nós  $\underline{i}$  e  $\underline{j}$  seja inviável, toma-se  $\alpha_{ij}^k = \infty$ .

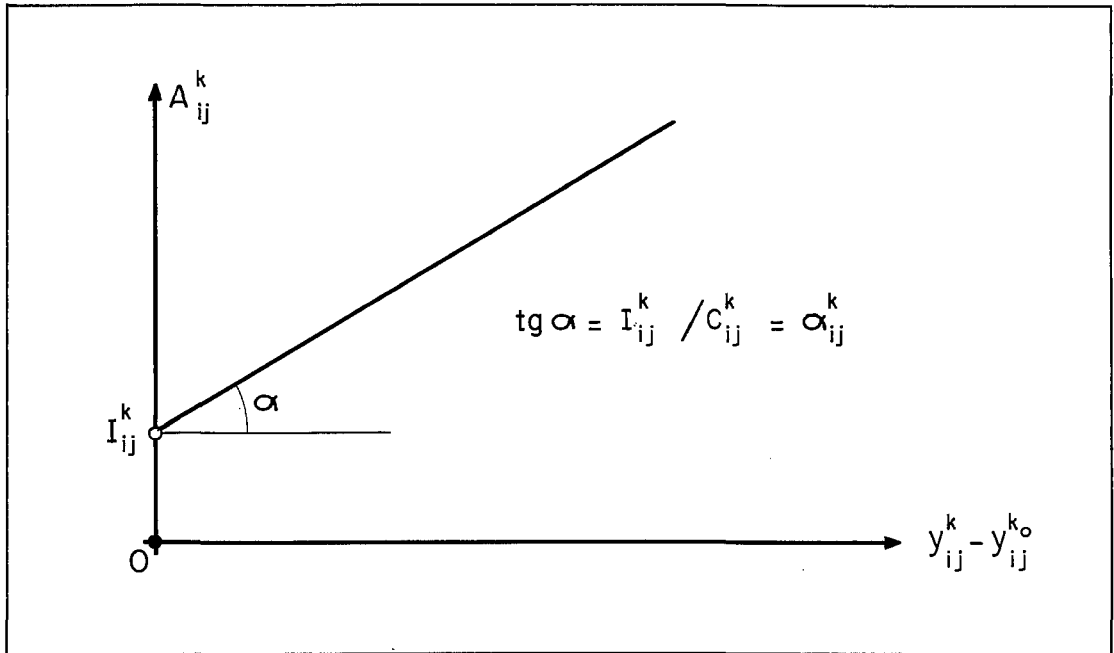


Figura II.3: Custo aproximado de expansão/construção

(ii) Custos de perdas:

Sendo  $x_{ij}^k$  o fluxo de potência ativa entre os nós  $i$  e  $j$  através de linhas do tipo  $k$ , as perdas nestas linhas são proporcionais a este fluxo. Associa-se então a cada linha um custo de perdas  $P_{ij}^k$  dado por  $\beta_{ij}^k |x_{ij}^k|$ , sendo  $\beta_{ij}^k$  um valor característico de cada tipo de linha (figura II.4).

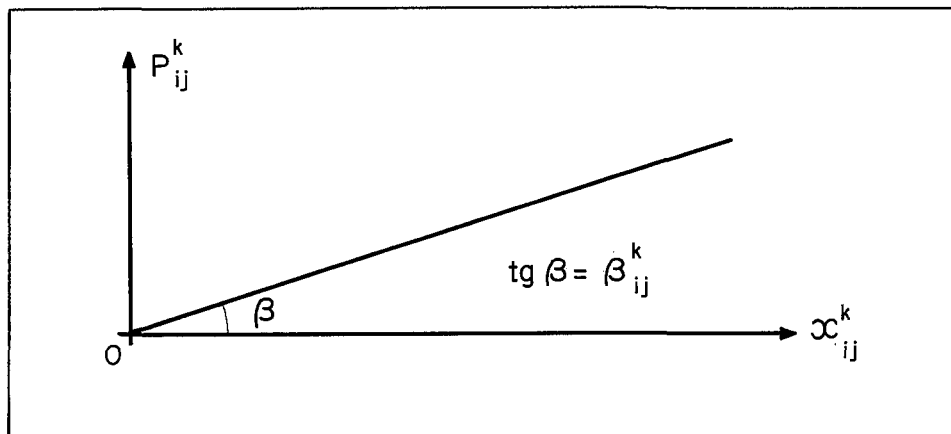


Figura II.4: Custos de perdas

A relação entre os valores  $\alpha_{ij}^k$  e  $\beta_{ij}^k$  torna-se bastante importante para o decorrer deste estudo. Ocorre que para u ma linha do tipo k, de tensão nominal  $V^k$ , existem diversos subtipos correspondentes a linhas com bitolas diferentes, cujo custo  $\alpha_{ij}^k$  aumenta com o aumento de bitola, causando um efeito de diminuição de  $\beta_{ij}^k$  através de uma diminuição nas perdas por transmissão. O mesmo efeito ocorre quando comparadas duas linhas com tensões nominais  $V^{k_1}$  e  $V^{k_2}$ , o que faz com que a colocação de uma ou outra altere em sentidos opostos os custos de expansão e de perdas na solução corrente.

O problema a ser resolvido é, então

$$(P_1) \left[ \begin{array}{l} \text{minimizar } z = \sum_{k \in C} \sum_{(i,j) \in U} (A_{ij}^k + \beta_{ij}^k |x_{ij}^k|) \\ \text{sujeito a } \sum_{k \in C} \sum_{j \in \Gamma(i)} x_{ij}^k = p_i \quad \forall i \in X \\ |x_{ij}^k| - y_{ij}^k \leq 0 \quad \forall (i,j) \in U, \forall k \in C \\ y_{ij}^{k_0} - y_{ij}^k \leq 0 \quad \forall (i,j) \in U, \forall k \in C \end{array} \right.$$

Tal formulação apresenta dois tipos de não-linearidades que devem ser analisadas, para que  $(P_1)$  possa ser colocado sob forma mais simples de ser resolvida computacionalmente:

- os custos fixos  $I_{ij}^k$  na função  $A_{ij}^k$
- a função módulo nos custos de perdas

Quanto aos custos fixos, a introdução de variáveis bivalentes 0-1 transforma o problema em um caso de programação linear mista, com uma variável inteira associada a cada ramo, da seguinte

seguinte forma:

$$\delta_{ij}^k = \begin{cases} 1, & \text{se há expansão da ligação dos nós } \underline{i} \text{ e} \\ & \underline{j} \text{ através de linhas do tipo } \underline{k} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Torna-se necessária então a introdução de restrições do tipo  $y_{ij}^k - y_{ij}^{k_0} \leq M\delta_{ij}^k$ , sendo  $M$  um número suficientemente grande, de tal forma que:

- se há expansão:  $\delta_{ij}^k = 1 \Rightarrow y_{ij}^k > y_{ij}^{k_0}$  e

$$A_{ij}^k = I_{ij}^k + \alpha_{ij}^k (y_{ij}^k - y_{ij}^{k_0})$$

- se não há expansão:  $\delta_{ij}^k = 0 \Rightarrow y_{ij}^k = y_{ij}^{k_0}$  e  $A_{ij}^k = 0$

$$\text{Se } o_i = \begin{cases} 0, & \text{se } p_i \leq 0 \\ p_i, & \text{se } p_i > 0 \end{cases} \text{ e } d_i = \begin{cases} p_i, & \text{se } p_i \leq 0 \\ 0, & \text{se } p_i > 0 \end{cases}$$

pode-se provar que  $M = \text{mínimo} \left\{ \sum_{i \in X} o_i, \sum_{i \in X} d_i \right\}$  é um valor suficientemente grande para ser utilizado nesta formulação.

Para a eliminação da função módulo, seja a seguinte substituição de variáveis:

$$x_{ij}^k = x_{ij}^{k+} - x_{ij}^{k-}$$

$$x_{ij}^{k+}, x_{ij}^{k-} \geq 0$$

Pode-se verificar facilmente que as variáveis  $x_{ij}^{k+}$  e  $x_{ij}^{k-}$  não podem pertencer a uma mesma base, pois neste caso haveriam duas colunas linearmente dependentes na matriz a ela associada, o

que é absurdo pela própria definição de base. Tornam-se possíveis então três hipóteses, a cada iteração do algoritmo de otimização a ser empregado:

(i) se  $x_{ij}^{k+}$  está na base:  $x_{ij}^{k-} = 0 \Rightarrow x_{ij}^k = x_{ij}^{k+}$  e  $|x_{ij}^k| = x_{ij}^{k+}$

(ii) se nem  $x_{ij}^{k+}$  nem  $x_{ij}^{k-}$  estão na base:  $x_{ij}^k = 0$

(iii) se  $x_{ij}^{k-}$  está na base:  $x_{ij}^{k+} = 0 \Rightarrow x_{ij}^k = -x_{ij}^{k-}$  e  $|x_{ij}^k| = x_{ij}^{k-}$

Na função objetivo, deve-se então substituir  $|x_{ij}^k|$  por  $x_{ij}^{k+} + x_{ij}^{k-}$ .

Além disto, cada restrição do tipo  $|x_{ij}^k| \leq y_{ij}^k$  deve ser substituída pelo par de restrições abaixo, já que  $\beta_{ij}^k$  é não negativo:

$$x_{ij}^{k+} \leq y_{ij}^k$$

$$x_{ij}^{k-} \leq y_{ij}^k$$

Os termos constantes  $y_{ij}^{k_0}$  que aparecem na função objetivo também podem ser eliminados, através da substituição de variáveis

$$h_{ij}^k = y_{ij}^k - y_{ij}^{k_0}$$

As restrições de fluxo em cada arco transformam-se então em

$$x_{ij}^{k+} \leq y_{ij}^{k_0} + h_{ij}^k$$

$$x_{ij}^{k-} \leq y_{ij}^{k_0} + h_{ij}^k \quad \forall (i,j) \in U, \quad \forall k \in C$$

Chega-se então ao refinamento da formulação  $(P_1)$ :

$$\begin{array}{l}
 \text{minimizar } z = \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in C} [\delta_{ij}^k I_{ij}^k + \alpha_{ij}^k h_{ij}^k + \beta_{ij}^k (x_{ij}^{k+} + x_{ij}^{k-})] \\
 \text{sujeito a } \sum_{j \in \bar{I}(i)} \sum_{k \in C} (x_{ij}^{k+} - x_{ij}^{k-}) = p_i \quad \forall i \in X \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 h_{ij}^k \leq M \delta_{ij}^k \\
 x_{ij}^{k+} \leq y_{ij}^{k_0} + h_{ij}^k \\
 x_{ij}^{k-} \leq y_{ij}^{k_0} + h_{ij}^k \\
 \delta_{ij}^k \in \{0,1\} \\
 x_{ij}^{k+}, x_{ij}^{k-}, h_{ij}^k \geq 0
 \end{array} \right\} \quad \forall (i,j) \in U, \quad \forall k \in C
 \end{array}$$

$(P_2)$

Este é efetivamente um problema de programação linear mista que apresenta:

3 mp variáveis contínuas  $(x_{ij}^{k+}, x_{ij}^{k-}, y_{ij}^k)$ ,  
 mp variáveis discretas  $(\delta_{ij}^k)$ ,

3 mp restrições associadas a ramos, e

n restrições associadas a nós,

sendo  $n = |X|$ ,  $m = |U| \leq n(n-1)/2$ ,  $p = |C|$ .

Pode-se observar que mesmo em casos de pequeno porte o número de variáveis e restrições é bem grande, o que serve para mostrar a necessidade da aplicação de algoritmos de otimização bastante eficientes a este tipo de problema, bastante característico em estudos de planejamento.

