

# HIPERGRAFOS DIRECIONADOS

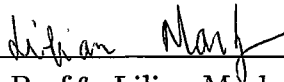
André Luiz Pires Guedes

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:



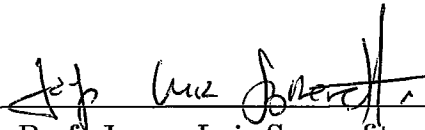
Prof. Paulo Roberto Oliveira, Dr.Ing.



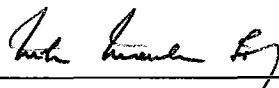
Prof.ª. Lilian Markenzon, D.Sc.



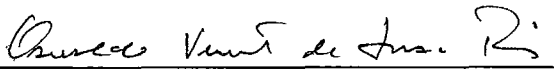
Prof.ª. Claudia-Marcela Justel, D.Sc.



Prof. Jayme Luiz Szwarcfiter, Ph.D.



Prof. Nelson Maculan Filho, D.Habil.



Prof. Oswaldo Vernet de Souza Pires, D.Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

AGOSTO DE 2001

GUEDES, ANDRÉ LUIZ PIRES

Hipergrafos Direcionados [Rio de Janeiro] 2001.

X, 136 p. 29,7cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 2001)

Tese - Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1. Teoria dos Grafos

I. COPPE/UFRJ II. Título (série).

# Agradecimentos

Muita coisa acontece enquanto se desenvolve um trabalho como este. É muito tempo, e assim muita gente participa direta ou indiretamente, ajudando e incomodando. Deixando de lado os problemas ainda tenho muito o que agradecer.

O agradecimento maior é para a minha esposa e a minha filha, que me deram motivos para insistir e sustentação para atravessar as dificuldades. Fazer este trabalho com o amor delas ficou bem mais fácil.

À minha mãe, às minha irmãs e a toda minha família, agradeço pela minha formação e pela possibilidade que me deram de chegar aqui. Agradeço à inspiração que a lembrança de meu pai me trazia e ao apoio todo especial de meu tio.

Um agradecimento especial à minha orientadora. Ela aceitou me orientar sem pensar muito sobre o assunto. Ainda bem que deu tudo certo! Agradeço também aos membros da banca examinadora por se disporem a avaliar o trabalho.

Quero agradecer ao Departamento de Informática da UFPR pelos 4 anos e 4 meses de afastamento e apoio irrestrito. Em especial devo mencionar o grande apoio de Renato Carmo nas diversas conversas que tivemos a respeito da tese.

Não posso deixar de agradecer à Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação da UFPR, em particular a Jussara Elias, que em muitas vezes tirou as minhas dúvidas sobre os detalhes do meu afastamento e bolsa. Falando em bolsa, devo agradecer à CAPES e ao programa PICDT pelos 4 anos de bolsa recebidos.

Mas ainda falta agradecer aos meus amigos que sempre tentavam fazer com que eu esquecesse que tinha uma tese para terminar.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.).

## HIPERGRAFOS DIRECIONADOS

André Luiz Pires Guedes

Agosto/2001

Orientadores: Lilian Markenzon

Paulo Roberto Oliveira

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Este trabalho trata de hipergrafos direcionados, que são uma generalização de grafos direcionados. É feita uma reestruturação da teoria dos hipergrafos direcionados, que até então era formada por conceitos isolados e muitas vezes divergentes.

O conceito de planaridade de grafos é estendido para hipergrafos direcionados de uma forma bastante simples e direta, relacionando a planaridade de um hipergrafo direcionado com a planaridade de um grafo construído a partir do hipergrafo.

A classe dos hipergrafos redutíveis é apresentada como uma generalização dos grafos redutíveis. Para chegarmos nesta generalização, partimos das idéias originais de redutibilidade, usando o conceito de intervalos.

Com o objetivo de modelar o fluxo de controle de programas paralelos, a classe dos hipergrafos Serial-Paralelo-Disjunção é apresentada. É provado que um hipergrafo desta classe é redutível e apresentamos uma solução polinomial para o problema de encontrar um conjunto de vértices de realimentação (*feedback vertex set*) quando restrito a esta classe.



Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.).

## DIRECTED HYPERGRAPHS

André Luiz Pires Guedes

August/2001

Advisors: Lilian Markenzon

Paulo Roberto Oliveira

Department: Systems Engineering and Computer Science

This work studies directed hypergraphs, that generalize the concept of directed graphs (digraphs). The theoretical concepts about directed hypergraphs are organized in a well structured framework.

The concept of directed hypergraph planarity is presented based on the well known concept of graph planarity.

The class of reducible directed hypergraphs is presented as a generalization of reducible flow graphs. In order to obtain such generalization the original ideas of contraction of intervals were used.

To model the control flow of parallel programs, the class of Serial-Parallel-Disjunction hypergraphs are presented and proved to be reducible. A polynomial solution to the feedback vertex set problem when restricted to such class is presented.

# Sumário

Lista de Símbolos	ix
<b>1 Introdução</b>	<b>1</b>
1.1 Revisão de Conceitos . . . . .	2
1.2 Aplicações . . . . .	2
1.3 Conteúdo e Organização . . . . .	5
<b>2 Conceitos Fundamentais</b>	<b>8</b>
2.1 Hipergrafo Direcionado . . . . .	9
2.2 Sub-Hipergrafo e Classes . . . . .	11
2.3 Adjacência e Hiper-caminhos . . . . .	14
2.4 Alguns resultados sobre Hiper-caminhos . . . . .	19
2.5 Ciclos . . . . .	21
<b>3 Progresso Teórico</b>	<b>24</b>
3.1 Definições de Hipergrafos Direcionados . . . . .	25
3.2 Definições de Hiper-caminhos e Ciclos . . . . .	27
3.2.1 Hiper-caminhos . . . . .	28
3.2.2 Ciclos . . . . .	30
3.2.3 B-caminhos, F-caminhos e BF-caminhos . . . . .	32
3.3 Representação Mínima . . . . .	38

3.4	Hipergrafos Direcionados Ponderados . . . . .	40
3.5	Arborescências . . . . .	42
3.6	Cortes e Conjuntos de Corte . . . . .	43
3.7	Grafo Fronteira . . . . .	44
3.8	Comparações . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Percursos</b>	<b>46</b>
4.1	Percurso Simples . . . . .	47
4.2	Percursos e Conectividades . . . . .	49
4.2.1	B-conectividade . . . . .	49
4.2.2	F-conectividade . . . . .	51
4.2.3	S-conectividade . . . . .	52
4.3	SB-Busca . . . . .	55
<b>5</b>	<b>Planaridade</b>	<b>60</b>
5.1	Planaridade de Hipergrafos . . . . .	61
5.2	Uma Forma de Desenhar . . . . .	63
5.3	Planaridade de Hipergrafos Direcionados . . . . .	64
<b>6</b>	<b>Intervalos</b>	<b>70</b>
6.1	Hipergrafo de Fluxo . . . . .	71
6.2	Intervalos . . . . .	72
6.2.1	A Estrutura Interna do Intervalo . . . . .	74
6.2.2	Entre os Intervalos . . . . .	77
<b>7</b>	<b>Hipergrafos Redutíveis</b>	<b>82</b>
7.1	Redutibilidade por Intervalos . . . . .	84
7.2	Redutibilidade por Transformações . . . . .	87

7.3	Equivalência . . . . .	92
7.4	Comparando com Grafos Redutíveis . . . . .	95
<b>8</b>	<b>Hipergrafos Serial-Paralelo-Disjunção</b>	<b>98</b>
8.1	Fluxo de Controle . . . . .	99
8.2	Hipergrafos Serial-Paralelo-Disjunção . . . . .	102
8.2.1	Propriedades dos HSPD . . . . .	106
8.2.2	Reconhecimento . . . . .	109
8.3	Conjunto de Vértices de Realimentação . . . . .	111
8.3.1	Relações entre os Ciclos em um HSPD . . . . .	112
8.3.2	Um Algoritmo Polinomial . . . . .	116
<b>9</b>	<b>Conclusão</b>	<b>120</b>
9.1	Resultados . . . . .	120
9.2	Possibilidades de Trabalho . . . . .	122
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>124</b>
	<b>Índice de Autores</b>	<b>130</b>
	<b>Índice Remissivo</b>	<b>132</b>

# Lista de Símbolos

$\mathcal{C}_{S,v}(X)$	função de contração de $S$ em $v$ restrita a $X$
$\delta(v)$	grau total do vértice $v$
$\delta^+(v)$	grau de saída do vértice $v$
$\delta^-(v)$	grau de entrada do vértice $v$
$\succ$	ordem de intervalos
$ e $	tamanho do hiper-arco
$ H $	tamanho total do hipergrafo direcionado
$BS(v)$	hiper-arcos de entrada do vértice $v$
$Dest(e)$	destino do hiper-arco $e$
$FS(v)$	hiper-arcos de saída do vértice $v$
$I(H)$	hipergrafo direcionado de intervalos
$I(v)$	intervalo com início no vértice $v$
$I^*(H)$	hipergrafo de intervalos final
$I_i(v)$	camada $i$ do intervalo $I(v)$
$L_v(w)$	nível de $w$ no intervalo $I(v)$
$m$	número de hiper-arcos

$n$	número de vértices
$Org(e)$	origem do hiper-arco $e$
$SP(s, x, y, z)$	subgrafo proibido
$ST(v)$	estrela do vértice $v$
$T^*(H)$	hipergrafo final de transformações

# Capítulo 1

## Introdução

O estudo de estruturas combinatórias tem apresentado os problemas mais desafiadores em matemática e computação . Aqui podemos incluir o estudo de algoritmos e estruturas de dados, além, é claro, de grafos [41, 13].

O primeiro trabalho sobre grafos conhecido é de 1736, o artigo sobre as “Pontes de Königsberg”, de **Euler** [41]. Mas somente no século XX é que o que chamamos de teoria dos grafos teve seu grande desenvolvimento. O estudo de hipergrafos aparece apenas em meados do século com o trabalho de **Berge** de 1960 [11].

Já os hipergrafos direcionados foram utilizados bem mais recentemente [5]. Na literatura sobre hipergrafos direcionados encontramos um número não muito grande de referências. Além disso, pouco é feito em relação ao desenvolvimento de uma teoria a respeito, mas são enumeradas uma quantidade razoável de aplicações. Isto indica que uma unificação e reorganização dos conceitos são necessárias.

Neste trabalho estudaremos os hipergrafos direcionados, fazendo uma unificação das notações adotadas. Procuramos definir de forma mais precisa a fundamentação teórica da estrutura, com o objetivo de organizar os conceitos já citados na literatura, e formular adequadamente problemas até então não abordados.

## 1.1 Revisão de Conceitos

Um hipergrafo direcionado é uma generalização do conceito de grafos direcionados, e uma especialização de hipergrafos [11]. Vamos então apresentar definições conhecidas de grafos e hipergrafos.

Uma definição bastante usada para grafos diz que as arestas são conjuntos de vértices de cardinalidade 2.

Um **grafo**  $G = (V, E)$  é um par onde  $V$  é um conjunto finito de vértices e  $E$  é um conjunto finito de arestas, onde uma aresta  $a \in E$  é um subconjunto de  $V$  com exatamente 2 elementos.

Existem outras versões na literatura, inclusive permitindo arestas múltiplas e laços. Uma destas versões adiciona orientação nas arestas, ou seja, deixam de ser conjuntos para serem pares ordenados, e neste caso as chamamos de arcos.

Um **grafo direcionado**  $D = (V, E)$  é um par onde  $V$  é um conjunto finito de vértices e  $E$  é um conjunto finito de arcos, onde um arco  $a \in E$  é um par ordenado de elementos de  $V$ , ou seja,  $a \in V \times V$ .

Uma generalização de grafos são os hipergrafos. Em um hipergrafo a cardinalidade das arestas pode ser diferente de 2.

Um **hipergrafo**  $H = (V, E)$  é um par onde  $V$  é um conjunto finito (de vértices) e  $E$  é um conjunto finito de hiper-arestas, onde uma hiper-aresta  $a \in E$  é um subconjunto não-vazio de  $V$ .

Assim podemos ter uma idéia do que é um **hipergrafo direcionado**: um conjunto de vértices e um conjunto de hiper-arcos, onde os hiper-arcos são pares de conjuntos disjuntos de vértices,  $(X, Y)$ .

## 1.2 Aplicações

O uso de hipergrafos direcionados se apresenta como uma alternativa para a modelagem de problemas em que as relações binárias usuais não são adequadas. Vejamos



um resumo de algumas das aplicações já conhecidas da literatura.

Em bancos de dados relacionais encontramos o conceito de **dependências funcionais (DF)** [4, 15, 16, 17], que são dependências entre atributos dos dados. Tais dependências são relações entre subconjuntos de um conjunto de atributos, ou seja são pares  $(X, Y)$  onde  $X$  e  $Y$  são conjuntos de atributos, indicando que  $Y$  depende de  $X$  (denotado por  $X \rightarrow Y$ ). Os hipergrafos direcionados podem ser usados como um modelo de representação das DFs.

O problema a ser resolvido é, dado um conjunto de dependências funcionais, encontrar um conjunto mínimo que representa as mesmas dependências.

Na área de lógica, encontramos o cálculo proposicional e as variações do problema de **satisfabilidade (SAT)** [15, 16, 17, 19, 7]. Neste tipo de problema, temos um conjunto de cláusulas da forma

$$C = p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_r \leftarrow p_{r+1} \wedge p_{r+2} \wedge \cdots \wedge p_q,$$

onde, para  $i = 1, \dots, q$ ,  $p_i$  é um literal, que pode ser verdadeiro ou falso. O significado de  $C$  é que pelo menos um literal  $p_1, \dots, p_r$  deve ser verdadeiro quando todos os literais  $p_{r+1}, \dots, p_q$  o forem. Se isso for verdade, então a cláusula  $C$  é verdadeira, caso contrário é falsa.

A disjunção  $p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_r$  é chamada de **conseqüência**, e se  $r = 0$  é trocada por  $f$ , um símbolo que significa falso, ficando na forma

$$C = f \leftarrow p_{r+1} \wedge p_{r+2} \wedge \cdots \wedge p_q,$$

enquanto que a conjunção  $p_{r+1} \wedge p_{r+2} \wedge \cdots \wedge p_q$  é chamada de **implicante**, e se  $q = r$ , é trocada por  $t$ , significando verdadeiro, o que nos leva a expressão

$$C = p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_r \leftarrow t.$$

Uma atribuição de valores para os literais é uma função que atribui verdadeiro ou falso para cada literal. Dado um conjunto  $\mathcal{C}$  de cláusulas, se existe uma atribuição de valores que torna todas as cláusulas de  $\mathcal{C}$  verdadeiras então  $\mathcal{C}$  é dito satisfatível. O problema geral SAT é o problema de determinar se um conjunto de cláusulas é ou não satisfatível.

Aqui temos que cada cláusula  $C$  pode ser representada por um hiper-arco  $(\{p_{r+1}, \dots, p_q\}, \{p_1, \dots, p_r\})$  em um hipergrafo direcionado onde os vértices são os literais mais os símbolos  $t$  e  $f$  (respectivamente verdadeiro e falso).

Em casos particulares, todas as cláusulas são do mesmo tipo, como por exemplo as **cláusulas de HORN**, onde  $r \leq 1$ , e os hiper-arcos ficam da forma  $(X, i)$ , onde  $i$  é um único vértice<sup>1</sup>.

Um outro exemplo desta aplicação é a modelagem de **sistemas especialistas baseados em regras** [39], onde as regras que representam o conhecimento do sistema podem ser modeladas como hiper-arcos de um hipergrafos direcionado (como cláusulas). Desta forma, verificações de consistência e completude podem ser feitas mais facilmente.

Ainda em lógica, temos os **grafos E/OU** [26] que podem, entre outras coisas, ser usados na resolução de problemas através de redução por subproblemas. Desta vez aparecem relações entre um grupo de problemas (entrada) que podem ser resolvidos por um conjunto de subproblemas (saída). E mais uma vez podemos modelar esta situação com hiper-arcos, desta vez da forma  $(i, X)$ .

Em [1] e [2] hipergrafos direcionados são utilizados para resolver problemas em **redes de Petri**. Estas redes são formadas de tarefas e transições e são muito usadas para modelar o funcionamento de sistemas em que tarefas podem ser feitas concorrentemente, dependendo de regras de transição. As tarefas e as transições são diretamente mapeadas nos vértices e nos hiper-arcos, respectivamente. As redes de Petri são por si só um modelo usado em várias aplicações, entretanto, os hipergrafos direcionados são mais genéricos e podem agregar mais conceitos teóricos, levando a resultados ainda não encontrados.

Na área de programação paralela, temos algumas aplicações, entre elas o estudo do comportamento de **programas paralelos** [29, 32, 33], onde as interdependências entre tarefas podem ser modeladas por hiper-arcos, nos mesmos moldes de uma rede de Petri.

---

<sup>1</sup> $i = p_1$ , se  $r = 1$ , ou  $i = f$ , se  $r = 0$ .

Na área de **projeto de circuitos integrados** [27], onde aparecem os projetos VLSI por exemplo, podemos usar hipergrafos direcionados para a solução de alguns problemas. Aqui um tipo especial de hipergrafo direcionado pode ser definido, os hipergrafos direcionados Serial-Paralelo, e com eles resolver o problema de disposição de circuitos em um projeto de CMOS.

Por fim, temos o **planejamento de montagem** [24, 18, 20], onde, a partir de um conjunto de peças e regras de montagem, queremos especificar um plano de montagem de um bloco. Mais uma vez os hiper-arcos são do tipo  $(X, i)$ , onde  $X$  representa os blocos que formam o bloco  $i$ .

Todas estas aplicações aqui apresentadas estão relacionadas com conceitos de caminhos (hiper-caminhos). Algumas buscam caminhos mínimos em relação a alguma grandeza, outras apenas buscam encontrar um caminho, ou todos os caminhos, e algumas usam fechos transitivos (de caminhos). Mas todas buscam encontrar caminhos entre determinados vértices. Isso mostra que falta uma maior fundamentação teórica para que outros tipos de problemas possam ser resolvidos com o uso de hipergrafos direcionados.

## 1.3 Conteúdo e Organização

Este trabalho tem como objetivo maior a reestruturação de uma teoria, que até então, é formada de conceitos soltos e um pouco divergentes.

A definição de hipergrafos direcionados é um exemplo da diversidade de abordagens existentes. Como o tipo de estrutura modelada varia de aplicação para aplicação, é natural que, na literatura até agora existente, encontremos definições distintas do que seja um hipergrafo direcionado. De fato, podemos destacar duas principais definições, uma mais específica e a outra mais geral. A definição apresentada por **Ausiello** e outros [5] apareceu primeiro e seus hiper-arcos tem a forma  $(X, i)$  (onde  $X$  é um conjunto de vértices e  $i$  é um único vértice). Uma outra foi apresentada por **Gallo** e outros [17] e define hiper-arcos da forma  $(X, Y)$  (onde  $X$  e  $Y$  são conjuntos de vértices).

Além disso, quase todas as aplicações encontradas na literatura se referem a apenas um tipo de problema a ser resolvido, que é uma variação de caminho mínimo.

Tais fatos contribuem para que este seja o momento de uma reestruturação e de uma consolidação teórica. Principalmente para que outros tipos de aplicações sejam encontrados e desenvolvidos.

Destacamos como pontos principais do trabalho as definições do capítulo 2, que representam a reestruturação feita; e os conceitos apresentados nos capítulos 6, 7 e 8, que apontam para novos tipos de aplicações possíveis.

O trabalho se inicia no capítulo 2 com a apresentação de conceitos, que são uma adaptação dos conceitos disponíveis na literatura, com o objetivo de estabelecer uma base teórica conveniente para o restante do trabalho. Vale notar que apesar de baseados na literatura, a grande maioria destes conceitos é nova.

No capítulo 3 fazemos um passeio pela evolução dos conceitos apresentados pelos trabalhos dos diversos autores desta área, destacando seus objetivos, e fazendo, na medida do possível, uma comparação com os apresentados no capítulo 2.

No capítulo 4 as idéias de percursos e buscas da literatura são revisitados, e é feito um estudo sobre quais as diferenças entre os diversos tipos de percurso, incluindo as implicações sobre complexidade de tempo. Vale notar também que é a primeira vez que um estudo deste tipo é feito. Um novo tipo de percurso é apresentado, a SB-Busca, com aplicação na modelagem de programas paralelos.

O conceito de planaridade é adaptado para hipergrafos direcionados no capítulo 5, onde apresentamos idéias a respeito de desenhos de hipergrafos direcionados.

Grafos redutíveis, usados na modelagem do fluxo de controle de programas, são estendidos para hipergrafos direcionados nos capítulos 6 e 7, dando início ao estudo de fluxo de controle de programas paralelos. No primeiro destes capítulos (6) o conceito de intervalos, usado na definição de redutibilidade, é adaptado a hipergrafos direcionados e diversos resultados são apresentados. O capítulo seguinte (7) introduz os hipergrafos direcionados redutíveis definindo-os por intervalos e por transformações. A equivalência das definições é provada.

Seguindo a linha de modelar o fluxo de controle de programas paralelos, apresentamos no capítulo 8 uma família de hipergrafos direcionados denominada de hipergrafos Serial-Paralelo-Disjunção. Este capítulo é iniciado com uma discussão a respeito de um modelo para o fluxo de controle de programas paralelos, e termina com a formulação do problema “conjunto de vértices de realimentação” (*feedback vertex set*) adaptado para hipergrafos direcionados, para o qual um algoritmo polinomial restrito a família de hipergrafos em questão é apresentado.

Encerramos o trabalho com o capítulo de conclusões, destacando os resultados e apresentando possibilidades futuras.

## Capítulo 2

# Conceitos Fundamentais

Apresentamos aqui os conceitos fundamentais para o estudo de hipergrafos direcionados. Estes conceitos são resultados de uma análise dos mais importantes trabalhos que tratam deste assunto.

Alguns dos conceitos aqui apresentados foram retirados da literatura e adaptados para termos uma notação unificada. Estes estão claramente identificados e referenciados. Alguns outros foram baseados em definições similares, sendo fruto de generalizações, em sua maioria.

De um modo geral, podemos pensar que estes conceitos são uma generalização dos conceitos de grafos direcionados. E de fato, queremos que coincidam exatamente com estes quando o hipergrafo em questão for um grafo.

Certamente temos que começar com o conceito de hipergrafo direcionado; em seguida apresentamos algumas notações e conceitos gerais. Na seção seguinte apresentamos o conceito de sub-hipergrafo e algumas subclasses de hipergrafos direcionados. Na seção 2.3 apresentamos o conceito de adjacência que nos leva aos conceitos de hiper-caminho, e, por fim, o conceito de ciclo é apresentado na seção 2.5.

## 2.1 Hipergrafo Direcionado

Aqui vemos o que é um hipergrafo direcionado e os conceitos estruturais, como tamanho, graus e funções de incidência.

**Def. 2.1** ([17]). Um **hipergrafo direcionado**  $H = (V, E)$  é uma dupla, onde  $V$  é um conjunto (finito) de vértices e  $E$  é um conjunto de hiper-arcos. Um **hiper-arco**  $e \in E$  é um par  $(X, Y)$  onde  $X$  e  $Y$  são subconjuntos disjuntos de  $V$ .

Na figura 2.1 podemos ver o hipergrafo direcionado  $H = (V, E)$ , onde  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ , e  $E = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ . Como exemplo de hiper-arcos, temos  $a = (\{1, 2\}, \{3, 4\})$ , e  $c = (\{4\}, \{5, 8\})$ .

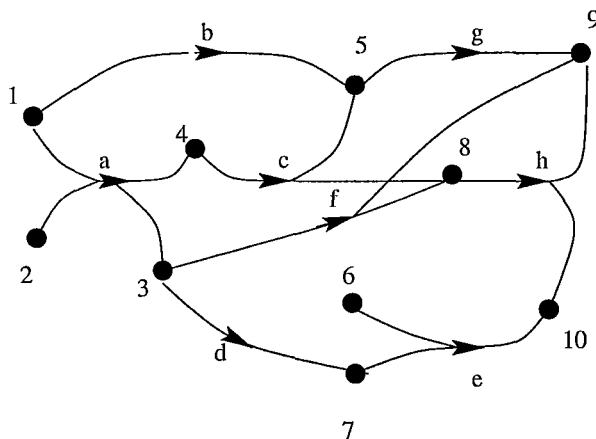


Figura 2.1: Hipergrafo direcionado  $H = (V, E)$

Vale notar que, se um hipergrafo direcionado  $H$  é tal que todos os seus hiper-arcos são da forma  $(\{x\}, \{y\})$  (com conjuntos unitários), então  $H$  será um grafo direcionado.

Vamos definir agora as notações iniciais, que serão usadas juntamente com a definição 2.1.

**Def. 2.2.** Denotamos o número de vértices  $(|V|)$  por  $n$  e o número de hiper-arcos  $(|E|)$  por  $m$ . O tamanho de um hiper-arco  $e = (X, Y)$  é dado por  $|e| = |X| + |Y|$ , e o tamanho total de um hipergrafo direcionado é a soma

$$|H| = \sum_{e \in E} |e|.$$

No hipergrafo direcionado  $H$  da figura 2.1,  $n = 10$ ,  $m = 8$  e  $|H| = 22$ .

**Def. 2.3.** Dado um hipergrafo direcionado  $H = (V, E)$ , e um hiper-arco  $e = (X, Y) \in E$ , chamamos  $X$  de **origem** e  $Y$  de **destino**, respectivamente denotados por  $\mathbf{Org}(e)$  e  $\mathbf{Dest}(e)$ .

Podemos usar esta notação também para conjuntos de hiper-arcos. Assim, se  $A$  é um conjunto de hiper-arcos, então

$$\begin{aligned} \mathbf{Org}(A) &= \bigcup_{e \in A} \mathbf{Org}(e); \\ \mathbf{Dest}(A) &= \bigcup_{e \in A} \mathbf{Dest}(e). \end{aligned}$$

**Def. 2.4** ([15]). Dado um hipergrafo direcionado  $H = (V, E)$  e um vértice  $v \in V$  chamamos de **hiper-arcos de entrada**, **hiper-arcos de saída**, e **estrela** de  $v$ , os hiper-arcos dos conjuntos  $\mathbf{BS}(v)$ ,  $\mathbf{FS}(v)$  e  $\mathbf{ST}(v)$ ,<sup>1</sup> respectivamente, definidos como:

$$\begin{aligned} \mathbf{BS}(v) &= \{e \mid v \in \mathbf{Dest}(e)\}; \\ \mathbf{FS}(v) &= \{e \mid v \in \mathbf{Org}(e)\}; \\ \mathbf{ST}(v) &= \{e \mid v \in e\}; \end{aligned}$$

Os conjuntos  $\mathbf{Org}$ ,  $\mathbf{Dest}$ ,  $\mathbf{BS}$  e  $\mathbf{FS}$  representam todas as relações de incidência existentes em um hipergrafo direcionado.

No hipergrafo direcionado da figura 2.1 temos, como exemplos destas definições, que  $\mathbf{Org}(e) = \{6, 7\}$ ,  $\mathbf{Dest}(g) = \{9\}$ ,  $\mathbf{BS}(8) = \{c, f\}$ ,  $\mathbf{FS}(3) = \{d, f\}$  e  $\mathbf{ST}(5) = \{b, c, g\}$ .

**Def. 2.5.** Dado um hipergrafo direcionado  $H = (V, E)$  e um vértice  $v \in V$ , o **grau de entrada**,  $\delta^-(v)$ , de  $v$  é o número de hiper-arcos de entrada de  $v$ , o **grau de saída**,  $\delta^+(v)$ , de  $v$  é o número de hiper-arcos de saída de  $v$ , e o **grau total**,  $\delta(v)$ ,

<sup>1</sup>Os termos  $\mathbf{BS}$ ,  $\mathbf{FS}$  e  $\mathbf{ST}$  se referem respectivamente aos termos em inglês *Backward Star*, *Forward Star* e *STar*.



(ou somente grau) de  $v$  é a soma destes dois últimos. Estes graus são denotados respectivamente por:

$$\delta^-(v) = |BS(v)|;$$

$$\delta^+(v) = |FS(v)|;$$

$$\delta(v) = |ST(v)|.$$

Observe que  $|H| = \sum_{v \in V} \delta(v)$ .

Na figura 2.1, analisando o vértice 5, encontramos que  $\delta^-(5) = 2$ ,  $\delta^+(5) = 1$  e  $\delta(5) = 3$ .

## 2.2 Sub-Hipergrafo e Classes

Aqui apresentamos o conceito de sub-hipergrafo, similar ao conceito de subgrafo, e algumas classes de hipergrafos direcionados.

**Def. 2.6.** Dado um hipergrafo direcionado  $H = (V, E)$ , um **sub-hipergrafo** de  $H$  é um hipergrafo direcionado  $H' = (V', E')$ , onde  $V' \subseteq V$  e  $E' \subseteq E$ .  $H'$  é dito próprio se  $H' \neq H$ .

Na figura 2.2 podemos ver um sub-hipergrafo do hipergrafo direcionado  $H$  da figura 2.1.

O conceito de sub-hipergrafo induzido também pode ser apresentado.

**Def. 2.7.** Dado um hipergrafo direcionado  $H = (V, E)$ , e um conjunto de hiper-arcos  $A \subseteq E$ , um **sub-hipergrafo de  $H$  induzido por  $A$**  é um sub-hipergrafo  $H' = (V', A)$ , onde

$$V' = \bigcup_{e \in A} (\text{Org}(e) \cup \text{Dest}(e)).$$

**Def. 2.8.** Dado um hipergrafo direcionado  $H = (V, E)$ , e um conjunto de vértices  $P \subseteq V$ , um **sub-hipergrafo de  $H$  induzido por  $P$**  é um sub-hipergrafo  $H' = (P, E')$ , onde

$$E' = \{e = (X, Y) \in E \mid (X \cup Y) \subseteq P\}.$$

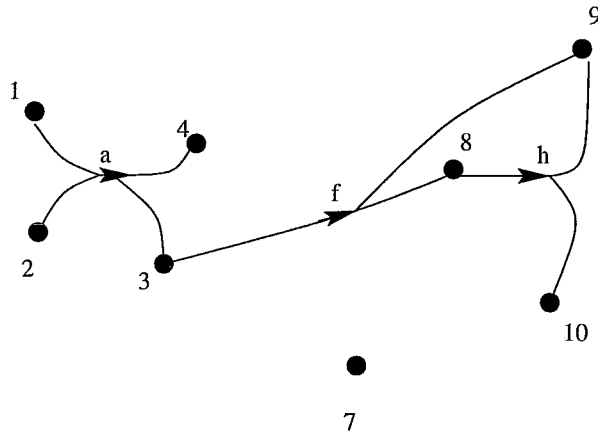


Figura 2.2: Sub-Hipergrafo de  $H$

Podemos definir algumas classes de hipergrafos direcionados, de acordo com os tipos de hiper-arcos. Estas classes foram apresentadas em [15], e se apresentam adequadas para algumas aplicações.

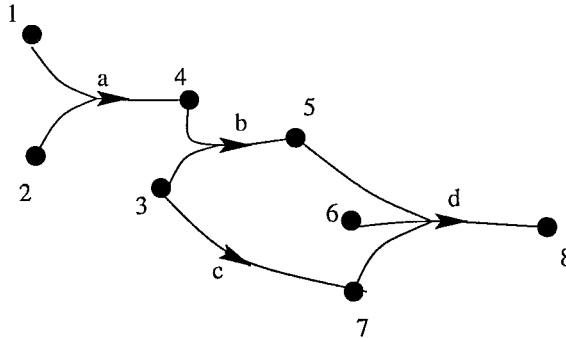


Figura 2.3: B-Grafo

**Def. 2.9** ([15]). *Seja um hipergrafo direcionado  $H = (V, E)$ .*

- (i) *Se  $e \in E$  é tal que  $|Dest(e)| = 1$ , então  $e$  é um **B-arco**;*
- (ii) *Se  $e \in E$  é tal que  $|Org(e)| = 1$ , então  $e$  é um **F-arco**;*
- (iii) *Se todo hiper-arco de  $H$  é um B-arco, então  $H$  é um **B-grafo**;*
- (iv) *Se todo hiper-arco de  $H$  é um F-arco, então  $H$  é um **F-grafo**;*
- (v) *Se todo hiper-arco de  $H$  ou é um B-arco, ou um F-arco, então  $H$  é um **BF-grafo**;*
- (vi) *Se  $e \in E$  é tal que é um B-arco e um F-arco, então  $e$  é um **arco** (simples);*

(vii) Se todo hiper-arco de  $H$  é um arco simples, então  $H$  é um **grafo direcionado**.

Os itens (vi) e (vii) deixam claro que um grafo direcionado é um caso particular de hipergrafos direcionados.

Note que, como um arco de um grafo direcionado é um F-arco e um B-arco ao mesmo tempo, um grafo direcionado é um BF-grafo.

As letras **B** e **F** usadas aqui representam as expressões *backward* e *forward*, respectivamente. Voltaremos a usar este tipo de notação mais adiante.

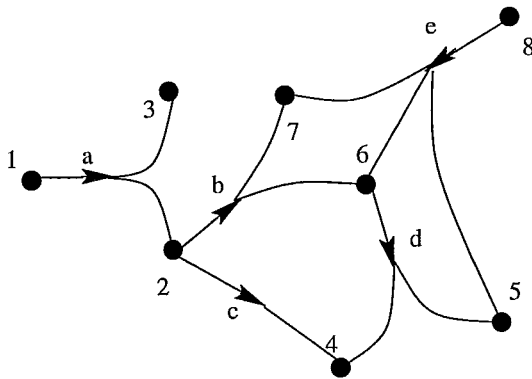


Figura 2.4: F-Grafo

Um B-grafo (veja figura 2.3) pode ser usado para modelar várias aplicações, entre elas HORN-SAT [15, 16, 17, 19, 7] e planejamento de montagem [18, 20]. A primeira referência a hipergrafos direcionados na literatura [5] os define exatamente como B-grafos.

Na figura 2.4 podemos ver um F-grafo. Perceba que um F-grafo é exatamente um B-grafo com os hiper-arcos invertidos. Este tipo de hipergrafo direcionado coincide com a definição de [47].

Na figura 2.5 podemos ver um BF-grafo.

Todo hipergrafo direcionado pode ser transformado em um BF-grafo, bastando para isso que, para cada hiper-arco  $e = (X, Y)$ , seja incluído no hipergrafo um novo vértice  $v_e$  e o hiper-arco  $e$  seja trocado pelos hiper-arcos  $e_B = (X, v_e)$  e  $e_F = (v_e, Y)$ . Na figura 2.6(a) podemos ver o hiper-arco  $e = (\{1, 2, 3\}, \{4, 5\})$  e na figura 2.6(b)

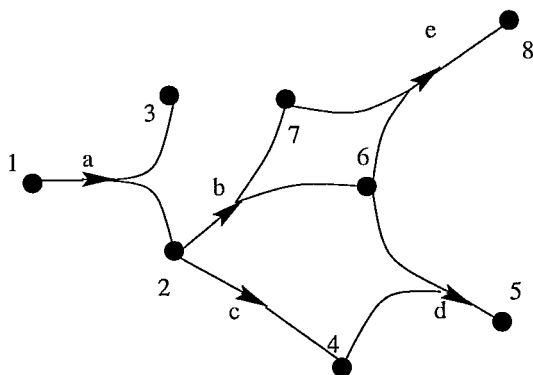


Figura 2.5: BF-Grafo

encontramos os hiper-arcos  $e_B = (\{1, 2, 3\}, v_e)$  e  $e_F = (v_e, \{4, 5\})$ .

