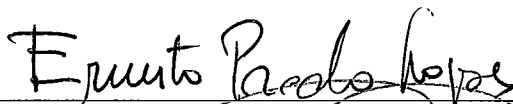


UM MÉTODO WAVELET-GALERKIN
APLICADO À UMA EQUAÇÃO DIFERENCIAL
PARCIAL COM COEFICIENTE NÃO-CONSTANTE

José Roberto Linhares de Mattos

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

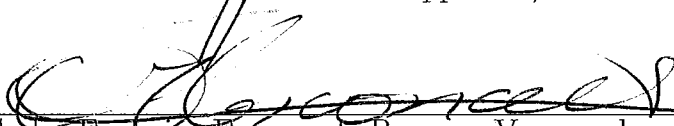
Aprovada por:



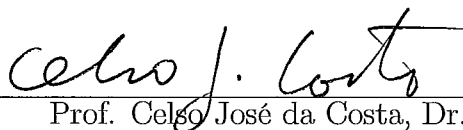
Prof. Ernesto Prado Lopes, PhD.



Prof. Rolci de Almeida Cippolatti, Dr.



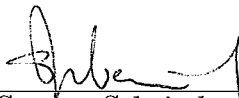
Prof. Carlos Frederico Fragozo de Barros e Vasconcelos, D.Sc.



Prof. Celso José da Costa, Dr.



Prof. Marcelo Dutra Fragozo, PhD.



Profa. Susana Scheimberg de Makler, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL
SETEMBRO DE 2001

MATTOS, JOSÉ ROBERTO LINHARES DE

Um Método Wavelet-Galerkin Aplicado a
uma Equação Diferencial Parcial com coefi-
ciente não constante [Rio de Janeiro] 2001

VII, 114p. 29,7cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,
Engenharia de Sistemas e Computação, 2001)

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Wavelet
2. Análise de Multiresolução
3. Método Wavelet-Galerkin
4. Equações Diferenciais

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

À

Lu, Junior e Ju

Agradecimentos

Agradeço a DEUS por ter permitido a elaboração deste trabalho.

Agradeço aos meus pais que me propiciaram a educação necessária para que eu chegasse até aqui.

Agradeço a minha esposa Sandra Maria Nascimento de Mattos pela compreensão.

Agradeço ao Prof. Ernesto Prado Lopes pela orientação.

Agradeço aos amigos Carlos Eduardo Mathias Motta e Humberto Mendonça da Silva do Departamento de Matemática da UFRRJ, que apoiaram meu afastamento, e a amiga e colega de Doutorado Eulina Coutinho Silva do Nascimento que, além disso, esteve presente nos momentos difíceis.

Enfim, agradeço a todos aqueles que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

UM MÉTODO WAVELET-GALERKIN APLICADO A UMA EQUAÇÃO
DIFERENCIAL PARCIAL COM COEFICIENTE NÃO CONSTANTE

José Roberto Linhares de Mattos

Setembro/2001

Orientador: Ernesto Prado Lopes

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Nós consideramos o Problema $K(x)u_{xx} = u_t$, $0 < x < 1$, $t \geq 0$, onde $K(x)$ é limitada inferiormente por uma constante positiva. A solução no bordo $x = 0$ é uma função conhecida g e $u_x(0, t) = 0$. Este problema é um problema mal-posto no sentido que uma pequena perturbação no bordo, pode produzir uma grande alteração na solução, se ela existir. Isto significa que se a solução existe, ela não depende continuamente da condição g no bordo. Nós consideramos soluções $u(x, \cdot) \in L^2(R)$ e usamos um Método Wavelet-Galerkin com a Análise de Multiresolução de Meyer, para filtrar as altas frequências e obter problemas aproximantes bem postos nos espaços de escala V_j . Nós derivamos também uma estimativa para a diferença entre a solução exata do problema e a projeção ortogonal, sobre V_j , da solução do problema aproximante definido em V_{j-1} .

Abstract of the Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

A WAVELET-GALERKIN METHOD APPLIED TO A PARTIAL
DIFFERENTIAL EQUATION WITH VARIABLE COEFFICIENT

José Roberto Linhares de Mattos

September/2001

Advisor: Ernesto Prado Lopes

Department: Computing Systems Engineering

We consider the problem $K(x)u_{xx} = u_t$, $0 < x < 1$, $t \geq 0$, where $K(x)$ is bounded below by a positive constant. The solution on the boundary $x = 0$ is a known function g and $u_x(0, t) = 0$. This is an ill-posed problem in the sense that a small disturbance on the boundary specification g , can produce a big alteration on its solution, if it exists. This means that if the solution exists, it does not depend continuously on g . We consider solution $u(x, \cdot) \in L^2(R)$ and we use a Wavelet-Galerkin Method with the Meyer Multiresolution Analysis, to filter away the high-frequencies and to obtain well-posed approximating problems in the scaling spaces V_j . We also derive an estimate for the difference between the exact solution of the problem and the orthogonal projection, onto V_j , of the solution of the approximating problem defined in V_{j-1} .

ÍNDICE

1	Introdução	01
2	A Transformada de Fourier e Teoria das Distribuições	04
2.1	Introdução	04
2.2	A transformada de Fourier e o Espaço de Schwartz	04
2.3	Convergência no Espaço de Schwartz	11
2.4	A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R})$	31
2.5	Distribuições	36
2.6	Derivada no sentido das Distribuições	51
2.7	A Transformada de Fourier no Espaço das Distribuições Temperadas	53
2.8	A Derivada da Transformada de Fourier no Espaço das Distribuições Temperadas	57
3	Wavelets e Análise de Multiresolução	60
3.1	Introdução	60
3.2	Wavelets e Frames	60
3.3	Análise de Multiresolução e Wavelet	84
4	Um Método Wavelet-Galerkin Aplicado a uma EDP	96
4.1	Introdução	96
4.2	O problema	96
4.3	Estabilidade do Método	97
4.4	Convergência do Método	106
5	Conclusão	110
	Bibliografia	111

1 INTRODUÇÃO

O método de Galerkin clássico consiste em aproximar um espaço de Hilbert separável, por espaços de dimensão finita gerados pelos n -ésimos primeiros elementos da base. Estes espaços são chamados *espaços aproximantes*. Quando os espaços aproximantes no método de Galerkin são os espaços de escala de uma Análise de Multiresolução de $L^2(\mathbb{R})$ de bases ortonormais de Wavelets (portanto, espaços de dimensão infinita), o método passa a ser chamado *Método Wavelet-Galerkin*. Este método foi introduzido por Glowinski [15]. Aplicações deste método podem ser vistas em [14], [18], [22], [31], [37], [38] e [39].

A teoria de Wavelet tem sido muito aplicada às equações diferenciais, como método de aproximação. Vide, por exemplo, [1], [2], [5], [6], [14], [15], [16], [17], [18], [22], [32], [34], [37], [38], [39], [41] e [42]. Em particular, no estudo da equação do calor, como em [14], [18], [37], [38], [39] e [41]. Por exemplo, Shen e Strang [41] estudaram as soluções fundamentais wavelets para a equação do calor (as Heatlets), ou seja, estudaram propriedades básicas da solução do problema de calor clássico sujeito a uma condição inicial dada por uma wavelet. Em [14], [37], [38] e [39], um Método Wavelet-Galerkin, com a wavelet de Meyer, é usado no estudo da equação clássica do calor. Reginska em [38] e [39] considera um problema de Cauchy para a equação do calor com condição em $x = 1$ e busca uma solução em $0 \leq x < 1$. O método utilizado é um método wavelet-Galerkin com a análise de multiresolução de Meyer. Os problemas aproximantes são problemas de Cauchy clássicos cujas soluções são dadas pela teoria de semigrupos.

Neste trabalho estaremos interessados no seguinte problema

$$\begin{cases} K(x) u_{xx}(x, t) = u_t(x, t) & , \quad 0 < \alpha \leq K(x) < +\infty, \quad t \geq 0, \quad 0 < x < 1 \\ u(0, \cdot) = g & , \quad u_x(0, \cdot) = 0 \end{cases} \quad (\text{I})$$

Nós consideramos que o problema (I) tem uma solução $u(x, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ e estendemos $u(x, t)$ e a condição no bordo g para $t \in \mathbb{R}$ assumindo que ambas se anulam para $t < 0$.

O problema (I) é um problema mal posto, no sentido que uma pequena perturbação da condição g no bordo, pode produzir uma grande alteração na solução, se ela existir. Isto significa que se a solução existe, ela não depende continuamente¹ da condição g no bordo.

Nós consideraremos a Análise de Multiresolução de Meyer, que será construída no capítulo 3. A vantagem de usar a wavelet de Meyer é que ela tem “boa localização” na frequência, já que sua transformada de Fourier tem suporte compacto. A projeção ortogonal sobre os espaços de escala de Meyer, pode ser considerada como um filtro de passa banda, cortando as altas frequências. Utilizando um método Wavelet-Galerkin com a Análise de Multiresolução de Meyer, regularizamos o mau condicionamento do problema, aproximando-o por problemas bem-postos nos espaços de escala V_j . Nós obtemos uma versão da desigualdade de Gronwall, dada no lema 4.3.1, que permitirá obter uma estimativa para a frequência da solução do problema (I).

Da formulação variacional do problema (I) em V_j , nós obtemos um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com coeficientes variáveis. Uma estimativa obtida no lema 4.3.3, para a solução deste problema de evolução, é usada para obter a estabilidade do método wavelet-Galerkin, dada no teorema 4.3.4. Fazendo uso de uma estimativa obtida para a diferença entre a solução exata do problema (I) e sua projeção ortogonal sobre V_j , dada na proposição 4.4.1, nós obtemos uma estimativa para a diferença entre a solução exata do problema (I) e a projeção ortogonal, sobre V_j , da solução do problema aproximante definido no espaço de escala V_{j-1} . Este é o resultado da convergência do Método Wavelet-Galerkin utilizado, com uma estimativa de erro, obtido no teorema 4.4.3.

Até onde foi visto, só Reginska em [38] e [39] trabalha com algo parecido. O problema tratado por Reginska é um problema inverso para a equação do calor com coeficiente constante. Neste caso, a formulação variacional no espaço de escala V_j , do problema aproximante, gera um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem com coeficientes constantes, cuja solução é dada em termos de semigrupos de operadores. Desta forma ela obtém a estabilidade e a convergência do método aplicado ao seu problema.

O presente trabalho está disposto da seguinte forma:

¹Ver capítulo 4.

No capítulo 2, nós damos uma introdução à Transformada de Fourier e à teoria das distribuições. No capítulo 3, nós apresentamos a teoria de Wavelet e Análise de Multiresolução, necessária ao presente trabalho, e construímos a Análise de Multiresolução de Meyer. No capítulo 4, nós obtemos as estimativas da estabilidade numérica e da convergência do método wavelet-Galerkin aplicado ao problema (I).

Algumas provas no capítulo 2 poderiam ser suprimidas. Entretanto, optamos por apresentá-las com o objetivo de tornar o texto o mais auto-suficiente possível, para ser usado como consulta. Apenas alguns resultados clássicos de Análise Funcional e Medida e Integração, como o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue e o Teorema de Fubini, entre outros, não são demonstrados. No capítulo 3 foram feitos todos os detalhes, por se tratar de uma teoria bastante recente e várias demonstrações não serem encontradas explicitamente na literatura.

Os resultados do capítulo 4 foram apresentados na “*FIFTH MISSISSIPPI STATE CONFERENCE ON DIFFERENTIAL EQUATIONS AND COMPUTATIONAL SIMULATIONS*”, realizado na *Mississippi State University*, e no “*INTERNATIONAL WORKSHOP ON NUMERICAL LINEAR ALGEBRA, NUMERICAL METHODS FOR PDEs AND OPTIMIZATION*”, realizado em Curitiba e submetido para publicação no *Electronic Journal of Differential Equations*.

Nós usaremos as notações e^x e $\exp x$ sem distinção.

2 TRANSFORMADA DE FOURIER E TEORIA DAS DISTRIBUIÇÕES

2.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo nós apresentaremos a Transformada de Fourier numa versão suficientemente geral para as necessidades do presente trabalho. Mais especificamente, apresentaremos os resultados mais importantes da teoria de distribuição e da transformada de Fourier de distribuições, que fazem parte das preliminares no estudo de wavelets e de Equações Diferenciais Lineares.

Na seção 2.2 nós introduzimos o espaço de Schwartz e a transformada de Fourier neste espaço. Na seção 2.3 nós mostramos que a transformada de Fourier é um operador linear contínuo do espaço de Schwartz nele mesmo. Na seção 2.4 nós estendemos a transformada de Fourier \mathcal{F} ao espaço $L^2(\mathbb{R}^n)$ e mostramos que $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\mathcal{F}$ é um operador unitário no $L^2(\mathbb{R}^n)$. Na seção 2.5 nós introduzimos o conceito de distribuição e de distribuição temperada. Na seção 2.6 nós damos o significado de derivada no sentido das distribuições. Na seção 2.7 nós apresentamos a transformada de Fourier de uma distribuição e na seção 2.8 nós definimos a derivada da transformada de Fourier de uma distribuição. Referências para esse capítulo são [3], [23], [36] e [45].

2.2 A TRANSFORMADA DE FOURIER E O ESPAÇO DE SCHWARTZ

Definição 2.2.1 : A *Transformada de Fourier* é o operador \mathcal{F} definido por

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$$

onde $x \cdot \xi$ significa o produto interno, em \mathbb{R}^n , entre x e ξ .

Proposição 2.2.2 : $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, \hat{f} está definida em \mathbb{R}^n , é contínua, limitada e vale

$$\|\hat{f}\|_{\text{sup}} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad (\text{desigualdade de Bessel})$$

Prova : Fixado $\xi \in \mathbb{R}^n$ a função $x \mapsto f(x) e^{-ix \cdot \xi}$ é integrável, pois

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) e^{-ix \cdot \xi}| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| |e^{-ix \cdot \xi}| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|f\|_{L^1}$$

\hat{f} está bem definida e $|\hat{f}(\xi)| \leq \|f\|_{L^1} \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$. Logo, \hat{f} é limitada e

$$\|\hat{f}\|_{\text{sup}} \leq \|f\|_{L^1}$$

Mostremos que \hat{f} é contínua. Seja $\xi_m \rightarrow \xi$ no \mathbb{R}^n . Logo

$$f(x) e^{-ix \cdot \xi_m} \longrightarrow f(x) e^{-ix \cdot \xi} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Como $|f(x) e^{-ix \cdot \xi_m}| = |f(x)| \quad \forall m$ e $\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx < +\infty$

então, pelo *Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue*,

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi_m} dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$$

isto é,

$$\hat{f}(\xi_m) \longrightarrow \hat{f}(\xi)$$

Logo, \hat{f} é contínua. ■

Da proposição 2.2.2 podemos dizer que $\mathcal{F} : (L^1(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^1}) \longrightarrow (C_b(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\text{sup}})$, onde $C_b(\mathbb{R}^n) := \{f \in C(\mathbb{R}^n) / f \text{ é limitada}\}$. É fácil ver que \mathcal{F} é um operador linear, e a desigualdade de Bessel mostra que ele é contínuo (limitado) e $\|\mathcal{F}\| \leq 1$.

Exemplo 2.2.3 : Considere $f = \chi_{[a,b]} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Temos

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[a,b]}(x) e^{-ix \cdot \xi} dx = \int_a^b e^{-ix \cdot \xi} dx = \begin{cases} \left[\frac{e^{-ix \cdot \xi}}{-i\xi} \right]_{x=a}^{x=b} & , \text{ para } \xi \neq 0 \\ b - a & , \text{ para } \xi = 0 \end{cases}$$

ou seja

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \frac{e^{-ib \cdot \xi} - e^{-ia \cdot \xi}}{-i\xi} = \frac{ie^{-ib \cdot \xi} - ie^{-ia \cdot \xi}}{\xi} & , \quad \xi \neq 0 \\ b - a & , \quad \xi = 0 \end{cases}$$

Logo, \hat{f} é contínua e satisfaz

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$$

pois $|e^{-ib \cdot \xi} - e^{-ia \cdot \xi}| \leq 2$. Entretanto, $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$ [Por exemplo, para $a = -1$ e $b = 1$, temos

$$\frac{1}{2}\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \frac{\text{sen } \xi}{\xi} & , \quad \xi \neq 0 \\ 1 & , \quad \xi = 0 \end{cases}$$

e $\int_0^{+\infty} \frac{|\text{sen } \xi|}{\xi} d\xi$ diverge]. Portanto, $\mathcal{F} \circ \mathcal{F}$ não está definida no $L^1(\mathbb{R}^n)$.

Precisamos de um espaço *menor* $\mathcal{S} \subseteq L^1$ tal que $\mathcal{F}(\mathcal{S}) = \mathcal{S}$ e $\exists (\mathcal{F}|_{\mathcal{S}})^{-1}$.

Teorema 2.2.4 (Lema de Riemann-Lebesgue) : $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) = 0$$

ou seja,

$$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_W(\mathbb{R}^n) := \{g \in C(\mathbb{R}^n) / \lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} g(\xi) = 0\}$$

Prova : Seja $S = I_1 \times \cdots \times I_n$, cada I_j sendo um intervalo em \mathbb{R} . Então

$$\chi_S(x_1, \dots, x_n) = \chi_{I_1}(x_1) \cdots \chi_{I_n}(x_n)$$

Como $\chi_{I_j} \in L^1(\mathbb{R}) \quad \forall j = 1, \dots, n$, então, pelo teorema de Fubini, $\chi_S \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\widehat{\chi}_S(\xi) = \widehat{\chi}_{I_1}(\xi_1) \cdots \widehat{\chi}_{I_n}(\xi_n) \in C_b(\mathbb{R}^n)$. Como $\widehat{\chi}_{I_j} \in C_W(\mathbb{R})$ (conforme vimos no exemplo anterior), então $\widehat{\chi}_S \in C_W(\mathbb{R}^n)$.

Seja f uma função simples, no sentido dos retângulos de \mathbb{R}^n , isto é, $f = \sum_j^m c_j \chi_{S_j}$ onde S_j é retângulo limitado do \mathbb{R}^n , $m < +\infty$ e $c_j \in \mathbb{C}$. Então, como $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C_b(\mathbb{R}^n)$ é operador linear, $\hat{f} \in C_W(\mathbb{R}^n)$.

Seja agora $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ qualquer. Então $\exists f_m$ simples, no sentido dos retângulos limitados de \mathbb{R}^n , tal que

$$f_m \xrightarrow{L^1} f$$

Como as f_m 's são simples, então, conforme vimos acima, $\widehat{f}_m \in C_W(\mathbb{R}^n)$.

$$\|\widehat{f}_m - \hat{f}\|_{\text{sup}} = \|(f_m - f)^\wedge\|_{\text{sup}} \leq \|f_m - f\|_{L^1} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$$

Logo,

$$\widehat{f}_m \xrightarrow[\text{no } \mathbb{R}^n]{\text{uniformemente}} \hat{f}$$

o que mostra mais uma vez que \hat{f} é contínua e

$$\lim_{|\xi| \rightarrow +\infty} \hat{f}(\xi) = 0 \quad \blacksquare$$

Observação 2.2.5 : Sabemos agora que \mathcal{F} leva $L^1(\mathbb{R}^n)$ em $C_W(\mathbb{R}^n)$. Note que a prova do teorema 2.2.4 (Lema de Riemman-Lebesgue) contém uma prova que $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_W(\mathbb{R}^n)$ é operador linear contínuo.

Proposição 2.2.6 : Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $j = 1, \dots, n$, então $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$ existe $\frac{\partial}{\partial \xi_j} \hat{f}(\xi)$ e

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \hat{f}(\xi) = -i \widehat{x_j f}(\xi)$$

Prova : Note que devemos mostrar que

$$\frac{\partial}{\partial \xi_j} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial \xi_j} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$$

De fato, isto decorre do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, usando as hipóteses de que a $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ para $j = 1, \dots, n$. \blacksquare

Definição 2.2.7 : $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, α_j inteiro não-negativo. α é chamado um *multi-índice*, e o operador

$$\partial^\alpha := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n} := \frac{\partial^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

é chamado *operador diferencial* de ordem $|\alpha|$.

Definição 2.2.8 : O *espaço de Schwartz* é definido por

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) / \forall \text{ polinômio } p \text{ e multi-índice } \alpha, p(x) \partial^\alpha f \text{ é limitada em } \mathbb{R}^n\}$$

Observação 2.2.9 : 1) Sabemos que para todo polinômio p , $\lim_{|x| \rightarrow \infty} |p(x)| = \infty$. Logo, todas as derivadas parciais de $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ devem tender a zero mais rápido que $\frac{1}{p(x)}$ para qualquer polinômio p , quando $|x| \rightarrow \infty$.

2) Como todo polinômio é do tipo $\sum_{|\beta| \leq m} c_\beta x^\beta$, onde β é um multi-índice, então temos

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) / \forall \alpha, \beta \text{ multi-índices, a função } x^\beta \partial^\alpha f \text{ é limitada em } \mathbb{R}^n\}$$

Proposição 2.2.10 : Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então $\forall \alpha$ multi-índice,

$$\partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Prova : $\forall \beta, \alpha'$ multi-índices,

$$x^\beta \partial^{\alpha'} \partial^\alpha f = x^\beta \partial^{\alpha+\alpha'} f$$

Mas, $x^\beta \partial^{\alpha+\alpha'} f$ é limitada, já que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$$\therefore \partial^\alpha f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \blacksquare$$

Lema 2.2.11 : $\frac{1}{(1+|x|^2)^m} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ se $mp > \frac{n}{2}$

Prova :

$$\int_{\overline{B_1(0)}} \frac{1}{(1+|x|^2)^{mp}} dx < +\infty$$

já que o integrando é contínuo, logo limitado em $\overline{B_1(0)}$ que tem medida de Lebesgue finita. Agora,

$$\int_{|x|>1} \frac{1}{(1+|x|^2)^{mp}} dx \leq \int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^{2mp}} dx$$

Tomando coordenadas esféricas, em \mathbb{R}^n ,

$$x = r\omega, \quad r \in [0, +\infty), \quad \omega \in S^{n-1} \text{ (esfera unitária em } \mathbb{R}^n) \quad \therefore dx = r^{n-1} dr d\omega$$

temos

$$\int_{|x|>1} \frac{1}{|x|^{2mp}} dx = \int_{S^{n-1}} d\omega \int_1^{+\infty} r^{n-1} \frac{1}{r^{2mp}} dr$$

$$\therefore \int_{|x|>1} \frac{1}{(1+|x|^2)^{mp}} dx \leq c \int_1^{+\infty} r^{n-1} \frac{1}{r^{2mp}} dr$$

onde c é a medida de Lebesgue da esfera S^{n-1} . Portanto, se $2mp > n$, temos

$$\int_{|x|>1} \frac{1}{(1+|x|^2)^{mp}} dx < +\infty \quad \blacksquare$$

Proposição 2.2.12 : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n) \quad \forall 1 \leq p \leq +\infty$

Prova : Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Temos

$$|f(x)| \leq \frac{c_m}{(1 + |x|^2)^m} \quad \forall m = 0, 1, 2, \dots \quad (1)$$

onde $c_m = \|(1 + |x|^2)^m f\|_{\text{sup}} < +\infty$. De fato, $|x|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$ é polinômio. Logo, $p(x) = (1 + |x|^2)^m$ é polinômio. Como $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $p(x)f$ é limitada. Logo,

$$(1 + |x|^2)^m |f(x)| \leq \|(1 + |x|^2)^m f\|_{\text{sup}} < +\infty$$

o que prova² (1).

Agora, dado $1 \leq p < +\infty$, tome m tal que $m > \frac{n}{2p}$. Portanto, por (1) e pelo lema 2.2.11, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{c_m^p}{(1 + |x|^2)^{mp}} dx = c_m^p \int_{\mathbb{R}^n} \left[\frac{1}{(1 + |x|^2)^m} \right]^p dx < +\infty \quad \blacksquare$$

Observação 2.2.13 : Note que a demonstração de (1) confirma a observação 2.2.9(1) que se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então \forall polinômio p e \forall multi-índice α $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} p(x) \partial^\alpha f(x) = 0$ e em particular $\lim_{|x| \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

Teorema 2.2.14 : Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e valem

$$\text{i) } \frac{\partial}{\partial \xi_j} \widehat{f}(\xi) = -i x_j \widehat{f}(\xi)$$

$$\text{ii) } \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i \xi_j \widehat{f}(\xi)$$

Mais geralmente, $\forall \alpha$ multi-índice, segue-se, por indução,

$$\text{iii) } \partial^\alpha \widehat{f}(\xi) = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha f}(\xi)$$

$$\text{iv) } \widehat{\partial^\alpha f}(\xi) = i^{|\alpha|} \xi^\alpha \widehat{f}(\xi)$$

Prova : i) Já provamos para $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ e se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então $x_j f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos que (i) vale.

² $L^\infty(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} / f \text{ é mensurável e } \exists c \in \mathbb{R} \text{ tal que } |f(x)| \leq c \text{ q.t.p}\}$
 $\|f\|_{L^\infty} := \inf \{c / |f(x)| \leq c \text{ q.t.p em } \Omega\}$

ii) Já vimos que $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \quad \therefore \quad \exists \widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi)$ e, por definição,

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-ix \cdot \xi} dx = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-ix \cdot \xi} dx_1 \cdots dx_n \quad (2)$$

onde na última igualdade aplicamos Fubini, já que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-ix \cdot \xi} \right| dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) \right| dx < +\infty, \text{ pois } \frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$$

Agora, pela fórmula de integração por partes, temos

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) e^{-ix \cdot \xi} dx_j = - \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-ix \cdot \xi} dx_j = i\xi_j \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx_j$$

[onde integramos em $[-a, a]$, $a \rightarrow +\infty$]. Assim, substituindo em (2) e aplicando novamente o teorema de Fubini, temos

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx = i\xi_j \hat{f}(\xi)$$

Falta provar que $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De fato,

$$\therefore \quad \xi^\beta \partial^\alpha \hat{f}(\xi) = \xi^\beta (-i)^{|\alpha|} (x^\alpha f)^\wedge(\xi) = (-i)^{|\alpha|} i^{-|\beta|} (\partial^\beta (x^\alpha f))^\wedge(\xi)$$

onde a primeira igualdade é por (iii), e a segunda é por (iv).

$$\therefore \quad \left| \xi^\beta \partial^\alpha \hat{f}(\xi) \right| = \left| (\partial^\beta (x^\alpha f))^\wedge(\xi) \right|$$

Agora, $\|\hat{g}\|_{\text{sup}} \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \forall g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (pela desigualdade de Bessel - proposição 2.2.2). Logo,

$$\left| \xi^\beta \partial^\alpha \hat{f}(\xi) \right| \leq \underbrace{\|\partial^\beta (x^\alpha f)\|}_{g \in \mathcal{S} \subset L^1} < +\infty$$

$\therefore \quad \hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \blacksquare$

Definição 2.2.15 : O *suporte* de uma função f é o fecho do conjunto $\{x / f(x) \neq 0\}$.

Notação : $\text{supp } f$

Definição 2.2.16 : $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := C_c^\infty(\mathbb{R}^n) = \{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) / \text{supp } f \text{ é compacto} \}$.
 $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ é chamada uma *função teste*.

Proposição 2.2.17 : Se $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ então \forall multi-índice α e \forall polinômio $p(x)$ tem-se $p(x)\partial^\alpha f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, com $\text{supp } (p(x)\partial^\alpha f) \subseteq \text{supp } f$. Além disso, $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Prova : Sejam $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\text{supp } f = K$ e G o complementar de K . Logo, $f|_G \equiv 0$. Como $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ então K é compacto em \mathbb{R}^n $\therefore K$ é fechado $\therefore G$ é aberto. Portanto,

$$\partial^\alpha f|_G \equiv 0 \quad (3)$$

Para todo polinômio p temos

$$p(x)\partial^\alpha f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

e se $p(x)(\partial^\alpha f)(x) \neq 0$, então, por (3), $x \in K$. Logo, $\text{supp } (p(x)\partial^\alpha f) \subseteq K$, portanto, compacto (já que o suporte de uma função é fechado). $\therefore p(x)\partial^\alpha f$ é limitada por $\|p(x)\partial^\alpha f|_K\|_{\text{sup}}$. $\therefore f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. ■

2.3 CONVERGÊNCIA NO ESPAÇO DE SCHWARTZ

Uma seminorma num espaço vetorial V é uma função $p : V \rightarrow [0, +\infty)$ tal que

$$\begin{aligned} p(v+w) &\leq p(v) + p(w) & \forall v, w \in V \\ p(cv) &= |c|p(v) & \forall c \text{ escalar} \end{aligned}$$

Para uma seminorma p ser uma norma falta $p(v) = 0 \implies v = 0$.

As funções

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni f \mapsto \|f\|_{\alpha, \beta} := \|x^\beta \partial^\alpha f\|_{\text{sup}}$$

são seminormas no espaço de Schwartz. Note que não são normas, pois $\exists f \neq 0$ com $x^\beta \partial^\alpha f = 0$. De fato, basta tomar,

$$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n), \quad g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_j \neq 0.$$

Defina

$$P_m(f) := \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} \|f\|_{\alpha, \beta}$$

Para todo $m \in \mathbb{N}$, P_m é uma norma. De fato, é claro que a soma finita de seminormas é seminorma. Logo, P_m é seminorma. Agora, se $P_m(f) = 0$ então $f = 0$, pois

$$P_m(f) = \sum_{\substack{|\alpha| \leq m \\ |\beta| \leq m}} \|f\|_{\alpha, \beta} \geq \|f\|_{(0, \dots, 0)(0, \dots, 0)} = \|x^{(0, \dots, 0)} \partial^{(0, \dots, 0)} f\|_{\text{sup}} = \|f\|_{\text{sup}} \quad \square$$

Definição 2.3.1 : Dada uma seqüência (f_n) em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, dizemos que f_n converge para f em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ se $\forall \alpha, \beta$ multi-índices,

$$\|f_n - f\|_{\alpha, \beta} \longrightarrow 0$$

ou seja, para todo polinômio p e para todo multi-índice α ,

$$p(x) \partial^\alpha f_n \xrightarrow[\text{no } \mathbb{R}^n]{\text{uniformemente}} p(x) \partial^\alpha f$$

Notação : $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f$

Nós definimos uma convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ a partir das seminormas fundamentais $\|\cdot\|_{\alpha, \beta}$. Esta convergência corresponde a uma métrica. De fato, defina

$$d_m(f, g) := \min \{1, P_m(f - g)\} \leq 1$$

d_m são métricas em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Basta verificar a desigualdade triangular (as outras condições são imediatas). Considere a função $\varphi : [0, +\infty) \longrightarrow [0, 1]$ dada por

$$\varphi(t) = \min \{1, t\}$$

Temos que φ é não-decrescente (figura 1).

