LÓGICA MODAL DA BIFURCAÇÃO

Renata Pereira de Freitas

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Prof^a Sheila Regina Murgel Veloso, D.Sc.

Prof. Mario Roberto Folhadela Benevides, Ph.D.

Prof. Paulo Augusto Silva Veloso, Ph.D.

Prof. Edward Hermann Haeusler, D.Sc.

Prof. Marcelo Finger, Ph.D.

Prof. Marcelo Fabián Frias, Ph.D.

Prof. Jean-Yves Béziau, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ – BRASIL
DEZEMBRO DE 2002

DE FREITAS, RENATA PEREIRA

Lógica Modal da Bifurcação [Rio de Janeiro] 2002

VIII, 112 p. 29,7-cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computação, 2002)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1 - Álgebra Relacional

2 - Operador de "Fork"

3 - Lógica Modal

4 - Lógica de Setas

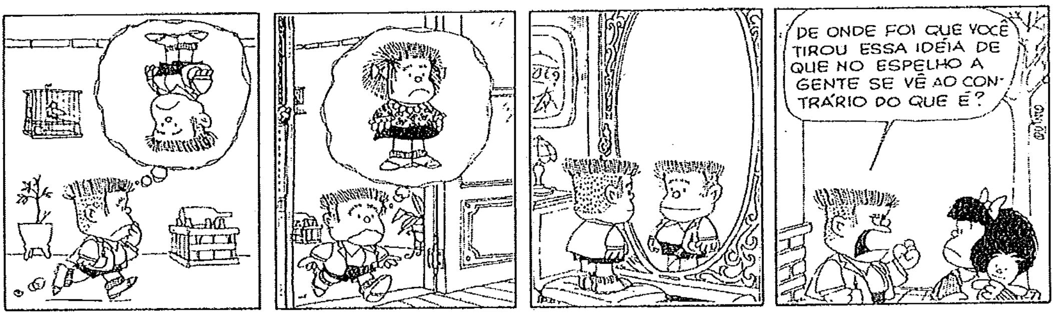
5 - Lógica Híbrida

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

Para minha mãe e minhas filhas.

Parcialmente financiado pelo CNPq.

Quino


DE ONDE FOI QUE VOCÊ TIROU ESSA IDÉIA DE QUE NO ESPELHO A GENTE SE VÊ AO CONTRÁRIO DO QUE É?
QUINO

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

LÓGICA MODAL DA BIFURCAÇÃO

Renata Pereira de Freitas

Dezembro/2002

Orientadores : Sheila Regina Murgel Veloso
Mario Roberto Folhadela Benevides

Programa : Engenharia de Sistemas e Computação

Álgebras booleanas com operadores possuem uma contrapartida modal natural. Um exemplo bastante estudado é a Lógica de Setas, uma lógica modal associada à Álgebra Relacional. Este vínculo entre o formalismo algébrico e sua lógica modal é forte o suficiente para permitir que problemas algébricos sejam reformulados na linguagem modal. Assim, o problema da axiomatização da classe das álgebras relacionais representáveis ganha sua formulação modal como o problema da axiomatização do quadrado. Neste trabalho apresentamos a Lógica Modal da Bifurcação, i.e., a contraparte modal da Álgebra com Operador de Bifurcação, seguindo os passos percorridos para a definição da Lógica de Setas a partir da Álgebra Relacional. Mostramos que, estendendo a Lógica de Setas para obter a Lógica de Setas com Bifurcação, da mesma forma como a Álgebra Relacional é estendida para a obtenção da Álgebra com Operador de Bifurcação, temos uma axiomatização das estruturas relacionais (com bifurcação) quadradas. Mostramos também que a Lógica de Setas com Bifurcação é equipolente em meios de expressão à Lógica de Primeira Ordem. Apresentamos ainda outra extensão da Lógica de Setas, a Lógica de Setas Híbrida Bidimensional, que tem o poder de expressão da Lógica de Primeira Ordem e no qual, portanto, também é possível axiomatizar o quadrado. Este sistema, no entanto, não é tão vantajoso quanto a Lógica de Setas com Bifurcação, pois não tem uma contraparte algébrica conhecida.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

FORK MODAL LOGIC

Renata Pereira de Freitas

December/2002

Thesis Supervisors : Sheila Regina Murgel Veloso
Mario Roberto Folhadela Benevides
Department : Computing and Systems Engineering

Boolean algebras with operators have a natural modal counterpart. A widely studied example is Arrow Logic, the modal logic associated to Relation Algebra. This connection between the algebraic formalism and its modal logic is close enough to allow algebraic problems to be formulated in the modal language. In this way the problem of axiomatizing Representable Relation Algebras has its modal formulation as the problem of axiomatizing square frames. In this work we present the fork modal logic, i.e., the modal counterpart of Fork Algebra, following the steps of the definition of Arrow Logic from Relation Algebra. We show that, extending Arrow Logic to obtain Fork Arrow Logic in the same way Relation Algebra is extended to Fork Algebra, we get an axiomatization of the fork square frames. Besides we show that Fork Arrow Logic is equipollent in means of expresssion with First-Order Logic. We present another extension of Arrow Logic, called Two-dimensional Hybrid Arrow Logic, that has the expressive power of First-Order Logic and, consequentely, where it is possible to axiomatize the square. This system, however, is not as good as Fork Arrow Logic, since it does not have a known algebraic counterpart.

Sumário

Introdução

A Lógica Modal da Bifurcação (LSB) é a versão modal das álgebras com operador de bifurcação [HFBV97], assim como a Lógica de Setas (LS) [MV97] é a lógica modal associada às álgebras relacionais [Tar41].

LSB foi proposta por M. Benevides e P.A.S. Veloso em [BV99]. Neste trabalho, apresentamos uma prova de completude para o sistema. Mostramos que, em LSB, é possível axiomatizar a classe das estruturas com bifurcação quadradas e apresentamos uma tradução de LSB para a Lógica de Primeira Ordem (LPO), provando que os dois formalismos são equipolentes em meio de expressão.

Álgebras com operador de bifurcação apareceram em ciência da computação como um formalismo de especificação relacional para programas não-determinísticos [HV91]. Classes de álgebras com operador de bifurcação próprias e abstratas foram utilizadas para a especificação, assim como para a derivação de programas a partir de especificações, além do desenvolvimento de programas, no cálculo relacional [HV91, HBS93, FAN93, BHSV93, FA94, FG95, BFHM96].

Um cálculo de programação pode ser visto como um conjunto de regras para a obtenção de programas a partir de especificações de uma maneira sistemática. Uma abordagem muito interessante e popular é aquela baseada em linguagens de programação funcionais [Bir90, Fri02]. Nestes formalismos funcionais, especificações e programas são escritos na mesma linguagem e regras de transformação são escritas em uma metalinguagem adequada, freqüentemente *ad-hoc*. Uma deficiência dos formalismos funcionais, no entanto, é a pouca expressividade de suas linguagens de especificação, limitadas a expressões funcionais. Como expressões funcionais podem ser vistas como programas (provavelmente programas ineficientes), para especificar um problema em uma linguagem funcional, precisamos ter, de antemão, pelo menos um algoritmo que resolva o problema.

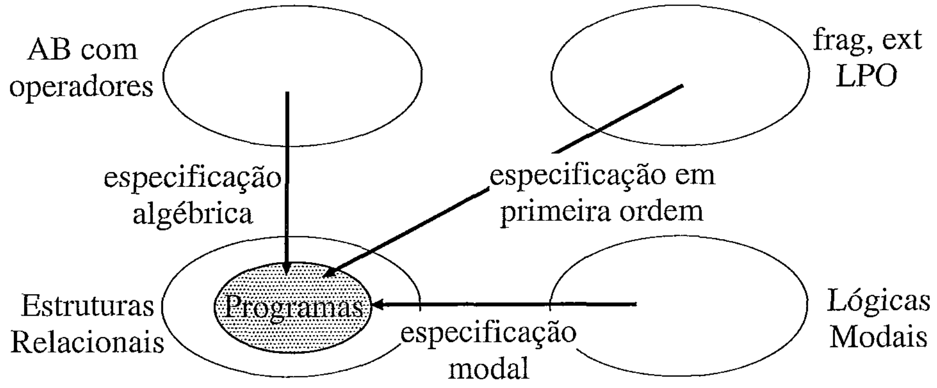
Por outro lado, cálculos relacionais possuem uma linguagem de especificação mais expressiva (devido à presença do reverso e do complementar de relações), permitindo especificações mais declarativas. No entanto, a escolha de um formalismo relacional não garante um cálculo totalmente adequado. Estes formalismos, como o proposto em [Mol91], por exemplo, apesar de terem uma linguagem de especificação com maior poder de expressão, também possuem certas lacunas metodológicas. O processo de derivação de programas deveria utilizar apenas propriedades abstratas das relações, onde as variáveis para indivíduos não ocorrem. No entanto, como não existe um conjunto de regras abstratas completo que capture toda a informação (semântica das relações), o processo de derivação de programas fica alternando entre a utilização de propriedades abstratas e propriedades concretas das relações.

Ao utilizar álgebras com operador de bifurcação como um cálculo de programação [FA94, FG95, HV91], temos o poder de expressão de LPO. Além disso, os axiomas das álgebras com operador de bifurcação abstratas constituem uma caracterização completa das álgebras com operador de bifurcação próprias [Fri02]. Podemos, então, utilizar LPO como linguagem de especificação e certas equações na álgebra com operador de bifurcação como programas. E raciocinar sobre propriedades de especificações e de programas dentro da teoria. A equivalência equacional entre as teorias das álgebras com operador de bifurcação abstratas e das álgebras com operador de bifurcação próprias permite enunciar estratégias e heurísticas para o processo de construção de programas como fórmulas de primeira ordem sobre relações [Fri02].

Assim, o cálculo de programação baseado em álgebras com operador de bifurcação possui vantagens claras sobre muitos outros cálculos funcionais e relacionais. A axiomatização finita das álgebras com operador de bifurcação permite uma caracterização finita do cálculo, que simplifica a manipulação dos programas. Além disso, especificações de problemas possuem uma representação natural nas álgebras com operador de bifurcação. A possibilidade de interpretar teorias de primeira ordem como teorias equacionais nas álgebras com operador de bifurcação dá a estas o poder de expressão de LPO.

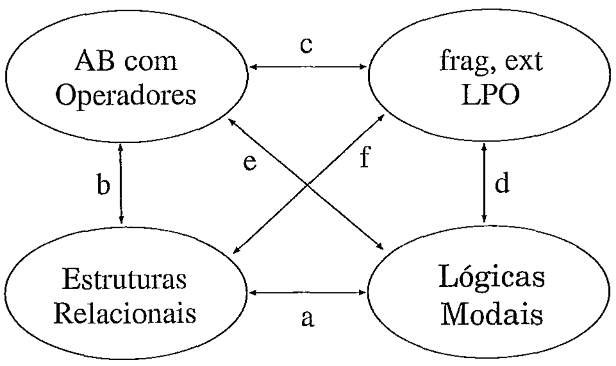
A álgebra com operador de bifurcação se apresenta, portanto, como um formalismo de especificação e derivação de programas alternativo a LPO. Neste trabalho, desenvolvemos LSB, uma terceira alternativa para a especificação e derivação de programas, agora no contexto modal (Figura 1).

Figura 1:



Esta pesquisa se coloca em um contexto mais geral, segundo o panorama esboçado no seguinte diagrama, adaptação do diagrama (Figura 2) proposto por C. Brink [Bri93] (cf. [Ven96]).

Figura 2:



Estruturas relacionais, lógicas modais e álgebras booleanas com operadores estão estreitamente conectadas. E entre estes e LPO (e seus fragmentos e extensões), certas conexões também podem ser estudadas.

O diagrama (Figura 2) apresenta algumas conexões entre Álgebra Booleana com Operadores, lógicas modais, estruturas relacionais e (fragmentos e extensões de) LPO. A conexão (a) entre lógicas modais e estruturas relacionais é estabelecida pela semântica de mundos possíveis, desde o trabalho de S. Kripke [Kri59]. A dualidade (b) entre Álgebras Booleanas com Operadores e estruturas relacionais foi investigada, inicialmente, por B. Jónsson e A. Tarski [JT51, JT52]. A relação entre álgebras e LPO é estudada no domínio da lógica algébrica e fornece a seta (c) do diagrama. A seta (d) é dada pela teoria da correspondência [vBen84]. A seta (e) representa a semântica algébrica da lógica modal [Lem66a, Lem66b]. A seta (f) corresponde à teoria de modelos.

É importante observar que as setas mostradas no diagrama não são funtores, embora cada nó do diagrama possa ser considerado como uma categoria. O diagrama não possui propriedades importantes como, por exemplo, a comutatividade. De fato, o entendimento das setas é dado pelas relações pontuais entre elementos pertencentes a cada um dos quatro domínios do diagrama. Assim, o entendimento global do diagrama está longe de ser alcançado. Acreditamos que o desenvolvimento de LSB, acrescentando um ponto no domínio modal, espelhado em cada um dos outros domínios, contribuirá para melhorar o entendimento do diagrama como um todo, assim como o desenvolvimento de LS e sua relação com AR contribuíram. De fato, utilizamos algumas das conexões no diagrama para obter LSB da mesma forma como LS foi obtida de AR. E o método utilizado na prova de completude de LSB que apresentamos é uma instância de um teorema mais geral sobre a axiomatização de certas classes de lógicas modais.

Desde a década de 70, a lógica modal era considerada a lógica dos conceitos intencionais, tais como necessidade, possibilidade e crença, motivados principalmente por considerações filosóficas. A receita para definir uma lógica modal era dada como segue. 1) Escolher os conceitos intencionais. 2) Expandir a linguagem da lógica proposicional clássica pelo acréscimo de novos conectivos modais. 3) Construir uma semântica de Kripke para a linguagem construída, escolhendo uma noção apropriada de estrutura modal, i.e., um conjunto de mundos juntamente com relações de acessibilidade entre mundos. 4) Escolher axiomas considerados suficientes para capturar as modalidades nas quais se está interessado. 5) Provar que a axiomática escolhida é correta e completa com relação à semântica desejada. Muita pesquisa foi conduzida nesta abordagem [Seg71].

Hoje em dia, estruturas modais são consideradas como estruturas relacionais e lógicas modais são linguagens formais para raciocinar sobre tais estruturas. A nova receita para definir uma lógica modal é a seguinte. 1) Escolha sua estrutura (relacional) ou sua classe de estruturas. 2) Tome uma linguagem modal cujas letras proposicionais e modalidades são usadas, respectivamente, para falar de subconjuntos e relações na estrutura. Os passos 3 a 5 são essencialmente como na receita antiga. Assim, poderia-se pensar que não nos afastamos da receita original, já que o resultado final é o mesmo. Mas não é esse o caso. Pesquisadores, como S.K. Thomason, J. van Benthem e H. Sahlqvist, baseados nesta nova abordagem, provaram que a lógica modal é, de fato, um fragmento da lógica de segunda ordem bastante rico. Neste sentido, seguindo a receita, obtém-se um formalismo com algumas meta-propriedades interessantes e que pode ser utilizado para especificação formal, como uma alternativa LPO. Uma revisão geral desta visão da lógica modal encontra-se em [BRV01].

Seguindo os passos de van Benthem, Y. Venema [Ven91] aplicou a nova receita a uma importante classe de estruturas, chamadas estruturas de setas, definindo o que é chamado Lógica de Setas (LS), a lógica modal básica de setas. Neste caso, um mundo típico é um par (a, b) de elementos, que pode ser considerado uma seta com cabeça a e cauda b, e as relações entre pares são as usuais composição e reversão de setas. Setas são motivadas, entre outras coisas, por serem a entrada/saída de estados de transição. Composição, neste contexto, significa seqüencialização de transições. Estruturas de setas possuem uma conexão direta com álgebras relacionais, fornecendo uma ponte entre lógica modal e lógica algébrica [MV97].

Como existe uma relação estreita entre AR e LS, o fato de AR não ser representável na classe das álgebras relacionais de conjuntos acarreta que LS não axiomatiza a classe das estruturas relacionais quadradas (estruturas cujo domínio é um produto cartesiano) e o fato de AR ter o poder de expressão de um fragmento de LPO com três variáveis acarreta que LS também é equipolente, em meios de expressão, a este fragmento. Assim, o problema de estender AR para alcançar a representabilidade e o poder de expressão de LPO é traduzido para o contexto modal como o problema de estender LS tendo em vista o poder de expressão de LPO e a possibilidade de axiomatizar a classe dos quadrados.

No Capítulo 1, apresentamos LS como a lógica modal de AR. Enunciamos dois problemas-chave no estudo de AR: o problema da representação (estender AR a fim de axiomatizar a classe das álgebras relacionais representáveis) e o problema da expressividade (estender AR a fim de alcançar o poder de expressão de LPO). Explicitamos a conexão entre AR e LS. Reenunciamos os problemas-chave de AR como questões em LS. No contexto modal, o problema da representação é reformulado como o problema da axiomatização do quadrado. No Capítulo 2, apresentamos uma extensão de LS, devida a Y. Venema, a Lógica de Setas com Operador Diferença. Este sistema axiomatiza o quadrado com um aparato dedutivo não-ortodoxo, perdendo, com isso, a conexão com o formalismo algébrico. No Capítulo 3, apresentamos uma extensão híbrida de LS, a Lógica de Setas Híbrida Bidimensional. Este sistema axiomatiza o quadrado com um aparato dedutivo não-ortodoxo e tem o poder de expressão de LPO. No Capítulo 4, apresentamos LSB e mostramos que este sistema axiomatiza os quadrados infinitos (e triviais) com um aparato dedutivo ortodoxo e tem o poder de expressão de LPO. Finalmente, apresentamos as conclusões e perspectivas de desenvolvimento do trabalho.

Sistemas Lógicos

Antes de passarmos ao Capítulo 1, vamos apresentar, de maneira sucinta, as definições e resultados que estamos pressupondo.

Um *sistema lógico* é um par $\langle \mathcal{L}, \mathsf{cn} \rangle$, onde $\mathcal{L}$ é uma *linguagem* e cn uma *relação de conseqüência*. Uma *linguagem* é um conjunto cujos elementos são chamados *fórmulas* dessa linguagem. Uma *relação de conseqüência* sobre uma linguagem é uma relação binária entre conjuntos de fórmulas e fórmulas dessa linguagem.

Uma relação de conseqüência pode ser definida, sintaticamente, a partir de um cálculo dedutivo ou, semanticamente, a partir das noções de estrutura e satisfabilidade. No primeiro caso, é usual representar a relação de conseqüência por $\vdash$ e, no segundo, por $\models$. Dado um conjunto Γ de fórmulas de um sistema lógico, podemos considerar o conjunto das conseqüências de Γ, denotado por $Cn(\Gamma)$. Assim, dois sistemas lógicos são iguais se possuem a mesma linguagem e a mesma relação de conseqüência (seja ela definida sintatica ou semanticamente). Quando um sistema lógico é definido tanto sintatica quanto semanticamente, a prova de que as duas definições determinam o mesmo sistema lógico é chamada prova da *completude/corretude* do sistema. Neste texto, todos os sistemas lógicos serão apresentados tanto semantica quanto sintaticamente e a prova de completude/corretude para cada sistema será a demonstração de que a relação de conseqüência definida a partir das noções de estrutura e satisfabilidade e aquela definida por um aparato dedutivo coincidem.

Um sistema lógico $\langle \mathcal{L}_2, \mathsf{cn}_2 \rangle$ é uma *extensão* de um sistema lógico $\langle \mathcal{L}_1, \mathsf{cn}_1 \rangle$ quando $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}_2$ e, para qualquer conjunto $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq \mathcal{L}_1$, se $\Gamma \mathsf{cn}_1 \alpha$, então $\Gamma \mathsf{cn}_2 \alpha$. A extensão é *equipolente* se:

i) (*equipolência em meios de expressão*) para qualquer fórmula $\beta \in \mathcal{L}_2$, existe uma fórmula $\alpha \in \mathcal{L}_1$ de modo que $\alpha \mathsf{cn}_2 \beta$.

ii) (*equipolência em meios de prova*) para quaisquer fórmulas $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_1$ se $\alpha \mathsf{cn}_2 \beta$, então $\alpha \mathsf{cn}_1 \beta$.

Dizemos que um sistema lógico *axiomatiza* uma classe de estruturas quando, neste sistema, o conjunto das conseqüências do conjunto vazio é igual ao conjunto das fórmulas que são satisfeitas em todas as estruturas da classe.

Capítulo 1

Lógica de Setas

Neste capítulo fazemos uma descrição da teoria da Álgebra Relacional e da Lógica de Setas. Nosso objetivo é apresentar alguns elementos que serão úteis para a compreensão dos capítulos seguintes. Uma abordagem aprofundada pode ser encontrada nos livros [TG87] e [MV97], que contêm todos os resultados aqui apresentados.

Na Seção 1.1, fazemos uma revisão dos principais conceitos e resultados de Álgebra Booleana e Álgebra Relacional. Na Seção 1.2, apresentamos a Lógica de Setas, um formalismo modal relacionado estreitamente à Álgebra Relacional e que, por isso, possui características interessantes, porém sérias limitações, quando visto como um formalismo de especificação. Nos outros capítulos, apresentamos extensões da Lógica de Setas em que algumas destas limitações são superadas.

1.1 Álgebra Relacional

Álgebra Booleana

A classe das álgebras relacionais foi introduzida por A. Tarski, em 1941 [Tar41], como uma candidata a desempenhar, para o cálculo das relações binárias, o mesmo papel que as álgebras booleanas desempenham para o cálculo dos conjuntos. Para um bom entendimento das questões relacionadas ao estudo das álgebras relacionais, devemos compreender em que sentido as álgebras booleanas são a contraparte algébrica do *cálculo dos conjuntos*.

O cálculo dos conjuntos lida com as propriedades das operações de união, interseção e complementação de conjuntos. Dado um conjunto $\mathcal{U}$, denotamos por $2^{\mathcal{U}}$ o conjunto de todos os subconjuntos de $\mathcal{U}$. Como a união, a interseção e a complementação (com relação a $\mathcal{U}$) de elementos de $2^{\mathcal{U}}$ é um elemento de $2^{\mathcal{U}}$, é natural que associemos a álgebra $\langle 2^{\mathcal{U}}, \cup, \cap, -, \emptyset, \mathcal{U}\rangle$, a cada conjunto $\mathcal{U}$. De maneira geral, a cada conjunto $\mathcal{U}$ podemos associar certas álgebras cujos domínios são subconjuntos de $2^{\mathcal{U}}$, fechados sob as operações binárias $\cup$ e $\cap$, de *união* e *interseção*, sob a operação unária $\mathcal{U}-$, de *diferença com relação a* $\mathcal{U}$, e contendo como elementos distinguidos o conjunto $\emptyset$ e o próprio $\mathcal{U}$.

Definição Um *campo de conjuntos*, sobre um conjunto $\mathcal{U}$, é uma família não vazia F de subconjuntos de $\mathcal{U}$ que é fechada sob união, interseção e diferença com relação a $\mathcal{U}$, e que contém $\emptyset$ e $\mathcal{U}$.

Uma *álgebra de conjuntos* é uma álgebra $\langle C, \cup, \cap, -, \emptyset, \mathcal{U}\rangle$, onde C é um campo de conjuntos sobre um conjunto $\mathcal{U}$. Denotamos por AC a classe de todas as álgebras de conjuntos.

Uma álgebra de conjuntos é *plena* se $C = 2^{\mathcal{U}}$, para algum conjunto $\mathcal{U}$. Denotamos por ACP a classe de todas as álgebras de conjuntos plenas.

É sabido que as seguintes identidades são verdadeiras, dados quaisquer conjuntos a, b e c:

$$
\begin{array}{rl}
(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c) & (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) \\
a \cup b = b \cup a & a \cap b = b \cap a \\
a \cup a = a & a \cap a = a \\
a \cup \emptyset = a & a \cap u = a \\
a \cup \mathcal{U} = \mathcal{U} & a \cap \emptyset = \emptyset \\
a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) & a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c) \\
\multicolumn{2}{c}{\overline{\overline{a}} = a} \\
a \cup \overline{a} = \mathcal{U} & a \cap \overline{a} = \emptyset \\
\overline{a \cup b} = \overline{a} \cap \overline{b} & \overline{a \cap b} = \overline{a} \cup \overline{b} \\
\overline{\emptyset} = \mathcal{U} & \overline{\mathcal{U}} = \emptyset
\end{array}
$$

Em particular, elas são verdadeiras em todas as álgebras de conjuntos.

A partir das identidades acima, podemos elaborar duas definições e levantar dois problemas que motivam o estudo das álgebras booleanas.

Em primeiro lugar, obviamente, nem todas as identidades que são verdadeiras em todas as álgebras de conjuntos foram listadas. Por outro lado, algumas destas identidades decorrem das outras pelos mecanismos usuais de derivação a partir de identidades [Hun33].

Definição O *cálculo dos conjuntos* é o conjunto de todas as identidades entre termos, obtidas da maneira usual, a partir das variáveis x, y, z e das constantes $\emptyset$ e $\mathcal{U}$, por aplicação dos operadores $\cup$, $\cap$ e $-$, que são verdadeiras em todas as álgebras de conjuntos.

Temos, então, o seguinte problema:

PROBLEMA DA AXIOMATIZAÇÃO DAS ÁLGEBRAS DE CONJUNTOS Determinar um conjunto finito Ax de identidades, de modo que todas as identidades do cálculo dos conjuntos sejam deriváveis a partir de Ax pelos mecanismos usuais de derivação a partir de identidades [Hen77].

Neste contexto, o conjunto das identidades listadas anteriormente deve ser visto como um candidato a um tal conjunto Ax de axiomas. Desta forma, o Problema da Axiomatização pode ser visto como um problema sobre o "poder de dedução" destas identidades.