### 3. Comentários sobre a Metodologia Apresentada

Com relação ao modelo desenvolvido na seção anterior, alguns comentários devem ser feitos, no que tange às técnicas e simplificações utilizadas.

- (i) Grafo base: A hipótese de ser conhecido o grafo base, definido a partir de estudos preliminares de custo e viabilidade, é perfeitamente aceitável e utilizada na prática para este tipo de modelo.
- (ii) Tensão nos nós: Admitir-se tensão constante - pequenas variações - em cada nó também é uma simplificação válida a nível de estudos de planejamento.
- (iii) Perdas nas linhas: Supõe-se que não há perdas por transmissão nas linhas e admite-se que a capacidade de um ramo que interliga dois nós é constante, até que seja atingido o limite de estabilidade transitória deste ramo (ver curvas de capacidade na seção I.2). Considera-se um ramo do tipo  $k$  entre os nós  $i$  e  $j \in X$  como o conjunto formado por linhas de transmissão do tipo  $k$ , e todos os equipamentos destinados a transportar uma potência entre estes dois nós.
- (iv) Custos de construção e expansão: Os patamares das funções  $V_{ij}^k$  não apresentam na realidade a mesma extensão, tendendo a se alongar à medida em que o número de linhas do tipo  $k$  instaladas entre os nós  $i$  e  $j$  aumenta, em razão da contribuição de uma segunda linha instalada entre dois nós da rede ser maior do que a de uma linha apenas. Entretanto a aproximação adotada é válida e não levará a erros quanto ao custo real do sistema. A extensão de cada patamar, que corres

ponde à capacidade máxima  $c_{ij}^k$  de uma linha do tipo  $k$  instalada entre os nós  $i$  e  $j$ , é um dado do problema.

- (v) Ocasião dos investimentos: O modelo não considera o ano em que é feito cada investimento para obtenção da configuração final, não levando em conta conceitos tais como valor atual e taxa de desconto, que podem ser considerados através de uma formulação mais criteriosa das funções de custo envolvidas (Anexo II). No último capítulo será discutida a validade de tal simplificação.
- (vi) Renovação do planejamento: Como já foi observado, ao final do horizonte de planejamento a capacidade ociosa instalada será pequena, sendo necessário então que por esta ocasião já esteja sendo desenvolvida a expansão do sistema de transmissão com relação a um novo horizonte.
- (vii) Aproximação dos custos de expansão: É importante observar - se que, com relação à função aproximada de custos  $A_{ij}^k$ , os custos aproximados de instalação das capacidades  $c_1$  e  $c_2$ , respectivamente  $a_1$  e  $a_2$ , são bastante semelhantes, ao passo que os custos reais  $v_1$  e  $v_2$  são substancialmente diferentes (figura II.5). Assim, uma análise de pós-otimização que considerasse outras retas para a avaliação da função  $A_{ij}^k$  seria muito interessante, e poderia levar a resultados ainda mais próximos dos reais do que os obtidos simplesmente através da utilização da reta  $r_1$  como sendo a função aproximada de custos  $A_{ij}^k$ . Assim, para esta análise de pós-otimização podem ser consideradas retas que, numa vizinhança do ponto ótimo determinado na iteração anterior, forneçam uma aproximação mais fiel da função de custos  $V_{ij}^k$ , como por exem



plo a reta  $r_2$  e outras retas que nesta vizinhança situem-se entre as retas  $r_1$  e  $r_2$ .

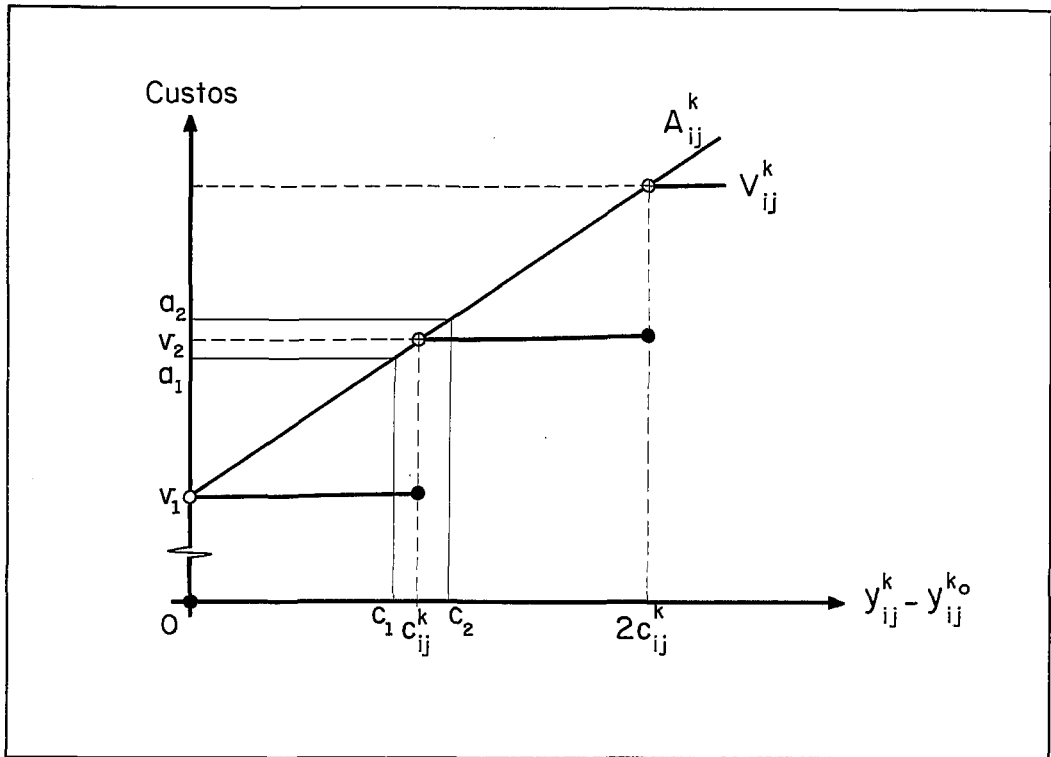


Figura II.5: Custos reais e aproximados

Neste capítulo mostrou-se que a natureza combinatória do problema, com relação a quais arcos devem ser expandidos, e à que capacidade, leva à ineficiência dos algoritmos convencionais quando aplicados a problemas de grande porte. No anexo I, através da apresentação de um problema de síntese de redes de telecomunicações, será mostrado que outros problemas de síntese e expansão de redes geram modelos semelhantes e um mesmo grau de dificuldade com relação à aplicação de algoritmos de otimização. No próximo capítulo serão então apresentados algoritmos aplicáveis a estes problemas e que objetivam uma convergência acelerada para soluções aproximadas suficientemente satisfatórias.

## CAPÍTULO III

### MÉTODOS DE SOLUÇÃO

#### 1. Considerações Gerais

Seja  $(P_2)$ , o problema de programação linear mista formulado no capítulo II:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Minimizar } z = \sum_{(i,j) \in U} \sum_{k \in C} \left[ \delta_{ij}^k I_{ij}^k + \alpha_{ij}^k h_{ij}^k + \beta_{ij}^k (x_{ij}^{k+} + x_{ij}^{k-}) \right] \\ \text{sujeito a: } \sum_{k \in C} \sum_{j \in \Gamma(i)} (x_{ij}^{k+} - x_{ij}^{k-}) = p_i \quad \forall i \in X \\ \\ h_{ij}^k \leq M \delta_{ij}^k \\ \\ x_{ij}^{k+} \leq h_{ij}^k + y_{ij}^{k_0} \\ \\ x_{ij}^{k-} \leq h_{ij}^k + y_{ij}^{k_0} \\ \\ \delta_{ij}^k \in \{0,1\} \\ \\ h_{ij}^k, x_{ij}^{k+}, x_{ij}^{k-} \geq 0 \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \forall (i,j) \in U \\ \forall k \in C \end{array} \right]$$

O terno de vetores  $x^+$ ,  $x^-$  e  $h$ , de dimensão  $mp$  e componentes positivas respectivamente  $x_{ij}^k$ ,  $x_{ij}^{k-}$  e  $h_{ij}^k$ , é dito admissível se estes três vetores fornecem uma solução viável (admissível) para o problema  $(P_2)$ .

Define-se então o domínio de admissibilidade de  $(P_2)$  como  $D = \{x^+, x^-, h \in R^{+mp} \mid [x^+, x^-, h] \text{ compõe uma solução viável de } (P_2)\}$ .

$\delta = [\delta_{ij}^k]$ ,  $I = [I_{ij}^k]$ ,  $\alpha = [\alpha_{ij}^k]$ ,  $\beta = [\beta_{ij}^k]$  são as notações vetoriais dos demais custos e variáveis envolvidos no problema, que pode então ser colocado sob a forma

$$\begin{aligned} \text{minimizar } z &= \delta \cdot I + \alpha \cdot h + \beta \cdot (x^+ + x^-) \\ (P_3) \quad \text{sujeito a } & [x^+, x^-, h] \in D^X \\ & \delta \in \{0,1\}^{mp} \end{aligned}$$

Pode-se constatar facilmente que  $D$  é um politopo convexo não limitado. Convexo, pois é determinado por um conjunto de inequações lineares; não limitado pois se  $(x^+, x^-, h) \in D$ ,  $(x^+, x^-, h + d)$  também pertence a  $D$ , qualquer que seja  $\underline{d} \in R^{+mp}$ .

Dantzig e Hirsch [8] provam que um ótimo absoluto de  $(P_2)$  é necessariamente um ponto extremo de  $D$ , pois a função objetivo é côncava e está submetida a um conjunto de restrições lineares (conjunto convexo).

Desta forma, a primeira idéia para um algoritmo de resolução de tais problemas seria a enumeração extensiva de todas as soluções possíveis, correspondentes a pontos extremos de  $D$ , solução esta absolutamente fora de cogitações para problemas de grande porte, onde sua natureza combinatória torna-se marcante. Algoritmos de corte como os de Gomory [19] e de "branch and bound", como o de Land e Doig [19], também se mostram eficientes em apenas alguns tipos particulares de problemas com custos fixos. Assim sendo, cada vez mais parece ser oportuna a aplicação a tais problemas de algoritmos que convirjam rapidamente, em termos computacionais, para uma solução sub-ótima satisfatoriamente próxima da ótima. Com este objetivo serão apresentados a seguir dois algoritmos

mos |20|, um aplicável à determinação da solução ótima para problemas de pequeno e médio porte, e outro um algoritmo aproximado, destinado à aplicação em problemas de grande porte.

2. Um algoritmo exato do tipo "Branch and Bound"

Seja  $D$  um politopo convexo não limitado e  $u \in U$  um arco do grafo  $G = [X, U]$ , e considere-se o problema:

$$(T_1) \quad \begin{cases} \text{minimizar } z(y) = \sum_{u \in U} c_u(y_u) \\ \text{sujeito a} \quad y \in D \subset \mathbb{R}^{+m} \end{cases}$$

sendo  $y = (y_1, y_2, \dots, y_u, \dots, y_m)$ , e

$$c_u(y_u) = \begin{cases} I_u + \alpha_u y_u, & \text{se } y_u \neq 0 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

Se o suporte do vetor  $y$  for definido como o conjunto dos arcos  $u$  com capacidade  $y_u$  diferente de zero,  $(T_1)$  pode ser formulado como

$$(T_2) \quad \begin{cases} \text{minimizar } z(y) = \sum_{u \in \text{sup}(y)} (I_u + \alpha_u y_u) \\ \text{sujeito a} \quad y \in D \subset \mathbb{R}^{+m} \\ \text{sup}(y) = \{u \in U \mid y_u \neq 0\} \end{cases}$$

Proposição 1: Seja  $S \subset U$  tal que o grafo  $G_S = [X, S]$  seja conexo. Se  $y^0$  é um ponto extremo de  $D$ , solução de

$$(T_3) \quad \begin{cases} \text{minimizar } \alpha \cdot y = \sum_{u \in U} \alpha_u y_u \\ \text{sujeito a} \quad y \in D \\ \text{sup}(y) \subset S \end{cases}$$

então  $y^0$  é ótimo local de  $(T_2)$ .

