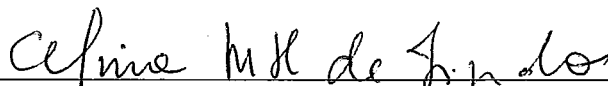


PARTIÇÕES EM GRAFOS : CARACTERIZAÇÕES,
ALGORITMOS E COMPLEXIDADE

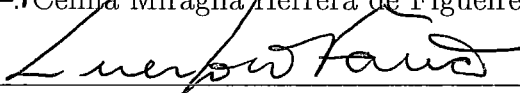
Simone Dantas de Souza

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

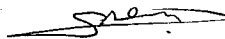
Aprovada por :



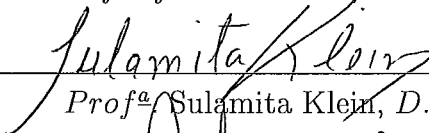
Prof.ª Celina Miraglia Herrera de Figueiredo, D.Sc.



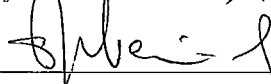
Prof. Luerbio Faria, D.Sc.



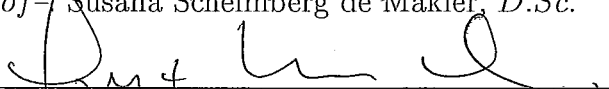
Prof. Sylvain Gravier, Docteur.



Prof.ª Sulamita Klein, D.Sc.



Prof.ª Susana Scheimberg de Makler, D.Sc.



Prof. Luiz Satoru Ochi, D.Sc.



Prof.ª Cláudia Linhares Sales, Docteur.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 2002

SOUZA, SIMONE DANTAS DE

Partições em Grafos : Caracterizações,
Algoritmos e Complexidade [Rio de Janeiro]
2002

VIII, 78p. 29,7cm (COPPE/UFRJ, D.Sc.,
Engenharia de Sistemas e Computação,
2002)

Tese - Universidade Federal do Rio de
Janeiro, COPPE

1. Teoria dos Grafos
2. Coloração por Listas
3. Partição em Grafos

I.COPPE/UFRJ II.Título (série)

Ao Meu PAI,
Carlos Rodrigues, meu grande amigo

Agradecimentos

À minha orientadora, Celina, por me dar a honra de ser sua aluna de doutorado. Agradeço muito toda a sua preocupação com minha formação profissional e todo o seu incentivo. Sua orientação foi muito valiosa para mim e me fez crescer significativamente como pesquisadora. Enfim, gostaria de agradecer por todo esse tempo de convívio e também por ter apostado e investido em meu sucesso.

Aos professores Luerbio Faria, Sylvain Gravier, Sulamita Klein e Frédéric Maffray, por todas idéias e pelos trabalhos em conjunto.

Ao Professor Jayme Szwarcfiter, por todo apoio e aprendizado na Linha de Algoritmos e Combinatória.

Aos professores Fabio Protti, Márcia Cerioli e Claudson Bornstein, por toda atenção e pelas conversas sobre grafos.

Aos professores Cláudia Linhares, Susana Scheimberg e Luiz Satoru, por aceitarem participar da minha banca de tese.

Aos colegas do laboratório da COPPE/SISTEMAS e da linha de Algoritmos e Combinatória, o meu muito obrigada pela força que me deram.

À minha mãe, Enir, que esteve sempre ao meu lado me apoiando e incentivando . Sua ajuda foi imprescindível, muito muito obrigada.

Agradeço muito ao meu marido, José Antonio, pela compreensão nos momentos difíceis, pelo companheirismo em todas as etapas, pelo apoio e pelo grande incentivo.

À CAPES e a COFECUB, pelo auxílio financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências(D.Sc.)

PARTIÇÕES EM GRAFOS : CARACTERIZAÇÕES, ALGORITMOS E
COMPLEXIDADE

Simone Dantas de Souza

Junho/2002

Orientadora: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Esta tese considera três problemas de partições em grafos e propõe caracterizações, algoritmos e classificações segundo a complexidade computacional. Consideramos uma generalização do problema de coloração clássica: o problema de coloração por listas. Gravier provou uma versão para coloração por listas do Teorema de Nordhaus-Gaddum e Zsolt Tuza, propôs o seguinte problema: *quais grafos satisfazem a igualdade na versão coloração por listas do teorema de Nordhaus-Gaddum?* Em nosso trabalho, respondemos a esta questão caracterizando tais grafos. Estudamos a complexidade do Problema Grafo Sanduíche (k, l) . Provamos que o Problema Grafo Sanduíche (k, l) é *NP*-completo para os casos $k = 1$ e $l = 2$; $k = 2$ e $l = 1$; ou $k = l = 2$. Isto classifica completamente a complexidade do Problema Grafo Sanduíche (k, l) como segue: o problema é *NP*-completo, se $k + l > 2$; o problema é polinomial caso contrário. Além disso, provamos que o problema é polinomial se limitamos o grau máximo e os valores para k, l são: $k = 1$ e $l = 2$; ou $k = 2$ e $l = 1$. Estudamos o conceito de *H*-partição. Neste estudo, analisamos todos os problemas de partição de vértices em quatro partes não-vazias com somente restrições externas de acordo com a estrutura de um grafo modelo *H*. Além disso, apresentamos uma solução parcial para este Problema de *H*-partição.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science(D.Sc.)

GRAPH PARTITIONS: CHARACTERIZATIONS, ALGORITHMS AND COMPLEXITY

Simone Dantas de Souza

June/2002

Advisor: Celina Miraglia Herrera de Figueiredo

Department: Computing and Systems Engineering

This thesis considers three graph partition problems and proposes characterizations, algorithms and computational complexity classifications. We consider a generalization of the classical colouring problem: the list colouring problem. Gravier proved a list colouring version of the Nordhaus-Gaddum theorem. Zsolt Tuza proposed the following problem: *which graphs satisfy the equality in the list colouring version of the Nordhaus-Gaddum theorem?* We answer this question by characterizing these graphs. We study the complexity of the (k, l) Graph Sandwich Problem. We prove that the (k, l) -Graph Sandwich Problem is *NP*-complete for the cases $k = 1$ and $l = 2$; $k = 2$ and $l = 1$; or $k = l = 2$. This completely classifies the complexity of the (k, l) -Graph Sandwich Problem as follows: the problem is *NP*-complete, if $k + l > 2$; the problem is polynomial otherwise. In addition, we prove that the problem is polynomial if we bound the maximum degree and the values for k, l are: $k = 1$ and $l = 2$; or $k = 2$ and $l = 1$. We study the concept of *H*-partition. We analyse all vertex partition problems into four non-empty parts according to external restrictions with respect to the structure of a model graph *H*. We present a partial solution for this *H*-partition problem.

Índice

1	Introdução	1
2	Conceitos de Teoria dos Grafos e Complexidade Computacional	4
3	Grafos extremais para a versão coloração por listas do teorema de Nordhaus-Gaddum	11
3.1	Introdução	11
3.2	Teorema de Nordhaus-Gaddum	17
3.3	Prova do teorema principal	22
3.4	Exemplos	30
4	Problema Grafo Sanduíche (k, l)	35
4.1	Introdução	35
4.2	Problema Grafo Sanduíche $(2, 1)$	39
4.3	Problema Grafo Sanduíche $(2, 2)$	44
4.4	Problema Grafo Sanduíche (k, l) Δ -Limitado	46
4.5	Exemplo	48
5	Problema de H-partição	50
5.1	Introdução	50
5.2	Refinando um Problema de H -Partição	52
5.3	Posicionamento Vértices	56
5.4	Ferramentas de Solução	57
5.5	Teorema Principal	60
6	Conclusão	64

Lista de Figuras

3.1	Teorema 3.9.	16
3.2	Corolário 3.10.	17
3.3	Grafos de Finck.	19
3.4	Grafo extremal F_1	21
3.5	Grafo extremal F_2	22
3.6	Grafo $K_{2,4}$	30
3.7	2-lista má para $K_{2,4}$	31
3.8	2-lista má para $K_{3,3}$	32
3.9	Exemplo com $K_{3,3}$	32
3.10	Garra.	33
3.11	Touro.	34
4.1	Grafo Sanduíche G que admite uma partição $(2, 1)$	38
4.2	Grafo Sanduíche G que admite uma partição $(2, 2)$	38
4.3	Grafo base (BG), Estrutura Variável (VG) e Estrutura Cláusula (CG).	41
4.4	$(2, 2)$ Grafo base - todas as arestas não-representadas são E^3 -arestas.	46
4.5	Instância particular do Problema Grafo Sanduíche $(2, 1)$	48
4.6	Partição $(2, 1)$ do Exemplo.	49
5.1	Partição Assimétrica - Grafo Modelo H	51
5.2	AC: Lista Conflitante para o Problema H -Partição por Listas.	54
5.3	AP: Listas impossíveis para Problema de H -Partição por Listas.	55
5.4	AC é uma Lista Transversal para o Problema de H -Partição por Listas.	59
5.5	Operação de Redução	59
5.6	Os grafos modelo com três vértices.	60
5.7	Casos restantes do Teorema 3.	63
5.8	Lista de grafos modelo para Teorema 3.	63

Capítulo 1

Introdução

Muitas situações reais podem ser modeladas utilizando-se diagramas. Estes diagramas consistem em um conjunto de pontos e um conjunto de linhas que conectam certos pares destes pontos. Tais pontos poderiam representar, por exemplo, computadores ou telefones, e as linhas a comunicação entre eles; poderiam ser também postos de armazenamento e as rotas que os interligam; ou talvez pessoas e a amizade entre elas. Da abstração matemática deste tipo de situação se originou o conceito de *grafo*.

O marco inicial da *Teoria dos Grafos* foi o *problema da ponte de Königsberg* enunciado e resolvido por Euler em 1793. Considerado como o primeiro teorema em teoria de grafos, muitos anos se passaram até que em meados do século XIX o interesse pela área fosse novamente despertado. Três desenvolvimentos isolados contribuíram para este ressurgimento: o problema das quatro cores, o problema do ciclo Hamiltoniano e a teoria das árvores.

Dentro deste contexto é que se insere este trabalho. No Capítulo 2 são apresentados alguns conceitos e resultados da teoria dos grafos e de complexidade computacional necessários à compreensão desta tese. Os capítulos seguintes são divididos em três partes.

No Capítulo 3, tratamos de uma generalização do problema de coloração clássica: o problema de coloração por listas. O conceito de coloração por listas foi introduzido na segunda metade dos anos 70, em dois artigos, por Vizing (1976), e independentemente por Erdős, Rubin e Taylor (1979), os quais estabeleceram os primeiros resultados significativos sobre o tema.

Em 1956, Nordhaus e Gaddum [37] provaram que o número cromático de um grafo mais o número cromático de seu complementar não ultrapassa o seu número de vértices mais uma unidade. Dez anos mais tarde, Finck [22] caracterizou os grafos que atingem a igualdade do *Teorema de Nordhaus-Gaddum*.

Em 1996, Gravier [29] provou uma versão para coloração por listas do Teorema de Nordhaus-Gaddum (Teorema 3.12). Em 1997, Tuza [42], a partir deste teorema e baseado no trabalho de Finck, propôs um problema para coloração por listas: *quais os grafos que satisfazem a igualdade na versão coloração por listas do teorema de Nordhaus-Gaddum?* Em nosso trabalho [16] respondemos a esta questão e a prova encontra-se na Seção 3.3.

O Capítulo 4 trata de um problema de partição dos vértices de um grafo de acordo com restrições internas. Um grafo G é (k, l) se o seu conjunto de vértices pode ser particionado em no máximo k conjuntos independentes e l cliques. A complexidade do problema de reconhecimento de um grafo (k, l) foi completamente classificada, como é discutido na Seção 4.1.

O Problema Sanduíche foi introduzido por Golumbic et al. [26] os quais estudaram muitos problemas sanduíche com respeito a várias classes de grafos. Como o Problema Grafo Sanduíche (k, l) é uma generalização do problema de reconhecimento, uma questão natural é o estudo da complexidade do Problema Grafo Sanduíche (k, l) .

No artigo [14], provamos que o Problema Grafo Sanduíche (k, l) é *NP*-completo para os casos $k = 1$ e $l = 2$; $k = 2$ e $l = 1$; ou $k = l = 2$. Isto classifica completamente a complexidade do Problema Grafo Sanduíche (k, l) como segue: o problema é *NP*-completo, se $k + l > 2$; o problema é polinomial caso contrário. Além disso, provamos que o problema é polinomial se G^2 tem grau limitado e os valores para k, l são: $k = 1$ e $l = 2$; ou $k = 2$ e $l = 1$. Tais provas encontram-se no Capítulo 4.

No Capítulo 5, estudamos o conceito de *H*-partição. O Problema de Partição Assimétrica, definido por Chvátal [12], consiste em achar uma partição do conjunto de vértices de um dado grafo em quatro partes não-vazias A, B, C, D tais que existem todas as arestas possíveis entre A e B , e nenhuma aresta entre C e D . Assim, o Problema de Partição Assimétrica tem somente restrições externas. De Figueiredo, Klein, Kohayakawa e Reed [17] apresentaram um algoritmo de tempo polinomial para resolver o problema de Partição Assimétrica.

Se existe um algoritmo polinomial para o Problema de Partição Assimétrica então o que podemos dizer sobre os outros problemas de partição dos vértices de um grafo em quatro partes não-vazias com somente restrições externas? No trabalho [15], analisamos todos estes problemas de acordo com a estrutura de um grafo modelo *H* e além disso apresentamos uma solução parcial para este Problema de *H*-Partição.

Concluimos no Capítulo 6 discutindo e propondo problemas em aberto relacionados com os temas considerados nesta tese.

Capítulo 2

Conceitos de Teoria dos Grafos e Complexidade Computacional

Neste capítulo, revisamos alguns conceitos básicos de Teoria dos Grafos e de Complexidade Computacional. Toda terminologia e conceitos utilizados neste trabalho podem ser encontrados em Berge [3], Bondy e Murty [6], Garey e Johnson [24], Golumbic [25], ou Szwarcfiter [41].

Um **grafo simples** $G = (V, E)$ é um conjunto finito não-vazio V e um conjunto E de pares não-ordenados de elementos distintos de V . Os elementos de V são os **vértices** e os de E são as arestas. Cada **aresta** $e \in E$ será denotada pelo par de vértices $e = uv$ que a forma. Neste caso, os vértices u, v são os **extremos** ou extremidades da aresta e . Quando for necessário ressaltar o grafo em questão, denotaremos por $V(G)$ e $E(G)$ o conjunto de vértices e de arestas de G , respectivamente.

A cardinalidade $|V|$ do conjunto de vértices, denotada por n , é chamada de **ordem** de G e a cardinalidade $|E|$ do conjunto de arestas é denotada por m .

Dados dois vértices $u, v \in V$ o vértice u é **adjacente** ao vértice v , ou u é **vizinho** de v , se uv é uma aresta de G . Caso contrário, u e v são **não-adjacentes**, ou **não-vizinhos**. A **vizinhança** de $v \in V$, $N(v)$, é o conjunto dos vizinhos de v .

Define-se o **grau** do vértice $v \in V$, denotado por $d(v)$ ou $d_H(v)$ (quando é necessário enfatizar um grafo H), como sendo o número de vértices adjacentes a v . O grau máximo (resp. mínimo) de G por será denotado por Δ (resp. δ). Um grafo é **regular** de grau r , quando todos os seus vértices possuírem o mesmo grau r .

O grafo **complementar** de G , denotado por \overline{G} , é o grafo cujo conjunto de vértices é exatamente $V(G)$ e cujo conjunto de arestas é o conjunto complementar de $E(G)$, ou seja, $ab \in E(\overline{G})$ se e somente se $ab \notin E(G)$.

O grafo H é um **subgrafo** de G se $V(H) \subseteq V(G)$ e $E(H) \subseteq E(G)$, e é dito **subgrafo induzido**, denotado por $G[H]$, se $E(H)$ contém todas as arestas de G cujas extremidades estão em $V(H)$.

Um grafo é **completo**, denotado por K_n , quando existe uma aresta entre cada par de seus vértices. Denomina-se **clique** de um grafo G a um conjunto de vértices de G que induz um grafo completo. Por outro lado, um grafo **nulo** é aquele que consiste de vértices mutuamente não-adjacentes. Um conjunto **estável** ou independente é um conjunto de vértices de G que induz um grafo nulo.

Um **ciclo** C_k de G de comprimento k é o grafo descrito pela seqüência $v_0v_1\dots v_{k-1}v_k$ onde v_iv_{i+1} é uma aresta de G , para todo $i = 0, \dots, k - 1$, com $v_i \neq v_j$ para todo $j \neq i$ e $v_k = v_0$.

Um grafo **bipartido** é aquele cujo conjunto de vértices V pode ser particionado em dois conjuntos estáveis. O grafo bipartido que possui todas as arestas possíveis entre os conjuntos estáveis é chamado de grafo **bipartido completo**. Denota-se um grafo bipartido completo cuja cardinalidade dos conjuntos estáveis é p e q por $K_{p,q}$.

Um grafo **planar** é aquele que admite uma representação no plano tal que so-

mente há cruzamento de arestas nos vértices que tenham extremos em comum.

Seja G um grafo e uv uma aresta (resp. não-aresta). Denota-se por $G - uv$ (resp. $G + uv$) o grafo obtido de G , pela exclusão (inclusão) da aresta uv . Da mesma forma, se v é um vértice de G , o grafo $G - v$ denota aquele obtido de G pela remoção do vértice v . A exclusão de um vértice implica em remover de G o vértice em questão e todas as arestas a ele incidentes. Usamos a notação $G + v$ para representar o grafo resultante da adição de v ao grafo G , onde as arestas incidentes a v em $G + v$ é um subconjunto de todas as arestas entre v e o restante do grafo.

Sejam $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ dois grafos com conjunto de vértices V_1 e V_2 disjuntos. Define-se a **junção** ou *join*, $G_1 \oplus G_2$, como o grafo cujo conjunto de vértices é a união dos conjuntos V_1 e V_2 e cujo conjunto de arestas é a união de E_1 e E_2 mais todas as arestas entre V_1 e V_2 :

$$G_1 \oplus G_2 = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2 \cup \{ab | a \in V_1 \text{ e } b \in V_2\}).$$

Seja S um conjunto e $S', S'' \subseteq S$. Diz-se que S' é **minimal** em relação a uma certa propriedade P , quando S' satisfaz à propriedade P e não existe $S'' \subset S'$, que também satisfaz a P . Em outras palavras S' não é necessariamente o menor subconjunto de S satisfazendo P , a definição acima implica apenas no fato de que S' não contém propriamente nenhum subconjunto de S que satisfaz P . Analogamente, define-se também um conjunto maximal em relação a uma certa propriedade.

Particionar um conjunto de objetos em classes seguindo certas regras é um processo fundamental em matemática. Para cada par de objetos, um conjunto de regras determina quando eles podem estar na mesma classe ou não. A teoria de coloração de vértices em grafos lida exatamente com esta situação. Os objetos formam o conjunto de vértices $V(G)$ de um grafo G e dois vértices são ligados por uma aresta em G sempre que não puderem pertencer a mesma classe.