O segundo problema diz respeito ao "poder de expressão" das identidades acima, pois questiona em que medida elas são capazes de caracterizar as álgebras de conjuntos. Podemos descrevê-lo de maneira adequada observando o seguinte. De um lado, temos uma classe de álgebras bastante *naturais*, as álgebras de conjuntos, e do outro, algumas identidadesque são verdadeiras em todas as álgebras desta classe. A questão é saber se existem outras álgebras, diferentes das álgebras de conjuntos, nas quais todas essas identidades também são verdadeiras. Colocada desta forma, a questão tem uma solução trivial pois, se tomarmos uma álgebra A isomorfa a uma álgebra de conjuntos, todas as identidades consideradas também serão verdadeiras em A. Este fato leva a considerar que, para que possamos resolver este problema adequadamente, devemos "algebrizá-lo". Isto é feito do seguinte modo:

Definição Uma *álgebra de tipo booleano* é uma álgebra $\langle A, +, \cdot, -, 0, 1\rangle$, onde $+$ e $\cdot$ são operações binárias em A, $-$ é uma operação unária em A e $0, 1 \in A$. Uma *álgebra booleana* é uma álgebra de tipo booleano $\langle A, +, \cdot, -, 0, 1\rangle$, que satisfaz as seguintes identidades, para quaisquer $x, y, z \in A$:

$$\begin{array}{rl}
(x+y)+z = x+(y+z) & (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z) \\
x+y = y+x & x \cdot y = y \cdot x \\
x+x = x & x \cdot x = x \\
x+0 = x & x \cdot 1 = x \\
x+1 = 1 & x \cdot 0 = 0 \\
x+(y \cdot z) = (x+y) \cdot (x+z) & x \cdot (y+z) = (x \cdot y)+(x \cdot z) \\
\multicolumn{2}{c}{-(-x) = x} \\
x+(-x) = 1 & x \cdot (-x) = 0 \\
-(x+y) = (-x) \cdot (-y) & -(x \cdot y) = (-x)+(-y) \\
-0 = 1 & -1 = 0
\end{array}$$

Dada uma álgebra booleana $\langle A, +, \cdot, -, 0, 1\rangle$, $+$ é chamada a *adição* de A, $\cdot$ o *produto* de A, $-$ a *complementação* de A, 0 o elemento *mínimo* de A e 1 o elemento *máximo* de A. Denotamos por AB a classe de todas as álgebras booleanas.

Como estruturas isomorfas satisfazem as mesmas identidades, a definição de álgebra booleana é uma abstração do conceito de álgebra de conjuntos e pretende tanto ser uma caracterização — por meio de um conjunto finito de identidades — das álgebras de conjuntos, quanto uma solução do Problema da Axiomatização. Na verdade, se as identidades acima caracterizam as álgebras booleanas, elas também são uma axiomatização destas álgebras (cf. [Tar41]). Esta observação simples mostra o papel de destaque que foi dado ao seguinte problema no estudo das álgebras booleanas.

Problema da Representação para as Álgebras Booleanas Determinar se toda álgebra booleana é isomorfa a uma álgebra de conjuntos.

Como foi mostrado por M.H. Stone em uma série de artigos, reorganizados em [Sto36, Sto37], o problema da representação para álgebras booleanas tem solução positiva. A idéia básica da prova é a seguinte. Em primeiro lugar, as álgebras de conjuntos são, por definição, subálgebras das álgebras de conjuntos plenas. Em segundo, Tarski [Tar56] forneceu uma caracterização das álgebras de conjuntos plenas como álgebras booleanas que satisfazem a certas condições especiais. Estas condições são expressas de maneira adequada na linguagem dos conjuntos ordenados.

Se A for uma álgebra booleana e $a, b, c \in A$, então $a + b = b$ se, e somente se $a \cdot b = a$. Definimos, então, $a \leq b$ se $a + b = b$ (ou, de maneira equivalente, se $a \cdot b = a$) e dizemos que a é um *subconjunto* de b. Decorre da definição que $\leq$ é uma relação de ordem parcial em A, com primeiro elemento 0 e último elemento 1. Também temos que $a + b$ é o supremo e $a \cdot b$ é o ínfimo, com relação a $\leq$, de a e b em A. Um *átomo* de uma álgebra booleana é um elemento não nulo minimal. Uma álgebra booleana é *atômica* se cada elemento não nulo tem um átomo como sub-elemento. Uma álgebra booleana é *completa* se possui supremos e ínfimos arbitrários.

Teorema 1.1.1 (Tarski, 1935) *Uma álgebra booleana é isomorfa a uma álgebra de conjuntos plena se, e somente se, é atômica e completa.*

Finalmente, podemos provar que as álgebras booleanas são suficientemente ricas em estrutura para que possam ser imersas em álgebras satisfazendo as condições especiais enunciadas no Teorema 1.1.1.

Como veremos a seguir, álgebras relacionais são álgebras booleanas munidas de operações adicionais. Do ponto de vista do estudo geral da representação de álgebras booleanas com operações adicionais, as álgebras de conjuntos plenas possuem ainda outras propriedades que permitem um enunciado mais adequado para a solução do problema da representação.

Definição Uma álgebra booleana B é uma *extensão perfeita* de uma álgebra booleana A se as seguintes condições são satisfeitas:

i) B é completa e atômica.

ii) A é uma subálgebra de B.

iii) Se $\{x_i : i \in I\}$ for uma família de elementos de B de modo que $\Sigma_{i\in I}x_i = 1$, então existirá um conjunto finito $J \subseteq I$, tal que $\Sigma_{j\in J}x_j = 1$.
iv) Se x, y forem átomos de B, distintos, então existirá um elemento $b \in B$ tal que $x \leq b$ e $y \cdot b = 0$.

Teorema 1.1.2 (da Extensão, Stone 1936) *Toda álgebra booleana possui uma extensão perfeita.*

No artigo posterior, Stone [Sto37] apresentou o teorema da extensão em linguagem topológica, chegando assim ao enunciado de seu célebre resultado:

Corolário 1.1.1 (Teorema da Representação, Stone 1937) *Toda álgebra booleana é isomorfa a uma álgebra concreta que consiste de todos os conjuntos abertos-fechados de um espaço topológico compacto totalmente desconexo.*

Problemas de representação

As álgebras relacionais surgiram da tentativa de "algebrizar" certas estruturas definidas a partir de relações, da mesma maneira que as álgebras booleanas foram uma bem sucedida tentativa de "algebrizar" as álgebras de conjuntos. Para que possamos entender melhor os desdobramentos desta afirmativa, é necessário uma boa compreensão do que foi obtido com o teorema da representação.

Dizemos que duas estruturas são *similares* se existe uma bijeção que preserva a aridade de suas operações. Seja K uma classe de estruturas similares. Dizemos que K é uma classe *abstrata* se K é definida por um conjunto de axiomas. Dizemos que K é uma classe *concreta* se, para cada estrutura $A \in K$, o domínio de A é um conjunto e as operações de A são restrições de operações conjuntistas universais fixadas para o domínio de A.

Por exemplo, a classe AB de todas as álgebras booleanas é uma classe abstrata, pois foi definida por meio de equações, enquanto que a classe AC de todas as álgebras de conjuntos é um exemplo de classe concreta, pois qualquer álgebra de conjuntos possui um conjunto $\mathcal{U}$ como domínio e suas operações são restrições das operações conjuntistas universais $\cup$, $\cap$ e $\mathcal{U}-$ ao domínio de A.

Se uma classe for abstrata, então ela será fechada para a operação de tomar imagens isomorfas de seus membros. Se uma classe for concreta, então, para quaisquer dois de seus membros A e B, se A e B possuem o mesmo universo, então elas são iguais.

O Problema de Representação de uma classe abstrata K^a em uma classe concreta K^c pode ser especificado como segue:

PROBLEMA DA REPRESENTAÇÃO DE K^a EM K^c Determinar se toda estrutura em K^a é isomorfa a uma estrutura em K^c.

Se a resposta para o problema da representação de K^a em K^c é positiva, dizemos que K^c *representa* K^a ou que K^a é *representável* em K^c.

Assim, o problema da representação para as álgebras booleanas consistia em decidir se toda estrutura em AB seria isomorfa a uma estrutura em AC. Como este problema tem solução positiva, e devido à maneira como AB é definida, temos uma caracterização por identidades de AC, que foi definida como a classe das subálgebras de ACP. Em outras palavras, o teorema da representação garante que as álgebras booleanas são exatamente as álgebras que podem ser obtidas a partir das álgebras plenas por meio das operações de tomar uma imagem isomorfa de uma subestrutura de um produto direto arbitrário.

Álgebra Relacional

Dado um conjunto $\mathcal{U}$, uma *relação em* $\mathcal{U}$ é um subconjunto de $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$. Denotamos por $2^{\mathcal{U} \times \mathcal{U}}$ o conjunto de todas as relações em $\mathcal{U}$. O estudo das álgebras relacionais considera, dentre muitas outras possibilidades [Jón91], a algebrização das operações sobre relações introduzidas por A. de Morgan e desenvolvidas por C.S. Peirce (cf. [Mad91]).

Peirce considera como relevantes, além das operações booleanas, a operação binária $|$, de *composição*, a operação unária $^{-1}$, de *reversão*, e o elemento distinguido Id, *relação identidade*.

O estudo das propriedades aritméticas satisfeitas por estas operações, iniciado por De Morgan e Peirce, foi investigado mais detalhadamente por F. Schröder. Os principais resultados obtidos nesse período foram (cf. [Mad91]):

Teorema 1.1.3 (K, de De Morgan, 1864) *Se* $R \mid S \subseteq T$, *então* $R^{-1} \mid \overline{T} \subseteq \overline{S}$ *e* $\overline{T} \mid S^{-1} \subseteq \overline{R}$.

Teorema 1.1.4 (Schröder, 1895) *Toda combinação booleana de equações é equivalente a uma única equação da forma* $t = 1$.

Embora estivessem interessados em deduzir fórmulas complicadas a partir de fórmulas mais simples, De Morgan, Peirce e Schröder não iniciaram uma abordagem axiomática para o cálculo das relações (cf. [Mad91]). Esta tarefa foi empreendida por Tarski que, a partir de 1940, iniciou o estudo algébrico das relações, que passaremos agora a descrever, fazendo um paralelo com as álgebras booleanas.

Definição Uma *álgebra de tipo relacional* é uma álgebra booleana com os operadores ; (binário), $^{\smile}$ (unário) e $1'$ (nulário): $\langle A, +, \cdot, ;, -, ^{\smile}, 0, 1, 1' \rangle$.

Uma *álgebra relacional de conjuntos* é uma álgebra $\langle A, \cup, \cap, |, -, ^{-1}, \emptyset, V, I \rangle$, de tipo relacional, onde $\langle A, \cup, \cap, -, \emptyset, V \rangle$ é uma álgebra booleana cujo domínio A é um campo de relações binárias contidas em V, fechado para as operações $|$ e $^{-1}$ e, para cada relação $R \in A$, temos que $R \mid I = I \mid R = R$. A classe das álgebras relacionais de conjuntos será denotada por ARC.

Uma *álgebra relacional plena* é uma álgebra relacional de conjuntos da forma $\langle 2^{\mathcal{U} \times \mathcal{U}}, \cup, \cap, |, -, ^{-1}, \emptyset, \mathcal{U} \times \mathcal{U}, Id_{\mathcal{U}} \rangle$, onde $\mathcal{U}$ é um conjunto não vazio. A classe das álgebras relacionais plenas será denotada por ARP.

Uma *álgebra relacional representável* é uma cópia isomorfa de uma álgebra relacional de conjuntos. A classe das álgebras relacionais representáveis será denotada por ARR.

Uma álgebra relacional representável é uma cópia isomorfa de uma subálgebra de um produto direto de álgebras relacionais plenas, ou seja, ARR $=$ **ISP**(ARP), onde **I**, **S** e **P** são as operações de tomar cópias isomorfas, subestruturas e produtos diretos arbitrários, respectivamente.

O principal objetivo de Tarski era encontrar o correlato algébrico das álgebras em ARR. Baseado em seus estudos sobre os trabalhos de Schröder, ele propôs a definição seguinte.

Definição Uma *álgebra relacional* $\langle A, +, \cdot, ;, -, \smile, 0, 1, 1' \rangle$ é uma álgebra de tipo relacional tal que:

AR0) $\langle A, +, \cdot, -, 0, 1 \rangle$ é álgebra booleana.

Para cada $x, y, z \in A$, temos:

AR1) $(x + y); z = (x; z) + (y; z)$

AR2) $(x + y)^{\smile} = x^{\smile} + y^{\smile}$

AR3) $(x; y); z = x; (y; z)$

AR4) $x; 1' = x$

AR5) $x^{\smile\smile} = x$

AR6) $(x; y)^{\smile} = y^{\smile}; x^{\smile}$

AR7) $x^{\smile}; (x; y)^{-} \leq y^{-}$

Dada uma álgebra relacional $\langle A, +, \cdot, ;, ^{-}, ^{\smile}, 0, 1, 1' \rangle$, a álgebra $\langle A, +, \cdot, ^{-}, 0, 1 \rangle$ é chamada o *reduto booleano* de A, a álgebra $\langle A, ;, ^{\smile}, 1' \rangle$ é chamada o *reduto peirceano* de A, as operações ; e $^{\smile}$ são chamados, respectivamente, *composição* e *reversão* e o elemento $1'$ é chamado a *identidade* de A.

A classe das álgebras relacionais será denotada por AR.

A partir da axiomática introduzida por Tarski, podem-se provar "centenas de teoremas encontrados no *Algebra e Logik des Relatives de Schröder*" [Tar41]. Em particular, versões do Teorema 1.1.3 e do Teorema 1.1.4, respectivamente [CT51]:

Teorema 1.1.5 (Chin-Tarski, 1951) *Se A é uma álgebra relacional e $x, y, z \in A$, então as seguintes identidades são equivalentes:*

i) $(x; y) \cdot z = 0$

ii) $(x^{\smile}; z) \cdot y = 0$

iii) $(z; y^{\smile}) \cdot x = 0$

Teorema 1.1.6 *Toda combinação booleana de equações em uma álgebra relacional simples é equivalente a uma única equação da forma $t = 1$.*

De maneira análoga à definição de álgebra booleana, a definição proposta por Tarski é uma candidata a ser tanto uma axiomatização de todas as identidades verdadeiras em todas as álgebras relacionais de conjuntos, quanto uma caracterização destas álgebras. Assim, o principal problema considerado por Tarski foi o seguinte:

Problema da Representação das Álgebras Relacionais Determinar se toda álgebra relacional é representável.

A princípio, Tarski considerou que a solução para o problema da representação das álgebras relacionais também seria positiva. Mas, em 1950, R.C. Lyndon [Lyn50], apesar de descrever *um conjunto infinito* de condições necessárias e suficientes para que uma álgebra relacional finita seja representável, provou que este não é o caso.

Teorema 1.1.7 (Lyndon, 1950) AR $\not\subseteq$ ARR, *isto é, existe uma álgebra relacional que não é representável.*

A álgebra encontrada por Lyndon é finita e tem 56 átomos. Estabelecendo algumas relações entre álgebras relacionais e geometrias projetivas, Jónsson [Jón59] construiu um outro exemplo com uma infinidade de átomos. Aperfeiçoando as idéias de Jónsson, e, baseado na não existência de certos planos projetivos, Lyndon [Lyn61] construiu uma família de álgebras não representáveis. Posteriormente, R. McKenzie [McK82] encontrou a menor álgebra relacional que não é representável.

Axiomatização das álgebras representáveis

No mesmo artigo de 1950, além de provar que existe uma álgebra relacional não representável, Lyndon apresenta um argumento mostrando que ARR não poderia ser axiomatizada por identidades. Mas, em 1955, Tarski [Tar55] provou que o argumento de Lyndon é incorreto (cf. [Vel74]).

Uma classe K de álgebras similares é uma *variedade* se existe uma axiomatização de K por meio de identidades.

Um importante resultado da álgebra universal [Bir35] caracteriza as variedades por meio de certas operações sobre álgebras.

Se K for uma classe de álgebras similares, $\mathbf{I}(K)$, $\mathbf{S}(K)$, $\mathbf{H}(K)$ e $\mathbf{P}(K)$ denotam, respectivamente, a classe das cópias isomorfas, subálgebras, imagens homomorfas e produtos diretos arbitrários de membros de K. Assim, temos:

$$\mathrm{AC} = \mathbf{S}(\mathrm{ACP}),$$

$$\mathrm{I(AC)} = \mathbf{ISP}(\mathrm{ACP}),$$

$$\mathrm{AB} = \mathbf{ISP}(\mathrm{ACP}).$$

Teorema 1.1.8 (Birkhoff, 1936) *Uma classe K de álgebras similares é uma variedade se, e somente se, é fechada para* $\mathbf{S}$, $\mathbf{H}$ *e* $\mathbf{P}$.

Corolário 1.1.2 (Tarski, 1954) *Uma classe K de álgebras similares é uma variedade se, e somente se, $K = \mathbf{HSP}(K)$.*

Teorema 1.1.9 (Tarski, 1955) ARR *é uma variedade.*

É imediato que ARR é fechada para subestruturas e produtos diretos arbitrários. Tarski utilizou resultados da teoria dos modelos para provar que a classe ARR é fechada para imagens homomorfas. Assim, pelo teorema 1.1.3, ele concluiu que existe uma axiomatização por igualdades para ARR. O problema com esta abordagem é que o resultado obtido por Tarski não apresentava efetivamente uma axiomática para ARR.

A partir destes resultados, parte do desenvolvimento do estudo das álgebras relacionais foi motivado pelo seguinte problema:

PROBLEMA DA AXIOMATIZAÇÃO DAS ÁLGEBRAS REPRESENTÁVEIS Determinar um conjunto efetivo de identidades que axiomatizem a classe ARR.

Em 1956, Lyndon [Lyn56] divulgou a contradição entre seu resultado de 1950 e os obtidos por Tarski em 1955 e apresentou um conjunto infinito de equações caracterizando a classe ARR.

Teorema 1.1.10 (Lyndon, 1956) *Axiomatização infinita de* ARR *por meio de identidades.*

Após o resultado de Lyndon, a questão que naturalmente se coloca é se podemos obter uma axiomatização de ARR por meio de um conjunto finito de identidades. A resposta para esta questão aparece em [Mon69]:

Teorema 1.1.11 (Monk, 1969) ARR *não tem axiomatização finita.*

Um fato importante é que o resultado de Monk diz respeito a axiomatizações utilizando sentenças de primeira ordem em geral e não somente identidades. Neste contexto, H. Andréka [And91] obteve o seguinte resultado:

Teorema 1.1.12 (Andréka, 1991) *Se Ax é uma axiomatização por meio de identidades de* ARR, *então, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe uma equação em Ax contendo mais que k variáveis distintas e todos os símbolos de operações.*

Neste contexto, uma maneira de obter resultados de axiomatização finita é admitir sistemas de derivação que não são dados pela lógica equacional. Alguns resultados nesta direção aparecem em [Wad75, Mad83, Orl91, Ven91].

1.2 Lógica de Setas

A Lógica de Setas (LS) é um sistema formal para raciocinar sobre objetos que podem ser vistos como setas [Ven96]. Existem diferentes semânticas para LS, dependendo da ontologia escolhida para as setas.

Na semântica *abstrata*, não se supõe nenhuma estrutura interna para as setas. Neste caso, uma estrutura de setas consiste de um conjunto S de objetos, chamados *setas*, juntamente com três relações $\mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I}$, chamadas *composição*, *reversão* e *identidade*, respectivamente, seguindo a intuição natural (por exemplo, $\mathsf{C}(A, B, C)$ significa que A pode ser decomposto em B e C). LS com a semântica abstrata é uma generalização da lógica modal básica, considerando-se operadores modais não necessariamente unários [BRV01].

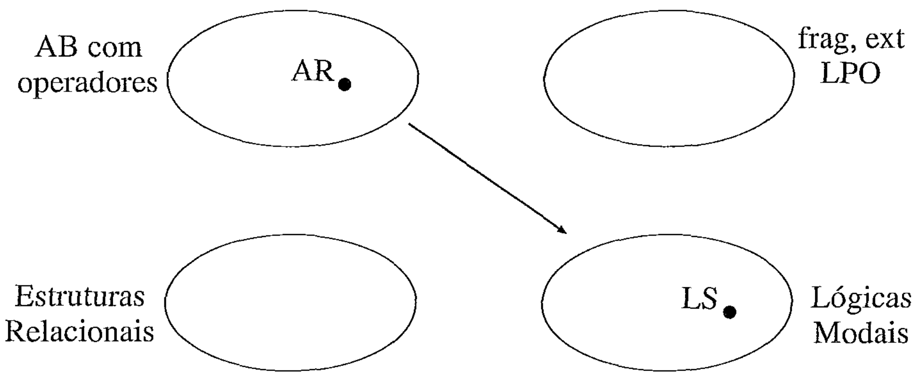
Em uma semântica mais concreta, chamada *quadrada*, as setas, ao invés de serem as entidades primitivas da estrutura, são pares ordenados de objetos mais fundamentais. Neste caso, uma estrutura consiste de um conjunto $\mathcal{U} \times \mathcal{U}$ de pares ordenados de *pontos* em $\mathcal{U}$ e as três relações $\mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I}$ são definidas de acordo com a estrutura interna das setas (por exemplo, $\mathsf{C}(a,b)(c,d)(e,f)$ se, e somente se, $a = c$, $b = f$ e $d = e$). A classe de todos os quadrados é denotada por QD. Observe que, neste contexto, as letras proposicionais denotam conjuntos de pares ordenados. Assim, LS com a Semântica Quadrada (LS2) é um formalismo modal relacional. Em [Mar95, MPM96, MV97, Ven91] foi investigada a relação estreita existente entre LS2 e os formalismos relacionais da Álgebra Relacional (AR) [Jón82, TG87]. Dois resultados importantes sobre o poder de expressão e prova de LS2 mostram que LS2 é uma alternativa modal a AR interessante. A saber: 1) LS2 é equipolente em meios de expressão ao "fragmento de LPO com três variáveis", 2) uma axiomática para LS2 pode ser definida estendendo-se a axiomática de LS por meio de uma regra não-ortodoxa. A esse sistema chamamos Lógica de Setas com Diferença (LSD) [Ven91]. A regra introduzida por Y. Venema para axiomatizar LS2 é uma versão da regra da irreflexividade [Gab81] para o operador diferença [dRij93]. Assim, LS2 e LSD são o mesmo sistema lógico: possuem a mesma linguagem e a mesma relação de conseqüência, definida semanticamente em LS2 e por meio de um aparato dedutivo em LSD.

Como LS2 possui um poder expressivo limitado e a extensão LSD não é muito adequada para a prova de teoremas (em virtude da presença de uma regra não-ortodoxa, o que distancia o sistema do formalismo algébrico), aparecem dois problemas relacionados a LS2: estender LS2 a fim de obter equipolência com LPO de relações binárias em meios de expressão (pelo acréscimo de novos operadores) e em meios de prova (pelo acréscimo de regras adequadas).

Nesta seção, apresentamos LS [Ven96] explicitamente como uma lógica modal associada a AR. Nosso objetivo é ilustrar um processo de obtenção de lógicas modais a partir de álgebras booleanas com operadores, que será aplicado para a definição da Lógica de Setas com Bifurcação, no Capítulo 4.

Assim, tomando uma determinada classe de álgebras booleanas com operadores, a classe AR, queremos encontrar uma lógica modal correspondente, LS (Figura 1.1).

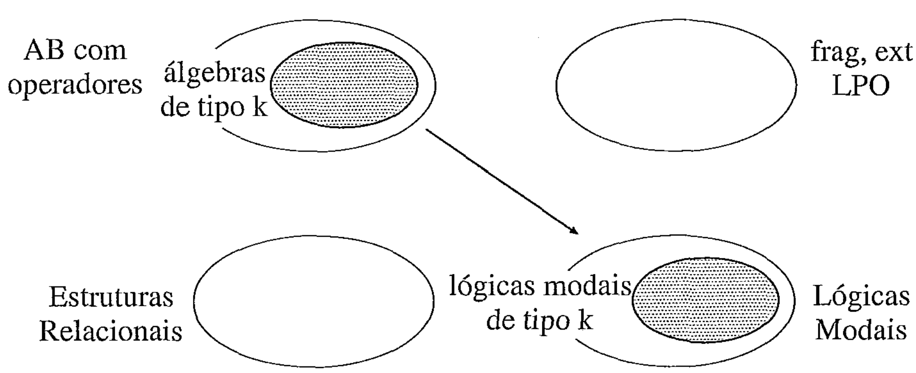
Figura 1.1:



1.2.1 Linguagem

Inicialmente, definimos o tipo da lógica modal a partir do tipo das álgebras da classe considerada (Figura 1.2).

Figura 1.2:



O tipo de uma álgebra é dado pela linguagem equacional associada àquela álgebra. Vamos definir a linguagem da lógica modal a partir da linguagem da álgebra, tomando os termos da álgebra como fórmulas modais.

Os termos da linguagem das álgebras relacionais são dados por:

$$\alpha := 0 \mid 1 \mid 1' \mid r \mid \alpha^{-} \mid \alpha^{\smile} \mid \alpha_1 + \alpha_2 \mid \alpha_1 \cdot \alpha_2 \mid \alpha_1 \ ; \ \alpha_2,$$

onde r é uma variável individual, tomada de um conjunto infinito de variáveis individuais, $0, 1, ^{-}, +$ e $\cdot$ são booleanos e $1', ^{\smile}$ e $;$ são operadores. Definimos, então:

Definição O *alfabeto* de LS consiste de:

i) um conjunto enumerável de letras proposicionais LP (que identificaremos ao conjunto de variáveis individuais da linguagem das álgebras relacionais),

ii) os conectivos booleanos 0 (falsum), 1 (verum), $^-$ (negação), $+$ (disjunção) e $\cdot$ (conjunção),

iii) os operadores modais $1'$ (identidade), $^\smile$ (reversão) e ; (composição).

O conjunto de *fórmulas* é definido indutivamente como segue:

i) 0, 1 e $1'$ são fórmulas, toda letra proposicional é uma fórmula,

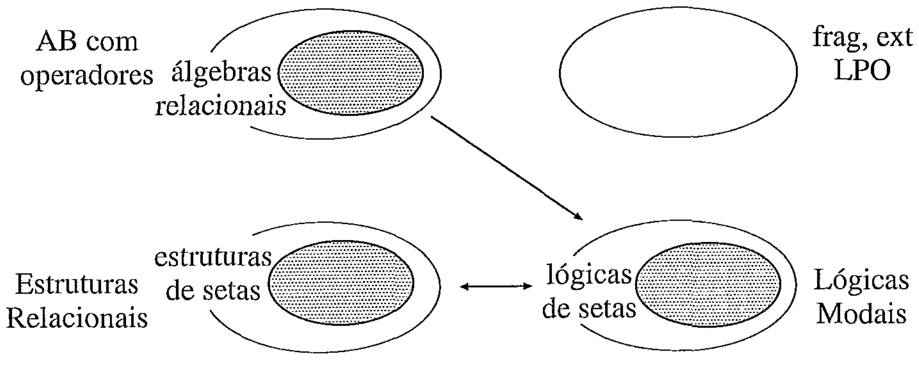
ii) se α e β forem fórmulas, α^-, $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$, $\alpha^\smile$ e $\alpha \,;\, \beta$ serão fórmulas.