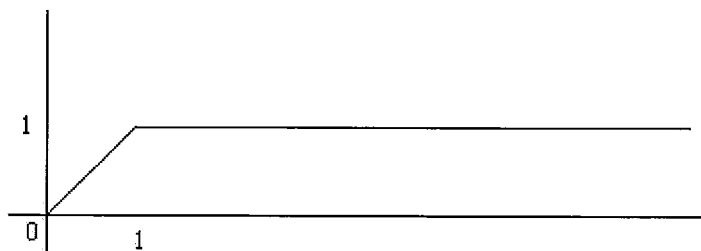


FIGURA 1

Assim, como $P_m(f - h) = P_m(f - g + g - h) \leq P_m(f - g) + P_m(g - h)$ então

$$\varphi(P_m(f - h)) \leq \varphi(P_m(f - g) + P_m(g - h))$$

isto é,

$$\begin{aligned} \min \{1, P_m(f - h)\} &\leq \min \{1, P_m(f - g) + P_m(g - h)\} \\ &\leq \min \{1, P_m(f - g)\} + \min \{1, P_m(g - h)\} \\ \therefore d_m(f, h) &\leq d_m(f, g) + d_m(g, h) \end{aligned}$$

Defina agora $\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

$$d(f, g) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2^m} \underbrace{d_m(f, g)}_{\in [0, 1]}$$

Como d_m são métricas em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então d também é métrica em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e temos

$$f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f \iff f_k \xrightarrow{d} f$$

Proposição 2.3.2 : *A inclusão $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ é contínua para $1 \leq p < +\infty$, isto é,*

$$f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f \implies f_k \xrightarrow{L^p} f$$

Prova : Seja $1 \leq p < +\infty$ e fixe $m > \frac{n}{2p}$. Então, como vimos³ na prova da proposição 2.2.12,

$$\|f\|_{L^p} \leq \|(1 + |x|^2)^m f\|_{\text{sup}} \left\| \frac{1}{(1 + |x|^2)^m} \right\|_{L^p}$$

$$\therefore f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f \implies (1 + |x|^2)^m f_k \xrightarrow{\text{uniformemente}}, (1 + |x|^2)^m f \implies \|f_k - f\|_{L^p} \longrightarrow 0 \blacksquare$$

Lema 2.3.3 : *Sejam I intervalo em \mathbb{R} e $f_k \in C^1(I)$ tal que*

$$f'_k \longrightarrow g \text{ uniformemente em } I \quad \text{e} \quad \exists c \in I \text{ tal que } f_k(c) \longrightarrow f(c)$$

Então $f \in C^1$ e $f' = g$.

³Vale para $p = +\infty$.

Prova : Seja $x \in I$. Como $f'_k \rightarrow g$ uniformemente em I , temos

$$f_k(x) = f_k(c) + \int_c^x f'_k(t) dt \rightarrow f(c) + \int_c^x g(t) dt$$

Logo,

$$f(x) = f(c) + \int_c^x g(t) dt$$

g é contínua, já que f'_k é contínua $\forall k$ e $f'_k \xrightarrow[\text{em } I]{\text{uniformemente}}$ g . Logo, $f \in C^1$. ■

O objetivo agora, é mostrar que a transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um operador linear contínuo. A ferramenta básica usada na demonstração que apresentaremos é o Teorema do Gráfico Fechado (teorema 2.3.10). Portanto, devemos provar primeiro que o espaço de Schwartz é um F-espaço (ver definição 2.3.6). Isto será feito nos resultados a seguir.

Teorema 2.3.4 : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é completo.

Prova : Seja $\{f_k\}_{k=1}^\infty$ uma seqüência de Cauchy em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Então $\forall \alpha, \beta$ multi-índices, $\{x^\beta \partial^\alpha f_k\}_{k=1}^\infty$ é uma seqüência de Cauchy uniforme no espaço

$$C_b(\mathbb{R}^n) := \{g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C} / g \text{ é contínua e limitada}\}$$

Esse espaço é completo na norma do sup. Logo, $\forall \alpha, \beta$ multi-índices, a seqüência $\{x^\beta \partial^\alpha f_k\}_{k=1}^\infty$ converge em $C_b(\mathbb{R}^n)$. Em particular, tomando $\beta = (0, \dots, 0)$ temos que $\forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ a seqüência $\partial^\alpha f_k$ converge em $C_b(\mathbb{R}^n)$ para alguma função $f_\alpha \in C_b(\mathbb{R}^n)$, isto é,

$$\partial^\alpha f_k \xrightarrow[\text{no } \mathbb{R}^n]{\text{uniformemente}} f_\alpha \quad (4)$$

Em particular, se $\alpha = (0, \dots, 0)$ temos

$$f_k \xrightarrow[\text{no } \mathbb{R}^n]{\text{uniformemente}} f_{(0, \dots, 0)} := f$$

Provaremos que $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, que $\partial^\alpha f = f_\alpha \forall \alpha$ e que $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f$.

Dado α tal que $|\alpha| \geq 1$, $\exists j = 1, \dots, n$ tal que

$$\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j} \partial^\gamma, \quad \gamma \text{ multi-índice, } |\gamma| = |\alpha| - 1$$

Como (4) vale para qualquer multi-índice, temos

$$\partial^\gamma f_k \xrightarrow[\text{no } \mathbb{R}^n]{\text{uniformemente}} f_\gamma \quad (5)$$

Portanto, temos

$$\frac{\partial}{\partial x_j} \partial^\gamma f_k = \partial^\alpha f_k \xrightarrow[\text{no } \mathbb{R}^n]{\text{uniformemente}} f_\alpha \quad (6)$$

Fixe todas as variáveis, exceto x_j . Então de (5) e (6) temos, pelo lema 2.3.3, $\frac{\partial}{\partial x_j} f_\gamma = f_\alpha$. Por indução sobre $|\alpha|$, obtemos que $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e que

$$\partial^\alpha f = f_\alpha$$

Assim, como $\forall \alpha$ multi-índice,

$$\partial^\alpha f_k \xrightarrow[\text{no } \mathbb{R}^n]{\text{uniformemente}} \partial^\alpha f$$

temos $\forall \alpha, \beta$ multi-índices,

$$(x^\beta \partial^\alpha f_k)(x) \longrightarrow (x^\beta \partial^\alpha f)(x) \quad \forall x$$

Como, $\{x^\beta \partial^\alpha f_k\}_{k=1}^\infty$ é uma seqüência de Cauchy (uniforme), então $x^\beta \partial^\alpha f_k$ converge em $C_b(\mathbb{R}^n)$ (já que $C_b(\mathbb{R}^n)$ é completo na norma do sup). Assim,

$$x^\beta \partial^\alpha f_k \xrightarrow[\text{no } \mathbb{R}^n]{\text{uniformemente}} x^\beta \partial^\alpha f \in C_b(\mathbb{R}^n)$$

Portanto, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e, pela definição de convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f$$

Logo, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é completo. ■

Definição 2.3.5 : Uma métrica d em um espaço vetorial V é dita ser *invariante por translação* se d satisfaz

$$d(v, w) = d(v + u, w + u) \quad \forall v, u, w \in V$$

Definição 2.3.6 : Um F -espaço é um espaço vetorial topológico na topologia de uma métrica completa e invariante por translação.

A demonstração do teorema abaixo pode ser encontrada em [40].

Teorema 2.3.7 (da Aplicação Aberta) : *Sejam X e Y F -espaços. Seja $T : X \longrightarrow Y$ operador linear contínuo. Então T é uma aplicação aberta (i.e., se A é aberto então $T(A)$ também é aberto). Em particular se T é uma bijeção, então T^{-1} é contínuo.*

Proposição 2.3.8 : *Se X e Y são F -espaços então $X \times Y$ é F -espaço na métrica*

$$d((x, y), (x', y')) := \sqrt{d_x(x, x')^2 + d_y(y, y')^2} \leq d_x(x, x') + d_y(y, y')$$

e vale

$$(x_n, y_n) \xrightarrow{d} (x, y) \iff \begin{cases} x_n \xrightarrow{d_x} x \text{ e} \\ y_n \xrightarrow{d_y} y \end{cases}$$

Prova : $X \times Y$ é completo, e d é invariante por translação. ■

Proposição 2.3.9 : *Todo subespaço vetorial fechado de um F -espaço é um F -espaço.*

Prova : Todo subespaço fechado de um espaço completo é completo. ■

Teorema 2.3.10 (do Gráfico Fechado) : *Seja $T : X \longrightarrow Y$ operador linear, X e Y F -espaços. Então são equivalentes as afirmações abaixo:*

- 1) T é contínuo
- 2) O gráfico de T é fechado em $X \times Y$
- 3) Se $x_n \longrightarrow x$ em X e $Tx_n \longrightarrow y$ em Y então $y = Tx$

Prova : $1 \implies 2 \iff 3$ é óbvio, pois

$$G(T) \ni (x_n, Tx_n) \longrightarrow (x, y) \in G(T)$$

$3 \implies 1$:

$G(T) \subseteq X \times Y$ é F -espaço, pois é fechado em $X \times Y$.

Sejam $P'_1 = P_1|_{G(T)}$ e $P'_2 = P_2|_{G(T)}$, onde $P_1 : X \times Y \longrightarrow X$ e $P_2 : X \times Y \longrightarrow Y$ são as projecções, que são contínuas, por 2.3.8.

$$\begin{array}{ccc} & (x, Tx) & \\ P'_1 \swarrow & & \searrow P'_2 \\ x & \xrightarrow{T} & Tx \end{array}$$

P'_1 é bijeção linear contínua. Logo, $(P'_1)^{-1}$ é contínua, pelo teorema 2.3.7. Logo, $T = (P'_2) \circ (P'_1)^{-1}$ é contínua. ■

Teorema 2.3.11 : $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um F -espaço.

Prova : Como as métricas $d_m(f, g)$ são, obviamente, invariantes por translação, então a métrica d em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é invariante por translação. Vamos mostrar que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é um espaço vetorial topológico na topologia da métrica d de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, ou seja, se $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f$ e $g_k \xrightarrow{\mathcal{S}} g$ então

$$\text{i) } f_k + g_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f + g$$

$$\text{ii) } c_k \rightarrow c \text{ em } \mathbb{C} \text{ então } c_k f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} c f$$

Podemos considerar, sem perda de generalidade, $f \equiv g \equiv 0$, pois como a métrica em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é invariante por translação, temos

$$f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} f \iff d(f_k, f) \rightarrow 0 \iff d(f_k - f, 0) \rightarrow 0 \iff f_k - f \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$$

$\forall \alpha, \beta$ multi-índices, temos

$$\|f_k + g_k\|_{\alpha, \beta} \leq \|f_k\|_{\alpha, \beta} + \|g_k\|_{\alpha, \beta} \rightarrow 0$$

$$\therefore \|f_k + g_k\|_{\alpha, \beta} \rightarrow 0 \quad \therefore f_k + g_k \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$$

Agora note que se $f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ e $|c_k| \leq M$ então $c_k f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$. De fato,

$$\|c_k f_k\|_{\alpha, \beta} = |c_k| \|f_k\|_{\alpha, \beta} \rightarrow 0$$

Assim, se $c_k \rightarrow c$ em \mathbb{C} então $c_k f_k \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$. ■

Teorema 2.3.12 : $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é operador linear contínuo.

Prova : É claro que o operador é linear. Vamos mostrar a continuidade via teorema 2.3.10.

Suponha

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f \tag{7}$$

e

$$\widehat{f}_n \xrightarrow{\mathcal{S}} g \tag{8}$$

Então, de (7) e proposição 2.3.2, temos $f_n \xrightarrow{L^1} f$. Logo, como $\|\widehat{f}\|_{\text{sup}} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ (teorema 2.2.2 - desigualdade de Bessel), então

$$\widehat{f}_n \xrightarrow[\text{no } \mathbb{R}^n]{\text{uniformemente}} \widehat{f} \tag{9}$$

Mas, por (8), temos

$$\widehat{f}_n \xrightarrow[\text{no } \mathbb{R}^n]{\text{uniformemente}} g \tag{10}$$

Portanto, de (9) e (10), temos $\widehat{f} = g$. Logo, $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é operador contínuo, pelo teorema 2.3.10. ■

Observação 2.3.13 : Já vimos nas proposições 2.2.12 e 2.2.17 que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^p(\mathbb{R}^n)$. As inclusões são densas no $L^p(\mathbb{R}^n)$, pois $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ é denso⁴ no $L^p(\mathbb{R}^n)$. Agora, as inclusões são estritas. De fato, é claro que nem toda função em $L^p(\mathbb{R}^n)$ é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^n)$, o que mostra que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \neq L^p(\mathbb{R}^n)$. Para ver que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \neq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, considere

$$f(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

$f \notin C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (já que $\text{supp } f = \mathbb{R}^n$) e $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Mais geralmente, para todo polinômio $p(x)$, $p(x)f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De fato, por indução sobre $|\alpha|$, tem-se que para todo α e para todo polinômio $p(x)$,

$$\partial^\alpha p(x)e^{-\frac{|x|^2}{2}} = q(x)e^{-\frac{|x|^2}{2}}$$

para algum polinômio $q(x)$. Agora, $p(x)e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ é função limitada, para todo polinômio $p(x)$. Basta provar para $p(x) = x^\alpha$.

$$x^\alpha e^{-\frac{|x|^2}{2}} = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} e^{-\frac{x_1^2}{2}} \dots e^{-\frac{x_n^2}{2}}$$

Mas, para $t \in \mathbb{R}$, $t^r e^{-\frac{t^2}{2}}$ é limitada, pois

$$\lim_{|t| \rightarrow +\infty} t^r e^{-\frac{t^2}{2}} = 0$$

⁴Isto pode ser visto em [7], página 71.

Observação 2.3.14 : $f(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$ é um ponto fixo do operador

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \mathcal{F} : f \mapsto \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \hat{f}$$

Mostremos que $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \hat{f}(\xi) = f(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, ou seja, $\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \hat{f} = f$. De fato,

$$f(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}} = e^{-\frac{x_1^2}{2}} \cdots e^{-\frac{x_n^2}{2}} = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n); \quad f_j(x) = e^{-\frac{x_j^2}{2}}$$

$$\therefore \hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1) \cdots \hat{f}_n(\xi_n)$$

Logo, basta provar o caso $n = 1$, isto é, $x \in \mathbb{R}$.

Consideremos então $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$. Temos

$$f'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}} = -xf(x) \quad (11)$$

Seja $g = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \hat{f}$. Por (11), temos

$$\widehat{f'}(\xi) = -x\widehat{f}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$$

Como $(\widehat{f'})(\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi)$ e $(\widehat{f})'(\xi) = -i\xi\widehat{f}(\xi)$ (já provado), então temos

$$i\xi(2\pi)^{\frac{1}{2}}g(\xi) = -x\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{i}(\widehat{f})'(\xi) = \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}}{i}g'(\xi)$$

$$\therefore g'(\xi) = -\xi g(\xi) \quad (12)$$

Agora, $\hat{f}(0) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$ (5). Logo,

$$g(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \hat{f}(0) = 1 = f(0) \quad (13)$$

Portanto, de (11), (12) e (13), temos que f e g satisfazem o mesmo problema de valor inicial de 1ª ordem. Assim, $f = g$, isto é,

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \hat{f} = f$$

⁵Seja $J_n = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx$. Pelo teorema de Fubini, temos $J_n = (J_1)^n$. Tomando coordenadas polares, mostra-se facilmente que $J_2 = 2\pi \therefore J_1 = (J_2)^{\frac{1}{2}} = (2\pi)^{\frac{1}{2}}$. Logo, $J_n = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$.

Proposição 2.3.15 : *Sejam $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $h(x) = f(\frac{x}{r})$, $r > 0$. Então $h \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\hat{h}(\xi) = r^n \hat{f}(r\xi)$. Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.*

Prova : Basta fazer a mudança de variável $\frac{x}{r} = y \quad \therefore \quad dx = r^n dy$. ■

Lema 2.3.16 : *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $h \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ então $fh \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e*

$$\|fh\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$$

Prova :

$$|f(x)h(x)| = |f(x)||h(x)| \leq \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} |f(x)| \quad q.t.p$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)h(x)| dx \leq \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx = \|h\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \blacksquare$$

Proposição 2.3.17 : *Se $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\hat{f}(\xi)}_{\in L^\infty(\mathbb{R}^n)} \underbrace{g(\xi)}_{\in L^1(\mathbb{R}^n)} d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{f(x)}_{\in L^1(\mathbb{R}^n)} \underbrace{\hat{g}(x)}_{\in L^\infty(\mathbb{R}^n)} dx$$

Prova :

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)e^{-ix \cdot \xi} g(\xi)| dx d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| dx \int_{\mathbb{R}^n} |g(\xi)| d\xi < +\infty$$

\therefore Posso aplicar o teorema de Fubini à função $f(x)e^{-ix \cdot \xi} g(\xi)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi)g(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-ix \cdot \xi} g(\xi) dx d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \int_{\mathbb{R}^n} g(\xi)e^{-ix \cdot \xi} d\xi dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x) dx \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Definição 2.3.18 : *Seja $1 \leq p \leq +\infty$ definimos $J : L^p(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^p(\mathbb{R}^n)$ por*

$$J(f)(x) := \frac{1}{(2\pi)^n} f(-x)$$

Proposição 2.3.19 : *O diagrama abaixo é comutativo*

$$\begin{array}{ccc}
 L^1(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{J} & L^1(\mathbb{R}^n) \\
 \mathcal{F} \downarrow & & \downarrow \mathcal{F} \\
 C_W(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{J} & C_W(\mathbb{R}^n)
 \end{array}$$

isto é,

$$\mathcal{F} \circ J = J \circ \mathcal{F}$$

ou seja,

$$\widehat{Jf}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{f}(-\xi) \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Prova :

$$\begin{aligned}
 \widehat{Jf}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\frac{1}{(2\pi)^n} f(-x)}_{(Jf)(x)} e^{-ix \cdot \xi} dx \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} f(y) e^{iy \cdot \xi} dy \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{f}(-\xi)
 \end{aligned}$$

onde na 2ª igualdade fizemos a mudança de variável $y = -x$. ■

Teorema 2.3.20 (Inversão da Transformada de Fourier) : *A Transformada de Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é uma bijeção cuja inversa \mathcal{F}^{-1} é $J \circ \mathcal{F}$.*

Prova : Como, pela proposição 2.3.19, $\mathcal{F} \circ J = J \circ \mathcal{F}$, então temos

$$(J \circ \mathcal{F}) \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ (J \circ \mathcal{F})$$

Portanto, basta provar que

$$J \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F} = id_{\mathcal{S}}$$

isto é, $\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} (\hat{f})^\wedge(-x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (14)$$

Provemos então (14). Seja $h(x) = f(\frac{x}{r})$, $r > 0$ fixo. $\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{h}(\xi) g(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} h(x) \hat{g}(x) dx \\ \therefore r^n \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(r\xi) g(\xi) d\xi &= \int_{\mathbb{R}^n} f(\frac{x}{r}) \hat{g}(x) dx \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $r\xi = x \therefore dx = r^n d\xi$, temos

$$r^n \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(r\xi) g(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(\frac{x}{r}) dx$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g(\frac{x}{r}) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(\frac{x}{r}) \hat{g}(x) dx \quad \forall r > 0 \quad (15)$$

Tomando $r = m \in \mathbb{N}$ e definindo $f_m(x) := f(\frac{x}{m})$ e $g_m(x) = g(\frac{x}{m})$, temos, de (15),

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) g_m(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f_m(x) \hat{g}(x) dx \quad \forall m > 0 \quad (16)$$

Como $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, então,

$$g_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} g(x) \quad e \quad f_m(x) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} f(x) \quad \forall x \text{ fixo} \quad (17)$$

e, pela proposição 2.3.15, $f_m, g_m \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^1(\mathbb{R}^n) \quad \forall m > 0$. Agora, pela proposição 2.2.2 (desigualdade de Bessel), temos

$$\left| \hat{f}(x) g_m(x) \right| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} |g_m(x)| \quad e \quad |f_m(x) \hat{g}(x)| \leq |f_m(x)| \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad (18)$$

Portanto, de (16), (17), (18) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(0) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(0)\hat{g}(x) dx$$

$$\therefore g(0) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x) dx = f(0) \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(x) dx$$

$$\therefore g(0)(\hat{f})^\wedge(0) = f(0)(\hat{g})^\wedge(0) \quad \forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad (19)$$

Em particular, se $g(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$, temos, pela observação 2.3.14,

$$(2\pi)^{\frac{n}{2}}g(0) = \hat{g}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}(\hat{g})^\wedge(0)$$

$$\therefore (\hat{g})^\wedge(0) = (2\pi)^n g(0) = (2\pi)^n$$

Logo, de (19),

$$(\hat{f})^\wedge(0) = (2\pi)^n f(0) \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad (20)$$

Dado $c \in \mathbb{R}^n$, defina $u(x) = f(x + c)$. Temos que $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\hat{u}(\xi) = e^{ic \cdot \xi} \hat{f}(\xi) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$$

$$\therefore (\hat{u})^\wedge(x) = (\hat{f})^\wedge(x - c) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (21)$$

Assim, de (20) e (21), temos

$$f(c) = u(0) = \frac{1}{(2\pi)^n}(\hat{u})^\wedge(0) = \frac{1}{(2\pi)^n}(\hat{f})^\wedge(-c)$$

o que prova (14). ■

Usando a notação $\check{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{f}(-\xi)$, para $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\check{f} := J(\hat{f}) = (J \circ \mathcal{F})(f) = (\mathcal{F} \circ J)(f)$$

ou seja,

$$(\hat{\check{f}}) = f$$

Observação 2.3.21 : Temos, por (14) a seguinte fórmula de inversão da Transformada de Fourier :

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \hat{f}(\xi) d\xi$$

Exemplo 2.3.22 : Seja $a > 0$ e $f(x) = e^{-ax^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Então

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}} \quad (22)$$

Em particular, a transformada de Fourier da função e^{-x^2} é $\sqrt{\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4}}$. De fato, fazendo a mudança de coordenadas $x = \frac{y}{\sqrt{2a}}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\frac{\xi}{\sqrt{2a}}y} e^{-\frac{y^2}{2}} dy$$

Fazendo $g(y) = e^{-\frac{y^2}{2}}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2a}} \hat{g}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2a}}\right)$$

Mas, da observação 2.3.14, temos $\hat{g}(\xi) = \sqrt{2\pi} g(\xi)$ e, portanto, temos $\hat{g}\left(\frac{\xi}{\sqrt{2a}}\right) = \sqrt{2\pi} g\left(\frac{\xi}{\sqrt{2a}}\right) = \sqrt{2\pi} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$$

o que mostra (22). ■

Definição 2.3.23 : Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. A *convolução* de f e g é a função definida por⁶

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy$$

Proposição 2.3.24 : Se⁷ $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, $f * g$ está bem definida, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

⁶Mais geralmente a convolução está definida para $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ com p e q expoentes conjugados.

⁷Ver caso mais geral na nota de rodapé da página 69 (desigualdade de Young).

Prova :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |(f * g)(x)| \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| \, dy \, dx$$

Aplicando o teorema de Tonelli e fazendo a mudança de variável $z = x - y$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| \, dy \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| \, dx \, dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| \, dz \, dy \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \, dy \\ &= \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < +\infty \end{aligned}$$

Aplicando agora o Teorema de Fubini à função $(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)$, temos que, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, a função $y \mapsto f(x-y)g(y)$ é integrável. Logo, $f * g$ está bem definida, $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad \blacksquare$$

Teorema 2.3.25 : *Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Então*

$$(f * g)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

Prova : Para ξ fixo, temos

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} (f * g)(x) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} \left[\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y) \, dy \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} f(x-y)g(y) \, dy \right] dx \end{aligned}$$

Agora, $|e^{-ix \cdot \xi} f(x-y)g(y)| = |f(x-y)g(y)|$ e

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| \, dy \, dx = \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} < +\infty$$

Portanto, podemos aplicar o teorema de Fubini. Logo,

$$\begin{aligned} (f * g)^\wedge(\xi) &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)e^{-ix \cdot \xi} \, dx \, dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-iy \cdot \xi} \hat{f}(\xi) \, dy \\ &= \hat{f}(\xi) \int_{\mathbb{R}^n} g(y)e^{-iy \cdot \xi} \, dy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposição 2.3.26 : *A convolução é comutativa e associativa.*

Prova : Fazendo a mudança de variáveis $z = x - y$, obtemos

$$(f * g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(z)g(x - z) dz = (g * f)(x)$$

\therefore $*$ é comutativa.

Como $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, então $\forall h \in L^1(\mathbb{R}^n)$, está definida $h * (f * g) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e uma mudança de variável mostra a associatividade. ■

Assim, a operação de convolução define uma estrutura de semigrupo comutativo em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Será que ela define uma estrutura de monóide, isto é, será que existe $d \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$f * d = f \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

A resposta é *não*. De fato, se existisse uma tal função d , então pelo teorema 2.3.25, teríamos

$$\hat{f}(\xi) = (f * d)^\wedge(\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{d}(\xi) \quad \forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

Logo, $\hat{d}(\xi) = 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n$, e isto viola o teorema 2.2.4 (Lema de Riemann-Lebesgue). Contudo, nós ainda queremos "aproximar" d , ou seja, queremos uma *identidade aproximada* $\{d_\alpha\} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in (0, +\infty)$. Vamos considerar o caso unidimensional ($n = 1$). O caso n qualquer é análogo.

A primeira exigência que se faz a uma família $\{d_\alpha\} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$ que *busca aproximar a identidade*, é que

$$\hat{d}_\alpha(\xi) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} 1, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Em particular, podemos tomar a normalização $\hat{d}_\alpha(0) = 1$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}} d_\alpha(x) dx = 1$$

Uma candidata é a família de funções Gaussianas (figura 2)

$$g_\alpha(x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}}, \quad \alpha > 0 \tag{23}$$

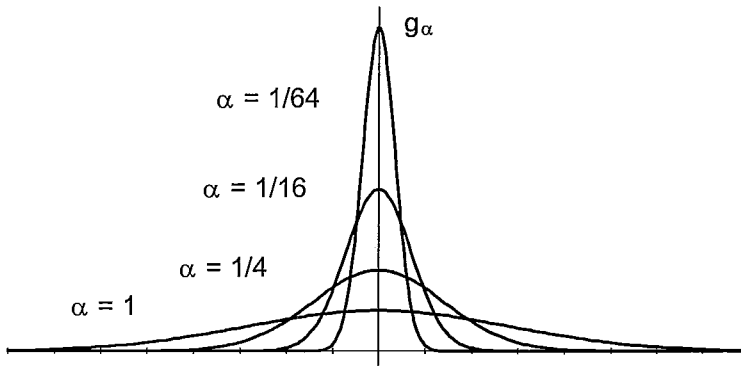


FIGURA 2

De fato, já vimos que $\widehat{g}_\alpha(\xi) = e^{-\alpha\xi^2}$ (basta fazer $\alpha = \frac{1}{4a}$ no exemplo 2.3.22). Logo,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \widehat{g}_\alpha(\xi) = 1 \quad , \quad \xi \in \mathbb{R}$$

e também, fazendo a mudança de variável $x = \sqrt{2\alpha} y$, temos

$$\int_{\mathbb{R}} g_\alpha(x) dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{4\alpha}} dx = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \sqrt{2\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} \sqrt{2\alpha} \sqrt{2\pi} = 1$$

Observação 2.3.27 : Seja $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Se $r \rightarrow +\infty$ então, resulta do Teorema da Convergência Monótona, que:

$$\int_{|x| \geq r} |f(x)|^p dx \rightarrow 0$$

Teorema 2.3.28 : Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e g_α como definido em (23). Então

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (f * g_\alpha)(x) = f(x)$$

em todo ponto x onde f é contínua.

Prova : Seja f contínua em x . Seja $\epsilon > 0$. Como f é contínua em x , $\exists \delta > 0$ tal que

$$|f(x - y) - f(x)| < \epsilon \quad \forall y \in \mathbb{R} \quad , \quad |y| < \delta$$

Então, temos

$$\begin{aligned}
|(f * g_\alpha)(x) - f(x)| &= \left| \int [f(x-y) - f(x)] g_\alpha(y) dy \right| \\
&\leq \int_{-\delta}^{\delta} |f(x-y) - f(x)| g_\alpha(y) dy \\
&\quad + \int_{|y| \geq \delta} |f(x-y) - f(x)| g_\alpha(y) dy \\
&\leq \epsilon \int_{-\delta}^{\delta} g_\alpha(y) dy + \int_{|y| \geq \delta} |f(x-y)| g_\alpha(y) dy \\
&\quad + \int_{|y| \geq \delta} |f(x)| g_\alpha(y) dy \\
&\leq \epsilon \int_{-\delta}^{\delta} g_\alpha(y) dy + \max_{|y| \geq \delta} g_\alpha(y) \int_{|y| \geq \delta} |f(x-y)| dy \\
&\quad + |f(x)| \int_{|y| \geq \delta} g_\alpha(y) dy \\
&\leq \epsilon \int_{\mathbb{R}} g_\alpha(y) dy + \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} \max_{|y| \geq \delta} g_\alpha(y) \\
&\quad + |f(x)| \int_{|y| \geq \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}} g_1(y) dy \\
&= \epsilon + \|f\|_{L^1(\mathbb{R})} g_\alpha(\delta) + |f(x)| \int_{|y| \geq \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}} g_1(y) dy
\end{aligned}$$

Mas, $\int_{|y| \geq \frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}} g_1(y) dy \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} 0$ e $g_\alpha(\delta) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} 0$

$\therefore |(f * g_\alpha)(x) - f(x)| \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} 0$ ■

Teorema 2.3.29 : *Seja $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que sua transformada de Fourier \hat{f} também pertença a $L^1(\mathbb{R})$. Então*

$$f(x) = (\mathcal{F}^{-1} \hat{f})(x) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iyx} \hat{f}(y) dy$$

em todo ponto x onde f é contínua.

Prova : Seja $x \in \mathbb{R}$ fixo e seja

$$g(y) := \frac{1}{2\pi} e^{iyx} e^{-i\alpha y^2}$$

Então

$$\hat{g}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-iyt} e^{itx} e^{-\alpha t^2} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(y-x)t} e^{-\alpha t^2} dt = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{(y-x)^2}{4\alpha}} = g_{\alpha}(x-y)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} (f * g_{\alpha})(x) &= \int_{\mathbb{R}} f(y) g_{\alpha}(x-y) dy = \int_{\mathbb{R}} f(y) \hat{g}(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y) g(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iyx} \hat{f}(y) e^{-\alpha y^2} dy \end{aligned}$$

Como

$$\left| e^{iyx} \hat{f}(y) e^{-\alpha y^2} \right| \leq \left| \hat{f}(y) \right| \quad e \quad \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$$

então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue,

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{iyx} \hat{f}(y) e^{-\alpha y^2} dy \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} (\mathcal{F}^{-1} \hat{f})(x)$$

isto é,

$$(f * g_{\alpha})(x) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} (\mathcal{F}^{-1} \hat{f})(x)$$

Agora, se f é contínua em x , então, pelo teorema 2.3.28,

$$(f * g_{\alpha})(x) \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} f(x)$$

Logo,

$$f(x) = (\mathcal{F}^{-1} \hat{f})(x) \quad \blacksquare$$

Observação 2.3.30 : Seja $C = C(R) \cap L^1(R)$. Para cada $x \in R$ fixo, $g_{\alpha}(x)$ pode ser considerada um funcional linear em C , definido por

$$g_{\alpha}(x)(f) := \langle g_{\alpha}(x - \cdot), f \rangle = (f * g_{\alpha})(x)$$

Da mesma forma, considere o funcional linear $\delta(x)$ em C , definido por

$$\delta(x)(f) := \langle \delta(x), f \rangle = f(x)$$

Logo, o teorema 2.3.28, diz que g_{α} converge pontualmente em \mathbb{R}^n , na convergência fraca-*, ou seja,

$$g_{\alpha}(x) \xrightarrow{w^*} \delta(x) \quad \text{em } C', \quad \alpha \rightarrow 0^+$$

Notemos $\delta = \delta(0)$ e definamos

$$(f * \delta)(x) := (\delta * f)(x) := \lim_{\alpha \rightarrow 0} (f * g_\alpha)(x) = f(x)$$

Então $\delta * f = f$ e podemos considerar $\hat{\delta}(\xi) = 1 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}$. É claro, pelo teorema 2.2.4 (Lema de Riemann-Lebesgue), que $\delta \notin L^1(\mathbb{R})$. Na verdade, δ é uma *distribuição* chamada *distribuição δ de Dirac concentrada em 0*.