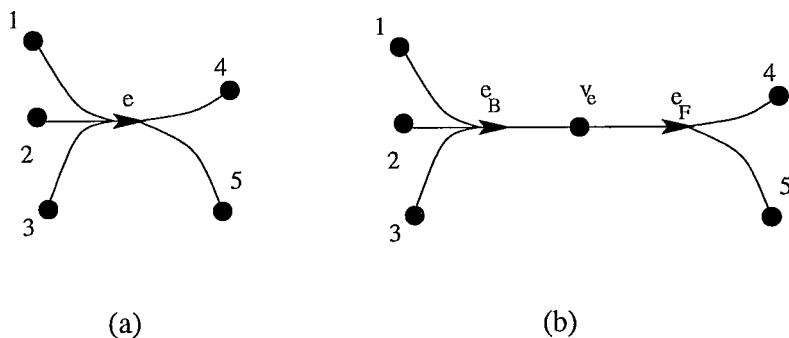


Figura 2.6: Transformação de um hiper-arco  $e = (X, Y)$  nos hiper-arcos  $e_B = (X, v_e)$  e  $e_F = (v_e, Y)$  [16]

## 2.3 Adjacência e Hiper-caminhos

Em grafos o conceito de adjacência entre arcos é bastante simples, mas se apresenta mais complexo em hipergrafos direcionados.

**Def. 2.10.** *Dados os hiper-arcos  $e$  e  $f$ , dizemos que:*

$f$  é **adjacente** a  $e$  quando  $Dest(e) \cap Org(f) \neq \emptyset$ ;

$f$  é **B-adjacente** a  $e$  quando  $Dest(e) \supseteq Org(f)$ ;

$f$  é **F-adjacente** a  $e$  quando  $Dest(e) \subseteq Org(f)$ ;

$f$  é **BF-adjacente** a  $e$  e quando  $Dest(e) = Org(f)$ ;

Mais uma vez as letras **B** e **F** aparecem, e desta vez fica mais claro o que querem dizer. Veja, por exemplo, que se  $f$  é B-adjacente a  $e$ , então o hiper-arco  $f$  é totalmente ligado ao hiper-arco  $e$  por sua parte anterior (*backward*). Da mesma forma, se  $f$  é F-adjacente a  $e$ , então o hiper-arco  $e$  é totalmente ligado ao hiper-arco  $f$  por sua parte posterior (*forward*).

Perceba que no caso dos grafos direcionados, todos estes conceitos de adjacência são equivalentes.

Mais uma vez usando o hipergrafo direcionado da figura 2.1, encontramos que  $c$  é B-adjacente a  $a$ ,  $e$  é F-adjacente a  $d$ , e  $g$  é BF-adjacente a  $b$ .

Um dos conceitos mais importantes, e que deriva do conceito de adjacência, é o conceito de hiper-caminho. Este conceito é um dos mais empregados e também um dos que mais variam na literatura. Nossa definição de hiper-caminho é bastante genérica, e dela podemos derivar definições mais específicas.

**Def. 2.11.** *Dado um hipergrafo direcionado  $H = (V, E)$ , e dois vértices  $s$  e  $t$ , um **hiper-caminho** de  $s$  a  $t$ , de tamanho  $k$ , é uma seqüência de hiper-arcos  $C = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$  onde  $s \in Org(e_{i_1})$  e  $t \in Dest(e_{i_k})$ , e para cada hiper-arco  $e_{i_p}$  de  $C$ , com  $1 \leq p \leq k$ , temos que:*

$$Org(e_{i_p}) \cap (Dest(\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{p-1}}\}) \cup \{s\}) \neq \emptyset;$$

$$Dest(e_{i_p}) \cap (Org(\{e_{i_{p+1}}, e_{i_{p+2}}, \dots, e_{i_k}\}) \cup \{t\}) \neq \emptyset.$$

*Denotamos  $Org(e_{i_1})$  e  $Dest(e_{i_k})$  de  $Org(C)$  e  $Dest(C)$ , respectivamente.*

Dizemos que um vértice  $y$  está **hiper-conectado** ou simplesmente **conectado** ao vértice  $x$  se existe um hiper-caminho de  $x$  a  $y$ .

Na figura 2.7 podemos ver um exemplo de hiper-caminho no hipergrafo da figura 2.1. O hiper-caminho de 1 a 9,  $C = (a, c, f, g)$  tem origem  $\{1, 2\}$  e destino  $\{9\}$ . Note que o hiper-arco  $f$  pode ser retirado de  $C$  que continuamos com um hiper-caminho com mesmos origem e destino.

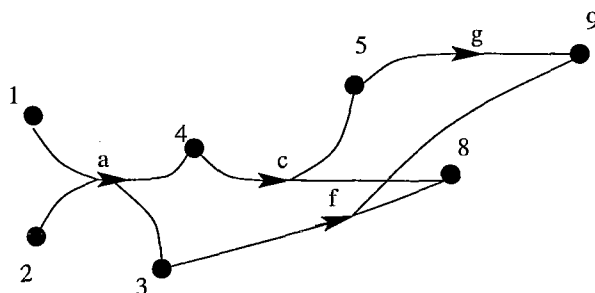


Figura 2.7: Hiper-caminho  $C = (a, c, f, g)$

Os hiper-caminhos são estruturas bastante flexíveis, e são generalizações de caminhos em grafos. A noção de conectividade se baseia nestes hiper-caminhos.

Perceba também que, dados  $s$  e  $t$ , um hiper-caminho  $C$  de  $s$  a  $t$  não é necessariamente único. E, além disso, dado um hiper-caminho  $C$  de  $s$  a  $t$ , a origem e o destino também não são únicos, e  $s$  e  $t$  podem ser trocados por outros vértices de  $Org(C)$  e  $Dest(C)$ , respectivamente.

Se o hipergrafo for de fato um grafo, um hiper-caminho não será necessariamente um caminho. Veja figura 2.8 que o hiper-caminho  $(a, b, c, d, e)$ , apesar de ser formado apenas por arcos (como em grafos), não é um caminho como em grafos. Uma versão mais restrita de hiper-caminho pode ser definida de forma que seja equivalente a um caminho quando tivermos um grafo.

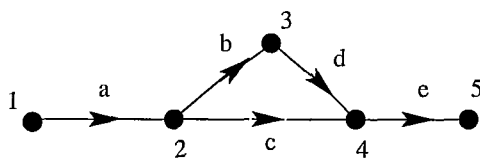


Figura 2.8: Hiper-caminho em um grafo direcionado

Alguns autores usam a minimalidade [17, 5] como artifício para que seus hiper-caminhos sejam caminhos quando restritos a grafos. Entretanto a minimalidade restringe demais os hiper-caminhos, além de causar alguns problemas relacionados com percursos (veja capítulo 4 e seção 3.8).

Não existe na literatura nenhuma definição de hiper-caminho que satisfaça o requisito acima sem usar a minimalidade. Vamos apresentar uma nova propriedade de

hiper-caminhos que faz exatamente isso.

Primeiramente vamos definir uma propriedade que um conjunto de hiper-arcos pode ter.

**Def. 2.12.** *Seja  $C$  um conjunto de hiper-arcos e  $H_C$  o hipergrafo direcionado induzido por  $C$ . O conjunto  $C$  terá a propriedade **S** se, para todo vértice  $x$  de  $H_C$ ,  $|FS(x)| \leq 1$  e  $|BS(x)| \leq 1$ , ou seja, cada vértice aparece no máximo em um conjunto origem e um conjunto destino de  $C$ .*

Com esta propriedade podemos apresentar um novo tipo de hiper-caminho.

**Def. 2.13.** *Se  $C$  for um hiper-caminho e, como conjunto, tiver a propriedade **S**, então chamamos  $C$  de um **S-caminho**.*

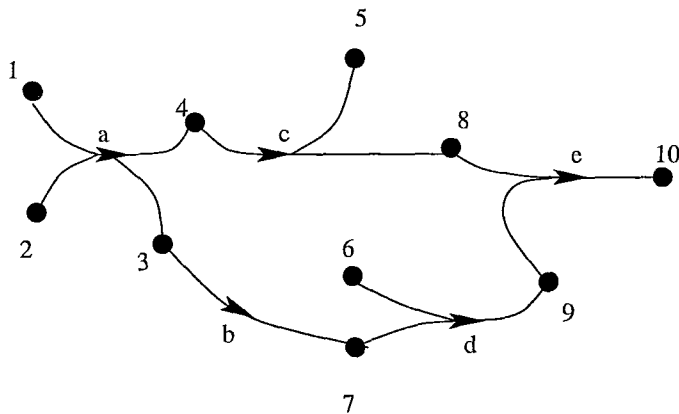


Figura 2.9: S-caminho  $(a, b, c, d, e)$

Veja um exemplo de S-caminho na figura 2.9. Observe que neste exemplo o S-caminho não é minimal. Os hiper-arcos  $b$  e  $d$  podem aparecer juntos com o hiper-arco  $c$  porque usam vértices distintos, e isso só é possível pelo fato do hiper-arco  $a$  ter dois vértices no destino e o hiper-arco  $e$  ter dois vértices na origem.

Se todos os hiper-arcos de um S-caminho fossem arcos teríamos um caminho simples de grafo. De fato, o que queremos está enunciado no seguinte lema.

**Lema 2.1.** *Se cada hiper-arco  $a$  de um S-caminho for um arco ( $|Org(a)| = 1$  e  $|Dest(a)| = 1$ ), então este S-caminho será um caminho simples (como em grafos).*

**Prova:** Pelas definições 2.11, 2.12 e 2.13. □

Na literatura [15, 16, 17] encontramos outras duas propriedades que os hiper-caminhos podem ter. Tais propriedades são referentes ao tipo de adjacência usada, e portanto dependem da ordem em que os hiper-arcos são dispostos.

Apresentamos aqui versões diferentes destas propriedades, muito embora mantenham as características principais das apresentadas na literatura. Veja no capítulo 3 como relacionar estas definições com as de outros autores.

**Def. 2.14.** Um hiper-caminho  $C$ , de  $s$  a  $t$ , de tamanho  $k$ , tem a propriedade **B** se, para cada hiper-arco  $e_{i_p}$  de  $C$ , com  $1 \leq p \leq k$ , temos que:

$$Org(e_{i_p}) \subseteq (Dest(\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{p-1}}\}) \cup \{s\}).$$

Chamamos um hiper-caminho com esta propriedade de **B-caminho**.

Dizemos que um vértice  $y$  está **B-conectado** ao vértice  $x$  se existe um B-caminho de  $x$  a  $y$ .

Podemos ver na figura 2.10 o B-caminho de 4 a 10,  $(c, h)$ . Perceba que o vértice destino 10 não está conectado ao vértice 5.

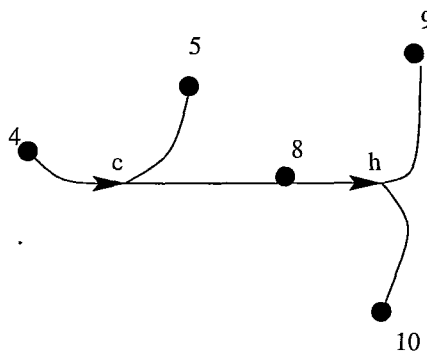


Figura 2.10: B-caminho  $C = (c, h)$

**Def. 2.15.** Um hiper-caminho  $C$ , de  $s$  a  $t$ , de tamanho  $k$ , tem a propriedade **F** se, para cada hiper-arco  $e_{i_p}$  de  $C$ , com  $1 \leq p \leq k$ , temos que:

$$Dest(e_{i_p}) \subseteq (Org(\{e_{i_{p+1}}, e_{i_{p+2}}, \dots, e_{i_k}\}) \cup \{t\}).$$



Chamamos um hiper-caminho com esta propriedade de **F-caminho**.

Dizemos que um vértice  $y$  está **F-conectado** ao vértice  $x$  se existe um F-caminho de  $x$  a  $y$ .

Na figura 2.11 temos o F-caminho  $(d, e)$ , ligando os vértices 3 e 10. Perceba que o vértice 6 não está conectado ao vértice origem 3.

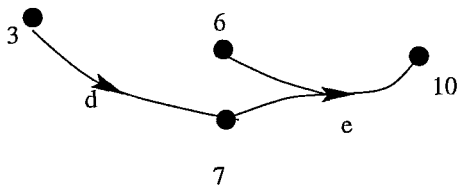


Figura 2.11: F-caminho  $C = (d, e)$

Um hiper-caminho  $C$  pode ter qualquer combinação destas três propriedades (S, B, F). Para representar um hiper-caminho com estas propriedades, usamos as letras correspondentes antes da palavra caminho (eg. SB-caminho). A omissão de qualquer uma das letras não implica que o hiper-caminho não tenha a propriedade correspondente. Ou seja, um SF-caminho pode ser chamado de S-caminho, isso quando o propriedade F não for relevante. Da mesma forma, os demais conceitos associados com hiper-caminhos, tais como conectividade, também podem aparecer com esta notação.

Como exemplo desta notação, podemos apresentar um tipo especial de hiper-caminho, o **BF-caminho**, que é ao mesmo tempo um B-caminho e um F-caminho.

Dizemos que um vértice  $y$  está **BF-conectado** ao vértice  $x$  se existe um BF-caminho de  $x$  a  $y$ .

Na figura 2.12 encontramos o BF-caminho  $(a, b, c, d, e, f)$ .

## 2.4 Alguns resultados sobre Hiper-caminhos

Apresentamos aqui alguns resultados relacionados com as propriedades B e F. Inicialmente tratamos de subsequências, e depois vemos resultados sobre conectividade.

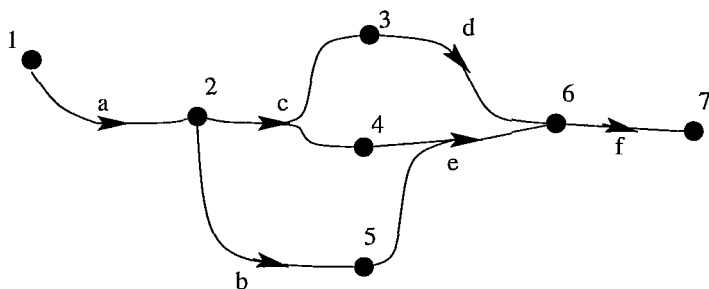


Figura 2.12: BF-caminho  $C = (a, b, c, d, e, f)$

Como todo hiper-caminho é uma seqüência, podemos analisar as subseqüências e ver quando elas formam hiper-caminhos (**sub-caminhos**) e de qual tipo.

Vejamos então as subseqüências iniciais de B-caminhos.

**Lema 2.2.** *Dado um B-caminho  $C = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$  de tamanho  $k$ , toda subseqüência de  $C$  da forma  $C_l = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_l})$  com  $1 \leq l \leq k$  é um B-caminho.*

**Prova:** Pela definição de B-caminho (definição 2.14). □

Da mesma forma, podemos olhar as subseqüências finais dos F-caminhos.

**Lema 2.3.** *Dado um F-caminho  $C = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$  de tamanho  $k$ , toda subseqüência de  $C$  da forma  $C_l = (e_{i_l}, e_{i_{l+1}}, \dots, e_{i_k})$  com  $1 \leq l \leq k$  é um F-caminho.*

**Prova:** Pela definição de F-caminho (definição 2.15). □

Quanto a conectividade, temos resultados também interessantes.

Podemos afirmar que todos os vértices do sub-hipergrafo induzido por um B-caminho  $C$  de  $s$  a  $t$  estão B-conectados a  $s$ . E neste caso a origem de  $C$  é única.

**Lema 2.4.** *Seja  $G = (V, E)$  um hipergrafo direcionado. Dado um B-caminho de tamanho  $k$  de  $s$  a  $t$ ,  $C$ , em  $G$ , seja  $G' = (V', E')$  o sub-hipergrafo de  $G$  induzido por  $C$ . Todo vértice  $x \in V'$ ,  $x \neq s$ , está B-conectado a  $s$ .*

**Prova:** Suponha que  $C = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ . Se  $x \in V'$ ,  $x \neq s$ , então  $x \in e_p$  para algum  $p$  entre 1 e  $k$ . Como  $C$  é um B-caminho, todo vértice que aparece na origem de

algum hiper-arco, já apareceu no destino de outro, ou é igual a  $s$ , assim, posso supor que  $x \in Dest(e_p)$ . Então a sequência  $C_p = (e_1, e_2, \dots, e_p)$  é um B-caminho de  $s$  a  $x$  (lema 2.2) e portanto  $x$  está B-conectado a  $s$ .  $\square$

Podemos ver que a origem de  $C$  é única pela definição, já que  $Org(e_1) \subseteq \{s\}$ .

Em um F-caminho  $C$ , de  $s$  a  $t$ ,  $t$  está F-conectado a todos os vértices do sub-hipergrafo induzido por  $C$ . E o destino de  $C$  é único.

**Lema 2.5.** *Seja  $G = (V, E)$  um hipergrafo direcionado. Dado um F-caminho de tamanho  $k$  de  $s$  a  $t$ ,  $C$ , em  $G$ , seja  $G' = (V', E')$  o sub-hipergrafo de  $G$  induzido por  $C$ . O vértice  $t$  está F-conectado a todo vértice  $x \in V'$ ,  $x \neq t$ .*

**Prova:** Basta usar o mesmo raciocínio da prova do lema 2.4, desta vez garantindo que  $x \in Org(e_p)$ , pegar a sequência  $C_p = (e_p, e_{p+1}, \dots, e_k)$ , e usar o lema 2.3.  $\square$

Do mesmo modo que nos B-caminhos, podemos ver que o destino de  $C$  é único pela definição, já que  $Dest(e_k) \subseteq \{t\}$ .

Perceba que tudo que acontece com um B-caminho, acontece com um F-caminho de forma invertida. Isso é devido ao fato que realmente um F-caminho de  $s$  a  $t$  se transforma em um B-caminho de  $t$  a  $s$  ao invertermos as orientações dos hiper-arcos (e da sequência).

No caso dos BF-caminhos, os lemas 2.4 e 2.5 continuam valendo, já que um BF-caminho é ao mesmo tempo um B-caminho e um F-caminho. Entretanto vale observar que neste caso temos um único  $s$  e um único  $t$ , e é exatamente por este fato que os BF-caminhos são importantes em algumas aplicações.

## 2.5 Ciclos

O conceito de ciclo tem grande importância em algumas aplicações, e esta definição é bem genérica, sendo, como nos outros casos, uma generalização dos ciclos em grafos.

**Def. 2.16.** Um **ciclo** é um hiper-caminho  $C$  onde  $Org(C) \cap Dest(C) \neq \emptyset$ .

**Def. 2.17.** Em um ciclo  $C$ , chamamos o último hiper-arco de hiper-arco de **retorno**.

**Def. 2.18.** Um hipergrafo direcionado é dito **acíclico** se nenhum subconjunto de hiper-arcos formar um ciclo.

**Def. 2.19.** Um hiper-caminho é **acíclico** se nenhum subconjunto de seus hiper-arcos formar um ciclo.

Quando levamos em consideração as propriedades **S**, **B** e **F**, os ciclos ganham mais detalhes que merecem um estudo mais aprofundado.

Observe que S-caminhos podem ter ciclos, como podemos ver na figura 2.13.

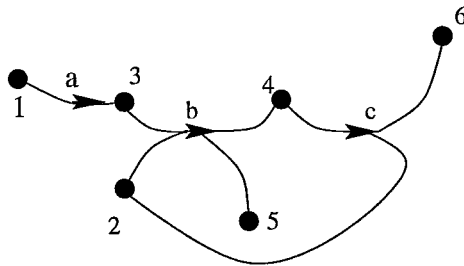


Figura 2.13: S-caminho com um ciclo

Já nos SB-caminhos os ciclos são bem mais restritos. Veja o lema 2.6.

**Lema 2.6.** Em um SB-caminho só pode existir um ciclo e este deve ser formado por um retorno ao vértice origem.

**Prova:** Seja  $C = (e_1, e_2, \dots, e_k)$  um SB-caminho com origem  $s$ . Como  $C$  é um S-caminho, nenhum vértice pode aparecer em mais de um conjunto destino, e portanto, os retornos só podem fechar ciclos com vértices que não apareceram nos destinos dos hiper-arcos anteriores (seguindo a ordem de  $C$ ).

Como  $C$  é um B-caminho, para cada hiper-arco  $e_i$ , com  $i = 2, \dots, k$ , cada um dos vértices em  $Org(e_i)$  têm um hiper-arco  $e_j$  chegando tal que  $j < i$ . Só o vértice origem  $s = Org(e_1)$  pode não ter nenhum hiper-arco chegando.

Se  $C$  tem um ciclo, e  $e_{i_c}$  é o hiper-arco que fecha este ciclo, então  $s \in Dest(e_{i_c})$ , e nenhum outro vértice que aparece nos hiper-arcos  $e_1, e_2, \dots, e_{i_c}$  pode estar em

$Dest(e_{i_c})$ . E neste caso o vértice  $s$  também tem um hiper-arco chegando, logo um segundo ciclo não pode existir.  $\square$

Situações semelhantes acontecem também com SF-caminhos.

# Capítulo 3

## Progresso Teórico

Apresentamos aqui os conceitos mais importantes que foram definidos nos diversos trabalhos sobre hipergrafos direcionados, destacando a evolução ao longo dos artigos. Estes conceitos são apresentados com uma notação unificada para facilitar a comparação, e não estão apresentados em ordem cronológica de publicação, e sim agrupados de acordo suas semelhanças.

Ao invés de simplesmente apresentar cada conceito definido por outros autores, em alguns pontos fazemos uma detalhada comparação com os conceitos apresentados no capítulo 2 e entre os diferentes autores.

Como já mencionado no capítulo 1, existem poucos grupos trabalhando com hipergrafos direcionados. São dois grandes grupos de pesquisadores, de onde saíram boa parte dos trabalhos, e alguns pesquisadores isolados. Dentre os pesquisadores isolados encontramos poucos que não fazem referência a nenhum dos dois grupos.

Estes dois grandes grupos são os grupos liderados por **Ausiello** [5, 6] e por **Gallo** [15, 16, 17], ambos na Itália. Embora tenham chegado a conceitos distintos, eles se referenciam mutuamente.

Entre os trabalhos de pesquisadores isolados destacamos o trabalho de **Woeginger** [47], que foi o único trabalho encontrado que não é direcionado por aplicações, sendo bastante teórico. Além disso este trabalho não referencia nenhum outro sobre hipergrafos direcionados.

Encontramos também os trabalhos [27] e [39] que não fazem referência aos grupos já mencionados, apesar de serem relativamente recentes. Entretanto são voltados para aplicações e não trazem avanço teórico significativo em relação aos hipergrafos direcionados.

Vamos analisar os conceitos apresentados na literatura e fazer uma comparação com o que queremos que seja a teoria de hipergrafos direcionados.

Inicialmente apresentamos na seção 3.1 os diversos conceitos de hipergrafo direcionado, destacando as diferenças entre os grupos. Na seção 3.2 comentamos a evolução dos conceitos de hiper-caminhos e ciclos. Nestes conceitos está a maior diferença entre os trabalhos da literatura. Encontramos diferenças até nos trabalhos de um mesmo grupo de autores. Já na seção 3.3 apresentamos as idéias de representação mínima e o conceito de equivalência entre hipergrafos direcionados. Em seguida, na seção 3.4, discutimos o conceito de hipergrafos ponderados e as diversas métricas associadas a ele, com as quais podemos falar de problemas de otimização envolvendo hipergrafos direcionados. Na seção 3.5 é introduzido o conceito de arborescência, muito similar ao conceito de árvore. O conceito de corte é apresentado na seção 3.6. Por fim, algumas comparações são feitas na seção 3.8.

## 3.1 Definições de Hipergrafos Direcionados

Na literatura encontramos quatro diferentes definições de hipergrafos direcionados, podemos entretanto relacioná-las com a definição que adotamos.

A primeira definição de hipergrafo direcionado aparece em [5] (veja figura 3.1), e é mais restrita do que a definição 2.1.

**Def. 3.1 (Ausiello (1985) [5]).** *Um hipergrafo direcionado é uma dupla  $H = (V, E)$  onde  $V$  é o conjunto de vértices e  $E$  é um conjunto de pares  $(X, i)$ , chamados hiper-arcos, tais que  $i$  é um vértice de  $V$  e  $X$  é subconjunto de  $V$ .*

Esta definição tem origem nas dependências funcionais [4], estudadas em bancos e dados, e é um caso particular de hipergrafo direcionado. Perceba que esta definição

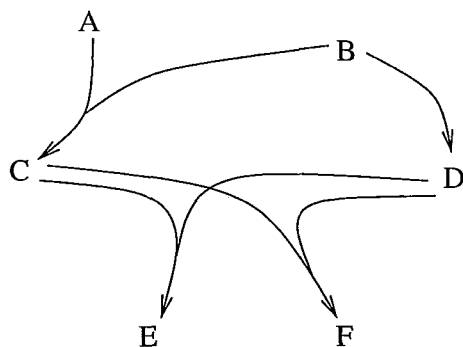


Figura 3.1: Hipergrafo direcionado segundo Ausiello (1985)

coincide com os B-grafos, e serão assim referenciados.

Em [15] uma definição bem mais genérica é introduzida, e os hipergrafos direcionados como os da definição 2.1 aparecem como uma subclasse com o nome de 2-grafos. Neste artigo o conceito de hipergrafo direcionado tem os hiper-arcos formados de camadas (figura 3.2).

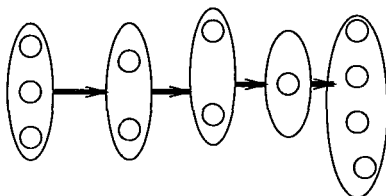


Figura 3.2: Hiper-arco em camadas

**Def. 3.2 (Gallo (1989) [15]).** Um **hipergrafo direcionado** é um par  $H = (V, E)$  onde  $V$  é um conjunto de vértices e  $E$  um conjunto de hiper-arcos. Um hiper-arco  $e \in E$  é uma sequência  $(L_{e_1}, L_{e_2}, \dots, L_{e_{r_e}})$  de  $r_e$  subconjuntos não-vazios, disjuntos, de  $V$ . Cada subconjunto é uma camada do hiper-arco.

Quando os hiper-arcos têm somente 2 camadas, são chamados de 2-arcos. Quando um hipergrafo só possui 2-arcos, é chamado de 2-grafo.

É em [15] que são definidas pela primeira vez as classes B-grafos, F-grafos e BF-grafos (definição 2.9).

Em [47] encontramos mais uma definição de hipergrafo direcionado, entretanto esta definição coincide com os F-grafos. Este é um dos artigos que não faz parte, nem



referencia, nenhum dos grandes grupos.

**Def. 3.3 (Woeginger (1992) [47]).** *Um hipergrafo direcionado é uma dupla  $H = (V, E)$  onde  $V$  é o conjunto de vértices e  $E$  é um conjunto de pares  $(i, X)$ , chamados hiper-arcos, tais que  $i$  é um vértice de  $V$  e  $X$  é subconjunto de  $V$ .*

Em [17] encontramos a definição que apresentamos como a definição 2.1.

Dois outros artigos, feitos de forma independente dos dois grandes grupos podem ser mencionados. O primeiro [27] apresenta uma definição de hipergrafo direcionado equivalente a definição de [17] (definição 2.1). Já o segundo [39] define hipergrafo direcionado como em [5] (B-grafo).

Embora a definição 3.2 seja mais genérica, a definição escolhida para ser a definição padrão (neste trabalho) se mostra bastante adequada. Principalmente pelo fato de que os hipergrafos direcionados segundo a definição 3.2 podem ser transformados em hipergrafos direcionados, trocando cada hiper-arco em camadas por alguns hiper-arcos.

Na tabela 3.1 podemos ver um resumo das definições da literatura e suas equivalentes aqui apresentadas.

Definição da Literatura	Definição equivalente
Def. 3.1 [5]	B-grafo
Def. 3.2 [15]	—
Def. 3.3 [47]	F-grafo
Def. 2.1 [17]	Hipergrafo Direcionado

Tabela 3.1: Definições de hipergrafos direcionados

## 3.2 Definições de Hiper-caminhos e Ciclos

Os primeiros conceitos de hiper-caminhos aparecem em [15, 16], e são redefinidos em [17]. O artigo [17] é uma versão reduzida (adaptada) de [15] e [16]. Em linhas gerais, o conteúdo dos três é basicamente o mesmo, entretanto existem algumas diferenças

entre as definições. Apresentaremos aqui os conceitos de [16] e [17], além dos conceitos apresentados em [9] e [7].

Começamos apresentando os conceitos de hiper-caminhos mais gerais, ou seja, que são comparáveis com a nossa definição de hiper-caminho. Depois vemos os conceitos de ciclos, e terminamos com os conceitos de hiper-caminhos mais específicos, que podem ser comparados com os nossos B-caminhos, F-caminhos e BF-caminhos.

### 3.2.1 Hiper-caminhos

Nos artigos [16, 17] é apresentado o conceito de caminho, que na prática é o nosso conceito de hiper-caminho com o conceito fraco de adjacência.

**Def. 3.4 (Gallo (1990) [16]).** *Um hiper-caminho é uma sequência alternada de conjuntos não-vazios<sup>1</sup> de vértices e hiper-arcos,  $(s, e_1, V_1, e_2, V_2, \dots, e_k, t)$  onde o primeiro e o último elementos da sequência,  $s$  e  $t$ , são vértices (e não conjuntos), e  $s \in \text{Org}(e_1)$ ,  $t \in \text{Dest}(e_k)$ , e para  $i = 1, \dots, k - 1$ ,  $V_i \subseteq \text{Dest}(e_i) \cap \text{Org}(e_{i+1})$ .*

Em [17] encontramos uma definição mais simples, onde os conjuntos de vértices são trocados por vértices.

**Def. 3.5 (Gallo (1993) [17]).** *Um hiper-caminho é uma sequência alternada de vértices e hiper-arcos,  $(s, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_k, t)$  onde  $s \in \text{Org}(e_1)$ ,  $t \in \text{Dest}(e_k)$ , e para  $i = 1, \dots, k - 1$ ,  $v_i \in \text{Dest}(e_i) \cap \text{Org}(e_{i+1})$ .*

Claramente estas duas definições são casos particulares da definição de hiper-caminho (definição 2.11), onde as intersecções entre os hiper-arcos consecutivos são explicitamente determinados.

**Lema 3.1.** *Todo hiper-caminho segundo Gallo (1993) é um hiper-caminho segundo Gallo (1990).*

---

<sup>1</sup>O termo “não-vazios” não faz parte da definição original, mas entendemos que seu uso se faz necessário.

**Prova:** Basta que consideremos os conjuntos da definição de hiper-caminho segundo Gallo (1990) como os conjuntos unitários contendo os vértices correspondentes da definição de hiper-caminho segundo Gallo (1993).  $\square$

**Lema 3.2.** *Dado um hipergrafo direcionado  $G = (V, E)$  e um par de vértices  $x, y \in V$ ,  $y$  está conectado a  $x$  segundo Gallo (1990) se e somente se  $y$  está conectado a  $x$  segundo Gallo (1993).*

**Prova:**

( $\rightarrow$ )

Se existe um hiper-caminho,  $C$ , segundo Gallo (1990) de  $x$  a  $y$ , então existe pelo menos um hiper-caminho,  $C'$ , segundo Gallo (1993) de  $x$  a  $y$  formado escolhendo um vértice de cada conjunto de vértices de  $C$ .

( $\leftarrow$ )

Pelo lema 3.1.  $\square$

Se destacarmos a sequência de hiper-arcos, veremos que em ambas as definições acima temos um hiper-caminho como o da nossa definição 2.11.

**Lema 3.3.** *Para todo hiper-caminho  $C$  segundo Gallo (1990) a sequência de hiper-arcos de  $C$  forma um hiper-caminho.*

**Prova:** Pela definição de hiper-caminho (definição 2.11).  $\square$

**Teorema 3.4.** *Dado um hipergrafo direcionado  $G = (V, E)$ , e dois vértices,  $x, y \in V$ ,  $y$  está conectado a  $x$  se e somente se  $y$  está conectado a  $x$  segundo Gallo (1990).*

**Prova:**

( $\rightarrow$ )

Seja  $C = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$ , um hiper-caminho de  $x$  a  $y$ , queremos achar um hiper-caminho,  $C'$ , segundo Gallo (1990) de  $x$  a  $y$ . Faremos  $C' = (x, e_{l_1}, v_{l_1}, e_{l_2}, v_{l_2}, \dots,$

$e_{l_q}, y$ ). Faça  $l_1 = i_1$ . Se  $y \in Dest(e_{l_1})$  então  $q = 1$ . Senão, continue, fazendo  $l_2 = i_p$ , com

$$p = \max\{j | Dest(e_{l_1}) \cap Org(e_{i_j}) \neq \emptyset\}.$$

Se  $y \in Dest(e_{l_2})$  então  $q = 2$ . Senão, continue até chegar ao final. Podemos ver que este procedimento chega ao fim pela definição de hiper-caminho. Os vértices  $v_{l_1}, v_{l_2}, \dots, v_{l_{q-1}}$  podem ser escolhidos dentre os vértices das respectivas intersecções.

( $\leftarrow$ )

Pelo lema 3.3. □

Pelo teorema 3.4 e pelo lema 3.2, podemos ver que, apesar das diferenças nas definições, os conceitos de conectividade são equivalentes.

### 3.2.2 Ciclos

O próximo conceito a ser estudado é o conceito de ciclos, que também sofreu alterações de [16] para [17]. A diferença é pequena, mas significativa.

**Def. 3.6 (Gallo (1990) [16]).** *Um ciclo é um hiper-caminho que começa e termina no mesmo vértice.*

Em [17] o conceito de ciclo fica mais amplo.

**Def. 3.7 (Gallo (1993) [17]).** *Um ciclo é um hiper-caminho onde o último vértice está na origem do primeiro hiper-arco.*

**Lema 3.5.** *Todo ciclo segundo Gallo (1990) é um ciclo segundo Gallo (1993).*

**Prova:** Se o último vértice é igual ao primeiro então ele está na origem do primeiro hiper-arco. □

Estas definições são restrições à definição 2.16, onde só é preciso que o destino do último hiper-arco tenha intersecção com a origem do primeiro.

**Lema 3.6.** *Todo ciclo segundo Gallo (1993) é um ciclo.*

**Prova:** Se o último vértice está na origem do primeiro hiper-arco então a intersecção da origem do primeiro hiper-arco com o destino do último hiper-arco não é vazia.  $\square$

Assim, se dizemos que um hipergrafo direcionado é acíclico em uma das definições aqui apresentadas, então ele é acíclico em todas as outras. O mesmo não podemos afirmar para hiper-caminhos (segundo Gallo (1990) ou Gallo (1993)), já que o hipergrafo induzido pelos hiper-arcos de um hiper-caminho acíclico segundo Gallo (1993) pode conter um ciclo. Veja na figura 3.3 o hiper-caminho  $C = (1, a, 2, b, 4, c, 5, d, 6)$  que é acíclico, já que nenhuma subsequência de  $C$  forma um ciclo. Entretanto, o hipergrafo induzido pelos hiper-arcos  $\{a, b, c, d\}$  não é acíclico pois contém um ciclo devido ao vértice 7.