Consideramos as abreviações booleanas usuais $\alpha \to \beta$ para $\alpha^- + \beta$ e $\alpha \leftrightarrow \beta$ para $(\alpha \to \beta) \cdot (\beta \to \alpha)$ e os duais dos operadores modais $\alpha^{+} = \alpha^\smile$ e $\alpha \dagger \beta = (\alpha^- \,;\, \beta^-)^-$ (a reversão é auto-dual).

1.2.2 Semântica

Utilizando a semântica de Kripke, estendida para linguagens poli-modais, determinamos uma classe de estruturas relacionais (que chamamos estruturas de setas), de tipo adequado para a interpretação de fórmulas de LS (Figura 1.3).

Figura 1.3:



Definição Uma *estrutura de setas* é uma quádrupla $\mathcal{E} = \langle S, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I} \rangle$ onde:

i) $S \neq \emptyset$, conjunto de *setas*,

ii) $\mathsf{C} \subseteq S^3$, relação de *composição*,

iii) $\mathsf{R} \subseteq S^2$, relação de *reversão*,
iv) $\mathsf{I} \subseteq S$, relação de *identidade*.

Definição Um *modelo de setas* é um par $\mathcal{M} = \langle \mathcal{E}, V \rangle$, onde $\mathcal{E} = \langle S, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I} \rangle$ é uma estrutura de setas e V é uma valoração que associa subconjuntos de S a letras proposicionais, $V : \mathsf{LP} \to 2^S$.

Um *modelo de setas enraizado* $\langle \mathcal{M}, A \rangle$ é um modelo de setas $\mathcal{M}$ com uma seta destacada A.

Nas condições da definição, dizemos que $\mathcal{M}$ é um modelo de setas *baseado* em $\mathcal{E}$ e que a estrutura de setas $\mathcal{E}$ é a *base* de $\mathcal{M}$. Escrevemos, também, $\mathcal{M} = \langle S, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I}, V \rangle$ e $\langle \mathcal{M}, A \rangle = \langle S, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I}, V, A \rangle$.

Definição $\mathcal{M} = \langle S, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I}, V \rangle$ um modelo de setas. O *significado* de uma fórmula α em um modelo de setas $\mathcal{M} = \langle S, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I}, V \rangle$, denotado por $\alpha^{\mathcal{M}}$, é definido recursivamente como segue:
i) $0^{\mathcal{M}} = \emptyset$
ii) $1^{\mathcal{M}} = S$
iii) $r^{\mathcal{M}} = V(r)$
iv) $1'^{\mathcal{M}} = \mathsf{I}$
v) $(\alpha^-)^{\mathcal{M}} = \overline{\alpha^{\mathcal{M}}}$
vi) $(\alpha^\smile)^{\mathcal{M}} = \{A \in S : \text{ existe } B \in S \text{ tal que } B \in \alpha^{\mathcal{M}} \text{ e } \mathsf{R}(A, B)\}$
vii) $(\alpha \cdot \beta)^{\mathcal{M}} = \alpha^{\mathcal{M}} \cap \beta^{\mathcal{M}}$
viii) $(\alpha + \beta)^{\mathcal{M}} = \alpha^{\mathcal{M}} \cup \beta^{\mathcal{M}}$
ix) $(\alpha ; \beta)^{\mathcal{M}} = \{A \in S : \text{ existem } B, C \in S \text{ tais que } B \in \alpha^{\mathcal{M}}, C \in \beta^{\mathcal{M}} \text{ e } \mathsf{C}(A, B, C)\}$

O *significado* de um conjunto de fórmulas Γ é a interseção dos significados de suas fórmulas: $\Gamma^{\mathcal{M}} = \cap\{\alpha^{\mathcal{M}} : \alpha \in \Gamma\}$.

Definição Uma fórmula α é *satisfeita* em um modelo de setas enraizado $\langle \mathcal{M}, A \rangle$, denotado por $\mathcal{M}, A \models \alpha$, quando $A \in \alpha^{\mathcal{M}}$.

Proposição 1.2.1 *Sejam α e β fórmulas e $\langle \mathcal{M}, A \rangle = \langle S, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I}, V, A \rangle$ um modelo de setas enraizado. Temos que:*

i) $\mathcal{M}, A \not\models 0$.
ii) $\mathcal{M}, A \models 1$.
iii) $\mathcal{M}, A \models r$ *se* $A \in V(r)$.
iv) $\mathcal{M}, A \models 1'$ *se* $\mathsf{I}(A)$.
v) $\mathcal{M}, A \models \alpha^-$ *se* $\mathcal{M}, A \not\models \alpha$.
vi) $\mathcal{M}, A \models \alpha^\smile$ *se existe uma seta* $B \in S$ *tal que* $\mathsf{R}(A, B)$ *e* $\mathcal{M}, B \models \alpha$.
vii) $\mathcal{M}, A \models \alpha \cdot \beta$ *se* $\mathcal{M}, A \models \alpha$ *e* $\mathcal{M}, A \models \beta$.
viii) $\mathcal{M}, A \models \alpha + \beta$ *se* $\mathcal{M}, A \models \alpha$ *ou* $\mathcal{M}, A \models \beta$.
ix) $\mathcal{M}, A \models \alpha \,;\, \beta$ *se existem setas* $B, C \in S$ *tais que* $\mathsf{C}(A, B, C)$, $\mathcal{M}, B \models \alpha$ *e* $\mathcal{M}, C \models \beta$.

Dizemos que um conjunto de fórmulas Γ é *satisfeito* em um modelo de setas enraizado $\langle \mathcal{M}, A \rangle$, denotado por $\mathcal{M}, A \models \Gamma$, se, para toda fórmula $\alpha \in \Gamma$, temos que $\mathcal{M}, A \models \alpha$, ou seja, $A \in \Gamma^{\mathcal{M}}$.

Definição Uma fórmula α é *conseqüência* de um conjunto de fórmulas Γ, denotado por $\Gamma \models_{\text{LS}} \alpha$, se, para todo modelo de setas enraizado $\langle \mathcal{M}, A \rangle$, temos que $\mathcal{M}, A \models \Gamma$ acarreta $\mathcal{M}, A \models \alpha$.

Dizemos que α é *válida*, denotado por $\models_{\text{LS}} \alpha$, quando $\emptyset \models_{\text{LS}} \alpha$.

Esta semântica define uma lógica normal.

Proposição 1.2.2 (Distributividade) *Sejam* α, β *e* γ *fórmulas. Temos que:*
i) $\models_{\text{LS}} (\alpha \rightarrow \beta)^{\dagger} \rightarrow (\alpha^{\dagger} \rightarrow \beta^{\dagger})$
ii) $\models_{\text{LS}} (\alpha \rightarrow \beta) \dagger \gamma \rightarrow (\alpha \dagger \gamma \rightarrow \beta \dagger \gamma)$
iii) $\models_{\text{LS}} \gamma \dagger (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\gamma \dagger \alpha \rightarrow \gamma \dagger \beta)$

Prova: Como ilustração, vamos provar apenas o item (ii). Suponhamos que uma fórmula $(\alpha \rightarrow \beta) \dagger \gamma \rightarrow (\alpha \dagger \gamma \rightarrow \beta \dagger \gamma)$ não seja válida. Considere $\langle \mathcal{M}, A \rangle = \langle S, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I}, V, A \rangle$ um modelo de setas enraizado tal que $\mathcal{M}, A \not\models (\alpha \rightarrow \beta) \dagger \gamma \rightarrow (\alpha \dagger \gamma \rightarrow \beta \dagger \gamma)$. Daí temos que $\mathcal{M}, A \models (\alpha \rightarrow \beta) \dagger \gamma$ (1), $\mathcal{M}, A \models \alpha \dagger \gamma$ (2) e $\mathcal{M}, A \not\models \beta \dagger \gamma$ (3). De (3) temos que existem $B, C \in S$ tais que $\mathsf{C}(A, B, C)$, $\mathcal{M}, B \not\models \beta$ e $\mathcal{M}, C \not\models \gamma$ (4). Daí e de (2) temos que $\mathcal{M}, B \models \alpha$ ou $\mathcal{M}, C \models \gamma$ (5).

E de (1) temos que $\mathcal{M}, B \models \alpha \to \beta$ ou $\mathcal{M}, C \models \gamma$ (6). De (4), (5) e (6) temos que $\mathcal{M}, B \models \alpha$ e $\mathcal{M}, B \models \alpha \to \beta$. Donde $\mathcal{M}, B \models \beta$, uma contradição. ∎

Proposição 1.2.3 (Necessitação) *Sejam α e β fórmulas. Temos que:*
i) Se $\models_{\mathrm{LS}} \alpha$, então $\models_{\mathrm{LS}} \alpha^{+}$.
ii) Se $\models_{\mathrm{LS}} \alpha$, então $\models_{\mathrm{LS}} \alpha \dagger \beta$.
iii) Se $\models_{\mathrm{LS}} \alpha$, então $\models_{\mathrm{LS}} \beta \dagger \alpha$.

Prova: Como ilustração, vamos provar apenas o item (ii). Suponhamos que $\models_{\mathrm{LS}} \alpha$. Seja $\langle \mathcal{M}, A \rangle = \langle S, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I}, V, A \rangle$ um modelo de setas enraizado. Seja $B, C \in S$ tais que $\mathsf{C}(A, B, C)$. Como $\models_{\mathrm{LS}} \alpha$, temos que $\mathcal{M}, B \models \alpha$. Daí, $\mathcal{M}, B \models \alpha$ ou $\mathcal{M}, C \models \beta$. Donde $\mathcal{M}, A \models \alpha \dagger \beta$. ∎

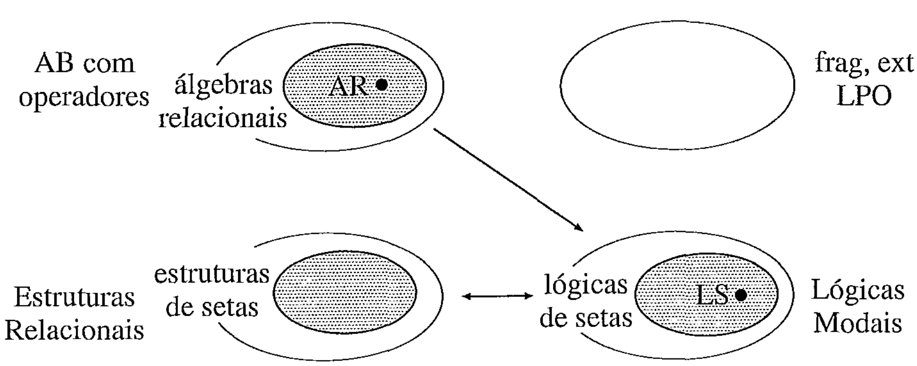
Temos, ainda, (a versão semântica d') o Teorema da Dedução.

Proposição 1.2.4 *Se $\Gamma \cup \{\alpha\} \models_{\mathrm{LS}} \beta$, então $\Gamma \models_{\mathrm{LS}} \alpha \to \beta$.*

1.2.3 Axiomática

Definido o tipo da lógica, podemos agora especificar o sistema lógico. Queremos definir uma lógica modal, do tipo lógica de setas (ou seja, com três operadores modais: um unário, um binário e um ternário), que corresponda à classe das álgebras relacionais (Figura 1.4).

Figura 1.4:



Como identificamos os termos de AR e as fórmulas de LS, vamos identificar identidades entre termos em AR e bi-implicações entre fórmulas em LS e tomar a axiomática para AR (cf. [CT51]) como uma axiomática para LS.

Axiomas

Taut) *Tautologias.*

Dist †) $(\alpha \rightarrow \beta)^{\dagger} \rightarrow (\alpha^{\dagger} \rightarrow \beta^{\dagger})$

Dist $\dagger$ 1) $(\alpha \rightarrow \beta) \dagger \gamma \rightarrow (\alpha \dagger \gamma \rightarrow \beta \dagger \gamma)$

Dist $\dagger$ 2) $\gamma \dagger (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\gamma \dagger \alpha \rightarrow \gamma \dagger \beta)$

Dual †) $\alpha^{\smile} \leftrightarrow \alpha^{-\dagger-}$

Dual $\dagger$) $\alpha \,;\, \beta \leftrightarrow (\alpha^{-} \dagger \beta^{-})^{-}$

LS1) $(\alpha + \beta) \,;\, \gamma \leftrightarrow (\alpha \,;\, \gamma) + (\beta \,;\, \gamma)$

LS2) $(\alpha + \beta)^{\smile} \leftrightarrow \alpha^{\smile} + \beta^{\smile}$

LS3) $(\alpha \,;\, \beta) \,;\, \gamma \leftrightarrow \alpha \,;\, (\beta \,;\, \gamma)$

LS4) $\alpha \,;\, \iota\delta \leftrightarrow \alpha$

LS5) $\alpha^{\smile\smile} \leftrightarrow \alpha$

LS6) $(\alpha \,;\, \beta)^{\smile} \leftrightarrow \beta^{\smile} \,;\, \alpha^{\smile}$

LS7) $\alpha^{\smile} \,;\, (\alpha \,;\, \beta)^{-} + \beta^{-} \leftrightarrow \beta^{-}$

Para as regras de inferência, tomamos as regras usuais para uma lógica modal normal, as chamadas *regras ortodoxas.*

Regras de Inferência

MP) Modus Ponens:

$$\frac{\alpha \quad \alpha \rightarrow \beta}{\beta}$$

Nec) Necessitação:

$$\frac{\alpha}{\alpha^{\dagger}}, \quad \frac{\alpha}{\alpha \dagger \beta}, \quad \frac{\alpha}{\beta \dagger \alpha}$$

Os axiomas LS foram importados diretamente da álgebra relacional. Os outros axiomas, juntamente com as regras de inferência, constituem uma axiomática para uma lógica modal estendida normal.

Note que, nessa apresentação, não há a preocupação com a independência da axiomática. Por exemplo, os axiomas LS1 e LS2, que garantem (na álgebra) que a composição e a reversão são *operadores*, são facilmente derivados a partir de uma axiomática normal (na lógica modal).

Definição Seja α uma fórmula. Dizemos que α é *teorema*, denotado por $\vdash_{\text{LS}} \alpha$, se existe uma seqüência de fórmulas $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$, chamada *prova* de α, tal que α_n é α e, para cada $i = 1, \ldots, n$, α_i é um axioma ou é conseqüência de anteriores por MP, Nec.

Definição Seja Γ um conjunto de fórmulas e α uma fórmula. Dizemos que α é *dedutível* de Γ, denotado por $\Gamma \vdash_{\text{LS}} \alpha$, se existe uma seqüência de fórmulas $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$, chamada *dedução* de α a partir de Γ, tal que α_n é α e, para cada $i = 1, \ldots, n$, temos que $\alpha_i \in \Gamma$, α_i é um teorema ou é conseqüência de anteriores por MP.

Com uma axiomática normal, temos o Lema da Troca de Equivalentes. O resultado de trocar um número qualquer de ocorrências da fórmula β pela fórmula α na fórmula γ é denotado por $[\alpha/\beta]\gamma$.

Proposição 1.2.5 *Se* $\vdash_{\text{LS}} \alpha \leftrightarrow \beta$ *e* $\vdash_{\text{LS}} \gamma$, *então* $\vdash_{\text{LS}} [\alpha/\beta]\gamma$.

Uma outra propriedade importante da relação de dedutibilidade definida é dada pelo Teorema da Dedução.

Proposição 1.2.6 *Se* $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\text{LS}} \beta$, *então* $\Gamma \vdash_{\text{LS}} \alpha \rightarrow \beta$.

1.2.4 Completude

Vamos apresentar uma prova da completude de LS, que utiliza a técnica de construção de modelo canônico, usual na lógica modal, estendida para o caso multimodal.

Definição O *modelo canônico* de LS é $\mathcal{M}^C = \langle S^C, \mathsf{C}^C, \mathsf{R}^C, \mathsf{I}^C, V^C \rangle$, onde:
i) $S^C = \{\Sigma : \Sigma$ é um conjunto consistente maximal em LS$\}$.
ii) $\mathsf{C}^C(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ se, e somente se, para quaisquer fórmulas α e β, se $\alpha \in \Sigma_2$ e $\beta \in \Sigma_3$, então $\alpha; \beta \in \Sigma_1$.

iii) $\mathsf{R}^C(\Sigma_1, \Sigma_2)$ se, e somente se, para qualquer fórmulas α, se $\alpha \in \Sigma_2$, então $\alpha^\smile \in \Sigma_1$.
iv) $\mathsf{I}^C(\Sigma)$ se, e somente se, $1' \in \Sigma$.
v) $V^C(r) = \{\Sigma : r \in \Sigma\}$.

No modelo de setas canônico, reduzimos propriedades importantes do modelo a relações de pertinência aos conjuntos consistentes maximais (CCMs).

A fim de provar este resultado, precisamos garantir que qualquer conjunto consistente pode ser estendido a um CCM, o que é dado pelo Lema de Lindenbaum.

Lema 1.2.1 (Lema de Lindenbaum) *Todo conjunto consistente pode ser estendido a um CCM.*

Prova: Seja $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ uma enumeração das fórmulas de LS. Seja $\Theta_0 = \Gamma$ e Θ_{m+1} definido como segue:
a) $\Theta_{m+1} = \Theta_m \cup \{\alpha_m\}$, se $\Theta_m \cup \{\alpha_m\}$ for consistente.
b) $\Theta_{m+1} = \Theta_m$, caso contrário.
Seja $\Theta = \bigcup_{n \geq 0} \Theta_n$.
Como cada Θ_n é consistente, temos que Θ é CCM e $\Gamma \subseteq \Theta$. ∎

Lema 1.2.2 *Seja Σ um CCM.*
1. Se $\alpha^\smile \in \Sigma$, então existe um CCM Σ' tal que $\alpha \in \Sigma'$ e $\mathsf{R}^C(\Sigma, \Sigma')$.
2. Se $\alpha;\beta \in \Sigma$, então existem CCMs Σ' e Σ'' tais que $\alpha \in \Sigma'$, $\beta \in \Sigma''$ e $\mathsf{C}^C(\Sigma, \Sigma', \Sigma'')$.

Prova:

1. Suponhamos que $\alpha^\smile \in \Sigma$. Seja $\Gamma' = \{\phi : \phi^+ \in \Sigma\} \cup \{\alpha\}$. Temos que Γ' é consistente. De fato, se existissem $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \Gamma' - \{\alpha\}$ de modo que $\vdash_{LS} \alpha \rightarrow (\phi_1 \cdot \cdots \cdot \phi_n)^-$, como LS é normal, teríamos que $\vdash_{LS} \alpha^\smile \rightarrow (\phi_1{}^+ \cdot \cdots \cdot \phi_n{}^+)^-$, uma contradição, já que $\phi_1{}^+, \ldots, \phi_n{}^+ \in \Sigma$. Seja Σ' um CCM tal que $\Gamma' \subseteq \Sigma'$. Temos que $\alpha \in \Sigma'$ e $\mathsf{R}^C(\Sigma, \Sigma')$. De fato, se $\phi^\smile \notin \Sigma$, então $(\phi^\smile)^- \in \Sigma$ e, como LS é normal, $(\phi^-)^+ \in \Sigma$. Daí, $\phi^- \in \Gamma'$ e, portanto, $\phi^- \in \Sigma'$. Donde $\phi \notin \Sigma'$.

2. Suponhamos que $\alpha;\beta \in \Sigma$. Considere uma enumeração $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_i, \ldots$ das fórmulas de LS e os conjuntos a seguir, definidos por indução dupla:
$\Gamma_0 = \{\alpha\}$ e $\Delta_0 = \{\beta\}$

$\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\phi_i\}$ e $\Delta_{i+1} = \Delta_i \cup \{\phi_i\}$, se $(\&\Gamma_i \cdot \phi_i); (\&\Delta_i \cdot \phi_i) \in \Sigma$
$\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\phi_i\}$ e $\Delta_{i+1} = \Delta_i \cup \{\phi_i^-\}$, se $(\&\Gamma_i \cdot \phi_i); (\&\Delta_i \cdot \phi_i^-) \in \Sigma$
$\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\phi_i^-\}$ e $\Delta_{i+1} = \Delta_i \cup \{\phi_i\}$, se $(\&\Gamma_i \cdot \phi_i^-); (\&\Delta_i \cdot \phi_i) \in \Sigma$
$\Gamma_{i+1} = \Gamma_i \cup \{\phi_i^-\}$ e $\Delta_{i+1} = \Delta_i \cup \{\phi_i^-\}$, se $(\&\Gamma_i \cdot \phi_i^-); (\&\Delta_i \cdot \phi_i^-) \in \Sigma$

Temos que cada Γ_i e cada Δ_i é consistente. De fato:

a) Γ_0 e Δ_0 são consistentes, pois, caso contrário, teríamos:

$$
\begin{array}{llll}
\Gamma_0 \vdash_{LS} \perp & \Longrightarrow & \alpha \vdash_{LS} \perp & (\text{def } \Gamma_0) \\
 & \Longrightarrow & \vdash_{LS} \alpha^- & (\mathsf{Taut,MP}) \\
 & \Longrightarrow & \vdash_{LS} \alpha^- \dagger \beta^- & (\mathsf{Nec}) \\
 & \Longrightarrow & \vdash_{LS} (\alpha \ ; \beta)^- & (\mathsf{Dual})
\end{array}
$$

uma contradição, pois $\alpha \ ; \beta \in \Sigma$. Analogamente para Δ_0.

b) Γ_{i+1} e Δ_{i+1} são consistentes, pois, caso contrário, teríamos:

$$
\begin{array}{llll}
\Gamma_{i+1} \vdash_{LS} \perp & \Longrightarrow & \Gamma_i, \phi_i^* \vdash_{LS} \perp & (\text{def } \Gamma_{i+1}) \\
 & \Longrightarrow & \vdash_{LS} (\&\Gamma_i \cdot \phi_i^*)^- & (\mathsf{Taut,MP}) \\
 & \Longrightarrow & \vdash_{LS} (\&\Gamma_i \cdot \phi_i^*)^- \dagger (\&\Delta_i \cdot \phi_i^*)^- & (\mathsf{Nec}) \\
 & \Longrightarrow & \vdash_{LS} ((\&\Gamma_i \cdot \phi_i^*) \ ; (\&\Delta_i \cdot \phi_i^*))^- & (\mathsf{Dual})
\end{array}
$$

uma contradição, pois $(\&\Gamma_i \cdot \phi_i^*) \ ; (\&\Delta_i \cdot \phi_i^*) \in \Sigma$. Analogamente para Δ_{i+1}.

Seja $\Sigma_1 = \bigcup \Gamma_i$ e $\Sigma_2 \bigcup \Delta_i$. Como Σ_1 e Σ_2 são uniões de cadeias de conjuntos consistentes, são, eles próprios, consistentes. Além disso, por construção, são conjuntos fechados para a negação. Assim, Σ_1 e Σ_2 são CCMs. Resta mostrar que $\mathsf{C}^C(\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2)$: dados $\phi \in \Sigma_1$ e $\psi \in \Sigma_2$, temos que existem $i, j \in \mathbb{N}$ tais que $(\&\Gamma_i \cdot \phi) \ ; (\&\Delta_i \cdot \phi^*) \in \Sigma$ e $(\&\Gamma_j \cdot \psi^*) \ ; (\&\Delta_j \cdot \psi) \in \Sigma$. Logo, tomando $k = \max\{i, j\}$, temos que $(\&\Gamma_k \cdot \phi \cdot \psi^*) \ ; (\&\Delta_k \cdot \phi^* \cdot \psi) \in \Sigma$. Portanto, $\phi \ ; \psi \in \Sigma$. ∎

A estrutura canônica é uma estrutura de setas. Para verificar esse fato, vamos utilizar o Teorema (da Completude) de Sahlqvist [MV97].

Teorema 1.2.1 (Sahlqvist) *A extensão de uma lógica canônica por um conjunto de fórmulas de Sahlqvist é uma lógica canônica.*

Assim, como os axiomas de LS são fórmulas de Sahlqvist [BRV01], temos que LS é uma lógica canônica, i.e., a estrutura canônica do tipo setas possui as propriedades definidas pelos correspondentes de primeira ordem dos axiomas de LS.