Demonstração:

Seja  $y^1 \neq y^0$  um ponto extremo de  $D$ , e  $y$  uma combinação linear convexa de  $y^0$  e  $y^1$ .

$$y = y^0 + \lambda(y^1 - y^0), \lambda \in (0,1)$$

$$S^1 = \sup(y^1)$$

$$S^0 = \sup(y^0)$$

- Hipótese (i):  $S^1 \subset S^0$

Então  $\sup(y) = S^0$ , e como  $\alpha y^1 > \alpha y^0 \Rightarrow z(y) > z(y^0)$

- Hipótese (ii):  $S^1 \not\subset S^0$

$S = \sup(y) = S^0 \cup S^1$ , logo existe  $\underline{y} \in S^1 - S^0$

$$\text{Então, } z(y) = z(y^0) + \lambda \alpha (y^1 - y^0) + \sum_{u \in S^1 - S^0} I_u$$

$$z(y) > z(y^0) + \lambda \alpha (y^1 - y^0) + I_v$$

se:  $\alpha y^1 > \alpha y^0 \Rightarrow z(y) > z(y^0)$

$$\alpha y^1 < \alpha y^0, \text{ escolhe-se } \lambda < \frac{I_v}{\alpha(y^1 - y^0)} \Rightarrow z(y) > z(y^0)$$

Logo,  $y^0$  é um ótimo local para  $(T_2)$

Desta proposição conclui-se então que a cada grafo  $G_s \subset G$  pode ser associado um ótimo local de  $(T_2)$ . Se

$$\alpha(s) = \begin{cases} \text{mínimo} & \alpha \cdot y = \sum_{u \in U} \alpha_u y_u \\ \text{sujeito a} & y \in D \\ & \sup(y) \subset S \end{cases}$$

$$I(s) = \sum_{u \in S} I_u$$

$(T_2)$  é equivalente a determinar  $S^* \subset U$  tal que

$$(T_4) \quad \alpha(S^*) + I(S^*) = \underset{S \subset U}{\text{Mínimo}} \quad [\alpha(S) + I(S)]$$

Como  $S$  é um subconjunto de  $U$ , cujo número de partes é  $2^m$ , observa-se a natureza combinatória do problema, que apresenta então  $2^m$  possíveis soluções.

O problema  $(T_4)$  é um problema de programação linear mista, se forem associadas variáveis bivalentes 0-1 a cada aresta do grafo  $G$ :

$$(T_5) \quad \left[ \begin{array}{l} \text{Minimizar} \quad \alpha \cdot y + \delta \cdot I \\ \text{com} \quad y \in D \\ y \leq M\delta \\ \delta \in \{0,1\}^m \\ M \text{ constante positiva suficientemente grande} \end{array} \right.$$

Considere-se a árvore de decisão  $\zeta$  associada ao problema  $(T_4)$  e o grafo orientado definido da seguinte forma:

- os nós de  $\zeta$  correspondem às partes de  $U$ , e  $U(t)$  é a parte de  $U$  correspondente ao nó  $\underline{t}$  de  $\zeta, \underline{t} \in \{1, 2, \dots, 2^m\}$
- $(t, t')$  é um arco de  $\zeta$  se e só se  $U(t') \subset U(t)$  e  $|U(t')| = |U(t)| - 1$   
 $\underline{t}$  é o predecessor único de  $\underline{t}'$   
 $\underline{t}'$  é um sucessor direto de  $\underline{t}$
- a raiz de arborescência é o nó  $\underline{t} = 1$ , tal que  $U(1) = U$

Define-se  $|U(t)|$  como o nível do nó  $\underline{t}$  na árvore  $\zeta$ , e um nó  $\underline{t}'$  é dito sucessor de  $\underline{t}$  se existe um caminho ligando  $\underline{t}$  a  $\underline{t}'$ .

Além disto, 
$$\bigcup_{\substack{t' \text{ sucessor} \\ \text{direto de } t}} U(t') = U(t)$$

Esta árvore  $\zeta$  será utilizada para as operações de "branching". Para o estabelecimento de "bounds", considere-se a função de avaliação  $g(t)$  definida sobre  $\forall t \in \zeta$  da seguinte forma:

$$(i) \quad g(t) \leq \underset{S \subset U(t)}{\text{Mínimo}} \{ \alpha(S) + I(S) \}$$

$$(ii) \quad t' \text{ é sucessor de } t \Rightarrow g(t') \geq g(t)$$

Verifica-se que a função  $g(t) = \alpha(U(t)) + \underset{S \subset U(t)}{\text{Mínimo}} I(s)$   
 $G_s$  conexo

satisfaz as condições (i) e (ii). Sejam as seguintes definições associadas ao algoritmo de "branch and bound" que será apresentado:

(i) Para  $\underline{t} \in \zeta$ ,  $\text{pred}(t)$  é o predecessor imediato de  $\underline{t}$ ,  $v(t)$  é a aresta de  $G$  tal que  $U(t) = U(t') - \{v(t)\}$ , sendo  $t' = \text{pred}(t)$ .

(ii) A uma etapa qualquer,  $T$  é o conjunto de nós de  $\zeta$  examinados e  $T^0 \subset T$  o conjunto de nós pendentes.

Algoritmo A:

(i) Seja  $y^0$  uma solução inicial de  $(T_2)$  e  $z^0 = z(y^0)$   
 $T = \{1\}$ ,  $T^0 = \{1\}$ ,  $\bar{t} = 1$ ,  $g(1) = 0$ ,  $\text{pred}(1) = 0$ ,  $v(1) = 0$

(ii) Determina-se entre os nós pendentes o nó a ser expandido, correspondendo ao que apresenta o menor valor para a função de avaliação:

$$g(t^0) = \underset{t \in T^0}{\text{Mínimo}} \{g(t)\}$$

Se  $g(t^0) > z^0$ ,  $y^0$  é a solução ótima de custo  $z^0$ . Fim

Senão,  $U(t^0) = U$  e  $t = t^0$

(iii)  $t' = \text{pred}(t)$

$$U(t^0) \leftarrow U(t^0) - \{v(t)\}$$

- se  $t' \neq 0 \rightarrow t = t'$  e voltar a (iii)
- se  $t' = 0 \rightarrow$  seguir para (iv)

(iv) Para todos os arcos  $u$  pertencentes a  $U(t^0)$ :

-  $U' = U(t^0) - \{u\}$ , se  $G' = [X, U']$  não é conexo retornar a (iv).

- Calcular  $\bar{y}$ , solução ótima de

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Minimizar } \alpha \cdot y \\ y \in D \\ \text{sup}(y) \subset U' \end{array} \right.$$

e fazer  $\bar{z} = \alpha \cdot \bar{y} + I(\text{sup}(\bar{y}))$

se  $\bar{z} < z^0$  fazer  $z^0 = \bar{z}$  e  $y^0 = \bar{y}$

- Calcular  $\bar{g} = \alpha \cdot \bar{y} + \text{Mínimo} \{I(S)\}$   
 $S \subset U'$   
 $G_S$  conexo

Se  $\bar{g} > z^0$  retornar a (iv)

Senão,  $\bar{t} \leftarrow \bar{t} + 1$  é um novo nó pendente

$$T = T \cup \{\bar{t}\}, T^0 = T^0 \cup \{\bar{t}\}$$

$$g(\bar{t}) = \bar{g}, \text{pred}(\bar{t}) = t^0, v(\bar{t}) = u$$

e retornar a (iv),  $z^0$  é o limite superior de custo.

(v)  $T^0 = T^0 - \{t^0\}$  e retornar a (ii)

### 3. Algoritmos Aproximados

Consistem basicamente de algoritmos que a partir de uma solução inicial  $y^0$  tentam melhorá-la iterativamente, através de modificações locais nos grafos associados à solução corrente, por operações de supressão ou adição de uma aresta, ou de troca de duas arestas.



Os algoritmos que serão apresentados baseiam-se principalmente no seguinte teorema [20]:

Seja  $y^0$  uma solução de  $(T_2)$  e seja  $v = (i, j) \in U$  uma aresta tal que  $c_v(y_v^0) > 0$ . Seja  $L$  a cadeia de custo mínimo ligando os nós  $\underline{i}$ - $\underline{j}$  no grafo  $G-\{v\}$  tal que

$$\omega(L) = \sum_{u \in L} [c_u(y_u^0 + y_v^0) - c_u(y_u^0)]$$

Se  $y^0$  é ótimo local de  $(T_2)$ , então

$$\omega(L) - c_v(y_v^0) \geq 0, \text{ para } \forall v \in U \mid y_v^0 \geq 0$$

Com base no teorema acima e em operações de supressão de arestas, será estudado a seguir um algoritmo aproximado que converge para soluções sub-ótimas (ótimos locais).

#### Algoritmo B:

- (i) Seja  $S = U$ ,  $k = 0$
- (ii) Na iteração  $k$ , se  $S^k$  é o grafo associado a esta iteração, então

$$z(S^k) = \alpha(S^k) + I(S^k)$$

- (iii) Para todo arco  $\underline{u} \in S^k$ , calcular

$$\Delta^k(u) = z(S^{k-u}) - z(S^k)$$

- (iv) Determinar  $u^0$  tal que  $\Delta^k(u^0) = \text{Mínimo}_{u \in S^k} \{\Delta^k(u)\}$

Se  $\Delta^k(u^0) \geq 0$ , a solução encontrada é localmente ótima (sub-ótima), e fim do algoritmo.

- (v)  $S^{k+1} = S^k - \{u^0\}$

$$\Delta^k(u^0) = 0, \text{ faça } k = k + 1 \text{ e retorne a (ii).}$$

O procedimento deste algoritmo é a procura iterativa de uma aresta a ser excluída do grafo, de forma tal que se o

fluxo por ela encaminhado fosse redistribuído, seria provocada uma diminuição no custo total da solução. No passo (ii) é determinado o custo da solução corrente, enquanto no passo (iii) calcula-se o acréscimo ou decréscimo provocado nesta solução devido à supressão de cada aresta, sendo na etapa (iv) determinada a aresta que uma vez retirada provoca o maior decréscimo. Caso a retirada de qualquer aresta provoque acréscimo no custo ( $\Delta^k(u) \geq 0; \forall u \in S^k$ ), a solução em curso é localmente ótima. Senão, a aresta  $\underline{u}$  que maximiza o decréscimo de custo é retirada, e dá-se início à nova iteração do algoritmo.

A título de exemplo, seja um grafo com 6 arestas que apresenta 500 como valor da solução inicial e cuja solução final localmente ótima de custo 394 comporta apenas as arestas 2 e 3, e que a cada iteração fornece os seguintes decréscimos com relação ao custo da solução corrente:

	1	2	3	4	5	6	
$\Delta^1$	-15	-40	+10	-22	-60	-30	aresta suprimida: 5 .... $f(S^1) = 440$
$\Delta^2$	-14	-25	+12	-20	0	-27	aresta suprimida: 6 .... $f(S^2) = 413$
$\Delta^3$	-14	-6	+15	-10	0	0	aresta suprimida: 1 .... $f(S^3) = 399$
$\Delta^4$	0	+3	+20	-5	0	0	aresta suprimida: 4 .... $f(S^4) = 394$
$\Delta^5$	0	+3	+20	0	0	0	

Pode-se pensar em uma otimização deste algoritmo baseando-se no fato de que, cada vez que uma aresta é eliminada, o

decrêscimo no custo da solução corrente devido a eliminação de qualquer outra aresta será menor do que o provocado pela eliminação prévia desta aresta. Isto é, iteração à iteração o possível decrêscimo no custo da solução corrente devido à eliminação de cada aresta diminui. Portanto, após a eliminação de uma aresta, em princípio só é necessário recalcular o segundo maior decrêscimo com relação à iteração em curso, que corresponde à aresta mais promissora para ser eliminada. Se continuar maior ou igual aos demais, esta será a nova aresta a ser retirada. Caso contrário, recalculer-se-ia o decrêscimo real da nova aresta mais promissora, e assim sucessivamente.