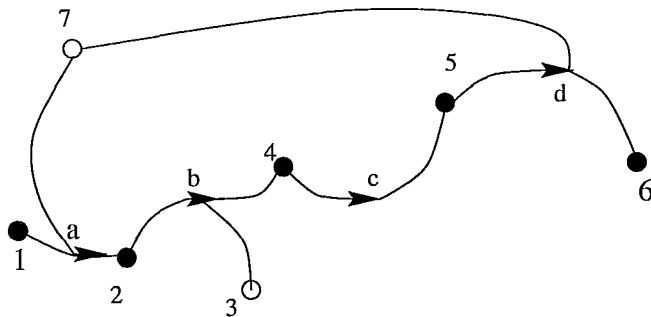


Figura 3.3: Hiper-caminho acíclico segundo Gallo (1993)

**Teorema 3.7.** *Se existe um hiper-caminho  $C$ , acíclico, de  $x$  a  $y$ , então existe um hiper-caminho  $C'$ , segundo Gallo (1993), de  $x$  a  $y$  que também é acíclico.*

**Prova:** Um hiper-caminho  $C$  é dito acíclico se nenhum subconjunto de hiper-arcos de  $C$  formar um ciclo. Pela prova do teorema 3.4 podemos afirmar que existe um hiper-caminho segundo Gallo (1993) de  $x$  a  $y$  restrito aos hiper-arcos de  $C$ , e portanto não contém um ciclo.  $\square$

Aqui podemos ver que os conceitos de ciclos são distintos, mas a existência ou não de ciclos em um hipergrafo direcionado vale para todas as definições. Isso se deve

ao fato de que as diferenças estão relacionadas em como o ciclo está imerso em um hiper-caminho.

### 3.2.3 B-caminhos, F-caminhos e BF-caminhos

Os conceitos de hiper-caminhos mais específicos da literatura aparecem em [15, 16], e em [9, 7]. E, da mesma forma que os conceitos mais gerais, foram sofrendo alterações.

Em [15, 16] aparecem os conceitos de B-caminho, F-caminho e BF-caminho. Perceba que estas definições usam os termos **acíclico** e **conectado** que, como visto na seção 3.2.1, não dependem de qual definição de ciclo ou hiper-caminho estamos usando.

**Def. 3.8 (Gallo (1990) [16]).** Um **B-caminho** de  $s$  a  $t$  em um hipergrafo direcionado  $H = (V, E)$  é definido como um sub-hipergrafo de  $H$  minimal acíclico  $C_{st} = (V_{C_{st}}, E_{C_{st}})$  tal que:

$$s, t \in V_{C_{st}} = \bigcup_{e \in E_{C_{st}}} e \subseteq V; \quad (3.1)$$

$$x \in V_{C_{st}} \rightarrow x \text{ é conectado a } s \text{ em } C_{st}. \quad (3.2)$$

**Def. 3.9 (Gallo (1990) [16]).** Um **F-caminho** de  $s$  a  $t$  em um hipergrafo direcionado  $H = (V, E)$  é definido como um sub-hipergrafo de  $H$  minimal acíclico  $C_{st} = (V_{C_{st}}, E_{C_{st}})$  tal que, além da condição 3.1 acima satisfaz:

$$x \in V_{C_{st}} \rightarrow t \text{ é conectado a } x \text{ em } C_{st}. \quad (3.3)$$

**Def. 3.10 (Gallo (1990) [16]).** Um **BF-caminho** é um B-caminho e um F-caminho ao mesmo tempo.

Um certo vértice  $y$  é dito B-conectado (F-conectado, BF-conectado) ao vértice  $x$  se existe um B-caminho (F-caminho, BF-caminho) de  $x$  a  $y$ .

Podemos comparar os B-caminhos segundo Gallo (1990) com os nossos B-caminhos. Comparações do mesmo tipo também podem ser feitas com os F-caminhos e os BF-caminhos, entretanto vamos nos restringir aos B-caminhos, já que as demais são muito semelhantes.

**Teorema 3.8.** *Dado um hipergrafo  $H = (V, E)$ , um sub-hipergrafo  $C_{st}$  de  $H$  é um B-caminho de  $s$  a  $t$  segundo Gallo (1990) se e somente se for um sub-hipergrafo induzido por um B-caminho minimal acíclico de  $s$  a  $t$ .*

**Prova:**

( $\rightarrow$ )

Seja  $C_{st} = (V_{C_{st}}, E_{C_{st}})$  um B-caminho de  $s$  a  $t$  segundo Gallo (1990). Para que  $C_{st}$  seja um sub-hipergrafo induzido por um B-caminho acíclico de  $s$  a  $t$ , basta que o conjunto dos hiper-arcos de  $C_{st}$  forme tal B-caminho.

Seja  $k = |E_{C_{st}}|$ . Vamos encontrar uma ordem  $P$  para os hiper-arcos de  $C_{st}$ , onde  $P = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$  seja um B-caminho.

Como todo vértice de  $C_{st}$  está conectado a  $s$ , existe pelo menos um hiper-arco de  $C_{st}$  que tenha somente  $s$  na origem. Suponha que existam  $r$  hiper-arcos nesta situação. Escolha uma ordem arbitrária para eles e chame-os de  $e_{i_1}$  a  $e_{i_r}$ .

Suponha que já tenhamos ordenado os  $p - 1$  primeiros hiper-arcos,  $e_{i_1}$  a  $e_{i_{p-1}}$ , com  $r < p \leq k$ , e que queremos definir o  $p$ -ésimo. Sejam  $P_p = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_{p-1}})$ ,  $Q_p = E_{C_{st}} \setminus P_p$  e  $B_p = \{e \in Q_p \mid \text{Org}(e) \subseteq \text{Dest}(P_p)\}$ .  $B_p$  não é vazio, caso contrário existiria um vértice  $x$  em  $C_{st}$  não conectado a  $s$ . Escolha  $e_{i_p}$  entre os hiper-arcos de  $B_p$ . Ao final, teremos ordenado todos os hiper-arcos, e faça  $P = P_{k+1}$ .

Agora temos que conferir se  $P$  é um B-caminho. Para tanto temos que provar que:

(i)  $\{s\} = \text{Org}(e_{i_1})$ ;

(ii)  $t \in \text{Dest}(e_{i_k})$ ;

(iii)  $e_{i_p}$  é B-adjacente a  $P_p$ ;

Os itens (i) e (ii) são imediatos, por construção e minimalidade. O item (iii) também é verdade por construção de  $B_p$ . Além disso,  $P$  é minimal e acíclico, já que  $C_{st}$  é minimal e acíclico.

( $\leftarrow$ )

Seja  $P = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$  um B-caminho minimal acíclico de  $s$  a  $t$  em  $H$ . Seja  $C_{st}$  o

sub-hipergrafo de  $H$  induzido por  $P$ . Vejamos se  $C_{st}$  é um B-caminho segundo Gallo (1990).

Por definição  $C_{st}$  é um sub-hipergrafo de  $H$  e acíclico. A condição 3.1 da definição 3.8 é comprovada por definição.

A condição 3.2 é verificada pelos lemas 2.4 e 3.2 e pelo teorema 3.4.

Além disso, por definição,  $C_{st}$  é minimal em relação a estas propriedades.  $\square$

As definições de [17] trocam de lugar o termo acíclico, relaxando um pouco mais esta restrição. Aqui é usado o conceito de **hiper-caminho simples**, que pode ser entendido da mesma forma que em grafos, ou seja, sem repetições de hiper-arcos.

**Def. 3.11 (Gallo (1993) [17]).** *Um B-caminho de  $s$  a  $t$  em um hipergrafo  $H = (V, E)$  é um sub-hipergrafo de  $H$  minimal (não necessariamente acíclico)  $C_{st} = (V_{C_{st}}, E_{C_{st}})$  tal que:*

$$s, t \in V_{C_{st}} = \bigcup_{e \in E_{C_{st}}} e \subseteq V; \quad (3.4)$$

$$x \in V_{C_{st}} \rightarrow x \text{ é conectado a } s \text{ em } C_{st} \text{ por um hiper-caminho} \quad (3.5)$$

*simples e acíclico.*

As definições de **F-caminho** e **BF-caminho** são modificadas da mesma forma.

Vale observar que ainda não encontramos qual a relação entre os B-caminhos segundo Gallo (1993) e a nossa definição de B-caminho. Isso devido a condição 3.5 da definição 3.11.

Em [9] um outro conceito de hiper-caminho é definido, restrito aos B-grafos.

**Def. 3.12 (Ausiello (1990) [9]).** *Dado um B-grafo  $H = (V, E)$ , um conjunto não-vazio de vértices  $X$  e um vértice  $i$ , existe um hiper-caminho de  $X$  a  $i$  se:*

(i)  $i \in X$  (reflexividade estendida), ou

(ii) existe um hiper-arco  $(Y, i) \in E$  e, para cada vértice  $j \in Y$  existe um hiper-caminho de  $X$  a  $j$  (transitividade estendida).



Esta definição só trata da existência de um hiper-caminho, e não define realmente o hiper-caminho. Entretanto podemos considerar que os hiper-arcos mencionados na definição, e somente eles, fazem parte do hiper-caminho de  $X$  a  $i$ , definido de forma recursiva.

Este hiper-caminho está definido tendo como origem um conjunto de vértices  $X$ , entretanto qualquer subconjunto de  $X$  pode ser efetivamente a origem, de acordo com a condição (i).

Para podermos comparar com os nossos B-caminhos, temos que usar origens com apenas um vértice. Para isso pode ser preciso transformar o B-grafo onde o hiper-caminho está.

Se temos um hiper-caminho segundo Ausiello (1990) de  $X$  a  $i$  em um B-grafo  $H$ , a transformação seria incluir um vértice novo,  $s$ , e conectá-lo a cada um dos vértices de  $X$ . Assim, um hiper-caminho segundo Ausiello (1990) de  $s$  a  $i$  no B-grafo transformado é equivalente a um hiper-caminho segundo Ausiello (1990) de  $X$  a  $i$  em  $H$ .

Desta forma, podemos sempre ter apenas um vértice na origem de um hiper-caminho segundo Ausiello (1990), e portanto podemos fazer a comparação com os nossos B-caminhos.

**Teorema 3.9.** *Seja  $H = (V, E)$  um B-grafo, e  $s$  e  $t$  dois vértices distintos. Existe um hiper-caminho segundo Ausiello (1990) de  $s$  a  $t$  se e somente se existe um B-caminho com origem  $s$  e destino  $t$  em  $H$ .*

**Prova:**

( $\rightarrow$ ) (por indução)

Seja  $C_{st}$  um hiper-caminho de  $s$  a  $t$  segundo Ausiello (1990). Seja  $P$  o conjunto dos hiper-arcos de  $C_{st}$ . Precisamos encontrar uma ordenação dos hiper-arcos de  $P$  de forma que  $P$  seja um B-caminho.

(base)

Se  $|P| = 1$ , então  $P = \{(s, t)\}$ , que é um B-caminho.

(hipótese)

Se  $|P| \leq k$  então existe uma ordenação que faz de  $P$  um B-caminho.

(passo)

Suponha que  $|P| = k + 1$ .

Então seja  $e_{i_{k+1}} = (Y, t)$  (como na definição). E existem hiper-caminhos segundo Ausiello (1990) de  $s$  a cada um dos vértices de  $Y$ . Sejam  $C_{sy_1}, \dots, C_{sy_l}$  estes hiper-caminhos, e  $P_{sy_1}, \dots, P_{sy_l}$  os correspondentes conjuntos de hiper-arcos. Como a união destes conjuntos é igual a  $P \setminus \{(Y, t)\}$ , para cada  $y_j \in Y$ ,  $|P_{sy_j}| \leq k$ , e portanto (hipótese) cada um destes conjuntos pode ser ordenado para ser um B-caminho. O sequenciamento de tais B-caminhos (removendo hiper-arcos repetidos) em qualquer ordem, com o hiper-arco  $(Y, t)$  no final forma um B-caminho de  $s$  a  $t$ .

( $\leftarrow$ ) (por indução)

Seja  $P$  um B-caminho de  $s$  a  $t$ . Precisamos provar que  $P$  forma um hiper-caminho segundo Ausiello (1990).

(base)

Se  $|P| = 1$ , então  $P = \{(s, t)\}$ , que é um hiper-caminho segundo Ausiello (1990).

(hipótese)

Se  $|P| \leq k$  então os hiper-arcos de  $P$  formam um hiper-caminho segundo Ausiello (1990).

(passo)

Suponha que  $|P| = k + 1$ .

Então seja  $e_{i_{k+1}} = (Y, t)$ . Devemos então encontrar hiper-caminhos de  $s$  a cada um dos vértices de  $Y$ . Por definição  $Y \subseteq \text{Dest}(\{e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k}\})$  e portanto para todo  $y \in Y$  existe pelo menos um  $j$ , onde  $1 \leq j \leq k$ , tal que  $\text{Dest}(e_{i_j}) = \{y\}$ . Escolha então o menor  $j$ . A seqüência  $P_y = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_j})$  forma então um B-caminho de  $s$  a  $y$ , e  $|P_y| \leq k$  e por hipótese forma um hiper-caminho segundo Ausiello (1990). Então, para cada vértice  $y$  de  $Y$  existe um hiper-caminho de  $s$  a  $y$ . Logo, existe um hiper-caminho de  $s$  a  $t$ . □

Em [7], uma nova definição de hiper-caminho é introduzida, onde ao invés de

relacionar um conjunto com um vértice, relaciona dois vértices (como nas outras definições).

**Def. 3.13 (Ausiello (1997) [7]).** *Dado um B-grafo  $H$  e dois vértices,  $s$  e  $t$ , um hiper-caminho  $C_{st} = (V_{C_{st}}, E_{C_{st}})$  de  $s$  a  $t$  em  $H$  é um sub-hipergrafo minimal de  $H$ , com a propriedade de que seus hiper-arcos podem ser totalmente ordenados em uma sequência  $(e_1, e_2, \dots, e_k)$ , satisfazendo as seguintes condições:*

- (i)  $\forall e_i \in E_{C_{st}}, \text{Org}(e_i) \subseteq \{s, \text{Dest}(e_1), \dots, \text{Dest}(e_{i-1})\}$ ;
- (ii)  $t = \text{Dest}(e_k)$ ;

Esta definição é muito mais direta, e a comparação com os nossos B-caminhos é imediata.

**Teorema 3.10.** *Um hiper-caminho segundo Ausiello (1997) é um B-caminho minimal restrito a B-grafos.*

**Prova:** Basta comparar as definições. □

Estes resultados estão resumidos na tabela 3.2.

Definição da Literatura	Definição equivalente
Def. 3.8 [16]	B-caminho (minimal) acíclico
Def. 3.11 [17]	—
Def. 3.12 [9]	B-caminho (minimal) restrito a B-grafos
Def. 3.13 [7]	

Tabela 3.2: Definições de hiper-caminhos

Perceba que a definição 3.13 é equivalente a definição 3.12 com as considerações que fizemos.

### 3.3 Representação Mínima

Como todo modelo computacional, os hipergrafos direcionados precisam de uma representação (estrutura de dados), e representações ocupam espaço em memória. É interessante, portanto, minimizar este espaço.

Apresentaremos aqui o conceito de representação mínima assim como foi feito em [5] e [6]. Nestes artigos<sup>2</sup> os autores tratam de encontrar um hipergrafo direcionado que mantenha as informações relevantes para o modelo em questão, e que seja menor que o hipergrafo original.

No artigo [6], é introduzido o tema de equivalência entre B-grafos com o objetivo de encontrar uma representação mínima. Os B-grafos são usados aqui para modelar dependências funcionais em bancos de dados, e o objetivo é encontrar um conjunto mínimo de dependências que ainda represente o conjunto inicial. Para isso é usado o fato de que as dependências funcionais são reflexivas e transitivas, levando ao conceito de fecho.

O conceito de equivalência entre B-grafos aparece justamente do conceito de equivalência entre conjuntos de dependências funcionais, e portanto do conceito de fecho.

**Def. 3.14 ([6]).** *Dado um B-grafo  $H = (V, E)$ , o fecho de  $H$  é o B-grafo  $H^+ = (V, E^+)$  tal que  $(X, i)$  está em  $H^+$  se:*

- (i)  $(X, i)$  é um hiper-arco de  $H$ , ou
- (ii)  $i \in X$  (reflexividade estendida), ou
- (iii) existe um conjunto de vértices  $Y = \{v_1, \dots, v_q\}$  tal que existem hiper-arcos  $(X, v_j)$ , para  $j = 1, \dots, q$ , em  $H^+$  e  $(Y, i)$  é um hiper-arco de  $H$  (transitividade estendida).

Observe que o hiper-arco  $(X, i)$  está em  $H^+$  se e somente se existe um hiper-caminho segundo Ausiello (1990) (definição 3.12) de  $X$  a  $i$  em  $H$ .

Assim podemos definir a equivalência.

---

<sup>2</sup>Apesar de [6] ter sido publicado depois, foi escrito antes de [5].

**Def. 3.15 (Equivalência [6]).** *Dois B-grafos são ditos **equivalentes** se eles têm o mesmo fecho.*

Vale notar que os dois B-grafos em questão têm o mesmo conjunto de vértices.

O fecho de um B-grafo pode ser exponencialmente maior que o B-grafo original, principalmente devido a regra (ii) da definição 3.14. Este problema é contornado com uma representação de B-grafos baseada em grafos (DF-grafos) na qual os conjuntos origem são representados por vértices. Assim não aparecem hiper-arcos novos, gerando mais conjuntos origem (usando a regra (ii)) e o fecho deixa de ser exponencial em relação ao número de vértices.

Em [5] o destaque é para o conceito de equivalência forte entre B-grafos, que é baseada no conceito de núcleo. Os B-grafos representam um conjunto de restrições de integridade em bancos de dados relacionais, e se dois B-grafos são fortemente equivalentes, então as respectivas restrições permitem o mesmo conjunto de instancias do banco de dados.

Para definir o conceito de núcleo, é preciso apresentar antes o que seja o fecho de um conjunto origem. Lembrando que conjunto origem é um conjunto de vértices que é a origem de algum hiper-arco.

**Def. 3.16 ([5]).** *Dado um conjunto origem  $X$  de um B-grafo  $H$ , chamamos de **fecho de  $X$** , o conjunto  $X^+$ , com todos os vértices  $i$  tal que existe o hiper-arco  $(X, i)$  em  $H^+$ .*

**Def. 3.17 ([5]).** *O **núcleo** de um B-grafo  $H$  é uma família minimal de conjuntos origem  $K = \{S_1, \dots, S_k\}$  tal que, para cada conjunto origem  $X$  de  $H$  existe um conjunto origem  $S_i \in K$  para o qual  $X \subseteq S_i^+$ .*

**Def. 3.18 ([5]).** *Dados dois B-grafos  $H = (V, E)$  e  $H' = (V, E')$ , dizemos que um núcleo  $K$  de  $H$  é **equivalente** a um núcleo  $K'$  de  $H'$  se para cada conjunto origem de  $K$  existe um conjunto origem de  $K'$  tal que seus fechos são iguais.*

Neste artigo é provado que todos os núcleos de um B-grafo são equivalentes e possuem o mesmo número de conjuntos fonte. Assim, a equivalência forte pode ser definida como uma equivalência de núcleos.

**Def. 3.19 (Equivalência forte [5]).** *Dois B-grafos são ditos **fortemente equivalentes** se são equivalentes e seus núcleos são equivalentes.*

A partir destas definições, os autores procuram encontrar B-grafos fortemente equivalentes mínimos.

### 3.4 Hipergrafos Direcionados Ponderados

Em certas aplicações precisamos que o modelo utilizado represente os custos (tempo, distância, etc) envolvidos. Como em grafos, podemos ter hipergrafos direcionados ponderados, ou seja, onde existe uma atribuição de valores para seus elementos e uma métrica associada, que calcula o custo de certas operações (basicamente hiper-caminhos).

O conceito de hipergrafo direcionado ponderado aparece pela primeira vez em [15], e nos mesmos moldes em [16, 17]. Mais tarde aparece também em [7, 8, 10]. Nestes últimos é feito um estudo maior sobre métricas.

Em todos estes artigos as métricas estão relacionadas com hiper-caminhos.

**Def. 3.20 ([16]).** *Um **hipergrafo direcionado ponderado** é um hipergrafo direcionado  $H = (V, E)$  acompanhado de uma função peso  $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ , que associa um valor real para cada hiper-arco.*

Em algumas aplicações, podemos ter mais de uma função associada, representando diversas medidas (custo, distância, capacidade, etc). Entre as métricas definidas encontramos *custo* e *distância* como as principais.

**Def. 3.21 (Custo [16]).** *Seja um hipergrafo direcionado ponderado  $H = (V, E)$ , com função peso  $w$ , dois vértices,  $s$  e  $t$ , e um B-caminho de  $s$  a  $t$ ,  $C_{st} = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_k})$ . Dado um vértice  $v \in Dest(e_{i_p})$ , com  $e_{i_p} \in C_{st}$  e  $p$  sendo o menor possível, seja  $C_{sv} = (e_{i_1}, e_{i_2}, \dots, e_{i_p})$ . A função **custo** é definida por:*

$$W_{C_{st}}(s) = 0;$$

$$W_{C_{st}}(v) = \sum_{e \in C_{sv}} w(e), \quad v \neq s.$$

**Def. 3.22 (Distância [16]).** *Seja um hipergrafo direcionado ponderado  $H = (V, E)$ , com função peso  $w$ , dois vértices,  $s$  e  $t$ , e um B-caminho de  $s$  a  $t$ ,  $C_{st}$ . A função **distância** é definida por:*

$$\begin{aligned} R_{C_{st}}(s) &= 0; \\ R_{C_{st}}(v) &= \min\{w(e) + \max\{R_{C_{st}}(x) \mid x \in \text{Org}(e)\} \\ &\quad e \in C_{st} \cap BS(v)\}, \quad v \neq s. \end{aligned}$$

Em geral, o problema de encontrar um B-caminho mínimo (máximo) segundo uma métrica qualquer é NP-difícil [16, 7]. Uma métrica onde isso acontece é a função custo definida acima ( $W_{C_{st}}$ ). Entretanto para uma certa classe de métricas, a qual pertence a função distância ( $R_{C_{st}}$ ), o problema passa a ser polinomial. Esta classe de métricas leva o nome de **aditivas** em [16] e de **value-based** em [7].

**Def. 3.23 (Aditiva [16]).** *Uma métrica  $\mu_{C_{st}}$  é dita **aditiva** se é monotônica não-decrescente, e pode ser descrita em termos de  $f$ ,  $\psi$  e  $\mu_0$ , onde:  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma função monotônica em relação a cada um de seus argumentos;  $\psi : 2^{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbb{R}^+$  é uma função comutativa e associativa de conjuntos de reais para reais, e monotônica em relação a seus argumentos; e  $\mu_0$  é um valor real. A forma de  $\mu_{C_{st}}$  é:*

$$\begin{aligned} \mu_{C_{st}}(s) &= \mu_0; \\ \mu_{C_{st}}(v) &= \min\{f(w(e), \psi(\mu_{C_{st}}(x) \mid x \in \text{Org}(e))) \\ &\quad e \in C_{st} \cap BS(v)\}, \quad v \neq s. \end{aligned}$$

Perceba que para a função distância  $R_{C_{st}}$ ,  $f$  é a soma (+),  $\psi$  é max e  $\mu_0 = 0$ .

Em [7] são estudados algoritmos e estruturas de dados para manter uma lista de B-caminhos<sup>3</sup> com distância mínima enquanto efetuam-se remoções de hiper-arcos.

Em [8] e [10] é feito o estudo mais aprofundado da complexidade de encontrar o B-caminho mínimo.

---

<sup>3</sup>Vale lembrar que os hiper-caminhos definidos em [7] são exatamente B-caminhos restritos a B-grafos (veja teorema 3.10).

Nestes artigos o limite entre problemas de minimização (maximização) de hiper-caminhos (B-caminhos) NP-difíceis e de tempo polinomial é estudado mais de perto. Em [7] é apresentado um algoritmo polinomial para a classe de métricas aditivas, com tempo  $\mathcal{O}(|H| + n \log n)$ .

Em [10] são apresentadas classes de métricas mais detalhadas e classes de problemas baseadas nas métricas usadas.

### 3.5 Arborescências

Seguindo um caminho distinto, Woeginger apresenta o conceito arborescências em F-grafos em [47], onde trata da complexidade de encontrar tais estruturas.

**Def. 3.24** ([47]). *Um F-grafo  $H = (V, E)$  é uma **arborescência** se, e somente se, uma das condições abaixo for satisfeita:*

- (i)  $E$  é vazio;
- (ii) *Existe um hiper-arco  $e_1 \in E$ , tal que não existe  $e \in E$ ,  $e \neq e_1$  tal que  $Org(e_1) \in e$ , e tal que o F-grafo  $H' = (V, E \setminus \{e_1\})$  seja uma arborescência.*

Esta definição recursiva lembra uma floresta em grafos, e como as florestas, não contém ciclos.

Woeginger apresenta o problema de, dado um F-grafo  $H = (V, E)$ , uma função de peso dos hiper-arcos e um inteiro  $W$ , encontrar uma arborescência de peso no mínimo  $W$  que seja sub-hipergrafo de  $H$ .

Além disso, é provado que este problema é NP-difícil para hiper-arcos com mais de dois vértices (sendo um deles a origem). Ou seja, só ficam de fora os grafos direcionados (2 vértices), para os quais o problema é resolvido em tempo polinomial.



## 3.6 Cortes e Conjuntos de Corte

Outro conceito interessante, e que resolve os problemas relacionados com SAT, é o conceito de corte, que embora baseado no conceito de corte em grafos, tem muitas diferenças.

**Def. 3.25 ([16]).** *Seja  $H = (V, E)$  um hipergrafo direcionado e  $s$  e  $t$  dois vértices distintos, denominados de fonte e sumidouro, respectivamente. Um **corte**  $T_{st} = (V_s, V_t)$  é uma partição de  $V$  em dois subconjuntos,  $V_s$  e  $V_t$ , tais que  $s \in V_s$  e  $t \in V_t$ . O conjunto de corte  $E_{st}$  associado ao corte  $T_{st}$  é o conjunto de todos os hiper-arcos  $e = (X, Y)$  de  $E$  tal que  $X \subseteq V_s$  e  $Y \subseteq V_t$ .*

A cardinalidade de um corte é a cardinalidade do seu conjunto de corte. Observe que um conjunto de corte pode estar vazio. Note também que remover o conjunto de corte não necessariamente desconecta  $t$  de  $s$ . Entretanto, acaba com uma possível BF-conectividade<sup>4</sup> entre  $s$  e  $t$ .

Fica mais fácil de entender quando comparamos com corte em grafos. Já que em grafos, conectividade é igual a BF-conectividade, ao perder esta última, também perde a primeira. Em hipergrafos, estes conceitos diferem, e perder uma não implica em perder a outra.

Na figura 3.4 podemos ver dois cortes no hipergrafo  $H$ . O primeiro,  $A$ , separa os vértices nos conjuntos  $\{1\}$  e  $\{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$  e tem como conjunto de corte apenas o hiper-arco  $b$ . Perceba que o hiper-arco  $a$  não faz parte do conjunto de corte de  $A$ , apesar de ter um de seus vértices separado dos outros. O corte  $B = (\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \{8, 9, 10\})$  tem os hiper-arcos  $\{e, f, g\}$  como conjunto de corte. Mais uma vez aparece um hiper-arco,  $c$ , que é cortado mas não faz parte do conjunto de corte.

---

<sup>4</sup>Talvez o melhor nome para corte seja BF-corte.

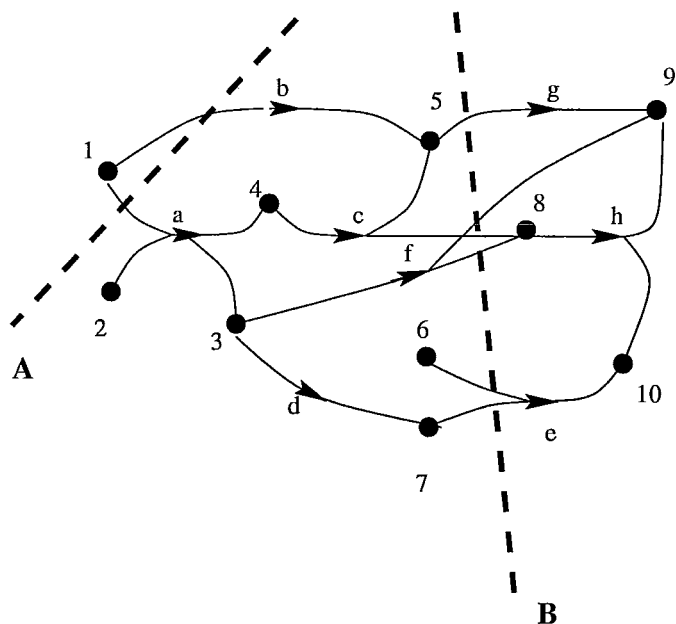


Figura 3.4: Hipergrafo direcionado  $H$  e os cortes  $A$  e  $B$

### 3.7 Grafo Fronteira

Em [29, 32, 33] é introduzido o conceito de grafo fronteira de um BF-grafo, com o objetivo de chegar aos BF-caminhos.

Nos artigos que introduziram o conceito de BF-caminho [15, 16, 17] não é apresentado nenhum algoritmo para encontrar um. Além disso, nestes artigos é comentado que este é um problema difícil.

**Def. 3.26** ([29]). *Seja  $H = (V, E)$  um BF-grafo, e  $s$  e  $t$  dois vértices de  $V$ . Um grafo fronteira de  $H$  em relação a  $s$  e  $t$  é o BF-grafo  $H' = (V', E')$  onde:*

- (i)  $V' = \{x \in V \mid \text{existe } B\text{-caminho de } s \text{ a } x \text{ e existe } F\text{-caminho de } x \text{ a } t\}$ ;
- (ii)  $E' = \{e \in E \mid e \subseteq V'\}$ .

Baseado nesta definição, os autores apresentam um algoritmo para achar BF-caminhos em um BF-grafo acíclico  $H$  com complexidade  $\mathcal{O}(n \times |H|)$ .

## 3.8 Comparações

Faremos aqui algumas comparações entre os trabalhos apresentados, tentando destacar as diferenças mais importantes.

Os trabalhos de Ausiello e outros [5, 6, 9] apareceram antes, e tiveram sua motivação muito bem definida nas dependências funcionais em bancos de dados.

Como os hipergrafos direcionados foram definidos como B-grafos, todos os outros conceitos ficam restritos. E embora este tipo de hipergrafo direcionado tenha uma quantidade razoável de aplicações, poderia ter mais riqueza na teoria.

Já os trabalhos de Gallo e outros [15, 16, 17] apresentam uma generalização dos hipergrafos do Ausiello. Inicialmente os hiper-arcos apresentavam várias camadas, e tinham como caso particular os 2-grafos (nossos hipergrafos). Entretanto, Gallo se restringe a tratar e definir conceitos para as classes mais próximas dos hipergrafos de Ausiello. Trabalha com as classes B-grafo, F-grafo e BF-grafo.

Quanto aos demais conceitos, existem diferenças no que seja um hiper-caminho, sendo o conceito de Ausiello [9] mais forte que o de Gallo.

As pequenas modificações feitas em [29] e [32] trazem um pouco mais de consistência aos conceitos, entretanto, só em [35] foram realmente apresentados os erros cometidos por Gallo além de um estudo comparativo entre os dois grupos.

Em [35], Oliveira discute sobre as representações de hipergrafos direcionados, fazendo uma análise dos diversos trabalhos publicados até então. As diferenças entre os artigos [16] e [17] são discutidas, e é constatado que os algoritmos de busca também não satisfazem a restrição de minimalidade dos B-caminhos (F-caminhos).

Vale destacar a presença de Woeginger [47] e suas arborescências. O fato dele ter usado hiper-arcos da forma  $(i, X)$  (F-grafos) é um indício que Ausiello se restringiu demais.

# Capítulo 4

## Percursos

Em muitas situações é necessário que se percorra um grafo, visitando os vértices e as arestas (arcos) em uma certa ordem, para que um determinado problema seja resolvido [41]. Em grande parte destas situações, o percurso se faz por meio de buscas em profundidade ou largura. Na literatura em português os termos “busca” e “percursos” tradicionalmente se confundem.

Percursos em hipergrafos direcionados também tem grande importância, como podemos ver em vários textos sobre o assunto, como [17] e [9], onde os percursos são usados quase sempre para se encontrar B-caminhos mínimos partindo de um determinado vértice.

Observe que qualquer que seja o percurso, o conceito de conectividade está sempre presente. Como temos diferentes tipos de conectividade no caso de hipergrafos direcionados, podemos definir diferentes tipos de percursos. O caso mais simples é exatamente com a mais simples das conectividades, que envolve apenas a existência de um hiper-caminho.

Neste capítulo fazemos um estudo sobre alguns tipos de percurso, revendo alguns percursos apresentados na literatura. Entretanto o que queremos aqui é discutir a variedade de tipos de percurso que podemos fazer em hipergrafos direcionados se compararmos com grafos.

Na seção 4.1 é apresentado um percurso baseado na conectividade simples que

é inspirado no percurso geral apresentado em [41], e em percursos semelhantes (em hipergrafos) apresentados em [16]. Na seção 4.2 discutimos as características de um percurso em relação aos tipos de conectividade, comentando alguns dos percursos apresentados na literatura. Merece destaque a seção 4.2.3, que discute percursos baseados na S-conectividade, explicando porque eles podem ter complexidade de tempo exponencial. Na seção 4.3 apresentamos um percurso baseada em SB-conectividade com o objetivo de ilustrar as idéias apresentadas.

## 4.1 Percurso Simples

Em [41] é apresentado um algoritmo de busca bastante geral. Neste algoritmo está apenas o mínimo necessário para que um percurso seja feito, e nenhum dos mecanismos de escolha do algoritmo aparece de forma explícita.

Em [16] é apresentado um algoritmo que faz um percurso em um hipergrafo direcionado usando apenas a conectividade simples.

O que queremos fazer aqui é apresentar um algoritmo tão geral quanto o apresentado em [41] e com as mesmas características de conectividade que o apresentado em [16]. Embora este algoritmo não apresente nada de novo, ele pode servir de base para o desenvolvimento de outros tipos de percursos.

Vejamos então como podemos fazer um percurso geral em hipergrafos direcionados baseados na conectividade simples (hiper-conectividade).

Inicialmente escolhemos um vértice inicial  $s$ , a partir do qual percorreremos vértices e hiper-arcos conectados. Cada vértice escolhido é visitado (e marcado) e um hiper-arco não explorado que tenha este vértice na origem é escolhido (e explorado). Colocamos os vértices do destino deste hiper-arco entre os vértices que podem ser escolhidos, e escolhemos outro vértice. Continuamos assim até que não existam mais vértices a escolher.

Na figura 4.1 temos o algoritmo BuscaSimples. Perceba que é exatamente o algoritmo de busca em grafos já conhecido.