Lema 1.2.3 *A estrutura canônica de* LS *é uma estrutura de setas. Ou seja, temos as seguintes propriedades:*

1. R^C *é* serial *e* funcional*: qualquer que seja o CCM* Σ*, existe um CCM* Σ' *tal que* $\mathsf{R}^C(\Sigma, \Sigma')$*, e quaisquer que sejam* Σ_1*,* Σ_2*,* Σ_3 *CCMs, se* $\mathsf{R}^C(\Sigma_1, \Sigma_2)$ *e* $\mathsf{R}^C(\Sigma_1, \Sigma_3)$*, então* $\Sigma_2 = \Sigma_3$*.*

2. R^C *é* idempotente*: quaisquer que sejam* Σ_1*,* Σ_2*,* Σ_3 *CCMs, se* $\mathsf{R}^C(\Sigma_1, \Sigma_2)$ *e* $\mathsf{R}^C(\Sigma_2, \Sigma_3)$*, então* $\Sigma_1 = \Sigma_3$*.*

3. Quaisquer que sejam Σ_1*,* Σ_2*,* Σ_3*,* Σ_4*,* Σ_5*,* Σ_6 *CCMs, se* $\mathsf{R}^C(\Sigma_1, \Sigma_2)$*,* $\mathsf{R}^C(\Sigma_3, \Sigma_4)$*,* $\mathsf{R}^C(\Sigma_5, \Sigma_6)$ *e* $\mathsf{C}^C(\Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_5)$*, então* $\mathsf{C}^C(\Sigma_1, \Sigma_4, \Sigma_6)$*.*

4. Quaisquer que sejam Σ_1*,* Σ_2*,* Σ_3*,* Σ_4 *CCMs, se* $\mathsf{R}^C(\Sigma_1, \Sigma_2)$*, e* $\mathsf{C}^C(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$*, então* $\mathsf{C}^C(\Sigma_3, \Sigma_4, \Sigma_1)$*.*

5. Quaisquer que sejam Σ_1*,* Σ_2 *CCMs, se* $\mathsf{R}^C(\Sigma_1, \Sigma_2)$*, e* $\mathsf{I}^C(\Sigma_1)$*, então* $\mathsf{I}^C(\Sigma_2)$*.*

6. Quaisquer que sejam Σ_1*,* Σ_2*,* Σ_3 *CCMs, se* $\mathsf{C}^C(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3)$ *e* $\mathsf{I}^C(\Sigma_2)$*, então* $\Sigma_3 = \Sigma_1$*, e qualquer que seja o CCM* Σ*, existe um CCM* Σ' *tal que* $\mathsf{I}^C(\Sigma')$ *e* $\mathsf{C}^C(\Sigma, \Sigma', \Sigma)$*.*

7. Quaisquer que sejam Σ_1*,* Σ_2*,* Σ_3*,* Σ_4 *CCMs, existe* Σ_5 *tal que* $\mathsf{C}^C(\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_5)$ *e* $\mathsf{C}^C(\Sigma_1, \Sigma_3, \Sigma_4)$ *se, e somente se, existe* Σ_6 *tal que* $\mathsf{C}^C(\Sigma_1, \Sigma_6, \Sigma_4)$ *e* $\mathsf{C}^C(\Sigma_6, \Sigma_2, \Sigma_3)$*.*

Prova: Os axiomas LS1–LS7 são fórmulas de Sahlqvist e as propriedades 1–7 acima são os correspondentes de primeira ordem de LS1–LS7. Logo, pelo Teorema de Sahlqvist Generalizado 1.2.1, temos que a estrutura canônica de LS possui as propriedades 1–7. ∎

Lema 1.2.4 (Lema da Satisfatibilidade) *Se* Σ *for um CCM, então, para cada fórmula* α*, teremos que:*

$$\mathcal{M}^C, \Sigma \models \alpha \textit{ se, e somente se, } \alpha \in \Sigma.$$

Prova: Por indução na estrutura de α. Os casos booleanos são triviais. Os casos peirceanos seguem do Lema 1.2.2. ∎

Podemos agora usar o Lema da Satisfatibilidade para provar o Lema da Existência de Modelos, usando o fato de que todo conjunto consistente pode ser estendido a um CCM, garantido pelo Lema de Lindenbaum (Lema 1.2.1).

Lema 1.2.5 (Existência de Modelos) *Todo conjunto consistente é satisfeito em um modelo de setas enraizado.*

Prova: Conseqüência direta do Lema da Satisfabilidade 1.2.4 e do Lema de Lindenbaum 1.2.1. ∎

Finalmente, como um corolário do Lema da Existência de Modelos, temos o Teorema da Completude.

Teorema 1.2.2 (Completude) *Se* $\Gamma \models_{\mathrm{LS}} \alpha$*, então* $\Gamma \vdash_{\mathrm{LS}} \alpha$.

1.2.5 Semântica bidimensional

A semântica bidimensional para a lógica de setas apresenta a interpretação concreta pretendida para os operadores peirceanos. As setas são pares ordenados (a, b) e as relações $\mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I}$ em uma estrutura de setas são a relação de composição, a relação de reversão e a relação identidade usuais de pares ordenados. Em outras palavras, uma estrutura de setas *bidimensional* é uma estrutura de setas $\mathcal{E} = \langle S, Comp, Rev, Id\rangle$ com $S \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$, para um dado conjunto não vazio $\mathcal{U}$; $Comp(a_1, b_1)(a_2, b_2)(a_3, b_3)$ se, e somente se, $a_1 = a_2$, $b_1 = b_3$ e $b_2 = a_3$; $Rev(a_1, b_1)(a_2, b_2)$ se, e somente se, $a_1 = b_2$ e $b_1 = a_2$; e $Id(a, b)$ se, e somente se, $a = b$.

Assim, podemos reescrever as condições de satisfabilidade de fórmulas de setas em modelos bidimensionais enraizados como segue:

i) $\mathcal{M}, (a, b) \models 1'$ se $a = b$.

ii) $\mathcal{M}, (a, b) \models \alpha^{\smile}$ se $\mathcal{M}, (b, a) \models \alpha$.

iii) $\mathcal{M}, (a, b) \models \alpha \mathbin{;} \beta$ se existe $c \in \mathcal{U}$ tal que $\mathcal{M}, (a, c) \models \alpha$ e $\mathcal{M}, (c, b) \models \beta$.

Um *quadrado* é uma estrutura de setas bidimensional onde $S = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$. Note que um quadrado $\mathcal{Q} = \langle \mathcal{U} \times \mathcal{U}, Comp, Rev, Id\rangle$ é completamente determinado por seu domínio $\mathcal{U}$. Assim, vamos nos referir a um quadrado simplesmente por $\mathcal{Q} = \langle \mathcal{U}\rangle$. A classe dos quadrados é denotada QD.

Na semântica quadrada, a definição do significado das fórmulas em um modelo (quadrado) $\mathcal{M} = \langle \mathcal{U}, V \rangle$ pode ser simplificada, como segue:

i) $0^{\mathcal{M}} = \emptyset$

ii) $1^{\mathcal{M}} = \mathcal{U} \times \mathcal{U}$

iii) $p^{\mathcal{M}} = V(p)$

iv) $(\alpha^{-})^{\mathcal{M}} = \overline{\alpha^{\mathcal{M}}}$

v) $(\alpha \cdot \beta)^{\mathcal{M}} = \alpha^{\mathcal{M}} \cap \beta^{\mathcal{M}}$

vi) $(1')^{\mathcal{M}} = Id_{\mathcal{U}}$

vii) $(\alpha^{\smile})^{\mathcal{M}} = (\alpha^{\mathcal{M}})^{-1}$

viii) $(\alpha \,;\, \beta)^{\mathcal{M}} = \alpha^{\mathcal{M}} \mid \beta^{\mathcal{M}}$

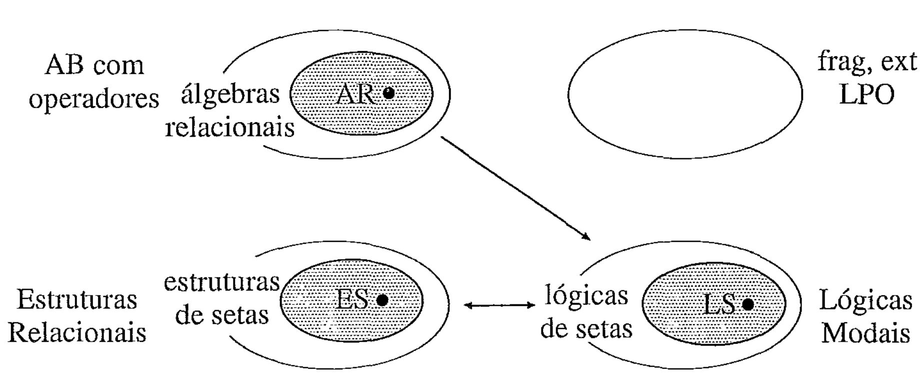
A relação de conseqüência de LS, quando restrita à semântica quadrada, será denotada $\models_{\text{QD}}$.

1.2.6 Quadrado

Nesta seção mostramos que não é possível axiomatizar a teoria das estruturas quadradas na linguagem de LS, se nos restringirmos a axiomáticas ortodoxas. Estamos, pois, discutindo a possibilidade de uma apresentação do sistema lógico LS2 = $\langle \mathcal{L}_{\text{LS}}, \models_{\text{QD}} \rangle$, através de um aparato dedutivo.

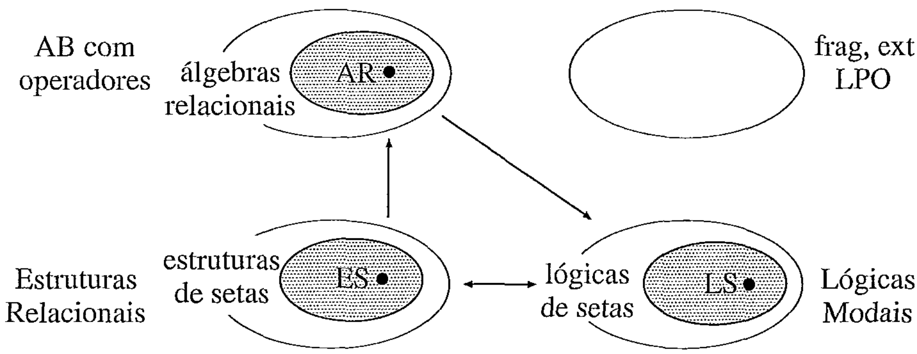
Dada a axiomática para LS, temos especificada uma classe de estruturas de setas, que chamamos ES, constituída por todas as estruturas de setas $\mathcal{E}$ tais que $\mathcal{E} \models \alpha$, para qualquer axioma α (Figura 1.5).

Figura 1.5:



Agora podemos voltar ao domínio das álgebras relacionais, retornando ao ponto de partida (Figura 1.6).

Figura 1.6:



Podemos obter álgebras relacionais a partir de estruturas de setas em ES, calculando as álgebras de complexos destas estruturas.

Definição Seja $\mathcal{E} = \langle S, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I}\rangle$ uma estrutura de setas. A *álgebra dos complexos* de $\mathcal{E}$, denotada por $Cm\mathcal{E}$, é definida por $Cm\mathcal{E} = \langle 2^S, \cup, \cap, f_{\mathsf{C}}, -, f_{\mathsf{R}}, \emptyset, S, f_{\mathsf{I}}\rangle$, onde $f_{\mathsf{C}}(X,Y) = \{A \in S :$ existem $x \in X$ e $y \in Y$ tais que $\mathsf{C}(A,x,y)\}$, $f_{\mathsf{R}}(X) = \{A \in S :$ existe $x \in X$ tal que $\mathsf{R}(A,x)\}$ e $f_{\mathsf{I}} = \{A \in S : \mathsf{I}(A)\} = \mathsf{I}$.

Note que a álgebra de complexos de uma estrutura relacional $\mathcal{E} = \langle S, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I}\rangle$ é uma álgebra de tipo relacional. Observe ainda que uma valoração $V : \mathsf{LP} \to 2^S$ associando conjuntos de setas a letras proposicionais pode ser vista como uma associação de valores às variáveis individuais na álgebra de complexos $Cm\mathcal{E} = \langle 2^S, \cup, \cap, f_{\mathsf{C}}, -, f_{\mathsf{R}}, \emptyset, S, f_{\mathsf{I}}\rangle$. Lembre que identificamos variáveis individuais e letras proposicionais.

Assim, temos que os complexos de estruturas de setas são álgebras relacionais. A prova deste resultado está baseada nos seguintes lemas:

Lema 1.2.6 *Para qualquer α e qualquer modelo de setas enraizado $\langle \mathcal{M}, A\rangle$ baseado em uma estrutura de setas $\mathcal{E} \in$ ES, temos que $\mathcal{M}, A \models \alpha$ se, e somente se, $A \in V(\alpha)$.*

Prova: (Indução em α). Como ilustração, vamos fazer apenas o caso $\alpha = \beta;\gamma$. Pela definição de verdade em um modelo enraizado, temos que $\mathcal{M}, A \models \beta;\gamma$ se, e somente se, existem $B, C \in S$ tais que $\mathsf{C}(A, B, C)$, $\mathcal{M}, B \models \beta$ e $\mathcal{M}, C \models \gamma$. Pela hipótese de indução, temos que $\mathcal{M}, A \models \beta;\gamma$ se, e somente se, existem $B, C \in S$ tais que $\mathsf{C}(A, B, C)$, $B \in V(\beta)$ e $C \in V(\gamma)$. Pela definição de álgebra de complexos, temos que $\mathcal{M}, A \models \beta;\gamma$ se, e somente se, $A \in f_{\mathsf{C}}(V(\beta), V(\gamma))$. Pela definição de assinalação de valores a termos em uma álgebra relacional, temos que $\mathcal{M}, A \models \beta;\gamma$ se, e somente se, $A \in V(\beta;\gamma)$. ∎

Lema 1.2.7 *Para qualquer α e β e qualquer estrutura de setas $\mathcal{E} \in$ ES, temos que $\mathcal{E} \models \alpha \leftrightarrow \beta$ se, e somente se, $Cm\mathcal{E} \models \alpha \approx \beta$.*

Prova: Conseqüência do Lema 1.2.6. ∎

Teorema 1.2.3 CmES $\subseteq$ AR.

Prova: Seja $Cm\mathcal{E} \in Cm$ES. Como $\mathcal{E} \in$ ES, temos que $\mathcal{E} \models \alpha \leftrightarrow \beta$, qualquer que seja o axioma $\alpha \leftrightarrow \beta$ de LS. Pelo Lema 1.2.7, temos que $Cm\mathcal{E} \models \alpha \approx \beta$, qualquer que seja o axioma $\alpha \approx \beta$ de AR. Ou seja, $Cm\mathcal{E} \in$ AR. Assim, CmES $\subseteq$ AR. ∎

A partir dos quadrados, calculando suas álgebras de complexos, obtemos álgebras relacionais plenas.

Proposição 1.2.7 CmQD $=$ ARP.

Prova: Conseqüência direta das definições de quadrado, álgebra de complexos e álgebra relacional plena. ∎

A classe ARP das álgebras relacionais plenas e a classe ARR das álgebras relacionais representáveis são indistinguíveis por identidades, isto é, ARP $\models \alpha \approx \beta$ se, e somente se, ARR $\models \alpha \approx \beta$. Além disso, ARR não é finitamente axiomatizável por identidades. Portanto, pelo Lema 1.2.7, temos que QD também não é axiomatizável, na lógica de setas. Assim, em paralelo com o problema da extensão de AR para obter uma axiomatização por identidades de ARR, temos o problema da extensão de LS para obter uma axiomatização de QD.

Y. Venema [Ven91] resolveu este problema estendendo a axiomática de LS pelo acréscimo de uma regra de inferência não-ortodoxa. Apresentamos este sistema, a

Lógica de Setas com Diferença (LSD), no Capítulo 2. No entanto, a regra que estende LS para a obtenção de LSD não é fácil de usar, para provar teoremas no sistema. Uma evidência dessa dificuldade é o fato de Venema [Ven91] não utilizar a regra para provar teoremas, mas recorrer à completude/corretude do sistema e apresentar apenas demonstrações semânticas. Além disso, LSD é um sistema não-ortodoxo: não tem uma relação tão direta com um sistema algébrico quanto a relação entre LS e AR. Axiomas e regras de uma lógica modal normal correspondem ao aparato dedutivo de uma álgebra booleana com operadores, i.e., *troca de iguais por iguais* (lógica equacional [Hen77]). Regras não-ortodoxas aumentam o poder dedutivo da lógica modal e não têm um correspondente algébrico (na lógica equacional). No Capítulo 3, apresentamos uma alternativa a LSD para a axiomatização de QD: uma extensão de LS pelo processo de hibridização, que chamamos Lógica de Setas Híbrida Bidimensional (LSH2). Esta extensão também é não-ortodoxa, mas suas regras são mais fáceis de manipular (cf. as várias provas de teoremas no capítulo). No Capítulo 4, apresentamos outra extensão de LS na qual podemos axiomatizar QD: a Lógica de Setas com Bifurcação (LSB). Para obter LSB, estendemos LS acrescentando um novo operador e novos axiomas para esse operador. Não acrescentamos regras de inferência. Temos, portanto, um sistema ortodoxo com uma relação estreita com um sistema algébrico. Aliás, LSB é obtida da Álgebra com Operador de Bifurcação (AOB) da mesma forma como LS é obtida de AR.

Na apresentação de LS vista neste capítulo, utilizamos uma notação para os operadores booleanos e peirceanos usual no contexto algébrico, para enfatizar o fato de estarmos derivando a lógica modal da álgebra correspondente. Uma notação mais usual em lógica modal e que será utilizada nos próximos capítulos é seguinte:

falsum) $\bot := 0$	*verum*) $\top := 1$
negação) $\neg\alpha := \alpha^-$	*conjunção*) $\alpha \wedge \beta := \alpha \cdot \beta$
disjunção) $\alpha \vee \beta := \alpha + \beta$	*implicação*) $\alpha \to \beta := \alpha \leq \beta$
biimplicação) $\alpha \leftrightarrow \beta := \alpha \approx \beta$	*identidade*) $\iota\delta := 1'$
reversão) $\otimes\alpha := \alpha^{\smile}$	*dual da reversão*) $\underline{\otimes}\alpha := \alpha^{\dagger}$
composisão) $\alpha \circ \beta := \alpha \; ; \beta$	*dual da composisão*) $\alpha \,\underline{\circ}\, \beta := \alpha \dagger \beta$

Capítulo 2

Lógica de Setas com Operador Diferença

Neste capítulo apresentamos a Lógica de Setas com Diferença (LSD), uma extensão de LS proposta por Y. Venema [Ven91]. Este sistema axiomatiza o quadrado.

Na Seção 2.1, apresentamos a linguagem, a semântica e a axiomática (definida em [Ven91]) de LSD. Na Seção 2.2, provamos a corretude e a completude da axiomática com relação à semântica quadrada. A completude é provada via modelo canônico. Na Seção 2.3, discutimos o poder de expressão de LSD.

Nossas principais contribuições neste capítulo são uma definição explícita de LSD, a discussão do poder de expressão de LSD na semântica quadrada e a prova de completude do sistema via modelo canônico.

2.1 Axiomática

Lógica de Setas com Diferença (LSD) é uma extensão por definição de LS, restrita à semântica quadrada. Assim, a linguagem de LSD é a linguagem de LS e a semântica de LSD é dada pelas seguintes definições:

Definição Dados um conjunto de fórmulas $\Gamma \cup \{\alpha\}$ de LSD, dizemos que *α é conseqüência de Γ em* LSD, denotado por $\Gamma \models_{\text{LSD}} \alpha$, quando, para qualquer modelo quadrado enraizado $\langle \mathcal{M}, (a, b)\rangle$, se $\mathcal{M}, (a, b) \models \Gamma$, então $\mathcal{M}, (a, b) \models \alpha$.

A restrição de LS à semântica quadrada é chamada LSD porque a axiomatização do quadrado em LS [Ven91] utiliza uma regra que envolve o operador D, definível em LS e que, na semântica quadrada, coincide com o operador *diferença*.

Definição O operador D é um operador unário definido por:

$$D\alpha := (\neg\iota\delta \circ \alpha \circ \top) \vee (\top \circ \alpha \circ \neg\iota\delta).$$

Na semântica quadrada, o operador D coincide com o operador diferença [Ven91].

Proposição 2.1.1 (Venema, 1991) *Seja* $\mathcal{M} = \langle \mathcal{U}, V \rangle$ *um modelo quadrado e* $a, b \in \mathcal{U}$. *Temos que:*

$$(a,b) \in (D\alpha)^{\mathcal{M}}$$

se, e somente se,

existe $(c,d) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ *tal que* $(a,b) \neq (c,d)$ *e* $(c,d) \in \alpha^{\mathcal{M}}$.

Prova:

$$\begin{array}{rcll}
(a,b) \in (D\alpha)^{\mathcal{M}} & \Longleftrightarrow & (a,b) \in ((\neg\iota\delta \circ \alpha \circ \top) \vee (\top \circ \alpha \circ \neg\iota\delta))^{\mathcal{M}} & (\text{def } D) \\
& \Longleftrightarrow & (a,b) \in (\neg\iota\delta \circ \alpha \circ \top)^{\mathcal{M}} \text{ ou } (a,b) \in (\top \circ \alpha \circ \neg\iota\delta)^{\mathcal{M}} & (\text{def } \models) \\
& \Longleftrightarrow & \text{existem } c,d,e,f \in \mathcal{U} \text{ tais que} & (\text{def } \models) \\
& & (a,c) \in (\neg\iota\delta)^{\mathcal{M}} \text{ e } (c,d) \in \alpha^{\mathcal{M}}, & \\
& & \text{ou } (e,f) \in \alpha^{\mathcal{M}} \text{ e } (f,b) \in (\neg\iota\delta)^{\mathcal{M}} & \\
& \Longleftrightarrow & \text{existem } c,d,e,f \in \mathcal{U} \text{ tais que} & (\text{def } \models) \\
& & (a,c) \notin \iota\delta^{\mathcal{M}} \text{ e } (c,d) \in \alpha^{\mathcal{M}}, & \\
& & \text{ou } (e,f) \in \alpha^{\mathcal{M}} \text{ e } (f,b) \notin \iota\delta^{\mathcal{M}} & \\
& \Longleftrightarrow & \text{existem } c,d,e,f \in \mathcal{U} \text{ tais que} & \\
& & c \neq a \text{ e } (c,d) \in \alpha^{\mathcal{M}}, \text{ ou } f \neq b \text{ e } (e,f) \in \alpha^{\mathcal{M}} & \\
& \Longleftrightarrow & \text{existem } c,d \in \mathcal{U} \text{ tais que } (a,b) \neq (c,d) \text{ e } \mathcal{M},(c,d) \models \alpha \quad \blacksquare &
\end{array}$$

Em LS podemos definir os operadores *existe* (E) e *apenas* (A), usando o operador diferença.

Definição Os operadores E e A são operadores unários definidos por:

$$E\alpha := \alpha \vee D\alpha \quad \text{e} \quad A\alpha := \alpha \wedge \neg D\alpha.$$

Proposição 2.1.2 *Seja $\mathcal{M} = \langle \mathcal{U}, V \rangle$ um modelo quadrado e $a, b \in \mathcal{U}$. Temos que:*
i) $(a,b) \in (E\alpha)^{\mathcal{M}}$ se, e somente se, $\alpha^{\mathcal{M}} \neq \emptyset$.
ii) $(a,b) \in (A\alpha)^{\mathcal{M}}$ se, e somente se, $\alpha^{\mathcal{M}} = \{(a,b)\}$.

Prova:

$$
\begin{array}{lll}
\text{i) } (a,b) \in (E\alpha)^{\mathcal{M}} & \Longleftrightarrow (a,b) \in (\alpha \vee D\alpha)^{\mathcal{M}} & (\text{def } E) \\
& \Longleftrightarrow (a,b) \in \alpha^{\mathcal{M}} \text{ ou existem } c,d \in \mathcal{U} \text{ tais} & (\text{Prop. 2.1.1}) \\
& \quad\ \text{que } (c,d) \neq (a,b) \text{ e } (c,d) \in \alpha^{\mathcal{M}} & \\
& \Longleftrightarrow \text{existem } c,d \in \mathcal{U} \text{ tais que } (c,d) \in \alpha^{\mathcal{M}} & (\text{def significado}) \\
& \Longleftrightarrow \alpha^{\mathcal{M}} \neq \emptyset & (\text{def } \alpha^{\mathcal{M}}) \\
\text{ii) } (a,b) \in (A\alpha)^{\mathcal{M}} & \Longleftrightarrow (a,b) \in (\alpha \wedge \neg D\alpha)^{\mathcal{M}} & (\text{def } A) \\
& \Longleftrightarrow (a,b) \in \alpha^{\mathcal{M}} \text{ e } (a,b) \notin (D\alpha)^{\mathcal{M}} & (\text{def significado}) \\
& \Longleftrightarrow (a,b) \in \alpha^{\mathcal{M}} \text{ e, para quaisquer } c,d \in \mathcal{U}, & (\text{Prop. 2.1.1}) \\
& \quad\ \text{se } (c,d) \neq (a,b) \text{, então } (c,d) \notin \alpha^{\mathcal{M}} & \\
& \Longleftrightarrow (a,b) \in \alpha^{\mathcal{M}} \text{ e, para quaisquer } c,d \in \mathcal{U}, & (\text{def signigicado}) \\
& \quad\ \text{se } (c,d) \neq (a,b) \text{, então } (c,d) \notin \alpha^{\mathcal{M}} & \\
& \Longleftrightarrow \alpha^{\mathcal{M}} = \{(a,b)\} \ \blacksquare &
\end{array}
$$

Apresentemos a axiomática de LSD e provemos a completude. Em [Ven91], a completude de LSD é provada utilizando uma extensão do teorema de Sahlqvist para uma classe de sistemas não-ortodoxos com regras especiais. Aqui vamos utilizar a técnica de construção de modelo canônico adaptada da lógica híbrida, que se baseia na presença de variáveis para setas (característica da lógica híbrida). Nossa prova de completude, então, fornece mais informação sobre o sistema.

Em virtude do grande poder de expressão de LSD, podemos utilizar letras proposicionais como variáveis para setas, pois é possível escrever uma fórmula em LSD que expressa o fato de uma letra proposicional ser satisfeita exatamente em uma seta na semântica quadrada. Nossa abordagem será uma variação desta, seguindo a intuição de [FV02].

Proposição 2.1.3 *Seja $p \in \mathsf{LP}$. Para qualquer modelo de setas quadrado enraizado $\langle \mathcal{M}, (a,b) \rangle$, temos que:*

$$(a,b) \in (E(Ap \wedge \iota\delta))^{\mathcal{M}} \textit{ se, e somente se, } p^{\mathcal{M}} = \{(c,c)\}, \textit{ para algum } c \in \mathcal{U}.$$

Prova:

$$
\begin{aligned}
(a,b) \in (E(Ap \wedge \iota\delta))^{\mathcal{M}} &\iff \text{existem } c, d \in \mathcal{U} \text{ tais que} && \text{(Prop. 2.1.2,i)}\\
& (c,d) \in (Ap \wedge \iota\delta)^{\mathcal{M}} \\
&\iff \text{existem } c, d \in \mathcal{U} \text{ tais que} && \text{(Prop. 2.1.2,ii)}\\
& p^{\mathcal{M}} = \{(c,d)\} \text{ e } c = d \\
&\iff \text{existe } c \in \mathcal{U} \text{ tal que } p^{\mathcal{M}} = \{(c,c)\} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Assim, a fórmula $E(Ap \wedge \iota\delta)$ expressa o fato de que a letra proposicional p é verdadeira exatamente em uma seta, e em uma seta da diagonal do quadrado.

Em um determinado contexto, então, podemos utilizar as letras proposicionais para as quais vale $E(Ap \wedge \iota\delta)$ neste contexto como variáveis para coordenadas de setas. Assim, no contexto onde vale $E(Ap \wedge \iota\delta)$, a letra proposicional p poderá ser utilizada como um *nominal* ou como uma *variável* da lógica híbrida [BS98].

Vamos introduzir uma notação adequada para aplicar as técnicas da lógica híbrida para a prova de completude.