Para distinguir as classes utiliza-se um conjunto de cores $C \subseteq \mathbb{N}$, e a divisão em classes é dada por uma coloração $c : V(G) \rightarrow C$, onde $c(x) \neq c(y)$ para todo xy pertencente ao conjunto de arestas $E(G)$ de G . Desta forma, c é chamada de **coloração própria** de G e cada classe de cor forma um conjunto estável de vértices.

A coloração de vértices c é uma **k -coloração** de G se seu conjunto de cores C tem cardinalidade k . Se um grafo G admitir uma **k -coloração** então G é **k -colorível**.

O menor inteiro k tal que G admite uma k -coloração é chamado de **número cromático** $\chi(G)$.

Alguns resultados clássicos de coloração de grafos:

Teorema 2.1 G é bipartido se e somente se $\chi(G) \leq 2$.

Teorema 2.2 [1][39] **Teorema das quatro cores.** *Todo grafo planar é quatro colorível.* ■

Teorema 2.3 [10] **Teorema de Brooks.** *Se G não é um grafo completo ou um ciclo ímpar então G é Δ -colorível.* ■

Por fim, faremos uma introdução aos problemas de decisão e à complexidade computacional. Em particular, definimos o problema de decisão SATISFABILIDADE que será fundamental para a prova do Capítulo 4.

Um **problema de decisão** consiste em um conjunto de dados ou entrada e uma questão cuja resposta consiste em SIM ou NÃO a respeito de alguma propriedade do conjunto de dados. Quando um conjunto de dados em um problema de decisão é fixado, dizemos que este conjunto de dados fixado constitui uma **instância** para este problema de decisão.

Dizemos que um problema de decisão Π está no conjunto P se para toda instância I de Π existe um algoritmo que, executando um número de passos polinomial no tamanho de I , responde à questão de Π .

Dado um problema de decisão Π e uma instância I de Π dizemos que J é um **certificado para a resposta SIM** para I , se J é um subconjunto de I que tem informações suficientes para demonstrar uma resposta SIM para a questão do problema Π .

Dizemos que um problema de decisão Π está em NP se para toda instância I de Π existe um algoritmo que executa um número de passos polinomial no tamanho de I e que verifica a corretude de um certificado para a resposta SIM para I .

Pelas definições, temos que $P \subseteq NP$. Atualmente a questão mais importante em complexidade consiste na pergunta: P é igual a NP ? ($P \stackrel{?}{=} NP$). Na tentativa de responder a esta pergunta, um problema especial na classe NP assume uma posição de destaque. Este problema chama-se SATISFABILIDADE e foi o problema chave do início da pesquisa sobre complexidade dos problemas de decisão.

Chamamos de **variável lógica** uma variável que pode assumir somente um valor entre os possíveis valores: V (valor verdade) e F (valor falsidade). Seja u uma variável lógica. A **negação de u** denotada por \bar{u} é uma outra variável lógica que assume o valor oposto de u , isto é, $u = V$ se, e somente, se $\bar{u} = F$. Dado um conjunto de variáveis lógicas $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, chamamos de **atribuição verdade** para U uma escolha fixa de valores V ou F para as variáveis U .

Dado um conjunto de variáveis lógicas $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, chamamos de **disjunção sobre U** uma sentença lógica c da forma

$$c = (x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_k),$$

onde para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ acontece que ou $x_i = u_j$ ou $x_i = \bar{u}_j$ para algum $j \in \{1, 2, \dots, n\}$, temos que uma vez dada uma atribuição verdade para U a sentença c assume valor verdade V , se e somente se existe pelo menos um índice $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ tal que $x_i = V$.

Chamamos c de **cláusula sobre U** , se c é uma disjunção sobre U . Chamamos também de **literal** aos elementos da forma x_i em c . Note que, enquanto a variável lógica é um elemento de U , temos que o literal é um elemento de U ou a sua negação, em alguma cláusula.

Dado um conjunto de variáveis lógicas $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$, chamamos de **conjunção de disjunções sobre U** uma sentença lógica da forma

$$C = (c_1 \wedge c_2 \wedge \dots \wedge c_m),$$

onde para todo $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ cada c_i é uma cláusula sobre U , tal que uma vez dada uma atribuição verdade para U , a conjunção de disjunções C assume o valor verdade V se e somente se cada c_i , $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ assume o valor verdade V . Se existe uma tal atribuição verdade para U dizemos que C é **satisfatível**. Chamamos C o **conjunto de cláusulas**, se C é uma conjunção de disjunções e notamos $C = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$.

Definimos o problema de decisão SATISFABILIDADE, como o problema de decisão que consiste em um conjunto de dados formado por um conjunto de variáveis lógicas $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ e um conjunto de cláusulas C com o objetivo de responder se C é satisfatível ou não.

Em 1971, Cook [13] estudou a questão $P \stackrel{?}{=} NP$ sugerindo o conceito de redução em tempo polinomial. Dados dois problemas de decisão Π e Π' , se existe um algoritmo f tal que para toda instância I de Π , obtém uma instância $I' = f(I)$ de Π' em tempo polinomial no tamanho de I , tal que I tem resposta SIM, se e somente

se I' tem resposta SIM, então dizemos que Π **reduz para** Π' , dizemos também que f é uma **redução polinomial** ou simplesmente redução de Π para Π' .

Neste artigo, Cook [13] demonstrou que dado um problema Π qualquer em NP , Π reduz para SATISFABILIDADE.

Ainda não se sabe responder a pergunta $P \stackrel{?}{=} NP$. Mas este resultado de Cook [13] implica que se SATISFABILIDADE estiver em P , então todo problema de NP está em P . Isto significa que $P = NP$. A dificuldade polinomialmente maior de SATISFABILIDADE em relação a cada problema da classe NP , justificou o nome **NP -completo** para a subclasse especial de NP formada pelos problemas Π em NP que como SATISFABILIDADE satisfazem a existência de uma redução de um problema qualquer de NP para Π .

A utilização das reduções possibilitou um grande avanço no estabelecimento de outros problemas NP -completos. Pois, uma vez que Π é NP -completo, se Π reduz para Π' e Π' está em NP , então Π' também é um problema NP -completo.

Capítulo 3

Grafos extremais para a versão coloração por listas do teorema de Nordhaus-Gaddum

3.1 Introdução

Assumindo que o conjunto de vértices é $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, denota-se por $L(v_i)$ a lista de cores associada com o vértice v_i , ou seja, o conjunto de cores permitidas (ou proibidas) associada com cada vértice.

O problema de coloração por listas consiste em achar uma coloração própria c dos vértices de G tal que $c(v) \in L(v)$, para todo $v \in V(G)$. Se tal coloração existir, o grafo G é L -colorível e c é uma L -coloração.

Dada uma atribuição de listas aos vértices de G , dizemos que $|L(G)| = k$ se para todo $v \in V(G)$, $|L(v)| = k$.

Se G é L -colorível, para toda L tal que $|L(G)| = k$, então G é k -colorível por lista. Para provar que um grafo G não é k -colorível por lista deve-se encontrar pelo menos uma k -lista má, ou seja, uma associação L de listas de cores aos vértices de G tal que $|L(v)| = k$, para todo $v \in G$, e G não seja L -colorível.

O **número cromático de lista** (ou *choice number*) de um grafo, denotado por $\text{Ch}(G)$, ou por $\chi_L(G)$, é o menor inteiro k tal que G é k -colorível por lista.

O grafo G é chamado k -selecionável (ou *k-choosable*) se $k \geq \text{Ch}(G)$, isto é, se G é L -colorível para todo L que satisfaz $|L(v)| \geq k$, para todo vértice $v \in V$.

Uma coloração parcial por uma lista má de G não pode ser estendida a todo G . É o que nos mostra a propriedade a seguir.

Propriedade 3.1 [29] *Para todo grafo G , para toda lista má L de G , para todo $v \in V(G)$ e para toda cor $\alpha \in L(v)$, a associação L' de listas de cores definida por:*

$$L'(x) = L(x), \text{ para todo } x \text{ em } V(G) \setminus N(v) \text{ e}$$

$$L'(x) = L(x) \setminus \{\alpha\}, \text{ para todo } x \text{ em } N(v),$$

é uma lista má para $G \setminus v$.

Prova. Suponha que L' não seja uma lista má para $G \setminus v$, isto é, $G \setminus v$ é L' -colorível. Então existe uma coloração própria c dos vértices de $G \setminus v$ tal que $c(u) \in L'(u)$, para todo $u \in G \setminus v$. Desta forma, pode-se colorir $G \setminus v$ com c e depois associar a cor α a v . Um absurdo, pois L é uma lista má. ■

Como já citado anteriormente, o número cromático de lista $\text{Ch}(G)$ de um grafo G é uma generalização do número cromático $\chi(G)$. Então uma pergunta natural seria qual a relação entre estes dois números? A primeira propriedade a ser enunciada trata desta questão.

Propriedade 3.2 *Para todo grafo G , tem-se que $\text{Ch}(G) \geq \chi(G)$.*

Prova. Se $\text{Ch}(G) < \chi(G)$, é sempre possível construir uma lista má tal que para todo vértice $x \in V$, $L(x) = \{1, 2, \dots, \chi(G) - 1\}$. Da mesma forma, é fácil notar que um grafo k -selecionável é necessariamente k -colorível, basta considerar a associação $L(v) = \{1, 2, \dots, k\}$, para todo $v \in V$. ■

Na propriedade acima, quando a igualdade é alcançada, ou seja, $Ch(G) = \chi(G)$, o grafo G é chamado de **cromático-selecionável**.

Erdős, Rubin e Taylor [19] caracterizaram os grafos que são d -coloríveis por lista onde d é a função de grau (ou seja, para cada vértice v de G , $d(v)$ é o grau de v), e assim encontraram uma ferramenta para generalizar o Teorema de Brooks (2.3).

Teorema 3.3 [19] Teorema do tipo "Brooks" para coloração por listas. *Se G é um grafo conexo diferente de um grafo completo e de um ciclo ímpar então G é Δ -colorível por lista. ■*

Algumas propriedades do número cromático na coloração clássica são generalizadas para o número cromático de lista. A seguir, veremos que muitas destas propriedades não são preservadas pela coloração por listas. A primeira propriedade, enunciada abaixo, trata do comportamento do número cromático de lista em subgrafos.

Propriedade 3.4 [29] *Para todo subgrafo H de G , $\chi(G) \geq \chi(H)$ e $Ch(G) \geq Ch(H)$. ■*

A propriedade a seguir trata do comportamento do número cromático de lista ao inserimos uma aresta.

Propriedade 3.5 [29]

1. *Sejam G um grafo qualquer e uv uma aresta de \overline{G} , então:*

$$Ch(G) \leq Ch(G \cup \{uv\}) \leq Ch(G) + 1.$$

2. *Seja G um grafo Δ -regular com n vértices. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- i. G é um C_5 ou G é uma clique ou G é um estável;*
- ii. $Ch(G) + Ch(\overline{G}) = n + 1$.*

Prova. 1. Seja L uma associação de listas de cores aos vértices de $G \cup \{uv\}$ tal que $|L(x)| \geq Ch(G) + 1$ para todo x em G ; seja $\alpha \in L(u)$. Designa-se a cor α ao vértice u , e considera-se a lista L' tal que $L'(x) = L(x) \setminus \alpha$ para todo $x \neq u$. Tem-se que $|L'(x)| \geq Ch(G)$ logo $G \setminus u$ é L' -colorível por lista. Então o grafo $G \cup \{uv\}$ é L -colorível por lista e conclui-se pela Propriedade 3.4.

2. (ii) \Rightarrow (i) : Prova por absurdo. Seja G um grafo regular, tem-se que $\Delta(G) = n - 1 - \Delta(\overline{G})$. Pelo Teorema 3.3, e pelo fato de que se G não é nem uma clique, nem um conjunto estável e nem um C_5 tem-se que \overline{G} ou G não é nem um ciclo ímpar nem uma clique, obtem-se que: $Ch(G) + Ch(\overline{G}) \leq \Delta(G) + \Delta(\overline{G}) + 1 \leq n - 1 - \Delta(\overline{G}) + \Delta(\overline{G}) + 1 = n$.

(i) \Rightarrow (ii) : Se G é um C_5 então \overline{G} é C_5 , e como $Ch(C_5) = 3$ a Proposição (ii) é verdadeira. Se G é uma clique K_n (resp. um estável S_n) então \overline{G} é um estável (resp. uma clique), e como $Ch(K_n) = n$ (resp. $Ch(S_n) = 1$) a Proposição (ii) é verdadeira. ■

Sejam G_1, G_2 dois grafos com conjunto de vértices disjuntos e o grafo $G_1 \oplus G_2$ como definido no Capítulo 2. Sabe-se que para o número cromático $\chi(G_1 \oplus G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$. Por outro lado, o número cromático de lista não se comporta tão diretamente com relação a operação de junção.

Propriedade 3.6 [29]

1. Para um grafo G qualquer e um inteiro positivo n tem-se que:

$$Ch(G \oplus K_n) \leq Ch(G) + n.$$

2. Sejam G e H dois grafos; seja G' o grafo obtido pela junção de todos os vértices de H com p vértices de G , então: $Ch(G') \leq \text{Max}\{Ch(G), Ch(H) + p\}$, com igualdade se H e $G[v_1, \dots, v_p]$ são duas cliques.

Prova. 1. Seja L uma associação de listas de cores tal que $|L(v)| \leq Ch(G) + n$, para todo $v \in G \oplus K_n$. Inicialmente são coloridos os vértices de K_n . O número de cores que sobram nas listas de $V(G)$ é ao menos $Ch(G)$.

2. Sejam v_1, \dots, v_p, p vértices de G e L uma associação de listas de cores tal que para $v \in V(G')$, $|L(v)| \leq \text{Max}\{Ch(G), Ch(H) + p\}$. Para obter uma coloração de G' , primeiro são coloridos os vértices de G pois $Ch(G) \leq \text{Max}\{Ch(G), Ch(H) + p\}$. Retira-se das listas dos vértices de H as cores dadas aos vértices $v_i, i = 1, \dots, p$. Logo pode-se colorir o grafo H com as $Ch(H)$ cores restantes nas listas. ■

Atualmente existem muitas pesquisas em grafos cromáticos-selecionáveis. Uma conjectura de Gravier [29] foi provada por Ohba e indica uma condição suficiente para um grafo ser cromático-selecionável:

Teorema 3.7 [38] *Para qualquer grafo G , existe um inteiro não-negativo n_0 tal que $Ch(G \oplus K_N) = \chi(G \oplus K_N)$ para todo $N \geq n_0$.* ■

A seguir, uma propriedade sobre a operação de junção que será muito útil na próxima seção.

Propriedade 3.8 [36] *Para todo inteiro $q > 0$, o grafo bipartido completo K_{q,q^q} não é q -colorível por lista.*

Prova. Para mostrar este resultado é suficiente mostrar a q -lista má onde todas as listas são duas a duas disjuntas para o conjunto estável de tamanho q ; e as listas do segundo conjunto estável são todos os subconjuntos de tamanho q do conjunto de cores do primeiro estável. Logo, uma coloração qualquer do estável de tamanho q corresponde a uma lista de um vértice no outro estável. ■

A seguinte observação de Tuza [42] é uma ferramenta útil para demonstrações por indução.

Seja $G = (V, E)$ um grafo, L uma associação de listas de cores aos vértices de G e seja v um vértice de G tal que $d(v) < |L(v)|$. (3.1)
Então G é L -colorível se e somente se $G - v$ também o é.

O teorema e o corolário abaixo são utilizados em nossas demonstrações.

Teorema 3.9 [30] *Seja G um grafo que admite uma k -coloração com $k \geq 3$ tal que cada classe de cor tem no máximo tamanho 3 e existem no máximo duas classes de cor de tamanho 3. Então G é k -seleccionável. ■*

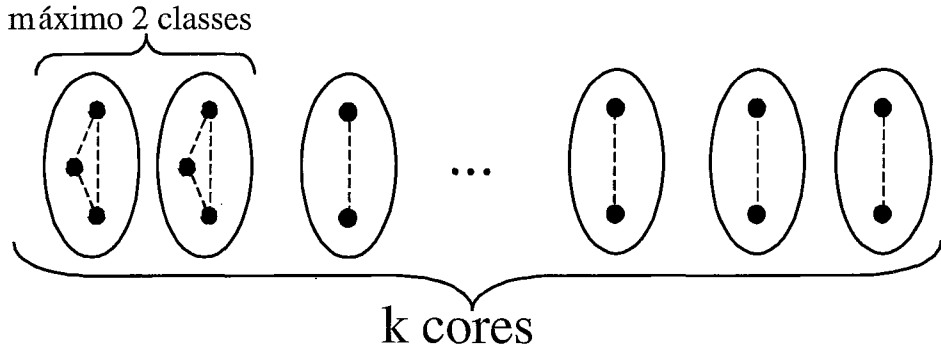


Figura 3.1: Teorema 3.9.

Corolário 3.10 *Seja G um grafo que admite uma k -coloração tal que cada classe de cor tem tamanho no máximo 3 e existe no máximo uma classe de cor de tamanho 3. Então G é k -seleccionável.*

Prova. O resultado é claro se $k = 1$ e é uma consequência direta do Teorema 3.9 quando $k \geq 3$. Se $k = 2$ então G está contido no grafo bipartido completo $K_{3,2}$ que é 2-seleccionável. ■

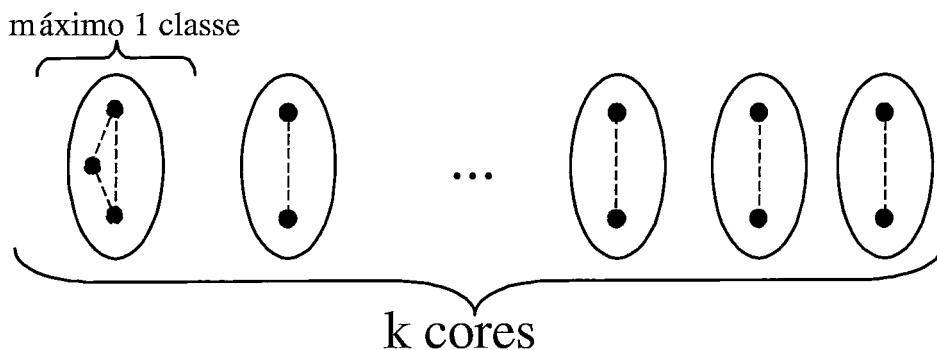


Figura 3.2: Corolário 3.10.

3.2 Teorema de Nordhaus-Gaddum

Um teorema conhecido na literatura como teorema de Nordhaus-Gaddum estabelece que:

Teorema 3.11 [37] Teorema de Nordhaus-Gaddum. *Seja G um grafo de ordem n . Então: $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$.*

Prova. Argumentamos por indução no número n de vértices de G . O resultado é evidente para $n = 1$, e assume-se que $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n + 1$ para G com n vértices.