### BuscaSimples

Dados  $H = (V, E)$  e  $s \in V$

```
{  
   $Q \leftarrow \{s\}$   
  Enquanto  $Q \neq \emptyset$   
  {  
    Escolha  $x \in Q$   
    Visite  $x$   
    Escolha  $e \in FS(x)$  que não tenha sido explorado  
    Se existir tal  $e$  então  
    {  
      Explore  $e$   
      Para  $y \in Dest(e)$   
      {  
        Se  $y$  não foi visitado  
        Insira  $y$  em  $Q$   
      }  
    }  
    Senão  
    Remova  $x$  de  $Q$   
  }  
}
```

Figura 4.1: Algoritmo BuscaSimples

Observe que o comando da primeira linha, “ $Q \leftarrow \{s\}$ ”, é a inicialização do conjunto  $Q$ , e que no comando “Escolha  $x \in Q$ ” não estamos tirando  $x$  de  $Q$ .

Os comandos “Visite” e “Explore” se referem aos momentos em que os vértices e os hiper-arcos são percorridos. Perceba que um hiper-arco é explorado uma única vez, enquanto um vértice pode ser visitado muitas vezes. Em cada uma das visitas a um vértice uma ação diferente pode ser tomada.

O conjunto  $Q$  pode estar estruturado de várias formas, e com isso determinar a ordem do percurso. Os comandos relacionados com  $Q$ , “Insira” e “Remova”, dependem da estrutura usada, que pode ser uma pilha ou uma fila, por exemplo. Nestes dois casos teríamos os percursos em profundidade e em largura, respectivamente.

## 4.2 Percursos e Conectividades

Olhando com mais atenção para os vértices visitados durante um percurso, podemos perceber que, dado um vértice inicial,  $s$ , visitamos os vértices que estão “conectados” com  $s$ . Além disso, na ordem gerada pelo percurso, a propriedade “estar conectado com  $s$ ” deve ser monotônica. Ou seja, todos os vértices usados para se chegar em um certo ponto do percurso devem estar “conectados” com  $s$ .

Temos então que discutir o que acontece com cada um dos tipos de conectividade apresentados no capítulo 2 (seção 2.3).

Os algoritmos de percurso funcionam de forma incremental: a cada passo temos um conjunto de vértices que estão “conectados a  $s$ ” e uma fronteira a explorar. Um novo vértice (ou hiper-arco) é incluído, de forma a manter a conectividade.

A conectividade simples tem as características necessárias. A propriedade “estar conectado a  $s$ ” é monotônica. Ou seja, todos os vértices encontrados em um hiper-caminho de  $s$  a  $x$  estão conectados a  $s$ . Isso era de se esperar, pois o algoritmo BuscaSimples (figura 4.1) é um percurso que se utiliza desta conectividade.

Veremos como isso funciona para outros tipos de conectividade.

### 4.2.1 B-conectividade

O lema 2.4 nos diz que podemos fazer um percurso usando a B-conectividade. Isto porque, como a conectividade, a B-conectividade é uma função monotônica.

Um exemplo de percurso baseado na B-conectividade é o algoritmo B-visita apresentado na figura 4.2 (uma adaptação do algoritmo apresentado em [17]). Neste algoritmo, o rótulo  $P_v$  indica se o vértice  $v$  já foi visitado, e qual hiper-arco foi usado para se chegar a ele<sup>1</sup>. E o rótulo  $K_e$  indica quantos vértices da origem do hiper-arco  $e$  já foram visitados, assim, o hiper-arco  $e$  só será explorado quando  $K_e = |Org(e)|$ . Observe que  $P_v = \emptyset$  quando  $v$  não foi visitado, indicando que nenhum hiper-arco foi usado até agora para chegarmos em  $v$ . O símbolo  $\lambda$  representa um hiper-arco fictício,

---

<sup>1</sup>Com  $P_v$  podemos recuperar os B-caminhos percorridos.

que deve ser distinto do valor inicial ( $\emptyset$ ).

### B-Visita

Dados  $H = (V, E)$  e  $s \in V$

```

{
  Para cada  $v \in V$  faça  $P_v \leftarrow \emptyset$ 
  Para cada  $e \in E$  faça  $K_e \leftarrow 0$ 
   $P_s \leftarrow \lambda$  /* hiper-arco fictício */
   $Q \leftarrow \{s\}$ 
  Repita
    Escolha e Remova  $x \in Q$ 
    Para cada  $e \in FS(x)$  faça
      {
         $K_e \leftarrow K_e + 1$ 
        Se  $K_e = |Org(e)|$  então
          {
            Para cada  $w \in Dest(e)$  tal que  $P_w = \emptyset$  faça
              {
                 $P_w \leftarrow e$ 
                Insira  $w$  em  $Q$ 
              }
            }
          }
      }
    }
  Até que  $Q = \emptyset$ 
}

```

Figura 4.2: Algoritmo B-visita [17]

Como no algoritmo BuscaSimples da seção 4.1, a estrutura do conjunto  $Q$  é determinante na ordem em que os vértices e hiper-arcos serão percorridos. Entretanto, mesmo que seja usada uma pilha (busca em profundidade), os hiper-arcos percorridos podem ter vértices de origem vindos de mais de um ramo da busca. Isso porque um hiper-arco só será percorrido quando estivermos no último vértice visitado de sua origem. Observe a figura 4.3, onde uma busca em profundidade iniciada no vértice 1, pode escolher e explorar o hiper-arco  $a$  e visitar o vértice 2. Se estamos usando a B-conectividade, o hiper-arco  $c$  não pode ser escolhido neste momento. Voltamos ao vértice 1 e escolhemos o hiper-arco  $b$  (não explorado). Após visitarmos o vértice 3, o



hiper-arco  $c$  pode ser escolhido e explorado. Perceba aqui que o vértice 2 foi visitado em outro ramo da busca, entretanto está sendo utilizado para que o percurso prossiga.

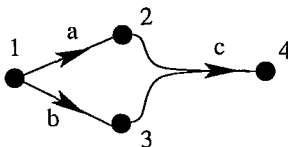


Figura 4.3: B-caminho de 1 a 4 ( $a, b, c$ )

No caso de percursos em grafos, as buscas em profundidade e em largura são bem distintas. Já em hipergrafos direcionados, a busca em profundidade pode se parecer, em alguns pontos, com a busca em largura, principalmente quando a B-conectividade está sendo usada.

### 4.2.2 F-conectividade

O caso da F-conectividade não é tão simples. A monotonicidade não é encontrada na F-conectividade nem na BF-conectividade, impedindo que percursos semelhantes possam ser feitos. Nestes dois casos, existem vértices importantes que não estão F-conectados ao vértice  $s$ . Veja na figura 4.4 que, embora o vértice 6 esteja F-conectado ao vértice 1, os vértices 2 e 3 não são. E isso impede que, com percursos incrementais, cheguemos ao vértice 6 partindo do vértice 1.

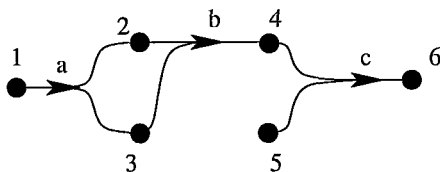


Figura 4.4: F-caminho de 1 a 6

Entretanto, algoritmos para encontrar F-caminhos e BF-caminhos podem ser construídos. Em [17] é apresentado o algoritmo F-visita que pode ser entendido como uma B-visita feita ao contrário. Em [33] é apresentado um algoritmo para encontrar BF-caminhos, mas para isso é preciso construir um hipergrafo intermediário, denominado **grafo fronteira** (seção 3.7).

### 4.2.3 S-conectividade

As conectividades que usam a propriedade **S** (S-conectividade, SB-conectividade, SF-conectividade e SBF-conectividade), precisam ser estudadas com mais detalhes. Pelos argumentos da seção 4.2.2, vamos tratar apenas da S-conectividade e da SB-conectividade.

Veja que a S-conectividade é monotônica, ou seja, se  $t$  está S-conectado a  $s$ , então todos os vértices usados em todos os S-caminhos de  $s$  a  $t$  também estão S-conectados a  $s$ .

Lembremos que a propriedade **S** é referente ao conjunto de hiper-arcos que formam um hiper-caminho (veja a definição 2.12 na seção 2.3). Como os vértices envolvidos só podem ser usados uma vez como destino e uma vez como origem, o tipo de percurso mais apropriado é a busca em profundidade. Assim, podemos garantir que os hiper-arcos formam um S-caminho, pois este S-caminho pode ser recuperado com a pilha.

Quando a propriedade **S** não está envolvida, os requisitos de conectividade (simples ou **B**) são testados verificando se alguns (ou todos) os vértices da origem de um hiper-arco já foram visitados, não importando se estão no mesmo ramo ou não. Assim, a busca em largura também pode ser utilizada.

Quando a propriedade **S** está envolvida, temos que distinguir dentre os vértices visitados, aqueles que podem ser usados como origem de um hiper-arco a ser percorrido, e se os vértices do destino deste hiper-arco ainda não foram usados. Isso quer dizer que temos que verificar, a cada hiper-arco a ser percorrido, se os vértices de seu destino estão S-conectados ao vértice inicial.

Se a propriedade **B** não é relevante, então podemos usar o fato de que todos os vértices visitados são S-conectados ao vértice inicial, e que basta um vértice de sua origem ser visitado para que um hiper-arco possa ser percorrido. Assim, basta verificar os vértices do destino.

Mas quando usamos a SB-conectividade a coisa complica um pouco mais. Olhando mais uma vez para a figura 4.3 podemos perceber que o vértice 4 está S-conectado ao vértice 1 (S-caminho  $(a, c)$ ), mas não está SB-conectado. Assim, não basta marcar os

vértices que já foram visitados, é preciso distingüir os vértices de ramos distintos.

Para que possamos efetuar a verificação acima, temos que poder recuperar o SB-caminho usado no ramo atual e garantir que seus vértices só sejam usados uma vez como origem. Assim, a busca em largura não pode ser usada, mas com busca em profundidade podemos recuperar o SB-caminho através da pilha.

Veja que apesar da S-conectividade ser monotônica, ela não é transitiva. Veja na figura 4.5 que o hiper-arco  $a$  forma um S-caminho de 1 a 2, e que o hiper-arco  $b$  forma um S-caminho de 2 a 4, mas a seqüência de hiper-arcos  $(a, b)$  não forma um S-caminho de 1 a 4 (e nenhuma outra seqüência forma tal S-caminho). Isso porque o vértice 3 tem dois hiper-arcos chegando.

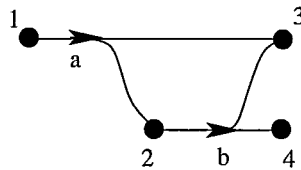


Figura 4.5: Temos um S-caminho de 1 a 2, um S-caminho de 2 a 4, mas não temos um S-caminho de 1 a 4

Devido à não transitividade da S-conectividade, ao fazermos um percurso baseado na SB-conectividade, pode ser preciso percorrer um hiper-arco mais de uma vez, já que não podemos simplesmente marcá-los como explorados.

Observe na figura 4.6 que o vértice 6 está SB-conectado ao vértice 1. Se um percurso iniciado no vértice 1 escolher o hiper-arco  $a$ , depois percorrerá o hiper-arco  $d$ . Neste ponto o hiper-arco  $e$  não será percorrido, pois o vértice 4 não pode ser usado como origem (não foi visitado ainda). Teremos que retornar até o vértice 1. Quando os hiper-arcos  $b$  e  $c$  forem percorridos, o hiper-arco  $d$  já estará explorado, mas ainda não podemos percorrer o hiper-arco  $e$ , pois o vértice 5 não está sendo usado no SB-caminho que está na pilha. Perceba que não temos como garantir que os hiper-arcos usados para chegarmos ao vértice 5 não fazem com que o SB-caminho atual (na pilha) deixe de ser S. Por exemplo, se o vértice 2 estivesse no destino do hiper-arco  $d$ . Assim, teremos que percorrer o hiper-arco  $d$  novamente para garantir que poderemos chegar no vértice 6.

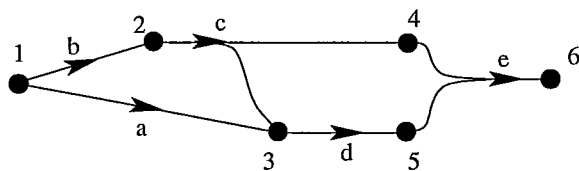


Figura 4.6: Hiper-arco  $d$  precisa ser percorrido duas vezes

Perceba também que neste exemplo, se a primeira escolha fosse o hiper-arco  $b$ , não existiria a real necessidade de percorrermos o hiper-arco  $d$  duas vezes. Mas, como não podemos garantir que está será a ordem escolhida, nem se em alguma ordem de escolha esta situação se repete, temos que permitir que um hiper-arco possa ser percorrido mais de uma vez.

Com isso, os percursos baseados em SB-conectividade deixam de ter complexidade de tempo polinomial, a passam a ter complexidade exponencial.

Veja o exemplo da figura 4.7, onde o hipergrafo é formado pelo seqüenciamento de  $k$  blocos repetidos e é terminado com os hiper-arcos  $d$  e  $e$ . Com um percurso baseado em SB-conectividade, o hiper-arco  $d$  pode ser percorrido  $2^{k-1}$  vezes.

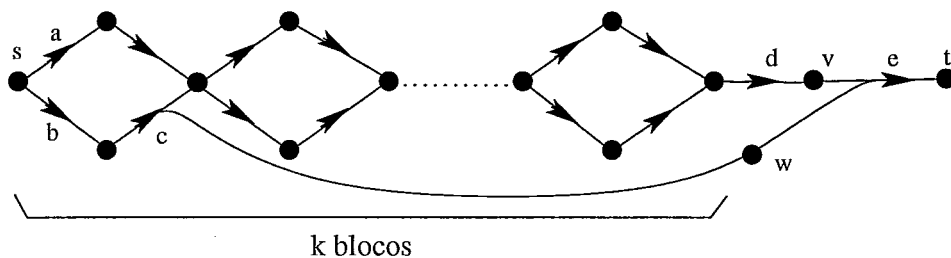


Figura 4.7: Hiper-arco  $d$  é percorrido  $2^{k-1}$  vezes

Se, partindo do vértice  $s$ , escolhermos o hiper-arco  $a$ , então os hiper-arcos  $c$  e  $e$  não serão percorridos, e não chegamos ao vértice  $t$ . Como, em princípio, não temos como saber qual das  $k$  escolhas (uma em cada bloco) faz com que o hiper-arco  $c$  seja percorrido, temos que tentar todas. Mas se, ao chegarmos no vértice  $v$ , o vértice  $w$  não puder ser usado como origem, temos que tentar outro caminho.

Desta forma temos que evitar usar a SB-conectividade, já que isso pode fazer com que um algoritmo tenha complexidade exponencial. Entretanto, temos que discutir com mais detalhes os percursos que utilizam este tipo de conectividade.

### 4.3 SB-Busca

Apresentaremos um algoritmo de percurso usando a SB-conectividade, a SB-Busca. Como vimos na seção 4.2.3, este algoritmo é exponencial.

Perceba que, devido a S-conectividade, usamos uma pilha para estruturar o percurso.

Neste algoritmo a escolha de qual hiper-arco percorrer é o ponto principal. E é o que precisamos detalhar. Perceba também que é preciso “desfazer” um percurso já feito para que possamos tentar outro caminho. Veja na figura 4.8 um esboço inicial do que seria este algoritmo. Vamos analisar cada ponto e detalhar algumas partes.

SB-Busca

Dados  $H = (V, E)$  e  $s \in V$

```
{
  Inicializações
  Empilhe  $s$  em  $Q$ 
  Enquanto  $Q \neq \emptyset$ 
  {
    Faça  $x \leftarrow$  Topo de  $Q$ 
    Se existir  $e \in FS(x)$  tal que  $e$  possa ser percorrido
    {
      Percorra  $e$ 
      Empilhe cada  $z \in Dest(e)$  em  $Q$ 
    }
    Senão
    {
      Desempilhe  $x$  de  $Q$ 
      Desfaça o percurso pelo último hiper-arco
    }
  }
}
```

Figura 4.8: Algoritmo SB-busca

Não podemos escolher qualquer hiper-arco, precisamos de uma forma de garantir que os vértices visitados só são usados uma vez como destino e uma vez como origem para cada ramo do percurso. Isso é feito com dois rótulos,  $B_v$  e  $F_v$ , indicando respec-

tivamente o hiper-arco usado para chegar em  $v$  e o hiper-arco usado para sair de  $v$ . A cada hiper-arco percorrido, ou quando é preciso retornar (*backtrack*), estes rótulos são atualizados. Veja abaixo como inicializar estes rótulos.

Para cada  $v \in V$  faça  $B_v \leftarrow F_v \leftarrow 0$   
 $B_s \leftarrow \lambda$

Para sabermos se um vértice  $v$  pode ser usado como origem de um hiper-arco a ser percorrido, basta verificar se  $B_v \neq 0$  e  $F_v = 0$ , ou seja, entre os hiper-arcos percorridos neste ramo existe um hiper-arco que chega em  $v$ , mas não existe um hiper-arco que sai de  $v$ . E para sabermos se um vértice  $w$  pode ser usado como destino, basta que  $B_w = 0$ .

Para sabermos se o hiper-arco  $e$  pode ser percorrido, temos que verificar se os vértices de  $Org(e)$  podem ser usados como origem e os vértices de  $Dest(e)$  podem ser usados como destino. Veja abaixo como fica esta verificação.

Se existir  $e \in FS(x)$  tal que  
 para todo  $y \in Org(e)$ ,  $B_y \neq 0$  e  $F_y = 0$  e que  
 para todo  $z \in Dest(e)$ ,  $B_z = 0$  então

...

Ao percorrermos o hiper-arco  $e$ , atualizamos os rótulos de forma que  $F_y = e$  para todo  $y \in Org(e)$ , e  $B_z = e$  para todo  $z \in Dest(e)$ . Isso indica que os vértices de  $Org(e)$  já não podem mais ser usados como origem, e que os vértices de  $Dest(e)$  passam a poder serem usados como origem. Abaixo temos como detalhar o trecho que percorre o hiper-arco  $e$ .

Para todo  $y \in Org(e)$  faça  $F_y \leftarrow e$   
 Para todo  $z \in Dest(e)$  faça  $B_z \leftarrow e$

Ao tirarmos o vértice  $x$  da pilha, fazemos  $B_x = 0$ , ou seja,  $x$  volta a poder ser usado como destino. O hiper-arco usado para chegarmos em  $x$ ,  $a$ , deve ser analisado, e se todos no seu destino já saíram da pilha, então para cada  $y \in Org(a)$  devemos

fazer  $F_y = 0$ . Esta operação indica que estamos retornando no percurso e permitindo que o hiper-arco  $a$  possa ser percorrido outra vez. O trecho que desfaz o percurso pelo hiper-arco  $e$  está detalhado abaixo.

$a \leftarrow B_x; B_x \leftarrow 0$   
 Se  $a \neq \lambda$  e para todo  $z \in Dest(a)$ ,  $B_z = 0$  então  
 Para todo  $y \in Org(a)$  faça  $F_y = 0$

Perceba que precisamos testar se  $a \neq \lambda$  pois  $x$  pode ser o vértice inicial  $s$ . Não precisamos testar se  $a \neq 0$ , já que  $x$  está na pilha (está sendo desempilhado) e necessariamente  $B_x \neq 0$ .

As operações com os rótulos  $B$  e  $F$  acima nos ajudam a ter informações sobre os vértices apenas. Se usarmos apenas estas informações para decidir se um hiper-arco pode ser percorrido, poderíamos ficar indefinidamente percorrendo o mesmo hiper-arco.

Precisamos de uma forma de poder percorrer um hiper-arco mais de uma vez, mas sem que o algoritmo fique indefinidamente repetindo o mesmo hiper-arco.

Para isso usamos o rótulo  $P_e$ , que indica qual vértice foi usado para chegarmos ao hiper-arco  $e$ . Se  $P_e = 0$  então o hiper-arco  $e$  pode ser percorrido. Veja abaixo como ficam a inicialização e o teste se o hiper-arco pode ser percorrido, agora usando o rótulo  $P_e$ .

Para cada  $v \in V$  faça  $B_v \leftarrow F_v \leftarrow 0$   
 $B_s \leftarrow \lambda$   
 Para cada  $e \in E$  faça  $P_e \leftarrow 0$

...

Se existir  $e \in FS(x)$  tal que  $P_e = 0$  e que  
 para todo  $y \in Org(e)$ ,  $B_y \neq 0$  e  $F_y = 0$  e que  
 para todo  $z \in Dest(e)$ ,  $B_z = 0$  então

...

Ao percorrermos o hiper-arco  $e$ , fazemos  $P_e = x$ , onde  $x$  é o vértice usado para chegarmos em  $e$ . Abaixo podemos ver a forma final do trecho que percorre um hiper-arco.

Para todo  $y \in \text{Org}(e)$  faça  $F_y \leftarrow e$   
 Para todo  $z \in \text{Dest}(e)$  faça  $B_z \leftarrow e$   
 $P_e = x$

Para que o hiper-arco  $e$  não seja percorrido duas vezes seguidas partindo do mesmo vértice, o valor de  $P_e$  só será modificado (para zero) quando o vértice  $P_e$  sair da pilha. Assim, não corremos o risco de repetirmos um hiper-arco sem que a pilha tenha mudado, e portanto, a partir de um vértice  $x$ , cada hiper-arco de  $FS(x)$  é percorrido no máximo uma vez enquanto  $x$  está no topo da pilha. Veja abaixo como fica o trecho que desfaz o percurso de um hiper-arco.

$a \leftarrow B_x; B_x \leftarrow 0$   
 Se  $a \neq \lambda$  e para todo  $z \in \text{Dest}(a)$ ,  $B_z = 0$  então  
     Para todo  $y \in \text{Org}(a)$  faça  $F_y = 0$   
 Para todo  $b \in FS(x)$  tal que  $P_b = x$  faça  $P_b \leftarrow 0$

Isso não impede que um hiper-arco venha a ser percorrido mais de uma vez. Se o vértice  $x$  (ou outro vértice de de sua origem) voltar ao topo da pilha, o mesmo hiper-arco poderá ser percorrido, mas teremos uma outra configuração da pilha, indicando que um outro SB-caminho foi usado para chegarmos até aqui.

O algoritmo todo pode ser visto na figura 4.9.



SB-Busca

Dados  $H = (V, E)$  e  $s \in V$

```
{
  Para cada  $v \in V$  faça  $B_v \leftarrow F_v \leftarrow 0$ 
   $B_s \leftarrow \lambda$ 
  Para cada  $e \in E$  faça  $P_e \leftarrow 0$ 
  Empilhe  $s$  em  $Q$ 
  Enquanto  $Q \neq \emptyset$ 
  {
    Faça  $x \leftarrow$  Topo de  $Q$ 
    Se existir  $e \in FS(x)$  tal que  $P_e = 0$  e que
      para todo  $y \in Org(e)$ ,  $B_y \neq 0$  e  $F_y = 0$  e que
      para todo  $z \in Dest(e)$ ,  $B_z = 0$  então
    {
      Para todo  $y \in Org(e)$  faça  $F_y \leftarrow e$ 
      Para todo  $z \in Dest(e)$  faça  $B_z \leftarrow e$ 
       $P_e = x$ 
      Empilhe cada  $z \in Dest(e)$  em  $Q$ 
    }
  }
  Senão
  {
    Desempilhe  $x$  de  $Q$ 
     $a \leftarrow B_x$ ;  $B_x \leftarrow 0$ 
    Se  $a \neq \lambda$  e para todo  $z \in Dest(a)$ ,  $B_z = 0$  então
      Para todo  $y \in Org(a)$  faça  $F_y = 0$ 
      Para todo  $b \in FS(x)$  tal que  $P_b = x$  faça  $P_b \leftarrow 0$ 
    }
  }
}
```

Figura 4.9: Algoritmo SB-busca detalhado

# Capítulo 5

## Planaridade

Planaridade é um assunto que desperta grande interesse em teoria de grafos. Existe um enorme número de publicações sobre este tema, e justamente por isso vamos citar apenas [34] pela importância dos autores e pelo caráter didático que apresenta.

Este é um conceito muito relacionado com construções reais, e por isso sempre teve grande influência em projetos de engenharia.

Embora este conceito possa ser entendido de diversas formas, podemos simplificar a formulação do problema dizendo que queremos desenhar o grafo sem cruzar linhas. Portanto, o conceito de planaridade depende do que entendemos por desenho. O desenho de um grafo é, de certa forma, natural, e portanto não temos nenhum problema em sua definição. Já em hipergrafos direcionados não temos um desenho natural, como em grafos, e precisamos definir uma forma de desenhar.

Podemos desenhar um hipergrafo direcionado, como temos feito nas diversas figuras deste trabalho e em diversos outros, como [17, 37, 10, 33]. Assim, podemos também estudar o que seria **planaridade de hipergrafos direcionados**.

Apresentamos neste capítulo como podemos adaptar o conceito de planaridade para hipergrafos direcionados. Inicialmente apresentamos o conceito de planaridade em hipergrafos (não direcionados) na seção 5.1. Em seguida formalizamos o tipo de desenho utilizado neste trabalho, na seção 5.2, e apresentamos o conceito de planaridade adaptada para hipergrafos direcionados na seção 5.3.

## 5.1 Planaridade de Hipergrafos

O conceito de planaridade em hipergrafos (não direcionados) já foi apresentado na literatura. Em [25] são apresentados três conceitos de planaridade. Dois deles são baseados em diagramas de Venn, e o terceiro, planaridade de Zykov,<sup>1</sup> é baseado na associação das hiper-arestas com as faces de uma figura planar.

Nos últimos anos o assunto de traçado automático de grafos ganhou força e vários trabalhos apareceram com idéias sobre como desenhar as mais variadas famílias de grafos. E o conceito de planaridade sempre esteve relacionado com as idéias de desenho. Em [28], muito influenciado pelas idéias de traçado automático de grafos, os conceitos de planaridade de hipergrafos são revisitados e são apresentadas idéias de desenho de hipergrafos.

Vamos detalhar o conceito de planaridade de Zykov apenas, pois este pode ser adaptado para o caso direcionado, que é o nosso objetivo principal.

O conceito de planaridade de Zykov se aplica a hipergrafos genéricos e é baseado na representação das hiper-arestas pelas faces de uma subdivisão planar<sup>2</sup>.

Veja na figura 5.1 um exemplo de subdivisão planar que representa o hipergrafo  $H = (V, E)$ , com  $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$  e  $E = \{\{1, 2, 9, 10\}, \{2, 3, 10, 11\}, \{3, 4, 5, 11\}, \{5, 6, 7, 8\}, \{1, 7, 8, 9\}, \{5, 8, 11\}\}$ .

Cada um dos vértices de  $H$  aparece como um vértice na figura, e cada uma das hiper-arestas está representada por uma face, embora nem todas as faces representem uma hiper-aresta. Observe que esta é apenas uma possível representação.

Em [25] a planaridade de Zykov é definida usando um grafo bipartido associado ao hipergrafo. Tal definição se assemelha com uma subdivisão baricêntrica.

**Def. 5.1 (Zykov-planar).** *Um hipergrafo  $H = (V, E)$  é **Zykov-planar** se e somente se o grafo bipartido  $H_B = (U, F)$  for planar, onde  $U = V \cup E$  e  $F = \{\{v, e\} | e \in E \text{ e } v \in e\}$ .*

---

<sup>1</sup>Baseado em um artigo de A. A. Zykov escrito em russo em 1974.

<sup>2</sup>Subdivisão do plano em regiões normalmente poligonais.

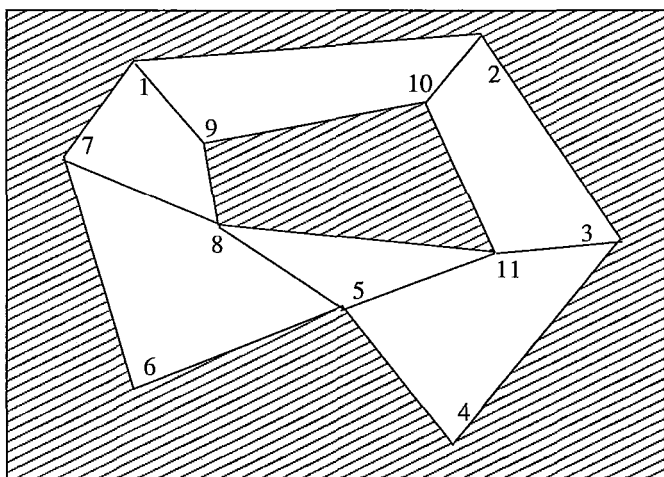


Figura 5.1: Subdivisão planar ([25])

Observe que testar a planaridade de Zykov é o mesmo que testar a planaridade de um grafo bipartido, ou seja, pode ser feito em tempo linear.

Na figura 5.2 podemos ver o grafo  $H_B$  do hipergrafo  $H$  acima. Os vértices em branco são os que representam as hiper-arestas.

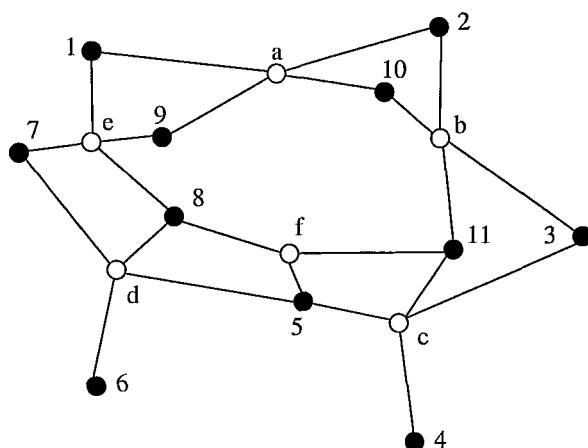


Figura 5.2: Grafo  $H_B$

Vale notar que o grafo bipartido usado na definição 5.1 representa um refinamento na subdivisão planar usada na definição original de Zykov. Veja na figura 5.3 que o grafo  $H_B$  se encaixa na subdivisão planar da figura 5.1. Os vértices  $a, b, c, d, e, f$  representam as 6 hiper-arestas do hipergrafo, e são colocados dentro das faces que representam estas mesmas hiper-arestas.

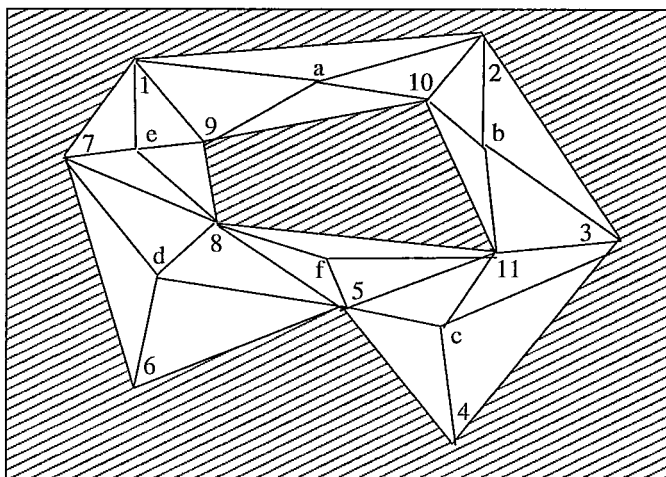


Figura 5.3: Refinamento na subdivisão planar

Também vale observar que esta definição de planaridade está associada a uma forma de desenhar hipergrafos, e esta forma não é imediatamente entendida. É preciso que exista uma convenção para nos dizer o que cada elemento do desenho representa. Se apenas a figura 5.1 nos é apresentada, não temos como saber que cada uma de suas faces representa uma hiper-aresta de um hipergrafo. Por isso precisamos definir exatamente o que estamos desenhando, e o desenho precisa ser fácil de entender.

## 5.2 Uma Forma de Desenhar

Vamos apresentar a forma que temos usado para desenhar um hipergrafo direcionado. A idéia é bem simples, e parece ser uma extensão da forma de desenhar grafos direcionados.

Cada vértice é representado por um ponto (pequeno círculo) no plano, exatamente do mesmo modo que em grafos.

Cada hiper-arco é representado por linhas ligando os vértices da origem com os vértices do destino. Estas linhas devem manter uma unidade, ou seja, devem ser como um feixe de linhas presas umas nas outras. Para dar a noção de direção, uma seta pode ser inserida nesta parte em que as linhas estão juntas.

Se queremos desenhar o hiper-arco  $e = (X, Y)$  podemos imaginar uma linha li-

gando os dois conjuntos,  $X$  e  $Y$ , e linhas ligando os elementos de cada um destes conjuntos com os respectivos extremos desta linha.

Na figura 5.4, podemos ver uma representação do hiper-arco  $a = (\{1, 2, 3\}, \{4, 5\})$ .

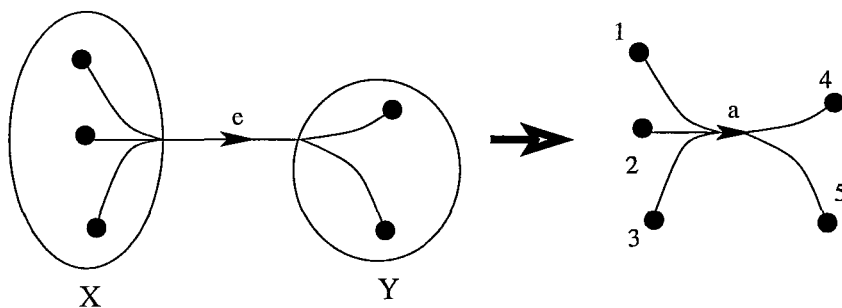


Figura 5.4: Hiper-arco  $e = (X, Y)$

Observe que no caso de hiper-arcos simples (arcos), esta forma de desenhar é a mesma que em grafos.

### 5.3 Planaridade de Hipergrafos Direcionados

Podemos agora tratar do problema de planaridade no caso dos hipergrafos direcionados. Inicialmente podemos pensar que a mesma abordagem do caso não direcionado resolva nossos problemas e que um hipergrafo direcionado  $H$  será planar se (visto como um hipergrafo não direcionado) for Zykov-planar. Exatamente como acontece em grafos. Mas a situação não é bem essa.

Veja que o grafo bipartido da definição 5.1 aparentemente se adapta aos hipergrafos direcionados. Basta pensar que o vértice criado para representar um hiper-arco fica em um ponto central, e que podemos desenhar linhas (arcos) ligando-o aos vértices originais. Na figura 5.5 podemos ver esta situação para o hiper-arco  $a = (\{1, 2, 3\}, \{4, 5\})$ .

Mas observe que como o hipergrafo é direcionado, os vértices de um hiper-arco estão divididos entre origem e destino, e portanto, ao desenhar temos que ter uma distinção nítida entre estes dois conjuntos, ou seja, temos que agrupar os vértices de um mesmo conjunto, como na figura 5.6.