Teorema 2.3.31: *Sejam⁸ $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, a convolução $f * g$ está bem definida, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.*

Prova: Para $p = \infty$ é imediato. Para $p = 1$, é a proposição 2.3.24. Suponha então $1 < p < \infty$. Pela proposição 2.3.24, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, fixo, a função $y \mapsto |f(x-y)| |g(y)|^p$ está em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Logo, $|f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)| \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Tomemos q tal que $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. Temos $|f(x-y)|^{\frac{1}{q}} \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Pela desigualdade de Hölder,

$$|f(x-y)| |g(y)| = |f(x-y)|^{\frac{1}{p}} |g(y)| |f(x-y)|^{\frac{1}{q}} \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad e$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)| dy = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| |g(y)|^p dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dy \right)^{\frac{1}{q}}$$

Logo, $|(f * g)(x)|^p \leq (|f| * |g|^p)(x) \cdot \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}^{\frac{p}{q}}$. Portanto, pela proposição 2.3.24, $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e

$$\|f * g\|_{L^p}^p \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p}^p \|f\|_{L^1}^{\frac{p}{q}} \quad \therefore \quad \|f * g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^1} \|g\|_{L^p} \quad \blacksquare$$

Observação 2.3.32 : Se $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$, a função $y \mapsto g(x-y) f(y)$ está em $L^2(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$. De fato, é claro que a função está em $L^1(\mathbb{R}^n)$, pela desigualdade de Hölder. Agora, como $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então $|f(x)|^2, |g(x)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Logo, conforme vimos na prova da proposição 2.3.24, para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|g(x-y) f(y)|^2 \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \therefore \quad g(x-y) f(y) \in L^2(\mathbb{R}^n) \quad \blacksquare$$

⁸Ver caso mais na nota de rodapé da página 69 (desigualdade de Young).

2.4 A TRANSFORMADA DE FOURIER EM $L^2(\mathbb{R}^n)$

Lema 2.4.1 : Para toda função $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\bar{\hat{g}}(\xi) = \widehat{\bar{g}}(-\xi) = (2\pi)^n (\check{\bar{g}})(\xi)$$

Prova : $\forall g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\hat{g}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) e^{-ix \cdot \xi} dx$$

$$\therefore \bar{\hat{g}}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{g}(x) e^{ix \cdot \xi} dx = \widehat{\bar{g}}(-\xi) = (2\pi)^n (\check{\bar{g}})(\xi) \quad \blacksquare$$

Teorema 2.4.2 (Plancherel) : $\forall f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^n} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2} \quad (24)$$

$$\therefore \|f\|_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \|\hat{f}\|_{L^2} \quad (\text{Igualdade de Parseval}) \quad (25)$$

Prova :

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2} = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \bar{\hat{g}}(\xi) d\xi$$

Mas, pelo lema 2.4.1,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) \bar{\hat{g}}(\xi) d\xi = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) (\check{\bar{g}})(\xi) d\xi$$

e, pela proposição 2.3.17,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\xi) (\check{\bar{g}})(\xi) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \bar{g}(\xi) d\xi$$

Logo,

$$\langle \hat{f}, \hat{g} \rangle_{L^2} = (2\pi)^n \int_{\mathbb{R}^n} f(\xi) \bar{g}(\xi) d\xi = (2\pi)^n \langle f, g \rangle_{L^2}$$

o que mostra (24). Em particular,

$$\langle \hat{f}, \hat{f} \rangle_{L^2} = (2\pi)^n \langle f, f \rangle_{L^2}$$

isto é,

$$\|f\|_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \|\hat{f}\|_{L^2}$$

que é (25). \blacksquare

Observação 2.4.3 : Note que a igualdade de Parseval (25) e a observação 2.3.13 mostram que

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} F: \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$\cap \textit{denso} \quad \cap \textit{denso}$$

$$L^2 \quad L^2$$

é isometria, na norma L^2 .

Proposição 2.4.4 : *Sejam V_1 espaço vetorial normado, V_2 espaço de Banach e W subespaço denso de V_1 . Seja $T: W \longrightarrow V_2$ operador linear contínuo. Então existe um único operador linear contínuo $\bar{T}: V_1 \longrightarrow V_2$ que estende T , e ele é dado por*

$$\bar{T}(v) = \lim_{w \rightarrow v} T(w) \quad , \quad \forall v \in V_1 \quad \text{e} \quad \|T\| = \|\bar{T}\|$$

Prova : Dado $v \in V_1$, como W é denso, existe uma seqüência $W \ni w_n \longrightarrow v \in V_1$. w_n é uma seqüência de Cauchy (pois é uma seqüência convergente). Como T é limitado (contínuo), existe $c < +\infty$ tal que

$$\|Tw\| \leq c \|w\| \quad \forall w \in W$$

$$\therefore T(w_n) \text{ é de Cauchy em } V_2$$

Defina

$$\bar{T}(v) := \lim_{n \rightarrow +\infty} T(w_n)$$

\bar{T} está bem definido. De fato,

$$w_n \longrightarrow v \quad \text{e} \quad w'_n \longrightarrow v \implies w_n - w'_n \longrightarrow 0$$

$$\therefore T(w_n - w'_n) \longrightarrow T(0) = 0 \quad \therefore \lim_{n \rightarrow +\infty} T(w_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} T(w'_n)$$

o que mostra que \bar{T} está bem definido.

\bar{T} é obviamente um operador linear e $\|\bar{T}(v)\| \leq c \|v\|$. É fácil ver que $\|\bar{T}\| = \|T\|$.

Agora, dado $\tilde{T}: V_1 \longrightarrow V_2$ linear contínuo estendendo T , e $W \ni w_n \longrightarrow v \in V_1$, então

$$\tilde{T}(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{T}(w_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T(w_n) = \bar{T}(v) \quad \forall v \in V_1 \quad \blacksquare$$

Proposição 2.4.5 : *Sejam H_1 , H_2 espaços de Hilbert e $T : H_1 \longrightarrow H_2$ um operador linear contínuo. Se existe um subespaço denso $W \subset H_1$ tal que*

$$\langle Tw_1, Tw_2 \rangle = \langle w_1, w_2 \rangle \quad \forall w_1, w_2 \in W$$

Então

$$\langle Tv_1, Tv_2 \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle \quad \forall v_1, v_2 \in H_1$$

Prova : Imediato, pois

$$w_n \longrightarrow v_1 \text{ e } u_n \longrightarrow v_2 \implies \langle w_n, u_n \rangle \longrightarrow \langle v_1, v_2 \rangle \quad \blacksquare$$

Teorema 2.4.6 : *Existe um único operador linear contínuo $T : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$T \Big|_{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} = \mathcal{F}$$

$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} T$ é um operador unitário no L^2 (isto é, uma bijeção linear entre espaços de Hilbert que preserva produto interno, ou o que é o mesmo, $\left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} T\right)^* = \left(\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} T\right)^{-1}$. Portanto, é uma isometria) cuja inversa é

$$T^{-1} = J \circ T = T \circ J$$

onde $J : L^2 \longrightarrow L^2$; $J(f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^n} f(-x)$.

Prova : Pela igualdade de Parseval (25), temos que $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínua na norma L^2 . Como, pela observação 2.3.13, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$, com inclusão densa na norma $L^2(\mathbb{R}^n)$, então, pela proposição (2.4.4), existe um único operador linear contínuo $T : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ que estende $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ \cap \text{ denso} & & \cap \\ L^2(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\exists! T \text{ extensão de } \mathcal{F}} & L^2(\mathbb{R}^n) \quad (\text{Banach}) \end{array}$$

T é definido por

$$T(f) := \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(f_n) \quad (\text{limite na norma } L^2)$$

onde

$$f_n \xrightarrow{L^2} f \quad , \quad f_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Pela proposição 2.4.5, temos

$$\langle f, g \rangle_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^n} \langle Tf, Tg \rangle_{L^2} \quad \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

já que, pelo teorema 2.4.2 (Plancherel), vale em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ que é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$.

$$\therefore \|f\|_{L^2} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \|Tf\|_{L^2} \quad (\text{Igualdade de Parseval}) \quad (26)$$

Agora, temos

$$J \circ T \circ T = id_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad e \quad J \circ T = T \circ J$$

pois estes operadores são lineares contínuos e, pelo teorema 2.3.20 (teorema da inversão), as igualdades valem no subespaço denso $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset L^2(\mathbb{R}^n)$. ■

Teorema 2.4.7 : *Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ então $Tf = \mathcal{F}f$ q.t.p, isto é,*

$$(Tf)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \quad \text{q.t.p}$$

Prova : Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, $\exists \{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$g_n \xrightarrow[L^1]{L^2} f$$

Como $g_n \xrightarrow{L^2} f$ então $\mathcal{F}g_n \xrightarrow{L^2} Tf$. Logo, existe uma subsequência $\{\mathcal{F}g_{n_j}\}$ tal que

$$\mathcal{F}g_{n_j} \longrightarrow Tf \quad \text{q.t.p} \quad (27)$$

Por outro lado, como $g_n \xrightarrow{L^1} f$, então, pela desigualdade de Bessel (proposição 2.2.2),

$$\mathcal{F}g_n \xrightarrow[\text{no } \mathbb{R}^n]{\text{uniformemente}} \mathcal{F}f$$

$$\therefore \mathcal{F}g_n \longrightarrow \mathcal{F}f \quad \text{q.t.p}$$

$$\therefore \mathcal{F}g_{n_j} \longrightarrow \mathcal{F}f \quad \text{q.t.p} \quad (28)$$

Logo, de (27) e (28), temos

$$Tf = \mathcal{F}f \quad \text{q.t.p} \quad \blacksquare$$

Notação : $T = \mathcal{F}$ no $L^2(\mathbb{R}^n)$ ($Tf = \hat{f}$) ; $T^{-1}f = \check{f} = \mathcal{F} \circ J = J \circ \mathcal{F}$ no $L^2(\mathbb{R}^n)$

Observação 2.4.8 : Note que $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ é um operador linear limitado, com

$$\|\mathcal{F}\|_{(L^2)'} = (2\pi)^{\frac{n}{2}}$$

pela igualdade de Parseval (26).

Observação 2.4.9 : Se $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ então seus truncamentos

$$f_N(x) := \begin{cases} f(x) & , \quad \|x\| \leq N \\ 0 & , \quad \|x\| > N \end{cases} \quad N = 1, 2, \dots$$

estão em $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$, portanto $\hat{f}_N \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Assim, a transformada de Fourier \hat{f} de uma função $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ pode ser definida por⁹

$$\hat{f}(\xi) := \underset{N \rightarrow +\infty}{l.i.m.o.t} \hat{f}_N(\xi)$$

isto é

$$\hat{f}(\xi) := \underset{N \rightarrow +\infty}{l.i.m.o.t} \int_{\|x\| \leq N} e^{-i\xi \cdot x} f(x) dx$$

onde *l.i.m.o.t* significa *limite na média de ordem 2* ou seja *limite na norma de $L^2(\mathbb{R}^n)$* . Note que para $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $\hat{f}(\xi)$ pode não ser igual a $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx$, já que esta integral pode não existir. Se a integral existir então é claro que $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e, portanto, $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} d\xi$.

A proposição a seguir é a versão para o $L^2(\mathbb{R}^n)$ da proposição 2.3.17.

Proposição 2.4.10 : Se $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{g}(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)g(x) dx$$

⁹Alguns autores definem a Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^n)$ deste modo.

Prova : Pela proposição 2.3.17, vale em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ que é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$. ■

Observação 2.4.11 : Em geral, os resultados envolvendo a transformada de Fourier em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ são válidos em $L^2(\mathbb{R}^n)$, já que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^n)$, e $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ é operador contínuo.

2.5 DISTRIBUIÇÕES

Relembremos, da definição 2.2.16, que

$$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) := C_c^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) / \text{supp } f \text{ é compacto}\}$$

Pela proposição 2.2.17, temos $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Definição 2.5.1 : $f \in \mathcal{D}' = \{T : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}, \text{ linear contínuo}\}$ é chamada uma *distribuição*, e $f \in \mathcal{S}'$ é chamada uma *distribuição temperada*.

Uma seqüência $f_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $C_c^m(\mathbb{R}^n)$) converge para 0 em $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (resp. $C_c^m(\mathbb{R}^n)$), que notamos : $f_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$, se existe um compacto $K \supseteq \text{supp } f_n \forall n$, tal que para todo multi-índice α (resp. $|\alpha| \leq m$), $\partial^\alpha f_n$ converge para zero uniformemente em K .

Com esta topologia, a inclusão $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é contínua. Conseqüentemente, toda distribuição temperada T , por restrição a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, define uma distribuição.

$$\mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{S}$$

$$T|_{\mathcal{D}} \searrow \downarrow T \quad \implies \quad \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$$

$$\mathbb{C}$$

Usaremos a notação $\langle T, \varphi \rangle := T(\varphi)$ para $T \in \mathcal{S}'$ (ou \mathcal{D}') e $\varphi \in \mathcal{S}$.

A topologia em \mathcal{S}' é a fraca-*, isto é, dada uma seqüência $\{T_n\} \subset \mathcal{S}'$ e $T \in \mathcal{S}'$

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} T \iff T_n(\varphi) \rightarrow T(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$$

Neste caso, dizemos que T_n converge para T no sentido das distribuições.

Proposição 2.5.2 : Se $1 \leq p \leq +\infty$ então toda $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ define uma distribuição temperada $T_f \in \mathcal{S}'$ via

$$\langle T_f, \varphi \rangle := T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx$$

Prova : Seja $p \in [1, +\infty]$ e seja $q \in [1, +\infty)$; $\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ define $T_f : L^q(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ via

$$\langle T_f, \varphi \rangle := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx$$

De fato, a desigualdade de Hölder¹⁰ mostra que $T_f : L^q(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ está bem definida e é contínua

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi(x)| dx \leq \|f\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^q} \quad (29)$$

Agora, como vimos existe uma inclusão linear contínua $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, logo $T_f|_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}'$.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S} & \hookrightarrow & L^q \\ T_f|_{\mathcal{S}} & \searrow & \downarrow T_f \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

Em outras palavras, como, por (29), temos $|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \|f\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^q}$, e, pela inclusão contínua $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \implies \|\varphi_n\|_{L^q} \rightarrow 0$$

então $T_f|_{\mathcal{S}} \in \mathcal{S}'$. ■

Notação : $\langle f, \varphi \rangle := \langle T_f, \varphi \rangle \quad \forall f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Observação 2.5.3 : É costume identificar a distribuição T_f com a função f e dizer que estas distribuições " são " funções. Conforme veremos, existem distribuições que " não são " funções. Desta forma, distribuição é uma *generalização do conceito de função*¹¹.

¹⁰Se $f \in L^p(\mathbb{R})$ e $g \in L^q(\mathbb{R})$, onde p e q são expoentes conjugados (ie, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), então $fg \in L^1(\mathbb{R})$ e vale

$$\|fg\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \|g\|_{L^q(\mathbb{R})}$$

¹¹Por isso ela é chamada também de *função generalizada*.

Proposição 2.5.4 : A inclusão $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'$ é injetiva e contínua, isto é,

$$L^p(\mathbb{R}^n) \ni f \longmapsto T_f \in \mathcal{S}'$$

é injetiva e contínua.

Prova : Dada $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, temos pela proposição 2.5.2 que $T_f \in \mathcal{S}'$. Logo, como \mathcal{S} é denso no $L^q(\mathbb{R}^n)$, temos

$$T_f|_{\mathcal{S}} = 0 \iff T_f|_{L^q} = 0 \iff \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in L^q$$

onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tome

$$\varphi(x) = \overline{f(x)} |f(x)|^{\frac{p}{q}-1}$$

Logo, $|\varphi(x)|^q = |f(x)|^p \quad \therefore \quad \varphi \in L^q$ e

$$f(x)\varphi(x) = f(x)\overline{f(x)} |f(x)|^{\frac{p}{q}-1} = |f(x)|^2 |f(x)|^{\frac{p}{q}-1} = |f(x)|^{\frac{p}{q}+1} = |f(x)|^p$$

Assim,

$$T_f|_{\mathcal{S}} = 0 \implies \|f\|_{L^p} = 0 \implies f = 0 \text{ q.t.p}$$

o que mostra que a inclusão $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'$ é injetiva.

Agora, pela desigualdade de Hölder,

$$\langle f_n, \varphi \rangle \leq \|f_n\|_{L^p} \|\varphi\|_{L^q} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Portanto,

$$f_n \xrightarrow{L^p} 0 \implies \langle f_n, \varphi \rangle \longrightarrow 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \therefore \quad T_{f_n} \xrightarrow{\mathcal{S}'} 0$$

ou seja,

$$f_n \xrightarrow{L^p} 0 \implies T_{f_n} \longrightarrow 0 \text{ no sentido das distribuições}$$

o que mostra que a inclusão $L^p(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \mathcal{S}'$ é contínua. ■

Observação 2.5.5 : $g(x) = e^x$ define uma distribuição¹²

$$T_g : C_c^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{C} ; \quad \langle T_g, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} g(x)\varphi(x) dx$$

¹²Mais geralmente qualquer função contínua define distribuição.

pois,

$$|\langle T_g, \varphi \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}} |g(x)\varphi(x)| dx \leq \|g\|_{\text{supp } \varphi} \|\varphi\|_{\text{supp } \varphi} \int_{\text{supp } \varphi} dx < +\infty$$

Mas g não define uma distribuição temperada, isto é, não define $T_g \in \mathcal{S}'$. Portanto, $\mathcal{D}' \neq \mathcal{S}'$. De fato, tome

$$\varphi \in \mathcal{D} := C_c^\infty(\mathbb{R}) \quad ; \quad \varphi|_{|x| \leq 1} = 1 \quad ; \quad 0 \leq \varphi \leq 1 \quad \text{e} \quad \varphi|_{|x| \geq 2} = 0$$

Por exemplo, $\varphi(x) = -2x^3 - 9x^2 - 12x - 4$ para $-2 \leq x \leq -1$
e $\varphi(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 4$ para $1 \leq x \leq 2$ (figura 3).

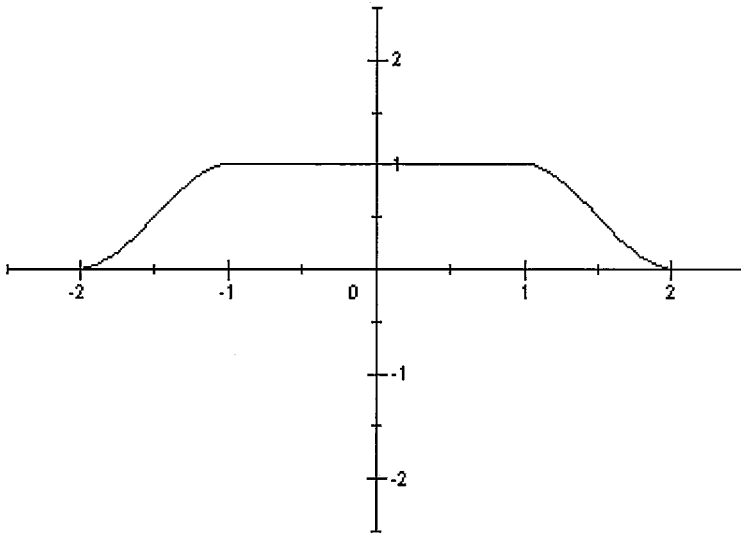


FIGURA 3

Seja $\varphi_k(x) = e^{-\frac{k}{2}} \varphi\left(\frac{x}{k}\right)$, $k = 1, 2, \dots$. Temos

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}} e^x \varphi_k(x) dx \longrightarrow +\infty \quad (30)$$

De fato, $0 \leq \varphi_k \leq 1$ e

$$\int_{\mathbb{R}} e^x \varphi_k(x) dx \geq e^{-\frac{k}{2}} \int_{-k}^k e^x dx = e^{-\frac{k}{2}} (e^k - e^{-k}) = e^{\frac{k}{2}} - e^{-\frac{3k}{2}} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty$$

onde na 1ª desigualdade usamos o fato que $\varphi_k(x) = e^{-\frac{k}{2}}$ se $|x| \leq k$.

Agora, $\forall \alpha, \beta$ multi-índices

$$|x^\beta \partial^\alpha \varphi_k(x)| = \left| x^\beta e^{-\frac{k}{2}} \left(\frac{1}{k}\right)^\alpha \partial^\alpha \varphi\left(\frac{x}{k}\right) \right|$$

Como $\varphi(\frac{x}{k}) = 0$ se $|\frac{x}{k}| \geq 2$. Portanto, podemos considerar $|\frac{x}{k}| \leq 2$, ou seja, $|x| \leq 2k$. Assim, temos

$$|x^\beta \partial^\alpha \varphi_k(x)| \leq (2k)^\beta e^{-\frac{k}{2}} \frac{1}{k^\alpha} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\text{sup}} = 2^\beta k^{\beta-\alpha} e^{-\frac{k}{2}} \|\partial^\alpha \varphi\|_{\text{sup}}$$

o que mostra que $\varphi_k \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Como $k^p e^{-\frac{k}{2}} \xrightarrow{k \nearrow +\infty} 0 \quad \forall p$, temos

$$\|x^\beta \partial^\alpha \varphi_k\|_{\text{sup}} \xrightarrow{k \nearrow +\infty} 0 \quad \therefore \quad \|\varphi_k\|_{\alpha, \beta} \longrightarrow 0$$

isto é

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \quad \blacksquare$$

Portanto, (30) vale, o que mostra que T_g não pode ser estendido a $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ como um funcional linear contínuo.

A proposição abaixo mostra que as distribuições temperadas incluem também as medidas σ -aditivas positivas e finitas nos borelianos do \mathbb{R}^n .

Proposição 2.5.6 : *Toda medida σ -aditiva positiva finita μ nos borelianos do \mathbb{R}^n define uma distribuição temperada T_μ via*

$$\langle T_\mu, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu$$

Prova : T_μ está bem definida, pois

$$|\langle T_\mu, \varphi \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi| d\mu \leq \|\varphi\|_{\text{sup}} \mu(\mathbb{R}^n) < +\infty \quad (31)$$

já que φ é limitada e μ é finita. É claro que T_μ é operador linear. Agora,

Se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ então $\varphi_n \xrightarrow[\text{no } \mathbb{R}^n]{\text{uniformemente}} 0$, isto é, $\|\varphi_n\|_{\text{sup}} \longrightarrow 0$. Logo, por (31),

$$\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0 \implies \langle T_\mu, \varphi_n \rangle \longrightarrow 0$$

Portanto, T_μ é operador linear contínuo em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. \blacksquare

Notação : $\langle \mu, \varphi \rangle := \langle T_\mu, \varphi \rangle$.

Seja \mathcal{B} uma σ -álgebra, e $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ou $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, medida σ -aditiva. Então, pelo teorema da decomposição de Jordan, existem medidas σ -aditivas positivas μ^+ e μ^- tais que

$$\mu = \mu^+ - \mu^-$$

onde $\mu^\pm : \mathcal{B} \longrightarrow [0, +\infty]$; $\mu^+(B) = \sup \{\mu(E) / E \subset B, E \in \mathcal{B}\}$ e $\mu^- = (-\mu)^+$.

É claro que $\mu^+ \geq 0$, pois $\mu^+(B) \geq \mu(\emptyset) = 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}$, já que $\emptyset \subset B$.

A variação total de μ é a medida $|\mu| = \mu^+ + \mu^- : \mathcal{B} \longrightarrow [0, +\infty]$.

Uma função f é integrável relativamente a μ quando é integrável relativamente a μ^+ e μ^- ; e define-se

$$\int_{\Omega} f d\mu := \int_{\Omega} f d\mu^+ - \int_{\Omega} f d\mu^-$$

Temos

$$\left| \int_{\Omega} f d\mu \right| \leq \left| \int_{\Omega} f d\mu^+ \right| + \left| \int_{\Omega} f d\mu^- \right| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu^+ + \int_{\Omega} |f| d\mu^- = \int_{\Omega} |f| d|\mu|$$

onde, na última igualdade, usamos que se $\mu_1 \geq 0$ e $\mu_2 \geq 0$ são medidas σ -aditivas em \mathcal{B} então, para toda função \mathcal{B} -mensurável $g \geq 0$, tem-se

$$\int_{\Omega} g d(\mu_1 + \mu_2) = \int_{\Omega} g d\mu_1 + \int_{\Omega} g d\mu_2$$

Lema 2.5.7 : *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\mu(B) = \int_B f(x) dx$ ⁽¹³⁾ $\forall B$ boreliano do \mathbb{R}^n .*

Então

$$\mu^\pm(B) = \int_B f^\pm(x) dx$$

onde $f^+(x) = \max \{f(x), 0\}$ e $f^-(x) = (-f)^+$.

Prova : Sejam $P_f := \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) \geq 0\}$ e $N_f := \{x \in \mathbb{R}^n / f(x) < 0\}$. Então

$$P_f + N_f = \mathbb{R}^n \quad (P_f \cup N_f = \mathbb{R}^n \quad \text{e} \quad P_f \cap N_f = \emptyset)$$

¹³ f é uma derivada de Radon-Nikodym, ou seja, μ é absolutamente contínua relativamente à medida de Lebesgue no \mathbb{R}^n .

Se $E \subset B$, E, B borelianos do \mathbb{R}^n , temos

$$\mu(E) = \mu(E \cap P_f) + \mu(E \cap N_f) \leq \mu(E \cap P_f) \leq \mu(E \cap P_f) + \mu((B - E) \cap P_f) = \mu(B \cap P_f)$$

já que $\mu(E \cap N_f) < 0$ e $\mu((B - E) \cap P_f) \geq 0$.

$$\therefore \mu(B \cap P_f) = \sup \{ \mu(E) / E \subset B, E \text{ boreliano do } \mathbb{R}^n \} = \mu^+(B) \quad (32)$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} -\mu(E) &= -\mu(E \cap N_f) - \mu(E \cap P_f) \leq -\mu(E \cap N_f) \\ &\leq -\mu(E \cap N_f) - \mu((B - E) \cap N_f) = -\mu(B \cap N_f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore -\mu(B \cap N_f) &= \sup \{ -\mu(E) / E \subset B, E \text{ boreliano do } \mathbb{R}^n \} \\ &= (-\mu)^+(B) = \mu^-(B) \end{aligned} \quad (33)$$

Logo, de (32), (33) e definição de μ , temos¹⁴

$$\mu^+(B) = \mu(B \cap P_f) = \int_{B \cap P_f} f(x) dx \quad \text{e} \quad \mu^-(B) = -\mu(B \cap N_f) = \int_{B \cap N_f} -f(x) dx$$

Agora, como $f = f^+$ onde $f \geq 0$, e $f^+ = 0$ onde $f < 0$, temos

$$\int_{B \cap P_f} f(x) dx = \int_B f^+(x) dx$$

e, como $f^- = -f$ onde $f < 0$, e $f^- = 0$ onde $f \geq 0$, temos

$$\int_{B \cap N_f} -f(x) dx = \int_B f^-(x) dx$$

Portanto,

$$\mu^+(B) = \int_B f^+(x) dx \quad \text{e} \quad \mu^-(B) = \int_B f^-(x) dx \quad \blacksquare$$

Proposição 2.5.8 : Se g é integrável relativamente à $\mu = \int f(x) dx$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} g d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f(x) dx$$

¹⁴(32) e (33) significam que N_f e P_f formam uma decomposição de Hahn.

Prova : Temos que provar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} g d\mu^\pm = \int_{\mathbb{R}^n} g(x) f^\pm(x) dx$$

Como $g = g^+ - g^-$, basta provar para $g \geq 0$. Agora, para $g \geq 0$, existem borelianos B_n e $r_n \geq 0$ tais que

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \chi_{B_n} \quad \therefore \quad \int g d\mu^\pm = \sum_{n=1}^{\infty} r_n \int \chi_{B_n} d\mu^\pm$$

e também se $f_n \geq 0$ são mensuráveis à Lebesgue, temos

$$\int \sum_{n=1}^{\infty} f_n dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int f_n dx$$

Portanto, basta provar o resultado para $g = \chi_B$, B boreliano. Assim, pelo lema 2.5.7, temos

$$\therefore \int_{\mathbb{R}^n} f^\pm \chi_B dx = \int_B f^\pm(x) dx = \mu^\pm(B) = \int_B d\mu^\pm = \int_{\mathbb{R}^n} \chi_B d\mu^\pm \quad \blacksquare$$

Corolário 2.5.9 : *A distribuição temperada definida por $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ é a distribuição definida pela medida $\mu = \int f(x) dx$. Ou seja, se μ provém de uma função $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ via*

$$\mu(B) = \int_B f(x) dx \quad \forall B \text{ boreliano do } \mathbb{R}^n$$

(isto é, μ é absolutamente contínua relativamente à medida de Lebesgue no \mathbb{R}^n), então

$$T_\mu = T_f \quad \text{onde} \quad T_\mu := T_{\mu^+} - T_{\mu^-}$$

Prova : Pelo teorema 2.5.8,

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu = \langle \mu, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \blacksquare$$

Existem medidas que não provém de funções. O próximo exemplo mostra isto.

Exemplo 2.5.10 : A medida de Dirac concentrada num ponto $c \in \mathbb{R}^n$.

$$\delta_c(B) := \begin{cases} 1 & \text{se } c \in B \\ 0 & \text{se } c \notin B \end{cases} \quad B \text{ boreliano no } \mathbb{R}^n$$

Em suma, $\delta_c(\{c\}) = 1$, $\delta_c(B) = 0$ se $c \notin B$.

$$\langle \delta_c, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\delta_c = \int_{\{c\}} \varphi d\delta_c = \varphi(c) \underbrace{\delta_c(\{c\})}_1 = \varphi(c)$$

Não existe $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\delta_c = T_g$. Para simplificar vamos mostrar para $c = 0$ ($\delta := \delta_0$ - medida de Dirac concentrada na origem). De fato, se existisse, teríamos

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)g(x) dx = \varphi(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad (34)$$

Seja

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{a^2}{a^2-|x|^2}\right) & \text{se } |x| < a \\ 0 & \text{se } |x| \geq a \end{cases}$$

Temos

$$\varphi_a \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad , \quad a > 0 \quad e \quad \varphi_a(0) = e^{-1}$$

Logo, por (34),

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi_a(x) dx = e^{-1} \quad \forall a > 0$$

$$\therefore \lim_{a \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\varphi_a(x) dx = e^{-1} \quad e \quad \varphi_a \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0 \quad (35)$$

Agora,

$$\forall a > 0 \quad , \quad |g(x)\varphi_a(x)| \leq \|\varphi_a\|_{\text{sup}} |g(x)| = e^{-1} |g(x)| \in L^1(\mathbb{R}) \quad (36)$$

De (35), (??) e do Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$e^{-1} = 0$$

o que é um absurdo, e mostra que não existe $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $\delta = T_g$.

Já vimos que todas as funções $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ definem distribuições temperadas (isto é, $T_f \in \mathcal{S}'$). Queremos aumentar esta classe.