Definição Um conjunto de fórmulas Γ *tem variáveis para coordenadas*, ou simplesmente *variáveis*, quando existe uma quantidade enumerável de letras proposicionais $p_1, p_2, \ldots, p_i, \ldots$ tal que $E(Ap_i \wedge \iota\delta) \in \Gamma$, para todo $i \in \mathbb{N}$. As letras proposicionais p tais que $E(Ap \wedge \iota\delta) \in \Gamma$ são chamadas *variáveis de* Γ e serão denotadas por x, y, z, w, indexadas ou não. O conjunto das variáveis de Γ será denotado $\mathsf{Var}(\Gamma)$.

A partir das variáveis para coordenadas, podemos construir variáveis bidimensionais para setas.

Proposição 2.1.4 *Seja Γ um conjunto de fórmulas com variáveis e $x, y \in \mathsf{Var}(\Gamma)$. Para qualquer modelo de setas quadrado $\mathcal{M}$ tal que $\Gamma^{\mathcal{M}} \neq \emptyset$, temos que:*

$$(a,b) \in (x \circ \top \circ y)^{\mathcal{M}} \textit{ se, e somente se, } x^{\mathcal{M}} = \{(a,a)\} \textit{ e } y^{\mathcal{M}} = \{(b,b)\}.$$

Prova:

$$
\begin{aligned}
(a,b) \in (x \circ \top \circ y)^{\mathcal{M}} &\iff \text{existem } c,d \in \mathcal{U} \text{ tais que} && \text{(def significado)}\\
& (a,c) \in x^{\mathcal{M}} \text{ e } (c,b) \in y^{\mathcal{M}} &&\\
&\iff \text{existem } c,d \in \mathcal{U} \text{ tais que} &&\\
& x^{\mathcal{M}} = \{(a,c)\} \text{ e } y^{\mathcal{M}} = \{(c,b)\} && \text{(def significado)}\\
&\iff x^{\mathcal{M}} = \{(a,a)\} \text{ e } y^{\mathcal{M}} = \{(b,b)\} && (x,y \in \mathsf{Var}(\Gamma)) \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Assim, em um contexto em que x e y são variáveis, a fórmula $x \circ \top \circ y$ vale exatamente na seta (a,b) tal que $V(x) = \{(a,a)\}$ e $V(y) = \{(b,b)\}$. Vamos, então, denotar a fórmula $x \circ \top \circ y$ por xy e utilizá-la como variáveis para setas.

Proposição 2.1.5 *Seja Γ um conjunto de fórmulas com variáveis e $x, y \in \mathsf{Var}(\Gamma)$. Para qualquer modelo de setas quadrado enraizado $\langle \mathcal{M}, (a,b) \rangle$ tal que $\mathcal{M}, (a,b) \models \Gamma$ e qualquer fórmula α, temos que:*

$$(a,b) \in (\top \circ x \circ \alpha \circ y \circ \top)^{\mathcal{M}} \textit{ se, e somente se, } (xy)^{\mathcal{M}} \subseteq \alpha^{\mathcal{M}}.$$

Prova:

$$
\begin{aligned}
(a,b) \in (\top \circ x \circ \alpha \circ y \circ \top)^{\mathcal{M}} &\iff \text{existem } c,d,e,f \in \mathcal{U} \text{ tais que}\\
& (c,d) \in x^{\mathcal{M}},\ (d,e) \in \alpha^{\mathcal{M}} \text{ e } (e,f) \in y^{\mathcal{M}}\\
&\iff \text{existem } c,e \in \mathcal{U} \text{ tais que } V(x) = \{(c,c)\},\\
& V(y) = \{(e,e)\} \text{ e } (c,e) \in \alpha^{\mathcal{M}}\\
&\iff \text{existem } c,e \in \mathcal{U} \text{ tais que}\\
& (xy)^{\mathcal{M}} = \{(c,e)\} \text{ e } (c,e) \in \alpha^{\mathcal{M}}\\
&\iff (xy)^{\mathcal{M}} \subseteq \alpha^{\mathcal{M}} \quad \blacksquare
\end{aligned}
$$

Em virtude da Proposição 2.1.5, a fórmula $\top \circ x \circ \alpha \circ y \circ \top$ será denotada por $xy \,\varepsilon\, \alpha$.

A axiomática de LSD é a axiomática de LS estendida por regras não-ortodoxas, inclusive. Na nossa apresentação, adaptamos os axiomas e regras da lógica híbrida. O sistema axiomático para LSD apresentado em [Ven91] é a extensão da axiomática para LS por uma única regra não-ortodoxa.

LS) *Axiomas e regras para* LS.

Negação) $E(Ap \wedge \iota\delta) \wedge E(Aq \wedge \iota\delta) \rightarrow ((pq\ \varepsilon\ \neg\alpha) \leftrightarrow \neg(pq\ \varepsilon\ \alpha))$.

Conjunção) $E(Ap \wedge \iota\delta) \wedge E(Aq \wedge \iota\delta) \rightarrow ((pq\ \varepsilon\ (\alpha \wedge \beta)) \leftrightarrow (pq\ \varepsilon\ \alpha) \wedge (pq\ \varepsilon\ \beta))$.

Troca) $E(Ap \wedge \iota\delta) \wedge E(Aq \wedge \iota\delta) \wedge E(Ar \wedge \iota\delta) \wedge E(As \wedge \iota\delta) \rightarrow ((pq\ \varepsilon\ rs) \leftrightarrow (rs\ \varepsilon\ pq))$.

Nomeação) $E(Ap \wedge \iota\delta) \wedge E(Aq \wedge \iota\delta) \wedge E(Ar \wedge \iota\delta) \wedge E(As \wedge \iota\delta) \rightarrow$
$((pq\ \varepsilon\ rs) \wedge (pq\ \varepsilon\ \alpha) \rightarrow (rs\ \varepsilon\ \alpha))$.

Nome) $E(Ap \wedge \iota\delta) \wedge E(Aq \wedge \iota\delta) \rightarrow pq\ \varepsilon\ pq$.

Coordenadas) $E(Ap \wedge \iota\delta) \wedge E(Aq \wedge \iota\delta) \wedge E(Ar \wedge \iota\delta) \wedge E(As \wedge \iota\delta) \rightarrow$
$(pq\ \varepsilon\ rs \leftrightarrow pp\ \varepsilon\ rr \wedge qq\ \varepsilon\ ss)$.

Ponte $\iota\delta$) $E(Ap \wedge \iota\delta) \wedge E(Aq \wedge \iota\delta) \rightarrow ((pp\ \varepsilon\ qq) \leftrightarrow (pq\ \varepsilon\ \iota\delta))$.

Ponte $\otimes$) $E(Ap \wedge \iota\delta) \wedge E(Aq \wedge \iota\delta) \rightarrow ((pq\ \varepsilon\ \alpha) \leftrightarrow (qp\ \varepsilon\ \otimes\alpha))$.

Ponte $\circ$) $E(Ap \wedge \iota\delta) \wedge E(Aq \wedge \iota\delta) \wedge E(Ar \wedge \iota\delta) \rightarrow ((pr\ \varepsilon\ \alpha) \wedge (rq\ \varepsilon\ \beta) \rightarrow (pq\ \varepsilon\ (\alpha \circ \beta)))$.

Eliminação) $E(Ap \wedge \iota\delta) \wedge E(Aq \wedge \iota\delta) \rightarrow (pq \wedge pq\ \varepsilon\ \alpha \rightarrow \alpha)$.

Distribuição ε) $E(Ap \wedge \iota\delta) \wedge E(Aq \wedge \iota\delta) \rightarrow (pq\ \varepsilon\ (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((pq\ \varepsilon\ \alpha) \rightarrow (pq\ \varepsilon\ \beta)))$.

Nec ε) $\dfrac{\alpha}{E(Ap \wedge \iota\delta) \wedge E(Aq \wedge \iota\delta) \rightarrow pq\ \varepsilon\ \alpha}$

Var) $\dfrac{E(Ap_1 \wedge \iota\delta) \wedge \cdots \wedge E(Ap_n \wedge \iota\delta) \rightarrow \alpha}{\alpha}$, se $p_1, \ldots, p_n$ não ocorrem em α.

Q$\frac{1}{2}$) $\dfrac{E(Ap \wedge \iota\delta) \wedge E(Aq \wedge \iota\delta) \rightarrow pq\ \varepsilon\ \alpha}{\alpha}$, se p e q não ocorrem em α.

Colagem) $\dfrac{E(Ar \wedge \iota\delta) \wedge (pr\ \varepsilon\ \alpha) \wedge (rq\ \varepsilon\ \beta) \rightarrow \gamma}{(pq\ \varepsilon\ (\alpha \circ \beta)) \rightarrow \gamma}$, se r é distinto de p e q e não ocorre em α, β nem em γ.

Nesta apresentação não tivemos preocupação com a independência do sistema axiomático. Apenas listamos axiomas e regras (corretos) suficientes para a prova da completude via modelo canônico.

2.2 Completude

O sistema axiomático apresentado para LSD é correto e completo com relação à semântica quadrada.

Teorema 2.2.1 (Corretude) *Se* $\Gamma \vdash_{\mathrm{LSD}} \alpha$, *então* $\Gamma \models_{\mathrm{LSD}} \alpha$.

Prova: Os axiomas são válidos. As regras de inferência preservam validade. A regra MP preserva satisfabilidade. ∎

A prova de completude que apresentamos, inspirada em [FV02], é uma adaptação das técnicas desenvolvidas em [BT98].

Definição Seja Γ um conjunto de fórmulas com variáveis.
1. Γ *tem nome* quando existem $x, y \in \mathsf{Var}(\Gamma)$ tais que $xy \in \Gamma$.
2. Γ *tem testemunhas* quando, para quaisquer $x, y \in \mathsf{Var}(\Gamma)$ e quaisquer fórmulas α e β, se $xy\ \varepsilon\ (\alpha \circ \beta) \in \Gamma$, então existe $z \in \mathsf{Var}(\Gamma)$ tal que $xz\ \varepsilon\ \alpha, zy\ \varepsilon\ \beta \in \Gamma$.

Temos testemunhas para o existencial da semântica dos operadores modais. Na semântica quadrada, apenas a composição, dentre os operadores de setas, apresenta esse existencial. Assim, em LSD, ter testemunhas é ter testemunhas para a composição.

Definição Seja Σ um conjunto de fórmulas com variáveis.
1. Para cada $x, y \in \mathsf{Var}(\Sigma)$, definimos $\Delta^{\Sigma}_{xy} := \{\alpha : xy\ \varepsilon\ \alpha \in \Sigma\}$.
2. O *modelo induzido* por Σ é $\mathcal{M}^{\Sigma} = \langle \mathcal{U}^{\Sigma}, V^{\Sigma} \rangle$, com $\mathcal{U}^{\Sigma} = \{\Delta^{\Sigma}_{xx} : x \in \mathsf{Var}(\Sigma)\}$ e $V^{\Sigma}(p) = \{(\Delta^{\Sigma}_{xx}, \Delta^{\Sigma}_{yy}) : p \in \Delta^{\Sigma}_{xy}\}$.

Vamos mostrar que, se Σ for um CCM com variáveis, nome e testemunhas, então $\mathcal{M}^{\Sigma}, (a, b) \models \Sigma$, para certos $a, b \in \mathcal{U}^{\Sigma}$.

Lema 2.2.1 *Se* Σ *for um CCM com variáveis, então* Δ^{Σ}_{xy} *será um CCM, quaisquer que sejam* $x, y \in \mathsf{Var}(\Sigma)$.

Prova:

1. Δ^{Σ}_{xy} é consistente:

Suponhamos que existam $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \Delta^{\Sigma}_{xy}$ tais que $\vdash_{\mathrm{LSD}} \neg(\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_n)$. Por Nec ε temos que $\vdash_{\mathrm{LSD}} E(Ax \wedge \iota\delta) \wedge E(Ay \wedge \iota\delta) \to xy\ \varepsilon\ \neg(\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_n)$. Por Negação temos que $\vdash_{\mathrm{LSD}} E(Ax \wedge \iota\delta) \wedge E(Ay \wedge \iota\delta) \to \neg xy\ \varepsilon\ (\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_n)$. Como

$\delta_1, \ldots, \delta_n \in \Delta^\Sigma_{xy}$, temos que $xy \ \varepsilon \ \delta_1, \ldots, xy \ \varepsilon \ \delta_n \in \Sigma$. Por Conjunção temos que $xy \ \varepsilon \ (\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_n) \in \Sigma$, uma contradição (dado que $E(Ax \wedge \iota\delta), E(Ay \wedge \iota\delta) \in \Sigma$).

2. Para cada fórmula α, temos que $\alpha \in \Delta^\Sigma_{xy}$ ou $\neg\alpha \in \Delta^\Sigma_{xy}$:

Suponhamos que exista uma fórmula α tal que $\alpha \notin \Delta^\Sigma_{xy}$ e $\neg\alpha \notin \Delta^\Sigma_{xy}$. Assim, $xy \ \varepsilon \ \alpha \notin \Sigma$ e $xy \ \varepsilon \ \neg\alpha \notin \Sigma$. Por Negação, $(\neg xy \ \varepsilon \ \alpha) \notin \Sigma$, uma contradição (dado que $E(Ax \wedge \iota\delta), E(Ay \wedge \iota\delta) \in \Sigma$). ■

Lema 2.2.2 *Seja Σ for um CCM com variáveis e $x, y, z, w \in \mathsf{Var}(\Sigma)$. Se $xy \ \varepsilon \ \Delta^\Sigma_{zw}$, então $\Delta^\Sigma_{xy} = \Delta^\Sigma_{zw}$.*

Prova:

$$\begin{aligned} xy \in \Delta^\Sigma_{zw} &\Longrightarrow zw \ \varepsilon \ xy \in \Sigma && (\text{def } \Delta^\Sigma_{xy}) \\ &\Longrightarrow xy \ \varepsilon \ zw \in \Sigma \ (*) && (\mathsf{Troca}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \in \Delta^\Sigma_{xy} &\Longleftrightarrow xy \ \varepsilon \ \alpha \in \Sigma && (\text{def } \Delta^\Sigma_{xy}) \\ &\Longleftrightarrow zw \ \varepsilon \ \alpha \in \Sigma && (\mathsf{Nomeação}, *) \\ &\Longleftrightarrow \alpha \in \Delta^\Sigma_{zw}. && (\text{def } \Delta^\Sigma_{xy}) \ ■ \end{aligned}$$

Lema 2.2.3 *Se Σ for um CCM com variáveis e $x, y, z, w \in \mathsf{Var}(\Sigma)$, então $\Delta^\Sigma_{xy} = \Delta^\Sigma_{zw}$ se, e somente se, $\Delta^\Sigma_{xx} = \Delta^\Sigma_{zz}$ e $\Delta^\Sigma_{yy} = \Delta^\Sigma_{ww}$.*

Prova:

$$\begin{aligned} \Delta^\Sigma_{xy} = \Delta^\Sigma_{zw} &\Longleftrightarrow xy \in \Delta^\Sigma_{zw} && (\Longrightarrow\text{: } \mathsf{Nome}, \Longleftarrow\text{: Lema 2.2.2}) \\ &\Longleftrightarrow zw \ \varepsilon \ xy \in \Gamma && (\text{def } \Delta^\Sigma_{xy}) \\ &\Longleftrightarrow zz \ \varepsilon \ xx \in \Gamma \text{ e } ww \ \varepsilon \ yy \in \Gamma && (\mathsf{Coordenadas}) \\ &\Longleftrightarrow xx \in \Delta^\Sigma_{zz} \text{ e } yy \in \Delta^\Sigma_{ww} && (\text{def } \Delta^\Sigma_{xy}) \\ &\Longleftrightarrow \Delta^\Sigma_{xx} = \Delta^\Sigma_{zz} \text{ e } \Delta^\Sigma_{yy} = \Delta^\Sigma_{ww}. && (\Longrightarrow\text{: Lema 2.2.2}, \Longleftarrow\text{: } \mathsf{Nome}) \ ■ \end{aligned}$$

Lema 2.2.4 (Lema da Satisfabilidade) *Se Σ for um CCM com variáveis, nome e testemunhas, então, para cada fórmula α, e cada $x, y \in \mathsf{Var}(\Sigma)$, teremos que:*

$$\mathcal{M}^\Sigma, (\Delta^\Sigma_{xx}, \Delta^\Sigma_{yy}) \models \alpha \textit{ se, e somente se, } \alpha \in \Delta^\Sigma_{xy}.$$

Prova: (Indução na estrutura de α.)

Caso zw)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^\Sigma, (\Delta^\Sigma_{xx}, \Delta^\Sigma_{yy}) \models zw \iff & V^\Sigma(zw) = (\Delta^\Sigma_{xx}, \Delta^\Sigma_{yy}) && \text{(def } \models \text{, def } G^\Sigma\text{)} \\
\iff & (\Delta^\Sigma_{zz}, \Delta^\Sigma_{ww}) = (\Delta^\Sigma_{xx}, \Delta^\Sigma_{yy}) && \\
\iff & \Delta^\Sigma_{xy} = \Delta^\Sigma_{zw} && \text{(Lema 2.2.3)} \\
\iff & xy \in \Delta^\Sigma_{zw} && \text{(Nome, Lema 2.2.2)} \\
\iff & zw \ \varepsilon \ xy \in \Sigma && \text{(def } \Delta^\Sigma_{xy}\text{)} \\
\iff & xy \ \varepsilon \ zw \in \Sigma && \text{(Troca)} \\
\iff & zw \in \Delta^\Sigma_{xy}. && \text{(def } \Delta^\Sigma_{xy}\text{)}
\end{aligned}
$$

Caso $\iota\delta$)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^\Sigma, (\Delta^\Sigma_{xx}, \Delta^\Sigma_{yy}) \models \iota\delta \iff & \Delta^\Sigma_{xx} = \Delta^\Sigma_{yy} && \text{(def } \models\text{)} \\
\iff & xx \in \Delta^\Sigma_{yy} && \text{(Nome, Lema 2.2.2)} \\
\iff & yy \ \varepsilon \ xx \in \Sigma && \text{(def } \Delta^\Sigma_{xy}\text{)} \\
\iff & xy \ \varepsilon \ \iota\delta \in \Sigma && \text{(Ponte } \iota\delta\text{)} \\
\iff & \iota\delta \in \Delta^\Sigma_{xy}. && \text{(def } \Delta^\Sigma_{xy}\text{)}
\end{aligned}
$$

Caso $\otimes\alpha$)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^\Sigma, (\Delta^\Sigma_{xx}, \Delta^\Sigma_{yy}) \models \otimes\alpha \iff & \mathcal{M}^\Sigma, (\Delta^\Sigma_{yy}, \Delta^\Sigma_{xx}) \models \alpha && \text{(def } \models\text{)} \\
\iff & \alpha \in \Delta^\Sigma_{yx} && \text{(H.I.)} \\
\iff & (yx \ \varepsilon \ \alpha) \in \Sigma && \text{(def } \Delta^\Sigma_{xy}\text{)} \\
\iff & (xy \ \varepsilon \ \otimes \alpha) \in \Sigma && \text{(Ponte } \otimes\text{)} \\
\iff & \otimes\alpha \in \Delta^\Sigma_{xy}. && \text{(def } \Delta^\Sigma_{xy}\text{)}
\end{aligned}
$$

Caso $\alpha \circ \beta$)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}^\Sigma, (\Delta^\Sigma_{xx}, \Delta^\Sigma_{yy}) \models \alpha \circ \beta \iff & \text{existe } z \in \mathsf{Var}(\Sigma) \text{ tal que} && \\
& \mathcal{M}^\Sigma, (\Delta^\Sigma_{xx}, \Delta^\Sigma_{zz}) \models \alpha \text{ e} && \\
& \mathcal{M}^\Sigma, (\Delta^\Sigma_{zz}, \Delta^\Sigma_{yy}) \models \beta && \text{(def } \models\text{)} \\
\iff & \text{existe } z \in \mathsf{Var}(\Sigma) \text{ tal que} && \\
& \alpha \in \Delta^\Sigma_{xz} \text{ e } \beta \in \Delta^\Sigma_{zy} && \text{(H.I.)} \\
\iff & \text{existe } z \in \mathsf{Var}(\Sigma) \text{ tal que} && \\
& (xz \ \varepsilon \ \alpha) \in \Sigma \text{ e } (zy \ \varepsilon \ \beta) \in \Sigma && \text{(def } \Delta^\Sigma_{xy}\text{)} \\
\iff & xy \ \varepsilon \ (\alpha \circ \beta) \in \Sigma && \text{(Ponte } \circ\text{, } \Sigma \text{ tem test.)} \\
\iff & \alpha \circ \beta \in \Delta^\Sigma_{xy}. && \text{(def } \Delta^\Sigma_{xy}\text{)} \ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Lema 2.2.5 *Dado um CCM Σ com variáveis, nome e testemunhas, existem $x, y \in$ $\mathsf{Var}(\Sigma)$ tais que $\Sigma = \Delta^{\Sigma}_{xy}$.*

Prova: Como Σ tem nome, existem $x, y \in \mathsf{Var}(\Sigma)$ tais que $xy \in \Sigma$. Suponhamos que $\Sigma \neq \Delta^{\Sigma}_{xy}$. Como Σ e Δ^{Σ}_{xy} são CCMs (pelo Lema 2.2.1), existe uma fórmula α tal que $\alpha \in \Sigma$ e $\neg\alpha \in \Delta^{\Sigma}_{xy}$. Daí, $xy \ \varepsilon\ \neg\alpha \in \Sigma$. Como $xy \ \varepsilon\ \Sigma$, por Eliminação, $\neg\alpha \in \Sigma$, uma contradição (pois $E(Ax \wedge \iota\delta)$ e $E(Ay \wedge \iota\delta) \in \Sigma$). ∎

Seja LSD^N o sistema LSD com linguagem acrescida de um conjunto enumerável de letras proposicionais novas LPNov. Seja $\mathsf{LP}^N = \mathsf{LP} \cup \mathsf{LPNov}$.

Lema 2.2.6 (Lema de Lindenbaum Estendido) *Todo conjunto consistente de fórmulas de* LSD *pode ser estendido a um CCM de* LSD^N *com variáveis, nome e testemunhas.*

Prova: Suponhamos que Γ seja um conjunto consistente. Considere a enumeração das letras proposicionais novas LPNov $= \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$ e o conjunto $\Gamma^N = \Gamma \cup \{E(Ax_{2i} \wedge \iota\delta) : i \in I\!N\}$.

Fato 1) Γ^N é consistente:

Suponhamos que $\vdash_{\mathrm{LSD}^N} E(Ax_{2i_1} \wedge \iota\delta) \wedge \cdots \wedge E(Ax_{2i_k}) \to \neg(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n)$. Por Var temos que $\vdash \mathrm{LSD}^N \neg(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n)$, uma contradição.

Seja $\Gamma_0 = \Gamma^N \cup \{x_0x_2\}$.

Fato 2) Γ_0 é consistente:

Suponhamos que $\Gamma_0 = \Gamma^N \cup \{x_0x_2\}$ não seja consistente, i.e., que existam $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma^N$ tais que $\vdash_{\mathrm{LSD}^N} x_0x_2 \to \neg(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n)$. Por Nec ε temos que $\vdash_{\mathrm{LSD}^N} E(Ax_0 \wedge \iota\delta) \wedge E(Ax_2 \wedge \iota\delta) \to (x_0x_2 \ \varepsilon\ (x_0x_2 \to \neg(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n)))$. Por Dist ε, $\vdash_{\mathrm{LSD}^N} E(Ax_0 \wedge \iota\delta) \wedge E(Ax_2 \wedge \iota\delta) \to ((x_0x_2 \ \varepsilon\ x_0x_2) \to (x_0x_2 \ \varepsilon\ \neg(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n)))$. Por Nome, $\vdash_{\mathrm{LSD}^N} E(Ax_0 \wedge \iota\delta) \wedge E(Ax_2 \wedge \iota\delta) \to x_0x_2 \ \varepsilon\ \neg(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n)$. Por Q$\frac{1}{2}$, como x_0 e x_2 não ocorrem em Γ, $\vdash_{\mathrm{LSD}^N} \neg(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n)$, uma contradição.

Seja $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ uma enumeração das fórmulas de LSD^N.

Seja $\Sigma_0 = \Gamma_0$ e Σ_{m+1} definido como segue:

1. $\Sigma_{m+1} = \Sigma_m$, se $\Sigma_m \cup \{\alpha_m\}$ for inconsistente.

2. $\Sigma_{m+1} = \Sigma_m \cup \{\alpha_m\}$, se $\Sigma_m \cup \{\alpha_m\}$ for consistente e α_m não for da forma $xy \; \varepsilon \; (\alpha \circ \beta)$.

3. $\Sigma_{m+1} = \Sigma_m \cup \{xy \; \varepsilon \; (\alpha \circ \beta), E(Az \wedge \iota\delta), xz \; \varepsilon \; \alpha, zy \; \varepsilon \; \beta\}$, se $\Sigma_m \cup \{\alpha_m\}$ for consistente e α_m for $xy \; \varepsilon \; (\alpha \circ \beta)$ (sendo z a próxima variável nova que não ocorre em Σ_m nem em $xy \; \varepsilon \; (\alpha \circ \beta)$).

Fato 3) Cada Σ_n é consistente:

Caso 0) $\Sigma_0 = \Gamma_0$ é consistente (Fato 1).

Caso 1) $\Sigma_{m+1} = \Sigma_m$ é consistente (H.I.).

Caso 2) $\Sigma_{m+1} = \Sigma_m \cup \{\alpha_m\}$ é consistente (por construção).

Caso 3) $\Sigma_{m+1} = \Sigma_m \cup \{xy \; \varepsilon \; (\alpha \circ \beta), E(Az \wedge \iota\delta), xz \; \varepsilon \; \alpha, zy \; \varepsilon \; \beta\}$ (sendo z a próxima variável nova que não ocorre em Σ_m nem em $xy \; \varepsilon \; (\alpha \circ \beta)$):

Suponhamos que existam $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \Sigma_m \cup \{xy \; \varepsilon \; (\alpha \circ \beta)\}$ tais que:

$$\vdash_{\mathrm{LSD}^N} E(Az \wedge \iota\delta) \wedge xz \; \varepsilon \; \alpha \wedge zy \; \varepsilon \; \beta \rightarrow \neg(\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_k).$$

Por Colagem, $\vdash_{\mathrm{LSD}^N} xy \; \varepsilon \; (\alpha \circ \beta) \rightarrow \neg(\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_k)$, pois z não ocorre em Σ_m nem em $xy \; \varepsilon \; (\alpha \circ \beta)$. Portanto, $\Sigma_m \cup \{xy \; \varepsilon \; (\alpha \circ \beta)\} \vdash_{\mathrm{LSD}^N} \neg(\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_k)$, uma contradição.