Adiciona-se um vértice p de grau r a G . Note que o grau de p em $\overline{G+p}$ é $n - r$. Como $\chi(G+p) \leq \chi(G) + 1$ e $\chi(\overline{G+p}) \leq \chi(\overline{G}) + 1$, segue que $\chi(G+p) + \chi(\overline{G+p}) \leq \chi(G) + 1 + \chi(\overline{G}) + 1 \leq n + 2$.

Quando $\chi(G+p) = \chi(G) + 1$ e $\chi(\overline{G+p}) = \chi(\overline{G}) + 1$ tem-se que $r \geq \chi(G)$ e, analogamente, $n - r \geq \chi(\overline{G})$. Então $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq n - r + r = n$ donde concluímos que $\chi(G+p) + \chi(\overline{G+p}) \leq n + 2$. ■

O teorema de Nordhaus-Gaddum possui uma versão para a coloração por listas devida a Gravier [29]:

Teorema 3.12 [29] Teorema do tipo Nordhaus-Gaddum para coloração por listas. *Seja G um grafo com n vértices então:*

$$Ch(G) + Ch(\overline{G}) \leq n + 1.$$

Prova. Prova por indução no número de vértices n . Esta desigualdade é evidente quando $n = 1, 2$. Seja $n \geq 3$ e $G' = G \setminus v$, $v \in G$. Está claro que:

$$(a) \ Ch(G) \leq Ch(G') + 1,$$

$$(b) \ Ch(\overline{G}) \leq Ch(\overline{G}') + 1$$

Caso 1: Se há igualdade em (a) e em (b) então tem-se que $d_G(v) \geq Ch(G')$ e $d_{\overline{G}}(v) \geq Ch(\overline{G}')$, logo $Ch(G') + Ch(\overline{G}') \leq d_G(v) + d_{\overline{G}}(v) \leq n - 1$. Por (a) e (b) $Ch(G) + Ch(\overline{G}) \leq (n - 1) + 2 \leq n + 1$.

Caso 2: Se em (a) ou (b) há uma desigualdade estrita então pela hipótese de indução: $Ch(G) + Ch(\overline{G}) \leq Ch(G') + Ch(\overline{G}') + 1 \leq n + 1$. ■

Os grafos que atingem a igualdade no Teorema 3.11 foram caracterizados por Finck [22], que provou a existência de exatamente dois tipos de grafos com esta propriedade (veja Figura 3.3): (a) grafos cujo conjunto de vértices pode ser particionado em uma clique K e um conjunto estável S , tal que S tem um vértice adjacente a todos os vértices de K ; e (b) grafos cujo conjunto de vértices pode ser particionado em uma clique K , um conjunto estável S e um C_5 tal que todo vértice do C_5 é adjacente a todo vértice de K e a nenhum vértice de S .

O resultado principal deste capítulo é a solução de um problema proposto em 1997 por Zsolt Tuza [42], Problema 1.1, que questiona a caracterização dos grafos que satisfazem a igualdade para um teorema do tipo Nordhaus-Gaddum para coloração por listas. Antes de enunciar o problema, façamos algumas definições.

De acordo com a Propriedade 3.8, o grafo completo bipartido K_{q,q^q} não é q -selecionável. Assim se H é um grafo qualquer com q -vértices e S_{q^q} é um conjunto estável com q^q vértices então $Ch(H \oplus S_{q^q}) > q$. Definimos então o número $f(H)$:

Definição 3.13 $f(H)$ é o menor inteiro k tal que $Ch(H \oplus S_k) > |V(H)|$.

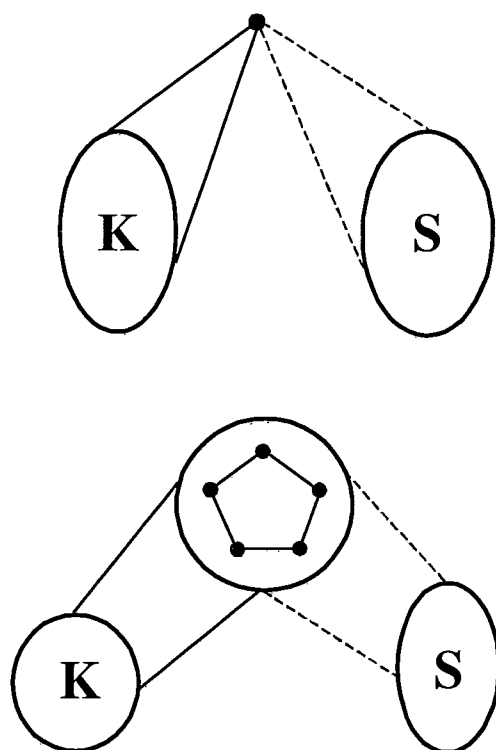


Figura 3.3: Grafos de Finck.

Desta forma, dado um grafo H , $f(H)$ nos diz qual o tamanho k do menor conjunto estável S_k tal que o grafo resultante da junção de H com S_k não seja $|V(H)|$ -selecionável.

Ainda pelo Corolário 3.8, o fato de que K_{q,q^q} não é q -selecionável e é minimal com relação a esta propriedade significa que $f(S) = |S|^{|S|}$ para todo conjunto estável S . No caso do grafo completo K é fácil ver que $f(K) = 1$ já que $Ch(K_n) = n$, para uma clique com n vértices. Note que, se G é um grafo diferente de uma clique e a, b dois vértices não-adjacentes de G então $f(G + ab) \leq f(G)$.

Portanto podemos concluir que:

Para todo grafo G com q vértices, temos $1 \leq f(G) \leq q^q$. (3.2)

Abaixo apresentamos uma propriedade de $f(H)$.

Lema 3.14 *Se H não é um grafo completo então $f(H) > |V(H)|$.*

Prova. Suponha o lema falso e seja H um contra-exemplo minimal no número de vértices com esta propriedade. Seja $q = |V(H)|$ de forma que $H \oplus S_q$ não é q -selecionável, mas que todo subgrafo H' de H satisfaz $H' \oplus S_{|H'|}$ é $|H'|$ -selecionável. Sejam a, b dois vértices não-adjacentes de H . O grafo H possui ao menos três vértices, porque do contrário $H = S_2$, logo $f(H) = 4$, e H não é um contra-exemplo para o lema.

Seja L uma lista má, ou seja, uma atribuição de cores no conjunto de vértices de $H \oplus S_q$ que satisfaz $|L(v)| = q$, para todo $v \in V(H \oplus S_q)$, e tal que $H \oplus S_q$ não é L -colorível.

Primeiro suponha que exista um vértice $x \in H - \{a, b\}$ e um vértice $y \in S_q$ tais que $L(x) \neq L(y)$. Escolha uma cor α de $L(x) \setminus L(y)$, associe-a à x e remova x . Agora y tem grau $q - 1$ e $|L(y) - \alpha| = |L(y)| = q$. Pela minimalidade de H , o grafo $(H - x) \oplus (S_q - y)$ é L -colorível, e por (3.1) assim também é $H \oplus S_q$; isto é uma contradição.

Agora podemos assumir que $L(x)$ é a mesma para todo $x \in (H - \{a, b\}) \cup S_q$, isto é $L(x) = \{1, \dots, q\}$. Associe a cor 1 a todo vértice de S_q , e cora os $q - 2$ vértices de $H - \{a, b\}$ com as cores $2, \dots, q - 1$. Assim estamos usando $q - 1$ cores para colorir $H - \{a, b\}$, e podemos estender esta coloração a a e b uma vez que $|L(a)| = |L(b)| = q$ e a, b não são adjacentes; uma contradição novamente. ■

Uma consequência direta deste lema é o seguinte corolário.

Corolário 3.15 *$f(H) = 1$ se e somente se H é um grafo completo.* ■

Definimos abaixo os grafos do tipo F_1 , \overline{F}_1 e F_2 os quais chamaremos grafos extremais.

Definição 3.16 *Seja H um grafo qualquer. Um grafo G é do tipo F_1 , denotado por $G = F_1(S, H, S_f)$ se e somente se seu conjunto de vértices pode ser particionado em três conjuntos S, H, S_f tais que $S \cup S_f$ é um conjunto estável de G , todo vértice de S_f é adjacente a todo vértice de H (ou seja, $H \oplus S_f$ é um subgrafo de G), $|S_f| \geq f(H)$, todo vértice de S é não-adjacente a ao menos um vértice de H (veja Figura 3.4).*

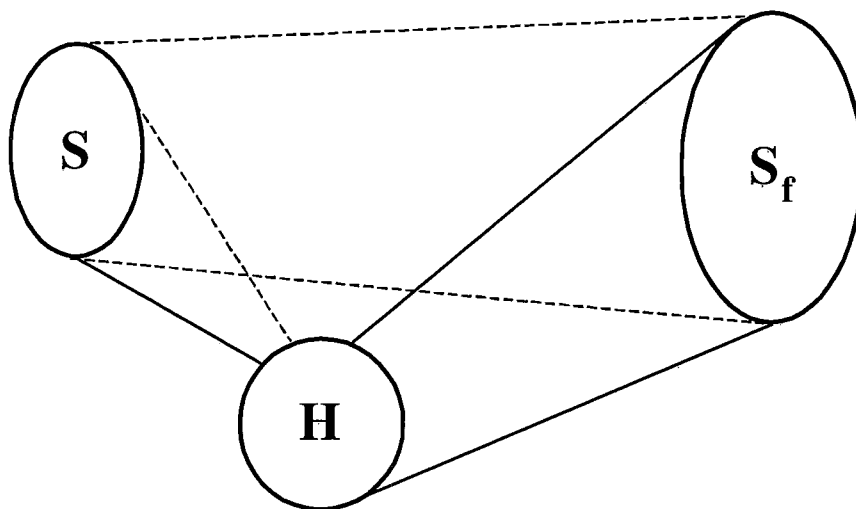


Figura 3.4: Grafo extremal F_1 .

Definição 3.17 *Um grafo G é do tipo \overline{F}_1 se o complemento \overline{G} of G é do tipo F_1 , e denotamos por $G = \overline{F}_1(S, H, S_f)$ sempre que $\overline{G} = F_1(S, H, S_f)$.*

Definição 3.18 *Um grafo G é do tipo F_2 , denotado por $G = F_2(S, K, C_5)$, se e somente se seu conjunto de vértices pode ser particionado em uma clique K , um conjunto estável S e um C_5 tal que todo vértice do C_5 é adjacente a todo vértice de K e a nenhum vértice S . Observe que o complemento de um grafo do tipo F_2 é também do tipo F_2 (veja Figura 3.5).*

Com a nossa notação, os grafos de Finck são os grafos do tipo F_2 e $G = F_1(S, K, S_f)$ quando H é um grafo completo (e assim $|S_f| \geq 1$.)

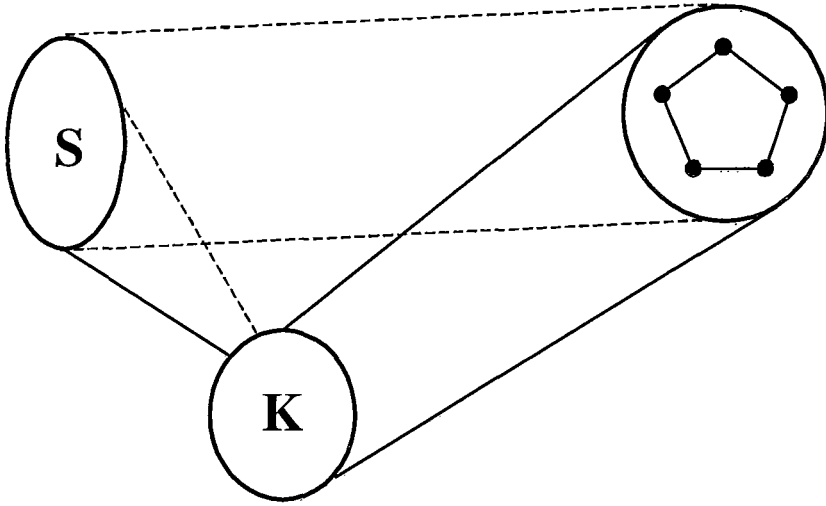


Figura 3.5: Grafo extremal F_2 .

A seguir enunciamos o teorema principal deste capítulo:

Teorema 3.19 *Um grafo G com n vértices satisfaz $Ch(G) + Ch(\overline{G}) = n + 1$ se e somente se G é do Tipo F_1, \overline{F}_1 ou F_2 . ■*

Note que em contraste com a caracterização de Finck [22], qualquer grafo H pode ser usado nos tipos F_1 e F_2 . Assim, qualquer grafo H pode ser um subgrafo de um grafo G extremal, isto é, um grafo G tal que $Ch(G) + Ch(\overline{G}) = n + 1$.

3.3 Prova do teorema principal

Primeiramente mostremos que todo grafo G do tipo F_1, \overline{F}_1 ou F_2 satisfaz $Ch(G) + Ch(\overline{G}) = n + 1$. Pelo Teorema 3.12, todo grafo G satisfaz $Ch(G) + Ch(\overline{G}) \leq n + 1$. Logo, para provar que $Ch(G) + Ch(\overline{G}) = n + 1$ é suficiente mostrar que $Ch(G) + Ch(\overline{G}) \geq n + 1$.

Assuma que G é um grafo do tipo $F_1(S, H, S_f)$. Pela definição de $f(H)$, temos $Ch(G) \geq |V(H)| + 1$. Observe que $S \cup S_f$ induz uma clique em \overline{G} , assim $Ch(\overline{G}) \geq |S| + |S_f|$. Obtemos $Ch(G) + Ch(\overline{G}) \geq n + 1$ como desejado.

Se G é do tipo \overline{F}_1 então concluímos similarmente considerando o grafo \overline{G} .

Agora suponha que G é do tipo $F_2(S, K, C_5)$. Observe que $Ch(G) \geq Ch(K \oplus C_5) \geq \chi(K \oplus C_5) = |K| + 3$. Da mesma forma, uma vez que \overline{G} é do tipo $F_2(K, S, C_5)$, obtemos $Ch(\overline{G}) \geq Ch(\overline{S} \oplus C_5) \geq \chi(\overline{S} \oplus C_5) = |\overline{S}| + 3$. Além disso, $Ch(G) + Ch(\overline{G}) \geq |S| + 3 + |K| + 3 = n + 1$.

Note que o Teorema 3.12 implica que temos igualdade em toda as desigualdades acima.

Agora provemos que cada grafo que satisfaz

$$Ch(G) + Ch(\overline{G}) = |V(G)| + 1 \quad (3.3)$$

é do tipo F_1 , \overline{F}_1 ou F_2 . Nossa prova é por indução no número $n = |V(G)|$ de vértices de G . Claramente, a afirmação é verdadeira para $n \leq 2$. Seja G um grafo de ordem $n + 1 \geq 3$ que satisfaz (3.3), isto é:

$$Ch(G) + Ch(\overline{G}) = n + 2. \quad (3.4)$$

Considere um vértice arbitrário p de G . Seja r o grau de p em G ; note que p possui grau $n - r$ em \overline{G} . Não é possível que ambas as desigualdades $Ch(G - p) > r$ e $Ch(\overline{G} - p) > n - r$ ocorram, por que do contrário teríamos $Ch(G - p) + Ch(\overline{G} - p) \geq n + 2$, o que contradiz o Teorema 3.12 para $G - p$. Conseqüentemente

$$Ch(G - p) \leq r \text{ ou } Ch(\overline{G} - p) \leq n - r.$$

Isto nos leva a distinguir entre três casos.

Caso 1: $Ch(G - p) \leq r$ e $Ch(\overline{G} - p) > n - r$.

Como $Ch(\overline{G} - p) > n - r$, aplicamos (3.1) a \overline{G} e p , obtemos $Ch(\overline{G}) = Ch(\overline{G} - p)$; assim, juntamente com (3.4) e pelo Teorema 3.12 aplicado a $G - p$, temos $Ch(G) = Ch(G - p) + 1$, isto é, $G - p$ satisfaz (3.3). Pela hipótese de indução, $G - p$ é do tipo F_1, \overline{F}_1 ou F_2 . Consideremos estes três casos separadamente.

Assuma que $G - p$ é do tipo $F_1(S, H, S_f)$. Então $Ch(G - p) = q + 1$, onde $q = |V(H)|$, e conseqüentemente $Ch(G) = q + 2$. Considere os grafos $H' = H + p$, $S'_f = N(p) \cap S_f$ e $S' = S \cup S_f \setminus S'_f$. Afirmamos que G é do tipo $F_1(S', H', S'_f)$. Realmente, $S' \cup S'_f = S \cup S_f$ induz um conjunto estável em G . Todo vértice $x \in S'$ ou está em S , e assim tem um não-vizinho em H , ou está em $S_f \setminus N(p)$, e assim não é adjacente a p . Por construção, G contém $H' \oplus S'_f$. Resta provar que $|S'_f| \geq f(H')$. Suponha que $|S'_f| < f(H')$ e demonstremos que G é $(q + 1)$ -colorível por lista, o que é uma contradição.

Seja L uma associação de cores ao conjunto de vértices v de G tal que $|L(v)| \geq q + 1$. Pela definição de S' todo vértice em S' tem grau no máximo q . Assim, e por (3.1) aplicado a cada vértice de S' , precisamos mostrar somente que $G - S'$ é L -colorível. De qualquer forma, $G - S' = H' \oplus S'_f$ é realmente L -colorível pela definição de $f(H')$ e porque $|S'_f| < f(H')$. Então G é do tipo $F_1(S', H', S'_f)$ o que finaliza esta parte da demonstração.

Agora assumamos que $G - p$ é do tipo $\overline{F}_1(S, H, S_f)$. Escreva $|S| = s$, $|S_f| = g$ e $|V(H)| = q$. Afirmamos que $Ch(G - p) = s + g$. Realmente, quando $f(H) = 1$, o Lema 3.14 implica que H induz um conjunto estável em G , e assim todo vértice de H tem grau no máximo s em $G - p$. O grafo $(G - p) - H$ é $(s + g)$ -selecionável porque é uma clique de tamanho $s + g$. Por isso, e por (3.1), $G - p$ é $(s + g)$ -selecionável. Por

outro lado, quando $f(H) > 1$, o Lema 3.14 implica $g \geq f(H) \geq q + 1$. Além disso, todo vértice em H tem grau no máximo $s + q - 1 < s + g$ em $G - p$. Então podemos concluir da mesma forma que acima, aplicando 3.1 a cada vértice de H . Assim obtemos $Ch(G - p) = s + g$ como afirmado, e conseqüentemente $Ch(G) = s + g + 1$.

Suponha que H não é um subgrafo completo de \overline{G} . Pelo Lema 3.14, $g = |S_f| \geq f(H) \geq q + 1$. Afirmamos que o vértice p é adjacente a todos de $S \cup S_f$ em G pois do contrário provaremos que G é $(s + g)$ -seleccionável. Uma vez que $g \geq q + 1$, todo vértice em H tem grau no máximo $s + q < s + g$ em G , e assim, por (3.1), precisamos mostrar somente que $G' = G - H$ é $(s + g)$ -seleccionável.