Definição 2.5.11 :

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) := \left\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} / f \text{ é mensurável e } \int_K |f(x)| dx < +\infty \quad \forall K \text{ compacto no } \mathbb{R}^n \right\}$$

As funções em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ são chamadas *funções localmente integráveis*.

Proposição 2.5.12 :

$$L^1_{loc}(\mathbb{R}^n) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C} / f \text{ é mensurável e } \int_{|x| \leq r} |f(x)| dx < +\infty \quad \forall r > 0 \right\}$$

Prova : Trivial. ■

Proposição 2.5.13 : $L^p(\mathbb{R}^n) \subset L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $\forall 1 \leq p \leq +\infty$.

Prova : É claro que vale para $p = 1$ e $p = +\infty$. Seja $1 < p < +\infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Seja q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para todo K compacto, $\chi_K \in L^q(\mathbb{R}^n)$. Logo, pela desigualdade de Hölder, $f\chi_K \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Assim,

$$\int_K |f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |f\chi_K| dx < +\infty \quad \forall K \text{ compacto no } \mathbb{R}^n \quad \blacksquare$$

Proposição 2.5.14 : $\forall f \in C(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

Prova : $\forall K$ compacto,

$$\int_K |f(x)| dx \leq \|f|_K\|_{\text{sup}} \lambda(K) < +\infty$$

onde λ é a medida de Lebesgue no \mathbb{R}^n . ■

Proposição 2.5.15 : Toda $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ define uma distribuição $T_f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ via

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx \quad (37)$$

Prova : Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ então $f\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ $\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. De fato, se $K := \text{supp } \varphi$, então

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi(x)| dx = \int_K |f(x)\varphi(x)| dx \leq \|\varphi\|_{\text{sup}} \int_K |f(x)| dx < +\infty$$

o que mostra que f define um funcional $T_f : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{C}$ dado por (37). É claro que T_f é um operador linear em \mathcal{D} . Agora, se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{D}} 0$ então $\exists K \subset \mathbb{R}^n$, compacto, com $\text{supp } \varphi_n \subseteq K \quad \forall n$, tal que

$$\varphi_n \xrightarrow[\text{em } K]{\text{uniformemente}} 0 \quad \therefore \quad \|\varphi_n\|_{\text{sup}} \rightarrow 0$$

Mas, como

$$|T_f(\varphi_n)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_n(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi_n(x)| dx \leq \|\varphi_n\|_{\text{sup}} \int_K |f(x)| dx$$

temos que $T_f \in \mathcal{D}'$. ■

Definição 2.5.16 : Seja $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, aberto. Uma *medida de Radon* em Ω é um funcional linear contínuo em $C_c(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} / f \text{ é contínua e } \text{supp } f \text{ é compacto}\}$.

Sabemos que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset C_c(\mathbb{R}^n)$ com inclusão contínua. Logo, por restrição, toda medida de Radon em \mathbb{R}^n define uma distribuição.

Também, toda função f em $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ define uma medida de Radon em \mathbb{R}^n , $T_f : C_c(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ via

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx$$

De fato, da mesma forma que na prova da proposição 2.5.15,

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi(x)| dx \leq \|\varphi\|_{\text{sup}} \int_{\text{supp } \varphi} |f(x)| dx < +\infty$$

Logo, se $\varphi_n \in C_c(\mathbb{R}^n)$, $\varphi_n \rightarrow 0$ em $C_c(\mathbb{R}^n)$, então

$$\exists K \text{ compacto, } \text{supp } \varphi_n \subseteq K, \varphi_n \xrightarrow[\text{em } K]{\text{uniformemente}} 0$$

$$\therefore |\langle T_f, \varphi_n \rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi_n(x)| dx \leq \|\varphi_n\|_{\text{sup}} \int_K |f(x)| dx$$

Portanto, toda função $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$ define uma distribuição dada por (37). Assim, obtemos novamente a proposição 2.5.15.

Definição 2.5.17 : Sejam α, β multi-índices. A soma $\alpha + \beta$ é o multi-índice definido por

$$(\alpha + \beta)_i = \alpha_i + \beta_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Definimos também a seguinte relação de ordem parcial:

$$\beta \leq \alpha \iff \beta_i \leq \alpha_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Nesse caso, fica definido o multi-índice $\alpha - \beta$ por

$$(\alpha - \beta)_i = \alpha_i - \beta_i \quad \forall i = 1, \dots, n$$

Proposição 2.5.18 (regra de Leibiniz) : $\forall \alpha$ multi-índice e $\forall f, g \in C^m(\mathbb{R}^n)$, $|\alpha| = m$, temos

$$\partial^\alpha(fg) = \sum_{0 \leq \gamma \leq \alpha} c_{\gamma, \alpha} \partial^\gamma f \partial^{\alpha - \gamma} g$$

onde $c_{\gamma, \alpha}$ só depende de γ e α , e não de f ou g .

Prova : (Por indução sobre $|\alpha|$).

O resultado é verdadeiro se $|\alpha| = 0$, pois $\partial^0(fg) = fg$.

Suponha $|\alpha| > 0$, e que o resultado vale para todo multi-índice ζ tal que $|\zeta| = |\alpha| - 1$.

Seja δ_j o multi-índice definido por

$$(\delta_j)_i = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ 1 & \text{se } i = j \end{cases} \quad \text{ou seja, } \delta_j = (0, \dots, 0, \underset{\substack{\downarrow \\ \text{j-ésima} \\ \text{coordenada}}}{1}, 0, \dots, 0)$$

Como $|\alpha| > 0$, então $\alpha_j = 1$, para algum $j = 1, \dots, n$. Logo, existe um multi-índice β tal que

$$\beta + \delta_j = \alpha, \quad \partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j} \partial^\beta, \quad |\beta| = |\alpha| - 1 \geq 0$$

Portanto, pela hipótese de indução, o resultado vale para β , isto é,

$$\partial^\beta(fg) = \sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} c_{\gamma, \beta} \partial^\gamma f \partial^{\beta - \gamma} g \quad \therefore \quad \partial^\alpha(fg) = \sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} c_{\gamma, \beta} \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial^\gamma f \partial^{\beta - \gamma} g)$$

Mas,

$$\frac{\partial}{\partial x_j} (\partial^\gamma f \partial^{\beta - \gamma} g) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \partial^\gamma f \right) \partial^{\beta - \gamma} g + \partial^\gamma f \frac{\partial}{\partial x_j} \partial^{\beta - \gamma} g$$

Logo,

$$\sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} c_{\gamma, \beta} \frac{\partial}{\partial x_j} (\partial^\gamma f \partial^{\beta - \gamma} g) = \sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} c_{\gamma, \beta} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \partial^\gamma f \right) \partial^{\beta - \gamma} g + \sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} c_{\gamma, \beta} \partial^\gamma f \frac{\partial}{\partial x_j} \partial^{\beta - \gamma} g$$

$$\begin{aligned}
\therefore \partial^\alpha(fg) &= \sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} c_{\gamma, \beta} \partial^{\gamma + \delta_j} f \partial^{\beta + \delta_j - \gamma} g + \sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} c_{\gamma, \beta} \partial^\gamma f \partial^{\beta + \delta_j - \gamma} g \\
&= \sum_{0 \leq \gamma' \leq \alpha} \tilde{c}_{\gamma', \beta} \partial^{\gamma'} f \partial^{\alpha - \gamma'} g + \sum_{0 \leq \gamma \leq \beta} c_{\gamma, \beta} \partial^\gamma f \partial^{\alpha - \gamma} g \quad \text{onde } \gamma' = \gamma + \delta_j \\
\therefore \partial^\alpha(fg) &= \sum_{0 \leq \gamma \leq \alpha} \bar{c}_{\gamma, \alpha} \partial^\gamma f \partial^{\alpha - \gamma} g \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Corolário 2.5.19 : Se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então para todo polinômio p , temos

$$m_p(f) := p(x)f : x \mapsto p(x)f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Prova : Imediato, pela proposição 2.5.18. \blacksquare

Proposição 2.5.20 : Para todo polinômio p

$$m_p : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \text{é operador linear contínuo}$$

Prova : Pelo teorema 2.3.10 (Teorema do Gráfico Fechado), basta provar que

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f \quad \text{e} \quad pf_n \xrightarrow{\mathcal{S}} h \quad \implies \quad h = pf$$

De fato, como $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f$ então $pf_n \xrightarrow[\text{no } \mathbb{R}^n]{\text{uniformemente}} pf$ (fazendo $\alpha = 0$ na definição de convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$). Como $pf_n \xrightarrow{\mathcal{S}} h$ então $pf_n \xrightarrow[\text{no } \mathbb{R}^n]{\text{uniformemente}} h$. Logo, $h = pf$. \blacksquare

Proposição 2.5.21 : Para todo multi-índice α ,

$$\partial^\alpha : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \quad \text{é operador linear contínuo}$$

Prova : Se $f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f$ e $\partial^\alpha f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} g$ então

$$\partial^\alpha f_n \xrightarrow[\text{no } \mathbb{R}^n]{\text{uniformemente}} \partial^\alpha f \quad \text{e} \quad \partial^\alpha f_n \xrightarrow[\text{no } \mathbb{R}^n]{\text{uniformemente}} g$$

Logo, $\partial^\alpha f = g$ e o teorema 2.3.10 mostra que $\partial^\alpha : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é operador contínuo. É claro que o operador é linear. \blacksquare

Vimos na proposição 2.5.15 que toda função $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ define distribuição. Porém, existem funções $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ que não definem distribuição temperada $T_f \in \mathcal{S}'$. Exemplo : a função contínua $f(x) = e^x$ (ver observação 2.5.5). Entre as funções localmente integráveis, aquelas que têm crescimento polinomial no infinito definem distribuições temperadas, conforme veremos a seguir.

Definição 2.5.22 : $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ tem crescimento polinomial no infinito se $\exists r > 0$, $\exists p(x)$ polinômio tal que

$$|f(x)| \leq |p(x)| \quad \forall x ; |x| \geq r$$

Exemplo 2.5.23 : As funções limitadas (em particular as funções $f \in \mathcal{S}$) e os polinômios, obviamente, têm crescimento polinomial no infinito.

Proposição 2.5.24 : Se $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ e tem crescimento polinomial no infinito, então f define uma distribuição temperada T_f por

$$T_f(\varphi) := \langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx$$

Prova : Como f tem crescimento polinomial no infinito, $\exists r > 0$, $p(x)$ polinômio tal que

$$|f(x)| \leq |p(x)| \quad \forall x, |x| \geq r$$

Podemos supor, sem perda de generalidade¹⁵,

$$|f(x)| \leq |p(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \tag{38}$$

De fato, considere

$$f_1 := f\chi_{B_r} \quad e \quad f_2 := f - f_1$$

Então

$$f_1 \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad (\because \exists T_{f_1} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)) \quad e \quad |f_2(x)| \leq |p(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

¹⁵Funções com crescimento lento no infinito, na definição de alguns autores. Ver [3].

Logo, se f_2 define distribuição temperada, então $f = f_1 + f_2$ também define distribuição temperada.

Mostremos então que $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, satisfazendo (38), define uma distribuição temperada $T_f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$ via

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x) dx$$

Seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. De (38), e do fato que $m_p : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \ni \varphi \mapsto p\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi(x)| dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |p(x)\varphi(x)| dx = \|p\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

$$\therefore f\varphi \in L^1(\mathbb{R}^n) \text{ e } \|f\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq \|p\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \quad (39)$$

Logo, T_f está bem definida e, claramente, é linear.

Mostremos que T_f é contínuo.

Se $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ então $p\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{S}} 0$ (m_p é contínuo).

$$\therefore \|p\varphi_n\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0 \text{ (inclusão contínua } \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^1(\mathbb{R}^n))$$

Logo, por (39), $\|f\varphi_n\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$.

$$\therefore |T_f(\varphi_n)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi_n(x) dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)\varphi_n(x)| dx = \|f\varphi_n\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \rightarrow 0$$

$\therefore T_f$ é operador contínuo ■

Observação 2.5.25 : A função $g(x) = e^x$ não tem crescimento polinomial no infinito.

2.6 DERIVADA NO SENTIDO DAS DISTRIBUIÇÕES

Proposição 2.6.1 : Se $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ então f e $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ definem distribuições.

Prova : Como f e $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ são contínuas, então estão em $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. ■

Proposição 2.6.2 : $\forall f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ e $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle \quad (40)$$

Prova : Fixe todas as variáveis, exceto x_j . Temos, pela fórmula de integração por partes,

$$\int_{-r}^r f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx_j = f(r)\varphi(r) - f(-r)\varphi(-r) - \int_{-r}^r \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\varphi(x) dx_j \quad \forall r > 0$$

Como $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, então $\varphi(r) = \varphi(-r) = 0$ para r suficientemente grande. Logo,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x) dx_j = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\varphi(x) dx_j$$

Assim, pelo teorema de Fubini, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi(x) dx \quad \blacksquare$$

Proposição 2.6.3 : Se $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$; f e $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ têm crescimento polinomial no infinito, então

$$\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Prova : Análoga a anterior, só notando que, como $|f(x)| \leq |p(x)|$ para $|x|$ suficientemente grande, onde $p(x)$ é um polinômio, então

$$|f(x)\varphi(x)| \leq |p(x)\varphi(x)| \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Mas, como $p\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ então $p(x)\varphi(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$. Logo, $f(x)\varphi(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} 0$. ■

Definição 2.6.4 : $\forall T \in \mathcal{D}'$ (resp. $T \in \mathcal{S}'$) definimos a derivada parcial $\frac{\partial T}{\partial x_j}$ por

$$\left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \text{ (resp. } \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n))$$

Observação 2.6.5 : Note que (40) mostra que no caso de funções diferenciáveis (classe C^1), a derivada no sentido das distribuições coincide com a derivada no sentido clássico, isto é, a derivada da distribuição definida por f é a distribuição definida pela derivada da f .

É útil usar a notação $T = f$ mesmo quando $T \in \mathcal{S}'$ não provém de função. Assim,

$$\left\langle f, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle = - \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle ; \quad f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$$

É normal também usar a notação

$$\langle f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx ; \quad f : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C} ; \quad \varphi \longmapsto \langle f, \varphi \rangle$$

mesmo quando $f \in \mathcal{S}'$ não provém de função $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{C}$.

A fórmula da derivada da distribuição fica então

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \varphi(x) dx$$

Exemplo 2.6.6 : Considere a função de Heaviside abaixo. Ela define, pela proposição 2.5.24, uma distribuição temperada.

$$H : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} ; \quad H(x) := \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, temos

$$\langle H', \varphi \rangle = - \langle H, \varphi' \rangle = - \int_0^{+\infty} \varphi'(x) dx = \varphi(0) = \langle \delta, \varphi \rangle$$

onde na 3ª igualdade usamos o fato que $\varphi(x) \xrightarrow{x \nearrow +\infty} 0$. Ou seja, a derivada, no sentido das distribuições, da função de Heaviside, é a medida de Dirac concentrada na origem.

A derivada de uma medida finita positiva μ nos borelianos do \mathbb{R}^n , em geral, não é uma medida:

$$\left\langle \frac{\partial \mu}{\partial x_j}, \varphi \right\rangle = - \left\langle \mu, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right\rangle$$

ou seja, a derivada de μ , no sentido das distribuições, é o operador

$$\varphi \mapsto - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} d\mu(x)$$

2.7 A TRANSFORMADA DE FOURIER NO ESPAÇO DAS DISTRIBUIÇÕES TEMPERADAS

Sabemos que $\forall f, \varphi \in L^1(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(x)\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\hat{\varphi}(x) dx$$

Assim, $\forall f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\langle \hat{f}, \varphi \rangle = \langle f, \hat{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Definição 2.7.1 : $\forall T \in \mathcal{S}'$, definimos a *Transformada de Fourier* \hat{T} por

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle := \langle T, \hat{\varphi} \rangle$$

Observação 2.7.2 : $\hat{T} \in \mathcal{S}'$, pois $\hat{T} = T \circ \mathcal{F}$ (composição de operadores lineares contínuos):

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{T} \mathbb{C} \\ \varphi & \mapsto & \hat{\varphi} \mapsto \langle T, \hat{\varphi} \rangle := \langle \hat{T}, \varphi \rangle \end{array}$$

Assim, se $T = T_f$, então $\hat{T} = T_{\hat{f}}$, $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$, isto é,

$$\langle T_{\hat{f}}, \varphi \rangle = \langle T_f, \hat{\varphi} \rangle$$

Se f é uma função que define distribuição, consideremos a função

$$(Jf)(x) = f(-x)$$

A distribuição definida por Jf é dada por

$$\langle Jf, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(-x)\varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\varphi(-y) dy = \langle f, J\varphi \rangle$$

Definição 2.7.3 : $\forall T \in \mathcal{S}'$, definimos o operador $J : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ por

$$\langle JT, \varphi \rangle = \langle T, J\varphi \rangle$$

De fato, $JT \in \mathcal{S}'$, pois $JT = T \circ J$ (composta de duas aplicações lineares contínuas).

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{J} & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ & \searrow JT & \swarrow T \\ & \mathbb{C} & \end{array}$$

Definição 2.7.4 : $\forall T \in \mathcal{S}'$, definimos

$$\check{T} := J(\hat{T}) \in \mathcal{S}'$$

Proposição 2.7.5 (A Transformada de Fourier Inversa em \mathcal{S}') :

$\forall T \in \mathcal{S}'$, temos

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Prova :

$$\langle \check{T}, \varphi \rangle = \langle J(\hat{T}), \varphi \rangle = \langle \hat{T}, J\varphi \rangle = \langle T, \widehat{J\varphi} \rangle = \langle T, \check{\varphi} \rangle$$

onde a 1ª igualdade é pela definição de \check{T} , a 2ª é pela definição de J , a 3ª é pela definição de \hat{T} , e a última igualdade é porque $\check{\varphi} = \mathcal{F} \circ J = \widehat{J\varphi} \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. ■

Teorema 2.7.6 : $\mathcal{F} : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ é uma bijeção linear contínua, cuja inversa é o operador $T \longmapsto \check{T}$ definido em \mathcal{S}' .

Prova :

$$\langle (\hat{\check{T}}), \varphi \rangle = \langle \hat{T}, \check{\varphi} \rangle = \langle T, (\check{\varphi})^\wedge \rangle = \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

$$\therefore (\hat{\check{T}}) = T$$

Da mesma forma, temos

$$(\check{T})^\wedge = T$$

Sejam $\{T_n\} \subset \mathcal{S}'$, $T \in \mathcal{S}'$, $T_n \longrightarrow T$ no sentido das distribuições¹⁶, ou seja,

¹⁶Convergência fraca-*

$$\langle T_n, \varphi \rangle \longrightarrow \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Como, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, então temos

$$\langle \hat{T}_n, \varphi \rangle = \langle T_n, \hat{\varphi} \rangle \longrightarrow \langle T, \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{T}, \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Logo,

$$\hat{T}_n \longrightarrow \hat{T} \quad \text{no sentido de } \mathcal{S}'$$

$\therefore \mathcal{F} : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ é operador contínuo \blacksquare

Proposição 2.7.7 : *Seja μ uma medida finita¹⁷ nos borelianos do \mathbb{R}^n . Então*

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} d\mu(x)$$

$\hat{\mu}$ é contínua, limitada e

$$\|\hat{\mu}\|_{\text{sup}} \leq |\mu|(\mathbb{R}^n)$$

Prova : $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\langle \hat{\mu}, \varphi \rangle = \langle \mu, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(x) d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) e^{-ix \cdot \xi} d\xi d\mu(x) \quad (41)$$

Como

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi) e^{-ix \cdot \xi}| d\xi d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} d\mu = \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \mu(\mathbb{R}^n) < +\infty$$

pois μ é finita, então podemos aplicar o teorema de Fubini à integral em (41). Logo,

$$\langle \hat{\mu}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} d\mu(x) \varphi(\xi) d\xi = \left\langle \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} d\mu(x), \varphi \right\rangle$$

$$\therefore \hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} d\mu(x)$$

$$\therefore |\hat{\mu}(\xi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} d\mu(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} d|\mu|(x) = |\mu|(\mathbb{R}^n)$$

$$\therefore \hat{\mu} \text{ é limitada e } \|\hat{\mu}\|_{\text{sup}} \leq |\mu|(\mathbb{R}^n)$$

Mostremos agora que $\hat{\mu}$ é contínua.

¹⁷ $|\mu|(A) < \infty$ para todo boreliano A do \mathbb{R}^n .

Seja $\xi_n \rightarrow \xi$. Logo,

$$e^{-ix \cdot \xi_n} \rightarrow e^{-ix \cdot \xi}$$

Como $e^{-ix \cdot \xi_n}$ é integrável (pois $|e^{-ix \cdot \xi_n}| \leq 1$ e μ é finita), então, pelo Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi_n} d\mu(x) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} d\mu(x)$$

$$\therefore \hat{\mu}(\xi_n) \rightarrow \hat{\mu}(\xi) \quad \therefore \hat{\mu} \text{ é contínua} \quad \blacksquare$$

Observação 2.7.8 : Estamos usando a notação $T_f = f$ e $T_\mu = \mu$. Formalmente, temos:

$$\widehat{T}_\mu = T_f, \text{ onde } f(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} d\mu(x)$$

Dizer que $\hat{\mu}$ é contínua e limitada, é dizer que a transformada de Fourier da distribuição T_μ é uma distribuição definida por uma função contínua e limitada.

Exemplo 2.7.9 : Dada $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{R}^n$, considere a translação

$$\tau_c(f)(x) = f(x - c)$$

Para cada $T \in S'$, definamos $\tau_c(T)$ por

$$\langle \tau_c(T), f \rangle = \langle T, \tau_{-c}(f) \rangle \quad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Temos que $\tau_c(T) \in S'$, pois é composta de contínuas.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\tau_{-c}} & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\ & \searrow \tau_c(T) & \downarrow T \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

De fato, $\tau_c : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ é operador linear contínuo $\forall c \in \mathbb{R}^n$. Vamos mostrar via teorema 2.3.10 (Teorema do Gráfico Fechado). Sejam

$$f_n \xrightarrow{\mathcal{S}} f \quad e \quad \tau_c(f_n) \xrightarrow{\mathcal{S}} g$$

$$\therefore f_n \xrightarrow[\text{no } \mathbb{R}^n]{\text{uniformemente}} f \quad \therefore f_n(x - c) \rightarrow f(x - c) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\therefore \tau_c(f_n) \xrightarrow[\text{no } \mathbb{R}^n]{\text{uniformemente}} g \quad \therefore f_n(x-c) = \tau_c(f_n)(x) \longrightarrow g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

Logo,

$$g(x) = f(x-c) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \therefore g = \tau_c(f)$$

Portanto,

$$\tau_c : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ é operador contínuo } \forall c \in \mathbb{R}^n$$

Agora, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, temos

$$\langle \tau_c(\delta), \varphi \rangle = \langle \delta, \tau_{-c}(\varphi) \rangle = \tau_{-c}(\varphi)(0) = \varphi(c) = \langle \delta_c, \varphi \rangle$$

$$\therefore \tau_c(\delta) = \delta_c$$

Vamos calcular agora $\widehat{\delta}_c$. Pela proposição 2.7.7,

$$\widehat{\delta}_c(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot \xi} d\delta_c(x) = \int_{\{c\}} e^{-ix \cdot \xi} d\delta_c(x) = e^{-ic \cdot \xi} \underbrace{\delta_c(\{c\})}_1 = e^{-ic \cdot \xi}$$

$$\therefore \widehat{\delta}_c(\xi) = e^{-ic \cdot \xi} \quad \therefore \widehat{\delta}_0 \equiv 1$$

2.8 A DERIVADA DA TRANSFORMADA DE FOURIER NO ESPAÇO DAS DISTRIBUIÇÕES TEMPERADAS

Dada $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e p polinômio no \mathbb{R}^n tal que $pf \in L^1(\mathbb{R}^n)$ então, $\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $p\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e

$$\langle T_{pf}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} p(x)f(x)\varphi(x) dx = \langle T_f, p\varphi \rangle$$

Definição 2.8.1 : $\forall T \in \mathcal{S}'$, definimos PT por

$$\langle PT, \varphi \rangle = \langle T, P\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$$

Temos que $PT \in \mathcal{S}'$, já que é a composta de lineares contínuas.

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{m_p} & \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \\
PT \searrow & & \downarrow T \\
& & \mathbb{C}
\end{array}$$

Definição 2.8.2 : O operador diferencial $\partial^\alpha : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ é definido por

$$\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$$

Proposição 2.8.3 : $\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

Prova : (Por indução sobre $|\alpha|$)

Se $|\alpha| = 0$, o resultado é imediato.

Suponha que vale para todo multi-índice ξ tal que $|\xi| = |\alpha| - 1 \geq 0$. Seja β multi-índice tal que $\partial^\alpha = \frac{\partial}{\partial x_j} \partial^\beta$, $|\beta| = |\alpha| - 1$. Pela hipótese de indução,

$$\langle \partial^\beta T, \varphi \rangle = (-1)^{|\beta|} \langle T, \partial^\beta \varphi \rangle$$

Portanto,

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_j} \partial^\beta T, \varphi \right\rangle = - \langle \partial^\beta T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \rangle = -(-1)^{|\beta|} \langle T, \frac{\partial}{\partial x_j} \partial^\beta \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle$$

■

Proposição 2.8.4 : $\partial^\alpha : \mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ é operador linear contínuo.

Prova : É claro que o operador é linear. Mostremos que é contínuo.

Suponha $T_n \xrightarrow{\mathcal{S}'} T$, seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \therefore \partial^\alpha \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Temos,

$$\langle \partial^\alpha T_n, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T_n, \partial^\alpha \varphi \rangle \longrightarrow (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle = \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle$$

$$\therefore \partial^\alpha T_n \longrightarrow \partial^\alpha T \quad \blacksquare$$

Proposição 2.8.5 : $\forall T \in \mathcal{S}'$ e $\forall \alpha$ multi-índice, temos

$$i) \quad \partial^\alpha \hat{T} = (-i)^{|\alpha|} (\xi^\alpha T)^\wedge$$

$$ii) \quad (\partial^\alpha T)^\wedge = i^{|\alpha|} x^\alpha \hat{T}$$

Prova :

$$\begin{aligned} i) \quad \langle \partial^\alpha \hat{T}, \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle \hat{T}, \partial^\alpha \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \widehat{\partial^\alpha \varphi} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, i^{|\alpha|} \xi^\alpha \hat{\varphi} \rangle \\ &= (-i)^{|\alpha|} \langle \xi^\alpha T, \hat{\varphi} \rangle = \langle (-i)^{|\alpha|} (\xi^\alpha T)^\wedge, \varphi \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ii) \quad \langle (\partial^\alpha T)^\wedge, \varphi \rangle &= \langle \partial^\alpha T, \hat{\varphi} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \hat{\varphi} \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, (-i)^{|\alpha|} (x^\alpha \varphi)^\wedge \rangle \\ &= i^{|\alpha|} \langle T, (x^\alpha \varphi)^\wedge \rangle = i^{|\alpha|} \langle \hat{T}, x^\alpha \varphi \rangle = \langle i^{|\alpha|} x^\alpha \hat{T}, \varphi \rangle \quad \blacksquare \end{aligned}$$

3 WAVELET E MULTIRESOLUÇÃO

3.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentaremos uma introdução à teoria de wavelet. Existem dois bons motivos para que as wavelets sejam atrativas em uma série de aplicações: um deles é o seu uso na representação de funções do $L^2(\mathbb{R})$. O outro é a sua relação com Análise de Multiresolução. Veremos apenas por que a transformada wavelet é interessante em “*localização tempo-frequência*” e faremos o necessário para entendermos Análise de Multiresolução.

Na seção 3.2, introduzimos as wavelets e a Transformada Wavelet Integral. Alguns resultados de frames são necessários para provarmos a ortonormalidade da base de Meyer. Na seção 3.3 trataremos de Análise de Multiresolução e construiremos a Análise de Multiresolução de Meyer, que usaremos no último capítulo. As referências para este capítulo são [10] e [12].

3.2 WAVELETS E FRAMES

Se $f \in L^2(\mathbb{R})$ é considerada como um sinal analógico com energia finita $\|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$ então sua transformada de Fourier descreve o comportamento espectral do sinal f . Neste caso, o domínio de definição da f , que é \mathbb{R} , é denominado *domínio do tempo contínuo*. Como a informação espectral é dada em termos de frequência, o domínio de definição da transformada de Fourier de f , que também é \mathbb{R} , é denominado *domínio da frequência*. O teorema 2.4.2 (Plancherel) e a igualdade de Parseval (26) mostram então, que a “*energia de um sinal analógico de energia finita*” é diretamente proporcional ao seu conteúdo espectral.

Definição 3.2.1 : Uma função $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ é chamada uma *wavelet* se satisfaz a condição, dita de admissibilidade,

$$C_\psi := \int_{\mathbb{R}} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < +\infty \quad (42)$$

onde $\widehat{\psi}$ é a Transformada de Fourier da ψ . Se $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ então, conforme teorema 2.2.2, $\widehat{\psi}$ é contínua e (42) implica que $\lim_{\omega \rightarrow 0} \widehat{\psi}(\omega) = 0$, ou seja, $\widehat{\psi}(0) = 0$. Assim, para uma wavelet $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, temos

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(t) dt = 0$$

Este fato significa que ψ deve oscilar de forma a cancelar áreas acima e abaixo do seu gráfico. Como $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ então $\lim_{|t| \rightarrow +\infty} \psi(t) = 0$. Logo o gráfico de ψ deve ser uma “ondinha” para $|t|$ grande. Por esse motivo ψ é chamada uma *wavelet*.

Define-se a Transformada Wavelet Integral Contínua em $L^2(\mathbb{R})$, por

$$(W_{\psi}f)(b, a) := |a|^{-\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)} dt \quad a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$$

A condição de admissibilidade na definição 3.2.1 é suficiente, conforme teorema 3.2.9, para a inversão da Transformada Wavelet Integral contínua. Definimos uma família de wavelets como $\psi_{b,a}(t) := |a|^{-\frac{1}{2}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ e então temos

$$(W_{\psi}f)(b, a) = \langle f, \psi_{b,a} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{\psi_{b,a}} \rangle$$

Assim, se \mathcal{F}^{-1} é a Transformada de Fourier inversa, temos

$$(W_{\psi}f)(b, a) = \frac{1}{2\pi} |a|^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}} e^{ib\omega} \widehat{\psi}(a\omega) \widehat{f}(\omega) d\omega = |a|^{\frac{1}{2}} \mathcal{F}^{-1}(\widehat{\psi}(a \cdot) \widehat{f})(b) \quad (43)$$

Agora, como $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ então $\lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \widehat{\psi}(\omega) = 0$. Se o decaimento de $\widehat{\psi}$ é rápido quando $\omega \rightarrow 0$ e quando $\omega \rightarrow \infty$, então $\widehat{\psi}(\omega)$ é próxima de zero fora de um intervalo de frequência $\alpha \leq |\omega| \leq \beta$. Portanto, $\widehat{\psi_{b,a}}$ é próxima de zero fora do intervalo de frequência $\frac{\alpha}{|a|} \leq |\omega| \leq \frac{\beta}{|a|}$. Logo, por (43), a Transformada Wavelet Integral Contínua não contém informação de frequência da função f fora dessa *banda* de frequência. Ela funciona como um “filtro de passa banda” cortando as baixas e as altas frequências. Tomando $a = a_0^m$, $a_0 > 1$ e $b = nb_0 a_0^m$, $b_0 > 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$, temos as wavelets discretizadas

$$\psi_{m,n}(t) = a_0^{-\frac{m}{2}} \psi(a_0^{-m}t - nb_0)$$

e a correspondente Transformada Wavelet Integral Discreta

$$(W_\psi f)_{m,n} = a_0^{-\frac{m}{2}} \int_{\mathbb{R}} f(t) \overline{\psi(a_0^{-m}t - nb_0)} dt$$

A Transformada Wavelet Integral aparece implicitamente em Calderón [8], mas foi introduzida explicitamente por Grossmann e Morlet [19] como uma técnica de Análise Numérica para decomposição de funções pertencentes ao subespaço¹⁸ de $L^2(\mathbb{R})$ formado pelas funções cuja Transformada de Fourier se anula para $\xi < 0$.