Fato 4) Cada Σ_n é um subconjunto de Σ_{n+1}, por construção.

Seja $\Sigma = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma_n$.

Fato 5) Σ é consistente:

Suponhamos que existam $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \Sigma$ tais que $\vdash_{\mathrm{LSD}^N} \neg(\sigma_1 \wedge \cdots \wedge \sigma_k)$. Como $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \Sigma$, existem $\Sigma_{i_1}, \ldots, \Sigma_{i_k}$ tais que $\sigma_1 \in \Sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_k \in \Sigma_{i_k}$. Seja $n = max\{i_1, \ldots, i_k\}$. Pelo Fato 4, $\sigma_1, \ldots, \sigma_k \in \Sigma_n$, uma contradição.

Fato 6) Σ é um CCM:

Suponha que $\alpha \notin \Sigma$ e $\neg\alpha \notin \Sigma$. Sejam n, m tais que $\alpha = \alpha_n$ e $\neg\alpha = \alpha_m$. Então, $\alpha_n \notin \Sigma_{n+1}$ e $\alpha_m \notin \Sigma_{m+1}$. Assim, $\Sigma_n \cup \{\alpha_n\}$ e $\Sigma_m \cup \{\alpha_m\}$ são inconsistentes. Daí, $\Sigma_n \vdash_{\mathrm{LSD}^N} \neg\alpha_n$ e $\Sigma_m \vdash_{\mathrm{LSD}^N} \neg\alpha_m$, i.e., $\Sigma_n \vdash_{\mathrm{LSD}^N} \neg\alpha$ e $\Sigma_m \vdash_{\mathrm{LSD}^N} \neg\neg\alpha$. Portanto, $\Sigma \vdash_{\mathrm{LSD}^N} \neg\alpha$ e $\Sigma \vdash_{\mathrm{LSD}^N} \neg\neg\alpha$, uma contradição.

Fato 7) Σ tem variáveis:

$\{x_{2i} : i \in I\!N\} \subseteq$ LPNov é enumerável e $E(Ax_{2i} \wedge \iota\delta) \in \Gamma^N \subseteq \Gamma_0 = \Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

Fato 8) Σ tem nome:

$x_0 x_2 \in \Gamma_0 = \Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

Fato 9) Σ tem testemunhas:

Suponha que $xy \; \varepsilon \; (\alpha \circ \beta) \in \Sigma$. Seja m tal que $xy \; \varepsilon \; (\alpha \circ \beta) = \alpha_m$. Daí, $\Sigma_m \cup \{\alpha_m\}$ é consistente. Logo, $xz \; \varepsilon \; \alpha, zy \; \varepsilon \; \beta \in \Sigma_{m+1} \subseteq \Sigma$, para algum $z \in \mathsf{LPNov}$.

Dos Fatos 1–9, temos que Σ é o CCM requerido: com variáveis, nome, testemunhas e tal que $\Gamma \subseteq \Sigma$. ∎

Teorema 2.2.2 (Existência de Modelos) *Todo conjunto consistente de fórmulas de* LSD *é satisfeito em um modelo quadrado enraizado.*

Prova: Conseqüência direta dos Lemas 2.2.4, 2.2.6, e 2.2.5. ∎

Finalmente, como um corolário do Lema da Existência de Modelos, temos o Teorema da Completude.

Teorema 2.2.3 (Completude) *Se* $\Gamma \models_{\mathrm{LSD}} \alpha$, *então* $\Gamma \vdash_{\mathrm{LSD}} \alpha$.

2.3 Expressividade

LSD tem o mesmo poder de expressão de LS, diferenciando-se apenas por ter um maior poder de prova. No entanto, quando nos restringimos à semântica quadrada, LSD se torna mais expressivo. Na semântica quadrada, o operador D coincide com o operador diferença e é possível definir os operadores *existe* e *apenas*, por exemplo, que não eram definíveis em LS.

Vamos mostrar que LSD tem o poder de expressão de LPO com símbolos de relação binária como únicos símbolos não lógicos e fórmulas com até três variáveis, tendo no máximo duas livres. Essa linguagem de primeira ordem será denotada $\mathrm{LPO}^3(x, y)$, quando for interessante explicitar que são as variáveis x e y que podem aparecer livres.

Para obter esse resultado, usamos o fato de que $\mathrm{LPO}^3(x, y)$ é equipolente em meios de expressão a um fragmento indutivo de LPO.

Definição $\mathrm{LPO}^+(x,y)$ é o fragmento de LPO definido indutivamente como segue:

1. Se R for um símbolo de relação binária, então $R(x,y) \in \mathrm{LPO}^+(x,y)$.
2. Se $\phi \in \mathrm{LPO}^+(x,y)$, então $\neg\phi \in \mathrm{LPO}^+(x,y)$.
3. Se $\phi, \psi \in \mathrm{LPO}^+(x,y)$, então $\phi \wedge \psi \in \mathrm{LPO}^+(x,y)$.
4. Se $\phi, \psi \in \mathrm{LPO}^+(x,y)$, então $\phi \vee \psi \in \mathrm{LPO}^+(x,y)$.
5. Se $\phi \in \mathrm{LPO}^+(x,z)$ e $\psi \in \mathrm{LPO}^+(z,y)$, então $\exists z(\phi \wedge \psi) \in \mathrm{LPO}^+(x,y)$.

A prova de que toda fórmula de $\mathrm{LPO}^3(x,y)$ possui uma fórmula equivalente em $\mathrm{LPO}^+(x,y)$, e vice-versa, encontra-se em [TG87] e em [Ven91], respectivamente.

Para mostrar que LSD e $\mathrm{LPO}^+(x,y)$ são equipolentes em meio de expressão, mostramos que existem traduções de LSD para $\mathrm{LPO}^+(x,y)$ e vice-versa.

Nesta seção usaremos a notação algébrica para a linguagem de LS, introduzida no Capítulo 1.

Definição A tradução T_{xy} : LSD $\to$ $\mathrm{LPO}^+(x,y)$ é definida recursivamente como segue:

1. $T_{xy}(r) = Rxy$
2. $T_{xy}(0) = \bot$
3. $T_{xy}(1) = \top$
4. $T_{xy}(1') = x \approx y$
5. $T_{xy}(\alpha^-) = \neg T_{xy}(\alpha)$
6. $T_{xy}(\alpha^\smile) = T_{yx}(\alpha)$
7. $T_{xy}(\alpha \cdot \beta) = T_{xy}(\alpha) \wedge T_{xy}(\beta)$
8. $T_{xy}(\alpha + \beta) = T_{xy}(\alpha) \vee T_{xy}(\beta)$
9. $T_{xy}(\alpha;\beta) = \exists z(T_{xz}(\alpha) \wedge T_{zy}(\beta))$

Proposição 2.3.1 *$(a,b) \in \alpha^{\mathcal{Q}}$ se, e somente se, $\mathcal{Q} \models T_{xy}(\alpha)$ $[a/x, b/y]$.*

Prova: Por indução na estrutura de α. ■

Definição A tradução H_{xy} : LPO+(x,y) $\to$ LSD é definida recursivamente como segue:

1. $H_{xy}(Rxy) = r$
2. $H_{xy}(Ryx) = r^{\smile}$
3. $H_{xy}(Rxx) = (r \cdot 1'); 1$
4. $H_{xy}(Ryy) = 1; (r \cdot 1')$
5. $H_{xy}(x \approx y) = 1'$
6. $H_{xy}(y \approx x) = 1'$
7. $H_{xy}(x \approx x) = 1$
8. $H_{xy}(y \approx y) = 1$
9. $H_{xy}(\neg\phi) = (H_{xy}(\phi))^{-}$
10. $H_{xy}(\phi \wedge \psi) = H_{xy}(\phi) \cdot H_{xy}(\psi)$
11. $H_{xy}(\phi \vee \psi) = H_{xy}(\phi) + H_{xy}(\psi)$
12. $H_{xy}(\exists z(\phi \wedge \psi)) = H_{xz}(\phi); H_{zy}(\psi)$

Proposição 2.3.2 *$\mathcal{Q} \models \phi\ [a/x, b/y]$ se, e somente se, $(a, b) \in (H_{xy}(\phi))^{\mathcal{Q}}$.*

Prova: Por indução na estrutura de ϕ. ∎

Capítulo 3

Lógica de Setas Híbrida

Hibridização é uma técnica geral para aumentar o poder de expressão de lógicas modais [AB01]: qualquer lógica modal pode ser "hibridizada" [BS98]. Uma extensão híbrida de uma dada lógica modal pode ser construída em dois estágios. O primeiro estende a linguagem pelo acréscimo de um novo sorte de variáveis que serão *fórmulas* utilizadas para *denotar* pontos no domínio das estruturas. O segundo introduz mecanismos para manipular a informação adicional acrescentada. Existe um vasto campo de possibilidades para o segundo passo [BS98], sendo o *operador de satisfação* @ e o *ligador* $\downarrow$ [BS98] os mais intensivamente estudados. A linguagem híbrida $\mathcal{H}(@, \downarrow)$, obtida a partir da linguagem modal básica pela introdução destes dois mecanismos, pode ser tomada como uma espécie de *formalismo híbrido padrão* [ABM01].

Neste capítulo investigamos duas abordagens para a hibridização de LS: estudamos um sistema obtido pela hibridização de LS da mesma forma como $\mathcal{H}(@, \downarrow)$ é obtida da linguagem modal básica e outro, formulado especialmente para LS2, que utiliza essencialmente a característica bidimensional do sistema.

Na verdade, a hibridização padrão de LS pode ser vista como uma etapa na hibridização de LS2. Assim, primeiramente definimos uma extensão híbrida de LS, chamada Lógica de Setas Híbrida (LSH). LSH é obtida de LS na semântica abstrata, seguindo diretamente os padrões de hibridização. Em particular, apresentamos uma axiomática para LSH estendendo os resultados de [BT98]. A seguir, definimos a Lógica de Setas Híbrida Bidimensional (LSH2), fazendo duas modificações essenciais em LSH: introduzimos *variáveis bidimensionais* e restringimos a semântica de

LSH à semântica quadrada com uma subclasse de assinalações. Variáveis bidimensionais são da forma (x, y), onde x e y são símbolos de um conjunto básico. Como estas novas variáveis são vistas como pares ordenados, o conjunto de variáveis bidimensionais pode ser visto como um quadrado de maneira natural. Ao restringir a semântica de LSH à semântica quadrada, também restringimos a satisfabilidade das fórmulas a uma subclasse de assinalações que respeitam o aspecto bidimensional destas variáveis. Estas restrições fornecem um formalismo apropriado para as relações binárias: todos os enunciados elementares sobre relações binárias podem ser expressos em LSH2. Além disso, obtivemos um sistema axiomático adequado para a prova de teoremas sobre relações binárias.

Na Seção 3, apresentamos uma motivação para a hibridização de LS baseada na simbolização de enunciados sobre relações binárias. Na Seção 3.1, estendemos LS acrescentando o operador de satisfabilidade @ e o ligador $\downarrow$ da lógica híbrida, obtendo LSH. Na Seção 3.4, definimos LSH2, obtida de LSH por uma modificação na sintaxe e uma restrição no conjunto das assinalações de valor para as variáveis. LSH2 é um sistema inspirado na Álgebra Relacional com Ligadores (ARL) [Mar01]. De fato, em [FVVVB02a] provamos que LSH2 e uma versão modal de ARL são equipolentes em meio de expressão e prova. As principais características da nossa abordagem são o uso de variáveis bidimensionais para denotar setas e o uso da estrutura subjacente a essas variáveis para obter uma axiomatização do novo sistema. Na Seção 3.6, apresentamos um sistema dedutivo para LSH2 bastante próximo ao paradigma da lógica híbrida e axiomatizamos o quadrado. Na Seção 3.7, mostramos que LSH2 tem o poder de expressão de LPO.

Nossas principais contribuições nesse capítulo são: a apresentação de LSH e de uma axiomática (correta e completa) para esse sistema e a formulação modal de ARL [Mar01] de acordo com o paradigma usual da lógica híbrida. Essa formulação forneceu a primeira apresentação axiomática de ARL e mostra a relação entre a hibridização bidimensional e a hibridização padrão. Outra axiomática, obtida pela hibridização do sistema algébrico, diretamente, está apresentada em [FV02]. Parte do que é apresentado aqui encontra-se publicado em [FVVVB02a].

Variáveis bidimensionais

Uma motivação para a hibridização de AR vem da simbolização de enunciados sobre relações binárias. Conforme argumentado em [Mar01], uma alternativa mais adequada que LPO como formalismo de especificação para relações binárias é a linguagem obtida da linguagem algébrica relacional pela introdução do aparato híbrido. Nesta seção introdutória, ilustramos como o uso das variáveis bidimensionais pode ser uma abordagem adequada para a definição de um formalismo híbrido que estende AR no sentido de obter uma linguagem mais expressiva.

A Álgebra Relacional com Ligadores (ARL) é definida estendendo-se a linguagem de AR com variáveis $x, y, z, \ldots$ para denotar relações $\{(a,a)\}$, juntamente com operadores $\downarrow_x$, para a formação do termo $\downarrow_x R$ a partir do termo relacional R. A avaliação de $\downarrow_x R$ no par (a,b) é: *denote a relação* $\{(a,a)\}$ *por* x *e avalie o termo* R *em* (a,b).

Neste sistema podemos simbolizar qualquer enunciado elementar sobre relações binárias. Por exemplo, considere a relação de fraternidade: *irmãos(ãs) são duas pessoas* **que** *compartilham dois progenitores.* Vamos denotar as relações 'é um(a) irmão(ã) de' e 'é um progenitor de' por F e P, respectivamente. Nesta linguagem, temos a seguinte simbolização para a relação de fraternidade:

$$F := \neg\iota\delta \wedge \downarrow_x (\otimes(P \wedge ((\neg\iota\delta \wedge P \circ x \circ \otimes P) \circ P)) \circ \top)$$

Uma simbolização alternativa usando variáveis bidimensionais surge quando levamos em conta que, na definição da relação de fraternidade, o pronome relativo **que** se refere a um par de indivíduos:

$$F := \neg\iota\delta \wedge \downarrow_{(x,y)} (\otimes P \circ (\neg\iota\delta \wedge (P \circ (y,x) \circ \otimes P)) \circ P)$$

Na primeira simbolização, x denota a relação $\{(a,a)\}$ fazendo referência ao ponto a indiretamente; enquanto que, na segunda, o par (x,y) denota diretamente a seta (a,b), ao invés das suas coordenadas. Além disso, na primeira simbolização, $\downarrow_x$ liga x a a, enquanto que, na segunda, $\downarrow_{(x,y)}$ liga (x,y) a (a,b). Assim, o papel da variável x muda, dependendo se ela ocorre livre ou ligada. O papel da variável bidimensional (x,y), no entanto, permanece sempre o mesmo.

3.1 Lógica de Setas Híbrida

Nesta seção apresentamos a Lógica de Setas Híbrida (LSH), que é uma extensão de LS pelo processo padrão de hibridização [BS98]. LSH é obtida de LS pela introdução de variáveis para setas, operadores de satisfabilidade e ligadores $\downarrow$ da lógica híbrida.

A sintaxe de LSH é dada pelas definições a seguir.

Definição O *alfabeto* de LSH consiste de:

1. O alfabeto de LS.
2. Um conjunto de *variáveis para setas*: $\mathsf{VAR} = \{X_i : i \in I\!N\}$.
3. Operadores híbridos: @ (*operador de satisfabilidade*) e $\downarrow$ (*ligador*).

As *fórmulas* de LSH são as fórmulas de LS acrescidas das seguintes:

$$\alpha := X \mid @_X \alpha \mid \downarrow_X \alpha.$$

As estruturas, modelos e modelos enraizados de LSH são os mesmos de LS. A semântica das variáveis, do operador de satisfabilidade e do ligador $\downarrow$ é dada por assinalações de valor para as variáveis.

Definição Uma *assinalação* sobre uma estrutura de setas $\mathcal{E} = \langle S, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I} \rangle$ é uma função $G : \mathsf{VAR} \to S$.

Dizemos que $G : \mathsf{VAR} \to S$ é uma assinalação sobre um modelo de setas $\mathcal{M}$, ou um modelo de setas enraizado $\langle \mathcal{M}, A \rangle$, quando $\mathcal{M}$ é um modelo baseado em uma estrutura de setas $\mathcal{E} = \langle S, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I} \rangle$ e G é uma assinalação sobre $\mathcal{E}$.

Definição Seja G uma assinalação sobre uma estrutura de setas $\mathcal{E} = \langle S, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I} \rangle$, $A \in S$ e $X \in \mathsf{VAR}$. A *atualização* de G no valor de X por A, denotada por $(A/X)G$, é a assinalação sobre $\mathcal{E}$ definida como segue (para cada $Y \in \mathsf{VAR}$):

1. $(A/X)G(Y) = A$, se $Y = X$.
2. $(A/X)G(Y) = G(Y)$, se $Y \neq X$.

Definição O *significado* de uma fórmula α em um modelo de setas $\mathcal{M}$ com uma assinalação G é definido como em LS, pelo acréscimo das seguintes cláusulas (para cada $X \in \mathsf{VAR}$):

1. $X^{[\mathcal{M},G]} = \{G(X)\}$.
2. $(@_X\alpha)^{[\mathcal{M},G]} = \begin{cases} S, \text{ se } G(X) \in \alpha^{[\mathcal{M},G]} \\ \emptyset, \text{ se } G(X) \notin \alpha^{[\mathcal{M},G]} \end{cases}$
3. $(\downarrow_X \alpha)^{[\mathcal{M},G]} = \alpha^{[\mathcal{M},(A/X)G]}$

Assim, as condições de satisfabilidade de uma fórmula em um modelo de setas enraizado $\langle \mathcal{M}, A \rangle$ com uma assinalação G são dadas como em LS, com o acréscimo das seguintes cláusulas (para cada $X \in \mathsf{VAR}$):

1. $\mathcal{M}, A, G \models X$ se, e somente se, $G(X) = A$.
2. $\mathcal{M}, A, G \models @_X\alpha$ se, e somente se, $\mathcal{M}, G(X), G \models \alpha$.
3. $\mathcal{M}, A, G \models \downarrow_X \alpha$ se, e somente se, $\mathcal{M}, A, (A/X)G \models \alpha$.

Definição Uma fórmula α será *conseqüência* de um conjunto de fórmulas Γ em LSH, denotado por $\Gamma \models_{\text{LSH}} \alpha$, quando, para qualquer modelo de setas enraizado $\langle \mathcal{M}, A \rangle$ e qualquer assinalação G sobre $\langle \mathcal{M}, A \rangle$, temos que $\mathcal{M}, A, G \models \Gamma$ acarreta $\mathcal{M}, A, G \models \alpha$.

Uma fórmula α será *válida* em LSH, denotado por $\models_{\text{LSH}} \alpha$, quando $\emptyset \models_{\text{LSH}} \alpha$.

Como em LPO, é possível efetuar substituições de variáveis por variáveis.

Definição O resultado de *substituir* uma variável Y por uma variável X em uma fórmula α, denotado por $(X/Y)\alpha$, é definido como segue:

1. $(X/Y)* = *$, para $* \in LP \cup \{\iota\delta\}$.
2. $(X/Y)Y = X$.
3. $(X/Y)Z = Z$, para $Z \in \mathsf{VAR}$, $Y \neq Z$.
4. $(X/Y) * \alpha = *(X/Y)\alpha$, para $* \in \{\neg, \otimes\}$.
5. $(X/Y)(@_Z\alpha) = @_{(X/Y)Z}(X/Y)\alpha$, para $Z \in \mathsf{VAR}$.
6. $(X/Y)(\downarrow_Y \alpha) = \downarrow_Y \alpha$.
7. $(X/Y)(\downarrow_Z \alpha) = \downarrow_Z (X/Y)\alpha$, para $Z \in \mathsf{VAR}$, $Y \neq Z$.
8. $(X/Y)(\alpha * \beta) = (X/Y)\alpha * (X/Y)\beta$, para $* \in \{\wedge, \circ\}$.

Também como em LPO, ao fazer substituições com motivações lógicas, é preciso evitar quantificações acidentais. Por isso, define-se a noção de substitutibilidade.

Definição O conjunto das variáveis que ocorrem *livres* em uma fórmula α, denotado por $\mathsf{liv}(\alpha)$, é definido como segue:

1. $\mathsf{liv}(*) = \emptyset$, para $* \in LP \cup \{\iota\delta\}$.
2. $\mathsf{liv}(X) = \{X\}$, para $X \in \mathsf{VAR}$.
3. $\mathsf{liv}(*\alpha) = \mathsf{liv}(\alpha)$, para $* \in \{\neg, \otimes\}$.
4. $\mathsf{liv}(@_X\alpha) = \mathsf{liv}(\alpha) \cup \{X\}$, para $X \in \mathsf{VAR}$.
5. $\mathsf{liv}(\downarrow_X \alpha) = \mathsf{liv}(\alpha) - \{X\}$, para $X \in \mathsf{VAR}$.
6. $\mathsf{liv}(\alpha * \beta) = \mathsf{liv}(\alpha) \cup \mathsf{liv}(\beta)$, para $* \in \{\wedge, \circ\}$.

Definição A variável X é *substituível* pela variável Y em uma fórmula α nas seguintes condições:

1. X é substituível por Y em $*$, para $* \in LP \cup \mathsf{VAR} \cup \{\iota\delta\}$.
2. X será substituível por Y em $*\alpha$ se o for em α, para $* \in \{\neg, \otimes\} \cup \{@_Z : Z \in \mathsf{VAR}\}$.
3. X será substituível por Y em $\alpha_1 * \alpha_2$ se o for em α_1 e em α_2, para $* \in \{\wedge, \circ\}$.
4. X será substituível por Y em $\downarrow_Z \alpha$ se $X \notin \mathsf{liv}(\downarrow_Z \alpha)$, ou $Y \neq Z$ e X substituível por Y em α, para $Z \in \mathsf{VAR}$.

O Lema da Substituição, enunciado a seguir, internaliza a noção de atualização de uma assinalação na apresentação sintática do sistema, utilizando a noção de substituição de variáveis por variáveis.

Lema 3.1.1 (Lema da Substituição) *Seja $\mathcal{M}$ um modelo baseado em uma estrutura de setas $\mathcal{E} = \langle S, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I} \rangle$ e $X, Y \in \mathsf{VAR}$. Se X for substituível por Y em α, então, para qualquer assinalação G sobre $\mathcal{E}$ e qualquer $A \in S$, temos que $\mathcal{M}, A, (G(Y)/X)G \models \alpha$ se, e somente se, $\mathcal{M}, A, G \models (Y/X)\alpha$.*

Prova: Por indução na estrutura de α. ∎

3.2 Axiomática para LSH

Nesta seção apresentamos uma axiomática correta e completa para LSH. Mais especificamente, definimos uma relação de dedutibilidade, denotada por $\vdash_{\text{LSH}}$, entre conjuntos de fórmulas e fórmulas tal que, dados qualquer conjunto Γ de fórmulas de LSH e qualquer fórmula α de LSH, $\Gamma \vdash_{\text{LSH}} \alpha$ se, e somente se, $\Gamma \models_{\text{LSH}} \alpha$.

A axiomática, definida pelos axiomas e regras a seguir, é uma particularização da axiomática da lógica híbrida para o caso da lógica multimodal.

Axiomas

Normal-A) *Axiomas para uma lógica modal estendida normal.*

LS) *Axiomas para* LS.

Nome) $@_X X$.

Nomeação) $@_X Y \wedge @_X \alpha \rightarrow @_Y \alpha$.

Eliminação) $X \wedge @_X \alpha \rightarrow \alpha$.

Escopo) $@_X @_Y \alpha \leftrightarrow @_Y \alpha$.

Auto-Dual @) $@_X \alpha \leftrightarrow \neg @_X \neg \alpha$.

Ponte $\otimes$) $@_X \otimes Y \wedge @_Y \alpha \rightarrow @_X \otimes \alpha$.

Ponte $\circ$) $@_X (Y \circ Z) \wedge @_Y \alpha \wedge @_Z \beta \rightarrow @_X (\alpha \circ \beta)$.

Q1) $\downarrow_X \alpha \leftrightarrow \alpha$, se $X \notin \mathsf{liv}(\alpha)$.

Q2) $\downarrow_X \alpha \wedge Y \rightarrow (Y/X)\alpha$, se X for substituível por Y em α.

Q3) $\downarrow_X (X \rightarrow \alpha) \rightarrow \downarrow_X \alpha$.

Auto-Dual $\downarrow$) $\downarrow_X \alpha \leftrightarrow \neg \downarrow_X \neg \alpha$.

Regras de Inferência

Normal-R) *Regras para uma lógica modal estendida normal.*

Colagem $\otimes$) $\dfrac{@_X \otimes Y \wedge @_Y \alpha \rightarrow \beta}{@_X \otimes \alpha \rightarrow \beta}$, se Y é distinto de X e não ocorre em α nem em β.

Colagem $\circ$) $\dfrac{@_X (Y \circ Z) \wedge @_Y \alpha \wedge @_Z \beta \rightarrow \gamma}{@_X (\alpha \circ \beta) \rightarrow \gamma}$, se Y e Z são distintos de X e não ocorrem em α, β nem em γ.

O axioma Normal-A (que inclui as tautologias e os axiomas de distributividade — também para os operadores híbridos) e a regra Normal-R (que inclui a regra de Modus Ponens e as regras de necessitação — também para os operadores híbridos) garantem que LSH é uma lógica modal normal (isto garante o Lema da Troca de Equivalentes, por exemplo). Acrescentando o axioma LS temos uma extensão de LS. Os axiomas Nome, Nomeação, Eliminação e Escopo explicam o papel das variáveis de denotar setas. Os axiomas Auto-Dual dizem que os operadores híbridos são auto-duais, ao contrário dos operadores peirceanos. Os axiomas Ponte e as regras Colagem são particularizações, para o caso multi-modal, dos axiomas "bridge" e das regras "paste" da lógica híbrida [BT98]. As regras Colagem funcionam como recíprocas dos axiomas Ponte. Juntos, eles internalizam as condições de satisfabilidade dos operadores peirceanos. Os axiomas Q1, Q2 e Q3 dizem que o operador $\downarrow$ é um quantificador.