Seja x um vértice em $S \cup S_f$ que não é adjacente a p . O vértice x tem grau $s + g - 1$ em G' . Novamente por (3.1), é suficiente verificar que $G' - x$ é $(s + g)$ -seleccionável; mas isto é claro porque $G' - x$ tem precisamente $s + g$ vértices. Então, temos que p é adjacente a todos de $S \cup S_f$ em G . Agora, se $N(p) \cap V(H) = \emptyset$ então G é do tipo $\overline{F}_1(S, H, S_f + p)$; senão G é do tipo $\overline{F}_1(S + p, H, S_f)$.

Assuma agora que H é um subgrafo completo de \overline{G} . Se p é adjacente a todos os vértices em $S \cup S_f$ então, tal como antes, G é do tipo \overline{F}_1 . Senão, seja x um vértice de $S \cup S_f$ que não é adjacente a p . Afirmamos que $g = 1$. Realmente, no caso oposto, provaremos que G é $(s + g)$ -seleccionável. Todo vértice em H tem grau no máximo $s + 1 < s + g$ em G e assim, por (3.1), precisamos provar somente que $G' = G - H$ é $(s + g)$ -seleccionável. Uma vez que x tem grau $s + g - 1$, é suficiente provar que $G' - x$ é $(s + g)$ -seleccionável; mas isto é verdade uma vez que $G' - x$ tem $s + g$ vértices.

Assim obtemos $|S_f| = f(H) = 1$, o que implica que $T = H \cup S_f$ é um conjunto estável de G , e $Ch(G) = s + 2$. Seja S'_f um subconjunto maximal de T tal que $S \cup \{p\} \oplus S'_f$ é um subgrafo induzido de G . Escreva $H' = S \cup \{p\}$. Afirmamos que $|S'_f| \geq f(H')$. Realmente, no caso oposto, provaremos que $Ch(G) = s + 1$. Note que

todo vértice em $U = T \setminus S'_f$ tem grau no máximo s , e assim, por (3.1), precisamos provar somente $G - U = H' \oplus S'_f$ é $(s + 1)$ -selecionável; mas isto é verdade pela definição de $f(H')$. Além disso, G é do tipo $F_1(U, H', S'_f)$ o que finaliza esta parte da demonstração.

Assuma agora que $G - p$ é do tipo $F_2(S, K, C_5)$. Assim $Ch(G - p) = k + 3$, onde $k = |K|$, e assim $Ch(G) = k + 4$. Afirmamos que p é adjacente a todos os vértices em $K \cup C_5$. Isto implicará que G é do tipo $F_2(S, K + p, C_5)$ como desejado. Suponha que p não é adjacente a algum vértice em $K \cup C_5$ e provemos que $Ch(G) = k + 3$, uma contradição.

Se existe um vértice em $x \in C_5$ não-adjacente a p , então o grau de x em G é $k + 2$. Assim, por (3.1), precisamos somente provar que $G' = G - x$ é $(k + 3)$ -selecionável. Sejam y, z os dois vizinhos de x em C_5 . O grau de y e z em G' é no máximo $k + 2$. Então, da mesma forma, precisamos somente provar que $G' \setminus \{y, z\}$ é $(k + 3)$ -selecionável; mas isto é óbvio porque $G' \setminus \{y, z\}$ tem $k + 3$ vértices.

Suponha agora que p não é adjacente a algum vértice x em K . Provemos novamente que $Ch(G) = k + 3$, uma contradição. Seja L uma aplicação de cores aos vértices de G tal que $|L(v)| \geq k + 3$ para todo $v \in V$. Se $L(x) \cap L(p) \neq \emptyset$, pegue uma cor $\alpha \in L(x) \cap L(p)$ e associe-a a x e p . Escreva $G' = G \setminus \{x, p\}$. Defina uma aplicação L' em G' por $L'(v) = L(v) \setminus \{\alpha\}$ para todo $v \in V(G')$. A aplicação L' satisfaz $|L'(v)| \geq k + 2$ para todo $v \in V(G')$. Além disso, o grafo G' é do tipo $F_2(S, K - x, C_5)$, logo é $(k + 2)$ -selecionável. Então, G' admite uma L' -coloração, que pode ser estendida para L -coloração de G .

Podemos agora assumir que $L(p) \cap L(x) = \emptyset$. Considere que $y \in C_5$. Escolhemos uma cor $\alpha \in L(x) \cup L(p)$ tal que $|L(y) \setminus \{\alpha\}| \geq k + 3$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\alpha \in L(p)$.

Associe a cor α a p . Escreva $G' = G - p$ e defina uma aplicação L' em G' por $L'(v) = L(v) \setminus \{\alpha\}$. Observe que $|L'(v)| \geq k + 2$ para todo vértice de G' , e $|L'(y)| \geq k + 3$. Além disso o grau de y em G' é $k + 2$. Então concluímos como acima que G' é $|L'|$ -selecionável e conseqüentemente que G é $(k + 3)$ -selecionável.

Caso 2: $Ch(G - p) > r$ e $Ch(\overline{G} - p) \leq n - r$.

Este caso é similar ao caso 1 por complementaridade.

Caso 3: Para todo vértice x , temos $Ch(G - x) \leq d_G(x)$ e $Ch(\overline{G} - x) \leq d_{\overline{G}}(x)$.

Seja p um vértice de G com o grau máximo Δ . Então:

$$Ch(G - p) \leq \Delta \text{ e } Ch(\overline{G} - p) \leq n - \Delta. \quad (3.5)$$

Portanto $Ch(G - p) + Ch(\overline{G} - p) \leq n$. Da última desigualdade e de (3.4) segue que

$$Ch(G) = Ch(G - p) + 1 \text{ e } Ch(\overline{G}) = Ch(\overline{G} - p) + 1.$$

Estas duas igualdades juntamente com (3.4) implicam que:

$$Ch(G - p) + Ch(\overline{G} - p) = n.$$

Desta última igualdade e de (3.5) obtemos que:

$$Ch(G - p) = \Delta \text{ e } Ch(\overline{G} - p) = n - \Delta,$$

isto é,

$$Ch(G) = \Delta + 1 \text{ e } Ch(\overline{G}) = n - \Delta + 1. \quad (3.6)$$

De acordo com o Teorema 3.3, a Fórmula 3.6 implica que um dos seguintes casos é válido:

- (i) $\Delta = 0$;
- (ii) $\Delta = 1$;
- (iii) $\Delta = 2$ e G tem uma componente conexa que é um ciclo ímpar;
- (iv) $\Delta \geq 3$ e G tem uma componente conexa que é uma clique de cardinalidade $\Delta + 1$.

Examinemos estes quatro casos separadamente.

Assuma $\Delta = 0$. Pegue um vértice v qualquer em G . Claramente G é do tipo $F_1(V, \emptyset, \emptyset)$.

Assuma $\Delta = 1$. Se G tem somente uma aresta ab então $G = F_1(V \setminus \{a, b\}, a, b)$. Senão, \overline{G} está contido na junção de $n - 1$ conjuntos estáveis de tamanho no máximo dois. Pelo Corolário 3.10, \overline{G} é $(n - 1)$ -selecionável, que contradiz (3.6).

Assuma $\Delta = 2$ e G tem um ciclo ímpar C . Seja l o comprimento de C . Considere os seguintes casos:

$l = 3$ Se $E(G) = E(C)$ então G é do tipo $F_1(V - C, C - v, v)$ onde v é um vértice qualquer de C . Senão, \overline{G} está contido na junção de $n - 2$ conjuntos estáveis de tamanho no máximo três com um conjunto estável de tamanho três. Pelo Corolário 3.10, \overline{G} é $(n - 2)$ -selecionável, o que contradiz novamente (3.6).

$l = 5$ Se $E(G) = E(C)$ então G é do tipo $F_2(V - C, \emptyset, C)$. Senão afirmamos que \overline{G} é $(n - 2)$ -selecionável. Primeiramente note que \overline{G} está contido na junção de uma clique K de tamanho $n - 6$, um conjunto estável $\{a, b\}$ e \overline{C} . Seja L uma aplicação de cores nos vértices de \overline{G} tal que $|L(v)| \geq n - 2$ para todo $v \in V(G)$. Associe cores distintas das suas listas aos vértices de K ; defina D como o conjunto das $n - 6$ cores assim utilizadas. Escreva $G' = \overline{G} - K$ e

defina uma aplicação L' em G' por $L'(v) = L(v) \setminus D$ para todo $v \in V(G')$; assim $|L'(v)| \geq 4$ para $v \in V(G')$.

Se $L'(a) \cap L'(b) \neq \emptyset$, pegue uma cor $\alpha \in L'(a) \cap L'(b)$ e associe-a a a e b . Seja L'' a aplicação em C definida por $L''(v) = L'(v) \setminus \{\alpha\}$. Temos $|L''(v)| \geq 3$ para todo $v \in C$ assim C é L'' -colorível e assim G é L -colorível, uma contradição.

Assuma agora que $L(a) \cap L(b) = \emptyset$. Seja x um vértice de C . Podemos escolher uma cor $\alpha \in L(a) \cup L(b)$ tal que $|L(x) \setminus \{\alpha\}| \geq 4$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $\alpha \in L(a)$. Associe a cor α ao vértice a . Escreva $G' = G - a$, e defina uma aplicação L' em G' por $L'(v) = L(v) \setminus \{\alpha\}$ para todo $v \in V(G')$. Note que $|L'(v)| \geq 3$ para todo $v \in V(G')$ e $|L'(x)| \geq 4$. Além disso, o grau de x em G' é três. Assim, por (3.1), é suficiente provar que $G'' = G' - x$ é L' -colorível. Sejam y, z os dois vizinhos de x em \overline{C} . O grau de y e z em G'' é dois; assim, novamente por (3.1), é suficiente provar que $G'' \setminus \{y, z\}$ é L' -colorível; mas isto é verdade uma vez que $G'' \setminus \{y, z\}$ tem três vértices.

$l \geq 7$ Note que \overline{G} está contido na junção de uma clique K de tamanho $n + 1 - l$ e \overline{C} . Afirmamos que \overline{G} é $(n - 2)$ -selecionável. Seja L uma aplicação $V(\overline{G})$ tal que $|L(v)| \geq n - 2$ para todo $v \in V(\overline{G})$. Associe cores distintas de suas listas aos vértices de K , e chame de D o conjunto destas $n + 1 - l$ cores. Considere $G' = G - K$ e defina uma aplicação L' em G' por $L'(v) = L(v) \setminus D$ para todo $v \in V(G')$. Note que $|L'(v)| \geq l - 3$ para todo $v \in V(G')$. Pelo Teorema 3.3, uma vez que G' não é um ciclo ímpar ($l \geq 7$) nem um grafo completo, G' é Δ' -selecionável onde Δ' denota o grau máximo de G' . Por fim, note que $\Delta' = l - 3$. Assim G' é L' -selecionável, e G é $(n - 2)$ -selecionável.

Assuma que $\Delta \geq 3$ e G tem uma componente conexa K que é uma clique de cardinalidade $\Delta + 1$. Escreva $H = G - K$ e $S_f = K$. Pela definição de $f(H)$ e uma

vez que $Ch(\overline{G}) = n + 1 - \Delta = |H| + 1$, temos $|S_f| \geq f(H)$ e assim G é do tipo $\overline{F}_1(\emptyset, H, S_f)$. Isto completa a prova. ■

3.4 Exemplos

O primeiro exemplo desta seção mostra que o $K_{2,4} = (A \cup B, E)$ é 3-colorível por lista, onde $A = \{u, v\}$ (veja Figura 3.6). Mostremos inicialmente que $Ch(K_{2,4}) \leq 3$ exibindo uma L -coloração, para todo L tal que $|L(x)| = 3$, $x \in V$.

Seja L uma associação de listas de cores aos vértices de $K_{2,4}$ com $|L(x)| = 3$, para todo $x \in A \cup B$. Seja α uma cor de $L(u)$ e β uma cor de $L(v)$. Colorimos $K_{2,4}$ designando a cor α para o vértice u e a cor β para o vértice v . Os vértices de B tem listas de tamanho 3, logo a escolha das duas cores possivelmente distintas para colorir A bloqueou no máximo em duas cores as listas dos vértices de B . Então resta ao menos uma cor disponível em cada vértice de B , a qual podemos designá-la aos vértices de B porque este é um conjunto estável.

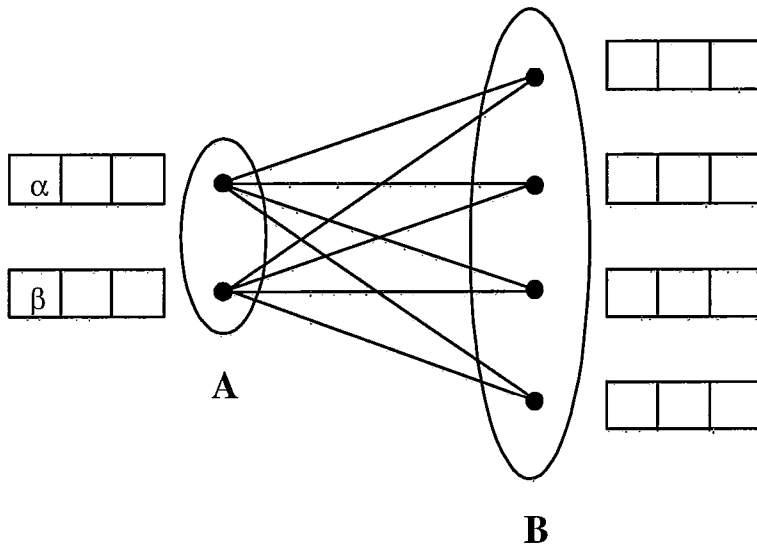


Figura 3.6: Grafo $K_{2,4}$.

Para provar que $Ch(K_{2,4}) > 2$ exibimos uma 2-lista má (veja Figura 3.7).

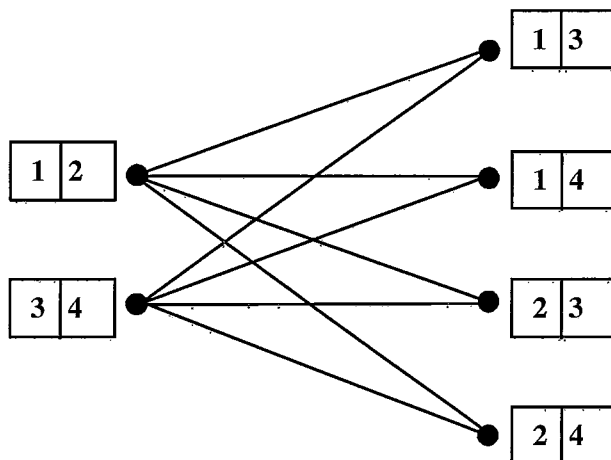


Figura 3.7: 2-lista má para $K_{2,4}$.

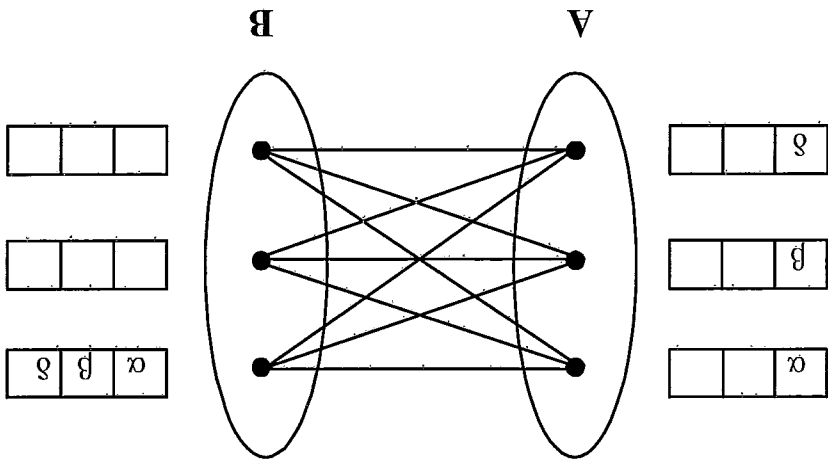
Este primeiro exemplo mostra que podemos ter uma desigualdade estrita na Propriedade 3.2.

Analogamente para $G = K_{3,3}$, $V(G) = A \oplus B$, apresentamos na Figura 3.8 uma 2-lista má para o grafo G .

Provemos que $Ch(K_{3,3}) \leq 3$. Seja L uma associação de listas de cores aos vértices de G tal que $|L(v)| = 3$ para todo vértice $v \in V(G)$. Se existe uma cor α comum a todas as listas de um dos conjuntos estáveis A ou B então colorimos este conjunto com α e ainda sobram no mínimo duas cores nas listas do outro conjunto para colorí-lo. Agora, suponhamos que as listas de um dos conjuntos estáveis (sem perda de generalidade seja A), não possuam cor em comum. Ora, para que não seja possível colorir B seria preciso que as 3^3 possíveis colorações escolhidas para colorir A estivessem representadas nas listas de B (exemplo na Figura 3.9). Isto é

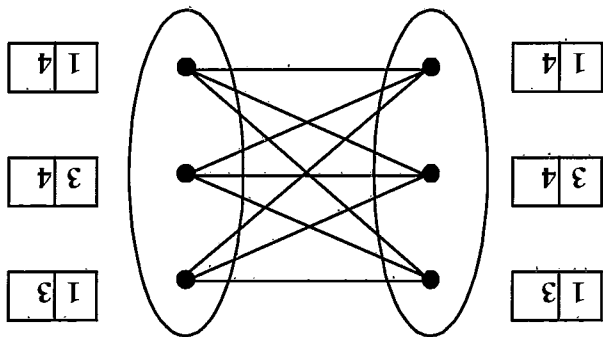
O número cromático tem relação direta com respeito a operação de junção, isto é, $\chi(G_1 \oplus G_2) = \chi(G_1) + \chi(G_2)$, para quaisquer dois grafos com conjunto de vértices disjuntos G_1 e G_2 . Por outro lado, o número cromático de listas não possui tal propriedade. No exemplo com $K_{2,4}$ temos que $3 = Ch(K_{2,4}) > Ch(S_2) + Ch(S_4) = 1 + 1 = 2$.

Figura 3.9: Exemplo com $K_{3,3}$.



impossível uma vez que em B temos 3 listas. Observe que mais do que provar que $Ch(G) \leq 3$, este exemplo ilustra que $Ch(K_{3,i}) \leq 3$ para $1 \leq i \leq 26$.

Figura 3.8: 2-lista má para $K_{3,3}$.



Como citado, os grafos que atingem a igualdade no teorema de Nordhaus-Gaddum foram caracterizados por Finck [22]. Estes grafos também satisfazem a igualdade no Teorema do tipo Nordhaus-Gaddum 3.12 para coloração por listas.

O grafo bipartido $K_{1,3}$ é chamado de **Garra** ou *claw* (veja Figura 3.10).

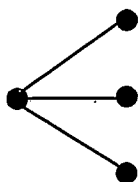


Figura 3.10: Garra.