Para algumas escolhas especiais da wavelet ψ , de a_0 e de b_0 , as funções $\psi_{m,n}$ formam uma base ortonormal de wavelets, neste caso ψ é chamada uma *wavelet mãe*. Em particular, tomando¹⁹ $a_0 = 2$ e $b_0 = 1$, temos:

$$\psi_{m,n}(t) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}t - n)$$

A base ortonormal de wavelets mais antiga que se tem notícia é a base de Haar, gerada pela seguinte wavelet mãe:

$$\psi(t) := \begin{cases} 1 & , 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ -1 & , \frac{1}{2} \leq t < 1 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

Esta base foi construída, em 1910, por Alfred Haar [20], portanto, numa época em que as wavelets ainda não eram conhecidas. A transformada de Fourier da função de Haar decai somente como $|\xi|^{-1}$, portanto a base de Haar não tem “boa localização” na frequência, apesar de ter boa localização no tempo, já que é gerada por uma wavelet com suporte compacto. Uma base de wavelet com boa localização tempo-frequência é a base de Meyer [30], gerada pela wavelet de Meyer construída no final desta seção. A wavelet de Meyer é C^∞ e decai mais rápido que o inverso de qualquer polinômio. Entretanto, o decaimento não é exponencial²⁰. Portanto, para certas aplicações a wavelet de Meyer tem um decaimento muito lento no tempo. Apesar disso, sendo a wavelet de Meyer uma função do espaço de Schwartz com excelente localização na frequência, para muitos problemas ela dá bons resultados.

¹⁸Espaço de Hardy na reta.

¹⁹O uso de potências de 2 é por razões computacionais.

²⁰Na verdade wavelets ortonormais C^∞ não podem ter decaimento exponencial (ver [12]).

Definição 3.2.2 : Uma função não-trivial $W \in L^2(\mathbb{R})$ é chamada uma função janela se $xW(x) \in L^2(\mathbb{R})$. O centro t^* e o raio Δ_W de uma função janela W estão bem definidos, respectivamente, por²¹

$$t^* := \frac{1}{\|W\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} \int_{\mathbb{R}} x |W(x)|^2 dx$$

e

$$\Delta_W := \frac{1}{\|W\|_{L^2(\mathbb{R})}} \left(\int_{\mathbb{R}} (x - t^*)^2 |W(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

e a largura da função janela W é definida por $2\Delta_W$.

Exemplo 3.2.3: Considere as Gaussianas²²

$$g_\alpha(t) := \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}} e^{-\frac{t^2}{4\alpha}} \quad , \quad \alpha > 0 \quad , \quad \text{fixo}$$

Sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}} g_\alpha(x) dx = 1$$

Também sabemos que²³

$$\widehat{g}_\alpha(\omega) = e^{-\alpha\omega^2}$$

Vamos mostrar que uma gaussiana é uma função janela cuja Transformada de Fourier é uma função janela. Temos, para $a > 0$.

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{y^2}{4a}} dy = \frac{2\sqrt{\pi a}}{2a} = \sqrt{\pi} a^{-\frac{1}{2}}$$

Logo, $\widehat{g}_\alpha \in L^2(\mathbb{R})$ e, conseqüentemente, $g_\alpha \in L^2(\mathbb{R})$. Fazendo $a = \frac{1}{2\alpha}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} dx = \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2\alpha} \right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi\alpha}$$

²¹Notar que $t^* = \frac{1}{\|W\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} \langle xw, w \rangle \leq \frac{1}{\|W\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} \|xw\|_{L^2(\mathbb{R})} \|w\|_{L^2(\mathbb{R})} < +\infty$

²²Ver figura 2.

²³Basta fazer $a = \frac{1}{4\alpha}$ no exemplo 2.3.22.

$$\therefore \int_{\mathbb{R}} |g_{\alpha}(t)|^2 dt = \frac{1}{4\pi\alpha} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2\alpha}} dt = \frac{\sqrt{2\pi\alpha}}{4\pi\alpha} = (8\pi\alpha)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\therefore \|g_{\alpha}\|_{L^2(\mathbb{R})} = (8\pi\alpha)^{-\frac{1}{4}}$$

Agora, integrando por partes, temos

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} a^{-\frac{3}{2}}$$

Isto mostra que \widehat{g}_{α} é uma função janela. Fazendo $a = \frac{1}{2\alpha}$, temos

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 e^{-\frac{x^2}{2\alpha}} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} (2\alpha)^{\frac{3}{2}}$$

ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 g_{\alpha}^2(x) dx = \frac{\sqrt{2\pi} \alpha^{\frac{3}{2}}}{4\pi\alpha} = \left(\frac{\alpha}{8\pi}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Assim, $xg_{\alpha}(x) \in L^2(\mathbb{R})$ e $\left\{ \int_{\mathbb{R}} x^2 g_{\alpha}^2(x) dx \right\}^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\alpha}{8\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$. Logo, g_{α} é uma função janela. ■

Proposição 3.2.4: Se $W \in L^2(\mathbb{R})$ é uma função janela então $W \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$.

Prova: Pela definição 3.2.2, uma função janela é uma função $W \in L^2(\mathbb{R})$ tal que

$$tW(t) \in L^2(\mathbb{R})$$

Como $W \in L^2(\mathbb{R})$ e $tW(t) \in L^2(\mathbb{R})$, então $(1 + |t|)W(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Agora, $(1 + |t|)^{-1} \in L^2(\mathbb{R})$. De fato,

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |t|)^{-2} dt \leq \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{1 + t^2} = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \int_{-n}^m \frac{dt}{1 + t^2} = \lim_{n,m \rightarrow \infty} \arctg t \Big|_{-n}^m = \pi$$

Como $(1 + |t|)W(t) \in L^2(\mathbb{R})$ e $(1 + |t|)^{-1} \in L^2(\mathbb{R})$, pela desigualdade de Schwarz, $W \in L^1(\mathbb{R})$ ■

Observação 3.2.5: Note que $(1 + |t|)^{-1}$ não é uma função janela, pois $\frac{t}{1+|t|} \notin L^2(\mathbb{R})$. De fato, caso contrário, $\frac{1}{1+|t|} + \frac{t}{1+|t|}$ estaria em $L^2(\mathbb{R})$, ou seja, $\frac{1+t}{1+|t|} \in L^2(\mathbb{R})$,

o que é um absurdo, já que

$$\int_0^{\infty} \left(\frac{1+t}{1+|t|} \right)^2 dt = \int_0^{\infty} dt = \infty \quad \blacksquare$$

Se W é uma função janela, como $W \in L^1(\mathbb{R})$, então \widehat{W} é contínua. Como $W \in L^2(\mathbb{R})$, então $\widehat{W} \in L^2(\mathbb{R})$. Entretanto, pode ser que \widehat{W} não seja uma função janela, isto é, $\xi \widehat{W}(\xi) \notin L^2(\mathbb{R})$, conforme veremos a seguir.

Lema 3.2.6 : *Se W é uma função janela descontínua, então \widehat{W} não é função janela.*

Prova : Seja W função janela descontínua. Sabemos que $W \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$. Pela fórmula da inversão da transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R})$, temos

$$W(t) = \widehat{\widehat{W}}(-t)$$

Isto mostra que $\widehat{W} \notin L^1(\mathbb{R})$, pois caso contrário, $\widehat{\widehat{W}}$ seria contínua e, portanto, W seria contínua, o que é um absurdo. Assim, $\widehat{W} \notin L^1(\mathbb{R})$, o que mostra que \widehat{W} não pode ser uma função janela. \blacksquare

Proposição 3.2.7 : *Seja W uma função janela com centro t^* e raio Δ_W . Então*

$$\widetilde{W}(t) := W\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad , \quad a, b \in \mathbb{R} \quad , \quad a \neq 0$$

é uma função janela com centro $at^ + b$ e raio $|a| \Delta_W$.*

Prova : Uma simples mudança de variável mostra que $\widetilde{W} \in L^2(\mathbb{R})$. Como, pela desigualdade de Schwarz, $tW^2(t) \in L^1(\mathbb{R})$, novamente uma simples mudança de variável mostra que $t\widetilde{W}(t) \in L^2(\mathbb{R})$. Calculemos o centro x^* da janela \widetilde{W} :

$$\begin{aligned} x^* &= \frac{1}{\|\widetilde{W}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} \int_{\mathbb{R}} t |\widetilde{W}(t)|^2 dt \\ &= \frac{1}{\|\widetilde{W}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} \int_{\mathbb{R}} t |W(\frac{t-b}{a})|^2 dt \\ &= \frac{|a|}{|a| \|\widetilde{W}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} \int_{\mathbb{R}} (ax + b) |W(x)|^2 dx \\ &= \frac{a}{\|\widetilde{W}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} \int_{\mathbb{R}} x |W(x)|^2 dx + \frac{b}{\|\widetilde{W}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2} \int_{\mathbb{R}} |W(x)|^2 dx \\ &= at^* + b \end{aligned}$$

Calculemos agora o raio da janela \widetilde{W} :

$$\begin{aligned}
 \Delta_{\widetilde{W}} &= \frac{1}{\|\widetilde{W}\|_{L^2(\mathbb{R})}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} (t - x^*)^2 |\widetilde{W}(t)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{1}{\|\widetilde{W}\|_{L^2(\mathbb{R})}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} (t - at^* - b)^2 |W\left(\frac{t-b}{a}\right)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{|a|}{\|\widetilde{W}\|_{L^2(\mathbb{R})}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} (ax - at^*)^2 |W(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{|a|}{|a|\|W\|_{L^2(\mathbb{R})}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} a^2(x - t^*)^2 |W(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 &= \frac{|a|}{\|W\|_{L^2(\mathbb{R})}} \left\{ \int_{\mathbb{R}} (x - t^*)^2 |W(x)|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \\
 &= |a| \Delta_W \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Observação 3.2.8 : É imediato que se W é uma função janela, então cW , onde c é constante, é uma função janela com mesmo centro e mesmo raio que W . \blacksquare

Suponha agora que ψ seja uma wavelet tal que ψ e sua transformada de Fourier $\widehat{\psi}$ são funções janelas com centros e raios t^* , ω^* , Δ_ψ e $\Delta_{\widehat{\psi}}$, respectivamente, onde ω^* é assumido ser positivo.

Pela proposição 3.2.7 e observação 3.2.8, a wavelet $\psi_{b,a}$ é uma função janela com centro em $b + at^*$ e raio igual a $|a| \Delta_\psi$. Logo, a Transformada Wavelet Integral Contínua, dá informação local do (localiza o) sinal analógico f com uma janela do tempo

$$[b + at^* - |a| \Delta_\psi, b + at^* + |a| \Delta_\psi]$$

onde o centro da janela é $b + at^*$ e a largura é $2|a| \Delta_\psi$. Isto é chamado em análise de sinais de *localização no tempo*. Agora, note que

$$\frac{1}{2\pi} \widehat{\psi}_{b,a}(\omega) = \frac{|a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\omega t} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt = \frac{a}{2\pi} |a|^{-\frac{1}{2}} e^{-ib\omega} \widehat{\psi}(a\omega) \quad (44)$$

Então, fazendo

$$\eta(\omega) := \widehat{\psi}(\omega + \omega^*)$$

temos, pela proposição 3.2.7 ($b = -\omega^*$ e $a = 1$), que η é uma função janela com centro em 0 e raio dado por $\Delta_{\widehat{\psi}}$. Logo, de (44) e do teorema 2.4.2, temos

$$\begin{aligned}
(W_\psi f)(b, a) &= \langle f, \psi_{b,a} \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{\psi}_{b,a} \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) \overline{\widehat{\psi}_{b,a}(\omega)} d\omega \\
&= \frac{a |a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) e^{ib\omega} \overline{\widehat{\psi}(a\omega)} d\omega \\
&= \frac{a |a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\omega) e^{ib\omega} \overline{\eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega^*}{a}\right)\right)} d\omega
\end{aligned} \tag{45}$$

Pela proposição 3.2.7,

$$\eta_{a,\omega}(\omega) := \eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega^*}{a}\right)\right) = \eta(a\omega - \omega^*) = \widehat{\psi}(a\omega)$$

é uma função janela com raio $\frac{1}{|a|}\Delta_{\widehat{\psi}}$. Logo, (45) mostra que com exceção de um fator de multiplicação $\frac{a |a|^{-\frac{1}{2}}}{2\pi}$ e uma componente linear $e^{ib\omega}$, a Transformada Wavelet Integral Contínua $W_\psi f$ dá informação local do espectro \widehat{f} com uma janela de frequência

$$\left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{|a|}\Delta_{\widehat{\psi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{|a|}\Delta_{\widehat{\psi}}\right]$$

cujos centro é $\frac{\omega^*}{a}$ e a largura é $\frac{2}{|a|}\Delta_{\widehat{\psi}}$. Isto é chamado em análise de sinais de *localização na frequência*.

Assim, temos uma janela tempo-frequência (ver figura 4, para $a_1 < a_2$)

$$[b + at^* - |a| \Delta_\psi, b + at^* + |a| \Delta_\psi] \times \left[\frac{\omega^*}{a} - \frac{1}{|a|}\Delta_{\widehat{\psi}}, \frac{\omega^*}{a} + \frac{1}{|a|}\Delta_{\widehat{\psi}}\right]$$

no plano t - ω , com largura $2|a|\Delta_\psi$. A importância dessa janela tempo-frequência é que ela se estreita no tempo para centro de frequência grande e se alarga no tempo para centro de frequência pequeno, embora a área da janela seja constante e igual a $4\Delta_\psi\Delta_{\widehat{\psi}}$. Logo, esta janela permite investigar fenômenos de alta frequência ($a > 0$ pequeno²⁴) e fenômenos de baixa frequência ($a > 0$ grande²⁵).

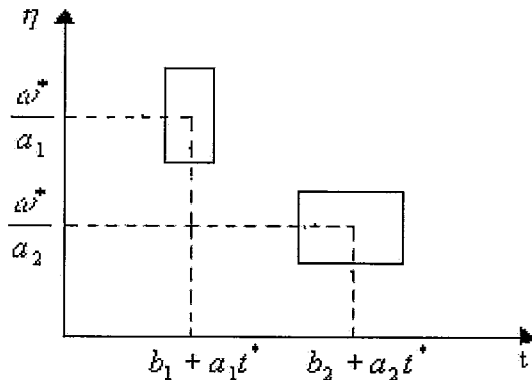


FIGURA 4

²⁴Alta frequência $\implies a$ pequeno \implies raio $\frac{1}{a}\Delta_{\widehat{\psi}}$ grande e raio $|a|\Delta_\psi$ pequeno.

²⁵Baixa frequência $\implies a$ grande \implies raio $\frac{1}{a}\Delta_{\widehat{\psi}}$ pequeno e raio $|a|\Delta_\psi$ grande.

O próximo teorema permite obter um sinal analógico com energia finita a partir de sua Transformada Wavelet Integral Contínua.

Teorema 3.2.9 : *Seja $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ uma wavelet e considere a Transformada Wavelet Integral W_ψ . Então, para C_ψ como definida em (42), temos*

$$\int_R \int_R \left[(W_\psi f)(b, a) \overline{(W_\psi g)(b, a)} \right] db \frac{da}{a^2} = C_\psi \langle f, g \rangle \quad \forall f, g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$$

Prova : Sejam

$$F(x) := \hat{f}(-x) \widehat{\psi}(-ax)$$

$$G(x) := \hat{g}(-x) \widehat{\psi}(-ax)$$

Como $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ e $\overline{\psi} \in L^1(\mathbb{R})$ então, pelo teorema 2.3.31, temos²⁶ $f * \overline{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$ e $g * \overline{\psi} \in L^2(\mathbb{R})$. Logo, como $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, pela proposição 2.3.25, temos que $F, G \in L^2(\mathbb{R})$. Também, pela desigualdade de Schwarz, $F, G \in L^1(\mathbb{R})$. Agora,

$$\begin{aligned} \int_R \langle f; \psi_{b,a} \rangle \overline{\langle g; \psi_{b,a} \rangle} db &= \int_R \left[\int_R f(t) \overline{\psi_{b,a}(t)} dt \cdot \int_R \overline{g(s)} \psi_{b,a}(s) ds \right] db \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_R \left[\int_R \hat{f}(\xi) \widehat{\psi}_{b,a}(-\xi) d\xi \cdot \int_R \widehat{g}(\omega) \hat{\psi}_{b,a}(\omega) d\omega \right] db \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_R \left[\int_R \widehat{\hat{f}}(-\xi) \hat{\psi}_{b,a}(-\xi) d\xi \cdot \int_R \widehat{g}(\omega) \hat{\psi}_{b,a}(\omega) d\omega \right] db \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_R \left[\int_R \widehat{\hat{f}}(\xi) a |a|^{-\frac{1}{2}} e^{-ib\xi} \hat{\psi}(a\xi) d\xi \right. \\ &\quad \left. \cdot \int_R \widehat{g}(\omega) a |a|^{-\frac{1}{2}} e^{-ib\omega} \hat{\psi}(a\omega) d\omega \right] db \end{aligned}$$

onde na 2ª igualdade usamos o teorema 2.4.2 e na última igualdade usamos (44).

Portanto, temos

²⁶Isto segue, também, da desigualdade de Young: Se $f \in L^p$ e $g \in L^q$ então $f * g \in L^s$ e

$$\|f * g\|_{L^s} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q} \quad , \quad \text{onde } 1 + \frac{1}{s} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

Ver [11] pag 391; ou caso particular - Teorema de Young pag 296.

$$\begin{aligned}
\int_R \left[(W_\psi f)(b, a) \overline{(W_\psi g)(b, a)} \right] db &= \frac{a^2}{(2\pi)^2 |a|} \int_R \widehat{F}(b) \widehat{G}(b) db \\
&= \frac{a^2}{(2\pi)^2 |a|} \langle \widehat{G}, \widehat{F} \rangle \\
&= \frac{a^2}{2\pi |a|} \langle \bar{G}, \bar{F} \rangle \\
&= \frac{a^2}{2\pi |a|} \int_R \bar{G}(x) F(x) dx
\end{aligned}$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
\int_R \left[(W_\psi f)(b, a) \overline{(W_\psi g)(b, a)} \right] db &= \frac{a^2}{2\pi |a|} \int_R \widehat{g}(x) \widehat{\psi}(ax) \widehat{f}(-x) \widehat{\psi}(-ax) dx \\
&= \frac{a^2}{2\pi |a|} \int_R \bar{\widehat{g}}(-x) \widehat{f}(-x) \widehat{\psi}(ax) \overline{\widehat{\psi}(ax)} dx \\
&= \frac{a^2}{2\pi |a|} \int_R \bar{\widehat{g}}(y) \widehat{f}(y) \widehat{\psi}(-ay) \overline{\widehat{\psi}(-ay)} dy \\
&= \frac{a^2}{2\pi |a|} \int_R \bar{\widehat{g}}(y) \widehat{f}(y) \left| \widehat{\psi}(-ay) \right|^2 dy
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_R \int_R \left[(W_\psi f)(b, a) \overline{(W_\psi g)(b, a)} \right] db \frac{da}{a^2} &= \int_R \frac{a^2}{2\pi |a|} \int_R \bar{\widehat{g}}(y) \widehat{f}(y) \left| \widehat{\psi}(-ay) \right|^2 dy \frac{da}{a^2} \\
&= \int_R \frac{1}{2\pi} \int_R \bar{\widehat{g}}(y) \widehat{f}(y) \frac{|\widehat{\psi}(-ay)|^2}{|a|} dy da \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_R \bar{\widehat{g}}(y) \widehat{f}(y) \int_R \frac{|\widehat{\psi}(-ay)|^2}{|a|} da dy \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_R \bar{\widehat{g}}(y) \widehat{f}(y) \int_R \frac{|\widehat{\psi}(x)|^2}{|x|} dx dy \quad (46) \\
&= \frac{1}{2\pi} C_\psi \int_R \bar{\widehat{g}}(y) \widehat{f}(y) dy \\
&= C_\psi \langle f, g \rangle
\end{aligned}$$

onde na 3^a igualdade usamos o teorema de Fubini e na última igualdade usamos o teorema 2.4.2 (Plancherel) ■

Observação 3.2.10 : Note que comutando o produto interno com as integrais sobre a e b temos, pelo menos no sentido fraco,

$$f = \frac{1}{C_\psi} \int_R \int_R [(W_\psi f)(b, a)] \psi_{b, a} db \frac{da}{a^2} \quad \blacksquare \quad (47)$$

Existem outras Transformadas Integrais, como, por exemplo, a Transformada de Fourier com Janela. Quando a função janela é uma Gaussiana, a Transformada de Fourier com Janela é chamada Transformada de Gabor. Esta transformada foi introduzida por Gabor em 1946. Para esta transformada, tanto a altura como a largura da janela tempo-freqüência são invariáveis. A área da janela tempo-freqüência para a Transformada de Gabor é 2 e um resultado, conhecido como princípio da incerteza, mostra que a Transformada de Gabor é a Transformada de Fourier com Janela com menor área da janela tempo-freqüência. Assim, a Gaussiana é a janela “ótima” para a Transformada de Fourier com Janela. A Transformada Wavelet Integral é mais precisa do que a Transformada de Fourier com Janela para análise de tempo-freqüência pois, como vimos, a Transformada Wavelet Integral usa janela variável que é larga, no tempo, para baixas freqüências e é estreita, no tempo, para altas freqüências. Um estudo completo destes fatos pode ser encontrado em [10].

Definição 3.2.11 : Uma família de funções $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ em um espaço de Hilbert²⁷ \mathcal{H} é chamada uma *frame* se existem $0 < A \leq B < \infty$ tal que para todo $f \in \mathcal{H}$,

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 \leq B \|f\|^2$$

A e B são chamadas as *cotas* da frame. Se $A = B$, a frame é dita uma *frame apertada*.

Suponha $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ uma frame apertada. Então, para toda $f \in \mathcal{H}$,

$$\sum_{j \in J} |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 = A \|f\|^2 \tag{48}$$

Logo, pela *identidade de polarização*²⁸, temos

$$\begin{aligned} A \langle f, g \rangle &= \frac{1}{4} [A \|f + g\|^2 - A \|f - g\|^2 + iA \|f + ig\|^2 - iA \|f - ig\|^2] \\ &= \frac{1}{4} \left[\sum_{j \in J} \left\{ |\langle f + g, \varphi_j \rangle|^2 - |\langle f - g, \varphi_j \rangle|^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i |\langle f + ig, \varphi_j \rangle|^2 - i |\langle f - ig, \varphi_j \rangle|^2 \right\} \right] \end{aligned} \tag{49}$$

²⁷Consideraremos apenas espaços de Hilbert separáveis.

²⁸ $\langle f, g \rangle = \frac{1}{4} [\|f + g\|^2 - \|f - g\|^2 + i\|f + ig\|^2 - i\|f - ig\|^2]$

Mas,

$$\begin{aligned}
|\langle f \pm g, \varphi_j \rangle|^2 &= |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 + |\langle g, \varphi_j \rangle|^2 \\
&\quad \pm (\langle f, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, g \rangle + \langle \varphi_j, f \rangle \langle g, \varphi_j \rangle) \\
&= |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 + |\langle g, \varphi_j \rangle|^2 \\
&\quad \pm (\langle f, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, g \rangle + \overline{\langle f, \varphi_j \rangle} \langle \varphi_j, g \rangle) \\
&= |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 + |\langle g, \varphi_j \rangle|^2 \pm 2\operatorname{Re} \langle f, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, g \rangle
\end{aligned} \tag{50}$$

Substituindo g por ig em (50), temos

$$|\langle f \pm ig, \varphi_j \rangle|^2 = |\langle f, \varphi_j \rangle|^2 + |\langle g, \varphi_j \rangle|^2 \pm 2\operatorname{Im} \langle f, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, g \rangle \tag{51}$$

Logo, substituindo (50) e (51) em (49), obtemos

$$\begin{aligned}
A\langle f, g \rangle &= \frac{1}{4} \left[\sum_{j \in J} \left\{ 4\operatorname{Re} \langle f, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, g \rangle + 4\operatorname{Im} \langle f, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, g \rangle i \right\} \right] \\
&= \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \langle \varphi_j, g \rangle \quad \forall g \in \mathcal{H}
\end{aligned} \tag{52}$$

Assim, pelo menos no sentido fraco²⁹, temos

$$f = \frac{1}{A} \sum_{j \in J} \langle f, \varphi_j \rangle \varphi_j \tag{53}$$

Note a analogia de (53) com a expressão de f em base ortonormal, apesar das frames, ou frames apertadas, não serem, necessariamente, bases ortonormais.

Exemplo 3.2.12 : Seja $\mathcal{H} = C^2$, $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, $e_3 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$.

Para todo $v = (v_1, v_2)$ em \mathcal{H} , temos

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^3 |\langle v, e_j \rangle|^2 &= |v_2|^2 + \left| -\frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \right|^2 + \left| \frac{\sqrt{3}}{2}v_1 - \frac{1}{2}v_2 \right|^2 \\
&= \frac{3}{2} [|v_1|^2 + |v_2|^2] = \frac{3}{2} \|v\|^2
\end{aligned}$$

²⁹Via teorema da representação de Riesz, temos que $f_n \rightarrow f$ fracamente em \mathcal{H} se $\langle f_n, g \rangle \rightarrow \langle f, g \rangle \quad \forall g \in \mathcal{H}$.

Logo, $\{e_1, e_2, e_3\}$ é uma frame apertada com cota $\frac{3}{2}$. Mas, obviamente, não é uma base ortonormal de C^2 , nem mesmo base de Riesz, pois não é um conjunto linearmente independente.

Note que neste exemplo a cota da frame $A = \frac{3}{2}$ é a relação entre o número de vetores e a dimensão do espaço.

Proposição 3.2.13 : *Se $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ é uma frame apertada com cota $A = 1$ e $\|\varphi_j\| = 1 \ \forall j \in J$, então $\{\varphi_j\}_{j \in J}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H} .*

Prova : Por (48), se $f \in \mathcal{H}$ é tal que $\langle f, \varphi_j \rangle = 0 \ \forall j \in J$, então $f = 0$, isto é, $(\text{span}\{\varphi_j\})^\perp = \{0\}$. Logo, $\text{span}\{\varphi_j\} = \mathcal{H}$. Basta então mostrarmos que as φ_j são ortonormais. Como $A = 1$, para qualquer $j \in J$ temos, por (48)

$$\|\varphi_j\|^2 = \sum_{j' \in J} |\langle \varphi_j, \varphi_{j'} \rangle|^2 = \|\varphi_j\|^4 + \sum_{\substack{j' \in J \\ j' \neq j}} |\langle \varphi_j, \varphi_{j'} \rangle|^2$$

Como $\|\varphi_j\| = 1$ a igualdade acima implica que

$$\langle \varphi_j, \varphi_{j'} \rangle = 0 \quad \forall j' \in J, \quad j' \neq j \quad \blacksquare$$

Vamos considerar a wavelet ψ satisfazendo $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$, não precisando ser necessariamente função janela. Para efeitos práticos, a wavelet ψ deve decair muito rapidamente a zero em $\pm\infty$. Então para obtermos uma representação de funções do $L^2(\mathbb{R})$ é preciso cobrir toda a reta (domínio do tempo). Um modo simples de resolver isto é considerar os deslocamentos de ψ

$$\psi(x - nb_0) \quad , \quad n \in \mathbb{Z}$$

onde $b_0 > 0$ é uma constante fixa. Como no caso das bases de Fourier no $L^2(0, 2\pi)$, nós devemos cobrir também todo o espaço das frequências. Para isso vamos considerar as dilatações da wavelet ψ . O efeito combinado nos dá a família de wavelets discretizadas

$$\psi_{m,n}(x) := 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}x - nb_0) \quad , \quad m, n \in \mathbb{Z}$$

Vejamos algumas propriedades dos operadores classe-traço, que serão usadas na prova do próximo teorema.

Operadores classe-traço são operadores lineares $T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, autoadjuntos, tais que $\sum_n |\langle Te_n, e_n \rangle|$ é finita para toda base ortonormal $\{e_n\}$ de \mathcal{H} . Neste caso, $\sum_n \langle Te_n, e_n \rangle$ é independente da escolha da base ortonormal, e é chamado o *traço* de T . De fato, dadas duas bases ortonormais $\{e_n\}$ e $\{f_n\}$, existe um operador unitário U tal que $Ue_n = f_n$. Assim,

$$\begin{aligned}
 \sum_n \langle Tf_n, f_n \rangle &= \sum_n \langle TUe_n, Ue_n \rangle \\
 &= \sum_n \sum_k \langle TUe_n, e_k \rangle \overline{\langle Ue_n, e_k \rangle} \\
 &= \sum_n \sum_k \langle Ue_n, Te_k \rangle \overline{\langle Ue_n, e_k \rangle} \\
 &= \sum_n \sum_k \overline{\langle Te_k, Ue_n \rangle} \langle Ue_n, e_k \rangle \\
 &= \sum_k \overline{\langle \sum_n \langle Te_k, Ue_n \rangle Ue_n, e_k \rangle} \\
 &= \sum_k \overline{\langle Te_k, e_k \rangle} \\
 &= \sum_k \langle Te_k, e_k \rangle
 \end{aligned}$$

onde a mudança da ordem na soma dupla é devido a convergência absoluta da série $\sum_n \langle Te_n, e_n \rangle$. Assim, temos

$$TrT = \sum_n \langle Te_n, e_n \rangle$$

No caso de um operador autoadjunto positivo T ($\langle Tx, x \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}$), é suficiente que $\sum_n \langle Te_n, e_n \rangle$ seja finito para uma base ortonormal, para ser um operador classe traço (isto é, ser finito para toda base ortonormal).

Como operador T é autoadjunto, então existe uma base ortonormal³⁰ $\{e_n\}$ de autovetores de T , e como T é positivo, os autovalores são números reais não-negativos. Logo, $Te_n = c_n e_n$, $c_n \geq 0$. Assim, para todo $u \in \mathcal{H}$,

$$Tu = \sum_{n=1}^{\infty} \langle Tu, e_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, Te_n \rangle e_n = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \langle u, e_n \rangle e_n \quad (54)$$

³⁰Lembremos que estamos considerando apenas espaços de Hilbert separáveis, ou seja, possui base enumerável.