Definição Uma fórmula α será um *teorema* de LSH, denotado por $\vdash_{\text{LSH}} \alpha$, se existir uma seqüência de fórmulas $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ tal que $\alpha_n = \alpha$ e, para qualquer $i = 1, \ldots, n$:

1. α_i é um axioma, ou
2. α_i é uma conseqüência de anteriores na seqüência por uma das regras de inferência.

Definição Uma fórmula α será *derivada* de um conjunto de fórmulas Γ em LSH, denotado por $\Gamma \vdash_{\text{LSH}} \alpha$, se existir uma seqüência de fórmulas $\langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ tal que $\alpha_n = \alpha$ e, para qualquer $i = 1, \ldots, n$:

1. α_i é um teorema, ou
2. α_i é uma conseqüência de anteriores na seqüência pela regra de Modus Ponens.

Como LSH é uma lógica normal, temos o Lema da Troca de Equivalentes.

Definição Sejam α, β e γ fórmulas. O resultado de *trocar* β por γ em α, denotado por $[\gamma/\beta]\alpha$, é definido como segue:

1. $[\gamma/\beta]\beta = \gamma$ ou β, escolha arbitrária.

2. Se $\beta \neq *$, então $[\gamma/\beta]* = *$, para $* \in \mathsf{LP} \cup \mathsf{VAR} \cup \{\iota\delta\}$.
3. Se $\beta \neq *\alpha$, então $[\gamma/\beta] * \alpha = *[\gamma/\beta]\alpha$, para $* \in \{\neg, \otimes\} \cup \{@_X, \downarrow_X \colon X \in \mathsf{VAR}\}$.
4. Se $\beta \neq \alpha_1 * \alpha_2$, então $[\gamma/\beta](\alpha_1 * \alpha_2) = [\gamma/\beta]\alpha_1 * [\gamma/\beta]\alpha_2$, para $* \in \{\wedge, \circ\}$.

Note que a operação de troca não produz uma única fórmula como resultado, mas um conjunto de fórmulas. A notação $[\gamma/\beta]\alpha$ é utilizada ambiguamente para o conjunto dos resultados e para cada uma das fórmulas nesse conjunto. No que segue, discriminamos os axiomas e regras incluídos em Normal-A e Normal-R, denotando por LP as conseqüências da lógica proposicional, por Dist os axiomas de distribuição (dos duais dos operadores modais pela implicação), por Nec as regras de necessitação e por Dual os axiomas para os duais dos operadores modais [BRV01]. Os duais dos operadores peirceanos são denotados por $\underline{\otimes}$ e $\underline{\circ}$, os operadores híbridos são auto-duais.

Lema 3.2.1 (Troca de Equivalentes) *Se* $\vdash_{\mathrm{LSH}} \gamma \leftrightarrow \beta$, *então* $\vdash_{\mathrm{LSH}} [\gamma/\beta]\alpha \leftrightarrow \alpha$.

Prova: Indução na estrutura de α, usando Normal. ■

O Lema da Troca de Equivalentes, Teq, é uma ferramenta muito útil na prova de teoremas.

Proposição 3.2.1 *As seguintes fórmulas são teoremas de* LSH*:*

Negação) $@_X\neg\alpha \leftrightarrow \neg @_X\alpha$.
Conjunção) $@_X(\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow @_X\alpha \wedge @_X\beta$.
Introdução) $X \wedge \alpha \rightarrow @_X\alpha$.
Troca) $@_XY \leftrightarrow @_YX$.
Lugar) $\downarrow_X X$.
Ponte $\downarrow$) $@_X(X/Y)\alpha \leftrightarrow @_X \downarrow_Y \alpha$, *se* Y *for substituível por* X *em* α.
T1) $\downarrow_X (X/Y)\alpha \leftrightarrow \downarrow_X\downarrow_Y \alpha$, *se* Y *for substituível por* X *em* α.

Prova: Usando Normal, Nome, Nomeação, Eliminação, Auto-Dual @, Q2, Q3 e Teq. ■

Em LPO, a não-substitutibilidade de uma variável por um termo não é impedimento, na prática, para a realização de uma substituição. A solução para essa dificuldade técnica é o uso de variantes alfabéticas. LSH também possui esse recurso.

Definição Seja α uma fórmula e $X, Y \in \mathsf{VAR}$. Uma *variante alfabética* de α com X livre para Y, denotada por α', é definida como segue:

1. $*' = *$, para $* \in LP \cup \mathsf{VAR} \cup \{\iota\delta\}$.
2. $(\alpha * \beta)' = \alpha' * \beta'$, para $* \in \{\wedge, \circ\}$.
3. $(*\alpha)' = *(\alpha')$, para $* \in \{\neg, \otimes\} \cup \{@_X : X \in \mathsf{VAR}\}$.
4. $(\downarrow_X \alpha)' = \downarrow_X (\alpha')$ e $(\downarrow_Z \alpha)' = \downarrow_W (W/Z)\alpha'$, onde W é variável nova, se $X \neq Z$.

Lema 3.2.2 (Variante Alfabética) *Se α' for uma variante alfabética de α com Y livre para X, então:*

1. $\mathsf{liv}(\alpha) = \mathsf{liv}(\alpha')$.

2. $\vdash_{\text{LSH}} \alpha \leftrightarrow \alpha'$.

3. Y é substituível por X em α'.

Prova: Itens 1 e 3 seguem direto das definições, por indução na estrutura de α. Item 2 por indução na estrutura de α, usando Normal, Q1, T1 e Teq. ∎

Teorema 3.2.1 (Corretude) $\Gamma \vdash_{\text{LSH}} \alpha$ *acarreta* $\Gamma \models_{\text{LSH}} \alpha$.

Prova: Os axiomas são válidos. As regras de inferência preservam validade. A regra MP preserva satisfabilidade. ∎

3.3 Completude para LSH

Vamos agora provar a recíproca do Teorema 3.2.1, a completude de LSH. Vamos utilizar a técnica de construção de modelo canônico, usual na lógica modal, e a de extensão de conjuntos consistentes a conjuntos consistentes com testemunhas, utilizada em provas de existência de modelos na presença de quantificadores. Essa mistura é típica da lógica híbrida. A prova que apresentamos é uma aplicação das técnicas apresentadas em [BT98], para o caso da hibridização de LS.

Definição Seja Σ um conjunto de fórmulas.

1. Σ é *nomeado* quando existe $X \in \mathsf{VAR}$ tal que $X \in \Sigma$.

2. Σ tem *testemunhas para a reversão* quando, para qualquer $X \in \mathsf{VAR}$ e qualquer fórmula α, se $@_X \otimes \alpha \in \Sigma$, então existe $Y \in \mathsf{VAR}$ tal que $@_X \otimes Y \wedge @_Y\alpha \in \Sigma$.

3. Σ tem *testemunhas para a composição* quando, para qualquer $X \in \mathsf{VAR}$ e quaisquer fórmulas α e β, se $@_X(\alpha \circ \beta) \in \Sigma$, então existem $Y, Z \in \mathsf{VAR}$ tais que $@_X(Y \circ Z) \wedge @_Y\alpha \wedge @_Z\beta \in \Sigma$.

4. Σ tem *testemunhas* quando Σ tem testemunhas para a reversão e para a composição.

Observe que, na lógica híbrida, definimos testemunhas para os existenciais contidos nas modalidades.

Dado um conjunto consistente maximal (CCM) Σ, vamos definir um sub-modelo do modelo de setas canônico, restringindo seu domínio a conjuntos consistentes maximais (CCMs) determinados por Σ e pelas variáveis de modo que tenhamos um CCM Δ_X^Σ para cada variável X. Assim, teremos um sub-modelo onde todos os estados são denotados por uma variável. Estes CCMs Δ_X^Σ são constituídos pelas fórmulas que Σ garantem serem verdadeiras no estado nomeado por X.

Definição Dado um CCM Σ, para cada $X \in \mathsf{VAR}$, definimos o conjunto $\Delta_X^\Sigma = \{\alpha : @_X\alpha \in \Sigma\}$.

Lema 3.3.1 *Δ_X^Σ é um CCM, qualquer que seja $X \in \mathsf{VAR}$.*

Prova:

1. Δ_X^Σ é consistente:

Suponhamos que existem $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \Delta_X^\Sigma$ tais que $\vdash_{\mathrm{LSH}} \neg(\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_n)$. Por Nec@, $\vdash_{\mathrm{LSH}} @_X\neg(\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_n)$. Por Negação, $\vdash_{\mathrm{LSH}} \neg@_X(\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_n)$. Como $\delta_1, \ldots, \delta_n \in \Delta_X^\Sigma$, $@_X\delta_1, \ldots, @_X\delta_n \in \Sigma$. Por Conjunção, $@_X(\delta_1 \wedge \cdots \wedge \delta_n) \in \Sigma$, uma contradição.

2. Para cada fórmula α, temos que $\alpha \in \Delta_X^\Sigma$ ou $\neg\alpha \in \Delta_X^\Sigma$:

Suponhamos que exista uma fórmula α tal que $\alpha \notin \Delta_X^\Sigma$ e $\neg\alpha \notin \Delta_X^\Sigma$. Assim, $@_X\alpha \notin \Sigma$ e $@_X\neg\alpha \notin \Sigma$. Por Negação, $\neg@_X\alpha \notin \Sigma$, uma contradição. ∎

Dado um CCM Σ, definimos o modelo induzido por Σ como a restrição do modelo de setas canônico aos CCMs da forma Δ_X^Σ. Definimos também a assinalação de valores às variáveis induzida por Σ da maneira natural, associando a cada variável X o CCM Δ_X^Σ.

Definição Seja Σ um CCM.

1. O *modelo induzido* por Σ é $\mathcal{M}^\Sigma = \langle S^\Sigma, \mathsf{C}^\Sigma, \mathsf{R}^\Sigma, \mathsf{I}^\Sigma, V^\Sigma \rangle$, onde $S^\Sigma = \{\Delta_X^\Sigma : X \in \mathsf{VAR}\}$, $V^\Sigma(p) = \{\Delta_X^\Sigma : p \in \Delta_X^\Sigma\}$ e C^Σ, R^Σ e I^Σ são as restrições a S^Σ das relações de acessibilidade canônicas C^C, R^C e I^C de LS.
2. A *assinalação induzida* por Σ é $G^\Sigma : \mathsf{VAR} \to S^\Sigma$ tal que $G^\Sigma(X) = \Delta_X^\Sigma$.

No modelo de setas canônico, reduzimos propriedades importantes do modelo a relações de pertinência aos CCMs. No modelo induzido por Σ, os estados são todos nomeados por alguma variável e certas características podem ser reduzidas a relações de pertinência entre variáveis que nomeiam os CCMs e os próprios CCMs.

Lema 3.3.2 *Se $X \in \Delta_Y^\Sigma$, então $\Delta_X^\Sigma = \Delta_Y^\Sigma$.*

Prova:

$$\begin{aligned} X \in \Delta_Y^\Sigma &\Longrightarrow @_Y X \in \Sigma && (\text{def } \Delta_X^\Sigma) \\ &\Longrightarrow @_X Y \in \Gamma\ (*) && (\mathsf{Troca}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \in \Delta_X^\Sigma &\Longleftrightarrow @_X \alpha \in \Sigma && (\text{def } \Delta_X^\Sigma) \\ &\Longleftrightarrow @_Y \alpha \in \Sigma && (\mathsf{Nomeação}, *) \\ &\Longleftrightarrow \alpha \in \Delta_Y^\Sigma && (\text{def } \Delta_X^\Sigma)\ \blacksquare \end{aligned}$$

Lema 3.3.3 *Seja Σ for um CCM.*

1. $Y \circ Z \in \Delta_X^\Sigma$ se, e somente se, $\mathsf{C}^\Sigma(\Delta_X^\Sigma, \Delta_Y^\Sigma, \Delta_Z^\Sigma)$.
2. $\otimes Y \in \Delta_X^\Sigma$ se, e somente se, $\mathsf{R}^\Sigma(\Delta_X^\Sigma, \Delta_Y^\Sigma)$.

Prova: 1.
($\Longrightarrow$) Suponhamos que $Y \circ Z \in \Delta_X^\Sigma$. Pela definição de Δ_X^Σ, $@_X(Y \circ Z) \in \Sigma$ (1). Seja $\alpha \in \Delta_Y^\Sigma$ e $\beta \in \Delta_Z^\Sigma$. Daí, $@_Y\alpha, @_Z\beta \in \Sigma$ (2). De (1) e (2), por Ponte $\circ$, temos que $@_X(\alpha \circ \beta) \in \Sigma$. Pela definição de Δ_X^Σ, temos que $\alpha \circ \beta \in \Delta_X^\Sigma$. Pela definição de C^Σ, temos que $\mathsf{C}^\Sigma(\Delta_X^\Sigma, \Delta_Y^\Sigma, \Delta_Z^\Sigma)$.

($\Longleftarrow$) Suponhamos que $\mathsf{C}^\Sigma(\Delta^\Sigma_X, \Delta^\Sigma_Y, \Delta^\Sigma_Z)$. Por Nome, temos que $@_Y Y, @_Z Z \in \Sigma$. Pela definição de Δ^Σ_Y, temos que $Y \in \Delta^\Sigma_Y$ e $Z \in \Delta^\Sigma_Z$. Pela definição de C^Σ, temos que $Y \circ Z \in \Delta^\Sigma_X$.

2. Análoga, usando Nome e Ponte $\otimes$. ∎

A estrutura $\mathcal{E}^\Sigma = \langle S^\Sigma, \mathsf{C}^\Sigma, \mathsf{R}^\Sigma, \mathsf{I}^\Sigma \rangle$ é uma estrutura de setas. Para verificar esse fato, como $\mathcal{E}^\Sigma$ é uma sub-estrutura da estrutura de setas canônica $\mathcal{E}^C = \langle S^C, C^C, R^C, I^C \rangle$, basta provar o lema a seguir.

Lema 3.3.4 *Seja Σ um CCM com testemunhas.*

1. Qualquer que seja $X \in \mathsf{VAR}$, existe $Y \in \mathsf{VAR}$ tal que $\mathsf{R}^\Sigma(\Delta^\Sigma_X, \Delta^\Sigma_Y)$.

2. Qualquer que seja $X \in \mathsf{VAR}$, existe $Y \in \mathsf{VAR}$ tal que $\mathsf{I}^\Sigma(\Delta^\Sigma_Y)$ e $\mathsf{C}^\Sigma(\Delta^\Sigma_X, \Delta^\Sigma_Y, \Delta^\Sigma_X)$.

Prova: 1. Seja $X \in \mathsf{VAR}$. Por Nome, temos que $@_X X \in \Sigma$. Pela definição de Δ^Σ_X, temos que $X \in \Delta^\Sigma_X$. Por LS, como Δ^Σ_X é CCM (Lema 3.3.1), temos que $\otimes\otimes X \in \Delta^\Sigma_X$. Pela definição de Δ^Σ_X, temos que $@_X \otimes \otimes X \in \Sigma$. Como Σ tem testemunhas para a reversão, existe $Y \in \mathsf{VAR}$ tal que $@_X \otimes Y \wedge @_Y \otimes X \in \Sigma$. Pelo Lema 3.3.3, temos que $\mathsf{R}^\Sigma(\Delta^\Sigma_X, \Delta^\Sigma_Y)$.

2. Seja $X \in \mathsf{VAR}$. Por LS, temos que $X \to \iota\delta \circ X \in \Sigma$. Por Normal, temos que $@_X X \to @_X(\iota\delta \circ X) \in \Sigma$. Por Nome, temos que $@_X X \in \Sigma$. Logo, $@_X(\iota\delta \circ X) \in \Sigma$. Como Σ tem testemunhas para a composição, existem $Y, Z \in \mathsf{VAR}$ tais que $@_X(Y \circ Z) \wedge @_Y \iota\delta \wedge @_Z X \in \Sigma$. Pela definição de Δ^Σ_X, temos que $Y \circ Z \in \Delta^\Sigma_X$ (1), $\iota\delta \in \Delta^\Sigma_Y$(2) e $X \in \Delta^\Sigma_Z$ (3). De (1), pelo Lema 3.3.3, temos que $\mathsf{C}^\Sigma(\Delta^\Sigma_X, \Delta^\Sigma_Y, \Delta^\Sigma_Z)$. De (2), pela definição de I^Σ, temos que $\mathsf{I}^\Sigma(\Delta^\Sigma_Y)$. De (3), pelo Lema 3.3.2, temos que $\Delta^\Sigma_X = \Delta^\Sigma_Z$. Logo, $\mathsf{C}^\Sigma(\Delta^\Sigma_X, \Delta^\Sigma_Y, \Delta^\Sigma_X)$. ∎

Em um modelo induzido por um CCM com testemunhas, como no modelo de setas canônico, também a satisfatibilidade de uma fórmula em um dada seta/CCM pode ser reduzida à pertinência da fórmula ao CCM/seta.

Lema 3.3.5 (Lema da Satisfatibilidade) *Se Σ for um CCM com testemunhas, então, para cada fórmula α e cada $X \in \mathsf{VAR}$, teremos que:*

$$\mathcal{M}^\Sigma, \Delta^\Sigma_X, G^\Sigma \models \alpha \text{ se, e somente se, } \alpha \in \Delta^\Sigma_X.$$

Prova: Por indução na estrutura de α. Os casos booleanos são triviais, os casos peirceanos seguem do fato de que Σ tem testemunhas, o caso das variáveis segue do Lema 3.3.2, o caso do operador de satisfação depende do axioma Escopo, o caso do ligador depende do teorema Ponte $\downarrow$ e do Lema da Substituição, aplicado sobre variantes alfabéticas. ∎

Para usar o Lema da Satisfatibilidade para provar o Lema da Existência de Modelos, devemos ainda garantir que, dado um conjunto consistente Γ, existe um CCM com testemunhas Σ tal que Γ está contido em algum dos CCMs do modelo induzido por Σ. Para garantir esses dois fatos, no lema a seguir mostramos que, se Σ for um CCM nomeado, então Σ será um dos CCMs do modelo induzido por Σ; e no Lema de Lindenbaum Estendido mostramos que qualquer conjunto consistente pode ser estendido a um CCM nomeado com testemunhas.

Lema 3.3.6 *Dado um CCM Σ nomeado, existe $X \in \mathsf{VAR}$ tal que $\Sigma = \Delta_X^\Sigma$.*

Prova: Como Σ é nomeado, existe $X \in \mathsf{VAR}$ tal que $X \in \Sigma$. Suponhamos que $\Sigma \neq \Delta_X^\Sigma$. Como Σ e Δ_X^Σ são CCMs (pelo Lema 3.3.1), existe uma fórmula α tal que $\alpha \in \Sigma$ e $\neg\alpha \in \Delta_X^\Sigma$. Daí, $@_X\neg\alpha \in \Sigma$. Como $X \in \Sigma$, por Eliminação, temos que $\neg\alpha \in \Sigma$, uma contradição. ∎

Seja LSH^N o sistema LSH com linguagem acrescida de um conjunto de variáveis novas VARNOV. Seja $\mathsf{VAR}^N = \mathsf{VAR} \cup \mathsf{VARNOV}$.

Lema 3.3.7 (Lema de Lindenbaum Estendido) *Todo conjunto consistente de* LSH *pode ser estendido a um CCM nomeado com testemunhas de* LSH^N.

Prova:

Seja $\mathsf{VARNOV} = \{X_0, X_1, X_2, \ldots\}$ uma enumeração das variáveis novas e $\Gamma_0 = \Gamma \cup \{X_0\}$.

Fato 1) Γ_0 é consistente:

Suponhamos que existam $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$ tais que $\vdash_{\mathrm{LSH}^N} X_0 \to \neg(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n)$. Por Nec$\downarrow$, $\vdash_{\mathrm{LSH}^N} \downarrow_{X_0} (X_0 \to \neg(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n))$. Por Q3, $\vdash_{\mathrm{LSH}^N} \downarrow_{X_0} \neg(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n)$. Por Q1, como X_0 não ocorre em Γ, temos que $\vdash_{\mathrm{LSH}^N} \neg(\gamma_1 \wedge \cdots \wedge \gamma_n)$, uma contradição, já que Γ é consistente.

Seja $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ uma enumeração das fórmulas de LSH^N, $\Sigma_0 = \Gamma_0$ e Σ_{m+1} definido como segue:

1. $\Sigma_{m+1} = \Sigma_m$, se $\Sigma_m \cup \{\alpha_m\}$ for inconsistente.
2. $\Sigma_{m+1} = \Sigma_m \cup \Theta$, caso contrário, com:

a) $\Theta = \{\alpha_m\}$, se α_m não for da forma $@_X \otimes \alpha$ nem da forma $@_X(\alpha \circ \beta)$.

b) $\Theta = \{@_X \otimes \alpha, @_X \otimes Y, @_Y\alpha\}$, se α_m for $@_X \otimes \alpha$ (sendo Y a próxima variável na enumeração de VARNOV que não ocorre em Σ_m nem em $@_X \otimes \alpha$).

c) $\Theta = \{@_X(\alpha \circ \beta), @_X(Y \circ Z), @_Y\alpha, @_Z\beta\}$, se α_m for $@_X(\alpha \circ \beta)$ (sendo Y e Z as próximas variáveis na enumeração de VARNOV que não ocorrem em Σ_m nem em $@_X(\alpha \circ \beta)$).

Fato 2) Cada Σ_n é consistente:

Caso a) $\Sigma_{m+1} = \Sigma_m \cup \{\alpha_m\}$ é consistente (por construção).

Caso b) $\Sigma_{m+1} = \Sigma_m \cup \{@_X \otimes \alpha, @_X \otimes Y, @_Y\alpha\}$ (sendo Y a próxima variável na enumeração de VARNOV que não ocorre em Σ_m nem em $@_X \otimes \alpha$): suponha que $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \Sigma_m \cup \{@_X \otimes \alpha\}$ tais que $\vdash_{\mathrm{LSH}^N} @_X \otimes Y \wedge @_Y\alpha \to \neg(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k)$. Por $\mathsf{Colagem}\ \otimes$, $\vdash_{\mathrm{LSH}^N} @_X \otimes \alpha \to \neg(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k)$, pois Y não ocorre em Σ_m nem em $@_X \otimes \alpha$. Portanto, $\Sigma_m \cup \{@_X \otimes \alpha\} \vdash_{\mathrm{LSH}^N} \neg(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k)$, uma contradição.

Caso c) $\Sigma_{m+1} = \Sigma_m \cup \{@_X(\alpha \circ \beta), @_X(Y \circ Z), @_Y\alpha, @_Z\beta\}$ (com Y e Z sendo as próximas variáveis na enumeração de VARNOV que não ocorrem em Σ_m nem em $@_X(\alpha \circ \beta)$): suponha que $\theta_1, \ldots, \theta_k \in \Sigma_m \cup \{@_X(\alpha \circ \beta)\}$ tais que $\vdash_{\mathrm{LSH}^N} @_X(Y \circ Z) \wedge @_Y\alpha \wedge @_Z\beta \to \neg(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k)$. Por $\mathsf{Colagem}\ \circ$, $\vdash_{\mathrm{LSH}^N} @_X(\alpha \circ \beta) \to \neg(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k)$, pois Y e Z não ocorrem em Σ_m nem em $@_X(\alpha \circ \beta)$. Portanto, $\Sigma_m \cup \{@_X(\alpha \circ \beta)\} \vdash \neg(\theta_1 \wedge \cdots \wedge \theta_k)$, uma contradição.

Seja $\Sigma = \bigcup_{n \geq 0} \Sigma_n$.

Fato 3) Σ é nomeado:

De fato, $X_0 \in \Gamma_0 = \Sigma_0 \subseteq \Sigma$.

Fato 4) Σ tem testemunhas para a reversão:

Suponha que $@_X \otimes \alpha \in \Sigma$. Seja m tal que $@_X \otimes \alpha = \alpha_m$. Logo, $\Sigma_m \cup \{\alpha_m\}$ é consistente. E como Σ é CCM, $@_X \otimes Y \wedge @_Y\alpha \in \Sigma_{m+1} \subseteq \Sigma$, para $Y \in \mathsf{VARNOV}$.

Fato 5) Σ tem testemunhas para a composição:

Suponha que $@_X(\alpha \circ \beta) \in \Sigma$. Seja m tal que $@_X(\alpha \circ \beta) = \alpha_m$. Logo, $\Sigma_m \cup \{\alpha_m\}$

é consistente. E como Σ é CCM, $@_X(Y \circ Z) \wedge @_Y\alpha \wedge @_Z\beta \in \Sigma_{m+1} \subseteq \Sigma$, para $Y, Z \in \mathsf{VARNOV}$.

Dos Fatos 1–5, temos que Σ é CCM nomeado com testemunhas e $\Gamma \subseteq \Sigma$. ∎

Lema 3.3.8 (Existência de Modelos) *Todo conjunto consistente de fórmulas de* LSH *é satisfeito em um modelo de setas enraizado com uma dada assinalação.*

Prova: Conseqüência direta dos Lemas 3.3.5, 3.3.7, e 3.3.6. ∎

Finalmente, como um corolário do Lema da Existência de Modelos, temos o Teorema da Completude.

Teorema 3.3.1 (Completude) *Se* $\Gamma \models_{\mathrm{LSH}} \alpha$, *então* $\Gamma \vdash_{\mathrm{LSH}} \alpha$.

3.4 Lógica de Setas Híbrida Bidimensional

Nesta seção apresentamos a Lógica de Setas Híbrida Bidimensional (LSH2), que também é uma extensão de LS pelo processo de hibridização. Mas, diferentemente de LSH, ao estender LS para obter LSH2, observamos o aspecto bidimensional de LS. Na semântica bidimensional de LS, as setas possuem primeira e segunda coordenadas. Esta característica foi capturada, na sintaxe, pela introdução de variáveis bidimensionais e, na semântica, pela restrição a assinalações de valor para as variáveis que respeitam esta característica.

O sistema LSH2 é uma versão de LSH restrita à semântica quadrada e a uma classe de assinalações de valor às variáveis específica. Nessa versão, o conjunto de variáveis VAR é um produto cartesiano $\mathsf{Var} \times \mathsf{Var}$.

Definição O *alfabeto* de LSH2 é o alfabeto de LSH com um conjunto de variáveis $\mathsf{Var} \times \mathsf{Var} = \{(x_i, x_j) : i, j \in I\!N\}$.