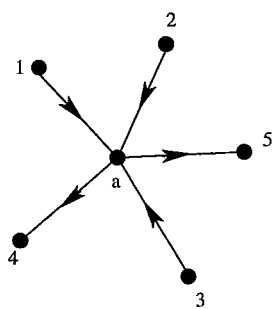


Figura 5.5: Transformação de um hipergrafo direcionado em um grafo bipartido

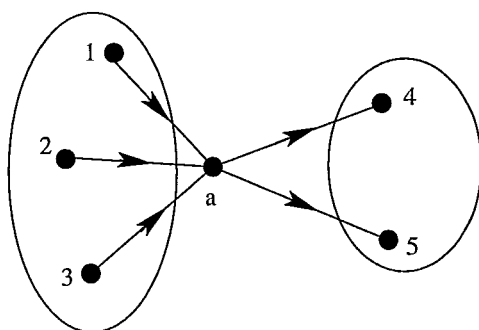


Figura 5.6: Hiper-arco com setas e agrupado

Para forçar esta situação, ao invés de usar um único vértice novo para cada hiper-arco, podemos usar dois. Um para agrupar os vértices da origem e outro para agrupar os vértices do destino. Veja na figura 5.7 como o hiper-arco  $a$  ficaria representado.

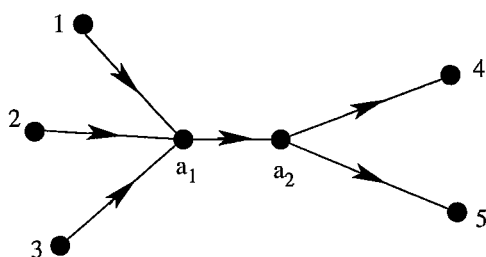


Figura 5.7: Hiper-arco representado com dois vértices

Assim os conjuntos origem e destino de um hiper-arco não podem ficar misturados em uma representação planar, e neste caso, o hiper-arco pode ser desenhado como na seção 5.2.

Podemos então definir a planaridade no caso direcionado definindo um grafo, que neste caso não é o grafo bipartido  $H_B$ , e associando a planaridade do hipergrafo com

a do grafo.

**Def. 5.2.** Dado um hipergrafo direcionado  $H = (V, E)$ . Seja  $U = E \times \{1, 2\}$ , e os elementos de  $U$  serão denotados por  $a_i$ , onde  $a \in E$  e  $i = 1, 2$ . Sejam os conjuntos  $F_O$ ,  $F_D$  e  $F$  definidos como

$$F_O = \{(v, e_1) | e \in E \text{ e } v \in \text{Org}(e)\},$$

$$F_D = \{(e_2, v) | e \in E \text{ e } v \in \text{Dest}(e)\}, \text{ e}$$

$$F = F_O \cup F_D \cup \{(e_1, e_2) | e \in E\}.$$

O **grafo estrutura** associado a  $H$  é o grafo direcionado  $H_E = (V \cup U, F)$ .

**Def. 5.3 (Planaridade).** Um hipergrafo direcionado  $H$  será **planar** se e somente se o seu grafo estrutura  $H_E$  for planar.

Sempre que um hipergrafo direcionado  $H$  for planar, também será Zykov-planar. Para verificar que esta afirmação é verdadeira, basta ver que podemos unificar os vértices  $a_1$  e  $a_2$  de  $H_E$ , para cada hiper-arco  $a$  de  $H$ , e teremos o grafo bipartido da definição 5.1. Já o contrário não é verdade. Um exemplo disso é o hipergrafo direcionado  $H$  da figura 5.8.

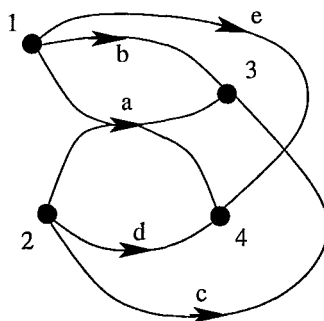


Figura 5.8: Hipergrafo direcionado  $H$  é Zykov-planar mas não é planar

Observe na figura 5.9 que  $H$  é Zykov-planar. As setas foram omitidas por motivo de clareza<sup>3</sup>. Os vértices em branco são os que representam os hiper-arcos. Perceba que, ao circular o vértice  $a$ , os vértices 1 e 2 estão separados. E o mesmo acontece com os vértices 3 e 4.

<sup>3</sup>Como em grafos ser ou não direcionado não interfere na planaridade, as setas são dispensáveis.



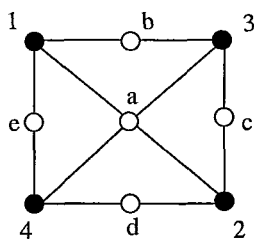


Figura 5.9: Grafo bipartido planar  $H_B$

Já na figura 5.10, temos o grafo estrutura de  $H$ ,  $H_E$ , que não é planar, já que é uma subdivisão do  $K_{3,3}$ .

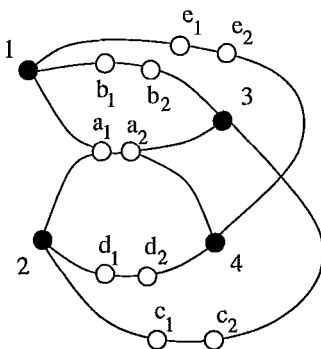


Figura 5.10: Grafo direcionado  $H_E$  não planar

O fato de os vértices de um hiper-arco estarem divididos entre origem e destino faz com que o conceito de planaridade seja mais restritivo. Isso só acontece quando existem 2 ou mais vértices em cada um destes conjuntos.

Quando, para todos os hiper-arcos, só existir um único vértice na origem ou no destino (BF-grafo), então as duas definições vão coincidir. O que pode ser ilustrado na figura 5.11, onde o B-arco da figura 5.11(a) ao ser transformado pela definição de planaridade (definição 5.3) nos arcos da figura 5.11(b) dá origem ao vértice  $a_2$ , que tem grau 2 (entrada 1 e saída 1), e pode ser removido sem que a planaridade seja afetada. Chegamos então à figura 5.11(c), que é equivalente ao que aconteceria caso a definição de Zykov (definição 5.1) fosse usada.

Este fato fica enunciado no teorema que se segue.

**Teorema 5.1.** *Se  $H$  é um BF-grafo então  $H$  é planar se e somente se for Zykov-planar.*

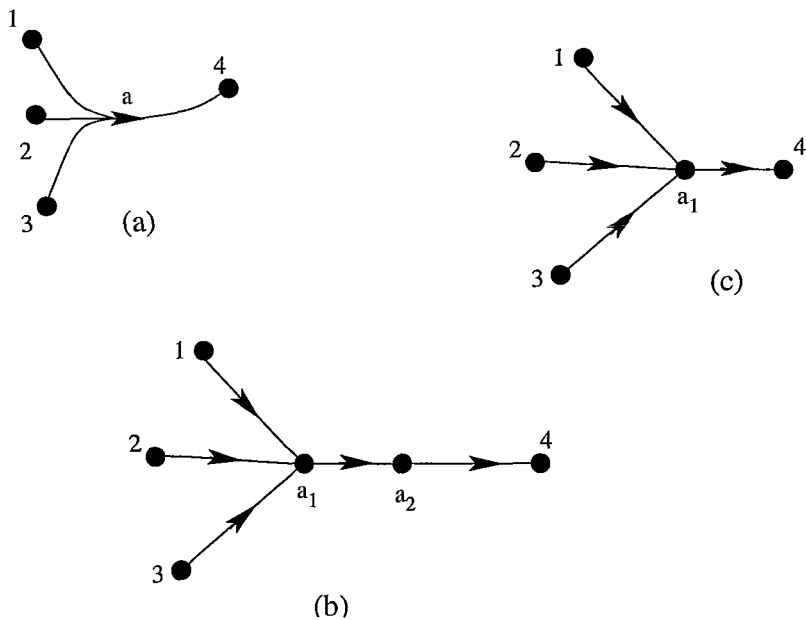


Figura 5.11: Transformação de um B-arco

**Prova:** Como  $H$  é um BF-grafo, todos os seus hiper-arcos são ou B-arcos ou F-arcos. Ao contruir o grafo estrutura de  $H$ ,  $H_E$ , (pela definição 5.3), os vértices  $a_1$ , tais que  $a$  é um F-arco, e os vértices  $b_2$  tais que  $b$  é um B-arco, têm grau 2 (como na figura 5.11(b)) e podem ser removidos (unificando os dois arcos incidentes), gerando o grafo  $H'_E$ . Como todo par de vértices  $e_1$  e  $e_2$  tem pelo um que foi removido, então  $H'_E$  é isomorfo ao grafo  $H_B$  (da definição 5.1). Como as transformações feitas em  $H_E$  para chegarmos a  $H'_E$  não alteram a planaridade,  $H_E$  é planar se, e somente se,  $H_B$  for planar. Logo  $H$  é planar se, e somente se, for Zykov-planar.  $\square$

Podemos também enunciar um corolário deste teorema.

**Corolário 5.2.** *Se  $G$  é um grafo direcionado, então  $G$  é planar se, e somente se, for Zykov-planar.*

**Prova:**  $G$  é um BF-grafo.  $\square$

Vimos na seção 2.2 que podemos transformar qualquer hipergrafo direcionado em um BF-grafo. Baseados no teorema 5.1 e nesta transformação poderíamos pensar que

todo hipergrafo direcionado é planar se for Zykov-planar. Entretanto vale lembrar que esta transformação preserva a planaridade, mas não a planaridade de Zykov.

Ou seja, se  $H$  é um hipergrafo direcionado qualquer e  $H'$  o BF-grafo obtido a partir de  $H$  (veja seção 2.2) e  $H$  é Zykov-planar mas não é planar, então  $H'$  não é nem planar nem Zykov-planar. O que apenas confirma que a definição de planaridade para hipergrafos direcionados deve mesmo ser distinta da planaridade de Zykov.

Como a construção do grafo estrutura  $H_E$  pode ser feita em tempo linear no tamanho do hipergrafo  $H = (V, E)$  ( $|H|$ ), e decidir a planaridade de um grafo também pode ser feita em tempo linear no seu número de vértices, vemos que podemos decidir se um hipergrafo direcionado  $H$  é planar em tempo linear no seu tamanho. Note que o número de vértices do grafo estrutura é igual a  $|V| + |E|$  que é menor que  $|H|$ .

# Capítulo 6

## Intervalos

No estudo de compiladores e linguagens de programação, os grafos têm tido um importante papel. Em diversas situações os grafos podem ser usados para aumentar a confiabilidade e a velocidade dos projetos de compiladores.

Neste contexto surgiram os grafos de fluxo e os intervalos [22, 23], que são usados para estudar o fluxo de controle de um programa, ou para calcular o fluxo de dados.

Como estes conceitos não são tão comuns, vamos apresentá-los aqui para que possamos entender melhor como estendê-los para hipergrafos direcionados.

Um grafo de fluxo seria um grafo que representa o fluxo de controle de um programa, seus vértices representam as instruções e as arestas, as dependências de execução.

**Def. 6.1.** *Um grafo de fluxo é uma tripla  $G = (V, E, s)$ , onde  $(V, E)$  é um grafo direcionado,  $s \in V$  é o vértice origem, e existe um caminho de  $s$  para qualquer outro vértice em  $V$ .*

Em um grafo de fluxo podemos agrupar vértices que representam um trecho de programa não muito complexo.

**Def. 6.2.** *Seja  $G = (V, E, s)$  um grafo de fluxo. O intervalo com início em  $v$ ,  $I(v)$ , é um conjunto de vértices definido da seguinte forma:*

(i)  $v \in I(v)$ ;

(ii) Se  $y$  é um vértice tal que  $y \neq s$ , e  $\forall (x, y) \in E, x \in I(v)$ , então  $y \in I(v)$ .

Vamos apresentar estes conceitos estendidos para hipergrafos direcionados. Como vamos definir hipergrafo de fluxo como uma generalização de grafo de fluxo, o conceito de intervalos também será generalizado.

Mas, antes de começarmos, precisamos fazer algumas extensões no nosso conceito de hipergrafo direcionado, já que em algumas situações podemos gerar estruturas que não satisfazem a definição. A extensão equivalente em grafos direcionados é a de permitir laços, que são arestas com origem igual ao destino.

**Def. 6.3.** *Um hipergrafo direcionado estendido  $H = (V, E)$  é uma dupla, onde  $V$  é um conjunto (finito) de vértices e  $E$  é um conjunto de hiper-arcos. Um hiper-arco  $e \in E$  é um par  $(X, Y)$  onde  $X$  e  $Y$  são subconjuntos (não necessariamente disjuntos) de  $V$ .*

Veja que com esta nova definição os conjuntos origem e destino de cada hiper-arco podem ter intersecção. Em particular, podem aparecer os **laços**, que são hiper-arcos da forma  $a = (X, X)$ . Quando  $|X| = 1$  chamaremos  $a$  de **laço simples**.

Considere que os hipergrafos direcionados mencionados deste ponto em diante são hipergrafos direcionados estendidos.

Na próxima seção apresentaremos a definição de hipergrafo de fluxo, e em seguida apresentaremos os intervalos. Vamos também analisar em detalhes sua estrutura interna e como eles se relacionam entre si. Apresentaremos uma subdivisão de um intervalo em camadas, e esta organização nos será útil na demonstração de alguns resultados.

Vale notar que tais estruturas são válidas também para grafos de fluxo, e que são importantes para entendermos melhor o que acontece em um hipergrafo de fluxo.

## 6.1 Hipergrafo de Fluxo

Baseados na definição de *grafos de fluxo* podemos definir um conceito equivalente para hipergrafos direcionados.

Vamos então aos hipergrafos de fluxo.

**Def. 6.4.** Um **hipergrafo de fluxo** é uma tripla  $H = (V, E, s)$ , onde  $(V, E)$  é um hipergrafo direcionado,  $s \in V$  é o vértice origem, e existe um B-caminho de  $s$  para qualquer outro vértice em  $V$ .

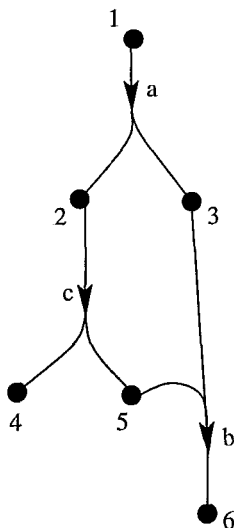


Figura 6.1: Hipergrafo de fluxo com  $s = 1$

A figura 6.1 apresenta um exemplo de hipergrafo de fluxo com origem  $s = 1$ .

Nestas definições utilizamos o conceito de B-caminho, ao invés de simplesmente hiper-caminho. Esta escolha é a mais adequada pois preserva a idéia de fluxo.

Veja também que quando temos um grafo direcionado, a definição coincide com a definição de grafo de fluxo.

## 6.2 Intervalos

Podemos definir conjuntos de vértices com certas propriedades de conectividade. Tais conjuntos são definidos como um fechamento, e são chamados de **intervalos**. Os intervalos em um hipergrafo de fluxo são extensões do conceito de intervalos em grafos de fluxo.

**Def. 6.5.** Seja  $H = (V, E, s)$  um hipergrafo de fluxo, e  $v$  um vértice de  $H$ . O **intervalo com início em  $v$** ,  $I(v)$ , é um conjunto de vértices definido da seguinte forma:

(i)  $v \in I(v)$ ;

(ii) Seja  $Y$  é um conjunto destino tal que  $\forall y \in Y, y \neq v, \text{Org}(BS(y)) \subseteq I(v)$ . Se  $v = s$  ou  $s \notin Y$  então  $Y \subseteq I(v)$ .

Observe que todos os vértices do conjunto destino  $Y$  devem entrar em  $I(v)$  juntos, e que só entram em  $I(v)$  os vértices que têm todos os hiper-arcos de entrada vindos de  $I(v)$ .

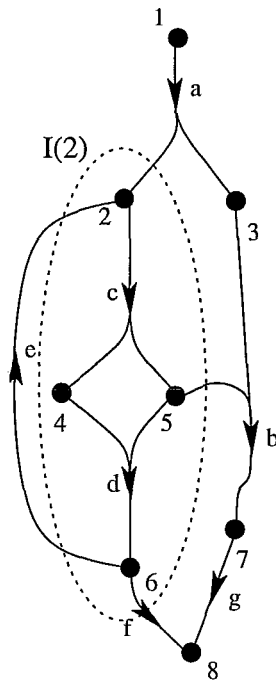


Figura 6.2: Intervalo  $I(2)$

Veja na figura 6.2 um hipergrafo de fluxo, com  $s = 1$ , e o intervalo  $I(2)$ . Inicialmente temos o vértice 2, depois entram os vértices 4 e 5, que são o destino do hiper-arco  $c$ . Por último, entra o vértice 6, como sendo o destino do hiper-arco  $d$ . O vértice 8 não entra em  $I(2)$  pois o hiper-arco  $g$ , que está em  $BS(8)$ , não tem origem em  $I(2)$ . E o vértice 7 não entra pois a origem do hiper-arco  $b$  não está totalmente em  $I(2)$ .

Perceba também que, pela definição de intervalo o vértice origem,  $s$ , só aparece no intervalo  $I(s)$ .

**Lema 6.1.** *Seja  $H = (V, E, s)$  um hipergrafo de fluxo, e  $v$  um vértice de  $H$ . Se  $s \in I(v)$  então  $v = s$ .*

**Prova:** Pela definição de intervalo, os vértices entram em  $I(v)$  em blocos formados por conjuntos destino. Se  $v \neq s$ , então nenhum dos conjuntos destino que pode entrar em  $I(v)$  podem conter  $s$ . Logo  $s \notin I(v)$ .  $\square$

Veremos então algumas propriedades destes intervalos e como podemos organizar os vértices em função deles.

### 6.2.1 A Estrutura Interna do Intervalo

Podemos fazer algumas observações sobre intervalos e sua estrutura interna.

Os intervalos são estruturados em camadas, formando uma ordem parcial dos vértices, que aparece como uma possível ordem de entrada no intervalo. Podemos usar estas camadas como estrutura para provarmos alguns resultados.

**Def. 6.6.** *Seja  $H = (V, E, s)$  um hipergrafo de fluxo, e  $v$  um vértice de  $H$ . As camadas  $I_0(v), I_1(v), \dots, I_p(v)$  do intervalo  $I(v)$  são definidas da seguinte forma:*

$$I_0(v) = \{v\};$$

$$I_k(v) = \{x \in (I(v) \setminus \bigcup_{i=0}^{k-1} I_i(v)) \mid \text{Org}(BS(x)) \subseteq \bigcup_{i=0}^{k-1} I_i(v)\}.$$

Perceba que existe um limite  $p$  a partir do qual as camadas serão todas vazias, e antes disso nenhuma camada será vazia. E todo vértice de  $I(v)$  aparece em alguma camada, e só uma, ou seja, as camadas formam uma partição do intervalo.

Como as camadas formam uma partição, podemos usar uma notação para indicar qual a camada de um intervalo que contém um certo vértice.

**Def. 6.7.** *Seja  $H = (V, E, s)$  um hipergrafo de fluxo e  $v, w \in V$ , com  $w \in I(v)$ . O nível de  $w$  em  $I(v)$  é dado por  $L_v(w)$ , e é tal que  $w \in I_{L_v(w)}(v)$ .*



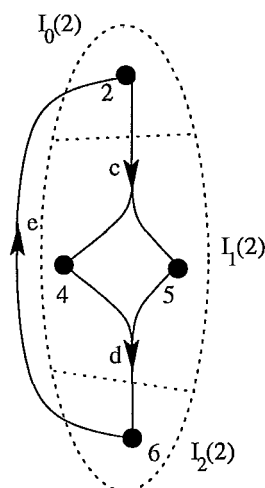


Figura 6.3: Camadas do intervalo  $I(2)$

Além disso, não existe em  $H$  nenhum hiper-arco em que ambos os conjuntos origem e destino tenham intersecção com uma destas camadas, a menos da primeira,  $I_0(v)$ . Veja na figura 6.3 as camadas do intervalo  $I(2)$ , onde  $I_1(2) = \{4, 5\}$ .

**Lema 6.2.** *Seja o vértice  $v$  e o intervalo  $I(v)$ . Para cada camada  $I_k(v)$ , com  $k > 0$ , todos os hiper-arcos  $a$  onde  $Dest(a) \cap I_k(v) \neq \emptyset$ , são tais que  $Org(a) \subseteq \bigcup_{i=0}^{k-1} I_i(v)$ .*

**Prova:** Seja  $a$  um hiper-arco e  $I_k(v)$  uma camada tais que  $Dest(a) \cap I_k(v) \neq \emptyset$ . Então existe um vértice  $x \in Dest(a) \cap I_k(v)$ . Pela definição temos que  $Org(BS(x)) \subseteq \bigcup_{i=0}^{k-1} I_i(v)$ . Como  $a \in BS(x)$ , então  $Org(a) \subseteq \bigcup_{i=0}^{k-1} I_i(v)$ .  $\square$

Além disso, podemos também afirmar que  $Org(BS(x))$  tem pelo menos um vértice na camada imediatamente anterior.

**Lema 6.3.** *Seja o vértice  $v$  e o intervalo  $I(v)$ . Dada a camada  $I_k(v)$ , com  $k > 0$ , para todo  $x \in I_k(v)$  temos que  $Org(BS(x)) \cap I_{k-1}(v) \neq \emptyset$ .*

**Prova:** Se  $Org(BS(x)) \cap I_{k-1}(v) = \emptyset$ , então  $Org(BS(x)) \subseteq \bigcup_{i=0}^{k-2} I_i(v)$ , e portanto deveríamos ter  $x \in I_{k-1}(v)$ .  $\square$

Veja que só a primeira camada pode receber hiper-arcos que tenham vindo de

camadas da frente ou de fora. E como a primeira camada só contém o vértice inicial, temos que este é a única entrada do intervalo.

**Corolário 6.4.** *Todo hiper-arco com origem não completamente contida no intervalo, que tem destino no intervalo, chega somente no vértice inicial.*

**Prova:** Pelo lema 6.2. □

**Lema 6.5.** *Todo ciclo dentro de um intervalo tem um retorno ao vértice inicial, e a mais nenhum outro do intervalo.*

**Prova:** Como o intervalo está dividido em camadas, se existe um ciclo, a cada hiper-arco temos que mudar de camada, e assim, vamos caminhando de camada em camada, até que algum hiper-arco (retorno) tem um vértice de uma camada anterior no destino. Isso só pode acontecer se esta camada for a primeira camada (veja lema 6.2). Logo, só podemos retornar para o vértice inicial. □

**Lema 6.6.** *Seja  $H = (V, E, s)$  um hipergrafo de fluxo, e seja  $v$  e  $w$  vértices distintos de  $H$ . Se  $w \in I(v)$ , então todo hiper-caminho de  $s$  a  $w$  passa por  $v$ .*

**Teorema 6.7.** *Seja  $H = (V, E, s)$  um hipergrafo de fluxo, e sejam  $v$  e  $w$  vértices distintos de  $H$ . Se  $w \in I(v)$ , então todo B-caminho de  $s$  a  $w$  passa por  $v$  e termina com um B-caminho de  $v$  a  $w$ .*

**Prova:**

(por indução)

(base)

Se  $w \in I_1(v)$ , então todo B-caminho de  $s$  a  $w$  termina em algum hiper-arco que tem origem igual a  $\{v\}$ . Logo, todo B-caminho de  $s$  a  $w$  passa por  $v$  e termina com um B-caminho de  $v$  a  $w$  (hiper-arco final).

(hipótese)

Se  $w \in I_k(v)$ , então todo B-caminho de  $s$  a  $w$  passa por  $v$  e termina com um B-caminho de  $v$  a  $w$ .

(passo)

Suponha que  $w \in I_{k+1}(v)$ . Todo B-caminho de  $s$  a  $w$  termina com um hiper-arco cuja origem está em camadas anteriores a  $I_{k+1}(v)$ . Seja  $C$  um destes B-caminhos, e  $a$  o último hiper-arco de  $C$ . Para cada  $y \in \text{Org}(a)$  existe um B-caminho de  $s$  a  $y$ ,  $C_y$ , formado por hiper-arcos de  $C$ . E, como  $y \in I_j(v)$ , com  $j \leq k$ , cada um dos  $C_y$  passa por  $v$  e termina com um B-caminho de  $v$  a  $y$ . Então, todo B-caminho de  $s$  a  $w$  passa por  $v$  e termina com um B-caminho de  $v$  a  $w$ .  $\square$

## 6.2.2 Entre os Intervalos

Vamos estudar agora as relações entre os intervalos e entre intervalos e vértices.

Primeiramente podemos perceber que se um vértice  $w$  está em um intervalo  $I(v)$ , então todo intervalo  $I(w)$  também estará em  $I(v)$ .

**Lema 6.8.** *Seja  $H = (V, E, s)$  um hipergrafo de fluxo e  $v, w \in V$ . Se  $w \in I(v)$  então  $I(w) \subseteq I(v)$ .*

**Prova:** Vamos provar por indução que todas as camadas de  $I(w)$  estão em  $I(v)$ .

(base)

$I_0(w) \subseteq I(v)$  já que  $I_0(w) = \{w\}$  e  $w \in I(v)$ .

(hipótese)

Para  $i \leq k$ , temos que  $I_i(w) \subseteq I(v)$ .

(passo)

Vejamos se  $I_{k+1}(w) \subseteq I(v)$ .

Pela definição de intervalo, para cada  $x \in I_{k+1}(w)$  existe um hiper-arco  $a = (X, Y)$  tal que  $x \in Y$  e que se  $w \neq s$  então  $s \notin Y$ , e  $\forall y \in Y, y \neq w, \text{Org}(BS(y)) \subseteq I(w)$ .

Veremos que tal hiper-arco satisfaz também as condições para que  $Y$  seja incluído em  $I(v)$ .

Primeiro temos que ver se é verdade que se  $v \neq s$  então  $s \notin Y$ . Observe que se  $w \neq s$  então  $s \notin Y$  e não temos problemas. Por outro lado, se  $w = s$ , veja que

$s \in I(v)$ , o que implica, segundo o lema 6.1, em  $v = s$  e  $v = w$ . Por hipótese isso não é verdade. Então  $s \notin Y$ . Logo é verdade que se  $v \neq s$  então  $s \notin Y$ .

Agora temos que garantir que  $\forall y \in Y, y \neq v, Org(BS(y)) \subseteq I(v)$ . Para  $y \neq v$  e  $y \neq w$  temos que  $Org(BS(y)) \subseteq I(w)$ , mas  $Org(BS(y))$  fica em camadas anteriores (lema 6.2). Pela hipótese da indução todas as camadas anteriores estão em  $I(v)$ , logo temos que  $Org(BS(y)) \subseteq I(v)$ . Falta verificar para  $y = w$ , se  $w \in Y$ . Mas  $w \in I(v)$ , e  $w \neq v$ , portanto é verdade que  $Org(BS(w)) \subseteq I(v)$ .

Então  $Y \subseteq I(v)$ , logo  $I_{k+1}(w) \subseteq I(v)$ . □

Embora este lema seja bastante interessante, é apenas uma parte de um resultado maior. Veremos que dados dois intervalos, ou não existe intersecção entre eles, ou um está contido no outro.

**Teorema 6.9.** *Seja  $H = (V, E, s)$  um hipergrafo de fluxo e  $v, w \in V$ . Se  $I(v) \cap I(w) \neq \emptyset$  então ou  $I(v) \subseteq I(w)$  ou  $I(w) \subseteq I(v)$ .*

**Prova:** Suponha que  $I(v) \cap I(w) \neq \emptyset$ . Veremos que ou  $v \in I(w)$  ou  $w \in I(v)$ . E pelo lema 6.8, teremos que ou  $I(v) \subseteq I(w)$  ou  $I(w) \subseteq I(v)$ .

Escolha  $z \in I(v) \cap I(w)$ . Suponha que  $L_w(z) \leq L_v(z)$ . Provaremos por indução em  $L_w(z)$  que  $w \in I(v)$  (se  $L_v(z) \leq L_w(z)$  então  $v \in I(w)$ ).

(base)

Se  $z \in I(v) \cap I(w)$  e  $L_w(z) = 0$  então  $z = w$ . Como  $z \in I(v)$ , então  $w \in I(v)$ .

(hipótese)

Se  $z \in I(v) \cap I(w)$ ,  $L_w(z) \leq L_v(z)$ , e  $L_w(z) < M$ , então  $w \in I(v)$ .

(passo)

Suponha que  $z \in I(v) \cap I(w)$ ,  $L_w(z) \leq L_v(z)$ , e  $L_w(z) = M > 0$ . Veremos que existe um  $z' \in I(v) \cap I(w)$  tal que  $L_w(z') \leq L_v(z')$  e  $L_w(z') < M$ .

Pela definição das camadas, temos que  $Org(BS(z)) \subseteq \bigcup_{i=0}^{L_w(z)-1}$ . Como  $L_w(z) > 0$ , existe um vértice  $z' \in Org(BS(z))$ , e portanto  $z' \in \bigcup_{i=0}^{L_w(z)-1}$ . Assim,  $L_w(z') < L_w(z)$ , então  $L_w(z') < M$ .

Como  $z \in I(v)$ , temos também que  $Org(BS(z)) \subseteq I(v)$ , logo  $z' \in I(v)$ . Assim, temos que  $z' \in I(v) \cap I(w)$ .

Pelo lema 6.3, podemos escolher  $z'$  tal que  $L_v(z') = L_v(z) - 1$ . Como  $L_w(z) \leq L_v(z)$ , então  $L_w(z') \leq L_v(z')$ .

Pela hipótese da indução (usando  $z'$ ),  $w \in I(v)$ . □

Com este teorema podemos ver que os vértices de um intervalo  $I(v)$  podem ser organizados em uma ordem parcial de inclusão dos intervalos.

**Def. 6.8.** *Seja  $H = (V, E, s)$  um hipergrafo de fluxo. A ordem parcial  $\succ$  sobre  $V$  é tal que  $v \succ w$  se e somente se  $I(w) \subset I(v)$ .*

Pelo teorema 6.9, o diagrama de Hasse da ordem parcial  $\succ$ , restrita a um intervalo, forma uma árvore.

Veja na figura 6.4 a árvore que representa o diagrama de Hasse da ordem  $\succ$  no intervalo  $I(2)$  do hipergrafo da figura 6.2. Lembre que  $I(2) = \{2, 4, 5, 6\}$ ,  $I(4) = \{4\}$ ,  $I(5) = \{5\}$  e  $I(6) = \{6\}$ .

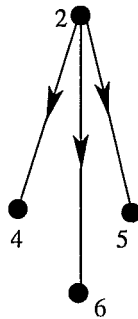


Figura 6.4: Árvore de  $\succ$  com os vértices de  $I(2)$

Observe que o vértice inicial de um intervalo será sempre a raiz da árvore restrita aos vértices do intervalo.

**Lema 6.10.** *Seja o vértice  $v$  e seu intervalo  $I(v)$ . Então para todo  $w \in I(v)$ ,  $w \neq v$ , temos que  $v \succ w$ .*

**Prova:** Para todo  $w \in I(v)$ ,  $w \neq v$ , temos que  $I(w) \subset I(v)$ , pelo lema 6.8. Logo, pela definição da ordem  $\succ$ , temos que  $v \succ w$ .  $\square$

Quando construímos todos os intervalos, a ordem parcial de inclusão nos leva a uma floresta de vértices. E as raízes desta floresta representam os intervalos que não estão contidos em nenhum outro, e portanto formam uma partição dos vértices do hipergrafo.

**Def. 6.9.** *Seja  $H = (V, E, s)$  um hipergrafo de fluxo. Os **intervalos maximais** de  $H$  são os intervalos que não estão contidos em nenhum outro.*

**Lema 6.11.** *Os intervalos maximais de um hipergrafo de fluxo  $H = (V, E, s)$  formam uma partição de  $V$ .*

**Prova:** Precisamos provar que os intervalos maximais são disjuntos e a união deles é igual ao conjunto  $V$ .

Pelo teorema 6.9, os intervalos maximais são disjuntos, ou teríamos um intervalo contido em outro, o que contradiz a definição de intervalo maximal.

Todo  $v \in V$  está em pelo menos um intervalo,  $I(v)$ . Pelo lema 6.8 podemos ver que o intervalo  $I(v)$  ou é um intervalo maximal, ou está contido em um intervalo maximal. Logo, todo  $v \in V$  está em algum intervalo maximal. Como também temos que todo intervalo de  $H$  está contido em  $V$ , a união dos intervalos maximais é igual a  $V$ .  $\square$

Veremos que os vértices iniciais dos intervalos maximais são as raízes da floresta que representa a ordem parcial  $\succ$ .

**Teorema 6.12.** *Seja  $H = (V, E, s)$  um hipergrafo de fluxo. Se  $I(v)$  é um intervalo maximal de  $H$ , então não existe  $z \in V$  tal que  $z \succ v$ .*

**Prova:** Pela definição de intervalo maximal não existe outro intervalo,  $I(z)$  que o contenha. Ou seja, não existe  $z \in V$  tal que  $I(v) \subset I(z)$ , logo, não existe  $z \in V$  tal que  $z \succ v$ .  $\square$

Uma última observação pode ser feita em relação ao vértice origem de um hipergrafo de fluxo.

**Lema 6.13.** *Seja  $H = (V, E, s)$  um hipergrafo de fluxo. O intervalo  $I(s)$  é sempre um dos intervalos maximais.*

**Prova:** Pelo lema 6.1, o vértice origem  $s$  só aparece no intervalo  $I(s)$ , logo,  $I(s)$  não pode estar contido em nenhum outro intervalo. Portanto,  $I(s)$  é um dos intervalos maximais.  $\square$

# Capítulo 7

## Hipergrafos Redutíveis

Os grafos redutíveis tem sido estudados tanto por suas aplicações na modelagem de fluxo de controle em compiladores [22, 23], como por suas propriedades como uma família de grafos [44, 45, 46].

O conceito de redutibilidade está associado aos grafos de fluxo apresentado no capítulo 6, ou melhor, os grafos redutíveis são grafos de fluxo com propriedades especiais.

Três das propriedades mais importantes dos grafos redutíveis podem ser vistas abaixo [45, 46].

Seja  $G = (V, E, s)$  um **grafo redutível**, então:

**R1:** Todos os ciclos têm uma única entrada;

**R2:** Qualquer busca em profundidade iniciada no vértice  $s$  determina o mesmo conjunto de arcos de retorno;

**R3:**  $G$  não contém o subgrafo proibido  $SP(s, x, y, z)$  apresentado na figura 7.1.

São justamente estas propriedades que fazem dos grafos redutíveis uma importante família de grafos que pode ser usada na área de compiladores.

Existem várias formas de se definir um grafo de fluxo redutível, entretanto todas são equivalentes. Algumas destas definições usam as propriedades acima (principalmente **R2** e **R3**) como caracterizações desta família.

Uma das definições diz que um grafo de fluxo é dito redutível quando se consegue



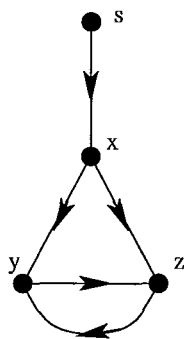


Figura 7.1: Subgrafo proibido  $SP(s, x, y, z)$  (arestas representam caminhos)

reduzi-lo a um grafo com um único vértice e sem arcos. Para se fazer esta redução são usadas contrações sucessivas em determinados conjuntos de vértices. Esta definição é justamente a que dá o nome a família, e representa por completo o conceito redutibilidade. Por este motivo usaremos as contrações para definir redutibilidade em hipergrafos direcionados.