Teorema 3.2.14 : Se $\{\psi_{m,n}\}$ constitui uma frame para $L^2(\mathbb{R})$ com cotas frames A e B , então

$$2\pi b_0 (\ln 2) A \leq \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi \quad , \quad \int_{-\infty}^0 \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \leq 2\pi b_0 (\ln 2) B$$

Prova: $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq B \|f\|^2 \quad (55)$$

Para $u_l \in L^2(\mathbb{R})$ e $c_l \geq 0$ tais que $\sum_{l \in \mathbb{N}} c_l \|u_l\|^2 < \infty$, temos, por (55),

$$A \sum_{l \in \mathbb{N}} c_l \|u_l\|^2 \leq \sum_{l \in \mathbb{N}} c_l \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle u_l, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq B \sum_{l \in \mathbb{N}} c_l \|u_l\|^2 \quad (56)$$

Em particular, se C é qualquer operador classe traço positivo então, por (54),

$$C = \sum_{l \in \mathbb{N}} c_l \langle \cdot, u_l \rangle u_l$$

onde as u_l são ortonormais, $c_l \geq 0$ e $\sum_{l \in \mathbb{N}} c_l = \text{Tr } C > 0$. Assim, para qualquer operador classe traço positivo temos, por (56),

$$A \text{Tr } C \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle C \psi_{m,n}, \psi_{m,n} \rangle \leq B \text{Tr } C \quad (57)$$

Tome agora $h \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\text{supp } \widehat{h} \subseteq [0, \infty)$ e $C_h := \int_0^\infty \frac{|\widehat{h}(\xi)|^2}{\xi} d\xi < \infty$. Defina $h_{a,b}(x) = a^{-\frac{1}{2}} h\left(\frac{x-b}{a}\right)$ para $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$. Se $c(a, b)$ é uma função limitada positiva, então o operador

$$C = \int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^\infty db \langle \cdot, h_{a,b} \rangle h_{a,b} c(a, b)$$

é um operador limitado positivo em $L^2(\mathbb{R})$. Se além disso, $c(a, b)$ é integrável com respeito à $\frac{da}{a^2} db$, então C é operador classe traço, e

$$\text{Tr } C = \int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^\infty db c(a, b) \|h\|^2$$

De fato,

$$\begin{aligned}
 \langle Cf, f \rangle &= \left\langle \int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^\infty db \langle f, h_{a,b} \rangle h_{a,b} c(a, b), f \right\rangle \\
 &= \int_{-\infty}^\infty \int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^\infty db \langle f, h_{a,b} \rangle h_{a,b}(x) c(a, b) \overline{f(x)} dx \\
 &= \int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^\infty db \langle f, h_{a,b} \rangle \langle h_{a,b}, f \rangle c(a, b) \\
 &= \int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^\infty db |\langle f, h_{a,b} \rangle|^2 c(a, b) \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Logo, C é positivo. É fácil ver que C é auto-adjunto. Da mesma forma que acima, se $\{e_n\}$ é uma base ortonormal, então

$$\sum_n \langle ce_n, e_n \rangle = \sum_n \int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^\infty db |\langle e_n, h_{a,b} \rangle|^2 c(a, b)$$

Logo, pelo teorema da convergência monótona,

$$\sum_n \langle ce_n, e_n \rangle = \int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^\infty db \sum_n |\langle e_n, h_{a,b} \rangle|^2 c(a, b)$$

Mas, $\sum_n |\langle e_n, h_{a,b} \rangle|^2 = \|h_{a,b}\|^2$, e uma mudança de variáveis mostra que $\|h_{a,b}\|^2 = \|h\|^2$. Assim, se $c(a, b)$ é integrável com relação à $\frac{da}{a^2} db$, temos que c é operador classe traço, e $Tr C = \int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^\infty db c(a, b) \|h\|^2$. É fácil ver que C é limitado, o que prova todas as afirmações feitas acima.

Em particular, escolhendo

$$c(a, b) := \begin{cases} W\left(\frac{|b|}{a}\right) & , \text{ se } 1 \leq a \leq 2 \\ 0 & , \text{ caso contrário} \end{cases}$$

com W positiva e integrável. Então temos,

$$C = \int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^\infty db \langle \cdot, h_{a,b} \rangle h_{a,b} W\left(\frac{|b|}{a}\right) \tag{58}$$

e

$$Tr C = \int_1^2 \frac{da}{a} \int_{-\infty}^\infty ds W(|s|) \|h\|^2 = 2 \ln 2 \left[\int_0^\infty ds W(s) \right] \|h\|^2$$

Assim, por (58), temos

$$\sum_{m,n} \langle C\psi_{m,n}, \psi_{m,n} \rangle = \sum_{m,n} \int_1^2 \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} db W\left(\frac{|b|}{a}\right) |\langle \psi_{m,n}, h_{a,b} \rangle|^2$$

Mas,

$$\begin{aligned} \langle \psi_{m,n}, h_{a,b} \rangle &= 2^{-\frac{m}{2}} a^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi(2^{-m}x - nb_0) \overline{h\left(\frac{x-b}{a}\right)} \\ &= 2^{\frac{m}{2}} a^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \psi(y) \overline{h\left(\frac{y+nb_0-2^{-m}b}{2^{-m}a}\right)} \\ &= \langle \psi, h_{2^{-m}a, 2^{-m}b-nb_0} \rangle \end{aligned}$$

Fazendo as mudanças de variáveis $\tilde{a} = 2^{-m}a$ e $\tilde{b} = 2^{-m}b$, obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{m,n} \langle C\psi_{m,n}, \psi_{m,n} \rangle &= \sum_{m,n} \int_{2^{-m}}^{2^{-m+1}} \frac{d\tilde{a}}{\tilde{a}^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tilde{b} W\left(\frac{|\tilde{b}|}{\tilde{a}}\right) |\langle \psi, h_{\tilde{a}, \tilde{b}-nb_0} \rangle|^2 \\ &= \int_0^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} db |\langle \psi, h_{a,b} \rangle|^2 \sum_n W\left(\frac{|b+nb_0|}{a}\right) \end{aligned}$$

Agora, tome $W(s) = \lambda e^{-\lambda^2 \pi s^2}$. Esta função tem um único máximo local em $s = 0$, e é decrescente quando $|s|$ cresce. Um argumento de integração mostra que para tais funções e para qualquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt W(t) - \beta W_{\max} \leq \beta \sum_{n \in \mathbb{Z}} W(\alpha + n\beta) \leq \int_{-\infty}^{\infty} dt W(t) + \beta W_{\max}$$

ou seja,

$$\frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} W(t) dt - W_{\max} \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} W(\alpha + n\beta) \leq \frac{1}{\beta} \int_{-\infty}^{\infty} W(t) dt + W_{\max}$$

Logo, para nossa função W particular, temos

$$\frac{1}{\beta} - W(0) \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} W(\alpha + n\beta) \leq \frac{1}{\beta} + W(0)$$

isto é,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} W(\alpha + n\beta) = \frac{1}{\beta} + r(\alpha, \beta) \quad \text{com } |r(\alpha, \beta)| \leq W(0) = \lambda$$

Assim, tomando $\alpha = \frac{b}{a}$, $\beta = \frac{b_0}{a}$ e notando que $W\left(\frac{b+nb_0}{a}\right) = W\left(\frac{|b+nb_0|}{a}\right)$, temos

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} W\left(\frac{|b+nb_0|}{a}\right) = \frac{a}{b_0} + \rho(a, b) \quad \text{com } |\rho(a, b)| \leq \lambda$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{m, n \in \mathbb{Z}} \langle C\psi_{m, n}, \psi_{m, n} \rangle &= \frac{1}{b_0} \int_0^\infty \frac{da}{a} \int_{-\infty}^\infty db |\langle \psi, h_{a, b} \rangle|^2 + R \\ &= \frac{1}{b_0} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \widehat{\psi}(\xi) a^{\frac{1}{2}} \overline{\widehat{h}(a\xi)} e^{ib\xi} d\xi \right|^2 db \frac{da}{a} + R \\ &= \frac{1}{2\pi b_0} \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty |\widehat{\psi}(\xi)|^2 |\widehat{h}(a\xi)|^2 d\xi da + R \\ &= \frac{1}{2\pi b_0} \|h\|^2 \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi + R \end{aligned} \tag{59}$$

onde

$$|R| \leq \int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^\infty |\langle \psi, h_{a, b} \rangle|^2 |\rho(a, b)| db \leq \lambda \int_0^\infty \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^\infty |\langle \psi, h_{a, b} \rangle|^2 db \leq \lambda C_h \|\psi\|^2$$

Para a função W particular que nós escolhemos, temos que $\int_0^\infty W(t) dt = \frac{1}{2}$. Logo, $Tr C = \|h\|^2 \ln 2$. Assim, substituindo em (57), temos

$$A \|h\|^2 \ln 2 \leq \frac{1}{2\pi b_0} \|h\|^2 \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi + R \leq B \|h\|^2 \ln 2$$

onde $|R| \leq \lambda C_h \|\psi\|^2$. Dividindo por $\frac{2\pi}{b_0} \|h\|^2$ e fazendo $\lambda \rightarrow 0$, obtemos

$$2\pi b_0 (\ln 2) A \leq \int_0^\infty \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{\xi} d\xi \leq 2\pi b_0 (\ln 2) B$$

Analogamente, provamos

$$2\pi b_0 (\ln 2) A \leq \int_{-\infty}^0 \frac{|\widehat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi \leq 2\pi b_0 (\ln 2) B \quad \blacksquare$$

Nem todas as escolhas de ψ , a_0 e b_0 levam a frames, mesmo para ψ admissível. Vamos obter condições sobre ψ , a_0 e b_0 que garantam que $\{\psi_{m,n}\}$ seja uma frame. A próxima proposição é um caso particular de uma proposição mais geral em [12] e [13] adaptada as nossas finalidades.

Teorema 3.2.15 : Seja $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ e $a_0 = 2$ e $b_0 = 1$ tais que ψ satisfaz

$$|\widehat{\psi}(\xi)| \leq c|\xi|^\alpha (1 + |\xi|^2)^{-\frac{\gamma}{2}} \quad \text{com } \alpha > 0, \quad \gamma > \alpha + 1, \quad (60)$$

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^m \xi)|^2 \geq \alpha > 0 \quad \forall \xi \neq 0 \quad (61)$$

e, $\forall k \in \mathbb{Z}$ e $\forall \xi \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \overline{\widehat{\psi}(2^l \xi)} \widehat{\psi}(2^l (\xi + 2\pi(2k+1))) = 0$$

Então $\{\psi_{m,n}\}$ é uma frame com cotas³¹

$$A = \inf_{1 \leq |\xi| \leq 2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^m \xi)|^2$$

e

$$B = \sup_{1 \leq |\xi| \leq 2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^m \xi)|^2$$

Prova: Vamos estimar $\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2$

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{\psi_{m,n}} \rangle \right|^2 = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} 2^m \left| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(2^m \xi)} e^{i2^m n \xi} d\xi \right|^2$$

já que, por 44, temos

$$\overline{\widehat{\psi_{m,n}}(\xi)} = 2^{\frac{m}{2}} \overline{\widehat{\psi}(2^m \xi)} e^{i2^m n \xi}$$

Logo,

$$\sum_{m,n} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} 2^m \left| \frac{1}{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi 2^{-m} l}^{2\pi 2^{-m} (l+1)} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(2^m \xi)} e^{i2^m n \xi} d\xi \right|^2$$

³¹É suficiente tomar $1 \leq |\xi| \leq 2$, pois qualquer outro $\xi \neq 0$ pode ser reduzido a este caso multiplicando por 2^k para algum $k \in \mathbb{Z}$.

Usando a mudança de variável $\omega = \xi - 2\pi 2^{-m}l$, o teorema de Parseval para funções periódicas e a mudança de variável $\xi = 2^m\omega$, obtemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{m,n} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \\
&= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} 2^m \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi 2^{-m}} e^{i2^m n \omega} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\omega + 2\pi l 2^{-m}) \overline{\widehat{\psi}(2^m \omega + 2\pi l)} d\omega \right|^2 \\
&= \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} 2^m \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\xi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^{-m}\xi + 2\pi l 2^{-m}) \overline{\widehat{\psi}(\xi + 2\pi l)} 2^{-m} d\xi \right|^2 \\
&= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \frac{2^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^{-m}\xi + 2\pi l 2^{-m}) \overline{\widehat{\psi}(\xi + 2\pi l)} 2^{-m} \right|^2 d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(2^{-m}\xi + 2\pi l 2^{-m}) \overline{\widehat{\psi}(\xi + 2\pi l)} \right|^2 2^{-m} d\xi
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi 2^{-m}} \left| \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\omega + 2\pi l 2^{-m}) \overline{\widehat{\psi}(2^m \omega + 2\pi l)} \right|^2 d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi 2^{-m}} \left[\left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\omega + 2\pi l 2^{-m}) \overline{\widehat{\psi}(2^m \omega + 2\pi l)} \right) \right. \\
&\quad \left. \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\widehat{f}(\omega + 2\pi k 2^{-m})} \widehat{\psi}(2^m \omega + 2\pi k) \right) \right] d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi 2^{-m}} \left[\left(\widehat{f}(\omega + 2\pi l 2^{-m}) \overline{\widehat{\psi}(2^m \omega + 2\pi l)} \right) \right. \\
&\quad \left. \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\widehat{f}(\omega + 2\pi k 2^{-m})} \widehat{\psi}(2^m \omega + 2\pi k) \right) \right] d\omega
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_{2\pi 2^{-m} l}^{2\pi 2^{-m}(l+1)} \left[\widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(2^m \xi)} \right. \\ \left. \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{\widehat{f}(\xi + 2\pi k 2^{-m})} \widehat{\psi}(2^m \xi + 2\pi k) \right] d\xi$$

$$\therefore \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 = \frac{1}{2\pi} \sum_{m,k \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\psi}(2^m \xi)} \overline{\widehat{f}(\xi + 2\pi k 2^{-m})} \widehat{\psi}(2^m \xi + 2\pi k) d\xi$$

$$\therefore \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^m \xi)|^2 d\xi + \text{Rest}(f) \quad (62)$$

onde

$$\text{Rest}(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{m,k \in \mathbb{Z} \\ k \neq 0}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{f}(\xi + 2\pi k 2^{-m})} \widehat{\psi}(2^m \xi) \widehat{\psi}(2^m \xi + 2\pi k) d\xi$$

Fazendo a seguinte mudança de variável dada pela bijeção $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \ni (m, k) \mapsto (m', l, k') \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{Z}$, definida por: $k = 2^l (2k' + 1)$ e $m = m' + l$, temos:

$$\text{Rest}(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m', k' \in \mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{f}(\xi + 2\pi (2k' + 1) 2^{-m'})} \\ \sum_{l=0}^{\infty} \widehat{\psi}(2^{m'+l} \xi) \widehat{\psi}(2^l (2^{m'} \xi + 2\pi (2k' + 1))) d\xi = 0 \quad (63)$$

Logo, de (62) e (63), temos

$$\sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq \|f\|^2 \cdot \sup_{1 \leq |\xi| \leq 2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^m \xi)|^2$$

$$\text{e} \quad \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \geq \|f\|^2 \cdot \inf_{1 \leq |\xi| \leq 2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^m \xi)|^2$$

Portanto,

$$\inf_{\substack{f \in H \\ f \neq 0}} \|f\|^{-2} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \geq \inf_{1 \leq |\xi| \leq 2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^m \xi)|^2 \quad (64)$$

$$\text{e} \quad \sup_{\substack{f \in H \\ f \neq 0}} \|f\|^{-2} \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, \psi_{m,n} \rangle|^2 \leq \sup_{1 \leq |\xi| \leq 2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(2^m \xi)|^2 \quad (65)$$

Mostremos que $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(2^m \xi) \right|^2$ é limitado superiormente. De fato, por (60),

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(2^m \xi) \right|^2 \leq c^2 \sum_m 2^{2m\alpha} 2^{2\alpha} (1 + 2^{2m})^{-\gamma} \quad \text{para } 1 \leq |\xi| \leq 2$$

$$\begin{aligned} \therefore \sup_{1 \leq |\xi| \leq a_0} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(2^m \xi) \right|^2 &\leq c^2 2^{2\alpha} \sum_{m \in \mathbb{Z}} 2^{2m\alpha} (1 + 2^{2m})^{-\gamma} \\ &= c^2 2^{2\alpha} \left[\sum_{-\infty}^0 2^{2m\alpha} (1 + 2^{2m})^{-\gamma} + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{2m\alpha} (1 + 2^{2m})^{-\gamma} \right] \\ &\leq c^2 2^{2\alpha} \left[\sum_{-\infty}^0 2^{2m\alpha} + \sum_{m=1}^{\infty} 2^{2m\alpha} (1 + 2^{2m})^{-\gamma} \right] < \infty \end{aligned}$$

já que $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{2m\alpha}}{(1+2^{2m})^\gamma} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^{2m\alpha}}{2^{2m\gamma}} = \sum_{m=1}^{\infty} (2^{2(\alpha-\gamma)})^m$ e $\alpha - \gamma < -1$. Agora, por (61), temos $A > 0$ e também $B > 0$, já que $\sup_{1 \leq |\xi| \leq 2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\psi}(2^m \xi) \right|^2 > 0$, pois caso contrário, $\inf_{1 \leq |\xi| \leq 2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\psi}(2^m \xi) \right|^2 = 0$, contrariando a hipótese (61). ■

Vamos ver agora uma base de wavelet com boa localização no tempo e na frequência.

A base de wavelet de Meyer é dada por $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ definida como segue:

$$\widehat{\psi}(\xi) = \begin{cases} e^{\frac{i\xi}{2}} \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{2\pi} |\xi| - 1 \right) \right] & , \quad \frac{2\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{4\pi}{3} \\ e^{\frac{i\xi}{2}} \operatorname{cos} \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{4\pi} |\xi| - 1 \right) \right] & , \quad \frac{4\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{8\pi}{3} \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde ν é uma função de classe C^k ou C^∞ satisfazendo

$$\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$$

com a propriedade adicional

$$\nu(x) + \nu(1-x) = 1 \tag{66}$$

A regularidade de $\widehat{\psi}$ é a mesma de ν . Vamos mostrar que $\{\psi_{m,n}\}$ constitui uma base ortonormal do $L^2(\mathbb{R})$, onde $\psi_{m,n}(x) = 2^{-\frac{m}{2}} \psi(2^{-m}x - n)$. Usaremos para isso os resultados da proposição 3.2.13. Portanto, temos que provar que: 1º) $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 1$, 2º) $\{\psi_{m,n}\}$ é uma frame apertada de cota $A = B = 1$.

1º)

$$\begin{aligned}
\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \frac{1}{2\pi} \left\| \widehat{\psi} \right\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{\frac{2\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{4\pi}{3}} \text{sen}^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{2\pi} |\xi| - 1 \right) \right] d\xi \right. \\
&\quad \left. + \int_{\frac{4\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{8\pi}{3}} \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{4\pi} |\xi| - 1 \right) \right] d\xi \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[2 \cdot \frac{2\pi}{3} \int_0^1 \text{sen}^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu(s) \right] ds + 2 \cdot \frac{4\pi}{3} \int_0^1 \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu(s) \right] ds \right] \\
&= \frac{2}{3} \left[\int_0^1 \text{sen}^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu(s) \right] ds + 2 \int_0^1 \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu(s) \right] ds \right] \\
&= \frac{2}{3} \left[\int_0^1 1 + \int_0^1 \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu(s) \right] ds \right]
\end{aligned}$$

Agora, como $\nu(s + \frac{1}{2}) = 1 - \nu(\frac{1}{2} - s)$, temos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu(s) \right] ds &= \int_0^{\frac{1}{2}} \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu(s) \right] ds + \int_{\frac{1}{2}}^1 \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu(s) \right] ds \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu(s) \right] ds + \int_0^{\frac{1}{2}} \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(t + \frac{1}{2} \right) \right] dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu(s) \right] ds + \int_0^{\frac{1}{2}} \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - \nu \left(\frac{1}{2} - t \right) \right) \right] ds \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu(s) \right] ds + \int_0^{\frac{1}{2}} \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \left(1 - \nu(t) \right) \right] dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu(s) \right] ds + \int_0^{\frac{1}{2}} \text{sen}^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu(t) \right] dt \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu(s) \right] + \text{sen}^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu(s) \right] \right) ds \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Logo, $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{2}{3} \left[1 + \frac{1}{2} \right] = 1$. Assim, $\|\psi_{m,n}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = 1 \quad \forall m, n \in \mathbb{Z}$.

2º) Vamos usar o teorema 3.2.15 para provar que $\{\psi_{m,n}\}$ é uma frame apertada de

cota 1. Para isso mostraremos que $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(2^m \xi) \right|^2 = 1$ e que, $\forall k \in \mathbb{Z}$ e $\forall \xi \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{l=0}^{\infty} \overline{\widehat{\psi}(2^l \xi)} \widehat{\psi}(2^l (\xi + 2\pi(2k+1))) = 0 \quad (67)$$

Mas, como o suporte de $\widehat{\psi}$ é $[-\frac{8\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}]$, para provar (67) basta mostrar que $\overline{\widehat{\psi}(2^l \xi)} \widehat{\psi}(2^l (\xi + 2\pi(2k+1)))$ é nulo para $|2^l \xi| \leq \frac{8\pi}{3}$ e $|2^l (\xi + 2\pi(2k+1))| \leq \frac{8\pi}{3}$, isto é, $-\frac{8\pi}{3} \leq 2^l \xi \leq \frac{8\pi}{3}$ e $-\frac{8\pi}{3} \leq 2^l \xi + 2^l 2\pi(2k+1) \leq \frac{8\pi}{3}$. Isto implica em $-2 \cdot \frac{8\pi}{3} \leq 2^l 2\pi(2k+1) \leq 2 \cdot \frac{8\pi}{3}$, ou seja, $2^l |2k+1| \leq \frac{8}{3}$. Os únicos pares (l, k) que satisfazem isto são $(0, 0)$, $(0, -1)$, $(1, 0)$ e $(1, -1)$. Assim, temos que mostrar

$$\overline{\widehat{\psi}(\xi)} \widehat{\psi}(\xi + 2\pi) + \overline{\widehat{\psi}(2\xi)} \widehat{\psi}(2\xi + 4\pi) = 0 \quad (68)$$

$$\overline{\widehat{\psi}(\xi)} \widehat{\psi}(\xi + 6\pi) + \overline{\widehat{\psi}(2\xi)} \widehat{\psi}(2\xi + 12\pi) = 0 \quad (69)$$

Vamos mostrar (68). Pelo suporte de $\widehat{\psi}$, temos que ambos os termos em (68) se anulam fora de $[-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}]$. Para $\xi \in [-\frac{4\pi}{3}, -\frac{2\pi}{3}]$, $\xi = -\frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}\alpha$, com $0 \leq \alpha \leq 1$, temos

$$\begin{aligned} \overline{\widehat{\psi}(\xi)} \widehat{\psi}(\xi + 2\pi) + \overline{\widehat{\psi}(2\xi)} \widehat{\psi}(2\xi + 4\pi) &= e^{-\frac{i\xi}{2}} \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{2} \nu (1 - \alpha) \right] e^{\frac{i(\xi+2\pi)}{2}} \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{2} \nu (\alpha) \right] \\ &\quad + e^{-i\xi} \cos \left[\frac{\pi}{2} \nu (1 - \alpha) \right] e^{i(\xi+2\pi)} \cos \left[\frac{\pi}{2} \nu (\alpha) \right] \\ &= e^{-\frac{i\xi}{2}} \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \nu (\alpha) \right] e^{i\xi} e^{\pi i} \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{2} \nu (\alpha) \right] \\ &\quad + e^{-i\xi} \cos \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \nu (\alpha) \right] e^{i\xi} e^{2\pi i} \cos \left[\frac{\pi}{2} \nu (\alpha) \right] \\ &= -\operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \nu (\alpha) \right] \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{2} \nu (\alpha) \right] \\ &\quad + \cos \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \nu (\alpha) \right] \cos \left[\frac{\pi}{2} \nu (\alpha) \right] \\ &= -\cos \left[\frac{\pi}{2} \nu (\alpha) \right] \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{2} \nu (\alpha) \right] \\ &\quad + \operatorname{sen} \left[\frac{\pi}{2} \nu (\alpha) \right] \cos \left[\frac{\pi}{2} \nu (\alpha) \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da mesma forma prova-se (69). Assim, temos (67). Agora, para qualquer $\xi \neq 0$, apenas um valor de $m \in \mathbb{Z}$ satisfaz $\frac{2\pi}{3} \leq 2^{m_0} |\xi| \leq \frac{4\pi}{3}$ ($\therefore \frac{4\pi}{3} \leq 2^{m_0+1} |\xi| \leq \frac{8\pi}{3}$).

Portanto,

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(2^m \xi) \right|^2 = \operatorname{sen}^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{2\pi} 2^{m_0} |\xi| - 1 \right) \right] + \cos^2 \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{4\pi} 2^{m_0+1} |\xi| - 1 \right) \right] = 1$$

Logo, $\{\psi_{m,n}\}$ satisfaz as hipóteses do teorema 3.2.15. Portanto $\{\psi_{m,n}\}$ é uma frame de cotas:

$$A = \inf_{1 \leq |\xi| \leq 2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(2^m \xi) \right|^2 = 1 \quad \text{e} \quad B = \sup_{1 \leq |\xi| \leq 2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(2^m \xi) \right|^2 = 1$$

Assim, pela proposição 3.2.13, $\{\psi_{m,n}\}$ constitui uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$.

■

Se $\nu \in C^\infty(\mathbb{R})$ então $\widehat{\psi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ (ver definição 2.2.16). Logo, pela proposição 2.2.17, $\widehat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, o que implica $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Agora, por (1), as funções $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ satisfazem

$$|f(x)| \leq \frac{C_m}{(1 + |x|^2)^m} \quad \forall m = 0, 1, 2, \dots$$

onde $C_m = \left\| (1 + |x|^2)^m f \right\|_{\text{sup}} < +\infty$. Portanto, as funções no espaço de Schwartz têm boa localização no tempo (e conseqüentemente na frequência). Entretanto, C_m pode ser muito grande, o que implica que o decaimento de ψ pode não ser muito rápido.

3.3 ANÁLISE DE MULTIRESOLUÇÃO E WAVELET

O objetivo desta seção é ver como podemos construir bases de wavelets. Para isto, precisamos de uma estrutura em $L^2(\mathbb{R})$ que permitirá, entre outras coisas, decompor $L^2(\mathbb{R})$ como soma direta de espaços mutuamente ortogonais. Isto é chamado *análise de multiresolução*.

Definição 3.3.1 : Uma *análise de multiresolução* é uma seqüência de subespaços fechados V_j de $L^2(\mathbb{R})$, chamados *espaços de escala*, satisfazendo:

$$M1) V_j \subseteq V_{j-1} \quad \forall j \in \mathbb{Z}$$

$$M2) \bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j \text{ é denso em } L^2(\mathbb{R})$$

$$M3) \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$$

$$M4) f \in V_j \iff f(2^j \cdot) \in V_0$$

$$M5) f \in V_0 \iff f(\cdot - n) \in V_0 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

M6) $\exists \phi \in V_0$ tal que $\{\phi_{0,n}; n \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal de V_0 , onde

$$\phi_{j,n}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \phi(2^{-j}x - n) \quad \forall j, n \in \mathbb{Z}$$

Observação 3.3.2 : 1) $M4$ e $M5$ implicam que se $f \in V_j$ então $f(\cdot - 2^j n) \in V_j \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

2) $M4$ e $M6$ implicam que $\{\phi_{j,n}; n \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal para $V_j \quad \forall j \in \mathbb{Z}$.

3) Se $P_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \cdot, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}$ (projeção ortogonal sobre V_j) então $M1$ e $M2$ asseguram que $\lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = f \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R})$, ou seja, partindo-se de uma representação de f numa determinada escala, podemos reobter f acrescentando-se os detalhes em escalas mais altas.

4) $M4$ é equivalente à : $f \in V_j \iff f(2 \cdot) \in V_{j-1}$.

5) A função ϕ é chamada *função de escala* da análise de multiresolução.

6) A ortonormalidade de $\phi_{0,n}$ em $M6$ pode ser relaxada, requerendo apenas que forme uma base de Riesz.

Exemplo 3.3.3 : Considere a função de Haar

$$\phi(t) = \chi_{[0,1)} = \begin{cases} 1 & \text{se } t \in [0, 1) \\ 0 & \text{se } t \in \mathbb{R} - [0, 1) \end{cases}$$

ϕ é a função de escala da *análise de multiresolução de Haar* dada por

$$V_j = \left\{ f \in L^2(\mathbb{R}) \mid f \Big|_{[2^j k, 2^j(k+1)]} = \text{constante}, k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \blacksquare$$

Para todo $j \in \mathbb{Z}$, seja W_j o complemento ortogonal de V_j em V_{j-1} . Temos

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \tag{70}$$

e

$$W_i \perp W_j, \quad i \neq j \tag{71}$$

Assim, para $j < J$, temos

$$V_j = V_J \bigoplus_{k=0}^{J-j-1} W_{J-k} \quad (72)$$

Logo, de $M2$ e $M3$, temos

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j \quad (73)$$

onde os subespaços W_j são mutuamente ortogonais. Além disso, pela observação 3.3.2 (4), os espaços W_j herdam a propriedade $M4$ de V_j . De fato, basta ver que para $f \neq 0$,

$$f \in W_j \iff f \perp V_j \iff f(2^j) \perp V_0 \iff f(2^j \cdot) \in W_0 \quad (74)$$

Desde que $\phi \in V_0 \subseteq V_{-1}$ e as $\phi_{-1,n}$ formam uma base ortonormal em V_{-1} , temos

$$\phi = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi_{-1,n} \quad (75)$$

com

$$h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle \quad e \quad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |h_n|^2 = 1 \quad (76)$$

Podemos escrever (75) como

$$\phi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \phi(2x - n) \quad (77)$$

ou

$$\widehat{\phi}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-\frac{in\xi}{2}} \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (78)$$

onde a convergência é em $L^2(\mathbb{R})$.

A fórmula (78) pode ser escrita como

$$\widehat{\phi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad q.t.p \quad (79)$$

onde

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n e^{-in\xi} \quad (80)$$

De (76), temos $m_0 \in L^2([0, 2\pi])$, 2π -periódica. Temos então que V_j satisfaz $M1$ se e somente se, $\phi \in V_{-1}$, ou seja, se e somente se, existe $m_0 \in L^2([0, 2\pi])$, 2π -periódica³², satisfazendo (79).