Algoritmo B\*

(i) Seja  $S^0 = U$ ,  $k = 0$

Na iteração  $k$ ,  $S^k$  é o grafo associado à esta iteração, então

$$z(S^0) = \alpha(S^0) + I(S^0)$$

Para qualquer  $u \in S^k$ , calcular  $\Delta^0(u) = z(S^0 - u) - z(S^0)$

(ii) Escolher  $u^0$  tal que  $\Delta^k(u^0) = \underset{u \in S^k}{\text{Mínimo}} \{\Delta^k(u)\}$

(iii) Calcular  $\Delta(u^0) = z(S^k - u^0) - z(S^k)$

Se  $\Delta(u^0) \geq \underset{u \in \text{sup}(S^k)}{\text{Mínimo}} \{\Delta^k(u)\}$ , então  $\Delta^k(u^0) = \Delta(u^0)$  e retornar a (ii)  
 $u \neq u^0$

(iv) Se  $\Delta(u^0) \geq 0$  a solução  $S^k$  é localmente ótima, e fim do algoritmo. Caso contrário,

$$S^{k+1} = S^k - \{u^0\}$$

$$\Delta^k(u^0) = 0$$

$k = k+1$ , retornar a (ii)

$$\Delta^{k+1} = \Delta^k$$

Sua aplicação ao mesmo problema anteriormente resolvido pelo algoritmo B, levaria às seguintes etapas de cálculo:

$\Delta^1$	-15	-40	+10	-22	-60	-30	aresta suprimida: 5 .... $f(S^1) = 440$
$\Delta^2$	-15	-25	+10	-22	0	-27	aresta suprimida: 6 .... $f(S^2) = 413$
$\Delta^3$	-14	-6	+10	-10	0	0	aresta suprimida: 1 .... $f(S^3) = 399$
$\Delta^4$	0	+3	+10	-5	0	0	aresta suprimida: 4 .... $f(S^4) = 394$
$\Delta^5$	0	+3	+10	0	0	0	

Denotando-se por  $m$  o número de arestas do grafo  $U$ , a utilização do algoritmo B faz necessária a determinação dos decréscimos causados pela saída de cada uma das  $[m-(k-1)]$  arestas de  $S^k$ , na iteração  $k$ . Logo, o número de avaliações de decréscimos é da ordem de

$$\sum_{k=1}^m [m-(k-1)] = \frac{m+1}{2} \cdot m \approx \frac{m^2}{2}$$

A aplicação na prática do algoritmo B\*<sup>[20]</sup> revela que são necessárias, em média, apenas 2 ou 3 reavaliações de decréscimos em cada iteração, o que tornaria o número de avaliações proporcional a  $3m$ . Assim sendo, a eficiência do algoritmo B\* seria cerca de  $m/6$  vezes a do algoritmo B, com relação ao número de cálculos efetuados e ao tempo de computação, resultado es-

te bastante significativo quando evolui-se para problemas de maior porte. No exemplo em questão, foram feitas 20 avaliações por B, e apenas 13 quando B\* foi utilizado.

No capítulo seguinte será feita a aplicação do algoritmo B a um problema numérico, conforme o modelo (P<sub>2</sub>) desenvolvido no capítulo II, e os resultados e a eficiência do algoritmo serão comparados aos de algoritmos exatos quando aplicados ao mesmo problema |4|.

## CAPITULO IV

### APLICAÇÃO

Com o objetivo de analisar-se a aplicabilidade dos algoritmos aproximados apresentados neste trabalho foi estudado o caso proposto por Garver|13| e resolvido, com a introdução de custos, por Campello|4|.

Seja um sistema de transmissão de potência cujo grafo suporte é descrito na tabela IV.1, na qual os ramos que já possuem uma capacidade instalada correspondem aos ramos já existentes no ano inicial do horizonte de planejamento (ano base).

Ramos do grafo base	Capacidade instalada (MW)	Custos de perdas (US\$/MW)	Custos de expansão (US\$/MW)	Custos fixos (US\$)
1-2	100	4	20	2000
1-4	80	6	38	3800
1-5	100	2	10	1000
1-6	-	6	68	6800
2-3	100	2	10	1000
2-4	100	4	20	2000
2-6	-	3	30	3000
3-5	100	2	10	1000
3-6	-	4	48	4800
4-6	-	3	30	3000
5-6	-	6	61	6100

Tabela IV.1: Descrição do grafo suporte

Em razão da construção de alguns ramos não ser viável, devido a questões físicas e geográficas, e ao interesse no aproveitamento de equipamentos já existentes e terras já desapropriadas, apenas 11 ramos compõem o grafo suporte.

A injeções de potência consideradas são as da tabela IV.2, observando-se que a barra 6 não existia no início do horizonte de estudo.

Nº	Ano Inicial			Ano Final		
	Geração	Carga	Injeção	Geração	Carga	Injeção
1	45	20	25	50	80	- 30
2		60	-60		240	-240
3	145	10	135	165	40	125
4		40	-40		160	-160
5		60	-60		240	-240
6				545		545

Tabela IV.2: Injeções de potência em MW

Para obtenção de uma solução inicial para o problema podem ser utilizadas três estratégias, considerando-se a formulação  $(P_2)$ :

- (i) Resolução de  $(P_2)$  como um problema de programação linear, sem as restrições do tipo  $\delta_{ij}^k \in \{0,1\}$  - aproximação de Balinsky. Ao final, na solução apresentada, as variáveis  $\delta_{ij}^k$  que encontram-se na base são arredondadas para 1.
- (ii) Saturação da rede capacitada inicial e síntese da rede que otimiza  $(P_2)$ , considerando-se capacidades iniciais nulas, e injeções de potência correspondentes às diferenças entre as

que saturam a rede e as previstas para o ano final do horizonte.

(iii) Alocação à rede capacitada inicial das injeções do ano base, e síntese da rede que otimiza ( $P_2$ ), considerando-se capacidades iniciais nulas e injeções de potência correspondentes às diferenças entre as do ano final e as do ano inicial. A seguir, procede-se à superposição destas duas redes (viável para o ano base e construída para os acréscimos).

Para este problema, as três estratégias levaram à obtenção da mesma configuração como solução inicial para o algoritmo de otimização, razão pela qual será apresentada apenas a sua resolução através do emprego da terceira estratégia.

Assim sendo, inicialmente foi determinada a solução ótima para o encaminhamento na rede capacitada inicial dos fluxos decorrentes das injeções de potência correspondentes ao ano base, considerando-se então uma função objetivo que envolvesse apenas os custos de perdas. Como pode ser observado na figura IV.1-A, tal procedimento mostra que diversas linhas encontram-se subutilizadas, o que virá permitir que tais disponibilidades sejam posteriormente aproveitadas.

A seguir, resolveu-se o problema de síntese da rede que atende os acréscimos nos requisitos de geração e carga, conforme formulado em ( $P_2$ ), considerando-se capacidades iniciais nulas, pois, como já foi dito, trata-se de um problema de síntese. Para tal, utiliza-se uma aproximação de Balinsky, como na estratégia(i), e a solução é a da figura IV.1-B.



Esta solução é então superposta à solução para o ano inicial, com a finalidade de serem aproveitadas as disponibilidades nela existentes. Obtém-se então a solução inicial para o algoritmo de otimização, com um custo de 28675, apresentada na figura IV.1-C.

Neste ponto procede-se à aplicação do algoritmo B, com o seguinte critério de supressão de ramos, através de novos roteamentos:

- (i) a cada iteração, procura-se um novo roteamento para as parcelas de fluxo que causaram a expansão ou construção de um arco;
- (ii) tal roteamento segue os seguintes critérios:
  - não há restrição para o aumento nos fluxos através de ramos já expandidos, e,
  - ramos não expandidos poderão vir a ser percorridos, no máximo, por um fluxo igual à sua capacidade inicialmente instalada.

1.<sup>a</sup> iteração:

$\Delta(2-3)$  = decréscimo no custo da solução inicial, provocado pelo roteamento de 15 MW, que percorrem o ramo 2-3, através do caminho  $(2 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 3) = 1270$

$\Delta(4-6)$  = decréscimo no custo da solução inicial, provocado pelo roteamento dos 120 MW enviados do nó 6 para o nó 4, através dos caminhos  $(6 \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 4)$  e  $(6 \rightarrow 2 \rightarrow 4) = 2310$ .

Assim sendo, o arco 4-6 revela-se como o mais promissor para ser suprimido. Sua eliminação e o novo roteamento de fluxo levam à solução da figura IV.2-B, de custo 26365.

2.<sup>a</sup> iteração:

$\Delta(2-3)$  = decréscimo no custo da solução da primeira iteração, provocado pelo roteamento de 10 MW (de forma a não ser ultrapassada a capacidade máxima de arcos não expandidos) que percorrem o ramo 2-3, através do caminho  $(2 \rightarrow 1 \rightarrow 5 \rightarrow 3) = 180$ .

Neste ponto, observa-se que o fluxo em ramo algum pode ser roteado por novo caminho, sem que seja acarretado um aumento no custo da solução, ou seja, a solução de custo 26185 ao final da segunda iteração, apresentada na figura IV.2-C, é um ótimo local para o problema.

A confrontação desta solução com a fornecida por Campello [4] revela que, para este problema, o algoritmo aproximado converge para um ótimo local que corresponde à solução ótima global do problema.

Em [20] encontram-se diversos exemplos de aplicações bem sucedidas dos algoritmos aproximados apresentados, a diversos problemas de planejamento de expansão e síntese de redes. O capítulo seguinte deste trabalho é dedicado a considerações sobre a aplicabilidade do modelo de expansão de sistemas de transmissão de potência formulado, e à análise dos algoritmos estudados e sua aplicação a problemas de planejamento.