Ao fazermos uma contração em um hipergrafo, um conjunto  $S$  de vértices é trocado por um único vértice  $v$ . Se  $X$  é o conjunto de vértices onde queremos efetuar a contração, então usaremos a função

$$C_{S,v}(X) = \begin{cases} X \setminus S \cup \{v\} & \text{se } X \cap S \neq \emptyset \\ X & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Podemos ver um exemplo da aplicação desta função usando os vértices da figura 7.2. Suponha que o conjunto  $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , o vértice  $v = 2$  e o conjunto  $S = \{4, 5, 6\}$ , então  $C_{S,v}(X) = \{1, 2, 3\}$ . Perceba que se o vértice  $v$  estiver em  $S$  o resultado é o mesmo.

**Def. 7.1.** *Seja  $H = (V, E, s)$  um hipergrafo de fluxo,  $S \subseteq V$  um conjunto de vértices, e  $v \in V$  um vértice. A contração em  $H$  de  $S$  por  $v$ , é o hipergrafo **Contração** $(H, S, v) = (V', E', s')$ , onde:*

$$V' = C_{S,v}(V);$$

$$E' = \{(C_{S,v}(X), C_{S,v}(Y)) \mid a = (X, Y) \in E, (X \cup Y) \not\subseteq (S \cup \{v\})\};$$

se  $s \in S$  então  $s' = v$ , senão  $s' = s$ .

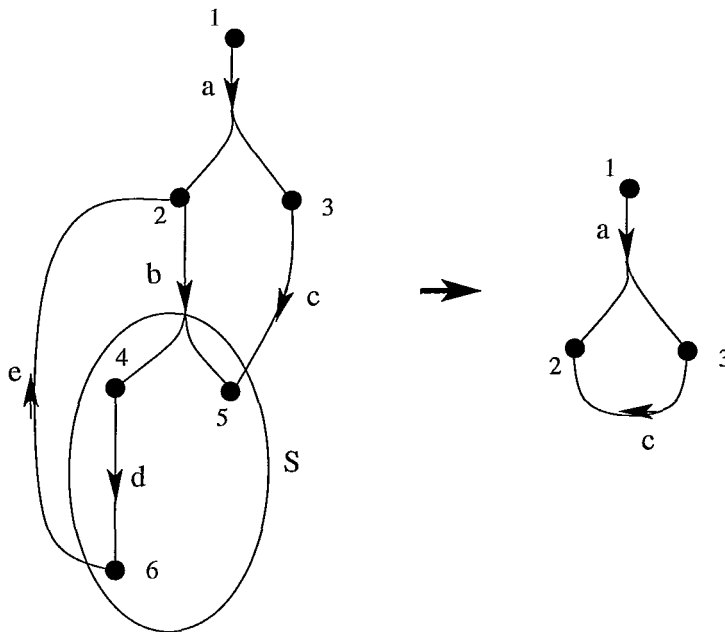


Figura 7.2: Hipergrafo Contração( $H, S, 2$ )

Veja na figura 7.2 um exemplo de uso do operador de contração. Perceba que os hiper-arcos  $b$ ,  $c$  e  $e$  são removidos e o hiper-arco  $c$  passa a ter o vértice 2 no destino.

Usaremos esta operação para definir os hipergrafos redutíveis, apenas restringindo quando e onde podemos aplicá-la.

Apresentaremos aqui a redutibilidade por intervalos, que é definida por contrações nos intervalos; e por transformações, que usa contrações em hiper-arcos.

## 7.1 Redutibilidade por Intervalos

O conceito de redutibilidade por intervalos leva em conta os intervalos maximais definidos no capítulo 6. Lembremos que estes intervalos formam uma partição do conjunto de vértices.

Na figura 7.3 o hipergrafo de fluxo da figura 6.2 é rerepresentado, desta vez subdividido em intervalos. Os vértices iniciais dos intervalos maximais são os vértices 1, 2, 3, 7 e 8.

Podemos então definir um novo hipergrafo de fluxo que tem os intervalos maxi-

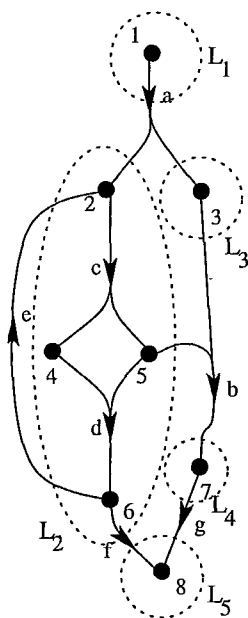


Figura 7.3: Hipergrafo de fluxo subdividido em intervalos

mais como vértices. Neste novo hipergrafo fizemos uma contração dos intervalos nos seus vértices iniciais. Como os intervalos maximais são disjuntos, podemos fazer as contrações em qualquer ordem.

**Def. 7.2.** *Seja  $H = (V, E, s)$  um hipergrafo de fluxo, e sejam  $L_1, L_2, \dots, L_k$  seus intervalos maximais,  $s_1, s_2, \dots, s_k$ , seus respectivos vértices iniciais. O hipergrafo de fluxo  $I(H) = (V', E', s)$ , chamado de **hipergrafo de intervalos**, é construído com a contração de seus intervalos maximais nos seus respectivos vértices iniciais.*

$$I(H) = \text{Contração}(\dots \text{Contração}(\text{Contração}(H, L_1, s_1), L_2, s_2) \dots L_k, s_k)$$

*O vértice inicial  $s$  é o mesmo, já que  $s$  é o vértice inicial de algum intervalo.*

O hipergrafo de intervalos do hipergrafo da figura 7.3 pode ser visto na figura 7.4.

Podemos aplicar esta transformação repetidas vezes, gerando uma seqüência de hipergrafos de fluxo,  $H, I(H), I^2(H), \dots, I^p(H)$ , onde  $p$  é tal que  $I^{p+1}(H) = I^p(H)$ . Denotaremos este hipergrafo final por  $I^*(H)$ .

Observe que ou  $I(H)$  tem menos vértices que  $H$ , ou é igual a  $H$ . Então esta seqüência sempre termina.

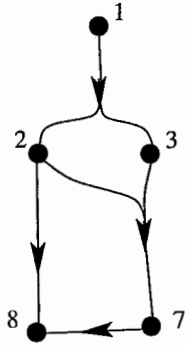


Figura 7.4: Hipergrafo de intervalos

**Def. 7.3.** Se  $I^*(H)$  é um hipergrafo com um único vértice e sem hiper-arcos, então  $H$  é dito *redutível por intervalos*.

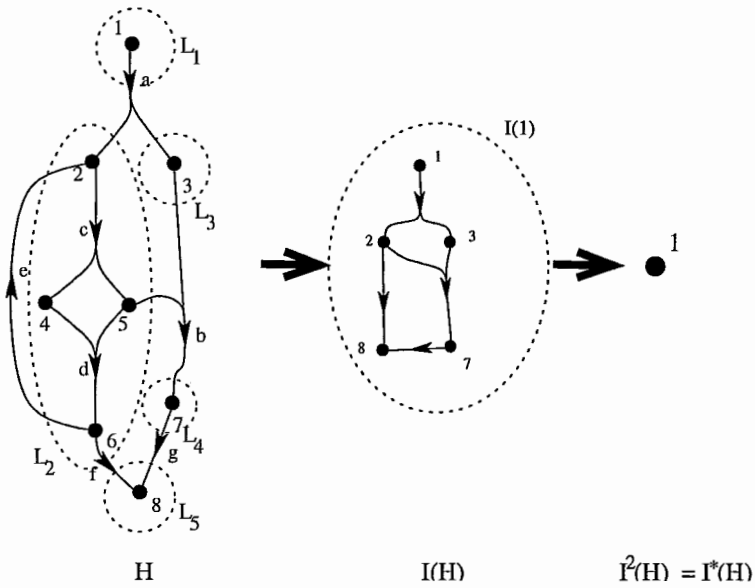


Figura 7.5: Seqüência de hipergrafos de intervalo

Na figura 7.5 podemos ver a seqüência  $H, I(H), I^2(H)$ . Veja que o hipergrafo de fluxo  $H$  é redutível por intervalos, visto que  $I^2(H)$  é o hipergrafo trivial de um unico vértice.

## 7.2 Redutibilidade por Transformações

Uma outra forma de definir redutibilidade envolve o uso de transformações locais que buscam o mesmo efeito da contração por intervalos. Estas transformações são generalizações das usadas em grafos de fluxo.

Em um grafo de fluxo podemos definir duas transformações de contração de arcos,  $T_1$  e  $T_2$ .

**Def. 7.4** ([22, 23]). *Seja  $G = (V, E, s)$  um grafo de fluxo. Suponha que existe um arco  $a = (x, x) \in E$  (laço). A **transformação  $T_1$**  no arco  $a$  é a remoção deste arco de  $E$ .*

**Def. 7.5** ([22, 23]). *Seja  $G = (V, E, s)$  um grafo de fluxo. Suponha que existe um arco  $a = (x, y) \in E$ , tal que  $s \neq y$  e  $x$  é o único predecessor de  $y$ . A **transformação  $T_2$**  no arco  $a$  é a remoção deste arco de  $E$ , e a identificação do vértice  $y$  com o vértice  $x$ , causando a mudança de todos os arcos que usam o vértice  $y$ . Onde aparece  $y$  passa a aparecer  $x$ .*

Aplicamos estas transformações sucessivas vezes até chegarmos a um grafo onde nenhuma destas transformações pode mais ser aplicada. Seja  $T^*(G)$  este grafo, assim podemos definir a redutibilidade por transformações.

**Def. 7.6.** *Se  $T^*(G)$  é um grafo com um único vértice e sem arcos, então  $G$  é dito **redutível por transformações**.*

Podemos estender esta definição para hipergrafos direcionados encontrando duas transformações de contração de hiper-arcos que sejam extensões das transformações em grafos.

Dado um hipergrafo de fluxo, podemos definir duas transformações de contração de hiper-arcos,  $T_1$  e  $T_2$ . Nestas transformações, faremos a contração de um F-arco, resultando na sua remoção.

**Def. 7.7** ( $T_1$ ). *Dado  $H = (V, E, s)$  um hipergrafo de fluxo e o laço simples  $a = (\{x\}, \{x\}) \in E$ . O hipergrafo  $T_1(H, a)$  é definido por:*

$$T_1(H, a) = \text{Contração}(H, \{x\}, x).$$

Perceba que, como  $a = (\{x\}, \{x\})$ , então  $a \subseteq \{x\}$ , logo  $a$  não aparece em  $T_1(H, a)$ .

**Def. 7.8 ( $T_2$ ).** Dado  $H = (V, E, s)$  um hipergrafo de fluxo e um  $F$ -arco  $a = (\{x\}, Y) \in E$ , tal que  $\forall y \in Y, y \neq x, \text{Org}(BS(y)) = \{x\}$ ;  $x = s$  ou  $s \notin Y$ ; e  $a$  não seja um laço simples. O hipergrafo  $T_2(H, a)$  é definido por:

$$T_2(H, a) = \text{Contração}(H, Y, x).$$

Veja que  $a \subseteq (Y \cup \{x\})$ , e portanto não aparece em  $T_2(H, a)$ .

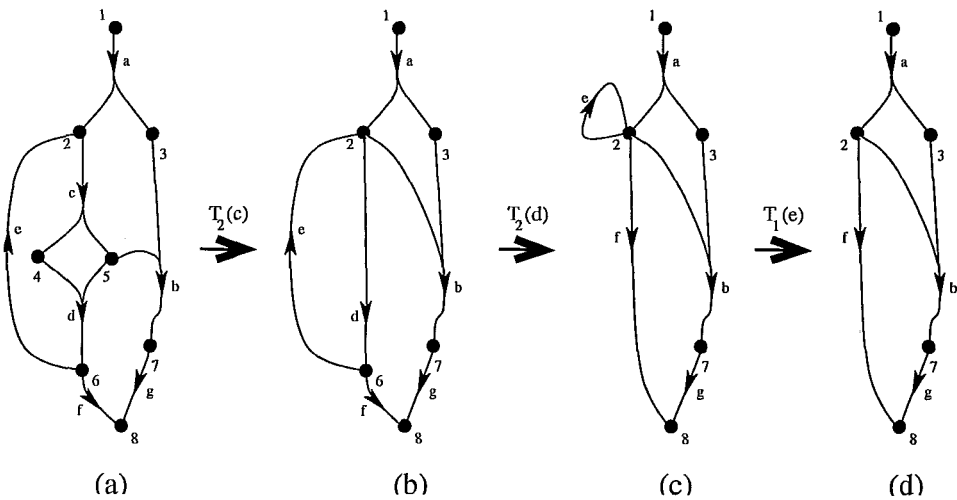


Figura 7.6: Transformações  $T_1$  e  $T_2$

Na figura 7.6 podemos ver um exemplo de aplicação das transformações  $T_1$  e  $T_2$  em um hipergrafo. Primeiro aplicamos  $T_2$  no hiper-arco  $c$  (figuras 7.6(a) e 7.6(b)). Veja que, no hipergrafo inicial (figura 7.6(a)),  $T_2$  também poderia ter sido aplicada no hiper-arco  $a$ , mas não nos hiper-arcos  $b$  e  $d$ , já que a origem deles não é unitária, e nem nos hiper-arcos  $e$ ,  $f$ , e  $g$ , já que no destino deles chegam outros hiper-arcos. Entretanto, no hipergrafo da figura 7.6(b), já podemos aplicar  $T_2$  no hiper-arco  $d$ , e temos como resultado o hipergrafo da figura 7.6(c). Neste ponto aparece o laço  $e$ , que é removido com a aplicação de  $T_1$  (figuras 7.6(c) e 7.6(d)).

**Def. 7.9.** Seja  $S$  o conjunto de hipergrafos de fluxo. As relações  $\Rightarrow_1$  e  $\Rightarrow_2$  são definidas sobre o conjunto  $S$  de forma que  $H \Rightarrow_i G$  se e somente se  $H$  pode ser transformado em  $G$  pela aplicação de  $T_i$ . A relação  $\Rightarrow$  é a união de  $\Rightarrow_1$  e  $\Rightarrow_2$ . Além disso  $\Rightarrow^*$  representa o fecho transitivo e reflexivo de  $\Rightarrow$ .

Para que as transformações  $T_1$  e  $T_2$  sejam usadas com sucesso, temos que garantir que  $\Rightarrow$  seja uma transformação finita de “Church-Rosser” [22]. Ou seja, o que precisamos é que as seqüências do tipo  $H_1, H_2, \dots, H_l, \dots$ , onde  $H_i \Rightarrow H_{i+1}$ , com  $i \geq 1$ , sejam finitas e que, dado um hipergrafo inicial, todas tenham o mesmo hipergrafo final. Isto implica que para cada  $H$  deve existir um  $H'$  tal que  $H \xRightarrow{*} H'$  e não existe  $Z$  tal que  $H' \Rightarrow Z$ . Chamaremos  $H'$  de  $T^*(H)$ .

O próximo lema resolve a questão sobre o tamanho das seqüências garantindo que são finitas.

**Lema 7.1.** *Toda seqüência de hipergrafos  $H_1, H_2, \dots, H_l, \dots$ , onde  $H_i \Rightarrow H_{i+1}$ , com  $i \geq 1$ , é finita.*

**Prova:** Um hipergrafo tem um número finito de hiper-arcos,  $m$ . As transformações  $T_1$  e  $T_2$  removem ao menos um hiper-arco. Logo, não posso aplicar as transformações mais do que  $m$  vezes, e portanto as seqüências são finitas.  $\square$

Para garantir a segunda parte, precisamos de algumas observações sobre a interdependência entre as transformações. Primeiramente veremos algumas características das transformações.

**Lema 7.2.** *Se podemos aplicar uma das transformações em um hiper-arco, então não podemos aplicar a outra no mesmo hiper-arco.*

**Prova:** Se podemos aplicar  $T_1$  no hiper-arco  $a$ , então  $a$  é um laço simples  $(\{x\}, \{x\})$ , e não podemos aplicar  $T_2$ .

Se, por outro lado, podemos aplicar  $T_2$  em  $a = (\{x\}, Y)$ , então  $a$  não é um laço simples, e não podemos aplicar  $T_1$ .  $\square$

**Lema 7.3.** *Sejam  $a$  e  $b$  dois hiper-arcos tais que posso aplicar  $T_2$  em qualquer um deles. Se  $Dest(a) \cap Dest(b) \neq \emptyset$  então  $Org(a) = Org(b)$ .*

**Prova:** Se posso aplicar  $T_2$  em  $a$  e  $b$ , então  $a$  e  $b$  têm origem unitária. Sejam  $Org(a) = \{v\}$  e  $Org(b) = \{w\}$ . Se  $Dest(a) \cap Dest(b) \neq \emptyset$  então existe um  $y \in Dest(a) \cap Dest(b)$ , e pela definição de  $T_2$  (definição 7.8),  $Org(BS(y)) = \{v\}$  (por  $a$ ) e  $Org(BS(y)) = \{w\}$  (por  $b$ ), logo  $v = w$ .  $\square$

Observe também que para aplicar  $T_1$  no hiper-arco  $a$ , basta que  $a$  seja um laço simples, e a remoção de outros hiper-arcos não pode fazer com que  $a$  deixe de ser um laço. E se posso aplicar  $T_2$  no hiper-arco  $a$ , a remoção de qualquer outro hiper-arco não pode impedir  $a$  de ser removido, com  $T_1$  ou  $T_2$ . Isso porque  $a$  pode virar um laço simples, e uso  $T_1$ , caso contrário, continuo podendo aplicar  $T_2$ .

**Lema 7.4.** *Sejam  $a$  e  $b$  dois hiper-arcos tais que posso aplicar  $T_2$  em qualquer um deles. Então ao aplicar  $T_2$  em  $a$ , ou ainda posso aplicar  $T_2$  em  $b$ , ou  $b$  virou um laço e posso aplicar  $T_1$ . E o resultado é o mesmo, independente da ordem.*

**Prova:** Temos que  $a = (\{x\}, Y)$  e  $b = (\{z\}, W)$ , e os vértices de  $Y$  só tem hiper-arcos chegando com origens iguais a  $\{x\}$ , e os vértices de  $W$  só tem hiper-arcos chegando com origens iguais a  $\{z\}$ .

Se  $Y \cap W = \emptyset$  então aplicar  $T_2$  em  $a$  não modifica  $b$  (veja figura 7.7). Logo ainda posso aplicar  $T_2$  no hiper-arco  $b$ .

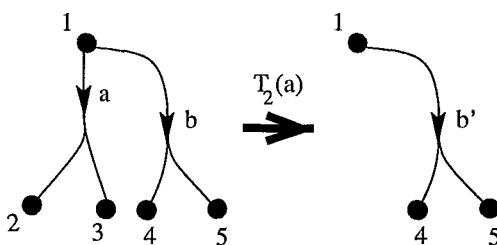


Figura 7.7: Ao aplicar  $T_2$  no hiper-arco  $a$ , ainda posso aplicar  $T_2$  no hiper-arco  $b'$

Caso contrário, temos que  $x = z$  (lema 7.3), e, ao aplicar  $T_2$  no hiper-arco  $a$ , o hiper-arco  $b$  é modificado para  $b' = (\{x\}, C_{Y,x}(W))$ . Se  $W \subseteq Y$ , então  $b'$  é um laço simples e pode ser removido com o uso de  $T_1$  (veja figura 7.8). Se  $W \not\subseteq Y$ , então ainda podemos aplicar  $T_2$  em  $b'$  (veja figura 7.9).  $\square$



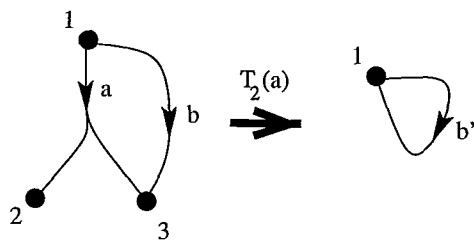


Figura 7.8: Ao aplicar  $T_2$  no hiper-arco  $a$ , o hiper-arco  $b$  vira um laço

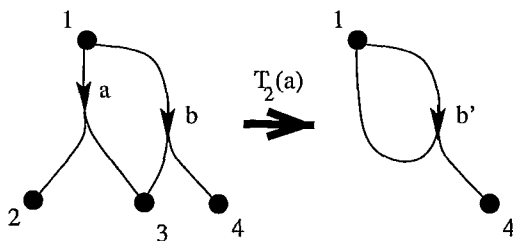


Figura 7.9: Ao aplicar  $T_2$  no hiper-arco  $a$ , ainda posso aplicar  $T_2$  no hiper-arco  $b'$

**Teorema 7.5.** *Se  $H$ ,  $H_1$  e  $H_2$  são hipergrafos tais que  $H \Rightarrow H_1$  e  $H \Rightarrow H_2$ , e  $H_1 \neq H_2$ , então existe um hipergrafo  $G$  tal que  $H_1 \Rightarrow G$  e  $H_2 \Rightarrow G$ .*

**Prova:** Como  $H \Rightarrow H_1$  e  $H \Rightarrow H_2$ , e  $H_1 \neq H_2$ , então posso transformar  $H$  em  $H_1$  e  $H_2$  com o uso de  $T_1$  ou  $T_2$ . Temos então algumas possibilidades. Suponha que para transformar  $H$  em  $H_1$  usamos a transformação  $T_i$  no hiper-arco  $a$ , e para transformar  $H$  em  $H_2$  usamos a transformação  $T_j$  no hiper-arco  $b$ . Como  $H_1 \neq H_2$ , pelo lema 7.2,  $a \neq b$ . Então temos apenas três casos:

$$i = j = 1$$

Temos que  $a$  e  $b$  são laços simples, e não importa a ordem em que serão removidos, logo basta remover o laço  $b$  de  $H_1$  para chegarmos a  $G$ , e o mesmo para o laço  $a$  de  $H_2$ .

$$i = j = 2$$

Veja lema 7.4.

$$i = 1 \text{ e } j = 2 \text{ (ou o contrário)}$$

Temos que  $a = (\{z\}, \{z\})$  é um laço e  $b = (\{x\}, Y)$ , e os vértices de  $Y$  só tem hiper-arcos chegando com origens iguais a  $\{x\}$ . Remover o laço não muda a

situação de  $b$ , e remover  $b$  não muda o fato de  $a$  ser um laço. Logo não importa a ordem.

□

Assim, pelo teorema 7.5, se temos um hipergrafo  $H$  e nele podemos fazer  $k$  diferentes transformações ( $T_1$  ou  $T_2$  em diferentes hiper-arcos), ao usarmos uma destas transformações, todas as outras  $k - 1$  ou continuam podendo ser usadas no hipergrafo resultante, ou podem ser trocadas por equivalentes. Logo, se não posso mais fazer nenhuma transformação é porque todas já foram feitas, e chegamos ao hipergrafo final e único,  $T^*(H)$ .

**Def. 7.10.** *Se  $T^*(H)$  é um hipergrafo com um único vértice e sem hiper-arcos, então  $H$  é dito **redutível por transformações**.*

### 7.3 Equivalência

Veremos que um hipergrafo de fluxo é redutível por intervalos se e somente se for redutível por transformações.

Vamos primeiro ver como ter o mesmo efeito da contração de um intervalo usando as transformações  $T_1$  e  $T_2$ , e depois chegarmos ao hipergrafo de intervalos.

**Lema 7.6.** *Seja  $H = (V, E, s)$  um hipergrafo de fluxo, e  $v \in V$  um vértice. Então  $H \xrightarrow{*} H'$ , onde  $H' = \text{Contração}(H, I(v), v)$ .*

**Prova:** O que queremos provar aqui é que podemos aplicar as transformações  $T_1$  e  $T_2$  nos hiper-arcos do intervalo  $I(v)$  até chegarmos no hipergrafo  $H'$ . Para isso aplicaremos  $T_2$  em uma seqüência de hiper-arcos que respeite a ordem parcial dada pelas camadas de  $I(v)$ , e  $T_1$  quando necessário. Usaremos indução para isso.

(base)

A primeira camada do intervalo  $I(v)$  pode ser transformada em um único vértice.

Como a primeira camada só tem o vértice  $v$ , a única transformação que pode ser aplicada é a  $T_1$ , se existir um laço  $a = (\{v\}, \{v\})$ , e  $T_1$  não modifica nenhum outro hiper-arco. Se não existe tal laço, então nada temos a fazer. O hipergrafo resultante desta operação é equivalente a  $H_1 = \text{Contração}(H, I_0(v), v)$ .

(hipótese)

As  $k$  primeiras camadas do intervalo  $I(v)$  são transformadas no vértice  $v$ . Seja  $S_k = \bigcup_{i=0}^{k-1} I_i(v)$  o conjunto dos vértices destas  $k$  camadas. O hipergrafo resultante,  $H_k$ , é dado por  $H_k = \text{Contração}(H, S_k, v)$ .

(passo)

Vamos transformar a camada  $I_k(v)$ ,  $k > 0$ . Pela hipótese de indução, as camadas anteriores já foram transformadas no vértice  $v$ , e estamos trabalhando no hipergrafo  $H_k = \text{Contração}(H, S_k, v)$ . Então temos três tipos de hiper-arcos a considerar:

- (I) os hiper-arcos  $a = (\{v\}, X)$  tais que  $X \cap I_k(v) \neq \emptyset$  e  $X \subseteq (I_k(v) \cup \{v\})$ ;
- (II) os hiper-arcos  $b = (\{v\}, Y)$  tais que  $Y \cap I_k(v) \neq \emptyset$  e  $Y \not\subseteq (I_k(v) \cup \{v\})$ ; e
- (III) os hiper-arcos  $c$  tais que  $c \cap (I_k(v) \cup \{v\}) = \emptyset$ .

Veja que o caso em que a origem não é  $\{v\}$  e o destino tem intersecção com  $I_k(v)$  não pode existir pelo lema 6.2.

Os hiper-arcos do tipo (I) são os que serão removidos, os do tipo (II), são modificados, e os do tipo (III) não se alteram.

Vejamos então como fazer as transformações nos hiper-arcos do tipo (I) e quais serão as alterações nos do tipo (II).

Podemos aplicar  $T_2$  em todos os hiper-arcos do tipo (I), e pelo lema 7.4, não importa a ordem, mas todos serão removidos (alguns possivelmente com  $T_1$ ). O resultado é que os vértices de  $I_k(v)$  serão transformados no vértice  $v$ . Assim após estas transformações, os hiper-arcos do tipo (I) são removidos, os do tipo (II) são modificados para  $b' = (\{v\}, \mathcal{C}_{I_k(v), v}(Y))$ , o que implica que o hipergrafo resultante é dado por  $H_{k+1} = \text{Contração}(H_k, I_k, v) = \text{Contração}(H, S_{k+1}, v)$ .  $\square$

**Lema 7.7.** *Seja  $H = (V, E, s)$  um hipergrafo de fluxo. Então  $H \xrightarrow{*} I(H)$ .*

**Prova:** Pelo lema 7.6 temos que cada um dos intervalos pode ser transformado no seu vértice inicial. Como a transformação nos demais hiper-arcos se resume a trocar os vértices dos intervalos pelos seus respectivos vértices iniciais, temos exatamente o hipergrafo de intervalos da definição 7.2.  $\square$

Um outro lema importante associa a transformação  $T_2$  com a construção dos intervalos.

**Lema 7.8.** *Se o hiper-arco  $a = (\{x\}, Y)$  é tal que posso aplicar  $T_2$  em  $a$ , então  $Y \subseteq I(x)$ .*

**Prova:** Pela definição de  $T_2$  e de intervalo.  $\square$

Como consequência imediata dos lemas 7.7 e 7.8, temos o seguinte teorema.

**Teorema 7.9.** *Um hipergrafo de fluxo é redutível por intervalos se e somente se for redutível por transformações.*

**Prova:** Seja  $T$  o hipergrafo de um vértice e sem hiper-arcos.

( $\rightarrow$ )

Se  $H$  é redutível por intervalos, então  $I^*(H) = T$ , e existe um  $k$  tal que  $I^k(H) = I^*(H) = T$ . Logo basta aplicar o lema 7.7  $k$  vezes.

( $\leftarrow$ )

Se  $H$  é redutível por transformações, então  $T^*(H) = T$ . Suponha que  $I^*(H) = H'$ . Então  $H \xrightarrow{*} H'$  e  $H' \xrightarrow{*} T$ . Se  $H' \neq T$ , então posso aplicar  $T_1$  ou  $T_2$  em  $H'$ . Se posso aplicar  $T_1$ , então existe um laço em  $H'$  e  $I(H') \neq H'$ . Se posso aplicar  $T_2$  no hiper-arco  $a = (\{x\}, Y)$ , então  $Y \subseteq I(x)$  (pelo lema 7.8), e mais uma vez  $I(H') \neq H'$ . Então  $H' = T$ .  $\square$

Baseado neste teorema, chamaremos um hipergrafo de fluxo redutível por intervalos ou transformações apenas de **hipergrafo de fluxo redutível**.

## 7.4 Comparando com Grafos Redutíveis

Primeiramente devemos notar que estas definições são generalizações das definições de grafos de fluxo redutíveis, e por isso, quando o hipergrafo de fluxo for um grafo, as definições devem coincidir.

De fato, podemos perceber que o conceito de intervalos em hipergrafos de fluxo é exatamente igual ao conceito em grafos de fluxo, quando os conjuntos origem e destino são todos unitários.

O mesmo vale para as transformações  $T_1$  e  $T_2$ .

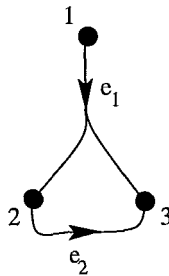


Figura 7.10: Hipergrafo de fluxo acíclico não redutível

Uma outra questão aparece quando lembramos que todos os grafos de fluxo acíclicos são redutíveis, entretanto o mesmo não acontece com hipergrafos de fluxo acíclicos. Veja na figura 7.10 um exemplo de um hipergrafo de fluxo acíclico não redutível. Neste exemplo,  $I(H) = H$ .

As propriedades **R1** e **R2** dos grafos redutíveis permitem que estes sejam utilizados na prática, para modelar problemas envolvendo linguagens de programação seqüencial. Podemos ver que as mesmas propriedades se repetem no caso de hipergrafos redutíveis.

**Teorema 7.10.** *Se  $H$  é um hipergrafo redutível então todo ciclo em  $H$  tem uma única entrada.*

**Prova:** Como  $H$  é redutível, então é redutível por intervalos. Seja  $C$  um ciclo em  $H$ . Vamos provar por indução nos passos da decomposição por intervalos, que  $C$  só tem uma entrada.

Considere que após  $k$  passos da decomposição, o ciclo  $C$  é transformado no ciclo  $C_k$ .

(base)

Se  $C$  está contido em um intervalo  $I$  com vértice inicial  $s$ , pelo lema 6.5 este ciclo passa pelo vértice  $s$ . Como, para chegarmos a qualquer vértice de  $I$  temos que passar pelo seu vértice inicial, este vértice é a única entrada em  $C$ .

(hipótese)

Se  $C_k$  está totalmente contido em um intervalo  $I_k$  com vértice inicial  $s_k$ , então o ciclo  $C$  tem uma única entrada, que é o vértice inicial de algum intervalo.

(passo)

Suponha que somente o ciclo  $C_{k+1}$  está totalmente contido em um intervalo, e seja  $I_{k+1}$  este intervalo, com vértice inicial  $s_{k+1}$ .

Pela hipótese de indução, o ciclo  $C_1$  (após o primeiro passo) tem uma única entrada, que é o vértice inicial de algum intervalo. Suponha que este intervalo seja  $I_1$  e o seu vértice inicial seja  $s_1$ .

Seja  $I$  o intervalo que gerou  $s_1$ , e seja  $s$  o seu vértice inicial. Como  $C$  não está totalmente em  $I$ , existe um hiper-arco de  $C$  que chega em  $I$  vindo de fora. Pelo corolário 6.4, este hiper-arco só pode chegar em  $s$ . Assim,  $C$  passa por  $s$ , que é sua única entrada.  $\square$

**Teorema 7.11.** *Se  $H$  é um hipergrafo redutível então toda busca em profundidade encontra o mesmo conjunto de retornos.*

**Prova:** Como todo ciclo tem uma única entrada (teorema 7.10), em uma busca em profundidade esta entrada é visitada primeiro. No caminho atual sendo considerado (vértices na pilha da busca em profundidade) os hiper-arcos são percorridos em ordem

até o hiper-arco em que retornamos à entrada. Este último hiper-arco será classificado como um retorno em toda busca em profundidade.  $\square$

A propriedade **R3** também é verdadeira, entretanto não encontramos ainda um conjunto com todos os sub-hipergrafos proibidos. Observe que o hipergrafo direcionado da figura 7.10 é um destes sub-hipergrafos proibidos.

De um modo mais geral, podemos concluir que ainda não temos propriedades que possam ser usadas como caracterização dos hipergrafos redutíveis, nos mesmos moldes que temos para os grafos redutíveis.

# Capítulo 8

## Hipergrafos

### Serial-Paralelo-Disjunção

Da mesma forma que podemos modelar o fluxo de controle de um programa seqüencial, é interessante que possamos modelar o fluxo de controle de um programa paralelo.

O caso seqüencial pode ser modelado com grafos direcionados, e os grafos redutíveis têm grande importância nesta modelagem, como foi visto no capítulo 7. O caso paralelo tem sido modelado de forma um tanto restrita por redes de Petri ([36, 40, 31, 14, 12]), embora estas restrições não sejam causadas pela redes de Petri, e sim pela falta de fundamentação teórica sobre os modelos.

Diversos artifícios têm sido usados para tornar as redes de Petri mais adequadas à modelagem de programas paralelos ([42, 43]). Estes artifícios não aumentam de fato o poder de representação das redes de Petri, apenas trazem maior facilidade de modelagem. Ou seja, redes de Petri já são poderosas o suficiente, mas os modelos que as usam são fracos.

Podemos modelar o fluxo de controle de um algoritmo paralelo com hipergrafos direcionados nos mesmos moldes de uma rede de Petri. Mas como podemos evoluir na fundamentação teórica de hipergrafos direcionados, podemos chegar a modelos mais precisos e menos carregados de artifícios.

Inicialmente veremos os conceitos envolvidos com o fluxo de controle em programas



paralelos e como podemos representar este fluxo de controle com hipergrafos direcionados. Em seguida apresentaremos a classe dos hipergrafos Serial-Paralelo-Disjunção (HSPD), que representam os programas paralelos escritos de forma estruturada, e veremos algumas de suas propriedades. Depois apresentaremos uma versão do problema de encontrar um **conjunto de vértices de realimentação** (*feedback vertex set*) [21] para hipergrafos direcionados (seção 8.3) e uma solução polinomial deste problema para os HSPDs.

## 8.1 Fluxo de Controle

É necessário dizer que não estamos tratando aqui de modelos de computação paralela, e sim de modelos para representar o fluxo de controle de programas escritos em linguagens paralelas imperativas [38, 3, 30] em que o fluxo de controle é explícito. Ou seja, não estamos preocupados em modelar ou representar uma máquina que execute programas paralelos, nem com mecanismos de sincronização ou comunicação entre as diversas partes de um sistema paralelo. O que queremos modelar e representar são as relações de dependência explícitas entre as instruções de um programa paralelo. Portanto estamos muito vinculados com o tipo de linguagem em que um programa paralelo pode ser escrito.