³²Neste caso satisfaz (80)

Observação 3.3.4 : Note que em (79), a banda de frequência de $\widehat{\phi}(\xi)$ é a metade da banda de frequência de $\widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$. Assim, temos que m_0 é um filtro de passa baixa, chamado *filtro de passa baixa da função de escala* ϕ . ■

Agora, como $\phi = \phi_{0,0}$ e $\{\phi_{0,n}; n \in \mathbb{Z}\}$ é base ortonormal de V_0 ,

$$\begin{aligned} \delta_{0,k} &= \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \overline{\phi(x-k)} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left| \widehat{\phi}(\xi) \right|^2 e^{ik\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\xi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi l) \right|^2 d\xi \end{aligned}$$

Logo,

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}(\xi + 2\pi l) \right|^2 = 1 \quad q.t.p \quad (81)$$

Assim, de (79) e (81), temos

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi l\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2} + \pi l\right) \right|^2 = 1 \quad q.t.p \quad (82)$$

Separando o lado esquerdo de (82) em duas somas, para l par e ímpar e usando o fato que m_0 é 2π -periódica, obtemos de (81),

$$\left| m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 + \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \right|^2 = 1 \quad q.t.p \quad (83)$$

Vamos agora caracterizar o espaço W_0 :

$$f \in W_0 \iff f \in V_{-1} \text{ e } f \perp V_0$$

Como $f \in V_{-1}$, temos

$$f = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n \phi_{-1,n}$$

com $f_n = \langle f, \phi_{-1,n} \rangle$. Temos

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{-in\frac{\xi}{2}} \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) = m_f\left(\frac{\xi}{2}\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (84)$$

onde

$$m_f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_n e^{-in\xi} \quad q.t.p \quad (85)$$

Note que $m_f(\xi) \in L^2([0, 2\pi])$, 2π -periódica. Como $f \perp V_0$ então $f \perp \phi_{0,k} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$, ou seja,

$$\int_R f(x) \overline{\phi(x-k)} dx = 0 \quad \therefore \quad \int_R \widehat{f}(\xi) \overline{\widehat{\phi}(\xi)} e^{ik\xi} d\xi = 0$$

ou

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\xi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + 2\pi l) \overline{\widehat{\phi}(\xi + 2\pi l)} d\xi = 0$$

Logo,

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(\xi + 2\pi l) \overline{\widehat{\phi}(\xi + 2\pi l)} = 0 \quad q.t.p \quad (86)$$

A série em (86) converge absolutamente em $L^1([-\pi, \pi])$. De fato, como $\widehat{f}, \widehat{\phi} \in L^2(\mathbb{R})$ então³³ $g = \widehat{f} \overline{\widehat{\phi}} \in L^1(\mathbb{R})$. Logo, pelo teorema da convergência monótona, temos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |g(\xi + 2\pi l)| d\xi &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} |g(\xi + 2\pi l)| d\xi \\ &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \int_0^{2(l+1)\pi} |g(\xi)| d\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}} |g(\xi)| d\xi \\ &= \|g\|_{L^1(\mathbb{R})} < +\infty \end{aligned}$$

Podemos então reagrupar os termos da série para valores pares e ímpares de l . Substituindo (79) e (84) em (86), obtemos

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_f\left(\frac{\xi}{2} + \pi l\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2} + \pi l\right) \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi l\right) \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2} + \pi l\right)} = 0 \quad q.t.p$$

isto é,

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} m_f\left(\frac{\xi}{2} + \pi l\right) \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi l\right)} \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2} + \pi l\right) \right|^2 = 0 \quad q.t.p$$

³³Isto é uma consequência da desigualdade de Hölder (ver nota de rodapé 10 na página 37).

Logo,

$$\begin{aligned}
& \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_f \left(\frac{\xi}{2} + 2k\pi \right) \overline{m_0 \left(\frac{\xi}{2} + 2k\pi \right)} \left| \widehat{\phi} \left(\frac{\xi}{2} + 2k\pi \right) \right|^2 \\
& + \sum_{k \in \mathbb{Z}} m_f \left(\frac{\xi}{2} + (2k+1)\pi \right) \overline{m_0 \left(\frac{\xi}{2} + (2k+1)\pi \right)} \left| \widehat{\phi} \left(\frac{\xi}{2} + (2k+1)\pi \right) \right|^2 \\
& = m_f \left(\frac{\xi}{2} \right) \overline{m_0 \left(\frac{\xi}{2} \right)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi} \left(\frac{\xi}{2} + 2k\pi \right) \right|^2 \\
& + m_f \left(\frac{\xi}{2} + \pi \right) \overline{m_0 \left(\frac{\xi}{2} + \pi \right)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi} \left(\frac{\xi}{2} + \pi + 2k\pi \right) \right|^2 = 0 \quad q.t.p
\end{aligned}$$

Logo, por (81), temos

$$m_f \left(\frac{\xi}{2} \right) \overline{m_0 \left(\frac{\xi}{2} \right)} + m_f \left(\frac{\xi}{2} + \pi \right) \overline{m_0 \left(\frac{\xi}{2} + \pi \right)} = 0 \quad q.t.p \quad (87)$$

Por (83), se $\overline{m_0 \left(\frac{\xi}{2} \right)} = 0$ então $\left| m_0 \left(\frac{\xi}{2} + \pi \right) \right|^2 = 1$ *q.t.p.* Considere

$$\lambda \left(\frac{\xi}{2} \right) = \begin{cases} -\frac{m_f \left(\frac{\xi}{2} + \pi \right)}{m_0 \left(\frac{\xi}{2} \right)} & \text{se } m_0 \left(\frac{\xi}{2} \right) \neq 0 \\ m_f \left(\frac{\xi}{2} \right) m_0 \left(\frac{\xi}{2} + \pi \right) & \text{se } m_0 \left(\frac{\xi}{2} \right) = 0 \end{cases}$$

Temos que λ é 2π -periódica e, por (87),

$$m_f \left(\frac{\xi}{2} \right) = \lambda \left(\frac{\xi}{2} \right) \overline{m_0 \left(\frac{\xi}{2} + \pi \right)} \quad q.t.p \quad (88)$$

e

$$\lambda \left(\frac{\xi}{2} \right) + \lambda \left(\frac{\xi}{2} + \pi \right) = 0 \quad q.t.p \quad (89)$$

De (89), podemos escrever

$$\lambda \left(\frac{\xi}{2} \right) = e^{i\frac{\xi}{2}} \nu(\xi) \quad q.t.p \quad (90)$$

onde ν é uma função 2π -periódica. Substituindo (88) e (90) em (84), temos que $f \in W_0$ se, e somente se,,

$$\widehat{f}(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}} \overline{m_0 \left(\frac{\xi}{2} + \pi \right)} \nu(\xi) \widehat{\phi} \left(\frac{\xi}{2} \right) \quad (91)$$

Teorema 3.3.5 : Dada uma análise de multiresolução $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ em $L^2(\mathbb{R})$, existe uma base ortonormal de wavelets associada $\{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$ para $L^2(\mathbb{R})$, com $\psi_{j,k}(x) = 2^{-\frac{j}{2}} \psi(2^{-j}x - k)$. Conseqüentemente,

$$P_{j-1} = P_j + \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \cdot, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad (92)$$

onde $P_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle \cdot, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k}$ (projeção ortogonal sobre V_j).

Prova: Se $\{\psi_{0,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal para W_0 então, por (74), $\{\psi_{j,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal para W_j , para qualquer $j \in \mathbb{Z}$. Mas, por (73), isto assegura que $\{\psi_{j,k}; j, k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal para $L^2(\mathbb{R})$. Assim, é suficiente descobrir uma wavelet $\psi \in W_0$ tal que $\{\psi_{0,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ seja uma base ortonormal para W_0 . A equação (91) sugere que tomemos como uma candidata à wavelet, $\psi \in W_0$ tal que

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{i\frac{\xi}{2}} \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \quad (93)$$

Vamos mostrar que³⁴ $\{\psi_{0,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ é uma base ortonormal para W_0 . Pela análise feita acima (na caracterização de W_0) e usando $\nu = 1$, temos que (93) define uma função $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ com $\psi \in V_{-1}$ e $\psi \perp V_0$, ou seja, $\psi \in W_0$. Vejamos que $\{\psi_{0,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortonormal. Temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) \overline{\psi_{0,k}(x)} dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\psi}(\xi)|^2 e^{ik\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ik\xi} \sum_{l \in \mathbb{Z}} |\widehat{\psi}(\xi + 2\pi l)|^2 d\xi \end{aligned}$$

³⁴Não se importando com questão de convergência, podemos escrever (91) como

$$\widehat{f}(\xi) = \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_k e^{-ik\xi} \right) \widehat{\psi}(\xi) \quad \text{ou} \quad f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \nu_k \psi(\cdot - k)$$

o que mostra que é razoável tomarmos $\{\psi_{0,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ como candidata à base ortonormal para W_0 .

Mas,

$$\begin{aligned}
\sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\psi}(\xi + 2\pi l) \right|^2 &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi l + \pi\right) \right|^2 \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2} + \pi l\right) \right|^2 \\
&= \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \right|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2} + 2n\pi\right) \right|^2 + \left| m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2} + \pi + 2n\pi\right) \right|^2 \\
&= \left[\left| m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 + \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \right|^2 \right] \\
&= 1 \quad q.t.p
\end{aligned}$$

onde na penúltima igualdade usamos (81), e na última igualdade usamos (83). Logo,

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) \overline{\psi_{0,k}(x)} dx = \delta_{0,k}$$

o que mostra que $\{\psi_{0,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ é um conjunto ortonormal. Para mostrar que $\{\psi_{0,k}; k \in \mathbb{Z}\}$ gera W_0 , basta mostrar que toda $f \in W_0$ pode ser escrita como

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \psi_{0,k}$$

onde $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in l^2(\mathbb{Z})$, ou

$$\widehat{f}(\xi) = C(\xi) \widehat{\psi}(\xi) \tag{94}$$

onde $C \in L^2([0, 2\pi])$, 2π -periódica. De (91) e (93), temos $\widehat{f}(\xi) = \nu(\xi) \widehat{\psi}(\xi)$, com

$$\int_0^{2\pi} |\nu(\xi)|^2 d\xi = \int_0^{2\pi} \left| \lambda\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 d\xi$$

Agora, por (83), temos

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \left| \lambda\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 d\xi &= \int_0^{2\pi} \left| \lambda\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 \left[\left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \right|^2 + \left| m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 \right] d\xi \\
&= \int_0^{2\pi} \left| \lambda\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 \left| m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right) \right|^2 d\xi \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \left| \lambda\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 \left| m_0\left(\frac{\xi}{2}\right) \right|^2 d\xi
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \left| \lambda \left(\frac{\xi}{2} \right) \right|^2 d\xi &= \int_0^{2\pi} \left| \lambda \left(\frac{\xi}{2} \right) \right|^2 \left| m_0 \left(\frac{\xi}{2} + \pi \right) \right|^2 d\xi \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \left| \lambda \left(\frac{\xi}{2} + \pi \right) \right|^2 \left| m_0 \left(\frac{\xi}{2} \right) \right|^2 d\xi \\
&= \int_0^{2\pi} \left| \lambda \left(\frac{\xi}{2} \right) \right|^2 \left| m_0 \left(\frac{\xi}{2} + \pi \right) \right|^2 d\xi \\
&\quad + \int_{-2\pi}^0 \left| \lambda \left(\frac{\omega}{2} + 2\pi \right) \right|^2 \left| m_0 \left(\frac{\omega}{2} + \pi \right) \right|^2 d\omega \\
&= \int_0^{2\pi} \left| \lambda \left(\frac{\xi}{2} \right) \right|^2 \left| m_0 \left(\frac{\xi}{2} + \pi \right) \right|^2 d\xi \\
&\quad + \int_0^{2\pi} \left| \lambda \left(\frac{\omega}{2} \right) \right|^2 \left| m_0 \left(\frac{\omega}{2} + \pi \right) \right|^2 d\omega \\
&= 2 \int_0^{2\pi} \left| \lambda \left(\frac{\xi}{2} \right) \right|^2 \left| m_0 \left(\frac{\xi}{2} + \pi \right) \right|^2 d\xi \\
&= 2 \int_0^{2\pi} |m_f(\xi)|^2 d\xi \\
&= 2\pi \sum_{n \in \mathbb{Z}} |f_n|^2 \\
&= 2\pi \|f\|^2 < \infty
\end{aligned}$$

onde na primeira igualdade usamos (89), na segunda igualdade usamos a mudança de variável $\frac{\xi}{2} = \frac{\omega}{2} + \pi$, na terceira igualdade usamos que λ e m_0 são 2π -periódicas, na quinta igualdade usamos (88) e na sexta igualdade usamos (85). Logo,

$$\int_0^{2\pi} |\nu(\xi)|^2 d\xi = 2\pi \|f\|^2 < \infty \quad \blacksquare$$

Observação 3.3.6 : 1) Vimos na demonstração do teorema que uma possibilidade para a construção da wavelet ψ é

$$\widehat{\psi}(\xi) = e^{\frac{i\xi}{2}} \overline{m_0 \left(\frac{\xi}{2} + \pi \right)} \widehat{\phi} \left(\frac{\xi}{2} \right)$$

ou

$$\psi(x) = \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-1} \overline{h_{-n-1}} \phi(2x - n)$$

(onde a convergência da série é em $L^2(\mathbb{R})$) já que

$$\begin{aligned}
\widehat{\psi}(\xi) &= \sqrt{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-1} \overline{h_{-n-1}} \int_{\mathbb{R}} \phi(2x - n) e^{-ix \cdot \xi} dx \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-1} \overline{h_{-n-1}} \int_{\mathbb{R}} \phi(y) e^{-i\left(\frac{y+n}{2}\right) \cdot \xi} dy \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-1} \overline{h_{-n-1}} \int_{\mathbb{R}} \phi(y) e^{-iy \cdot \frac{\xi}{2}} e^{-i\frac{n}{2} \xi} dy \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^{n-1} \overline{h_{-n-1}} e^{-i\frac{n}{2} \xi} \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \overline{h_n} e^{i\left(\frac{n+1}{2}\right) \xi} \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \overline{h_n} e^{i\frac{n}{2} \xi} e^{i\frac{\xi}{2}} \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&= e^{i\frac{\xi}{2}} \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n \overline{h_n} e^{-i\frac{n}{2} \xi} \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\
&= e^{i\frac{\xi}{2}} \overline{m_0\left(\frac{\xi}{2} + \pi\right)} \widehat{\phi}\left(\frac{\xi}{2}\right)
\end{aligned}$$

2) ψ não é determinada de maneira única pela análise de multiresolução e por (93). Se ψ satisfaz (93), então qualquer Γ da forma

$$\widehat{\Gamma}(\xi) = \gamma(\xi) \widehat{\psi}(\xi)$$

com γ 2π -periódica e $|\gamma(\xi)| = 1$ q.t.p, também satisfaz (93). Em particular, podemos tomar $\gamma(\xi) = \gamma_0 e^{imn\pi}$ com $m \in \mathbb{Z}$, $|\gamma_0| = 1$.

A *Análise de Multiresolução de Meyer* é construída da seguinte maneira:

Seja φ a função escala definida, através da sua transformada de Fourier, por

$$\widehat{\varphi}(\xi) := \begin{cases} 1 & , \quad |\xi| \leq \frac{2\pi}{3} \\ \cos\left[\frac{\pi}{2}\nu\left(\frac{3}{2\pi}|\xi| - 1\right)\right] & , \quad \frac{2\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{4\pi}{3} \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

onde ν é uma função diferenciável satisfazendo

$$\nu(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 0 \\ 1 & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \quad (95)$$

$$\nu(x) + \nu(1-x) = 1 \quad (96)$$

De (96), segue que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2k\pi)|^2 = 1$, que é equivalente à ortonormalidade das $\varphi(\cdot - k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Logo, M_6 é satisfeita. Seja $V_0 = \overline{\text{span}\{\varphi(\cdot - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}}$. Da mesma forma, $V_j = \overline{\text{span}\{\varphi_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}}}$, onde $\varphi_{jk}(t) := 2^{-\frac{j}{2}}\varphi(2^{-j}t - k)$. Sabemos que os V_j satisfazem M_1 se, e somente se, $\varphi \in V_{-1}$, ou seja, se, e somente se, existe uma função 2π -periódica m_0 , de quadrado integrável em $[0, 2\pi]$, tal que

$$\widehat{\varphi}(\xi) = m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right)$$

Aqui, m_0 pode ser construída em $[0, 2\pi]$ a partir de $\widehat{\varphi}$ por

$$m_0(\xi) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(2(\xi + 2\pi l))$$

Esta função é 2π -periódica de quadrado integrável em $[0, 2\pi]$ e vale

$$\begin{aligned} m_0\left(\frac{\xi}{2}\right)\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) &= \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\xi + 4\pi l)\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &= \widehat{\varphi}(\xi)\widehat{\varphi}\left(\frac{\xi}{2}\right) \\ &= \widehat{\varphi}(\xi) \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade é pelo fato dos suportes de $\widehat{\varphi}(\cdot/2)$ e de $\widehat{\varphi}(\cdot + 4\pi l)$ não se interceptarem para $l \neq 0$, e a terceira igualdade é porque $\widehat{\varphi}(\xi/2) = 1 \forall \xi \in \text{supp } \widehat{\varphi}$. Assim, M_1 é satisfeita e as outras condições da definição também podem ser provadas. Pela observação 3.3.6, a wavelet associada é dada por:

$$\begin{aligned} \widehat{\psi}(\xi) &= e^{i\xi/2} \overline{m_0(\xi/2 + \pi)} \widehat{\varphi}(\xi/2) \\ &= e^{i\xi/2} \sum_{l \in \mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(\xi + 2\pi(2l + 1)) \widehat{\varphi}(\xi/2) \\ &= e^{i\xi/2} [\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi) + \widehat{\varphi}(\xi - 2\pi)] \widehat{\varphi}(\xi/2) \end{aligned}$$

ou equivalentemente,

$$\widehat{\psi}(\xi) = \begin{cases} e^{\frac{i\xi}{2}} \text{sen} \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{2\pi} |\xi| - 1 \right) \right] & , \quad \frac{2\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{4\pi}{3} \\ e^{\frac{i\xi}{2}} \text{cos} \left[\frac{\pi}{2} \nu \left(\frac{3}{4\pi} |\xi| - 1 \right) \right] & , \quad \frac{4\pi}{3} \leq |\xi| \leq \frac{8\pi}{3} \\ 0 & , \quad \text{caso contrário} \end{cases}$$

A função ψ é a wavelet de Meyer.

Consideremos então a Análise de Multiresolução de Meyer. De (44), temos

$$\widehat{\psi}_{jk}(\xi) = 2^{\frac{j}{2}} e^{-i2^j k \xi} \widehat{\psi}(2^j \xi)$$

Desde que $\text{supp}(\widehat{\psi}) = \{\xi; \frac{2}{3}\pi \leq |\xi| \leq \frac{8}{3}\pi\}$, temos que $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\text{supp}(\widehat{\psi}_{jk}) = \left\{ \xi; \frac{2}{3}\pi 2^{-j} \leq |\xi| \leq \frac{8}{3}\pi 2^{-j} \right\} \quad (97)$$

Da mesma forma, $\forall k \in \mathbb{Z}$,

$$\text{supp}(\widehat{\varphi}_{jk}) = \left\{ \xi; |\xi| \leq \frac{4}{3}\pi 2^{-j} \right\} \quad (98)$$

Considere agora a projeção ortogonal sobre V_j , $P_j : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow V_j$ ³⁵,

$$P_j f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \varphi_{jk}(t)$$

Temos que $\forall f \in L^2(\mathbb{R})$,

$$f = P_j f - P_j f + f = P_j f + (I - P_j) f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \varphi_{jk} + \sum_{l < j} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{lk} \rangle \psi_{lk}$$

Isto mostra que

$$\widehat{P_j f}(\xi) = \widehat{f}(\xi) \quad \text{para } |\xi| \leq \frac{2}{3}\pi 2^{-j} \quad (99)$$

já que $\forall l \geq j$, $\widehat{\psi}_{lk}(\xi) = 0$ para $|\xi| \leq \frac{2}{3}\pi 2^{-j}$.

Considerando a projeção ortogonal correspondente, no espaço frequência, $\widehat{P}_j : L^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \widehat{V}_j = \overline{\text{span}\{\widehat{\varphi}_{jk}\}_{k \in \mathbb{Z}}}$ dada por

$$\widehat{P}_j f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \langle f, \widehat{\varphi}_{jk} \rangle \widehat{\varphi}_{jk}$$

temos

$$\widehat{P}_j \widehat{f} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{f}, \widehat{\varphi}_{jk} \rangle \widehat{\varphi}_{jk} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{jk} \rangle \widehat{\varphi}_{jk} = \widehat{P_j f}$$

Logo, por (99), temos

$$\begin{aligned} \|(I - P_j) f\| &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|[(I - P_j) f]^\wedge\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|(I - \widehat{P}_j) \widehat{f}\| \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|(I - \widehat{P}_j) \chi_j \widehat{f}\| \leq \|\chi_j \widehat{f}\| \end{aligned} \quad (100)$$

onde χ_j é a função característica em $(-\infty, -\frac{2}{3}\pi 2^{-j}] \cup [\frac{2}{3}\pi 2^{-j}, +\infty)$.

³⁵De (98), vemos que P_j filtra as frequências maiores que $\frac{4}{3}\pi 2^{-j}$ (filtro de passa baixa).

4 UM MÉTODO WAVELET-GALERKIN APLICADO A UMA EDP

4.1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo nós utilizaremos um Método Wavelet-Galerkin, com a Análise de Multiresolução de Meyer, no estudo de uma equação diferencial parcial com coeficientes variáveis. O problema considerado é um problema mal-posto no sentido que não tem dependência contínua na condição no bordo.

Na seção 4.2 nós apresentamos o problema e vemos que ele é mal-posto. Na seção 4.3 nós utilizamos a Análise de Multiresolução de Meyer e aproximamos o problema por problemas bem-postos nos espaços de escala V_j da Análise de Multiresolução. Isto significa que o método considerado é estável. Na seção 4.4 nós obtemos estimativas para a diferença entre a solução do problema considerado e a projeção ortogonal sobre V_j , da solução do problema aproximante definido no espaço de escala V_{j-1} .

4.2 O PROBLEMA

Estamos interessados no problema (I) abaixo, onde K é uma função contínua

$$\begin{cases} u_t(x, t) = K(x) u_{xx}(x, t) & , \quad 0 < \alpha \leq K(x) < +\infty, \quad t \geq 0, \quad 0 < x < 1 \\ u(0, \cdot) = g & , \quad u_x(0, \cdot) = 0 \end{cases} \quad (\text{I})$$

Nós consideramos que o problema (I) tem uma solução $u(x, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ e estendemos $u(x, t)$ e g a \mathbb{R} tomando ambas nulas para $t < 0$. Note que o problema (I) não tem uma condição inicial, pois não precisaremos de uma para os resultados que serão obtidos.

O problema (I) é mal posto, no sentido que pequenas perturbações na condição g no bordo, podem causar grandes alterações na solução, se ela existir. Isto significa que se a solução existe, ela não depende continuamente de g . Um exemplo de que o problema (I) é mal-posto é dado a seguir:

Exemplo 4.2.1: Considere o problema

$$\begin{cases} u_{xx}(x, t) = u_t(x, t) & , \quad t \geq 0 & , \quad 0 < x < 1 \\ u(0, \cdot) = g_n & , \quad u_x(0, \cdot) = 0 \end{cases}$$

$$\text{onde } g_n(t) = \begin{cases} n^{-2} \cos 2n^2 t & , \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & , \quad t > t_0 \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

A solução deste problema é

$$u_n(x, t) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} n^{-2} \cos(2n^2 t + j\frac{\pi}{2}) \frac{(\sqrt{2}nx)^{2j}}{(2j)!} & , \quad 0 \leq t \leq t_0 \\ 0 & , \quad t > t_0 \end{cases}$$

Assim, temos que $g_n(t)$ converge uniformemente para zero quando n tende ao infinito, enquanto, para $x > 0$, a solução $u_n(x, t)$ não converge para zero. ■

4.3 ESTABILIDADE DO MÉTODO

No que se segue a Análise de Multiresolução considerada é a Análise de Multiresolução de Meyer com função escala φ .

O lema abaixo é uma versão da desigualdade de Gronwall.

Lema 4.3.1 : *Sejam u e v contínuas, positivas, $x \geq a$ e $c > 0$. Se*

$$u(x) \leq c + \int_a^x \int_a^s v(\tau) u(\tau) d\tau ds$$

então

$$u(x) \leq c \cdot \exp \left(\int_a^x \int_a^s v(\tau) d\tau ds \right)$$

Prova: Seja $w(x) = c + \int_a^x \int_a^s v(\tau) u(\tau) d\tau ds$. Logo,

$$w'(x) = \int_a^x v(\tau) u(\tau) d\tau$$

$$\therefore w''(x) = v(x) u(x) \leq v(x) w(x) \quad \therefore \frac{w''(x)}{w(x)} \leq v(x)$$

Agora,

$$\frac{w''(x)}{w(x)} = \left(\frac{w'}{w} \right)' (x) + \left(\frac{w'(x)}{w(x)} \right)^2$$

Logo,

$$\left(\frac{w'}{w}\right)'(x) \leq v(x) \quad \therefore \quad \frac{w'(x)}{w(x)} \leq \int_a^x v(\tau) d\tau \quad \therefore \quad (\ln w(x))' \leq \int_a^x v(\tau) d\tau$$

$$\therefore \quad \ln w(x) - \ln w(a) \leq \int_a^x \int_a^s v(\tau) d\tau ds$$

Como $w(a) = c$, temos

$$\ln w(x) - \ln c \leq \int_a^x \int_a^s v(\tau) d\tau ds$$

$$\therefore \quad \ln \frac{w(x)}{c} \leq \int_a^x \int_a^s v(\tau) d\tau ds \quad \therefore \quad w(x) \leq c \cdot \exp\left(\int_a^x \int_a^s v(\tau) d\tau ds\right)$$

Logo, como por hipótese $u(x) \leq w(x)$, temos

$$u(x) \leq c \cdot \exp\left(\int_a^x \int_a^s v(\tau) d\tau ds\right) \quad \blacksquare$$

Agora, aplicando a Transformada de Fourier com relação ao tempo no problema (I), obtemos o seguinte problema no espaço frequência:

$$\begin{cases} \widehat{u}_{xx}(x, \xi) = \frac{i\xi}{K(x)} \widehat{u}(x, \xi) & , \quad 0 < x < 1 & , \quad \xi \in \mathbb{R} \\ \widehat{u}(0, \xi) = \widehat{g}(\xi) & , \quad \widehat{u}_x(0, \cdot) = 0 \end{cases}$$

cuja solução satisfaz

$$\widehat{u}(x, \xi) = \widehat{g}(\xi) + \int_0^x \int_0^s \frac{i\xi}{K(\tau)} \widehat{u}(\tau, \xi) d\tau ds$$

Logo, pelo lema 4.3.1, temos, para $\widehat{g}(\xi) \neq 0$:

$$|\widehat{u}(x, \xi)| \leq |\widehat{g}(\xi)| \cdot \exp\left[|\xi| \int_0^x \int_0^s \frac{1}{K(\tau)} d\tau ds\right] \quad (101)$$

O próximo lema é a proposição 3.1 em [38], quando $K(x)$ é constante.

Lema 4.3.2 : O operador $D_j(x)$ definido por

$$[(D_j)_{lk}(x)]_{l \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}} = \left[\frac{1}{K(x)} \langle \varphi'_{jl}, \varphi_{jk} \rangle \right]_{l \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}}$$

satisfaz:

$$1) (D_j)_{lk}(x) = -(D_j)_{kl}(x)$$

2) $(D_j)_{lk}(x) = (D_j)_{(l-k)_0}(x)$. Portanto, $(D_j)_{lk}(x)$ são iguais ao longo das diagonais.

$$3) \|D_j(x)\| \leq \frac{\pi 2^{-j}}{K(x)}$$

Prova: Esta prova é a mesma dada em [38] para um resultado similar quando o operador $D_j(x)$ não depende de x .

1) Conforme vimos anteriormente, $\widehat{\varphi}_{j0}(\xi) = 2^{\frac{j}{2}}\widehat{\varphi}(2^j\xi)$, $\widehat{\varphi}_{jk}(\xi) = 2^{\frac{j}{2}}e^{-ik\xi 2^j}\widehat{\varphi}(2^j\xi) = e^{-ik\xi 2^j}\widehat{\varphi}_{j0}(\xi)$ e, como a transformada de Fourier da função escala de Meyer φ é uma função par, temos, $\widehat{\varphi}_{j0}(\xi) = \widehat{\varphi}_{j0}(-\xi)$. Portanto,

$$\begin{aligned} (D_j)_{lk}(x) &= \frac{1}{K(x)} \langle \varphi'_{jl}, \varphi_{jk} \rangle = \frac{1}{K(x)} \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{\varphi}'_{jl}, \widehat{\varphi}_{jk} \rangle \\ &= \frac{1}{K(x)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}'_{jl}(\xi) \overline{\widehat{\varphi}_{jk}(\xi)} d\xi \\ &= \frac{i}{K(x)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi \widehat{\varphi}_{jl}(\xi) \overline{\widehat{\varphi}_{jk}(\xi)} d\xi \\ &= \frac{i}{K(x)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi e^{-i(l-k)\xi 2^j} |\widehat{\varphi}_{j0}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} (D_j)_{lk}(x) &= \frac{i}{K(x)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} (-\omega) e^{-i(k-l)\omega 2^j} |\widehat{\varphi}_{j0}(-\omega)|^2 d\omega \\ &= -\frac{i}{K(x)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega e^{-i(k-l)\omega 2^j} |\widehat{\varphi}_{j0}(\omega)|^2 d\omega \\ &= -\frac{i}{K(x)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \omega \widehat{\varphi}_{jk}(\omega) \overline{\widehat{\varphi}_{jl}(\omega)} d\omega \\ &= -\frac{1}{K(x)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}'_{jk}(\omega) \overline{\widehat{\varphi}_{jl}(\omega)} d\omega \end{aligned}$$

Assim,

$$(D_j)_{lk}(x) = -\frac{1}{K(x)} \frac{1}{2\pi} \langle \widehat{\varphi}'_{jk}, \widehat{\varphi}_{jl} \rangle = -\frac{1}{K(x)} \langle \varphi'_{jk}, \varphi_{jl} \rangle = -(D_j)_{kl}(x)$$

2)

$$(D_j)_{lk}(x) = \frac{i}{K(x)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi e^{-i(l-k)\xi 2^j} |\widehat{\varphi}_{j0}(\xi)|^2 d\xi = (D_j)_{(l-k)_0}(x)$$

o que mostra que $(D_j)_{lk}(x)$ são iguais ao longo das diagonais.