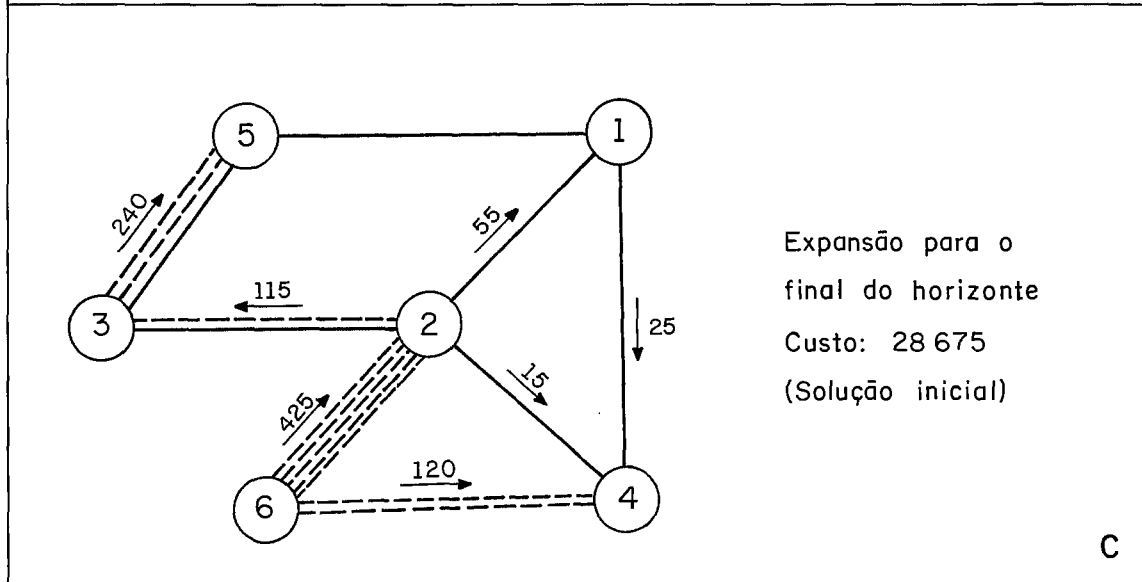
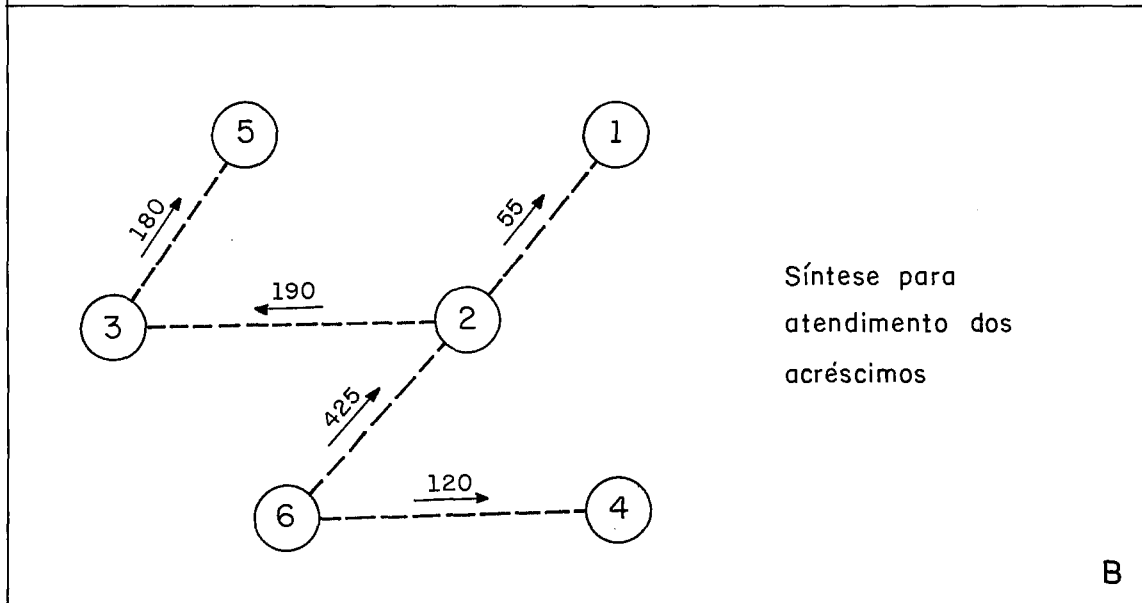
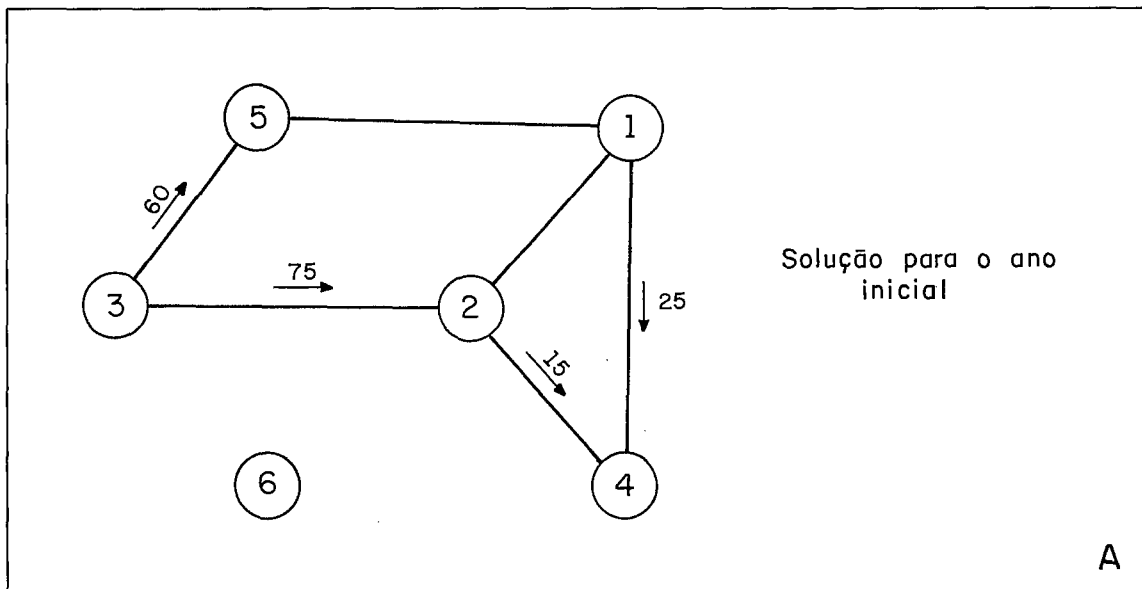


FIGURA IV-1 DETERMINAÇÃO DA SOLUÇÃO INICIAL

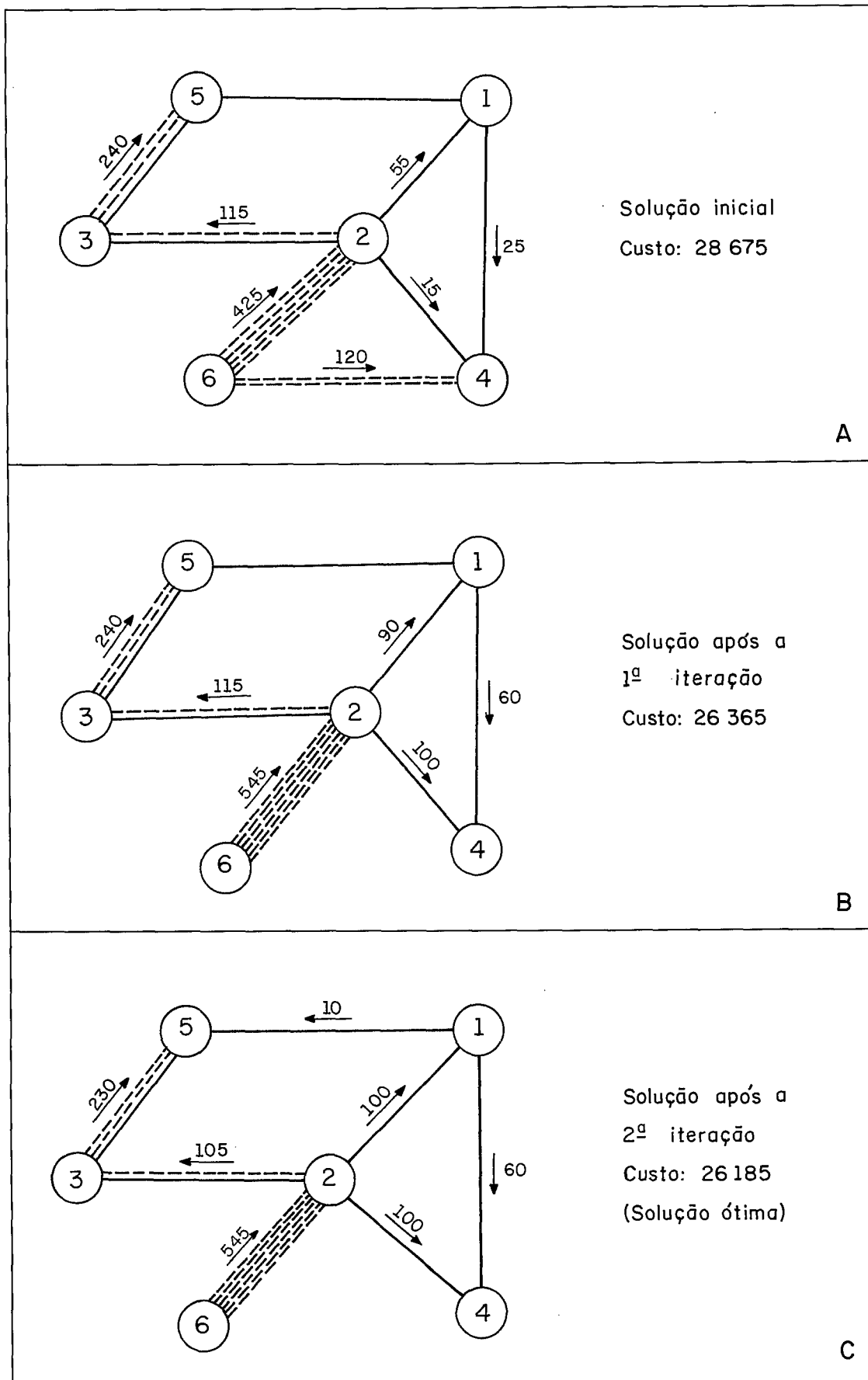


FIGURA IV-2 DETERMINAÇÃO DA SOLUÇÃO FINAL

## CAPITULO V

### CONCLUSÕES

Neste ponto torna-se importante a análise do modelo de expansão e dos algoritmos aqui apresentados, com relação a suas principais características, aplicabilidade e funcionalidade.

O modelo ( $P_2$ ) de expansão apresentado no capítulo II caracteriza-se pela sua simplicidade, decorrente da introdução de algumas hipóteses simplificadoras que permitem colocá-lo sob forma de um modelo linear. Três seriam os principais pontos de discussão sobre a validade de tal modelo aproximado:

- (i) porte dos problemas
- (ii) fatores elétricos
- (iii) critérios econômicos

No que tange aos dois primeiros tópicos, a aplicação de ( $P_2$ ) a um caso real torna-se bastante importante. Assim sendo, procedeu-se à análise da expansão do sistema de transmissão de FURNAS, considerando-se a expansão do sistema existente em 1981 com vistas ao atendimento dos requisitos de geração e carga de 1990, para que fosse efetuada a comparação entre os resultados fornecidos por ( $P_2$ ) e pelo TANIA [17], modelo bastante preciso em termos de análise elétrica. O sistema de transmissão previsto para o ano base de 1981 é apresentado na figura V.1, sendo o grafo suporte para expansões constituído de todos os ramos desta rede e do ramo 49, que interliga os nós 14 e 23. Na tabela V.1 são apresentados os resultados obtidos para a expansão deste sistema, de porte bem signifi-