Na figura 8.1 podemos ver um trecho de um programa paralelo escrito em alguma linguagem que usa os comandos COBEGIN e COEND, como por exemplo ALGOL68 e CSP. Tais comandos são similares aos comandos PARBEGIN e PAREND, usados na linguagem Parallel FORTRAN [3], e a outros tipos de construção, como o PAR de Occam [38]. No exemplo da figura 8.1 os procedimentos  $P_2$ ,  $P_3$  e  $P_4$  podem ser executados ao mesmo tempo, desde que todos sejam executados depois de  $P_1$  e antes de  $P_5$ .

Perceba que não estamos modelando como esta execução será feita e nem como fica o fluxo de dados.

Vejamos então como podemos modelar o fluxo de controle de um programa paralelo com um hipergrafo de fluxo.

**Def. 8.1.** Um *hipergrafo de controle*  $H_P = (V, E, s, t)$  associado a um programa paralelo  $P$  é um hipergrafo de fluxo  $(V, E, s)$  e um vértice  $t \in V$ , onde:

- (i) cada instrução (ou conjunto de instruções elementar) de  $P$  é um vértice de  $V$ ;
- (ii) cada dependência de execução entre instruções de  $P$  é um hiper-arco de  $E$ ;
- (iii)  $s$  é o vértice início e  $t$  o vértice final.

Veja na figura 8.1 como seria um hipergrafo direcionado modelando o fluxo de controle de um trecho de programa. Nesta figura os vértices 1, 2, 3, 4 e 5 representam respectivamente os comandos  $P_1, P_2, P_3, P_4$  e  $P_5$ , e os hiper-arcos  $a$  e  $b$  representam as relações de dependências entre os comandos.

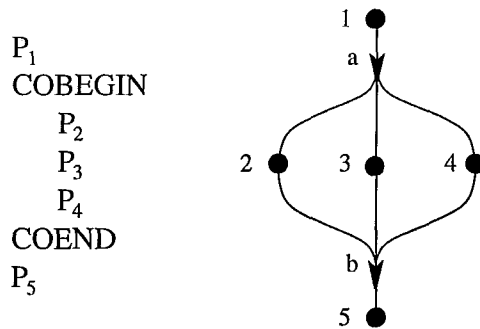


Figura 8.1: Trecho de programa paralelo e seu hipergrafo de controle

Como estamos modelando o fluxo de controle, precisamos descrever como uma execução se processa no hipergrafo de controle. Com o que temos podemos dizer que as instruções que são destino de um mesmo hiper-arco podem ser executadas em paralelo (co-rotinas); e se de um vértice sai mais de um hiper-arco, apenas um deles é escolhido para seguir adiante (condicional); cada hiper-arco estará habilitado para ser percorrido se todos os seus vértices da origem já terminaram a execução.

Podemos efetuar percursos que simulem a execução do algoritmo, e encontrar todas as possíveis execuções, e se elas chegam ao final ou não. Também com percursos podemos encontrar instruções que nunca serão executadas, ou instruções que são sempre executadas.

Primeiro temos que definir o que é uma **execução** em um hipergrafo de controle.

Para tal, podemos observar que uma **execução** em um hipergrafo de controle  $H = (V, E, s, t)$  envolve o percurso de vértices e hiper-arcos, com possíveis repetições, de forma que:

- Começa pelo vértice  $s$ ;
- Ao passar por um certo vértice em um certo momento, só posso escolher um hiper-arco para continuar;
- Só posso percorrer um hiper-arco em um certo momento, se em momentos anteriores cheguei a *todos* os vértices de sua origem, e ainda não saí de nenhum deles;
- A cada hiper-arco percorrido em um certo momento, chego a todos os vértices de seu destino;
- Num mesmo momento, não posso chegar em um vértice por mais de um hiper-arco.

Perceba que as restrições para que tenhamos uma execução são quase as mesmas para termos um SB-caminho. Entretanto, os hiper-arcos e vértices podem ser reutilizados.

**Def. 8.2.** *Uma execução  $\mathcal{F}$  em um hipergrafo de controle  $H = (V, E, s, t)$ , é uma sequência de estados  $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k$  tal que cada estado é um par  $\mathcal{F}_i = (E_i, V_i)$ , definidos como:*

- (i)  $\mathcal{F}_0 = (\emptyset, \{s\})$ ;
- (ii)  $E_i$  é o conjunto dos hiper-arcos escolhidos para sair dos vértices de  $V_{i-1}$  e chegar aos vértices de  $V_i$ ,  $i = 1, \dots, k$ ;
- (iii)  $V_i = (V_{i-1} \setminus \text{Org}(E_i)) \cup \text{Dest}(E_i)$ ,  $i = 1, \dots, k$ ;
- (iv) Para cada  $a \in E_i$ ,  $\text{Org}(a) \subseteq V_{i-1}$ ,  $i = 1, \dots, k$ ;
- (v) Os hiper-arcos de  $E_i$  devem ter seus conjuntos origem disjuntos, ou seja, para  $i = 1, \dots, k$ , se  $a, b \in E_i$ , então  $\text{Org}(a) \cap \text{Org}(b) = \emptyset$ ;

(vi) Os hiper-arcos de  $E_i$  devem ter seus conjuntos destino disjuntos, ou seja, para  $i = 1, \dots, k$ , se  $a, b \in E_i$ , então  $Dest(a) \cap Dest(b) = \emptyset$ .

Consideramos  $T(\mathcal{F}) = k$  como o tempo desta execução.

Vale observar que o tempo de execução usado aqui não se refere ao tempo real de execução do programa. Entretanto, uma execução reflete um possível escalonamento de instruções em um conjunto de processadores. Perceba que nada dissemos a respeito da cardinalidade dos conjuntos  $E_i$  e  $V_i$ , mas quanto maior forem, maior o grau de paralelismo usado. Imagine que cada elemento de  $V_i$  será entregue a um processador, e se temos  $L$  processadores, então a cardinalidade de  $V_i$  está limitada por  $L$ . E como  $E_i$  determina o conjunto  $V_i$ , sua cardinalidade também fica limitada.

**Def. 8.3.** Uma execução  $\mathcal{F}$  estará **terminada** quando nenhum hiper-arco puder ser percorrido, ou seja, não existir  $a$  tal que  $Org(a) \subseteq V_{T(\mathcal{F})}$ .

**Def. 8.4.** Dado um hipergrafo de controle  $H = (V, E, s, t)$  uma execução  $\mathcal{F}$  em  $H$  será **completa** se estiver terminada e  $V_{T(\mathcal{F})} = \{t\}$ .

Em [8] e [10] são apresentados os conceitos de hiper-caminho **dobrado** e **desdobrado** (“folded” e “unfolded”), o primeiro sendo o conjunto de hiper-arcos usados no hiper-caminho, e o segundo como a seqüência (com possíveis repetições) de hiper-arcos percorridos. Podemos então ver uma execução como uma versão desdobrada de um B-caminho onde, apesar de não ter a propriedade **S**, apresenta restrições semelhantes. Observe que o mesmo princípio da propriedade **S** é usado mas de forma a permitir repetições, ou seja, em um estado  $\mathcal{F}_i = (E_i, V_i)$  os hiper-arcos de  $E_i$  têm a propriedade **S**.

## 8.2 Hipergrafos Serial-Paralelo-Disjunção

Em princípio podemos usar o conceito de execução em qualquer hipergrafo de fluxo, entretanto nem todos representam programas que podem ser escritos. Quando restringimos o tipo de programa escrito aos que tem estruturas mais rígidas, podemos

chegar a uma família de hipergrafos de fluxo bastante interessante, os **hipergrafos Serial-Paralelo-Disjunção**.

Em uma linguagem com o paralelismo explícito, podemos ter estruturas tradicionais como if-then-else, case, while, etc, além de estruturas específicas, do tipo cobegin e coend, que determinam as instruções que podem ser executadas em paralelo [30].

Podemos separar estas estruturas em quatro tipos: seqüenciais, laços, disjunções e paralelas. As estruturas seqüenciais na verdade se expressam pelo simples seqüenciamento de instruções. As estruturas de laços (while, repeat, etc) formam um tipo especial de seqüenciamento com repetição. As estruturas de disjunção (if-then-else, case, etc) formam bifurcações condicionais no fluxo de controle, e apenas uma das alternativas é utilizada, dependendo dos dados do programa. E as estruturas paralelas agrupam instruções que são executadas em paralelo.

Também podemos pensar que tais estruturas podem ser encadeadas umas nas outras, e que ao invés de instruções podemos ter blocos de instruções. Assim, podemos definir que um programa escrito em uma linguagem como estas pode ser representado pelas regras da figura 8.2.

```

PROGRAMA ::= BLOCO
BLOCO    ::= instrução
          |   BLOCO BLOCO
          |   laço BLOCO fim laço
          |   paralelo BLOCO ... BLOCO fim paralelo
          |   disjunção BLOCO ... BLOCO fim disjunção

```

Figura 8.2: Regras de formação de uma linguagem paralela

O fluxo de controle de programas escritos em linguagens deste tipo pode então ser representado pela seguinte família de hipergrafos de controle.

**Def. 8.5.** *Um hipergrafo Serial-Paralelo-Disjunção (HSPD)  $H = (V, E, s, t)$  é um hipergrafo direcionado e dois vértices,  $s$  e  $t$ , que satisfazem uma das seguintes condições:*

**Trivial**  $V = \{s\}$ ,  $E = \emptyset$  e  $t = s$ .

**Serial**  $V = V_1 \cup V_2$ ,  $E = E_1 \cup E_2 \cup \{(\{t_1\}, \{s_2\})\}$ ,  $s = s_1$  e  $t = t_2$ , onde  $H_1 = (V_1, E_1, s_1, t_1)$  e  $H_2 = (V_2, E_2, s_2, t_2)$  são HSPDs (não necessariamente distintos).

**Paralelo**  $V = \bigcup_{i=1}^k V_i \cup \{s, t\}$ ,  $E = \bigcup_{i=1}^k E_i \cup \{(\{s\}, \{s_1, \dots, s_k\}), (\{t_1, \dots, t_k\}, \{t\})\}$ , onde  $H_i = (V_i, E_i, s_i, t_i)$ , com  $i = 1 \dots k$ , são HSPDs distintos, e  $s$  e  $t$  são vértices novos.

**Disjunção**  $V = \bigcup_{i=1}^k V_i \cup \{s, t\}$ ,  $E = \bigcup_{i=1}^k (E_i \cup \{(\{s\}, \{s_i\}), (\{t_i\}, \{t\})\})$ , onde  $H_i = (V_i, E_i, s_i, t_i)$ , com  $i = 1 \dots k$ , são HSPDs distintos, e  $s$  e  $t$  são vértices novos.

Em todas estas condições, quando os HSPDs  $H_i$  forem distintos também devem ser disjuntos.

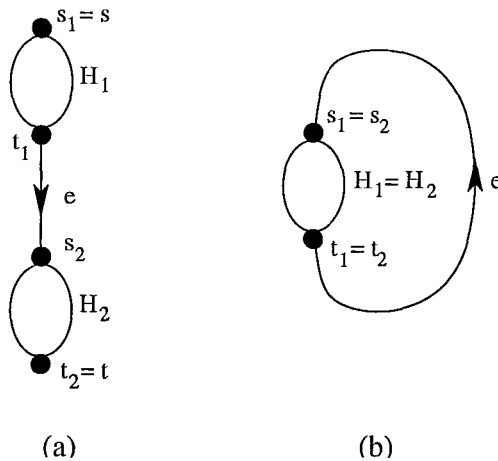


Figura 8.3: Operação Serial: (a) com HSPDs distintos (b) com o mesmo HSPD

Na figura 8.3 podemos ver duas formas de usar a operação serial. Na figura 8.3(a) os HSPDs são distintos e disjuntos, e a única alteração é a inclusão do hiper-arco  $e$  unindo os dois HSPDs. Perceba que na figura 8.3(b) os HSPDs  $H_1$  e  $H_2$  são iguais (o mesmo HSPD). Assim, o hiper-arco  $e$  é um retorno, e temos a formação de um ciclo.

A operação paralela está resumida na figura 8.4(a). Perceba que os vértices  $s$  e  $t$  e os hiper-arcos  $a$  e  $b$  são novos, e que todos os HSPDs  $H_1, \dots, H_k$  devem ser distintos e disjuntos.

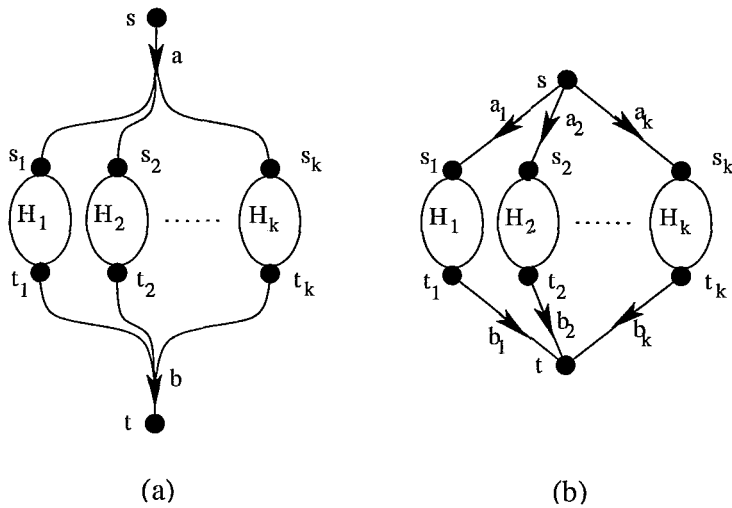
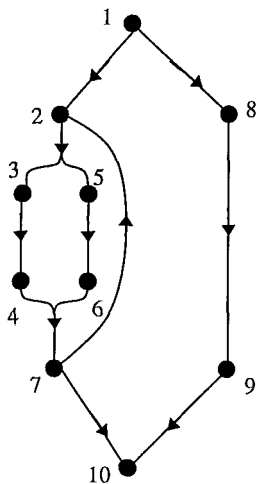


Figura 8.4: (a) Operação Paralela; (b) Operação de Disjunção

Na figura 8.4(b) podemos ver um esquema da operação de disjunção. Do mesmo modo como na operação paralela, os HSPDs devem ser distintos e disjuntos. A única diferença é que ao invés de termos apenas dois hiper-arcos novos, temos  $2 * k$ .

Podemos facilmente associar cada uma destas operações com as estruturas de controle de uma linguagem paralela. A operação serial pode ser usada para representar as estruturas sequenciais e os laços. A operação paralela pode ser usada para representar as estruturas paralelas. E a operação de disjunção pode ser usada para representar as bifurcações condicionais.



```

IF (cond1) /* P1 */
{
  WHILE (cond2)
  {
    COBEGIN /* P2 */
      { P3; P4; }
      { P5; P6; }
    COEND /* P7 */
  }
}
ELSE
  { P8; P9; }
/* P10 */

```

Figura 8.5: Um exemplo de um HSPD e o programa que ele representa

Na figura 8.5 podemos ver um exemplo de um HSPD e o programa que ele está representando. Embora o programa esteja escrito em uma linguagem fictícia, podemos extrair dela os pontos importantes. O vértice 1 está representando o início do comando de IF, que é uma disjunção. O final do comando IF é representado pelo vértice 10. E os vértices 2 e 7 representam os comandos COBEGIN e COEND, respectivamente. Os demais vértices estão associados a instruções (operações triviais). Perceba também que o laço WHILE não gera nenhum vértice, apenas o retorno do vértice 7 para o vértice 2.

Quando estivermos nos referindo aos sub-hipergrafos do HSPD que são resultado direto da aplicação dos operadores usados para construí-lo usaremos o termo estrutura. Por exemplo, chamaremos de estrutura paralela os hiper-arcos criados pelo operador paralelo e tudo que estiver entre eles. Quando estivermos nos referindo a uma estrutura de bifurcação usaremos o termo ramo para nos referir aos HSPDs usados na sua construção, ou seja, os trechos independentes que estão entre o início e o final da bifurcação.

### 8.2.1 Propriedades dos HSPD

Os HSPDs possuem certas propriedades interessantes. Veremos algumas delas.

**P1:** Todo HSPD é um hipergrafo redutível;

**P2:** Todos os retornos são hiper-arcos simples;

**P3:** Os retornos não atravessam estruturas paralelas ou disjunções, ou seja, nenhum retorno forma um ciclo onde só aparece parte de uma destas estruturas;

**P4:** Os retornos não se cruzam.

A propriedade **P1**, e possivelmente a mais importante é dada pelo seguinte teorema.

**Teorema 8.1.** *Se  $H = (V, E, s, t)$  é um HSPD então  $(V, E, s)$  é um hipergrafo de fluxo redutível.*

**Prova:** Se  $H$  é trivial, então é redutível.



Suponha que temos  $k$  HSPDs redutíveis,  $H_i = (V_i, E_i, S_i, t_i)$ , com  $i = 1 \dots k$ , então veremos que  $H$ , formado a partir destes hipergrafos por um dos operadores da definição 8.5 também é redutível.

Observe primeiramente que, em qualquer um dos operadores, os hiper-arcos externos aos hipergrafos  $H_i$  são hiper-arcos que chegam no vértice inicial  $s_i$  ou saem do vértice final  $t_i$ , e não usam nenhum outro vértice do hipergrafo. Logo os hipergrafos  $H_i$  continuam sendo redutíveis, mesmo inseridos em  $H$ .

Considere então que estes hipergrafos serão reduzidos e trocados pelos seus vértices iniciais,  $s_i$ . Vamos então analisar o hipergrafo resultante desta operação em cada um dos casos.

**Serial:** Aqui estamos supondo que  $k = 2$ . O hipergrafo resultante será formado pelos vértices  $s = s_1$  e  $t = s_2$  e um hiper-arco  $(\{s_1\}, \{s_2\})$ . Se  $s_1 \neq s_2$ , podemos aplicar  $T_2$  e reduzimos  $H$  ao vértice  $s$ . Se  $s_1 = s_2$ , então temos um laço e podemos aplicar  $T_1$ .

**Paralelo:** Aqui, o hipergrafo resultante será formado pelos vértices  $\{s, t, s_1, \dots, s_k\}$  e pelos hiper-arcos  $(\{s\}, \{s_1, \dots, s_k\})$  e  $(\{s_1, \dots, s_k\}, \{t\})$ . Como  $s$  e  $t$  são vértices novos, podemos aplicar  $T_2$  no primeiro hiper-arco, e o resultado será o hiper-arco  $(\{s\}, \{t\})$ , onde também podemos aplicar  $T_2$ .

**Disjunção:** O hipergrafo resultante aqui será formado pelos vértices  $\{s, t, s_1, \dots, s_k\}$  e pelos hiper-arcos  $(\{s\}, \{s_1\}), \dots, (\{s\}, \{s_k\}), (\{s_1\}, \{t\}), \dots, (\{s_k\}, \{t\})$ . Mais uma vez podemos aplicar  $T_2$  em cada um dos hiper-arcos do tipo  $(\{s\}, \{s_i\})$ , e todos os demais hiper-arcos serão unificados no hiper-arco  $(\{s\}, \{t\})$ , onde podemos aplicar mais uma vez  $T_2$  e teremos o hipergrafo trivial.

□

Veja que devido a este teorema, todo HSPD tem as mesmas propriedades de um hipergrafo redutível, em particular o fato de que qualquer busca em profundidade

encontra os mesmos retornos (veja teorema 7.11).

Todas as demais propriedades são referentes a estes retornos.

Pelas regras de construção de um HSPD, os ciclos só são formados com a aplicação da operação serial em um HSPD com ele mesmo. E o ciclo resultante é formado pelo HSPD e um hiper-arco de retorno (veja figura 8.3(b)).

Assim, podemos perceber que todos os ciclos usam um retorno e que os retornos são hiper-arcos simples (propriedade **P2**), já que são hiper-arcos criados pela operação serial.

A próxima propriedade (**P3**) diz que não podemos ter retornos com extremidades em diferentes níveis de bifurcações, sejam elas paralelas ou dinjunções. Ou melhor, todo ciclo, tirando o retorno, é um HSPD. Como vimos, o hiper-arco de retorno é criado por uma operação serial, e envolve um HSPD, logo, os retornos não podem cruzar níveis.

Pela mesma razão, os retornos não se cruzam (propriedade **P4**). Isso quer dizer que temos sempre que ter ou um retorno totalmente interno ao outro, ou completamente independentes. Veja na figura 8.6 a configuração proibida e as configurações possíveis.

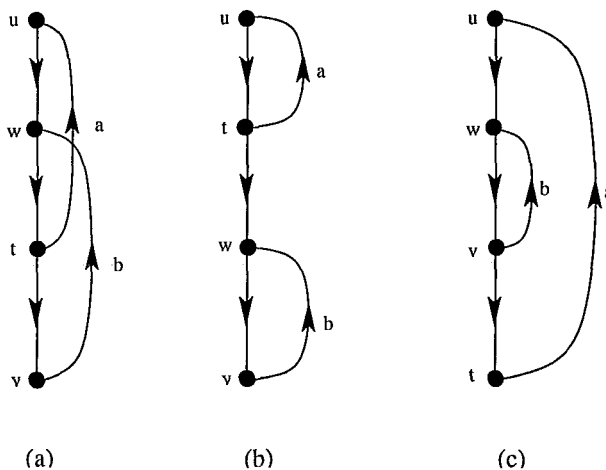


Figura 8.6: Uma configuração proibida e duas possíveis: (a) retornos se cruzando (proibido); (b) retornos independentes; (c) retornos aninhados

Vale observar que, no caso de retornos aninhados, os vértices próximos podem ser iguais, por exemplo, na situação da figura 8.6(c), os vértices  $u$  e  $w$  podem ser o

mesmo. Isso não acontece com retornos independentes, já que as duas partes foram unidas com uma operação serial, o que insere um hiper-arco simples entre as duas partes. Ou seja, na figura 8.6(b), os vértices  $t$  e  $w$  são necessariamente distintos.

## 8.2.2 Reconhecimento

A família dos HSPDs está bem definida, mas precisamos de uma forma de reconhecer que um hipergrafo de fluxo  $H = (V, E, s)$  e um vértice  $t \in V$  formam um HSPD.

Como um HSPD é uma estrutura definida recursivamente com operadores, a melhor forma de reconhecer um HSPD é decompondo-o. E como um HSPD é baseado na estrutura de uma linguagem de programação, podemos usar conceitos relacionados com compiladores.

Um dos problemas que podemos encontrar está nos ciclos e seus retornos. Enquanto não sabemos se um hiper-arco que chega a um vértice é um retorno ou o fim de um dos ramos de uma disjunção, não podemos decidir se estamos no final de uma disjunção ou não. Portanto, faremos o reconhecimento em dois passos.

No primeiro passo identificaremos os retornos, e no segundo passo faremos a decomposição.

Os hiper-arcos de um HSPD podem ser simples (origem e destino unitários), B-arcos ou F-arcos. Devido as propriedades **P1** e **P2**, que vimos na seção 8.2.1, uma busca simples, como a da seção 4.1, pode ser usada para encontrar os retornos. Nesta busca podemos considerar os B-arcos e F-arcos como se fossem vários arcos simples.

Perceba que caso o hipergrafo não seja um HSPD, podemos deixar de identificar alguns retornos, mas isso não atrapalha o reconhecimento.

Com os retornos todos identificados, é possível saber quais operações foram usadas para criar cada hiper-arco e vértice.

Os retornos são criados com a operação serial aplicada no HSPD que o retorno envolve. Os vértices origem de F-arcos e destino de B-arcos, e os F-arcos e B-arcos, são criados com uma operação paralela. Os vértices de onde saem ou chegam mais de um hiper-arco que não é retorno, juntamente com estes hiper-arcos, são criados com



## 8.3 Conjunto de Vértices de Realimentação

O problema de encontrar o conjunto de vértices de realimentação (*Feedback Vertex Set* - FVS) [21] é um problema de grafos, onde queremos encontrar um conjunto mínimo de vértices tal que, para todo ciclo, um de seus vértices esteja neste conjunto. Este problema é NP-completo para grafos direcionados.

Vamos apresentar a versão deste problema para os hipergrafos direcionados; em seguida veremos que o FVS é polinomial para os HSPDs.

O problema original de grafos pode ser definido como se segue.

**Problema 8.1 (FVS).** *Dados um grafo  $G$  e um inteiro  $k$ . Existe um conjunto  $C$  de vértices de  $G$  tal que  $|C| \leq k$ , e todo ciclo de  $G$  tem pelo menos um de seus vértices em  $C$ ?*

Quando estamos trabalhando com hipergrafos direcionados, precisamos esclarecer alguns pontos sobre este problema. Perceba que em grafos, qualquer vértice de um ciclo, se removido, o ciclo se interrompe. Como em hipergrafos direcionados os ciclos podem ser de tipos diferentes, saber se um vértice (ou conjunto de vértices) interrompe um ciclo depende do tipo de conectividade do ciclo.

Para quebrar a conectividade mais fraca, precisamos de mais vértices, enquanto que a mais forte se quebra facilmente. Observe o SBF-ciclo da figura 8.8. Lembrando que um ciclo  $C = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$  é SBF se  $C$  for um SBF-caminho e  $Org(C) = Dest(C) = \{s\}$ . Assim, para interromper um SBF-ciclo, basta remover um de seus vértices. É preciso notar que ao removermos um vértice, os hiper-arcos incidentes também são removidos, da mesma forma como ocorre com grafos.

Entretanto, se o mesmo ciclo é visto como um S-ciclo somente, pode ser preciso remover mais de um vértice. Veja que ao remover o vértice 4 os hiper-arcos  $b$  e  $d$  também são removidos, mas ainda tenho o S-ciclo  $C' = \{a, c, e, f, g\}$ . Ao remover o vértice 5 os hiper-arcos  $c$  e  $e$  são removidos e o ciclo se interrompe.

Da mesma forma, ao removermos o vértice 2, os hiper-arcos  $a$  e  $b$  são removidos, e o ciclo é quebrado. Percebemos então que, em certas ocasiões, não basta remover

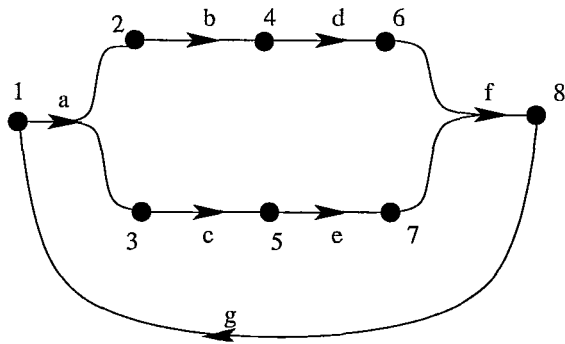


Figura 8.8: SBF-ciclo  $C = \{a, b, c, d, e, f, g\}$

um único vértice.

A partir daqui, poderíamos apresentar formulações novas do problema 8.1 preparadas para serem usadas em hipergrafos direcionados, uma para cada tipo de ciclo. Apresentamos aqui a mais geral, que interrompe todo tipo de ciclo.

**Problema 8.2 (FVSH).** *Dados um hipergrafo direcionado  $H = (V, E)$  e um inteiro  $k$ . Existe um conjunto  $C \subseteq V$  tal que  $|C| \leq k$ , e todo ciclo de  $H$  é interrompido com a remoção dos vértices de  $C$ ?*

Vamos analisar as relações entre os ciclos em um HSPD, e depois discutiremos um algoritmo para resolver este problema.

### 8.3.1 Relações entre os Ciclos em um HSPD

Na seção 8.2.1 apresentamos algumas propriedades dos HSPDs. Estas propriedades facilitam as tarefas de encontrar os ciclos e escolher quais vértices remover para interromper estes ciclos.

Vamos agora analisar as relações entre os ciclos de um HSPD para sabermos como a interrupção de um pode interferir na interrupção de outros.

Como vimos, todo ciclo em um HSPD é formado de um HSPD mais um retorno, então basta achar os retornos para encontrar os ciclos. Entretanto, vemos que um retorno pode fechar mais de um ciclo, caso este retorno envolva um HSPD que tenha uma disjunção. Veja na figura 8.9 um exemplo desta situação. Note que nesta figura

temos dois SBF-ciclos que usam o retorno  $l$ , os SBF-ciclos  $(h, c, a, b, d, j, l)$  e  $(i, f, k, l)$ . Observe também, que temos dois S-ciclos dentro do primeiro SBF-ciclo. Um usa o hiper-arco  $a$  e o outro o hiper-arco  $b$ .

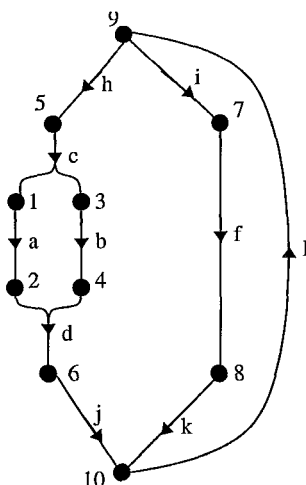


Figura 8.9: Um HSPD com um retorno envolvendo bifurcações

Cada retorno pode ser responsável por mais de um ciclo, entretanto, qualquer um de seus vértices extremos interrompe por completo todos os ciclos que o usam. Por exemplo, na figura 8.9, a remoção do vértice 9 é suficiente para interromper todos os ciclos que usam o retorno  $l$ .

Então nos resta analisar as relações entre os retornos e ver os casos em que, ao interrompermos alguns ciclos, alguns outros são interrompidos também, sem que para isso tenhamos que tratá-los separadamente.

Devido às propriedades **P3** e **P4** da seção 8.2.1, as relações entre os retornos em um HSPD são bastante restritas (veja figura 8.6).

As relações entre ciclos que nos interessam são aquelas que dizem respeito às interrupções. Ou seja, se um ciclo, ao ser interrompido, interrompe outro ciclo. E pela propriedade **P4**, este tipo de relação só acontece entre os ciclos aninhados. Entretanto, segundo a propriedade **P3**, as estruturas de bifurcação também aparecem aninhadas com ciclos. Desta forma devemos analisar, nas possíveis formas de aninhamento dos ciclos, como eles se comportam.

Considerando o fato de que, ao interrompermos um ciclo com a remoção de um





No caso de uma estrutura paralela, com a remoção de um único vértice podemos interromper toda a estrutura. Observe na figura 8.11 que ao removermos o vértice 7 para que o ciclo mais interno seja interrompido, o ciclo mais externo acaba por ser interrompido também. Isso porque o hiper-arco  $f$  desaparece com a remoção do vértice 7.

No caso geral, os ciclos em uma estrutura paralela se comportam da mesma forma que numa disjunção. Ou seja, é preciso interromper todos os ramos para que não sobre nenhum ciclo. Se o problema estivesse definido de forma a interromper somente os SBF-ciclos, então bastaria que um ramo fosse interrompido para que um ciclo envolvendo uma estrutura paralela fosse interrompido.

Resumindo estas três situações, levando em conta qual a estrutura que existe entre dois ciclos, temos o seguinte:

**Serial:** Ao interromper o ciclo mais interno, o ciclo externo é interrompido;

**Disjunção:** Se todos os ramos da disjunção foram interrompidos, então o ciclo externo é interrompido;

**Paralela:** Se todos os ramos da bifurcação paralela foram interrompidos ou um dos seus hiper-arcos extremos foi removido, então o ciclo externo é interrompido.

Usando a árvore gerada (como efeito colateral) pelo reconhecimento de um HSPD, podemos ter uma melhor organização dos retornos. Basta observar que os retornos estão sempre associados aos nós do tipo  $L$  (laços) desta árvore, e assim, os retornos mais internos são descendentes dos retornos mais externos. Um caminho da raiz até uma das folhas desta árvore, passando por nós do tipo  $L$ , indica um aninhamento de ciclos, com possíveis mudanças de nível (bifurcações) no meio.

Vemos um exemplo mais geral na figura 8.12. E na figura 8.13 podemos ver a árvore de operadores deste HSPD.

Observe que como os retornos  $g$  e  $h$  estão internos ao retorno  $f$ , os nós  $L_g$  e  $L_h$  são descendentes do nó  $L_f$ . Veja também que entre o nó  $L_a$  e todos os demais nós de

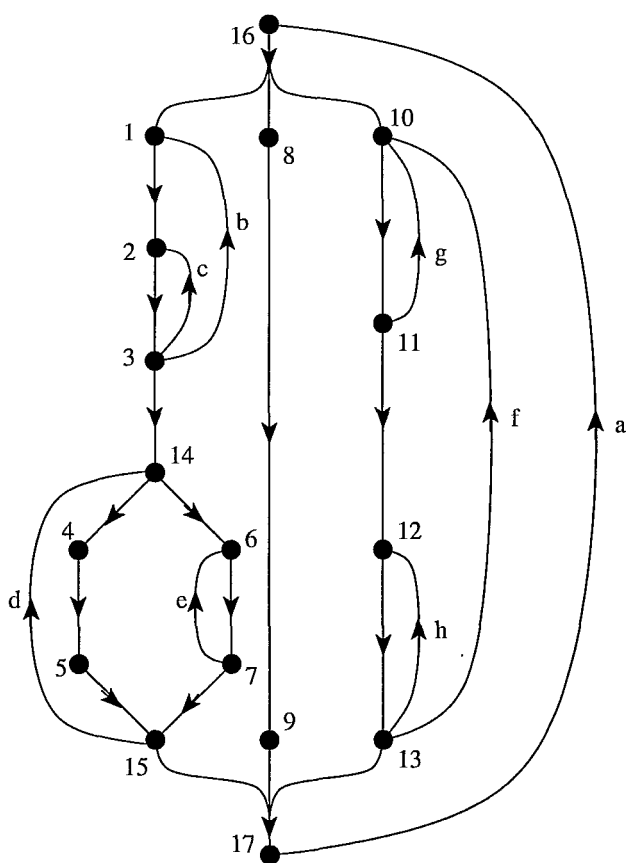


Figura 8.12: HSPD exemplo

rótulo  $L$  existe uma bifurcação paralela representada pelo nó  $P_3$ . E entre os nós  $L_d$  e  $L_e$  existe uma bifurcação de disjunção (nó  $D_2$ ).

Nesta árvore podemos encontrar todas as informações sobre o posicionamento relativo entre os retornos (ciclos). E podemos agora pensar em um algoritmo.

### 8.3.2 Um Algoritmo Polinomial

A primeira coisa a se fazer é usar o reconhecimento para gerar a árvore de operadores, e como vimos na seção 8.2.2, o reconhecimento pode ser feito em tempo polinomial.

Com a árvore construída, temos que encontrar o conjunto de vértices que faz com que o hipergrafo fique acíclico.