Mostremos que este grafo satisfaz $Ch(G) + Ch(\overline{G}) = n + 1 = 5$. Pelo Teorema 3.12, para todo grafo G , $Ch(G) + Ch(\overline{G}) \leq n + 1$, logo resta-nos provar que $Ch(G) + Ch(\overline{G}) \geq 5$. Pela Propriedade 3.2 temos que:

$$Ch(K_{1,3}) \geq \chi(K_{1,3}) = 2, \text{ e}$$

$$Ch(\overline{K}_{1,3}) \geq \chi(\overline{K}_{1,3}) = 3,$$

logo $Ch(K_{1,3}) + Ch(\overline{K}_{1,3}) \geq 5$, como desejado.

O grafo **touro** ou *bull* é um grafo B com cinco vértices $\{a, b, c, d, e\}$ e cinco arestas $\{ab, bc, cd, be, ce\}$ (veja Figura 3.11). Analogamente à garra, o grafo B satisfaz $Ch(B) + Ch(\overline{B}) = n + 1$.

Como já mostrado anteriormente os grafos de Finck não são os únicos grafos que

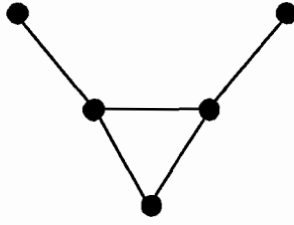


Figura 3.11: Touro.

satisfazem a igualdade no Teorema 3.12. Por exemplo, o grafo $K_{2,4}$ não é um grafo de Finck e $Ch(K_{2,4}) + Ch(K_{2,4}) = 3 + 4 = 7$.

Capítulo 4

Problema Grafo Sanduíche (k, l)

4.1 Introdução

Um grafo $G^1 = (V, E^1)$ é um subgrafo *gerador* do grafo $G^2 = (V, E^2)$ se $E^1 \subseteq E^2$; e um grafo $G = (V, E)$ é um grafo *sanduíche* para o par G^1, G^2 se $E^1 \subseteq E \subseteq E^2$. Para simplificar a notação seja E^3 o conjunto das arestas do grafo completo com conjunto de vértices V que não estão em E^2 . Assim, todo grafo sanduíche para o par G^1, G^2 satisfaz $E^1 \subseteq E$ e $E \cap E^3 = \emptyset$. Chamamos E^1 o *conjunto de arestas obrigatórias*, E^3 o *conjunto de arestas proibidas*. O PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE PARA A PROPRIEDADE Π é definido como segue [26]:

PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE PARA A PROPRIEDADE Π

Instância: Conjunto de vértices V , conjunto de arestas obrigatórias E^1 ,
conjunto de arestas proibidas E^3 .

Questão: Existe um grafo $G = (V, E)$ tal que $E^1 \subseteq E$ e $E \cap E^3 = \emptyset$ que satisfaz a propriedade Π ?

Ultimamente, os Problemas Grafo Sanduíche tem atraído muita atenção. Surgiram a partir de várias aplicações e são uma generalização natural dos problemas de reconhecimento [11, 18, 27, 26, 28, 33, 34].

O problema de reconhecimento para a classe de grafos \mathcal{C} é equivalente ao problema grafo sanduíche no qual o conjunto de arestas obrigatórias é $E^1 = E$, o conjunto

de arestas proibidas é o conjunto de arestas que não estão em E , onde $G = (V, E)$ é o grafo que queremos reconhecer e a propriedade Π é “pertencer à classe \mathcal{C} ”.

Os grafos perfeitos foram introduzidos por Berge [4] como os grafos para os quais, em todo subgrafo induzido, o tamanho da maior clique é igual ao número cromático. O problema de reconhecimento para a classe de grafos perfeitos é um problema em aberto muito famoso em complexidade computacional [32].

Golumbic et al. [26] têm considerado muitos problemas sanduíche com respeito a várias subclasses de grafos perfeitos. Neste artigo [26], é provado que o PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE PARA GRAFOS SPLIT permanece em P enquanto o PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE PARA GRAFOS DE PERMUTAÇÃO é NP -completo.

Estamos interessados em problemas grafo sanduíche para as propriedades Π relacionadas à decomposição de grafos surgidas em teoria de grafos perfeitos: conjunto homogêneo [11], composição join [18], a partição dos vértices do grafo segundo restrições internas e externas. A seguir, consideramos a decomposição de um grafo em conjuntos estáveis e cliques.

Uma *partição* (k, l) de um grafo G é uma partição do seu conjunto de vértices em no máximo k conjuntos estáveis e l cliques. Um grafo é (k, l) se este admitir uma (k, l) -partição.

A complexidade do reconhecimento de um grafo (k, l) foi completamente classificada como segue: se $k = 3$ e $l = 0$ então o problema correspondente é 3-coloração, o qual implica [8] que o problema de reconhecimento de grafos (k, l) é NP -completo, sempre que $k \geq 3$ ou $l \geq 3$. Para os valores restantes de k e l , o problema é polinomial: grafos $(1, 1)$ são grafos split; grafos $(2, 0)$ são os grafos bipartidos; o reconhecimento em tempo polinomial de grafos $(2, 1)$ e conseqüentemente de grafos $(1, 2)$ foi estabelecido em [7, 8]; o reconhecimento em tempo polinomial de grafos

$(2, 2)$ foi estabelecido em [7, 8] e independentemente em [21].

Os estudos em problemas grafo sanduíche focam os problemas que são interessantes em termos da sua complexidade, i.e., nem trivialmente NP -completo nem trivialmente polinomial.

Fato 1 *Se o problema de reconhecimento para uma classe de grafos é NP -completo, então o seu problema grafo sanduíche correspondente é também NP -completo.*

Fato 2 *Se a propriedade Π é hereditária então existe um grafo sanduíche para (V, E^1, E^2) com a propriedade Π se e somente se $G^1 = (V, E^1)$ tem a propriedade Π . ■*

Fato 3 *Se a propriedade Π é ancestral então existe um grafo sanduíche para (V, E^1, E^2) com a propriedade Π se e somente se $G^2 = (V, E^2)$ tem a propriedade Π . ■*

Assim, o Fato 1 diz que o problema sanduíche para grafos (k, l) é NP -completo, sempre que $k \geq 3$ ou $l \geq 3$. Além disso, o Fato 2 (respectivamente Fato 3) diz que para cada propriedade que é hereditária (respectivamente ancestral), o problema grafo sanduíche reduz-se ao problema de reconhecimento para esta propriedade em um único grafo G^1 (respectivamente G^2). Conseqüentemente, as propriedades hereditárias que definem os grafos $(1, 0)$ e $(2, 0)$, e as propriedades ancestrais que definem os grafos $(0, 1)$ e $(0, 2)$ reduzem estes problemas grafo sanduíche ao problema de reconhecimento, que são polinomiais.

Observamos que os problemas sanduíche para as propriedades $(2, 1)$ ou $(2, 2)$ não são triviais, no sentido de que estas propriedades não são hereditárias (neste caso o grafo G^1 é sempre uma solução) nem são propriedades ancestrais (neste caso o grafo G^2 é sempre uma solução). A Figura 4.1 mostra uma instância onde nem o grafo G^1 , nem o grafo G^2 admitem uma partição $(2, 1)$, (K, S_1, S_2) , mas existe um grafo sanduíche G para esta propriedade com partição $(2, 1)$: $K = \{5, 6\}$, $S_1 = \{1, 2\}$ e $S_2 = \{3, 4\}$.

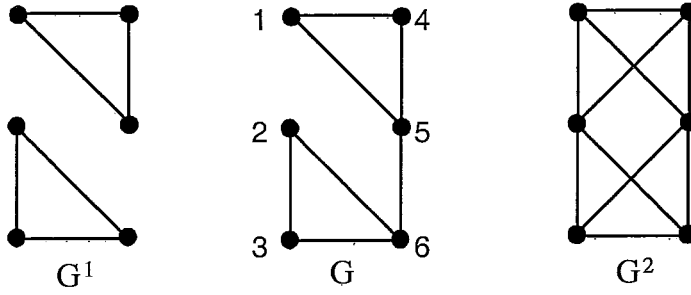


Figura 4.1: Grafo Sanduíche G que admite uma partição $(2, 1)$.

Da mesma forma, a Figura 4.2 mostra uma instância onde nem o grafo G^1 , nem o grafo G^2 admitem uma partição $(2, 2)$, (K_1, K_2, S_1, S_2) , mas existe um grafo sanduíche G com esta propriedade com partição $(2, 2)$: $K_1 = \{6, 10\}$, $K_2 = \{8, 12\}$, $S_1 = \{1, 3, 5, 7\}$ e $S_2 = \{2, 4, 9, 11\}$.

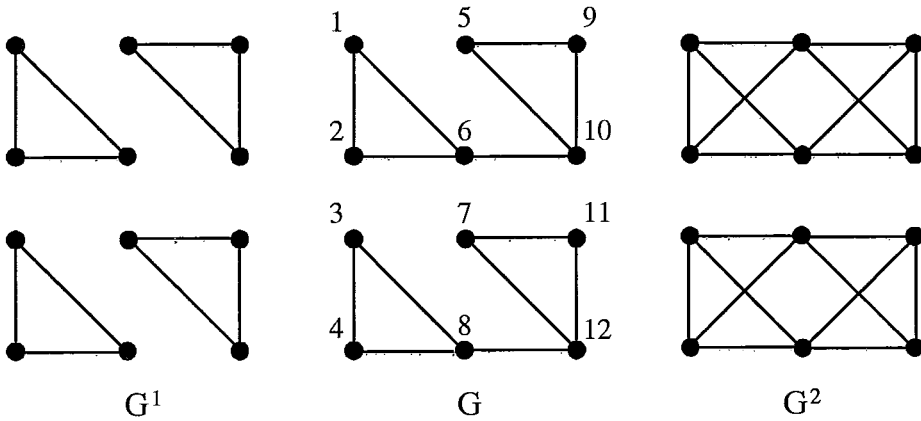


Figura 4.2: Grafo Sanduíche G que admite uma partição $(2, 2)$.

Dados um grafo G e uma propriedade Π , definimos sua *propriedade complementar* $\bar{\Pi}$ como segue: G satisfaz $\bar{\Pi}$ se e somente se \bar{G} satisfaz Π .

Fato 4 *Existe um grafo sanduíche com a propriedade Π para a instância (V, E^1, E^3) se e somente se existe um grafo sanduíche com a propriedade $\bar{\Pi}$ para a instância*

(V, E^3, E^1) . ■

Assim, nossa prova de NP -completude do problema sanduíche para grafos $(2, 1)$ que apresentamos adiante, implica na NP -completude do problema sanduíche para grafos $(1, 2)$.

O Capítulo 4 é organizado da seguinte forma: na Seção 4.2 provamos que o Problema Grafo Sanduíche $(2, 1)$ é NP -completo. A Seção 4.3 contém a prova que o Problema Grafo Sanduíche $(2, 2)$ é NP -completo. Estas provas, juntamente com os fatos acima classificam completamente a complexidade do Problema Grafo Sanduíche (k, l) como segue: o problema é NP -completo, se $k + l > 2$; e polinomial caso contrário. Finalmente, na Seção 4.4 definimos e classificamos os subproblemas restritos pelo grau obtidos pela limitação do grau máximo em G^2 .

4.2 Problema Grafo Sanduíche $(2, 1)$

Provamos que o PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE $(2, 1)$ é NP -completo pela redução do Problema NP -completo 3-SATISFABILIDADE ao PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE $(2, 1)$. Estes dois problemas de decisão são definidos como segue.

3-SATISFABILIDADE (3SAT)

Instância: Conjunto $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ de variáveis, coleção $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ de cláusulas sobre X tal que cada cláusula $c \in C$ tem $|c| = 3$ literais.

Questão: Existe uma atribuição verdade para X tal que cada cláusula em C tem ao menos um literal verdadeiro?

PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE $(2, 1)$

Instância: Conjunto de vértices V , conjunto de arestas obrigatórias E^1 , conjunto de arestas proibidas E^3 .

Questão: Existe um grafo $G = (V, E)$, tal que $E^1 \subseteq E$ e $E \cap E^3 = \emptyset$, e G é $(2, 1)$?

Teorema 1 O PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE $(2, 1)$ é NP -completo.

Prova. Para reduzir 3SAT ao PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE (2, 1) vamos construir uma instância particular (V, E^1, E^3) do PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE (2, 1) a partir de uma instância genérica (X, C) de 3SAT, tal que C é satisfatível se e somente se (V, E^1, E^3) admite um grafo sanduíche $G = (V, E)$ o qual é (2, 1). Primeiramente descrevemos a construção de uma instância particular (V, E^1, E^3) de PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE (2, 1); Em seguida, provamos o Lema 1 estabelecendo que todo grafo $G = (V, E)$ que satisfaz $E^1 \subseteq E$ e $E \cap E^3 = \emptyset$ e tal que G é (2, 1), define uma atribuição verdade para (X, C) ; Por fim, provamos o Lema 2 estabelecendo que toda atribuição verdade para (X, C) define um grafo $G = (V, E)$ que é (2, 1) e satisfaz $E^1 \subseteq E$ e $E \cap E^3 = \emptyset$. Esses passos são detalhados abaixo. ■

Construção da instância particular PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE (2, 1).

O conjunto de vértices V contém: um conjunto auxiliar de vértices: $\{k_1, k_2, s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}\}$; para cada variável x_i , $1 \leq i \leq n$, dois vértices x_i, \bar{x}_i , correspondentes aos seus literais e um vértice p_i ; para cada cláusula $c_j = (l_1^j \vee l_2^j \vee l_3^j)$, $1 \leq j \leq m$, três vértices correspondentes t_1^j, t_2^j, t_3^j . Na Figura 4.3, arestas sólidas são E^1 -arestas obrigatórias e as arestas pontilhadas são E^3 -arestas proibidas.

O conjunto de arestas obrigatórias E^1 contém: arestas entre os vértices auxiliares $\{k_1k_2, k_1s_{11}, k_1s_{12}, s_{11}s_{12}, k_2s_{21}, k_2s_{22}, s_{21}s_{22}\}$; para cada variável x_i , $1 \leq i \leq n$, o conjunto $\{x_i s_{11}, \bar{x}_i s_{12}, x_i p_i, \bar{x}_i p_i\}$; para cada cláusula c_j , $1 \leq j \leq m$, o conjunto $\{t_1^j t_2^j, t_1^j t_3^j, t_2^j t_3^j\}$.

O conjunto de arestas proibidas E^3 contém: arestas entre vértices auxiliares: $\{k_1s_{21}, k_1s_{22}, k_2s_{11}, k_2s_{12}, s_{11}s_{21}, s_{11}s_{22}, s_{12}s_{21}, s_{12}s_{22}\}$; para cada variável x_i , $1 \leq i \leq n$, o conjunto $\{x_i \bar{x}_i, p_i k_2\}$; para cada cláusula $c_j = (l_1^j \vee l_2^j \vee l_3^j)$, $1 \leq j \leq m$, $\{t_1^j l_1^j, t_2^j l_2^j, t_3^j l_3^j\}$.

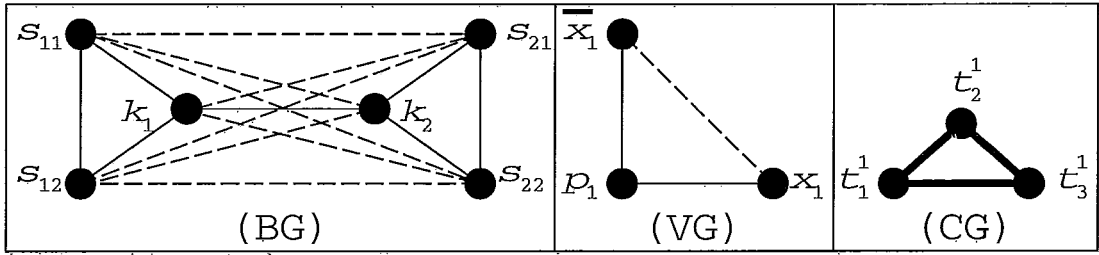


Figura 4.3: Grafo base (BG), Estrutura Variável (VG) e Estrutura Cláusula (CG).

Chamamos *Grafo Base* $(2, 1)$ o subgrafo de $G^2 = (V, E^2)$ induzido por $\{k_1, k_2, s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}\}$ (veja Figura 4.3(BG)). Durante a construção utilizamos dois tipos de estruturas chamadas respectivamente *Estrutura Variável* e *Estrutura Cláusula*. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, chamamos de *Estrutura Variável* o subgrafo de $G^2 = (V, E^2)$ induzido por $\{x_i, \bar{x}_i, p_i\}$ (veja Figura 4.3(VG)). Para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, chamamos *Estrutura Cláusula* o subgrafo de $G^2 = (V, E^2)$ induzido por $\{t_1^j, t_2^j, t_3^j\}$ (veja Figura 4.3(CG)). Lemas 1 e 2 demonstram a equivalência requerida para a prova do Teorema 1.

Lema 1 *Se a instância particular (V, E^1, E^3) de PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE $(2, 1)$ construída acima admite um grafo $G = (V, E)$ tal que $E^1 \subseteq E$ e $E \cap E^3 = \emptyset$ e G é $(2, 1)$, então existe uma atribuição verdade que satisfaz (X, C) .*

Prova. Suponha que exista um grafo sanduíche $(2, 1)$, $G = (V, E)$ onde (S_1, S_2, K) é uma partição $(2, 1)$ com S_1, S_2 conjuntos independentes e K uma clique.

Afirmção 1.1 $k_1, k_2 \in K$ e $s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22} \in S_1 \cup S_2$.

Prova da Afirmção 1.1: Como $S_1 \cup S_2$ induz um subgrafo bipartido em G , temos que qualquer triângulo induzido em G^1 tem que ter ao menos um de seus vértices em K . Agora, cada vértice em $\{s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}\}$ está ligado por E^3 -arestas a três vértices que induzem um triângulo em G^1 , o que impede cada vértice em $\{s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}\}$ de estar em K . Assim, os vértices auxiliares restantes k_1 e k_2 têm que pertencer a K . ■

Note que ambos $\{s_{11}, s_{12}\}$ e $\{s_{21}, s_{22}\}$ induzem arestas em G^1 , o que força $\{s_{i1}, s_{i2}\} \cap S_i \neq \emptyset$, $i = 1, 2$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $s_{11}, s_{21} \in S_1$, o que implica que $s_{12}, s_{22} \in S_2$. Note que, no caso da instância particular (V, E^1, E^3) admitir um grafo sanduíche $(2, 1)$, digamos $G = (V, E)$, qualquer partição $(2, 1)$ para G , digamos (K, S_1, S_2) , satisfaz $K, S_1, S_2 \neq \emptyset$.

Afirmção 1.2 Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, $p_i \in S_1 \cup S_2$, $x_i \in K \cup S_2$ e $\bar{x}_i \in K \cup S_1$.