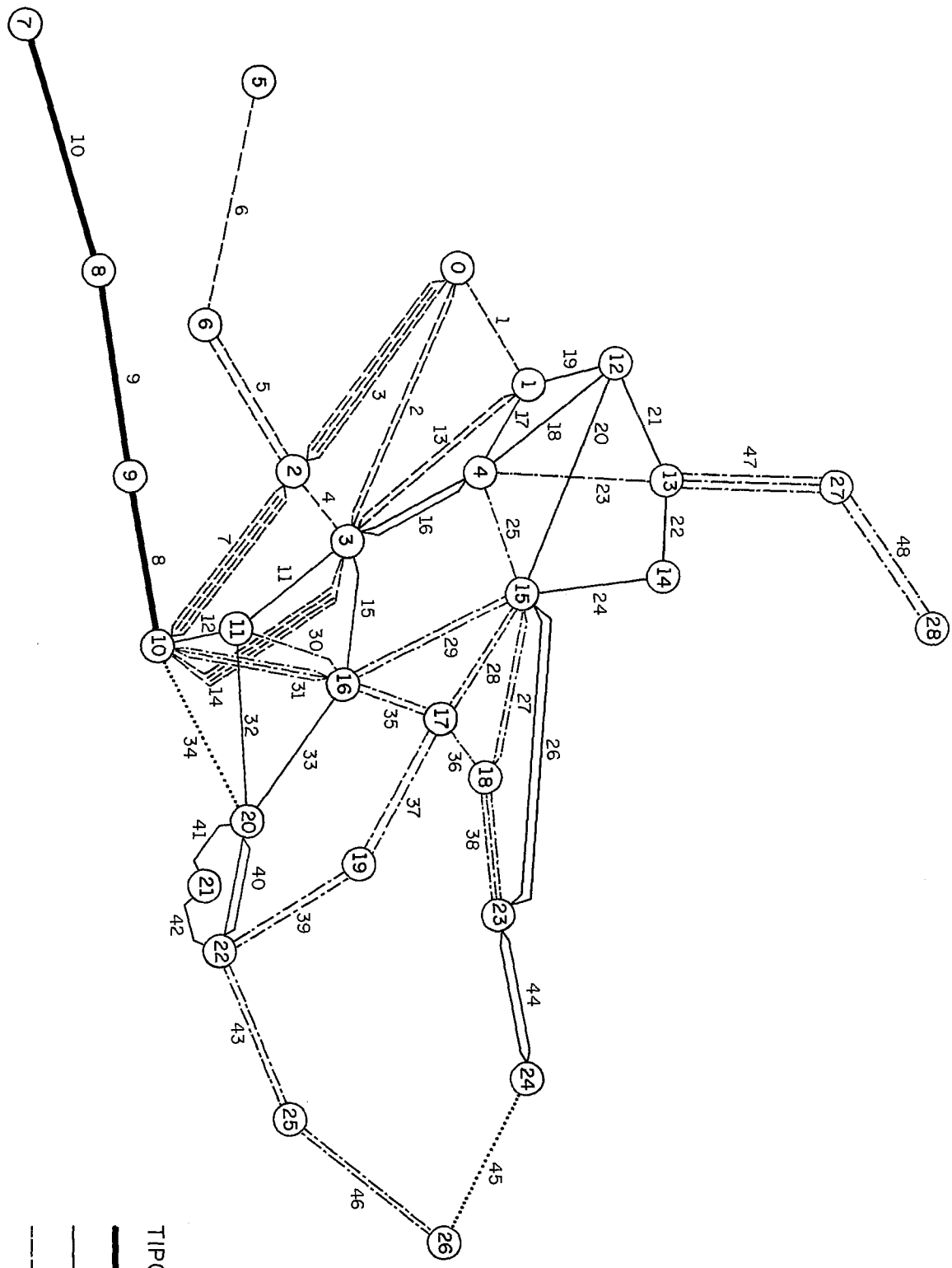


FIGURA V.1 - SISTEMA DE TRANSMISSÃO DE FURNAS (1981)

TIPOS DE LINHAS:

- 765 kV
- 500 kV
- - 440 kV
- · - 345 kV
- 138 kV

cativo (29 nós e 49 ramos), segundo ( $P_2$ ) e segundo o TANIA.

Ramo	Tipo de linha	Número de linhas adicionadas por ( $P_2$ )	TANIA
5	440 kV	1	1
6	440 kV	1	2
8	765 kV	4	4
9	765 kV	4	4
10	765 kV	4	4
11	500 kV	-	1
25	345 kV	-	1
26	500 kV	2	-
36	345 kV	-	3
38	345 kV	-	2
41	500 kV	1	-
42	500 kV	-	2
43	345 kV	1	1
47	345 kV	1	1
49	500 kV	-	1

Tabela V.1: Resultado da expansão do sistema FURNAS

Observa-se que a aplicação dos dois modelos leva a resultados bem próximos:

- nas partes radiais do sistema obteve-se a expansão dos mesmos ramos, tanto com a aplicação de ( $P_2$ ) como com a do TANIA.
- no miolo do sistema, apesar de serem bem semelhantes os resultados, o TANIA prevê a expansão de mais linhas.

A análise das saídas do programa TANIA revela que a

expansão dos ramos 11 e 25, não efetuada por  $(P_2)$ , é decorrente da ocorrência de instabilidade nestes ramos, restrição esta que não foi incorporada a  $(P_2)$ . Além destas, a expansão de outros ramos apenas pelo TANIA é decorrente da imposição de regras de segurança para garantia de atendimento, mesmo na ocorrência de falhas em qualquer dos ramos do sistema. Assim, pode-se concluir que a incorporação de tais restrições e, principalmente, critérios de segurança, ao modelo desenvolvido neste trabalho, viria aproximar bastante os resultados obtidos através de sua aplicação com os fornecidos por modelos mais precisos, sem que fosse acarretado um aumento sensível no tempo de resolução, principalmente se fossem utilizados algoritmos aproximados como o apresentado neste trabalho.

A outra restrição que poderia ser feita ao modelo  $(P_2)$  é a de não levar em consideração critérios econômicos, tais como economias de escala e ocasião dos investimentos, já que em planejamento a longo prazo a ordem em que são tomadas decisões influencia o custo total da estratégia adotada. Entretanto, tais restrições não se aplicam ao problema estudado, cujos objetivos, voltados para o planejamento global do sistema, se prendem à obtenção de uma configuração final viável e de implantação economicamente interessante, e não ao acompanhamento da evolução do sistema ou à determinação de uma política ótima de investimentos anuais.

O emprego do algoritmo aproximado ao exemplo do capítulo IV e ao sistema de FURNAS, assim como a outros problemas apresentados em [20], revela que as aproximações obtidas são em ge



ral bem próximas das soluções ótimas para tais problemas, muitas vezes coincidindo com estas últimas, com a vantagem de convergir bem mais rapidamente do que outros algoritmos de corte e de "branch and bound".

Tais algoritmos aproximados caracterizam-se principalmente pela simplicidade de cada uma de suas etapas, como pode ser observado se analisada sua aplicação específica ao problema de expansão de redes apresentado:

(i) Para determinação da solução inicial:

- Resolução de um problema de determinação de fluxo viável (análise da rede existente)
- Resolução de um problema de programação linear (síntese da rede a ser superposta)

(ii) Durante o algoritmo de otimização, a cada iteração, para cada arco expandido:

- Resolução de um problema de fluxo máximo (determinação da parcela de fluxo que pode ser roteada por outros caminhos)
- Resolução de um problema de fluxo de custo mínimo (como rotear tal parcela de fluxo)

Assim sendo, uma vez considerada a convergência do algoritmo aproximado para uma solução satisfatoriamente próxima da ótima, observa-se que os procedimentos internos de que ele se utiliza são todos bastante simples, o que vem a garantir que tal convergência seja bem mais rápida que a dos algoritmos convencionalmente utilizados.

Em termos de continuidade deste trabalho, seria su

gerida a aplicação dos algoritmos aproximados apresentados a outros problemas de expansão de redes. Por exemplo, a metodologia proposta no anexo II para planejamento da expansão de sistemas de geração/transmissão poderia ser desenvolvida, prestando-se bastante para a aplicação de tais algoritmos, além da formulação do modelo detalhado se apresentar como um trabalho de características bem interessantes. Também, com relação ao modelo apresentado, a incorporação de restrições elétricas e critérios de segurança, com a finalidade de torná-lo mais preciso, ou ainda, a implantação de rotinas para determinação do caminho ótimo para obtenção da solução final apresentada pelo modelo de expansão a longo prazo, teriam o efeito de dotar o planejamento de sistemas de transmissão de um modelo aproximado bem completo, e de aplicação prática bastante eficiente.

## BIBLIOGRAFIA

1. Adams, R.N. e M.A. Laughton - Optimal Planning of Power Networks Using Mixed Integer Programming, Proceedings IEE 121(2), 139-148, 1974.
2. Brameller, A. et alii - A Branch and Bound Algorithm and its Application to Some Large Power System Problems, Computerized Operation of Power Systems, Conference Paper, São Carlos, 1975.
3. Brito, S.S. e I. Camozzato - Modelo Computacional de Análise de Alternativas de Expansão, Subcomitê de Planejamento de Sistemas Elétricos, Rio de Janeiro, 1977.
4. Campello, R.E. - Expansão de um Sistema de Transmissão de Potência: Uma Aplicação de Programação Linear Mista, Tese de Mestrado, COPPE/UFRJ, 1976.
5. Claus, A. e D.J. Kleitman - Heuristic Methods for Solving Large Scale Network Routing Problems: The Telpaking Problem, Studies in Applied Mathematics LIV(1), 17-29, 1975.
6. Colô, A. e A. Miyamoto - Sistema para Formulação e Avaliação Energético - Econômica de Programa de Expansão, Anais do III Seminário Nacional de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, 265-285, 1975.
7. Cooper, L. e B.W. Schmeiser - A Family of Heuristic Solutions Methods for a Class of Nonlinear Programming

- Problems, Computer Mathematics Applications 3, 23-29, 1977.
8. Dantzig, G.B. e W.M. Hirsch - The Fixed Charge Problem, The Rand Corporation, Santa Monica, 1954.
  9. Detroye, J. - Synthèse Optimale d'un Réseau Parcouru par un Multiflot, Tese de Doutorado, Paris, 1976.
  10. Economides, S. - Minimizing the Environmental Impact of Territorial Corridors, Interfaces 7(3), 61-69, 1977.
  11. Ford, L.R. e D.R. Fulkerson - Flows in Networks, Princeton University Press, 1974.
  12. Franco, N. - A Notice on Transmission Planning in Brazil, Rio de Janeiro, 1977.
  13. Gadelha, R. - Investments and Traffic Assignment in a Hybrid Ground and Spacial Telecommunications Network, Dissertação de PhD, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Stanford, 1977.
  14. Garver, L.L. - Transmission Network Estimation Using Linear Programming, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems 89(7), 1688-1697, 1970.
  15. Garver, L.L. et alii - Planning Transmission for the Year 2000, Transmission & Distribution, 32-34, setembro 1975.
  16. Gomes, F.B.M. et alii - Modelo de Ordenação de Usinas Hidro e Termoelétricas, Anais do III Seminário Nacional

de Produção e Transmissão de Energia Elétrica, 251-264, 1975.

17. Gonzaga, C.C. e R.C. Marinho - Otimização e Expansão do Sistema de Transmissão de Furnas: Projeto "TANIA", Relatório Final, Rio de Janeiro, 1976.
18. Grassin, J. e G. Gatot - Optimalisation des Réseaux de Téléinformatique, Annales des Télécommunications 28(1), 3-18, 1973.
19. Hu, T.C. - Integer Programming and Network Flows, Addison Wesley Publishing Company Inc., 1970.
20. Minoux, M. - Multiflots de Coût Minimum Avec Fonctions de Coût Concaves, Annales des Télécommunications 31(3), 77-92, 1976.
21. Minoux, M. - Multiflots Dynamiques de Coût Actualisé Minimal, Annales des Télécommunications 30(1), 51-58, 1975.
22. Minoux, M. - Optimisation et Planification des Réseaux de Télécommunications, Centre National d'Etudes des Télécommunications, Paris, 1976.
23. Minoux, M. - Planification a Court et a Moyen Terme d'un Réseau de Télécommunications, Annales des Télécommunications 29(11), 506-536, 1974.
24. Minoux, M. - Recherche de la Configuration Optimale d'un Réseau de Télécommunications avec Fonctions de Coût

- Concaves, Annales des Télécommunications 29(1), 25-42, 29(3), 139-171, 1974.
25. Minoux, M. e J. Begué - Planification des Investissements, L'Écho des Recherches, 22-35, 1973.
26. Ortiz, S.A. - The Development of Interconnected Power Systems and Energy Control Centers in the United States and Brazil, Computerized Operation of Power Systems, Conference Paper, São Carlos, 1975.
27. Richter, P.C. - Engenharia Econômica dos Sistemas de Transmissão, Revista da Telebrás 4, 8-16, 1978.
28. Salkin, H.M. - Integer Programming, Addison Wesley Publishing Company Inc., 1975.
29. Ulrich, L.Y. - Heuristic Algorithms for Solving a Large Scale Multicommodity Flow Problem on a Network with a Step Function Cost, Studies in Applied Mathematics LIV(3), 207-227, 1975.
30. FURNAS - Carga Leve: Análise e Previsão, Nota Técnica, Rio de Janeiro, 1977.
31. FURNAS - Otimização da Expansão de um Sistema de Energia Elétrica: Projeto "VENUS", Nota Técnica, Rio de Janeiro, 1976.