Como já vimos, se tirarmos um vértice de cada retorno, por exemplo o destino, todos os ciclos serão interrompidos. Entretanto, pode não ser necessário todos estes

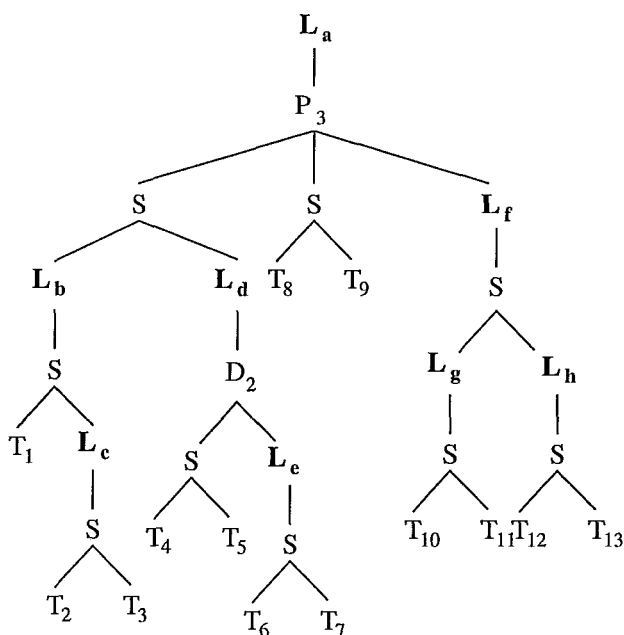


Figura 8.13: Árvore de operadores do HSPD da figura 8.12

vértices, e como queremos o menor conjunto, temos que usar a árvore para determinar se precisamos ou não remover cada um dos vértices destino dos retornos.

A árvore indica quais retornos envolvem quais, e portanto nos dá informação suficiente para que possamos decidir quais retornos processar. Também é interessante que os nós da árvore tenham informações que nos digam quais elementos (vértices e hiper-arcos) foram criados com a aplicação do operador que eles representam. Por exemplo, um nó que indica o uso do operador paralelo deve ter a informação de quais são os dois vértices e quais os dois hiper-arcos criados.

Primeiramente podemos ver que os retornos que não envolvem nenhum outro terão sempre que ter um de seus vértices removidos. Os retornos que envolvem diretamente outros retornos que já foram processados, não precisam que nenhum de seus vértices seja removido. Para sabermos se os retornos que envolvem bifurcações devem ter vértices removidos, precisamos saber o que aconteceu em cada um de seus ramos. No caso particular das bifurcações paralelas, se um dos vértices removidos em seus ramos for adjacente ao início ou ao final da bifurcação, então não precisamos remover nenhum de seus vértices (veja figura 8.11).

Caso o retorno a ser tratado seja adjacente a uma bifurcação paralela que o envolva,

escolheremos o vértice em comum para ser removido, caso contrário, como qualquer um dos dois vértices pode ser o escolhido, escolheremos o vértice de destino.

Podemos então fazer um percurso em pós-ordem na árvore para marcar cada retorno com o vértice que vai ser removido, ou se não será removido nenhum.

O algoritmo se resume a uma busca na árvore de operadores em pós-ordem, ou seja, de baixo para cima, escolhendo e propagando para cima o conjunto de vértices escolhidos para serem removidos. Também devemos propagar a informação se o ramo foi interrompido ou não. Para cada tipo de nó temos que tratar estas informações de forma diferente.

Sejam  $C_p$  o conjunto de vértices escolhidos após o tratamento do nó  $p$ , e  $R_p$  a informação se toda a sub-árvore de  $p$  foi interrompida.

Seja  $p$  o nó da árvore em que a busca está neste momento. Suponha que  $p$  tem  $k$  descendentes  $d_1(p), \dots, d_k(p)$ . Sejam  $C_{d_i(p)}$  e  $R_{d_i(p)}$  as informações que chegam a  $p$  vindas de seu descendente  $d_i(p)$ . As informações de  $p$  são dadas abaixo, para cada tipo de nó.

**$T_v$ :** Nó folha (sem descendentes).

Faça  $C_p = \emptyset$  e  $R_p = falso$ .

**$S$ :** Nó serial (dois descendentes no mesmo ramo).

Faça  $C_p = C_{d_1(p)} \cup C_{d_2(p)}$  e  $R_p = R_{d_1(p)} OR R_{d_2(p)}$ .

**$P_k$ :** Nó paralelo com  $k$  descendentes.

Faça  $C_p = \bigcup_{i=1}^k C_{d_i(p)}$ . Se um dos vértices de  $C_p$  for adjacente a um dos hiperarcos criados pelo operador paralelo associado a  $p$  então  $R_p = verdadeiro$ , senão  $R_p = R_{d_1(p)} AND R_{d_2(p)} \dots AND R_{d_k(p)}$ .

**$D_k$ :** Nó disjunção com  $k$  descendentes.

Faça  $C_p = \bigcup_{i=1}^k C_{d_i(p)}$  e  $R_p = R_{d_1(p)} AND R_{d_2(p)} \dots AND R_{d_k(p)}$ .

**$L_r$ :** Nó laço (retorno) com apenas um descendente.

Temos duas situações a tratar:

$R_{d_1(p)} = \textit{verdadeiro}$ : Não precisamos tratar o retorno  $r$ .

Faça  $C_p = C_{d_1(p)}$  e  $R_p = \textit{verdadeiro}$ .

$R_{d_1(p)} = \textit{falso}$ : Precisamos escolher um vértice de  $r$ .

Se  $r$  é adjacente ao destino de um F-arco ou à origem de um B-arco, então escolha o vértice de  $r$  que faz parte desta adjacência. Caso contrário escolha o destino de  $r$ . Seja  $x$  o vértice escolhido. Faça  $C_p = C_{d_1(p)} \cup \{x\}$  e  $R_p = \textit{verdadeiro}$ .

No exemplo da figura 8.12 uma possível solução é o conjunto  $\{2, 6, 10, 13, 14\}$ . Os retornos  $a$ ,  $b$  e  $f$  não precisam ter nenhum de seus vértices no conjunto pois seus ciclos já são interrompidos pela remoção de outros vértices. Por exemplo, o vértice 2 do retorno  $c$ , ao ser removido, interrompe o ciclo do retorno  $b$ , pois o retorno  $c$  está imediatamente contido no retorno  $b$ . Veja também que os ciclos do retorno  $a$  são todos interrompidos com a remoção do vértice 10 (ou o 13) pois este é adjacente ao F-arco que inicia (ou B-arco que finaliza) a bifurcação paralela envolvida pelo retorno  $a$ .

Perceba que embora a árvore de operadores não seja única, a posição relativa dos retornos é sempre a mesma. Portanto não importa qual árvore o reconhecimento tenha gerado, o algoritmo dará o mesmo resultado.

Como só precisamos fazer o reconhecimento, que é polinomial, para gerar a árvore de operadores, e depois fazer uma busca nesta árvore, que também é polinomial, temos um algoritmo polinomial.

Devemos notar que este algoritmo só é possível pelas propriedades dos HSPDs, que permitem que os ciclos, representados pelos retornos, sejam estruturados em uma árvore, e que esta árvore possa ser gerada de forma eficiente.

# Capítulo 9

## Conclusão

Neste trabalho estudamos os hipergrafos direcionados, e fizemos uma unificação das notações adotadas, organizando os conceitos já citados na literatura, além de formular alguns problemas até então não abordados.

A reformulação da teoria a respeito de hipergrafos direcionados foi feita, embora não exaustivamente, mas de forma consistente. Procuramos contemplar todos os assuntos e conceitos já abordados na literatura e apresentar formulações mais adequadas.

Vejamos então quais foram os resultados alcançados e quais as novas possibilidades de trabalho que se abrem a partir daqui.

### 9.1 Resultados

Podemos considerar como primeiro objetivo deste trabalho a **unificação dos conceitos** já existentes sobre hipergrafos direcionados. Fizemos uma reformulação crítica juntamente com uma comparação bastante detalhada com os conceitos já apresentados na literatura.

Nesta parte do trabalho merece destaque a reformulação dos conceitos de **hipercaminho** (seção 2.3), onde conseguimos uma definição nova, mas que engloba quase todas as definições anteriores. As definições de **B-caminhos** e **F-caminhos** a partir

da definição das propriedades **B** e **F** fazem com que o tratamento dos hiper-caminhos seja mais homogêneo. O mais importante item desta reformulação é o conceito de **S-caminho**, também apresentado como uma propriedade. A propriedade **S** traduz o conceito de caminho simples de grafos para os hipergrafos direcionados, sem que neste último percamos a sua característica paralela.

Entretanto, devemos lembrar que justamente a propriedade **S** é responsável por um comportamento **exponencial** em um procedimento tradicionalmente polinomial, uma **busca em profundidade**. Um percurso feito com uma busca em profundidade que deve encontrar os vértices **S**-conectados a um vértice inicial, dependendo do hipergrafo direcionado, pode precisar percorrer os hiper-arcos diversas vezes, o que faz com que a complexidade de tempo chegue a ser exponencial (seção 4.3). Esta característica não é boa, mas em certas situações ela pode ser contornada.

Ainda na reformulação da teoria, temos um estudo sobre os diversos tipos de **percursos** (capítulo 4). Este tipo de estudo não faz sentido no contexto de grafos, já que em grafos os percursos não tem muita variedade, devido a um único tipo de conectividade. Em hipergrafos direcionados, por termos uma razoável variedade de tipos conectividades, podemos definir mais de um tipo de percurso, o que nos leva a um estudo bastante inovador a respeito.

Neste estudo sobre percursos descobrimos, por exemplo, que nem todos os tipos de conectividade permitem que um percurso seja feito. Mais especificamente, a propriedade **F** não permite que façamos percursos tradicionais, excluindo todas as conectividades que usam esta propriedade.

Duas importantes famílias já conhecidas em grafos direcionados são estendidas para hipergrafos direcionados: **planares** e **redutíveis**.

No estudo de planaridade (capítulo 5) apresentamos uma forma de desenhar um hipergrafo direcionado e o conceito de planaridade em si. Como este conceito se resume ao tradicional conceito de planaridade aplicado a um grafo associado ao hipergrafo direcionado, não se fez necessário um maior detalhamento de algoritmos relacionados com o reconhecimento.

A redutibilidade, bastante estudada em grafos direcionados, é estendida para hipergrafos direcionados (capítulo 7). Para chegarmos a este conceito, antes apresentamos uma extensão do conceito de **intervalos** (capítulo 6). Este conceito é apresentado juntamente com um estudo sobre as estruturas internas de um intervalo e as relações entre eles, e que pode ser usado também em grafos. Apresentamos também a redutibilidade definida através de transformações, e provamos a equivalências destas duas definições.

Com o objetivo de modelar o fluxo de controle de programas escritos em linguagem paralela, definimos ainda uma subclasse de hipergrafos direcionados denominada de **hipergrafos Serial-Paralelo-Disjunção**, ou HSPDs (capítulo 8). Esta subclasse se assemelha com os grafos Serie-Paralelos e com alguns tipos de redes de Petri. Provamos então que esta subclasse é formada por hipergrafos redutíveis. Estudamos, nesta subclasse, o problema de encontrar o **conjunto de vértices de realimentação** (FVS), que no caso geral é NP-completo, e encontramos um algoritmo polinomial para resolvê-lo.

Muitos problemas ainda podem ser estudados, entretanto acreditamos que abrimos as portas para o estudo teórico destas estruturas tão pouco estudadas que são os hipergrafos direcionados.

## 9.2 Possibilidades de Trabalho

Como hipergrafos direcionados são uma extensão de grafos direcionados, muitos dos conceitos e problemas de grafos podem ser estendidos para esta estrutura. Assim, ficamos distante de esgotar este assunto, e muitos outros trabalhos podem se seguir a este para que toda a teoria dos grafos atual possa ser revista sob o ponto de vista dos hipergrafos direcionados.

No campo das aplicações, podemos mencionar as possibilidades existentes na área de compiladores e linguagens paralelas, entre outras. Aqui apresentamos apenas alguns conceitos relacionados com esta área (redutibilidade, HSPDs e conjuntos de vértices de realimentação), mas não tratamos de reais problemas. Cabe aos pesquisa-



dores desta área encontrar aplicações adequadas ao uso de hipergrafos direcionados.

Atenção especial deve ser dada aos hipergrafos redutíveis, visto que o conceito de grafos redutíveis tem sido bastante estudado tanto por suas aplicações em linguagens de programação como por suas características como uma família de grafos.

Resultados teóricos sobre hipergrafos redutíveis ainda podem ser buscados, como por exemplo uma melhor caracterização da família. Em grafos redutíveis alguns problemas NP-completos se tornam polinomiais, logo ainda resta saber se o mesmo pode acontecer com os hipergrafos redutíveis. O problema de encontrar um conjunto de vértices de realimentação é um exemplo de problema NP-completo que se torna polinomial em grafos redutíveis [21]. Neste trabalho encontramos um algoritmo polinomial para este problema para uma subclasse da família dos hipergrafos redutíveis, entretanto ainda fica aberta a questão se este problema é ou não NP-completo para a família como um todo.

# Referências Bibliográficas

- [1] Paola Alimonti e Esteban Feuerstein. Petri nets, hypergraphs and conflicts. In *18th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG'92)*, pages 293–309, Germany, June 1992. (Página 4)
- [2] Paola Alimonti, Esteban Feuerstein, e Umberto Nanni. Linear time algorithms for liveness and boundedness in conflict-free petri nets. In *1st Latin American Symposium on Theoretical Informatics*, volume 583 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 1–14, São Paulo, Brasil, April 1992. USP, Springer-Verlag. (Página 4)
- [3] George S. Almasi e Allan Gottlieb. *Highly Parallel Computing*. The Benjamin/Cummings Publishing Company, Inc, 2nd edition, 1994. (Página 99)
- [4] Giorgio Ausiello, Alessandro D'Atri, e Domenico Saccà. Graph algorithms for functional dependency manipulations. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 30(4):752–766, October 1983. (Páginas 3, 25)
- [5] Giorgio Ausiello, Alessandro D'Atri, e Domenico Saccà. Strongly equivalent directed hypergraphs. In *Analysis and Design of Algorithms for Combinatorial Problems*, volume 25 of *Annals of Discrete Mathematics*, pages 1–25. North-Holland, Amsterdam, 1985. (Páginas 1, 5, 13, 16, 24, 25, 27, 38–40, 45)
- [6] Giorgio Ausiello, Alessandro D'Atri, e Domenico Saccà. Minimal representation of directed hypergraphs. *SIAM Journal of Computing*, 15(2):418–431, May 1986. (Páginas 24, 38, 39, 45)

- [7] Giorgio Ausiello, Paolo Giulio Franciosa, Daniele Frigioni, e Roberto Giaccio. Decremental maintenance of reachability in hypergraphs and minimum models of horn formulae. Technical Report TR-134-97, ALCOM-IT/WP(s) 3.2, Roma, Italy, 1997. (ISAAC-1997 - pp. 122–131). (Páginas 3, 13, 28, 32, 36, 37, 40–42)
- [8] Giorgio Ausiello, Roberto Giaccio, Giuseppe F. Italiano, e Umberto Nanni. Optimal traversal of directed hypergraphs. Technical Report TR-238-97, ALCOM-IT/WP(s) 3.2, Roma, Italy, 1997. (Páginas 40, 41, 102)
- [9] Giorgio Ausiello, Giuseppe F. Italiano, e Umberto Nanni. Dynamic maintenance of directed hypergraphs. *Theoretical Computer Science*, 72:97–117, 1990. (Páginas 28, 32, 34, 37, 45, 46)
- [10] Giorgio Ausiello, Giuseppe F. Italiano, e Umberto Nanni. Hypergraph traversal revisited: Cost measures and dynamic algorithms. Technical Report TR-359-98, ALCOM-IT/WP(s) 3.2, Roma, Italy, 1998. (MFCS-1998 - pp. 1–16). (Páginas 40–42, 60, 102)
- [11] Claude Berge. *Hypergraphs*. North-Holland, 1989. (Páginas 1, 2)
- [12] Olivier Biberstein e Didier Buchs. An object oriented specification language based on hierarchical petri nets. In *IS-CORE Workshop (ESPRIT)*, pages 27–30, Amsterdam, September 1994. Technical Report (EPFL-DI No 94/76). 1994. (Página 98)
- [13] Paulo Oswaldo Boaventura Neto. *Grafos: Teoria, Modelos, Algoritmos*. Editora Edgard Blücher Ltda, 1996. (Página 1)
- [14] Christopher J. Coomber. Petri net composition with trace theory. Technical Report TR-C93/31, School of Computing and Mathematics, Deakin University, Geelong Victoria 3217, October 1993. (Página 98)
- [15] Giorgio Gallo, Giustino Longo, Sang Nguyen, e Stefano Pallotino. Gli ipergrafi orientati: Un nuovo approccio per la formulazione e risoluzione di problemi combinatori. In *Atti delle Giornate di Lavoro AIRO 89*, pages 217–236, Udine, Italy,

- Ottobre 1989. AIRO (Associazione Italiana di Ricerca Operativa). (Páginas 3, 10, 12, 13, 18, 24, 26, 27, 32, 40, 44, 45)
- [16] Giorgio Gallo, Giustino Longo, Sang Nguyen, e Stefano Pallotino. Directed hypergraphs and applications. Technical Report TR-3/90, Dipartimento di Informatica, Univ di Pisa, 1990. (Páginas 3, 13, 14, 18, 24, 27, 28, 30, 32, 37, 40, 41, 43–45, 47)
- [17] Giorgio Gallo, Giustino Longo, Sang Nguyen, e Stefano Pallotino. Directed hypergraphs and applications. *Discrete Applied Mathematics*, 42:177–201, 1993. (Páginas 3, 5, 9, 13, 16, 18, 24, 27, 28, 30, 34, 37, 40, 44–46, 49–51, 60)
- [18] Giorgio Gallo e Stefano Pallotino. Hypergraph models and algorithms for the assembly problem. Technical Report TR-6/92, Dipartimento di Informatica, Univ di Pisa, March 1992. (Páginas 5, 13)
- [19] Giorgio Gallo e Gabriella Rago. The satisfiability problem for the schöenfinkel-bernays fragment: Partial instantiation. Technical Report TR-4/94, Dipartimento di Informatica, Univ di Pisa, March 1994. (Páginas 3, 13)
- [20] Giorgio Gallo e Maria Grazia Scutellà. Minimum makespan assembly plans. Technical Report TR-10/98, Dipartimento di Informatica, Univ di Pisa, September 1998. (Páginas 5, 13)
- [21] M. R. Garey e D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. Freeman, New York, 1979. (Páginas 99, 111, 123)
- [22] M. S. Hecht e J. D. Ullman. Flow graph reducibility. *SIAM Journal of Computing*, 2(2):188–202, June 1972. (Páginas 70, 82, 87, 89)
- [23] M. S. Hecht e J. D. Ullman. Characterizations of reducible flow graphs. *Journal of the Association for Computing Machinery*, 21(3):367–375, July 1974. (Páginas 70, 82, 87)

- [24] Luiz S. Homem de Mello e Arthur C. Sanderson. And/or graph representation of assembly plans. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 6(2):188–199, April 1990. (Página 5)
- [25] D. S. Johnson e H. O. Pollak. Hypergraph planarity and the complexity of drawing Venn diagrams. *Journal of Graph Theory*, 11(3):309–325, 1987. (Páginas 61, 62)
- [26] Giorgio Levi e Franco Sirovich. Generalized and/or graphs. *Artificial Intelligence*, 7:243–259, 1976. (Página 4)
- [27] Wei-Liang Lin e M. Sarrafzadeh. A linear arrangement problem with applications. In *ISCAS'95 - International Symposium on Circuits and Systems*, volume 1, pages 67–60. IEEE, 1995. (Páginas 5, 25, 27)
- [28] Erkki Mäkinen. How to draw a hypergraph. *International Journal of Computer Mathematics*, 34:177–185, 1990. (Página 61)
- [29] Lilian Markenon e Sang Nguyen. Quelques problèmes de chemins pour les hypergraphes orientés. Technical Report CRT-763, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, Québec, Canada, Avril 1991. (Páginas 4, 44, 45)
- [30] Dan I. Moldovan. *Parallel Processing from Applications to Systems*. Morgan Kaufmann, 1993. (Páginas 99, 103)
- [31] Tadao Murata. Petri nets: Properties, analysis and applications. *Proceedings of the IEEE*, 77(4):541–580, apr 1989. (Página 98)
- [32] Sang Nguyen, Daniele Pretolani, e Lilian Markenon. On some path problems on oriented hypergraphs. Technical Report CRT-967, Centre de Recherche sur les Transports, Université de Montréal, Québec, Canada, February 1994. (Páginas 4, 44, 45)
- [33] Sang Nguyen, Daniele Pretolani, e Lilian Markenon. On some path problems on oriented hypergraphs. *Informatique Theorique et Applications (Theoretical Informatics and Applications)*, 32(1-3):1–20, 1999. (Páginas 4, 44, 51, 60)

- [34] T. Nishizeki e N. Chiba. *Planar Graphs: Theory and Algorithms*, volume 32 of *Annals of Discrete Mathematics*. North-Holland, 1988. (Página 60)
- [35] Joisa de Souza Oliveira. Propriedades e algoritmos para especializações de hipergrafos orientados. Tese de mestrado, COPPE/Sistemas - UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, abril 1994. (Página 45)
- [36] James Lyle Peterson. *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*. Prentice-Hall, 1981. (Página 98)
- [37] Daniele Pretolani. *Satisfiability and Hypergraphs*. PhD thesis, Università degli Studi di Pisa, Dipartimento di Informatica, Pisa, Italy, March 1993. (Página 60)
- [38] Michael J. Quinn. *Parallel Computing: Theory and Practice*. McGraw-Hill Series in Computer Science. McGraw-Hill, 2nd edition, 1994. (Página 99)
- [39] Mysore Ramaswamy, Sumit Sarkar, e Ye-Sho Chen. Using directed hypergraphs to verify rule-based expert systems. *IEEE Transactions on Knowledge and Data Engineering*, 9(2):221–237, March-April 1997. (Páginas 4, 25, 27)
- [40] Wolfgang Reisig. *Petri Nets: An Introduction*. Springer-Verlag, 1983. (Página 98)
- [41] Jayme Luiz Szwarcfiter. *Grafos e Algoritmos Computacionais*. Editora Campus, 1984. 2a edição (1988). (Páginas 1, 46, 47)
- [42] W. M. P. van der Aalst. Interval timed coloured petri nets and their analysis. In M. Ajmone Marsan, editor, *Application and Theory of Petri Nets*, volume 691 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 453–472, Berlin, 1993. Springer-Verlag. (Página 98)
- [43] W. M. P. van der Aalst, K. M. van Hee, e G. J. Houben. Modelling and analysing workflow using a petri-net based approach. In G. De Michelis, C. Ellis, e G. Memmi, editors, *Proceedings of the second Workshop on Computer-Supported Cooperative Work, Petri nets and related formalisms*, pages 31–50, 1994. (Página 98)
- [44] Oswaldo Vernet. *Maximalidade em Grafos de Fluxo Redutíveis*. D.sc. thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1997. (Página 82)

- [45] Oswaldo Vernet e Lilian Markenzon. Hamiltonian problems for reducible flowgraphs. In *Proceedings of the XVII International Conference of the Chilean Science Society*, pages 264–267, Valparaíso, Chile, November 1997. (Página 82)
- [46] Oswaldo Vernet e Lilian Markenzon. Characterizations and properties of maximal reducible flowgraphs. In *Congressus Numerantium*, volume 139, pages 9–20, 1999. (Página 82)
- [47] Gerhard J. Woeginger. The complexity of finding arborescences in hypergraphs. *Information Proccesing Letters*, 44:161–164, November 1992. (Páginas 13, 24, 26, 27, 42, 45)

# Índice de Autores

- Alimonti, Paola, 4
- Almasi, George S., 99
- Ausiello, Giorgio, 1, 3, 5, 13, 16, 24, 25,  
27, 28, 32, 34, 36–42, 45, 46, 60,  
102
- Berge, Claude, 1, 2
- Biberstein, Olivier, 98
- Boaventura Neto, Paulo Oswaldo, 1
- Buchs, Didier, 98
- Chen, Ye-Sho, 4, 25, 27
- Chiba, N., 60
- Coomber, Christopher J., 98
- D’Atri, Alessandro, 1, 3, 5, 13, 16, 24,  
25, 27, 38–40, 45
- Feuerstein, Esteban, 4
- Franciosa, Paolo Giulio, 3, 13, 28, 32,  
36, 37, 40–42
- Frigioni, Daniele, 3, 13, 28, 32, 36, 37,  
40–42
- Gallo, Giorgio, 3, 5, 9, 10, 12–14, 16,  
18, 24, 26–28, 30, 32, 34, 37,  
40, 41, 43–47, 49–51, 60
- Garey, M. R., 99, 111, 123
- Giaccio, Roberto, 3, 13, 28, 32, 36, 37,  
40–42, 102
- Gottlieb, Allan, 99
- Hecht, M. S., 70, 82, 87, 89
- Homem de Mello, Luiz S., 5
- Houben, G. J., 98
- Italiano, Giuseppe F., 28, 32, 34, 37,  
40–42, 45, 46, 60, 102
- Johnson, D. S., 61, 62, 99, 111, 123
- Levi, Giorgio, 4
- Lin, Wei-Liang, 5, 25, 27
- Longo, Giustino, 3, 5, 9, 10, 12–14, 16,  
18, 24, 26–28, 30, 32, 34, 37, 40,  
41, 43–47, 49–51, 60
- Mäkinen, Erkki, 61
- Markenzon, Lilian, 4, 44, 45, 51, 60, 82
- Moldovan, Dan I., 99, 103
- Murata, Tadao, 98
- Nanni, Umberto, 4, 28, 32, 34, 37, 40–  
42, 45, 46, 60, 102
- Nguyen, Sang, 3–5, 9, 10, 12–14, 16, 18,  
24, 26–28, 30, 32, 34, 37, 40, 41,  
43–47, 49–51, 60



Nishizeki, T., 60

Oliveira, Joisa de Souza, 45

Pallotino, Stefano, 3, 5, 9, 10, 12–14,  
16, 18, 24, 26–28, 30, 32, 34,  
37, 40, 41, 43–47, 49–51, 60

Peterson, James Lyle, 98

Pollak, H. O., 61, 62

Pretolani, Daniele, 4, 44, 45, 51, 60

Quinn, Michael J., 99

Rago, Gabriella, 3, 13

Ramaswamy, Mysore, 4, 25, 27

Reisig, Wolfgang, 98

Saccà, Domenico, 1, 3, 5, 13, 16, 24, 25,  
27, 38–40, 45

Sanderson, Arthur C., 5

Sarkar, Sumit, 4, 25, 27

Sarrafzadeh, M., 5, 25, 27

Scutellà, Maria Grazia, 5, 13

Sirovich, Franco, 4

Szwarcfiter, Jayme Luiz, 1, 46, 47

Ullman, J. D., 70, 82, 87, 89

van der Aalst, W. M. P., 98

van Hee, K. M., 98

Vernet, Oswaldo, 82

Woeginger, Gerhard J., 13, 24, 26, 27,  
42, 45

# Índice Remissivo

- A**
- acíclico ..... *veja*
    - hipergrafo direcionado acíclico
  - adjacente ..... 14
    - B-adjacente ..... 14
    - BF-adjacente ..... 15
    - F-adjacente ..... 14
  - adjacência ..... 8, 14, 15, 15, 18, 28
  - arborescência ..... 25, 42
  - arco ..... 2, 12–14, 17, 46, 64, 67, 109
  - aresta ..... 2, 46, 70, 71
  - árvore
    - de intervalos ..... 79
    - de operadores ..... 110, 115–119
- B**
- B-adjacente ..... *veja* adjacente
  - B-arco ..... *veja* hiper-arco
  - B-árvore ..... *veja* árvore
  - B-caminho ..... *veja* hiper-caminho
  - B-conectado ..... *veja* hiper-conectado
  - B-conectividade ... *veja* conectividade
  - B-grafo ... *veja* hipergrafo direcionado
  - B-visita ..... 49–51
  - backward* ..... 13
  - BF-adjacente ..... *veja* adjacente
  - BF-caminho ..... *veja* hiper-caminho
  - BF-conectado ... *veja* hiper-conectado
  - BF-conectividade .. *veja* conectividade
  - BF-corte ..... *veja* corte
  - BF-grafo .. *veja* hipergrafo direcionado
  - bifurcação 103, 105, 106, 108, 113–115, 117
  - busca
    - em largura ..... 46, 48, 51–53
    - em profundidade 46, 48, 50–53, 82, 96, 107, 121
  - BuscaSimples ..... 47–50
- C**
- camadas
    - de um hiper-arco ..... 26, 27, 45
    - de um intervalo ..... 71, 74, 75, 92
  - caminho ..... 16
    - simples ..... 17, 121
  - Church-Rosser ..... 89
  - ciclo ..... 22
    - S-ciclo ..... 111, 113
    - SBF-ciclo ..... 111–113, 115
    - segundo Gallo (1990) ..... 30

segundo Gallo (1993) ..... 30

classes .... *veja* hipergrafo direcionado

complexidade 6, 41, 42, 44, 47, 54, 121

conectado ..... *veja* hiper-conectado

conectividade 16, 19, 20, 46, 47, 49–54,  
111, 121

B-conectividade ..... 49–51

BF-conectividade ..... 51

F-conectividade ..... 51

S-conectividade ..... 47, 52–54

SB-conectividade ..... 47, 52–55

SBF-conectividade ..... 52

SF-conectividade ..... 52

conjunto de vértices de realimentação  
*veja* FVS

contração ..... 83, 84, 85, 87, 92

corte ..... 25, 43

custo *veja* hipergrafo direcionado pon-  
derado

**D**

decomposição ..... 109, 110

dependência funcional ... 3, 25, 38, 45

desenho ..... 6, 60, 61, 63, 63, 64

destino ..... 10

DF ..... *veja* dependência funcional

DF-grafos ..... 39

diagrama de Hasse ..... 79

distância ... *veja* hipergrafo direciona-  
do ponderado

2-arco ..... *veja* hiper-arco

2-grafo ... *veja* hipergrafo direcionado

## E

E/OU ..... *veja* grafo E/OU

equivalência ..... 25

de B-grafos ..... 38, 39

de núcleos ..... 39

forte ..... 39, 40

estrela ..... 10

execução ..... 99, 100, 101, 102

completa ..... 102

terminada ..... 102

## F

F-adjacente ..... *veja* adjacente

F-arco ..... *veja* hiper-arco

F-caminho ..... *veja* hiper-caminho

F-conectado ..... *veja* hiper-conectado

F-conectividade ... *veja* conectividade

F-grafo ... *veja* hipergrafo direcionado

F-visita ..... 51

fecho ..... 38, 39

de um conjunto origem ..... 39

floresta ..... 80

fluxo de controle 6, 70, 82, 98–102, 122

*forward* ..... 13

fronteira ..... *veja* grafo fronteira

FVS ..... 99, 111–119, 122, 123

## G

grafo ..... 1, 2

bipartido ..... 61, 62, 64–66

de fluxo	70, 71, 72, 82, 87
direcionado	2, 13
E/OU	4
estrutura	66, 67, 69
fronteira	44, 51
redutível	82, 87
grau	
de entrada	10
de saída	10
total	10
<b>H</b>	
HGD	veja hipergrafo direcionado
hiper-arco	9
B-arco	12
2-arco	26
F-arco	12
hiper-arcos	
de entrada	10
de saída	10
hiper-aresta	2, 61, 62
hiper-caminho	8, 15, 16
acíclico	22
B-caminho	18, 19–21
segundo Gallo (1990)	32
segundo Gallo (1993)	34
BF-caminho	19
segundo Gallo (1990)	32
segundo Gallo (1993)	34
F-caminho	19, 20, 21
segundo Gallo (1990)	32
segundo Gallo (1993)	34
SF-caminho	19, 23
simples	34
hiper-conectado	15
B-conectado	18
BF-conectado	19
conectado	15
F-conectado	19
hiper-conectividade	veja conectividade
hipergrafo	1, 2, 60, 61
hipergrafo direcionado	9
acíclico	22
B-grafo	12, 26, 27
BF-grafo	12, 26
classes	11
de controle	100
de fluxo	71, 72
de intervalos	85
2-grafo	26, 45
estendido	71
F-grafo	12, 26
planar	64, 66
ponderado	40
redutível	86, 92, 95

segundo Ausiello (1985) ..... 25  
 segundo Gallo (1989) ..... 26  
 segundo Woeginger (1992) ..... 27  
 Serial-Paralelo-Disjunção ..... 99,  
 102–110, 103  
 HORN-SAT ..... *veja* SAT  
 HSPD ..... *veja* hipergrafo direciona-  
 do Serial-Paralelo-Disjunção

## I

incidência ..... 9, 10  
 intervalo ..... 70, 72, 84  
 nível ..... 74, 78, 79  
 intervalos maximais ..... 80, 84, 85

## L

laço 2, 71, 87, 103, 105, 106, 110, 115,  
 118  
 simples ..... 71, 87–90

## M

métrica  
 aditiva ..... 41  
 custo ..... 40  
 distância ..... 41

## N

NP-completo ..... 111, 122, 123  
 NP-difícil ..... 41, 42  
 núcleo ..... 39  
 número de hiper-arcos ..... 9  
 número de vértices ..... 9

## O

operador  
 disjunção ..... 104, 105, 110  
 paralelo ..... 104, 105, 106, 109  
 serial ..... 104, 105, 108–110  
 trivial ..... 103, 110  
 ordem dos intervalos ..... 79, 80  
 origem ..... 10

## P

paralelismo ..... 4, 6, 98–102, 122  
 percurso .. 6, 16, 46–58, 100, 101, 118,  
 121  
 planar .... *veja* hipergrafo direcionado  
 planaridade ..... 6, 60–69, 121  
 de Zykov ..... 61  
 planejamento de montagem ..... 5, 13  
 ponderado *veja* hipergrafo direcionado  
 projeto de circuitos integrados ..... 5  
 propriedades  
 P ..... 106, 108, 109, 113  
 R ..... 82, 95, 97

## R

raíz ..... 79, 80  
 redes de Petri ..... 4, 98, 122  
 redutível .. *veja* hipergrafo direcionado  
 retorno ... 22, 76, 82, 96, 97, 104, 106,  
 108–110, 112–119

## S

S-caminho ..... *veja* hiper-caminho

S-ciclo ..... *veja* ciclo  
 S-conectado ..... *veja* hiper-conectado  
 S-conectividade .... *veja* conectividade  
 SAT ..... 3, 43  
     HORN-SAT ..... 4, 13  
 SB-Busca ..... 6, 55–58  
 SB-caminho ..... *veja* hiper-caminho  
 SB-conectado ... *veja* hiper-conectado  
 SB-conectividade .. *veja* conectividade  
 SBF-caminho ..... *veja* hiper-caminho  
 SBF-ciclo ..... *veja* ciclo  
 SBF-conectado .. *veja* hiper-conectado  
 SBF-conectividade . *veja* conectividade  
 Serial-Paralelo-Disjunção .. *veja* hiper-  
     grafo direcionado Serial-Paralelo-  
     Disjunção  
 SF-caminho ..... *veja* hiper-caminho  
 SF-conectado .... *veja* hiper-conectado  
 SF-conectividade .. *veja* conectividade  
 sistemas especialistas ..... 4  
 sub-hipergrafo ..... 11  
     induzido por hiper-arcos ..... 11  
     induzido por vértices ..... 11  
 subdivisão planar ..... 61, 62  
 subgrafo  
     proibido ..... 82, 97  
 subseqüência ..... 19, 20, 31

## T

tamanho de um hiper-arco ..... 9  
 tamanho total de um hipergrafo direci-

    onado ..... 9  
 transformações  
      $T_1$  ..... 87, 107  
      $T_2$  ..... 87, 88, 107  
 transitividade ..... 34, 38, 53

## Z

Zykov-planar ..... *veja* planaridade de  
     Zykov