Prova da Afirmção 1.2: Uma vez que $p_i k_2 \in E^3$ e $k_2 \in K$, temos que p_i não pode estar em K . Além disso, como $x_i s_{11}, \bar{x}_i s_{12} \in E^1$ e $s_{11} \in S_1$, $s_{12} \in S_2$, temos respectivamente $x_i \in K \cup S_2$ e $\bar{x}_i \in K \cup S_1$, $i \in \{1, \dots, n\}$. ■

Observe que, como $x_i p_i \in E^1$ e $x_i \bar{x}_i \in E^3$, temos que se $x_i \in K$, então $\bar{x}_i \in S_1$, o que implica $p_i \in S_2$; se $x_i \in S_2$, então $p_i \in S_1$, o que implica $\bar{x}_i \in K$.

Afirmção 1.3 Para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, ao menos um dos vértices $\{t_1^j, t_2^j, t_3^j\}$ tem que estar em K .

Prova da Afirmção 1.3: Como $S_1 \cup S_2$ induz um subgrafo bipartido em G , para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, temos que ao menos um dos vértices do triângulo induzido em G^1 por $\{t_1^j, t_2^j, t_3^j\}$ tem que estar em K . ■

Agora definimos a atribuição verdade (X, C) : para $i \in \{1, \dots, n\}$, x_i é falso se e somente se o vértice $x_i \in K$. Suponha que para algum $j \in \{1, \dots, m\}$, a cláusula $c_j = (l_1^j \vee l_2^j \vee l_3^j)$ é falsa. Pela construção de (V, E^1, E^3) , existe uma aresta de E^3 entre o vértice associado ao literal l_k^j e o vértice t_k^j , $k \in \{1, 2, 3\}$. Conseqüentemente, se o literal l_k^j é falso, então seu vértice associado está em K o que implica que t_k^j não pode estar em K . Então, todos os vértices do triângulo, induzido em G^1 por $\{t_1^j, t_2^j, t_3^j\}$, têm que estar em $S_1 \cup S_2$. Pela Afirmção 1.3, isto é uma contradição à hipótese de que S_1, S_2 e K é uma partição $(2, 1)$ do conjunto de vértices de G . Conseqüentemente, a atribuição verdade definida acima satisfaz (X, C) . Isto conclui

a prova do Lema 1. ■

A recíproca do Lema 1 é dada a seguir pelo Lema 2.

Lema 2 *Se existe uma atribuição verdade que satisfaz (X, C) , então a instância particular (V, E^1, E^3) do PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE $(2, 1)$ construída acima admite um grafo $G = (V, E)$ tal que $E^1 \subseteq E$ e $E \cap E^3 = \emptyset$ e G é $(2, 1)$.*

Prova. Suponha que exista uma atribuição verdade que satisfaz (X, C) . Queremos definir uma partição de V nos conjuntos S_1 , S_2 e K que defina uma solução G para a instância particular (V, E^1, E^3) do PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE $(2, 1)$ associado com a instância de 3SAT (X, C) .

Posicione os vértices $k_1, k_2 \in K$ e $s_{11}, s_{21} \in S_1$ e $s_{12}, s_{22} \in S_2$. Para $i \in \{1, \dots, n\}$ se x_i é falso então posicione x_i em K , \bar{x}_i em S_1 e p_i em S_2 . Caso contrário, se x_i é verdadeiro, então posicione x_i em S_2 , \bar{x}_i em K e p_i em S_1 .

Para $j \in \{1, \dots, m\}$ e $c_j = (l_1^j \vee l_2^j \vee l_3^j)$, posicione os vértices correspondentes t_1^j, t_2^j, t_3^j como segue. Para $k \in \{1, 2, 3\}$, se o literal l_k^j é falso então posicione t_k^j em $S_1 \cup S_2$. Caso contrário, posicione t_k^j em K . Como a atribuição verdade satisfaz (X, C) , para cada j , temos no máximo dois vértices t_k^j em $S_1 \cup S_2$. além disso, se dois vértices t_k^j e t_p^j estão posicionados em $S_1 \cup S_2$, coloque um dos vértices em S_1 e o outro em S_2 .

Para mostrar que o grafo $G = (V, E)$ é um grafo sanduíche $(2, 1)$ precisamos provar que não existe E^1 -aresta contendo ambos extremos em S_1 , não existe E^1 -aresta com ambos extremos S_2 e não existe E^3 -aresta com ambos extremos em K .

Pelo posicionamento acima, s_{11}, s_{21} estão em S_1 , e \bar{x}_i, t_k^j e p_i podem estar em S_1 , $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \in \{1, \dots, m\}$, $k \in \{1, 2, 3\}$. As únicas arestas obrigatórias possíveis entre estes vértices são: a aresta $\bar{x}_i p_i$ a qual não possui ambos extremos em S_1 ,

porque $\bar{x}_i \in S_1$ se a variável x_i é falsa e $p_i \in S_1$ se x_i é verdadeiro; e a aresta $t_k^j t_q^j$ a qual não tem ambos extremos em S_1 , onde $k \neq q$, e onde $k, q \in \{1, 2, 3\}$. Conseqüentemente, não existe nenhuma E^1 -aresta com ambos extremos em S_1 .

Da mesma forma, s_{12}, s_{22} estão em S_2 , e os vértices x_i, t_k^j, p_i podem estar em S_2 , $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}, k \in \{1, 2, 3\}$. As únicas arestas obrigatórias possíveis entre estes vértices são: a aresta $x_i p_i$ que não possui ambos extremos em S_2 , porque $x_i \in S_2$ se a variável x_i é verdadeira e $p_i \in S_1$ se x_i é falsa; e a aresta $t_k^j t_q^j$ a qual não possui ambos extremos em S_1 , $k \neq q$, onde $k, q \in \{1, 2, 3\}$. Conseqüentemente, não existe E^1 -aresta com com ambos extremos em S_2 .

Para o conjunto K temos que k_1, k_2 estão em K , e os vértices x_i, \bar{x}_i, t_k^j podem estar em K , $i \in \{1, \dots, n\}, j \in \{1, \dots, m\}, k \in \{1, 2, 3\}$. As únicas arestas proibidas possíveis entre estes vértices são: a aresta $\bar{x}_i x_i$ a qual não possui ambos extremos em K , porque $\bar{x}_i \in K$ se e somente se a variável x_i é verdadeira e $x_i \in K$ se e somente se x_i é falsa; e as arestas $x_i t_k^j, \bar{x}_i t_k^j$, as quais nunca possuem ambos extremos em K , de acordo com o posicionamento acima. Conseqüentemente, não existe aresta E^3 -aresta com ambos extremos em K . E isto conclui a prova do Lema 2. ■

4.3 Problema Grafo Sanduíche (2, 2)

Nesta seção provamos que o PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE (2, 2) é *NP*-completo pela redução do problema *NP*-completo 3SAT ao PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE (2, 2).

PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE (2, 2)

Instância: Conjunto de vértices V , conjunto E^1 -arestas obrigatórias, conjunto E^3 -arestas proibidas .

Questão: Existe um grafo $G = (V, E)$, tal que $E^1 \subseteq E$ e $E \cap E^3 = \emptyset$, e G é (2, 2)?

Teorema 2 O PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE (2, 2) é *NP*-completo.

Prova. De forma a reduzir 3SAT ao PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE (2, 2) vamos construir uma instância particular (V, E^1, E^3) do PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE (2, 2) a partir de uma instância (X, C) de 3SAT, tal que C é satisfatível se e somente se (V, E^1, E^3) admite um grafo sanduíche $G = (V, E)$ o qual é (2, 2). Primeiro, descrevemos a construção de uma instância particular (V, E^1, E^3) do PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE (2, 2); em seguida provamos que todo grafo $G = (V, E)$ que satisfaz $E^1 \subseteq E$ e $E \cap E^3 = \emptyset$ e tal que G é (2, 2), define uma atribuição verdade para (X, C) ; Por fim, provamos que toda atribuição verdade para (X, C) define um grafo $G = (V, E)$ o qual é (2, 2) satisfazendo $E^1 \subseteq E$ e $E \cap E^3 = \emptyset$. A instância particular é explicada em detalhes abaixo. A equivalência requerida pode ser estabelecida seguindo os passos do Teorema 1 e os detalhes são omitidos. ■

Construção de uma instância particular do PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE (2, 2).

O conjunto de vértices V contém: dois conjuntos de vértices auxiliares: $B_1 = \{k_1, k_2, s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}\}$; $B_2 = \{k_3, k_4, s_{31}, s_{32}, s_{41}, s_{42}\}$; para cada variável x_i , $1 \leq i \leq n$, dois vértices x_i, \bar{x}_i , correspondentes aos seus literais e um vértice p_i ; para cada cláusula $c_j = (l_1^j \vee l_2^j \vee l_3^j)$, $1 \leq j \leq m$, três vértices correspondentes t_1^j, t_2^j, t_3^j . Veja Figura 4.4, onde arestas sólidas denotam E^1 -arestas obrigatórias e arestas não representadas denotam E^3 -arestas proibidas.

O conjunto de arestas obrigatórias E^1 contém: arestas entre vértices auxiliares $\{k_1k_2, k_3k_4, k_1s_{11}, k_1s_{12}, k_2s_{21}, k_2s_{22}, k_3s_{31}, k_3s_{32}, k_4s_{41}, k_4s_{42}, s_{11}s_{12}, s_{21}s_{22}, s_{31}s_{32}, s_{41}s_{42}\}$; para cada variável x_i , $1 \leq i \leq n$, o conjunto $\{x_i s_{11}, \bar{x}_i s_{12}, x_i p_i, \bar{x}_i p_i\}$; para cada cláusula c_j , $1 \leq j \leq m$, o conjunto $\{t_1^j t_2^j, t_1^j t_3^j, t_2^j t_3^j\}$.

O conjunto de arestas proibidas E^3 contém: arestas entre vértices auxiliares: $\{k_1s_{21}, k_1s_{22}, k_2s_{11}, k_2s_{12}, s_{11}s_{21}, s_{11}s_{22}, s_{12}s_{21}, s_{12}s_{22}\} \cup \{k_3s_{41}, k_3s_{42}, k_4s_{31}, k_4s_{32}, s_{31}s_{41}, s_{31}s_{42}, s_{32}s_{41}, s_{32}s_{42}\} \cup \{uv : u \in B_1 \text{ e } v \in B_2\} \cup \{uv : u \in B_2 \text{ e } v \in V \setminus B_1\}$;

para cada variável $x_i, 1 \leq i \leq n$, o conjunto $\{x_i \bar{x}_i, p_i k_2\}$; para cada cláusula $c_j, 1 \leq j \leq m$, $\{t_1^j l_1^j, t_2^j l_2^j, t_3^j l_3^j\}$.

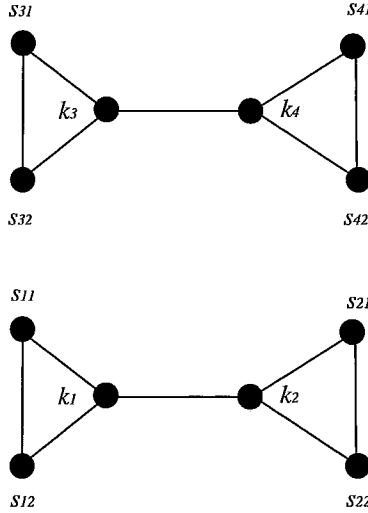


Figura 4.4: (2, 2) Grafo base - todas as arestas não-representadas são E^3 -arestas.

Chamamos (2, 2) *Grafo Base* o subgrafo de $G^2 = (V, E^2)$ induzido por $\{k_1, k_2, s_{11}, s_{12}, s_{21}, s_{22}, k_3, k_4, s_{31}, s_{32}, s_{41}, s_{42}\}$ (veja Figura 4.4). Da mesma forma que o problema anterior, temos dois tipos de estruturas: *Estrutura Variável* (Figura 4.3(VG)) e *Estrutura Cláusula* (Figura 4.3(CG)). Note que a instância especial satisfaz uma propriedade similar ao Teorema 1: no caso da instância particular (V, E^1, E^3) admitir um grafo sanduíche (2, 2), $G = (V, E)$, temos que qualquer (2, 2) partição (K_1, K_2, S_1, S_2) para G satisfaz $K_1, K_2, S_1, S_2 \neq \emptyset$: sem perda de generalidade assumimos que $k_1, k_2 \in K_1, k_3, k_4 \in K_2, s_{11}, s_{21}, s_{31}, s_{41} \in S_1, s_{12}, s_{22}, s_{32}, s_{42} \in S_2$, o que implica $K_2 = \{k_3, k_4\}$.

4.4 Problema Grafo Sanduíche (k, l) Δ -Limitado

Nesta Seção, consideramos a complexidade do Problema Grafo Sanduíche (k, l) quando restrito a entradas com grau máximo limitado em G^2 .

Problema Grafo Sanduíche (k, l) Δ -Limitado (PGS (k, l) Δ -Limitado)

Instância: Conjunto de vértices V , conjunto de arestas obrigatórias E^1 , conjunto arestas proibidas E^3 , onde G^2 é um grafo com grau máximo Δ .

Questão: Existe um grafo $G = (V, E)$ tal que $E^1 \subseteq E$ e $E \cap E^3 = \emptyset$ o qual é um grafo (k, l) ?

Classificamos completamente o PGS (k, l) Δ -Limitado como segue: PGS (k, l) Δ -Limitado é polinomial para $k \leq 2$ ou $\Delta \leq 3$, e NP -completo caso contrário.

Lema 3 *Se PGS (k, l) Δ -Limitado é solucionado em tempo polinomial então o PGS $(k, l + 1)$ Δ -Limitado é solucionado em tempo polinomial.*

Prova. Seja (V, E^1, E^3) instância para PGS $(k, l + 1)$ Δ -Limitado. Suponha que exista um algoritmo em tempo polinomial \mathcal{A} para resolver o PGS (k, l) Δ -Limitado. Observamos que se existir um grafo sanduíche para (V, E^1, E^3) o qual é $(k, l + 1)$ então uma clique em G é também uma clique em G^2 . Assim, de forma a definir um algoritmo em tempo polinomial para PGS $(k, l + 1)$ Δ -Limitado procedemos como segue: para cada subconjunto S com número de vértices menor ou igual a $\Delta + 1$ verificamos se S induz uma clique em G^2 . No caso afirmativo, aplicamos o algoritmo \mathcal{A} para testar se existe um grafo sanduíche para a instância $(V \setminus S, E^1, E^3)$ de PGS (k, l) Δ -Limitado. Assim, construímos um algoritmo para PGS $(k, l + 1)$ Δ -Limitado que é executado em tempo $\mathcal{O}(n^{\Delta+1}P)$, onde P é a ordem do algoritmo \mathcal{A} . ■

Lema 4 *Se $k \leq 2$, então PGS (k, l) Δ -limitado é solucionado em tempo polinomial.*

Prova. Argumentamos por indução em l . Conforme observado na Seção 4.1 os Problemas Grafo Sanduíche $(1, 0)$ e $(2, 0)$ são resolvidos em tempo polinomial, assim também são os problemas correspondentes PGS Δ -Limitado. Suponha que para $k \leq 2$ e $l \geq 0$ o PGS (k, l) Δ -Limitado é solucionado em tempo polinomial. Pelo Lema 3 temos que o correspondente PGS $(k, l + 1)$ Δ -Limitado é problema resolvido em tempo polinomial. ■

Considere agora $k \geq 3$. Note que, como uma consequência do Teorema de Brooks [10], o problema de reconhecimento de grafo $(k, 0)$ é polinomial quando restrito a entradas com $\Delta \leq 3$. Isto implica, pelo Fato 2, que PGS $(k, 0)$ 3-Limitado é solucionado em tempo polinomial, e pelo Lema 3, PGS (k, l) 3-Limitado é também polinomial. Entretanto, por [23], o reconhecimento de grafos $(k, 0)$ é *NP*-completo, mesmo quando restrito a entradas com $\Delta \leq 4$, o que pelo Fato 1, implica que PGS $(k, 0)$ Δ -Limitado seja *NP*-completo, e como observado por [8], PGS (k, l) Δ -Limitado é *NP*-completo, para $\Delta \geq 4$.

4.5 Exemplo

Seja $I = (X, C)$ tal que $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ e $C = \{(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\}$ uma instância de 3SAT.

A Figura 4.5 mostra a instância particular (V, E^1, E^3) do PROBLEMA GRAFO SANDUÍCHE $(2, 1)$ construída a partir da instância $I = (X, C)$ de 3SAT.

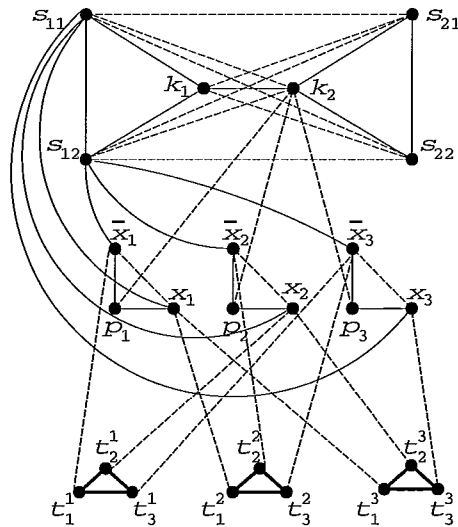


Figura 4.5: Instância particular do Problema Grafo Sanduíche $(2, 1)$.

A Figura 4.6 mostra a respectiva partição $(2, 1)$ para o grafo G definida a partir da associação verdade $\bar{x}_1 = x_2 = \bar{x}_3 = T$.

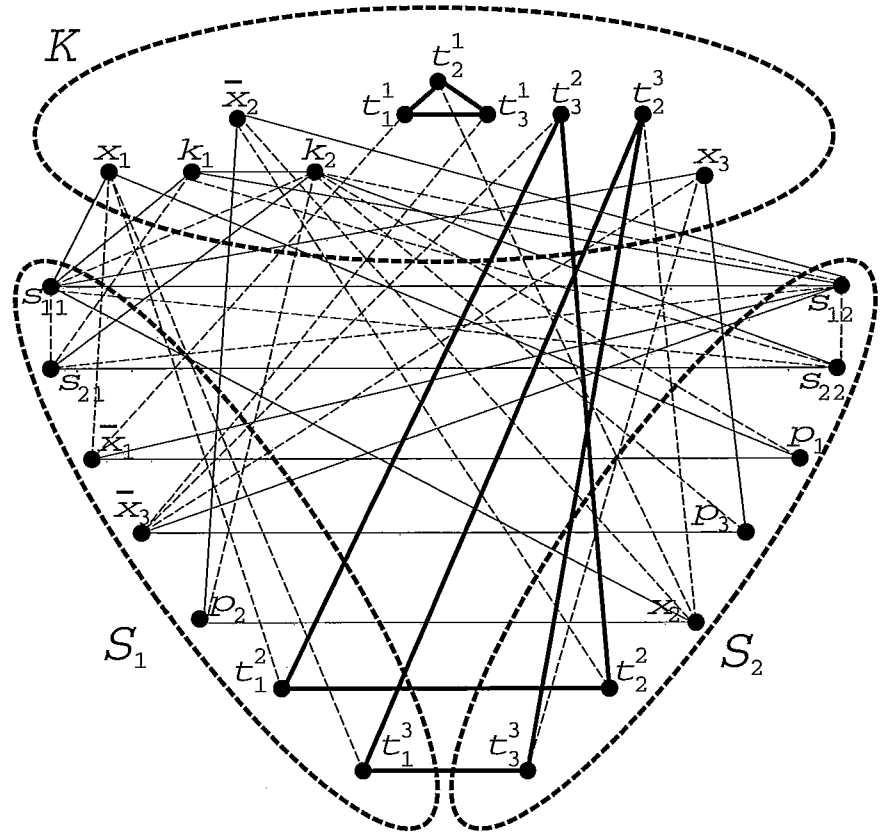


Figura 4.6: Partição $(2, 1)$ do Exemplo.