## ANEXO I

### SÍNTESE DE REDES DE COMUNICAÇÕES

Este anexo tem como objetivo mostrar que a formulação obtida no capítulo II é bastante semelhante à de outros modelos de expansão de redes, e que as técnicas apresentadas no capítulo III se apresentam extremamente eficientes quando aplicadas a estes problemas, em particular ao de síntese e expansão de redes de comunicações.

A diferença marcante entre um modelo para expansão de um sistema de transmissão de potência, com relação ao de expansão de uma rede de comunicações, é que este caracteriza-se pela existência de uma demanda entre pares de nós, ao passo que no primeiro a demanda é caracterizada pela injeção de potência em cada nó.

Seja então  $G = [X, U]$  o grafo base de uma solução para a configuração da rede de comunicações ao final do horizonte de planejamento, onde o mesmo conceito de diversos arcos ligando o mesmo par de nós (multigrafo) é utilizado para denotar os diferentes tipos de equipamentos de transmissão de informação, com relação ao número de canais instalados (capacidade máxima). Será utilizada a seguinte notação:

$d_{ij}$  = demanda entre os centros  $i$  e  $j$

$c_{ij}^k$  =  $k^{\text{ésimo}}$  caminho que interliga os nós  $i$  e  $j$

$n_{ij}$  = número de caminhos que interligam os nós  $i$  e  $j$

$$P_{ij} = \text{matriz de incidência associada ao par } i\text{-}j \text{ de nós} = \\ = \left[ p_{ij}^{ku} \right]_{\substack{k=1, n_{ij} \\ u=1, m}}$$

$$\text{tal que: } \begin{cases} p_{ij}^{ku} = 1 & \text{se } u \in c_{ij}^k \\ p_{ij}^{ku} = 0 & \text{se } u \notin c_{ij}^k \end{cases}$$

$x_{ij}^k$  = fluxo de informações entre  $i$  e  $j$  encaminhado pelo caminho  $c_{ij}^k$

$c_u$  = capacidade instalada no arco  $u$

As restrições físicas associadas ao problema são:

(i) atendimento à demanda:

$$\sum_{k=1}^{n_{ij}} x_{ij}^k = d_{ij} \quad \forall (i,j) \mid i \in X, j \in X$$

(ii) fluxos máximos nos arcos:

$$\sum_{(i,j)} \sum_{k=1}^{n_{ij}} p_{ij}^{ku} x_{ij}^k \leq c_u \quad \forall u \in U$$

(iii) fluxos positivos:

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad \forall (i,j) \mid i \in X, j \in X \\ k = 1, \dots, n_{ij}$$

Para que o problema seja colocado sob a forma de programação mista, devem ser acrescentadas mais duas restrições:



(iv) construção das ligações:

$$\delta_u \in \{0,1\}, \quad \forall u \in U$$

Se o arco  $u$  é tal que  $c_u > 0 \Rightarrow \delta_u = 1$

$$\text{Se } c_u = 0 \Rightarrow \delta_u = 0$$

(v) acrêscimo de capacidade:

a capacidade  $c_u$  de um arco  $u$  só pode ser positiva se este arco foi efetivamente construído:

$$c_u \leq M\delta_u, \text{ sendo } M \text{ um número suficientemente grande.}$$

É importante notar-se que, nesta formulação, as capacidades  $c_u$  e o fluxo  $x_{ij}^k$  referem-se aos acrêscimos de capacidade e fluxo entre os valores atuais e os estimados para o final do horizonte de planejamento, ou seja, são relativos a um problema de síntese.

Para análise da função objetivo do problema, considera-se uma função de custo por unidade de distância, com relação à instalação de uma capacidade  $c_u$  no arco  $u$ , e o comprimento  $l_u$  do arco  $u$ :

$$v(u) = l_u(f_u + g_u c_u)$$

$$\therefore v(u) = I_u + \alpha_u c_u$$

$f_u$  = custo fixo por unidade de distância

$g_u$  = custo unitário de acrêscimo de capacidade por unidade de distância

$l_u$  = comprimento do arco  $u$

Os custos fixos  $I_u$  correspondem a despesas com acessos às instalações, construção civil de prédios e torres espaçadas à distância padrão e despesas com pessoal, e os custos lineares  $\alpha_u c_u$  correspondem a custos de transmissão (equipamentos de rádio e antenas) e de comutação, também representando uma simplificação da função degrau de custos, mais representativa do caso real.

Com a introdução das variáveis bivalentes  $\delta_u$  associadas à cada arco, a função objetivo a ser considerada é então

$$\text{minimizar } z = \sum_{u \in U} \delta_u I_u + \alpha_u c_u$$

Observa-se que o problema proposto é de minimização, e que o aparecimento de  $c_u$  na função objetivo fará com que as capacidades instaladas correspondam exatamente ao fluxo que percorrerá os arcos, o que permitirá suprimir a restrição de fluxo máximo em cada arco e a substituição de  $c_u$  na função objetivo e nas restrições de acréscimo de capacidade por

$$\sum_{(i,j)} \sum_{k=1}^{n_{ij}} p_{ij}^{ku} \cdot x_{ij}^k$$

Obtem-se então a seguinte formulação:

$$\text{minimizar } z = \sum_{u \in U} \delta_u I_u + \sum_{(i,j)} \sum_{k=1}^{n_{ij}} \left[ \sum_{u \in U} (\alpha_u p_{ij}^{ku}) \right] x_{ij}^k$$

$$\text{sujeito a } \sum_{k=1}^{n_{ij}} x_{ij}^k = d_{ij} \quad \forall (i,j) \mid i \in X, j \in X$$

$$\sum_{(i,j)} \sum_{k=1}^{n_{ij}} p_{ij}^{ku} \cdot x_{ij}^k \leq M\delta_u \quad \forall u \in U$$

$$\delta_u \in \{0,1\} \quad \forall u \in U$$

$$x_{ij}^k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n_{ij}$$

$$\forall (i,j) \mid i \in X, j \in X$$

Se  $n = |X|$  é o número de centros a serem interligados, o número máximo de arcos do grafo é  $\frac{n(n-1)}{2} \cdot p$  quando o grafo for completo, sendo  $p$  o número de equipamentos de transmissão com capacidades diferentes existente, e  $m = \frac{n(n-1)}{2}$  o número de pares de centros que se comunicam.

Assim sendo, o número máximo de caminhos que interligam dois nós quaisquer  $i-j$  do grafo base, suposto completo é

$$l = \sum_{k=0}^{n-2} p^{k+1} A_{n-2}^k$$

Logo, o modelo apresenta

$mp$  variáveis bivalentes  $(\delta_u)$ ,

$m\ell$  variáveis contínuas  $(x_{ij}^k)$ ,

$m$  restrições de demanda, e

$mp$  restrições de expansão.

Seja um problema de porte bem pequeno, com 5 nós e 3 tipos de sistemas de transmissão possíveis entre cada nó, que

equivale à existência de 30 arcos e 678 caminhos entre cada par de nós. Este problema apresentará então 30 variáveis inteiras, 6780 variáveis contínuas, 10 restrições de demanda e 30 restrições com relação à expansão dos arcos.

Este exemplo serve bem para ilustrar como a resolução deste tipo de problema se torna complexa, com a introdução de funções de custo não lineares e com o aumento do número de nós e arcos.

Minoux [20] aplica as técnicas apresentadas no capítulo III a alguns problemas numéricos, considerando funções de custo da forma  $c_u(y_u) = d_u(\delta + y_u)$  em grafos com 8 nós e 15 arcos, com diferentes valores para os custos fixos. O resultado indica que, em grande parte dos casos, a solução fornecida pelos algoritmos aproximados B e B\* é a mesma que a fornecida pelo algoritmo exato A, e que, quando isto não acontece, a diferença entre as duas é da ordem de 1 a 2% apenas, sendo muito grande o número de nós da árvore  $\zeta$  explorados pelo do algoritmo A. A aplicação destes algoritmos ao problema de teledistribuição com uma fonte, em grafos com 7 nós e 14 arcos, aponta sempre a obtenção da solução ótima pelos algoritmos aproximados, da mesma forma que, no problema de transmissão de potência, nas partes radiais do sistema a solução aproximada coincide com a ótima.

Estas técnicas também foram aplicadas, com bastante sucesso, à planificação a longo prazo da rede telefônica interurbana da França [24] durante o período 1975-1985.

## ANEXO II

### OUTRO ENFOQUE PARA O PLANEJAMENTO ENERGÉTICO

O problema de planejamento energético consiste em determinar como deve ser conduzida a expansão de um parque gerador de energia e do sistema de transmissão, de forma a atender o crescimento do mercado a um custo mínimo, mantendo ainda um determinado nível de garantia. Se  $X$  representa o conjunto de usinas, subestações e centros de carga, e  $U$  o conjunto de ramos que efetuam a transmissão de potência entre estes centros,  $G = [X, U]$  é o grafo que representa matematicamente tal sistema, formado pelo parque gerador, rede de transmissão, subestações e centros de carga. Dois nós são anexados ao conjunto  $X$ :

nó S: representa um nó que corresponde à geração total em todo o parque gerador; a capacidade máxima dos arcos que interligam o nó S a cada nó correspondente a uma usina é a capacidade máxima de geração desta usina.

nó T: representa um nó que concentra todo o consumo; a capacidade mínima de cada arco que interliga o nó T a um nó representativo de um centro consumidor corresponde ao consumo neste centro.

Assim sendo, se algumas das usinas ainda não foram construídas ou completamente motorizadas, e representam temporariamente possíveis obras, os arcos que as ligam ao nó S podem ser interpretados como possíveis de serem expandidos, através da en-

trada em operação da usina ou de novas máquinas, da mesma forma que as ligações entre as usinas, subestações e centros de consumo podem ter sua capacidade de transmissão aumentada.

Em cada tipo de arco, podem ser feitos diferentes tipos de investimentos. Assim, em arcos que representam geração, os possíveis investimentos são a instalação de novas máquinas e a construção de novas usinas, e em arcos que representam linhas de transmissão, sua expansão ou a instalação de novas linhas. Para arcos de transmissão, por exemplo, considerando-se  $C_u$  como o conjunto de diferentes tipos de linhas que podem ser instaladas no arco  $u \in U$ , são apresentados na figura A.1 os possíveis investimentos neste arco.