3)

$$\|D_j(x)\| = \left\| \frac{1}{K(x)} B_j \right\| = \frac{1}{K(x)} \|B_j\|$$

onde $(B_j)_{lk} = \langle \varphi'_{jl}, \varphi_{jk} \rangle$. Pelos itens (1) e (2) acima, temos que $(B_j)_{lk} = -(B_j)_{kl}$, $(B_j)_{lk} = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \xi e^{-i(l-k)\xi 2^j} |\widehat{\varphi}_{j0}(\xi)|^2 d\xi = (B_j)_{(l-k)0}$ e $(B_j)_{lk}$ é constante ao longo das diagonais. Mostremos que $\|B_j\| \leq \pi 2^{-j}$. Assim, teremos

$$\|D_j(x)\| \leq \frac{\pi}{K(x)} 2^{-j}$$

Considere, para $|t| \leq \pi 2^{-j}$,

$$\begin{aligned} \Gamma_j(t) &= i2^{-j} \left[(t - 2^{-j+1}\pi) |\widehat{\varphi}_{j0}(t - 2^{-j+1}\pi)|^2 + t |\widehat{\varphi}_{j0}(t)|^2 \right. \\ &\quad \left. + (t + 2^{-j+1}\pi) |\widehat{\varphi}_{j0}(t + 2^{-j+1}\pi)|^2 \right] \end{aligned}$$

Estenda Γ_j periodicamente a \mathbb{R} e expanda em série de Fourier

$$\Gamma_j(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \gamma_k e^{ikt2^j}$$

Temos que $\gamma_k = b_k \forall k$, onde b_k é o elemento na diagonal k de B_j . De fato, como $\widehat{\varphi}_{j0}(t) = 0$ para $|t| \geq \frac{4}{3}\pi 2^{-j}$, temos

$$\begin{aligned} \gamma_k &= \frac{1}{2^{-j+1}\pi} \int_{-\pi 2^{-j}}^{\pi 2^{-j}} \Gamma_j(t) e^{-ikt2^j} dt \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi 2^{-j}}^{\pi 2^{-j}} (t - 2^{-j+1}\pi) |\widehat{\varphi}_{j0}(t - 2^{-j+1}\pi)|^2 e^{-ikt2^j} dt \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi 2^{-j}}^{\pi 2^{-j}} t |\widehat{\varphi}_{j0}(t)|^2 e^{-ikt2^j} dt \\ &\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi 2^{-j}}^{\pi 2^{-j}} (t + 2^{-j+1}\pi) |\widehat{\varphi}_{j0}(t + 2^{-j+1}\pi)|^2 e^{-ikt2^j} dt \end{aligned}$$

Assim, fazendo-se uma mudança de variável, temos:

$$\begin{aligned}
\gamma_k &= \frac{i}{2\pi} \int_{-3\pi 2^{-j}}^{-\pi 2^{-j}} t |\widehat{\varphi}_{j0}(t)|^2 e^{-ikt2^j} dt + \frac{i}{2\pi} \int_{-\pi 2^{-j}}^{\pi 2^{-j}} t |\widehat{\varphi}_{j0}(t)|^2 e^{-ikt2^j} dt \\
&\quad + \frac{i}{2\pi} \int_{\pi 2^{-j}}^{3\pi 2^{-j}} t |\widehat{\varphi}_{j0}(t)|^2 e^{-ikt2^j} dt \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{-3\pi 2^{-j}}^{3\pi 2^{-j}} t |\widehat{\varphi}_{j0}(t)|^2 e^{-ikt2^j} dt \\
&= \frac{i}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} t |\widehat{\varphi}_{j0}(t)|^2 e^{-ikt2^j} dt \\
&= b_k
\end{aligned}$$

Agora, $\|B_j\| = \sup_{\|f\|=1} \|B_j f\|$, onde $\|f\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_k|^2$. Seja $F(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k e^{ikt2^j}$ e tome $W(t) = \Gamma_j(t) F(t)$. Temos

$$W(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \omega_k e^{ikt2^j} \quad \text{e} \quad \omega_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} b_{k-l} f_l = (B_j f)_k$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\|\omega\|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\omega_k|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi 2^{-j}} \int_{-\pi 2^{-j}}^{\pi 2^{-j}} |W(t)|^2 dt \\
&= \frac{1}{2\pi 2^{-j}} \int_{-\pi 2^{-j}}^{\pi 2^{-j}} |\Gamma_j(t) F(t)|^2 dt \\
&\leq \sup_{|t| \leq \pi 2^{-j}} |\Gamma_j(t)|^2 \frac{1}{2\pi 2^{-j}} \int_{-\pi 2^{-j}}^{\pi 2^{-j}} |F(t)|^2 dt \\
&= \sup_{|t| \leq \pi 2^{-j}} |\Gamma_j(t)|^2 \|f\|^2
\end{aligned}$$

Logo,

$$\|B_j\| \leq \sup_{|t| \leq \pi 2^{-j}} |\Gamma_j(t)|^2$$

Agora, note que Γ_j é uma função ímpar. Portanto,

$$\sup_{|t| \leq \pi 2^{-j}} |\Gamma_j(t)|^2 = \sup_{0 \leq t \leq \pi 2^{-j}} |\Gamma_j(t)|^2$$

Mas, para $0 \leq t \leq \pi 2^{-j}$, temos $t + \pi 2^{-j+1} \geq \pi 2^{-j+1}$ e $t - \pi 2^{-j+1} \leq 0$. Logo,

$$\widehat{\varphi}_{j0}(t + \pi 2^{-j+1}) = 0 \quad \text{e} \quad (t - \pi 2^{-j+1}) |\widehat{\varphi}_{j0}(t - \pi 2^{-j+1})|^2 \leq 0 \quad \text{para } t \in [0, \pi 2^{-j}]$$

Assim,

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq \pi 2^{-j}} |\Gamma_j(t)|^2 &\leq \pi 2^{-j+1} \sup_{0 \leq t \leq \pi 2^{-j}} t |\widehat{\varphi}_{j0}(t)|^2 \\ &= \pi 2^{-j+1} \sup_{0 \leq t \leq \pi 2^{-j}} (t 2^j) |\widehat{\varphi}(2^j t)|^2 \\ &= \pi 2^{-j+1} \sup_{0 \leq s \leq \pi} s |\widehat{\varphi}(s)|^2 \end{aligned}$$

Agora, pela definição de $\widehat{\varphi}$ temos que $|\widehat{\varphi}(s)|^2 \leq \frac{1}{2\pi}$ e, portanto, $s |\widehat{\varphi}(s)|^2 \leq \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$ para $0 \leq s \leq \pi$. Assim,

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq \pi 2^{-j}} |\Gamma_j(t)|^2 &\leq \sup_{0 \leq s \leq \pi} s |\widehat{\varphi}(s)|^2 \\ &\leq \frac{\pi 2^{-j+1}}{2} \\ &= \pi 2^{-j} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|D_j(x)\| = \frac{1}{K(x)} \|B_j\| \leq \frac{1}{K(x)} \sup_{|t| \leq \pi 2^{-j}} |\Gamma_j(t)|^2 \leq \frac{\pi 2^{-j}}{K(x)}$$

o que prova o item (3) do lema. ■

Vamos considerar agora o seguinte problema aproximante em V_j

$$\begin{cases} K(x) u_{xx}(x, t) = P_j u_t(x, t) \quad , \quad t \geq 0 \quad , \quad 0 < x < 1 \\ u(0, \cdot) = P_j g \\ u_x(0, \cdot) = 0 \\ u(x, t) \in V_j \end{cases} \quad (102)$$

A projeção ortogonal na primeira equação de (102) é devido ao fato que nós podemos ter $u(x, t) \in V_j$ com $u_t(x, t) \notin V_j$, já que $(\varphi_{jl})' \notin V_j$ pois caso contrário teríamos $(\varphi_{jl})' = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \varphi_{jk}$. Logo,

$$\widehat{(\varphi_{jl})'} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k \widehat{\varphi_{jk}}$$

Assim, teríamos

$$i 2^{\frac{j}{2}} e^{-i 2^j l \xi} \xi \widehat{\varphi}(2^j \xi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k 2^{\frac{j}{2}} e^{-i 2^{\frac{j}{2}} \xi} \widehat{\varphi}(2^j \xi)$$

Esta igualdade implica que

$$\xi = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k e^{-i[2^j(k-l)\xi + \frac{\pi}{2}]}$$

o que é um absurdo. ■

A formulação variacional do problema (102) é

$$\begin{cases} \langle K(x) u_{xx} - u_t, \varphi_{jk} \rangle = 0 \\ \langle u(0, \cdot), \varphi_{jk} \rangle = \langle P_j g, \varphi_{jk} \rangle, \quad \langle u_x(0, \cdot), \varphi_{jk} \rangle = \langle 0, \varphi_{jk} \rangle, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

onde φ_{jk} é a base ortonormal de V_j dada pela função escala φ .

Considere u_j solução do problema aproximante (102), dada por $u_j(x, t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} w_l(x) \varphi_{jl}(t)$. Assim, temos

$$(u_j)_t(x, t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} w_l(x) \varphi'_{jl}(t) \quad e \quad (u_j)_{xx}(x, t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} w_l''(x) \varphi_{jl}(t)$$

$$\therefore K(x) (u_j)_{xx}(x, t) - (u_j)_t(x, t) = K(x) \sum_{l \in \mathbb{Z}} w_l''(x) \varphi_{jl}(t) - \sum_{l \in \mathbb{Z}} w_l(x) \varphi'_{jl}(t)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \langle K(x) (u_j)_{xx} - (u_j)_t, \varphi_{jk} \rangle = 0 &\iff \left\langle \sum_{l \in \mathbb{Z}} K(x) w_l'' \varphi_{jl} - \sum_{l \in \mathbb{Z}} w_l \varphi'_{jl}, \varphi_{jk} \right\rangle = 0 \\ &\iff \sum_{l \in \mathbb{Z}} K(x) w_l'' \langle \varphi_{jl}, \varphi_{jk} \rangle = \sum_{l \in \mathbb{Z}} w_l \langle \varphi'_{jl}, \varphi_{jk} \rangle \\ &\iff K(x) w_l'' = \sum_{l \in \mathbb{Z}} w_l \langle \varphi'_{jl}, \varphi_{jk} \rangle, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\iff \frac{d^2}{dx^2} w_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} w_l \frac{1}{K(x)} \langle \varphi'_{jl}, \varphi_{jk} \rangle \iff \frac{d^2}{dx^2} w_k = \sum_{l \in \mathbb{Z}} w_l (D_j)_{lk}(x)$$

onde, como definido antes, $(D_j)_{lk}(x) = \frac{1}{K(x)} \langle \varphi'_{jl}, \varphi_{jk} \rangle$. Assim, temos um sistema de dimensão infinita de equações diferenciais ordinárias.

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} w = -D_j(x) w \\ w(0) = \gamma \\ w'(0) = 0 \end{cases} \quad (\text{II})$$

onde γ é dada por

$$P_j g = \sum_{z \in \mathbb{Z}} \gamma_z \varphi_{jz} = \sum_{z \in \mathbb{Z}} \langle g, \varphi_{jz} \rangle \varphi_{jz}$$

Lema 4.3.3 : *Se w é solução do problema de evolução de 2ª ordem (II) então*

$$\|w(x)\| \leq \|\gamma\| \cdot \exp\left(2^{-j}\pi \int_0^x \int_0^s \frac{1}{K(\tau)} d\tau ds\right)$$

Prova: Temos que w satisfaz

$$w(x) = \gamma + \int_0^x \int_0^s (-D_j)(\tau) w(\tau) d\tau ds$$

$$\therefore \|w(x)\| \leq \|\gamma\| + \int_0^x \int_0^s \|D_j(\tau)\| \|w(\tau)\| d\tau ds$$

Logo, pelo lema 4.3.2, temos

$$\|w(x)\| \leq \|\gamma\| + \int_0^x \int_0^s \frac{2^{-j}\pi}{K(\tau)} \|w(\tau)\| d\tau ds$$

Portanto, pelo lema 4.3.1, temos

$$\|w(x)\| \leq \|\gamma\| \cdot \exp\left(2^{-j}\pi \int_0^x \int_0^s \frac{1}{K(\tau)} d\tau ds\right) \quad \blacksquare$$

Teorema 4.3.4 (Estabilidade do Método Wavelet-Galerkin) : *Sejam u_j e v_j soluções dos problemas aproximantes (102) em V_j para as condições no bordo g e \tilde{g} , respectivamente. Suponha que $\|g - \tilde{g}\| \leq \epsilon$. Então*

$$\|u_j(x, \cdot) - v_j(x, \cdot)\| \leq \epsilon \cdot \exp\left(\frac{2^{-j-1}\pi}{\alpha} x^2\right)$$

onde α satisfaz $0 < \alpha \leq K(x) < +\infty$ como na definição do problema (I). Para j tal que $2^{-j} \leq \frac{2\alpha}{\pi} \log \epsilon^{-1}$, temos

$$\|u_j(x, \cdot) - v_j(x, \cdot)\| \leq \epsilon^{1-x^2}$$

Prova:

$$u_j(x, t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} w_l(x) \varphi_{jl}(t) \quad , \quad v_j(x, t) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \tilde{w}_l(x) \varphi_{jl}(t)$$

sendo w e \tilde{w} soluções do problema de Galerkin (II) com condições $w(0) = \gamma$ e $\tilde{w}(0) = \tilde{\gamma}$, respectivamente. Então, pelo lema 4.3.3 e pela linearidade de (II), temos:

$$\begin{aligned} \|u_j(x, \cdot) - v_j(x, \cdot)\| &= \|w(x) - \tilde{w}(x)\| \\ &\leq \|\gamma - \tilde{\gamma}\| \exp\left(2^{-j}\pi \int_0^x \int_0^s \frac{1}{K(\tau)} d\tau ds\right) \\ &\leq \epsilon \exp\left(2^{-j}\pi \int_0^x \int_0^s \frac{1}{\alpha} d\tau ds\right) \\ &= \epsilon \exp\left(2^{-j-1}\frac{\pi}{\alpha} x^2\right) \end{aligned}$$

Para $j = j(\epsilon)$ tal que $2^{-j} \leq \frac{2\alpha}{\pi} \log \epsilon^{-1}$, temos

$$\begin{aligned} \|u_j(x, \cdot) - v_j(x, \cdot)\| &\leq \epsilon \cdot \exp(x^2 \log \epsilon^{-1}) \\ &= \epsilon^{1-x^2} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

4.4 CONVERGÊNCIA DO MÉTODO

Nesta seção vamos mostrar a convergência do Método Wavelet-Galerkin utilizado.

Estamos interessados nas soluções $u(x, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$, do problema (I), para $g \in L^2(\mathbb{R})$ tal que $\hat{g}(\cdot) \cdot \exp\left(\frac{|\cdot|}{2\alpha}\right) \in L^2(\mathbb{R})$. Uma tal função g nestas condições é dada, por exemplo, por $g = \check{h} \in L^2(\mathbb{R})$ onde $h(\xi) = \exp\left(-\frac{\xi^2 + |\xi|}{2\alpha}\right) \in L^2(\mathbb{R})$. Vamos definir

$$f := \hat{g}(\cdot) \cdot \exp\left(\frac{|\cdot|}{2\alpha}\right) \in L^2(\mathbb{R}) \quad (103)$$

Proposição 4.4.1 : *Se $u(x, t)$ é solução do problema (I) então*

$$\|u(x, \cdot) - P_j u(x, \cdot)\| \leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \exp\left(-\frac{1}{3} \frac{\pi}{\alpha} 2^{-j} (1 - x^2)\right)$$

onde f é dada por (103).

Prova: De (100) e (101), temos

$$\begin{aligned} \|(I - P_j) u(x, \cdot)\| &\leq \|\chi_j \hat{u}(x, \cdot)\| \\ &= \left[\int_{|\xi| > \frac{2}{3} \pi 2^{-j}} |\hat{u}(x, \xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\int_{|\xi| > \frac{2}{3} \pi 2^{-j}} |\hat{g}(\xi)|^2 \cdot \exp\left[2|\xi| \int_0^x \int_0^s \frac{1}{K(\tau)} d\tau ds\right] d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\int_{|\xi| > \frac{2}{3} \pi 2^{-j}} |\hat{g}(\xi)|^2 \cdot \exp\left(|\xi| \frac{x^2}{\alpha}\right) d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \|(I - P_j) u(x, \cdot)\| &\leq \left[\int_{|\xi| > \frac{2}{3} \pi 2^{-j}} |f(\xi)|^2 \cdot \exp\left(-\frac{|\xi|}{\alpha}\right) \cdot \exp\left(\frac{|\xi|}{\alpha} x^2\right) d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\int_{|\xi| > \frac{2}{3} \pi 2^{-j}} |f(\xi)|^2 \cdot \exp\left(-\frac{|\xi|}{\alpha} (1 - x^2)\right) d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Para $|x| < 1$, temos

$$\begin{aligned} \|(I - P_j)u(x, \cdot)\| &\leq \left[\int_{\mathbb{R}} |f(\xi)|^2 d\xi \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \exp\left(-\frac{(2/3)\pi 2^{-j}}{2\alpha} (1 - x^2)\right) \\ &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \exp\left(-\frac{1}{3}\frac{\pi}{\alpha} 2^{-j} (1 - x^2)\right) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposição 4.4.2 : *Se u é solução do problema (I) e u_{j-1} é solução do problema aproximante em V_{j-1} então*

$$\widehat{u}(x, \xi) = \widehat{u}_{j-1}(x, \xi) \quad \text{para } |\xi| \leq \frac{4}{3}\pi 2^{-j} \quad (104)$$

Conseqüentemente,

$$P_j u(x, \cdot) = P_j u_{j-1}(x, \cdot) \quad , \quad j \in \mathbb{Z} \quad (105)$$

Prova: Seja $\Lambda(x, \xi) = \widehat{u}(x, \xi) - \widehat{u}_{j-1}(x, \xi)$. Mostremos que $\Lambda(x, \xi) = 0$ para $|\xi| \leq \frac{4}{3}\pi 2^{-j}$. Considere o problema aproximante em V_{j-1} :

$$\begin{cases} K(x) (u_{j-1})_{xx} = P_{j-1} (u_{j-1})_t \quad , \quad t \in \mathbb{R} \quad , \quad 0 < x < 1 \\ u_{j-1}(0, \cdot) = P_{j-1}g \\ (u_{j-1})_x(0, \cdot) = 0 \\ u_{j-1}(x, \cdot) \in V_{j-1} \end{cases}$$

Aplicando a transformada de Fourier no tempo, temos

$$\begin{aligned} K(x) (\widehat{u}_{j-1})_{xx}(x, \xi) &= \widehat{P}_{j-1} [(u_{j-1})_t]^\wedge(x, \xi) \\ &= \widehat{P}_{j-1} (i\xi \widehat{u}_{j-1}(x, \xi)) \quad , \quad 0 < x < 1 \quad , \quad \xi \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

com as condições: $\widehat{u}_{j-1}(0, \xi) = \widehat{P}_{j-1}\widehat{g}(\xi)$ e $(\widehat{u}_{j-1})_x(0, \cdot) = 0$

Agora, por (99), temos

$$\widehat{P}_{j-1} (i\xi \widehat{u}_{j-1}(x, \xi)) = i\xi \widehat{u}_{j-1}(x, \xi) \quad \text{e} \quad \widehat{P}_{j-1}\widehat{u}(0, \xi) = \widehat{u}(0, \xi)$$

para $|\xi| \leq \frac{4}{3}\pi 2^{-j}$. Logo, para $|\xi| \leq \frac{4}{3}\pi 2^{-j}$, temos:

$$\begin{aligned}
K(x) \Lambda_{xx}(x, \xi) - i\xi \Lambda(x, \xi) &= K(x) \widehat{u}_{xx}(x, \xi) - K(x) (\widehat{u}_{j-1})_{xx}(x, \xi) \\
&\quad - i\xi [\widehat{u}(x, \xi) - \widehat{u}_{j-1}(x, \xi)] \\
&= K(x) \widehat{u}_{xx}(x, \xi) - K(x) (\widehat{u}_{j-1})_{xx}(x, \xi) \\
&\quad - i\xi \widehat{u}(x, \xi) + i\xi \widehat{u}_{j-1}(x, \xi) \\
&= [K(x) \widehat{u}_{xx}(x, \xi) - i\xi \widehat{u}(x, \xi)] \\
&\quad - [K(x) (\widehat{u}_{j-1})_{xx}(x, \xi) - i\xi \widehat{u}_{j-1}(x, \xi)] \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda(0, \xi) &= \widehat{u}(0, \xi) - \widehat{u}_{j-1}(0, \xi) &= \widehat{u}(0, \xi) - \widehat{P}_{j-1} \widehat{g}(\xi) \\
&= \widehat{u}(0, \xi) - \widehat{P}_{j-1} \widehat{u}(0, \xi) &= 0
\end{aligned}$$

$$\Lambda_x(0, \xi) = \widehat{u}_x(0, \xi) - (\widehat{u}_{j-1})_x(0, \xi) = 0$$

Portanto, para $|\xi| \leq \frac{4}{3}\pi 2^{-j}$, fixado, $\Lambda(x, \xi)$ é solução, em $0 < x < 1$, do problema

$$\begin{cases} K(x) \Lambda_{xx}(x, \xi) - i\xi \Lambda(x, \xi) = 0 \\ \Lambda(0, \xi) = 0 \\ \Lambda_x(0, \cdot) = 0 \end{cases}$$

Este problema tem a única solução $\Lambda(x, \xi) = 0$, $\forall x \in [0, 1)$. Assim,

$$\widehat{u}(x, \xi) = \widehat{u}_{j-1}(x, \xi) \quad \text{para } |\xi| \leq \frac{4}{3}\pi 2^{-j}$$

Agora, (105) é consequência de (104) e da definição de \widehat{P}_j . ■

Teorema 4.4.3 : *Seja u solução do problema (I) com condição $u(0, \cdot) = g$ e seja f dada por (103). Seja v_{j-1} solução de Galerkin do problema aproximante (102) em V_{j-1} para a condição no bordo \tilde{g} tal que $\|g - \tilde{g}\| \leq \epsilon$. Se $j = j(\epsilon)$ é tal que $2^{-j} = \frac{\alpha}{\pi} \log \epsilon^{-1}$ então*

$$\|P_j v_{j-1}(x, \cdot) - u(x, \cdot)\| \leq \epsilon^{1-x^2} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \epsilon^{\frac{1}{3}(1-x^2)}$$

Prova:

$$\begin{aligned} \|P_j v_{j-1}(x, \cdot) - u(x, \cdot)\| &\leq \|P_j v_{j-1}(x, \cdot) - P_j u(x, \cdot) + P_j u(x, \cdot) - u(x, \cdot)\| \\ &\leq \|P_j v_{j-1}(x, \cdot) - P_j u(x, \cdot)\| + \|P_j u(x, \cdot) - u(x, \cdot)\| \end{aligned}$$

Seja u_{j-1} solução do problema aproximante em V_{j-1} para a condição no bordo g . Por (105), temos que $P_j u(x, \cdot) = P_j u_{j-1}(x, \cdot)$. Portanto, pelo teorema 4.3.4, temos

$$\begin{aligned} \|P_j v_{j-1}(x, \cdot) - P_j u(x, \cdot)\| &= \|P_j v_{j-1}(x, \cdot) - P_j u_{j-1}(x, \cdot)\| \\ &\leq \|v_{j-1}(x, \cdot) - u_{j-1}(x, \cdot)\| \\ &\leq \epsilon^{1-x^2} \end{aligned}$$

Agora, pela proposição 4.4.1, temos

$$\begin{aligned} \|P_j u(x, \cdot) - u(x, \cdot)\| &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \exp\left(-\frac{1}{3}\frac{\pi}{\alpha}2^{-j}(1-x^2)\right) \\ &\leq \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \epsilon^{\frac{1}{3}(1-x^2)} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\|P_j v_{j-1}(x, \cdot) - u(x, \cdot)\| \leq \epsilon^{1-x^2} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R})} \cdot \epsilon^{\frac{1}{3}(1-x^2)} \quad \blacksquare$$

5 CONCLUSÃO

Nós consideramos soluções $u(x, \cdot) \in L^2(\mathbb{R})$ do problema $K(x)u_{xx} = u_t$, para $0 < \alpha \leq K(x) < \infty$, $0 < x < 1$, $t \geq 0$, com condição $g \in L^2(\mathbb{R})$ no bordo $x = 0$ e $u_x(0, \cdot) = 0$, onde $K(x)$ é uma função contínua. A desigualdade (101) implica que uma solução do problema acima estará em $L^2(\mathbb{R})$ se \hat{g} tiver um decaimento rápido para as altas frequências. Desde que a wavelet de Meyer tem suporte compacto no domínio da frequência, ela corta as altas frequências. Utilizando um Método Wavelet-Galerkin com a Análise de Multiresolução de Meyer, nós regularizamos o mau condicionamento do problema, aproximando-o por problemas bem-postos nos espaços de escalas, conforme foi mostrado no teorema 4.3.4. Nós mostramos a estabilidade e a convergência do Método Wavelet-Galerkin aplicado ao nosso problema, com uma estimativa de erro, dada no teorema 4.4.3.

Um resultado que está sendo trabalhado no momento, é a obtenção de uma estimativa similar à do teorema 4.4.3, para a diferença entre a solução exata do problema (I) e a solução do problema aproximante definido no espaço de escala V_j .

Cabe ressaltar que a técnica utilizada aqui pode também ser usada para problemas de calor, com coeficiente de difusão não-constante, $u_t = (K(x)u_x)_x$, com condição inicial e condições de bordo. Neste caso, a formulação variacional do problema aproximante no espaço de escala V_j , leva a problemas de Sturm-Liouville.

BIBLIOGRAFIA

- [1] AMARATUNGA, K., WILLIAMS, J. R. "Wavelet-Galerkin Solution of Boundary Value Problems", *Arch. Comput. Methods Engrg.* v.4, n.3, pp. 243-285, 1997.
- [2] BACRY, E., MALLAT, S., PAPANICOLAOU, G. "A Wavelet Based Space-Time Adaptive Numerical Method for Partial Differential Equations", *Math. Mod. Numer. Anal.* v.26, pp. 793-834, 1992.
- [3] BARROS-NETO, J., *An Introduction to the Theory of Distributions.* New York, Marcel Dekker, Inc., 1973.
- [4] BARTLE, R. G., *The Elements of Integration.* New York, John Wiley & Sons, Inc., 1966.
- [5] BERTOLUZZA, S., NALDI, G. "A Wavelet Colocation Method for the Numerical Solution of Partial Differential Equations", *Appl. Comput. Harm. Anal.* v.3, pp. 1-9, 1996.
- [6] BEYLKIN, G., KEISER, J.M. "On the Adaptive Numerical Solution of Non-linear Partial Differential Equations in Wavelet Bases", *Journal of Computational Physics* v.132, pp. 233-259, 1997.
- [7] BREZIS, H., *Analyse Fonctionnelle: Theorie et Applications.* Paris, Masson, 1983.
- [8] CALDERÓN, A.P. "Intermediate Spaces and Interpolation, the Complex Method", *Studia Mathematica* v.24, n.2, pp. 113-190, 1964.
- [9] CANNON, J.R., *The One Dimensional Heat Equation.* (Reading) MA: Addison-Wesley, 1984.
- [10] CHUI, C.K., *An Introduction to Wavelets.* London, Academic Press, 1992.
- [11] COTLAR, M., & CIGNOLI, R., *An Introduction to Functional Analysis.* London, North-Holland Publishing Company, 1974.
- [12] DAUBECHIES, I., *Ten Lectures on Wavelets*, CBMS - NSF ; 61 SIAM, Regional Conferences Series in Applied Mathematics, 1992.

- [13] DAUBECHIES, I. "The Wavelet Transform, Time-Frequency Localization and Signal Analysis", *IEEE Trans. Inform. Theory* v.36, n.5, pp. 961-1005, Sept. 1990.
- [14] ELDÉN, L., BERNTSSON, F., REGINSKA, T. "Wavelet and Fourier Method for Solving the Sideways Heat Equation", *SIAM J. Sci. Comput.* v.21, n.6, pp. 2187-2205, 2000.
- [15] GLOWINSKI, R., LAWTON, W., RAVACHOL, M., et al., *Wavelet Solution of Linear and Nonlinear Elliptic, Parabolic and Hyperbolic Problems in One Space Dimension*, Report AD890527.1, Cambridge, AWARE, Inc., 1989.
- [16] GLOWINSKI, R., PAN, T.W., WELLS, R.O., et al. "Wavelet and Finite Element Solutions for the Neumann Problem Using Fictitious Domains", *Journal of Computational Physics* v.126, pp. 40-51, 1996.
- [17] GOEDECKER, S., *Wavelets and Their Application for the Solution of Partial Differential Equations in Physics*. Lausanne, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, 1998.
- [18] GOMES, S.M., CORTINA, E. "Convergence Estimates for the Wavelet-Galerkin Method", *SIAM J. Numer. Anal.* v.33, n.1, pp.149-161, Feb. 1996.
- [19] GROSSMANN, A., MORLET, J. "Decomposition of Hardy Functions into Square Integrable Wavelets of Constant Shape", *SIAM J. Math. Anal.* v.15, n.4, pp. 723-736, Jul. 1984.
- [20] HAAR, A. "Zur Theorie der Orthogonalen Funktionen-Systeme", *Math. Ann.* v.69, pp. 331-371, 1910.
- [21] HOLSCHNEIDER, M., *Wavelets An Analysis Tool*. Oxford, Clarendon Press, 1995.
- [22] JAFFARD, S. "Wavelet Methods for Fast Resolution of Elliptic Problems", *SIAM J. Numer. Anal.* v.29, n.4, pp. 965-986, Aug. 1992.
- [23] KOLMOGOROV, A. N. & FOMIN, S. V., *Elementos de la Teoria de Funciones y del Analisis Funcional*. 3 ed. Moscou, MIR, 1978.
- [24] KREYSIG, E., *Introductory Functional Analysis with Applications*. New York, John Wiley & Sons, Inc., 1978.

- [25] LEMARIÉ, P.G., MEYER, Y. “Ondelettes et Bases Hilbertiennes”, *Revista Matemática Iberoamericana* v.2, n.1 y 2, 1986.
- [26] LIONS, J.L., MAGENES, E., *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications*. vol. I, Paris, Dunod, 1968.
- [27] LIONS, J.L., MAGENES, E., *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications*. vol. II, Paris, Dunod, 1968.
- [28] LIONS, J.L., MAGENES, E., *Problèmes aux Limites non Homogènes et Applications*. vol. III, Paris, Dunod, 1970.
- [29] MALLAT, S.G. “A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation”, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* v.11, pp. 674-693, July 1989.
- [30] MEYER, Y., *Ondelettes et Opérateurs I: Ondelettes*. Paris, Hermann Éditeurs des Sciences et des Arts, 1990.
- [31] MICCHELLI, C.A., XU, Y., ZHAO, Y. “Wavelet Galerkin Methods for Second-Kind Integral Equations”, *J. Comput. Appl. Math.* v.86, pp. 251-270, 1997.
- [32] MONASSE, P., PERRIER, V. “Orthonormal Wavelet Bases Adapted for Partial Differential Equations with Boundary Conditions”, *SIAM J. Math. Anal.* v.29, n. 4, pp. 1040-1065., 1998.
- [33] PAZZI, A., *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*. Applied Mathematical Sciences 44, Springer-Verlag, 1983.
- [34] QIAN, S., WEISS, J. “Wavelets and the Numerical Solution of Partial Differential Equations”, *Journal of Computational Physics* v.106, pp. 155-175, 1993.
- [35] RAVIART, P.A., *Introduction à l'Analyse Numérique des Équations aux Dérivées Partielles*. Paris, Masson, 1983.
- [36] REED, M., SIMON, B., *Methods of Modern Mathematical Physics I: Functional Analysis*. New York, Academic Press, 1975.
- [37] REGINSKA, T. “Sideways Heat Equation and Wavelets”, *J. Comput. Appl. Math.* v.63, pp. 209-214, 1995.

- [38] REGINSKA, T., ELDÉN, L. “Solving the Sideways Heat Equation by a Wavelet-Galerkin Method”, *Inverse Problems* v.13, pp. 1093-1106, 1997.
- [39] REGINSKA, T. “Stability and Convergence of a Wavelet-Galerkin Method for the Sideways Heat Equation”, *J. Inverse Ill Posed Probl.* v.8, n.1, pp. 2000.
- [40] RUDIN, W., *Functional Analysis*. New York, McGraw-Hill, Inc., 1973.
- [41] SHEN, J., STRANG, G. “On Wavelet Fundamental Solutions to the Heat Equation-Heatlets”, *J. Differential Equation* v.161, n.2, pp. 403-421, 2000.
- [42] VASILYEV, O.V., PAOLUCCI, S. “A Dinamically Adaptive Multilevel Wavelet Collocation Method for Solving Partial Differential Equations in a Finite Domain”, *Journal of Computational Physics* v.125, pp. 498-512, 1996.
- [43] TCHAMITCHIAN, PH. “Biorthogonalité et Théorie des Opérateurs”, *Rev. Math. Iberoamer.* v.3, pp. 163-189, 1987.
- [44] WONG, P.W. “Wavelet Decomposition of Harmonizable Random Processes”, *IEEE Trans. Inform. Theory* v.39, n.1, pp. 7-18, Jan. 1993.
- [45] YOSIDA, K., *Functional Analysis*. 3 ed. New York, Springer-Verlag Heidelberg, 1971.