Capítulo 5

Problema de H -partição

5.1 Introdução

Considere um grafo simples, não-direcionado, e finito, $G = (V(G), E(G))$ e o problema de achar uma partição de $V(G)$ em subconjuntos que satisfazem a certas restrições *internas* ou *externas*.

Uma restrição interna é uma restrição interior às partes tal como ser uma clique, um conjunto independente, esparso, denso, etc. Uma restrição externa é aquela que refere-se às restrições entre partes diferentes, por exemplo, algumas partes têm que ser completamente adjacentes ou não adjacentes a outras partes.

O Problema de Partição Assimétrica foi definido por Chvátal [12] como achar uma partição do conjunto de vértices de um dado grafo em quatro partes não-vazias A, B, C, D tais que existem todas as arestas possíveis entre A e B , e nenhuma aresta entre C e D . Assim, o Problema de Partição Assimétrica tem somente restrições externas. De Figueiredo, Klein, Kohayakawa e Reed [17] apresentaram um algoritmo de tempo polinomial para resolver o Problema de Partição Assimétrica.

Uma H -partição é uma partição do conjunto de vértices $V(G)$ de um grafo G em quatro partes não-vazias A, B, C, D tais que as adjacências entre vértices posicionados em partes distintas satisfazem às restrições dadas pelas arestas de um grafo *mo-*

de modo $H = (V(H), E(H))$ tal que $V(H) = \{a, b, c, d\}$ e $E(H) \subseteq \{ab, ac, ad, bc, bd, cd\}$. Cada vértice de H representa uma parte da H -partição, e cada aresta de H representa uma restrição de adjacência externa.

As arestas de $E(H)$ podem ser de três tipos: aresta sólida, aresta pontilhada ou não-aresta. A aresta *sólida* $ab \in E(H)$ representa a restrição de que todo vértice da parte A é adjacente a todo vértice da parte B . A aresta *pontilhada* $ab \in E(H)$ representa a restrição de que todo vértice da parte A é não adjacente a todo vértice da parte B . A *não-aresta* $ab \notin E(H)$ representa que não existem restrições de adjacência entre os vértices da parte A e os vértices da parte B . Utilizando esta notação, a partição Assimétrica é a particular H -partição correspondente ao grafo modelo H da Figura 5.1.

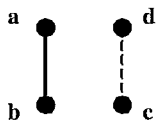


Figura 5.1: Partição Assimétrica - Grafo Modelo H .

O *complemento* \overline{H} de um grafo modelo H é o grafo obtido do grafo H pela troca de cada aresta sólida por uma aresta pontilhada e cada aresta pontilhada por uma aresta sólida (não-arestas permanecem inalteradas). Note que G admite uma H -partição se e somente se seu complemento \overline{G} admite uma \overline{H} -partição.

O Problema de H -Partição pergunta, dado um grafo G , se G admite uma H -partição, e é um caso particular do *Problema de M -Partição* introduzido por Feder, Hell, Klein e Motwani [21]. Uma M -Partição é uma partição de um grafo em k partes A_1, A_2, \dots, A_k onde as restrições são codificadas por uma matriz M simétrica k -por- k na qual os elementos da diagonal $M_{i,i}$ são: 0 se A_i tem que ser independente, 2 se A_i

tem que ser uma clique e 1 caso contrário (i.e., no caso em que não há restrições). Similarmente, os elementos que não estão na diagonal $M_{i,j}$ são 0, 1 ou 2, se A_i e A_j têm que ser completamente não-adjacentes, têm adjacências arbitrárias, ou têm que ser completamente adjacentes, respectivamente. Desta forma, a H -partição é o caso particular quando a matriz M é a matriz 4-por-4 com somente 1's na sua diagonal principal, i.e., não são impostas restrições internas, e com a hipótese adicional de que as partes da partição têm que ser não-vazias.

Na seqüência, desenvolvemos ferramentas que possibilitam uma análise de todos os problemas de partição do conjunto de vértices de um grafo G em quatro partes não-vazias com somente restrições externas. Estas técnicas estão relacionadas àquelas aplicadas por De Figueiredo, Klein, Kohayakawa e Reed [17] para solucionar Problema de Partição Assimétrica.

5.2 Refinando um Problema de H -Partição

O Problema de H -Partição é definido como segue:

Problema de H -Partição

Instância: um grafo $G = (V(G), E(G))$.

Questão: Existe uma H -partição A, B, C, D de $V(G)$?

Uma maneira conveniente de expressar as restrições determinadas pelo grafo modelo H e a restrição de que todas as partes têm que ser não-vazias é especificar para cada vértice de G , o conjunto de partes da H -partição na qual ele é permitido estar posicionado.

Dado um grafo G e, para cada vértice $v \in V(G)$, uma lista $L(v) \subseteq \{A, B, C, D\}$, uma H -partição por Listas de G com respeito às listas $\{L(v) : v \in V(G)\}$ é uma H -partição A, B, C, D de G na qual cada $v \in V(G)$ pertence a uma parte $P \in L(v)$. Em outras palavras, o Problema Geral de H -Partição por Listas pergunta por uma

H -partição do grafo de entrada G no qual cada vértice é posicionado em uma parte que pertence a sua lista.

Problema Geral de H -Partição por Listas

Instância: um grafo $G = (V(G), E(G))$ e, para cada vértice $v \in V$, um subconjunto $L(v)$ de $\{A, B, C, D\}$.

Questão: Existe uma H -partição A, B, C, D de $V(G)$ tal que cada v está contido em alguma parte de sua correspondente $L(v)$?

De forma a assegurar a restrição de que as partes A, B, C e D têm que ser não-vazias, dado o grafo modelo H , consideramos para cada conjunto de quatro vértices x_A, x_B, x_C, x_D de $V(G)$ para os quais a bijeção $x_A \mapsto a, x_B \mapsto b, x_C \mapsto c, x_D \mapsto d$ satisfaz: cada aresta sólida de H corresponde a uma aresta de G e cada aresta pontilhada de H corresponde a uma não-aresta de G , o seguinte problema de decisão:

Problema de H -Partição por Listas

Instância: um grafo $G = (V(G), E(G))$, quatro vértices x_A, x_B, x_C, x_D de $V(G)$, e para cada $v \in V(G)$ um subconjunto $L(v) \subseteq \{A, B, C, D\}$ como segue: $L(x_A) = \{A\}$, $L(x_B) = \{B\}$, $L(x_C) = \{C\}$, $L(x_D) = \{D\}$ e $L(x) = \{A, B, C, D\}$, para todo vértice restante $x \in V(G) \setminus \{x_A, x_B, x_C, x_D\}$.

Questão: Existe uma H -partição A, B, C, D de $V(G)$ tal que cada v está contido em alguma parte de $L(v)$?

Seja L um subconjunto de $\{A, B, C, D\}$. Denotamos também por L o seguinte subconjunto de $V(G)$: $L = \{v \in V(G) : L(v) = L\}$. Chamamos todas as listas de tamanho um por *listas triviais* e denotamos $\{A\}$ por A . Um vértice v tal que $L(v) = A$ é dito *posicionado* na parte A ou $v \in A$. Usamos uma notação análoga para listas de tamanho maior, por exemplo um vértice v tal que $L(v) = AB$ é dito *estar* em $A \cup B$ ou $v \in AB$.

Note que a instância de um Problema de H -Partição por Listas particiona $V(G)$ em 5 conjuntos, ou seja, $A = \{x_A\}$, $B = \{x_B\}$, $C = \{x_C\}$, $D = \{x_D\}$, $ABCD = V(G) \setminus \{x_A, x_B, x_C, x_D\}$. Vértices x_A , x_B , x_C e x_D de G estão posicionados e os vértices restantes de $V(G)$ terão suas listas reduzidas durante o algoritmo de tal forma que uma solução corresponde a quatro conjuntos de vértices que têm listas unitárias. Note que se durante o algoritmo $v \in AB$, então v não será posicionado em C ou D . Observamos a seguir algumas propriedades de cada problema determinado pela estrutura de seu grafo modelo H .

Listas Conflitantes

Uma lista *conflitante*, com respeito a um grafo modelo H , é uma lista que impõe duas restrições conflitantes em relação a um mesmo vértice, i.e., tendo esta lista, um vértice de G deveria ser simultaneamente adjacente e não adjacente a todos os vértices já posicionados em uma mesma parte. Chamamos listas *não-conflitantes* às listas que não são conflitantes.

Por exemplo, considere o grafo modelo H representado na Figura 5.2. Para este H , temos que ab é uma aresta sólida e que bc é uma aresta pontilhada. Mostramos a seguir que AC é uma lista conflitante para este modelo H . Assuma que durante o algoritmo um vértice v está em AC .

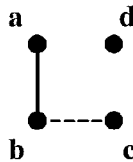


Figura 5.2: AC : Lista Conflitante para o Problema H -Partição por Listas.

Assim, uma vez que $A \in L(v)$, v deveria ser adjacente a todo vértice posicionado em B , e uma vez que $C \in L(v)$, v deveria ser não adjacente a todo vértice posicionado em B . Neste caso, v deveria ser adjacente e não adjacente a cada vértice já posicionado em B , uma contradição. Logo, concluímos que AC é uma lista conflitante.

Dado um Problema de H -Partição por Listas, como um primeiro passo, nosso algoritmo calcula o seu conjunto correspondente de listas não-conflitantes considerando para cada $p \in V(H)$ se existe em H uma aresta sólida e uma aresta pontilhada incidentes to p . A existência de uma aresta sólida rp e de uma aresta pontilhada sp ambas incidentes a p resulta nas listas conflitantes L tais que $R, S \in L$.

Listas impossíveis

Por outro lado, o conjunto de listas não-conflitantes pode ser ainda mais reduzido verificando-se quais listas são *impossíveis* de ocorrer durante o algoritmo.

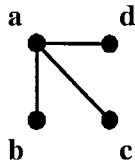


Figura 5.3: AP: Listas impossíveis para Problema de H -Partição por Listas.

Seja $N_F(L)$ o conjunto de vértices de H adjacentes aos vértices correspondentes aos membros de L por meio de arestas sólidas. Definimos $N_D(L)$ de uma forma análoga considerando seu conjunto de vizinhos em H por arestas pontilhadas. Dado um Problema de H -Partição por Listas, como segundo passo, nosso algoritmo calcula o conjunto correspondente de listas possíveis considerando para todas as listas não-conflitantes e não-triviais L , os conjuntos $N_F(L)$ e $N_D(L)$. Se $L_i \subset L_j$ e $L_i \neq L_j$, para $i \neq j$, e $N_F(L_i) = N_F(L_j)$ e $N_D(L_i) = N_D(L_j)$, então L_i é uma lista impossível.

Seja H o grafo modelo com arestas sólidas ab , ac , ad e não-arestas bc , bd e cd (veja Figura 5.3). Suponha que $L(v)$ é uma lista não-trivial e considere $P, Q \in \{B, C, D\}$ tais que $P \in L(v)$ e $Q \notin L(v)$. Como $Q \notin L(v)$, temos que v não é adjacente a w posicionado em A e isto contradiz $P \in L(v)$.

Calculando $N_F(L)$ e $N_D(L)$ para este exemplo, temos: $N_F(L) = \{a, b, c, d\}$ e $N_D(L) = \emptyset$ para toda lista $L \in \{AB, AC, AD, ABC, ABD, ACD\}$. Para a lista $ABCD$, temos $N_F(L) = \{a, b, c, d\}$ e $N_D(L) = \emptyset$. Como $L \subset ABCD$ e $L \neq ABCD$ temos que todas as listas L tais que $L \in \{AB, AC, AD, ABC, ABD, ACD\}$ são listas impossíveis.

Da mesma forma, $N_F(L) = \{a\}$ e $N_D(L) = \emptyset$ para toda lista $L \in \{BC, BD, CD\}$. Para a lista BCD , temos $N_F(L) = \{a\}$ e $N_D(L) = \emptyset$. Como $L \subset BCD$ e $L \neq BCD$, todas as listas L tais que $L \in \{BC, BD, CD\}$ são listas impossíveis. Assim as únicas listas não-triviais possíveis são $ABCD$ e BCD .

Então, antes de começar a resolver o problema, eliminamos todas as listas conflitantes e impossíveis. Chamamos este procedimento de *Operação de refinamento* e chamamos de *Listas refinadas* o conjunto de listas restantes após a operação de refinamento.

5.3 Posicionamento Vértices

Na instância do Problema de H -Partição por Listas temos quatro vértices iniciais x_A , x_B , x_C e x_D de $V(G)$ os quais possuem listas A , B , C e D , respectivamente, e todos os outros vértices $x \in V(G)$ têm lista $ABCD$. O algoritmo procede tentando posicionar os vértices $v \in V(G) \setminus \{x_A, x_B, x_C, x_D\}$ em uma das listas refinadas.

Assim, inicializamos o posicionamento de todos os vértices de $V(G)$ como segue:

$A = x_A, B = x_B, C = x_C, D = x_D, ABCD = V(G) \setminus \{x_A, x_B, x_C, x_D\}$ e todas as outras listas refinadas determinadas pela estrutura de H são inicializadas vazias. Para cada vértice v de $V(G)$, v pode ser posicionado (em uma das listas triviais) ou v pode estar em uma das listas refinadas não-triviais. Isto é feito mantendo como invariante a propriedade abaixo:

Propriedade 5.1 *Se ab é uma aresta sólida de H e $A \in L(v)$, então v vê todo vértice posicionado em B .*

Da mesma forma, se ab é a aresta pontilhada de H e $A \in L(v)$ então v não é adjacente a todo vértice posicionado em B . Se $B \in L(v)$ então v não é adjacente a todo vértice posicionado em A .

Uma vez posicionado o vértice v , é necessário atualizar todas as listas refinadas não-triviais, como segue, de forma a manter a Propriedade 5.1 como invariante. Seja ab uma aresta sólida e $v \in L$ com $A \in L$. Se v não vê um vértice em B , v não pode estar em um conjunto L que contenha A . Então, movemos v para $L \setminus A$. Similarmente, se ab é uma aresta pontilhada e $v \in L$ com $A \in L$. Se v é adjacente a um vértice em B , movemos v para $L \setminus A$.

Se um vértice de G não pode ser posicionado em nenhuma lista refinada então o algoritmo pára com a resposta NÃO, e a instância em questão não tem uma correspondente H -partição por listas.

5.4 Ferramentas de Solução

Seja H um dos grafos modelo representados na Figura 5.8 e sejam todos os vértices de G após o posicionamento de acordo com a Propriedade 5.1 em uma das listas refinadas. Mostramos a seguir que estes Problemas de H -Partição por Listas têm sempre uma solução pela aplicação de umas das seguintes ferramentas de solução:

Operação Vértice Isolado

Um vértice *isolado* em um grafo modelo H , é um vértice que não é extremo de alguma aresta sólida ou de alguma aresta pontilhada de H . No caso em que H tem um vértice isolado p posicionamos todo $x \in V(G) \setminus \{x_A, x_B, x_C, x_D\}$ na parte correspondente a P .

Lista Transversal

Uma *Lista Transversal* é uma lista L_T que intercepta todas as listas de tamanho ao menos 2, e tal que L_T é trivial ou não-trivial que não tem restrições entre as partes contidas em L_T .

A existência de uma Lista Transversal L_T resulta em uma solução porque cada vértice v pode ser posicionado em uma parte $P \in L(v) \cap L_T$, para todo $|L(v)| \geq 2$, $P \in \{A, B, C, D\}$.

Por exemplo, seja H o grafo modelo representado na Figura 5.4. Observamos que após o refinamento do conjunto de listas de acordo com o grafo modelo H , as listas refinadas são $A, B, C, D, AB, AD, BC, CD$. A Lista AC satisfaz a definição de uma Lista Transversal. Conseqüentemente, uma solução para este Problema de H -Partição por Listas é apresentado na Figura 5.4: $A = \cup_{A \in L} L$, $B = \{x_B\}$, $C = \cup_{C \in L \setminus \{A\}} L$ e $D = \{x_D\}$.

Usando o mesmo argumento, temos que BD é outra Lista Transversal para este grafo modelo H .

Operação de Redução

Outra ferramenta é a *Operação de Redução* a qual reduz um dado Problema de H -Partição por Listas a um Problema de H' -Partição por Listas tal que H' tem menos vértices que H .

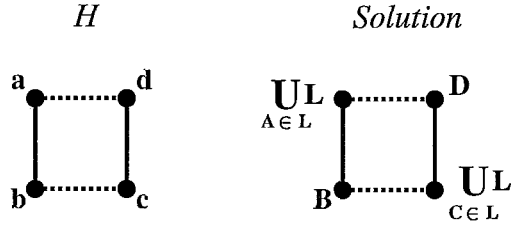


Figura 5.4: AC é uma Lista Transversal para o Problema de H -Partição por Listas.

Dois vértices r e s de H são *gêmeos* se não existe nenhuma aresta sólida rs e nenhuma aresta pontilhada rs em H , e tais que $N_F(r) = N_F(s)$ e $N_D(r) = N_D(s)$ em H . A Operação de Redução define um grafo modelo H' menor que H como segue: dado um par de gêmeos r e s em H , o conjunto de vértices $V(H') = V(H) \setminus \{r, s\} \cup \{s'\}$; o conjunto de arestas $E(H') = E(H) \setminus \{\text{todas as arestas incidentes a } r \text{ ou } s\} \cup \{s't : t \text{ é adjacente a } s\}$.

Por exemplo, quando H é o grafo modelo de Figura 5.5, podemos agrupar os vértices c e d em um vértice $c' = c \cup d$ e reduzir o problema a um grafo modelo H' com exatamente três vértices a' , b' , c' .

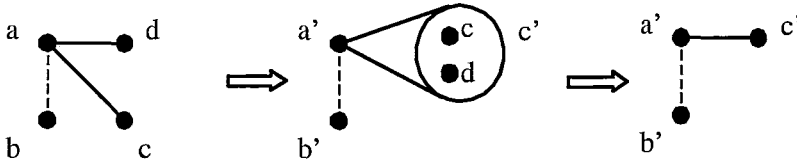


Figura 5.5: Operação de Redução .