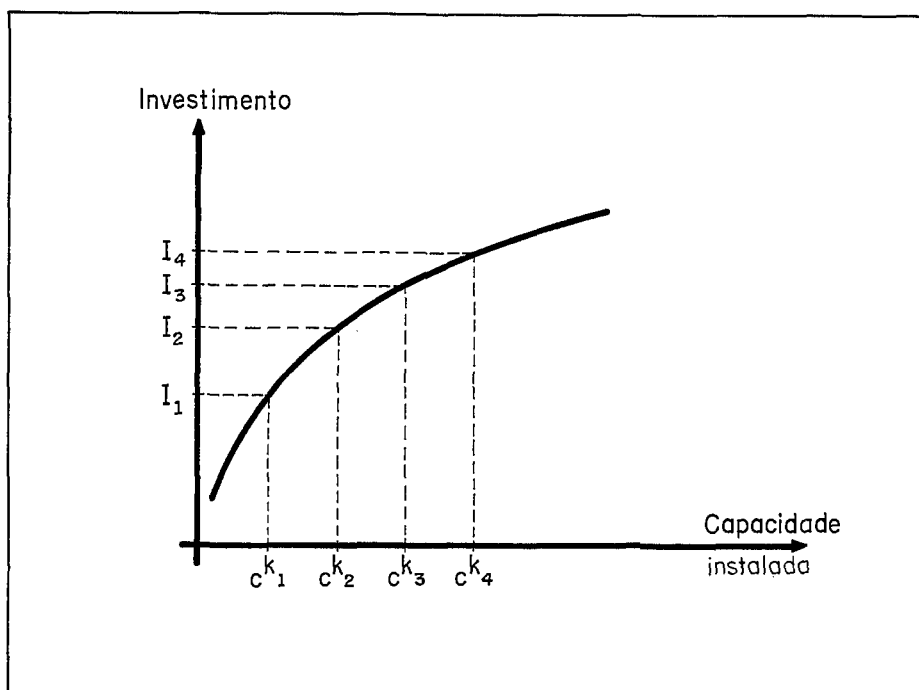


Figura A.1: Investimento em transmissão ( $k_i \in C_u$ )

O método tradicionalmente utilizado no planejamento a longo prazo [31] consiste na determinação do caminho de custo mínimo em um grafo, expandido através de programação heurística ou

dinâmica, no qual estágios correspondem a anos do horizonte de estudo e estados são as configurações do sistema. Este problema não é entretanto solucionável de forma simples, pois apresentando um porte bem grande, sua resolução não se torna muito operacional, mesmo através do método de Dijkstra que faz com que o grafo não seja inteiramente examinado.

Assim, como mencionado no capítulo I, uma boa estratégia consistiria na determinação da solução ao final do horizonte de planejamento, seguindo-se a recuperação do caminho ótimo que conduz a esta solução.

Voltando-se ao problema inicial, seja  $d_j(t)$  a função que expressa a demanda de potência no nó  $j$  (centro de consumo) no tempo  $t$  (figura A.2), obtida através da aproximação das estimativas anuais por uma função contínua.

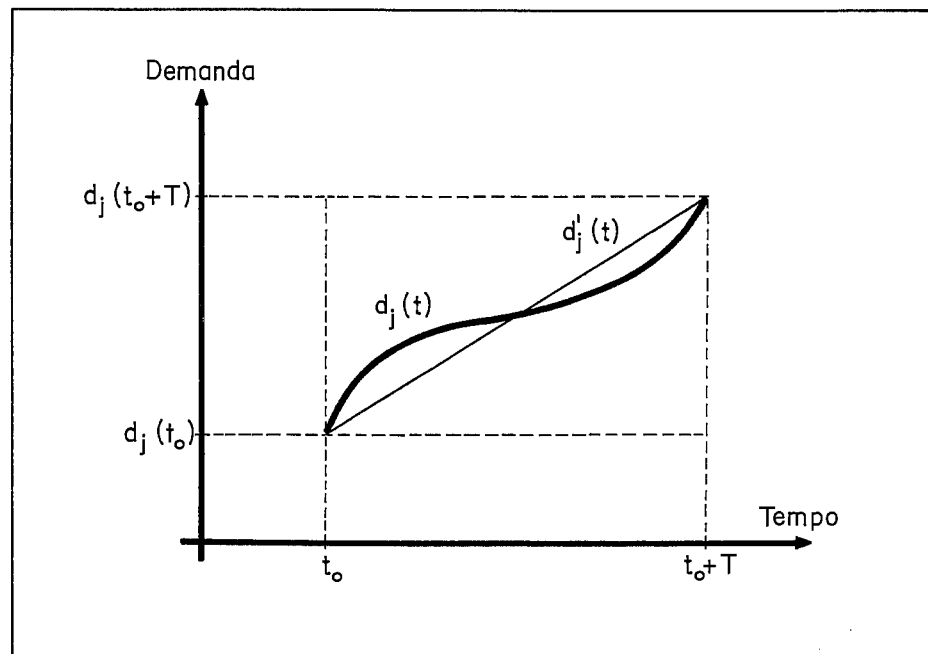


Figura A.2: Crescimento da demanda de potência

Desde que o intervalo de tempo entre duas expansões de um mesmo arco não seja muito grande, podemos linearizar a função  $d_j(t)$  neste intervalo, sendo  $v_j$  a velocidade de crescimento da demanda do nó:

$$d_j(t) = d_j(t_0) + v_j(t - t_0) + \sigma(t - t_0)$$

Deve observar-se também que, como o objetivo consiste na determinação da solução ao final do horizonte de planejamento, é indiferente se a demanda é uma função de comportamento irregular no tempo ou não, o que importa é uma boa estimativa da demanda final. Assim sendo, não se incorre em erros ao final do horizonte de planejamento se a função  $d_j(t)$  for aproximada pela reta

$$d_j'(t) = v_j t + \delta, \text{ com } v_j = \frac{d_j(t_0 + T) - d_j(t_0)}{T}$$

Então, a cada arco ligando o centro consumidor  $j$  ao nó  $T$ , está associada uma velocidade  $v_j$  de crescimento de demanda.

Considere-se agora os arcos associados a linhas de transmissão e obras de geração, e seja  $f_u(c)$  o custo de instalação da capacidade  $c$  (linhas de transmissão ou máquinas de uma usina) no arco  $u$ . Se este investimento objetiva atender um crescimento de  $v_u$  unidades ao ano, ele estará esgotado e necessitando de expansão após  $t' = c/v_u$  anos. Se  $A$  for o desembolso anual de uma série uniforme durante  $t'$  anos, que correspondesse ao investimento  $f_u(c)$ , tem-se

$$f_u(c) = \sum_{t=0}^{t'-1} \frac{A}{(1 + \zeta)^t}, \quad \zeta = \text{taxa de atratividade}$$

$$\therefore f_u(c) = A \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + \zeta}\right)^{t'}}{1 - \left(\frac{1}{1 + \zeta}\right)}$$



$$\therefore A = \left[ \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + \zeta}\right)}{1 - \left(\frac{1}{1 + \zeta}\right)^{t'}} \right] f_u(c)$$

Se este for o melhor investimento para um período  $t'$  do horizonte de planejamento 0-T, ele o será também para outros períodos  $t'$  deste horizonte. Desta forma, o valor total do investimento corresponde à instalação da capacidade  $c$  no arco  $u$  durante o horizonte de planejamento será

$$z_u = \sum_{t=0}^{T-1} \frac{A}{(1 + \zeta)^t} = A \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + \zeta}\right)^T}{1 - \left(\frac{1}{1 + \zeta}\right)}$$

$$z_u = \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + \zeta}\right)}{1 - \left(\frac{1}{1 + \zeta}\right)^{t'}} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{1 + \zeta}\right)^T}{1 - \left(\frac{1}{1 + \zeta}\right)} f_u(c)$$

$$z_u = \frac{f_u(c)}{1 - (1 + \zeta)^{-c/v_u}} \left[ 1 - \frac{1}{(1 + \zeta)^T} \right]$$

Assim sendo, como o último fator é uma constante para todos investimentos, o investimento  $c^*$  mais adequado a expansão do arco  $u$  é aquele que satisfaz

$$z(v_u, c^*) = \underset{c \in C_u}{\text{Mínimo}} z(v_u, c) =$$

$$= \underset{c \in C_u}{\text{Mínimo}} \frac{f_u(c)}{1 - (1 + \zeta)^{-c/v_u}} \left[ 1 - \frac{1}{(1 + \zeta)^T} \right]$$

Associa-se então a cada arco uma função  $\bar{z}(v_u) = z(v_u, c^*)$  que representa o custo de expansão do arco  $u$  em função da sua velocidade de crescimento  $v_u$ .

Considerando-se 3 como os tipos de investimentos possíveis em um certo arco, obter-se-ia um resultado como o da figura A.3.

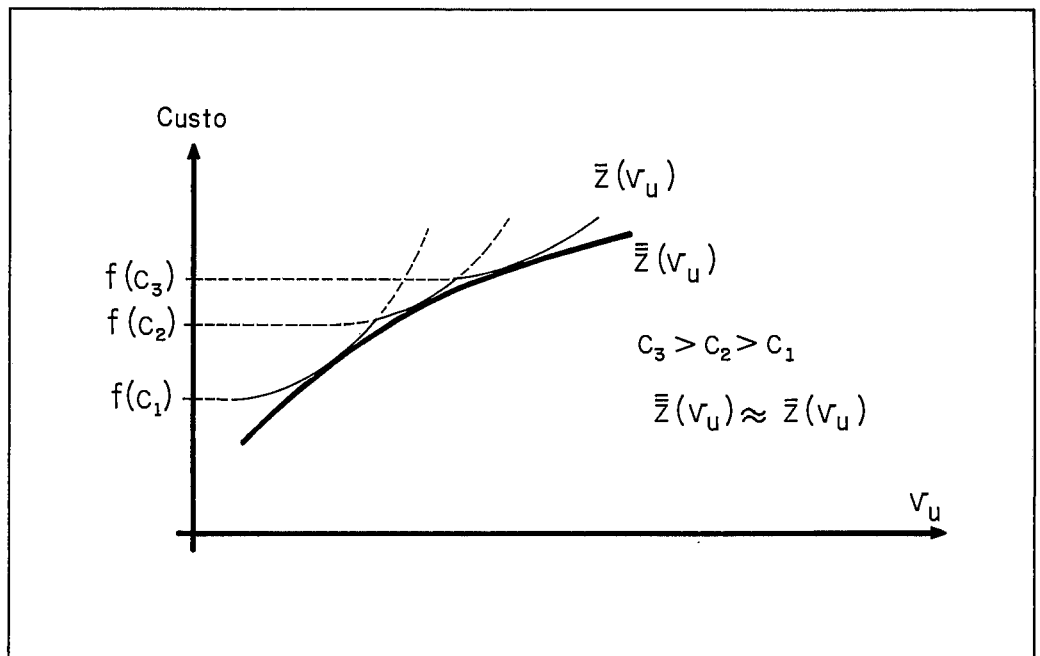


Figura A.3: Custos de expansão em função da velocidade de crescimento da demanda

A função  $\bar{z}(v_u)$  apresenta comportamento bastante semelhante ao da função côncava  $f_u(c)$ , devido a fenômenos de economia de escala, podendo ser aproximada pela função côncava  $\bar{z}(v_u)$ .

Obtem-se então um grafo  $G' = [X', U']$ , sendo  $X' = X \cup \{S\} \cup \{T\}$  e  $U' = \{(i, j) \mid (i, j) \in U\} \cup \{(S, j) \mid p_j > 0\} \cup \{(j, T) \mid p_j < 0\}$ , no qual existem tres tipos de arcos:

(i) arcos do tipo fonte fictícia-usina: têm uma velocidade de

crescimento  $v_u$ , e um custo de expansão dado por  $\bar{z}(v_u)$ , correspondendo a uma usina do grafo  $G$ .

- (ii) arcos que representam linhas de transmissão: apresentam as mesmas características que os anteriores.
- (iii) arcos do tipo consumo-sumidouro fictício: a estes arcos estão associados custos nulos e velocidades constantes de crescimento, correspondendo a um centro de carga do grafo  $G$ .

Partindo-se da hipótese de que no início do horizonte de estudo as demandas são atendidas pela geração disponível e pelo sistema de transmissão existente, o problema de planejamento se traduz então em dotar, a um custo mínimo, os arcos dos tipos (i) e (ii) de velocidades de crescimento que atendam à velocidade de crescimento dos arcos do tipo (iii), ou seja, um problema de determinação de fluxo mínimo com funções côncavas de custo. Uma vez determinadas as velocidades ótimas de crescimento, obtém-se a configuração final do sistema. A este problema, de dimensões bem grandes, e portanto de resolução bastante demorada, a aplicação dos métodos desenvolvidos no capítulo III certamente teria grande utilidade, ficando em aberto tal aplicação, necessitando-se para isto um tratamento mais formal da formulação aqui apresentada.