A solução agora é obtida pelo seguinte Lema:

Lema 5 *Seja H um grafo modelo. O problema de determinar se um grafo G tem uma H -partição onde $|V(H)| < 4$ pode ser resolvido em tempo polinomial.*

Prova. Se $|V(H)| = 1$, não há nada a fazer. Quando $|V(H)| = 2$, o problema é solucionado pelo algoritmo 2-SAT de Aspvall, Plass e Tarjan [2] porque todas as listas tem tamanho no máximo 2. Para maiores detalhes desta solução, nós indicamos o artigo [20].

Se $|V(H)| = 3$, então temos os casos (e os respectivos casos complementares) apresentados na Figura 5.6. Nos grafos modelo (2) e (3), aplicamos a operação vértice isolado. No grafo modelo (1), aplicamos a Operação de Redução contraindo o par de gêmeos a e c .

Os casos restantes têm uma solução porque, após a aplicação da operação de refinamento, podemos sempre achar uma Lista Transversal. As listas refinadas destes três grafos são respectivamente $\{A, B, C, ABC\}$ para o grafo (4), $\{A, B, C, AB, BC\}$ para o grafo (5) e $\{A, B, C, AC\}$ para o grafo (6). As Listas Transversais correspondentes são A ou B ou C ; B ; A ou C , respectivamente. ■

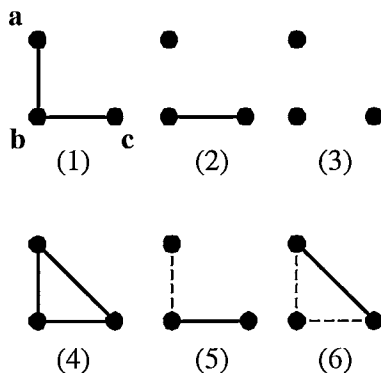


Figura 5.6: Os grafos modelo com três vértices.

5.5 Teorema Principal

Um argumento simples de contagem enumera os casos possíveis para o grafo modelo H :

Lema 6 *Todos os possíveis grafos modelo H para o Problema de H -Partição por Listas, a menos de isomorfismos, são apresentados nas Figuras 5.7 e 5.8.*

Prova. As arestas de um grafo modelo podem ser sólidas, pontilhadas e não-arestas. Temos 3^6 combinações possíveis destes três tipos de arestas. De acordo com o número de arestas de cada tipo, temos os 28 casos descritos na Tabela 5.1. ■

Teorema 3 *O Problema de H -Partição por Listas é resolvido em tempo polinomial quando H é um dos grafos da Figura 5.8.*

Prova. O subcasos (2), (3), (4), (22), (29), (34) são resolvidos através da operação vértice isolado. A tabela 5.1 apresenta os subcasos para os quais a solução é obtida pela Operação de Redução. Para o subcaso (12), o conjunto de listas refinadas contém somente as listas A , B , C e D . Isto significa que temos uma decisão após o posicionamento dos vértices.

Subcasos	Grafo Modelo H'
(5)	$a' = b, b' = a \cup c \cup d$
(7)	$a' = a \cup c, b' = b \cup d$
(9)	$a' = a \cup c, b' = b, c' = d$
(18)	$a' = a, b' = b \cup d, c' = c$
(25)	$a' = a, b' = b \cup d, c' = c$
(32)	$a' = a, b' = b, c' = c \cup d$

Tabela 5.1: Novo grafo modelo após a Operação de Redução.

Para os casos restantes, aplicamos a operação de refinamento. No caso em que não há uma Lista Transversal para as listas refinadas, observamos que todas as listas refinadas tem tamanho no máximo 2 e o problema é resolvido pelo algoritmo 2-SAT de Aspvall, Plass e Tarjan [2]. Estes casos são mostrados pela Tabela 5.2.

Caso contrário, apresentamos na Tabela 5.3 as listas refinadas e a Lista Transversal para os subcasos finais.

Subcases	Listas refinadas
(10)	A, B, C, D, AD, BC
(11)	A, B, C, D, AC, BD
(16)	A, B, C, D, AC, BD

Tabela 5.2: Subcasos resolvidos pelo algoritmo 2-SAT.

Subcasos	Listas refinadas	Lista Transversal
(1)	A, B, C, D, AC, AD, BD, ABD, ACD, ABCD	AD
(6)	A, B, C, D, ABCD	A ou B ou C ou D
(8)	A, B, C, D, AC, BC, ABC, ABCD	C
(13)	A, B, C, ABC	A ou B ou C
(14)	A, B, C, D, CD	C ou D
(15)	A, B, C, D, AB, BC, CD	AC
(17)	A, B, C, D, AC, BC, BD	AB
(19)	A, B, C, D, AC, AD, BC, CD	AB ou CD
(20)	A, B, C, D, AB, AD, BC, CD	AC ou BD
(21)	A, B, C, D, AD, BC, ACD	AB ou BD
(23)	A, B, C, D, AC	A ou C
(24)	A, B, C, D, BD, BCD	B ou D ou BD
(26)	A, B, C, D, AB, AC, AD, ABC, ACD	A ou AC
(27)	A, B, C, D, AB, CD	AC ou AD
(28)	A, B, C, D, ACD	A ou C ou D
(30)	A, B, C, D, AB, CD	AD
(31)	A, B, C, D, AB, AD, BC, CD	AC ou BD
(33)	A, B, C, D, AB, AC, AD, CD, ACD	AC ou AD

Tabela 5.3: Listas refinadas e Lista Transversal.

Assim, todo Problema de H -Partição correspondente aos grafos modelo H representados na Figura 5.8 podem ser resolvidos em tempo polinomial. ■

Pelo Lema 6, os casos restantes são expressados pelos grafos listados na Figura 5.7 e os seus complementos. O grafo modelo à esquerda é o grafo H para a Partição Assimétrica e foi resolvido em tempo polinomial por De Figueiredo, Klein, Kohayakawa e Reed [17].

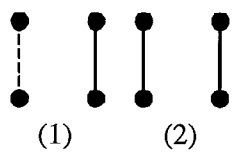


Figura 5.7: Casos restantes do Teorema 3.

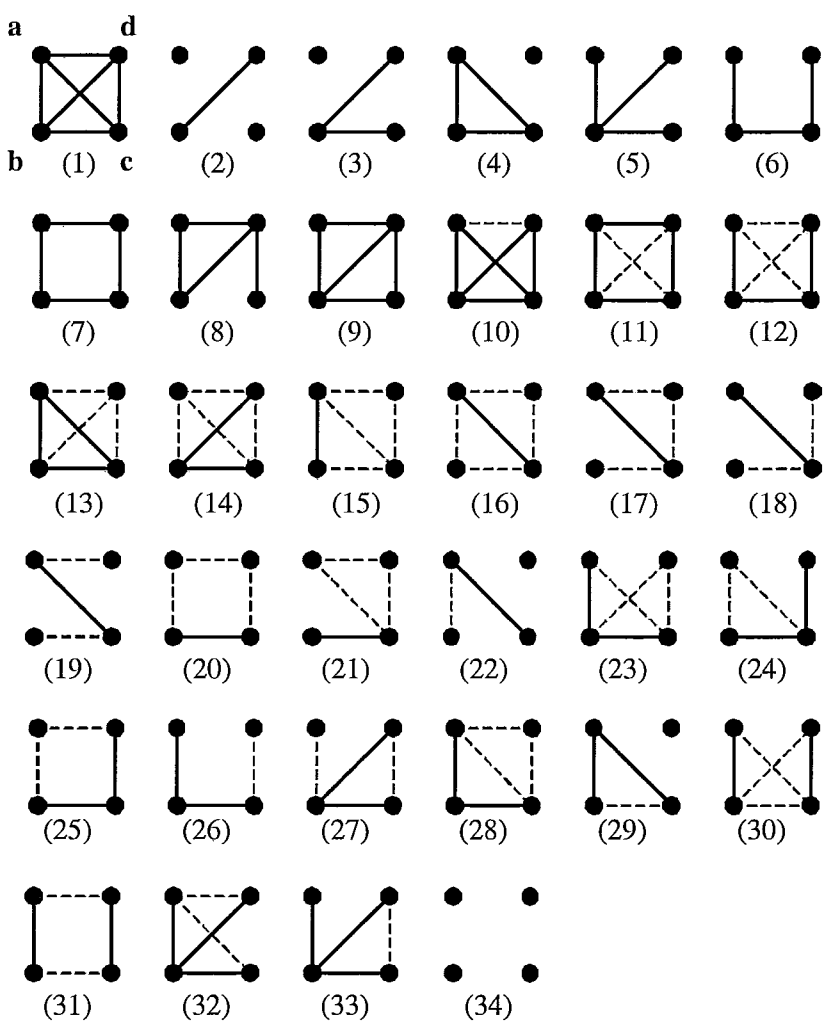


Figura 5.8: Lista de grafos modelo para Teorema 3.

Capítulo 6

Conclusão

Na primeira parte da tese descrevemos os grafos G que satisfazem $Ch(G) + Ch(\bar{G}) = |V(G)| + 1$ e mostramos que eles não podem ser caracterizados por subgrafos proibidos.

Neste processo precisamos introduzir a função $f(G)$. Mostramos que $f(G) = 1$ se e somente se G é uma clique, que $f(G) \geq |V(G)| + 1$ se G não é uma clique, e que $f(G) = |V(G)|^{|V(G)|}$ se G é um grafo nulo.

Parece-nos difícil calcular o valor de $f(G)$ para grafos gerais, ou mesmo para classes restritas.

Pode-se também questionar sobre a complexidade de determinar quando um graph G tem $f(G) \leq k$ para um dado inteiro k . Não nos é claro que o problema está em NP .

Na segunda parte da tese provamos que o Problema Grafo Sanduíche (k, l) é NP -completo para os casos $k = 1$ e $l = 2$; $k = 2$ e $l = 1$; or $k = l = 2$. Observamos que a idéia básica da construção da instância particular destes problemas é a simples condição necessária: se um grafo é (k, l) então ele não contém $l + 1$ cliques independentes de tamanho $k + 1$. Recentemente, esta condição foi estabelecida suficiente para a classe de grafos Cordais, como provado por Hell, Klein, Protti e Tito

[31]. Além disso, consideramos o subproblema com a restrição de grau Δ PGS (k, l) Δ -Limitado e o classificamos completamente como segue: PGS (k, l) Δ -Limitado é um problema polinomial para $k \leq 2$ ou $\Delta \leq 3$; e *NP*-completo caso contrário.

Um possível problema relacionado é investigar versões de otimização para problemas sanduíche em grafos.

A solução para o Problema de H -Partição por Listas, quando H é o grafo modelo (1) representado em Figura 5.7 foi apresentado em [17]. Apresentamos uma solução para o Problema de H -Partição por Listas para todos os grafos modelo H representados na Figura 5.8.

Deixamos como um problema em aberto para trabalhos futuros a solução do único Problema de H -Partição por Listas, o grafo modelo (2) representado em Figura 5.7. A aplicação de técnicas similares às aquelas desenvolvidas em [17] nos indica que este problema é um problema difícil.

Além disso, deixamos também como sugestão para trabalho futuro o problema de reconhecimento de uma partição assimétrica na qual o conjunto A é um conjunto estável. A motivação do estudo de tal problema surge a partir do trabalho de Roussel e Rubio [40], que provaram que nenhum grafo minimal imperfeito admite uma Partição Assimétrica (A, B, C, D) tal que A é um conjunto estável.

Referências Bibliográficas

- [1] K. Appel, W. Haken. *Illinois J. of Math.*, **21**, pp. 429-567, 1977.
- [2] B. Aspvall, F. Plass and R. E. Tarjan. “A Linear-time Algorithm for Testing the Truth of Certain Quantified Boolean Formulas”. *Inform. Process. Lett.*, **8**, pp. 121–123, 1979.
- [3] C. Berge. *Graphs*. North-Holland, 1985.
- [4] C. Berge. *Les problèmes de coloration en théorie des graphes*. Publ. Inst. Statist. Univ. Paris, **9**, pp. 123–160, 1960.
- [5] Z. Blázsik, M. Hujter, A. Pluhár and Zs. Tuza. “Graphs with no induced C_4 and $2K_2$ ”. *Disc. Math.*, **115**, pp. 51–55, 1993.
- [6] J. B. Bondy, U. S. R. Murty. *Graph Theory with Applications*. Elsevier, New York, 1976.
- [7] A. Brandstädt. *Partitions of Graphs into One or Two Independent Sets and Cliques*. Report 105, Informatik Berichte, Fern Universität, Hagen, Germany, 1991.
- [8] A. Brandstädt. “Partitions of Graphs into One or Two Independent Sets and Cliques”. *Discrete Math.*, **152**, pp. 47–54, 1996. See also Corrigendum, **186**, pp. 295, 1998.
- [9] A. Brandstädt, V. B. Le and T. Szymczak. “The Complexity of some Problems Related to Graph 3-Colorability”. *Discrete Appl. Math.*, **89**, pp. 59–73, 1998.

- [10] R. L. Brooks. *On Coloring the Nodes of a Network*. In Proc. Cambridge Philos. Soc., **37**, pp. 194–197, 1941.
- [11] M. Cerioli, H. Everett, C. M. H. de Figueiredo, and S. Klein. “The homogeneous set sandwich problem”. *Inform. Process. Lett.*, **67**, pp. 31–35, 1998.
- [12] V. Chvátal. “Star-Cutsets e Perfect Graphs”. *J. Combin. Theory Ser. B*, **39**, pp. 189–199, 1985.
- [13] S. A. Cook. *Proof Verification and Hardness of Approximation Problems*. In Proc. of the 3rd. ACM Symposium on Theory of Computing, Association for Computing Machinery, New York, pp. 151–158, 1971.
- [14] S. Dantas, C. M. H. de Figueiredo, L. Faria. *On the Complexity of (k,l) -Graph Sandwich Problems*. In 28th International Workshop on Graph-Theoretic Concepts in Computer Science (WG 2002), Cesky Krumlov, Czech Republic, June 13–15, 2002. Aceito para publicação em *Lecture Notes in Computer Science*.
- [15] S. Dantas, C. M. H. de Figueiredo, S. Gravier and S. Klein. *On H -partition problems*. Relatório Técnico COPPE/Engenharia de Sistemas e Computação, ES-579/02, Maio - 2002.
- [16] S. Dantas, S. Gravier and F. Maffray. *Extremal Graphs for the List-Coloring Version of a Theorem of Nordhaus and Gaddum*. Brazilian Symposium on Graphs, Algorithms and Combinatorics (GRACO), 17-19 Março de 2001 - Fortaleza - CE. *Electronic Notes in Discrete Math.*, **7**, 2001.
- [17] C. M. H. de Figueiredo, S. Klein, Y. Kohayakawa and B. Reed. “Finding Skew Partitions Efficiently”. *Journal de Algorithms*, **37**, pp. 505–521, 2000.
- [18] C. M. H. de Figueiredo, S. Klein and K. Vusković. “The Graph Sandwich Problem for 1-Join Composition is *NP*-complete”. *Aceito para publicação em Discrete Appl. Math.*.

- [19] P. Erdős, A. L. Rubin, H. Taylor. *Choosability in Graphs*. In Proc. West Coast Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Arcata, California. *Congressus Numerantium*, **26**, pp. 125–157, 1979.
- [20] H. Everett, S. Klein e B. Reed. “An Optimal Algorithm for Finding Clique-Cross Partitions”. *Congr. Numer.*, **135**, pp. 171–177, 1998.
- [21] T. Feder, P. Hell, S. Klein and R. Motwani. *Complexity of graph partition problems*. In Proc. of the 31st Annual ACM Symp. on Theory of Computing - STOC’99, pp. 464–472, 1999.
- [22] H. J. Finck. *On the Chromatic Number of a Graph and its Complements*. Theory of Graphs, Proc. Colloquium held at Tihany, Hungary, pp. 99–113, 1966.
- [23] M. R. Garey, D. S. Johnson and L. Stockmeyer. “Some Simplified *NP*-complete Graph Problems”. *Theor. Comput. Sci.*, **1**, pp. 237–267, 1976.
- [24] M. R. Garey, D. S. Johnson. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of *NP*-Completeness*. San Francisco, Freeman, 1979.
- [25] M. C. Golumbic. *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*. New York, Academic Press, 1979.
- [26] M. C. Golumbic, H. Kaplan, and R. Shamir. “Graph sandwich problems”. *J. Algorithms*, **19**, pp. 449–473, 1995.
- [27] M. C. Golumbic. “Matrix sandwich problems”. *Linear Algebra Appl.*, **277**, pp. 239–251, 1998.
- [28] M. C. Golumbic and A. Wassermann. “Complexity and algorithms for graph and hypergraph sandwich problems”. *Graphs Combin.*, **14**, pp. 223–239, 1998.
- [29] S. Gravier. *Coloration et produits de graphes*. Thèse de doctorat. Université Joseph Fourier, Grenoble, France, 1996.

- [30] S. Gravier, F. Maffray. “Graphs whose choice number is equal to their chromatic number”. *Journal of Graph Theory*, **27**, pp. 87–97, 1998.
- [31] P. Hell, S. Klein, F. Protti and L. Tito. *On Generalized Split Graphs*. In Brazilian Symposium on Graphs, Algorithms and Combinatorics, Electronic Notes in Discrete Math., **7**, 2001.
- [32] D. S. Johnson. “The NP-Completeness column: an ongoing guide”. *J. Algorithms* **2**, pp. 393–405, 1981.
- [33] H. Kaplan and R. Shamir. “Pathwidth, bandwidth, and completion problems to proper interval graphs with small cliques”. *SIAM J. Comput.*, **25**, pp. 540–561, 1996.
- [34] H. Kaplan and R. Shamir. “Bounded degree interval sandwich problems”. *Algorithmica*, **24**, pp. 96–104, 1999.
- [35] F. Maffray, M. Preissmann. “Linear Recognition of Pseudo-Split Graphs”. *Disc. Appl. Math.*, **52**, pp. 307–312, 1994.
- [36] N. V. R. Mahadev, F. S. Roberts, P. Santhanakrishnan. *3-Choosable Complete Bipartite Graphs*. RUTCOR Research Report pp. 49–91, Rutgers Univ., NJ, USA, 1991.
- [37] E. A. Nordhaus, J. W. Gaddum. “On complementary graphs”. *Ann. Math. Monthly*, **63**, pp. 175–177, 1956.
- [38] K. Ohba. *On chromatic-choosable graphs*. Manuscript, 2000.
- [39] N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour, R. Thomas. *The four color theorem*. Manuscript, 1994.
- [40] F. Roussel and P. Rubio. “About Skew Partitions in Minimal Imperfect Graphs”. *J. Combin. Theory Ser. B*, **83**, pp. 171–190, 2001.

- [41] J. L. Szwarcfiter. *Grafos e algoritmos computacionais*. Rio de Janeiro, Ed. Campus, 1988.
- [42] Zs. Tuza. “Graph colorings with local constraints - A survey”. *Discussiones Mathematicae*, **17**, pp. 161-228, 1997.
- [43] V. G. Vizing. “Vertex colourings with given colors”. *Methody Discret. Analiz.*, **29** pp. 3-10, 1976 (em Russo).