As *fórmulas* de LSH2 são as fórmulas de LS acrescidas das seguintes:

$$\alpha := (x, y) \mid @_{(x,y)}\alpha \mid \downarrow_{(x,y)} \alpha.$$

Estruturas para LSH2 são estruturas de setas quadradas e modelos para LSH2 são modelos baseados em estruturas de setas quadradas. Assinalações de valor para as variáveis em LSH2, sobre um quadrado $\mathcal{E} = \langle \mathcal{U} \rangle$, associam pares de variáveis a pares $(a, b) \in \mathcal{U} \times \mathcal{U}$. Em LSH2, impomos uma restrição à classe das assinalações: apenas assinalações que respeitem a bidimensionalidade das variáveis serão consideradas.

Definição Seja $\mathcal{E} = \langle \mathcal{U} \rangle$ um quadrado.
1. Dada uma função $g : \mathsf{Var} \to \mathcal{U}$, a assinalação *induzida* por g é $G_g : \mathsf{Var} \times \mathsf{Var} \to \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ tal que $G_g(x, y) = (g(x), g(y))$, para cada $x, y \in \mathsf{Var}$.
2. Uma assinalação $G : \mathsf{Var} \times \mathsf{Var} \to \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ será *bidimensional* se existir uma função $g : \mathsf{Var} \to \mathcal{U}$ tal que $G = G_g$.

Seguindo esta intuição, as definições de atualização de uma assinalação e de substituição e substitutibilidade para variáveis bidimensionais serão definidas a partir de definições de conceitos correspondentes para coordenadas.

Definição Dada a assinalação bidimensional G_g sobre um quadrado $\mathcal{E} = \langle \mathcal{U} \rangle$, $x \in \mathsf{Var}$ e $a \in \mathcal{U}$, a *atualização* de G_g na coordenada x por a é definida como $(a/x)G_g =_{def} G_{(a/x)g}$.

Em LSH, definimos a satisfabilidade de uma fórmula $\downarrow_X \alpha$ em um modelo enraizado $\langle \mathcal{M}, A \rangle$ com uma assinalação G em termos da satisfabilidade de α no modelo enraizado $\langle \mathcal{M}, A \rangle$ com a assinalação atualizada $(A/X)G$. Em LSH2, queremos definir a satisfabilidade de uma fórmula $\downarrow_{(x,y)} \alpha$ em um modelo enraizado $\langle \mathcal{M}, (a, b) \rangle$ com uma assinalação bidimensional G_g em termos da satisfabilidade de α no mesmo modelo enraizado, mas com a assinalação atualizada $((a, b)/(x, y))G_g$. Como em LSH2 as assinalações devem ser bidimensionais, queremos que a assinalação atualizada $((a, b)/(x, y))G_g$, obtida de uma assinalação bidimensional G_g, seja bidimensional também. Isto implica a propagação da atualização de G_g na variável bidimensional (x, y) pelas variáveis bidimensionais $(x, z), (z, x), (y, z), (z, y)$, para qualquer $z \in \mathsf{Var}$. Assim, temos a seguinte definição:

Definição Seja G_g uma assinalação bidimensional sobre um quadrado $\mathcal{E} = \langle \mathcal{U} \rangle$, $a, b \in \mathcal{U}$ e $x, y \in \mathsf{Var}$. A *atualização* de G_g no valor de (x, y) por (a, b) é a assinalação bidimensional sobre $\mathcal{E}$ definida por $((a, b)/(x, y))G_g =_{def} (a/x)(b/y)G_g$.

A escolha da ordem da atualização das coordenadas é arbitrária, devendo apenas concordar com a ordem das substituições de coordenadas de variáveis na definição de substituição de variáveis bidimensionais, para que tenhamos o Lema da Substituição (enunciado e provado adiante).

É importante observar que os significados do ligador $\downarrow$ em LSH e em LSH2 são diferentes, em virtude da definição anterior.

Em LSH2, as condições de satisfabilidade para fórmulas em um modelo enraizado $\langle \mathcal{M}, (a,b) \rangle$ baseado em um quadrado $\mathcal{E} = \langle \mathcal{U} \rangle$, com uma assinalação bidimensional G_g, podem ser reescritas como segue (para quaisquer $x, y \in \mathsf{Var}$):

1. $\mathcal{M}, (a,b), G_g \models (x,y)$ se, e somente se, $g(x) = a$ e $g(y) = b$.
2. $\mathcal{M}, (a,b), G_g \models @_{(x,y)}\alpha$ se, e somente se, $\mathcal{M}, (g(x), g(y)), G_g \models \alpha$.
3. $\mathcal{M}, (a,b), G_g \models \downarrow_{(x,y)} \alpha$ se, e somente se, $\mathcal{M}, (a,b), (a/x)(b/y)G_g \models \alpha$.

Escrevemos $\mathcal{M}, (a,b), G_g \models \Gamma$ quando $\mathcal{M}, (a,b), G_g \models \alpha$ para cada $\alpha \in \Gamma$.

As definições de *conseqüência* e *validade* em LSH2 são análogas àquelas de LSH.

Substituições de variáveis bidimensionais podem ser feitas. Seguindo a intuição semântica, as substituições serão definidas coordenada a coordenada.

Definição Seja α uma fórmula e $x, y \in \mathsf{Var}$. O resultado de *substituir* y por x em α, denotado por $(x/y)\alpha$, é definido como segue:

1. $(x/y)* = *$, para $* \in LP \cup \{\iota\delta\}$.
2. $(x/y)(z,w) = ((x/y)z, (x/y)w)$, para $z, w \in \mathsf{Var}$.
   (Com $(u'/u)u = u'$ e $(u'/u)v = v$ quando $u \neq v$, para $u', u, v \in \mathsf{Var}$.)
3. $(x/y) * \alpha = *(x/y)\alpha$, para $* \in \{\neg, \otimes\}$.
4. $(x/y)@_{(z,w)}\alpha = @_{(x/y)(z,w)}(x/y)\alpha$, para $z, w \in \mathsf{Var}$.
5. $(x/y) \downarrow_{(z,w)} \alpha = \downarrow_{(z,w)} \alpha$, quando $y = z$ ou $y = w$, para $z, w \in \mathsf{Var}$.
6. $(x/y) \downarrow_{(z,w)} \alpha = \downarrow_{(z,w)} (x/y)\alpha$, quando $y \neq z$ e $y \neq w$, para $z, w \in \mathsf{Var}$.
7. $(x/y)(\alpha * \beta) = (x/y)\alpha * (x/y)\beta$, para $* \in \{\wedge, \circ\}$.

Definição Seja α uma fórmula e $x, y, z, w \in \mathsf{Var}$. O resultado de *substituir* (x,y) por (z,w) em α, denotado por $((z,w)/(x,y))\alpha$, é definido como $(z/x)(w/y)\alpha$.

Conforme comentamos anteriormente, a ordem da substituição das coordenadas na definição de substituição de variáveis bidimensionais é arbitrária, devendo apenas concordar com a ordem da atualização de coordenadas na definição de atualização de assinalações, para que tenhamos o Lema da Substituição.

A definição de substitutibilidade de coordenadas é feita a partir de definição de ocorrência livre de uma coordenada em uma fórmula. A definição de substitutibilidade de variáveis bidimensionais é feita a partir da definição correspondente para coordenadas.

Definição O conjunto das coordenadas que ocorrem *livres* em uma fórmula α, denotado por $\mathsf{liv}(\alpha)$, é definido como segue:

1. $\mathsf{liv}(*) = \emptyset$, para $* \in LP \cup \{\iota\delta\}$.
2. $\mathsf{liv}((x,y)) = \{x,y\}$, para $x, y \in \mathsf{Var}$.
3. $\mathsf{liv}(*\alpha) = \mathsf{liv}(\alpha)$, para $* \in \{\neg, \otimes\}$.
4. $\mathsf{liv}(@_{(x,y)}\alpha) = \mathsf{liv}(\alpha) \cup \{x,y\}$, para $x, y \in \mathsf{Var}$.
5. $\mathsf{liv}(\downarrow_{(x,y)} \alpha) = \mathsf{liv}(\alpha) - \{x,y\}$, para $x, y \in \mathsf{Var}$.
6. $\mathsf{liv}(\alpha * \beta) = \mathsf{liv}(\alpha) \cup \mathsf{liv}(\beta)$, para $* \in \{\wedge, \circ\}$.

Definição Seja α uma fórmula e $x, y \in \mathsf{Var}$. A variável x é *substituível* por y em α nas seguintes condições:

1. x é substituível por y em $*$, para $* \in LP \cup (\mathsf{Var} \times \mathsf{Var}) \cup \{\iota\delta\}$.
2. x será substituível por y em $*\alpha$ se x for substituível por y em α, para $* \in \{\neg, \otimes\} \cup \{@_{(z,w)} : z, w \in \mathsf{Var}\}$.
3. x será substituível por y em $\alpha * \beta$ se x for substituível por y em α e em β, para $* \in \{\wedge, \circ\}$.
4. x será substituível por y em $\downarrow_{(z,w)} \alpha$ se $x \notin \mathsf{liv}(\downarrow_{(z,w)} \alpha)$ ou $y \neq z$, $y \neq w$ e x substituível por y em α, para $z, w \in \mathsf{Var}$.

Definição Seja α uma fórmula e $x, y, z, w \in \mathsf{Var}$. A variável bidimensional (z, w) será *substituível* pela variável bidimensional (x, y) em α se z for substituível por x em $(y/w)\alpha$ e w for substituível por y em α.

Vamos provar o Lema da Substituição para variáveis bidimensionais por uma redução ao caso de substituição de coordenadas. Inicialmente, definimos atualização de uma assinalação no valor de uma coordenada.

Lema 3.4.1 (Lema da Substituição para coordenadas) *Seja $\mathcal{M}$ um modelo baseado em um quadrado $\mathcal{E} = \langle \mathcal{U} \rangle$ e $x, y \in$ Var. Se x for substituível por y em α, então para quaisquer $a, b \in \mathcal{U}$ e qualquer assinalação bidimensional G_g sobre $\mathcal{E}$, temos que:*

$$\mathcal{M}, (a,b), (g(y)/x)G_g \models \alpha \iff \mathcal{M}, (a,b), G_g \models (y/x)\alpha.$$

Prova: Por indução na estrutura de α. ∎

Corolário 3.4.1 (Lema da Substituição) *Seja $\langle \mathcal{M}, (a,b) \rangle$ um modelo enraizado sobre um quadrado $\mathcal{E} = \langle \mathcal{U} \rangle$, G_g uma assinalação bidimensional sobre $\mathcal{E}$ e $x, y, z, w \in$ Var. Se (x, y) for substituível por (z, w) em α, então:*

$$\mathcal{M}, (a,b), (G_g(z,w)/(x,y))G_g \models \alpha \iff \mathcal{M}, (a,b), G_g \models ((z,w)/(x,y))\alpha.$$

Prova: $\mathcal{M}, (a,b), (G_g(z,w)/(x,y))G_g \models \alpha$

$$\begin{array}{lll} \iff & \mathcal{M}, (a,b), ((g(z), g(w))/(x,y))G_g \models \alpha & (G_g \text{ bidimensional}) \\ \iff & \mathcal{M}, (a,b), (g(w)/y)(g(z)/x)G_g \models \alpha & (\text{def } (/)G_g) \\ \iff & \mathcal{M}, (a,b), G_g \models (z/x)(w/y)\alpha & (\text{Lema Subst. coord.}) \\ \iff & \mathcal{M}, (a,b), G_g \models ((z,w)/(x,y))\alpha & (\text{def } (/)\alpha) \ \blacksquare \end{array}$$

3.5 Axiomática para LSH2

Nesta seção apresentamos uma axiomática correta e completa para LSH2. Mais especificamente, definimos uma relação de dedutibilidade, denotado por $\vdash_{\text{LSH2}}$, entre conjuntos de fórmulas e fórmulas tal que, dado qualquer conjunto Γ de fórmulas de LSH2 e qualquer fórmula α de LSH2, temos que $\Gamma \vdash_{\text{LSH2}} \alpha$ se, e somente se, $\Gamma \models_{\text{LSH2}} \alpha$.

A axiomática é obtida da axiomática de LSH pela supressão do axioma LS, pelo acréscimo dos axiomas Coordenadas, Comp, Rev e Id e pela imposição de uma restrição ao axioma Q3.

Axiomas

Normal-A) *Axiomas para uma lógica modal estendida normal.*

Nome) $@_{(x,y)}(x,y)$.

Nomeação) $@_{(x,y)}(z,w) \wedge @_{(x,y)}\alpha \to @_{(z,w)}\alpha$.

Eliminação) $(x,y) \wedge @_{(x,y)}\alpha \to \alpha$.

Escopo) $@_{(x,y)}@_{(z,w)}\alpha \leftrightarrow @_{(z,w)}\alpha$.

Auto-Dual @) $@_{(x,y)}\alpha \leftrightarrow \neg @_{(x,y)}\neg\alpha$.

Ponte $\otimes$) $@_{(x,y)} \otimes (z,w) \wedge @_{(z,w)}\alpha \to @_{(x,y)} \otimes \alpha$.

Ponte $\circ$) $@_{(x,y)}((z,w) \circ (u,v)) \wedge @_{(z,w)}\alpha \wedge @_{(u,v)}\beta \to @_{(x,y)}(\alpha \circ \beta)$.

Q1) $\downarrow_{(x,y)} \alpha \leftrightarrow \alpha$, se $x, y \notin \mathsf{liv}(\alpha)$.

Q2) $\downarrow_{(x,y)} \alpha \wedge (z,w) \to ((z,w)/(x,y))\alpha$, se (x,y) for substituível por (z,w) em α.

Q3) $\downarrow_{(x,y)} ((x,y) \to \alpha) \to \downarrow_{(x,y)} \alpha$, se $x \neq y$.

Auto-Dual $\downarrow$) $\downarrow_{(x,y)} \alpha \leftrightarrow \neg \downarrow_{(x,y)} \neg\alpha$.

Coordenadas) $@_{(x,y)}(z,w) \leftrightarrow @_{(x,x)}(z,z) \wedge @_{(y,y)}(w,w)$.

Id) $(x,x) \to \iota\delta$.

Rev) $(x,y) \leftrightarrow \otimes(y,x)$.

Comp) $(x,y) \to (x,z) \circ (z,y)$.

Regras de Inferência

Normal-R) *Regras para uma lógica modal estendida normal.*

Colagem $\otimes$) $\dfrac{@_{(x,y)} \otimes (z,w) \wedge @_{(z,w)}\alpha \to \beta}{@_{(x,y)} \otimes \alpha \to \beta}$, onde z e w são distintos de x e y e não ocorrem em α nem em β.

Colagem $\circ$) $\dfrac{@_{(x,y)}((z,w) \circ (u,v)) \wedge @_{(z,w)}\alpha \wedge @_{(u,v)}\beta \to \gamma}{@_{(x,y)}(\alpha \circ \beta) \to \gamma}$, onde z, w ,u e v são distintos de x e y e não ocorrem em α, β nem em γ.

Os axiomas de LS são teoremas em LSH2. Assim, a axiomática de LSH2 é (quase) uma extensão da axiomática de LSH pelo acréscimo dos axiomas Coordenadas, Id, Rev e Comp. O axioma Coordenadas apresenta o papel duplo das variáveis bidimensionais (x,x): denotar setas da identidade e também coordenadas de setas. Os axiomas Id, Rev e Comp garantem que as assinalações sejam bidimensionais. Note a restrição ao axioma Q3: ele não vale para variáveis bidimensionais (x,x). (Esta restrição explica o "quase" na segunda frase deste parágrafo.) A diferença entre o axioma Q3 de LSH e o de LSH2 reflete o fato do ligador possuir semânticas distintas nos dois sistemas. Observe que, na axiomática, esta diferença aparece apenas em Q3.

As definições de *teorema* e *derivação* em LSH2 são análogas àquelas de LSH. Assim, podemos utilizar os teoremas derivados em LSH na prova de resultados em LSH2, tendo o cuidado de acrescentar a restrição $(x \neq y)$ aos teoremas derivados de Q3 (Lugar, Ponte $\downarrow$ e T1).

O Lema da Troca de Equivalentes depende apenas dos axiomas e regras de normalidade. Por isso, vale em LSH2 sem restrições. A definição de troca em LSH2 é análoga à de LSH: $[\gamma/\beta]\alpha$ é o resultado de substituir uma, várias, nenhuma ou todas as ocorrências da fórmula β na fórmula α pela fórmula γ.

Lema 3.5.1 (Troca de Equivalentes) *Sejam α, β e γ fórmulas de* LSH2. *Se* $\vdash_{\text{LSH2}} \gamma \leftrightarrow \beta$, *então* $\vdash_{\text{LSH2}} [\gamma/\beta]\alpha \leftrightarrow \alpha$.

Proposição 3.5.1 *1. As seguintes fórmulas são teoremas de* LSH2*:*

Ponte $\iota\delta$ 2) $@_{(x,x)}(y,y) \leftrightarrow @_{(x,y)}\iota\delta$.

Ponte $\otimes$2) $@_{(x,y)}\alpha \leftrightarrow @_{(y,x)} \otimes \alpha$.

Ponte $\circ$2) $@_{(x,z)}\alpha \wedge @_{(z,y)}\beta \rightarrow @_{(x,y)}(\alpha \circ \beta)$.

2. As seguintes regras são derivadas em LSH2*:*

Colagem$\circ$2) $\dfrac{@_{(x,z)}\alpha \wedge @_{(z,y)}\beta \rightarrow \gamma}{@_{(x,y)}(\alpha \circ \beta) \rightarrow \gamma}$, *onde z é distinto de x e y e não ocorre em α, β nem em γ.*

Prova: Usando Normal, Nome, Nomeação, Ponte $\otimes$, Ponte $\circ$, Coordenadas, Comp, Rev, Id, Colagem $\otimes$, Colagem $\circ$. ∎

Os teoremas Ponte $\iota\delta$2, Ponte $\otimes$2 e Ponte $\circ$2 em conjunto com a regra derivada Colagem $\circ$2 reduzem os operadores peirceanos $(\iota\delta, \otimes, \circ)$ aos operadores da Lógica Híbrida $((x,y), @_{(x,y)}, \downarrow_{(x,y)})$, quando no escopo de um operador de satisfabilidade. Além disso, esses teoremas e essa regra constituem uma axiomática alternativa para LSH2: basta suprimir os axiomas Ponte $\otimes$, Ponte $\circ$, Coordenadas, Id, Rev e Comp e as regras Colagem $\otimes$ e Colagem $\circ$, e acrescentar as versões bidimensionais de Ponte e Colagem que aparecem na Proposição 3.5.1 anterior. Desse modo, embutimos os axiomas Coordenadas, Id, Rev e Comp nos axiomas Ponte $\iota\delta 2$, Ponte $\otimes 2$ e Ponte $\circ 2$ e na regra Colagem $\circ 2$, colocando a informação bidimensional do sistema mais próxima aos operadores peirceanos e, portanto, facilitando o uso da axiomática para a prova de resultados de setas (na linguagem não híbrida).

Em LSH2, também podemos utilizar variantes alfabéticas para realizar substituições de variáveis não substituíveis.

Definição Seja α uma fórmula e $x, y, z, w \in \mathsf{Var}$. Uma *variante alfabética* de α com (z, w) livre para (x, y), denotada por α', é definida como segue:
1. $*' = *$, para $* \in LP \cup (\mathsf{Var} \times \mathsf{Var}) \cup \{\iota\delta\}$.
2. $(*\alpha)' = *\alpha'$, para $* \in \{\neg, \otimes\} \cup \{@_{(u,v)} : u, v \in \mathsf{Var}\}$.
3. $(\downarrow_{(u,v)} \alpha)' = \downarrow_{(u,v)} \alpha'$ se $z \neq u$, $w \neq u$, $z \neq v$ e $w \neq v$, ou $(u, v) = (z, w)$, e $(\downarrow_{(u,v)} \alpha)' = \downarrow_{(u',v')} (((u', v')/(u, v))\alpha')$, onde u', v' são variáveis novas, caso contrário.
4. $(\alpha * \beta)' = \alpha' * \beta'$, para $* \in \{\wedge, \circ\}$.

O Lema da Variante Alfabética é provado como em LSH, usando os axiomas Normal, Q1 e T1 e o Lema da Troca de Equivalentes.

Lema 3.5.2 (Variante Alfabética) *Seja α uma fórmula e $x, y, z, w \in \mathsf{Var}$. Qualquer variante alfabética α' de α com (z, w) livre para (x, y) é tal que:*
1. $\mathsf{liv}(\alpha) = \mathsf{liv}(\alpha')$.
2. $\vdash_{\text{LSH2}} \alpha \leftrightarrow \alpha'$.
3. *(z, w) é substituível por (x, y) em α'.*

Teorema 3.5.1 (Corretude) *Se $\Gamma \vdash_{\text{LSH2}} \alpha$, então $\Gamma \models_{\text{LSH2}} \alpha$.*

Prova: Os axiomas são válidos. As regras de inferência preservam validade. A regra MP preserva satisfabilidade. ∎

LSH2 estende LS

Conforme comentamos, LS é um subsistema de LSH2, i.e., os axiomas de setas são teoremas de LSH2. Assim, as variáveis bidimensionais (x, y) introduzidas aumentaram suficientemente o poder de prova do sistema, a ponto de podermos derivar os axiomas de setas.

Para provar esse resultado, usamos os seguintes teoremas:

Proposição 3.5.2 *As seguintes fórmulas são teoremas de* LSH2*:*

$$\mathsf{T^*})\ \downarrow_{(x,y)} @_{(x,y)}\alpha \leftrightarrow \alpha, \textit{ se } x \neq y \textit{ e } x, y \notin \mathsf{liv}(\alpha).$$

Prova: Usando Eliminação, Ponte $\otimes$, Nome, Q1 e Q3. ■

O teorema T* é a chave para a prova de teoremas na linguagem não híbrida, usando o aparato híbrido. A estratégia para provar um teorema α da parte não híbrida da linguagem é tomar um par de variáveis novas (x, y) e provar o teorema $@_{(x,y)}\alpha$. Depois, usando Nec$\downarrow$, obtém-se $\downarrow_{(x,y)} @_{(x,y)}\alpha$. E, finalmente, aplicamos o teorema T* para obter α.

Proposição 3.5.3 *Os axiomas de* LS *[Ven96] são teoremas de* LSH2*:*

A1) $\neg \otimes \alpha \to \otimes\neg\alpha.$

A2) $\otimes\neg\alpha \to \neg \otimes \alpha.$

A3) $\otimes \otimes \alpha \to \alpha.$

A4) $\otimes(\alpha \circ \beta) \to \otimes\beta \circ \otimes\alpha.$

A5) $\alpha \circ \neg(\otimes\alpha \circ \beta) \to \neg\beta.$

A6) $\iota\delta \to \otimes\iota\delta.$

A7) $\iota\delta \circ \alpha \to \alpha.$

A8) $\alpha \to \iota\delta \circ \alpha.$

A9) $\alpha \circ (\beta \circ \gamma) \to (\alpha \circ \beta) \circ \gamma.$

Prova: Vamos provar os axiomas A5 e A9, para exemplificar.

A5) Seja $x, y \in \mathsf{Var}$ tais que $x \neq y$ e $x, y \notin \mathsf{liv}(\alpha) \cup \mathsf{liv}(\beta)$. Seja $z \in \mathsf{Var}$ tal que z é distinta de x e y e z não ocorre em α nem em β.

Ponte $\circ$	1	$@_{(z,x)} \otimes \alpha \to (\neg @_{(z,y)}(\otimes\alpha \circ \beta)) \to \neg @_{(x,y)}\beta)$
1,Negação,Teq	2	$@_{(z,x)} \otimes \alpha \to (@_{(z,y)}\neg(\otimes\alpha \circ \beta)) \to @_{(x,y)}\neg\beta)$
Ponte $\otimes$	3	$@_{(x,z)}\alpha \leftrightarrow @_{(z,x)} \otimes \alpha$
2,3	4	$@_{(x,z)}\alpha \wedge @_{(z,y)}\neg(\otimes\alpha \circ \beta) \to @_{(x,y)}\neg\beta$
4,Colagem,z nova	5	$@_{(x,y)}(\alpha \circ \neg(\otimes\alpha \circ \beta)) \to @_{(x,y)}\neg\beta$
5,Normal	6	$\downarrow_{(x,y)} @_{(x,y)}(\alpha \circ \neg(\otimes\alpha \circ \beta)) \to \downarrow_{(x,y)} @_{(x,y)}\neg\beta$
6,T*,$x \neq y$, $x, y \notin \mathsf{liv}(\alpha) \cup \mathsf{liv}(\beta)$	7	$\alpha \circ \neg(\otimes\alpha \circ \beta) \to \neg\beta$

A9) Sejam $x, y, z, w \in \mathsf{Var}$ distintas duas a duas e não ocorrendo em α, β ou γ.

Ponte $\circ$	1	$@_{(x,w)}\alpha \wedge @_{(w,z)}\beta \to (@_{(z,y)}\gamma \to @_{(x,y)}(\alpha \circ (\beta \circ \gamma)))$
1,Colagem,w nova	2	$@_{(x,z)}(\alpha \circ \beta) \to (@_{(z,y)}\gamma \to @_{(x,y)}(\alpha \circ (\beta \circ \gamma)))$
2	3	$@_{(x,z)}(\alpha \circ \beta) \wedge @_{(z,y)}\gamma \to @_{(x,y)}(\alpha \circ (\beta \circ \gamma))$
3,Colagem,z nova	4	$@_{(x,y)}((\alpha \circ \beta) \circ \gamma) \to @_{(x,y)}(\alpha \circ (\beta \circ \gamma))$
Analogamente	5	$@_{(x,y)}(\alpha \circ (\beta \circ \gamma)) \to @_{(x,y)}((\alpha \circ \beta) \circ \gamma)$
4,5	6	$@_{(x,y)}((\alpha \circ \beta) \circ \gamma) \leftrightarrow @_{(x,y)}(\alpha \circ (\beta \circ \gamma))$
6,Normal	7	$\downarrow_{(x,y)} @_{(x,y)}((\alpha \circ \beta) \circ \gamma) \leftrightarrow \downarrow_{(x,y)} @_{(x,y)}(\alpha \circ (\beta \circ \gamma))$
7,T*,$x \neq y$, $x, y \notin \mathsf{liv}(\alpha \circ (\beta \circ \gamma))$	8	$(\alpha \circ \beta) \circ \gamma \leftrightarrow \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$. ∎

3.6 Completude de LSH2

Nesta seção demonstramos a recíproca do Teorema 3.5.1 (Corretude), a completude de LSH2.

O sistema axiomático de LSH2 foi obtido de maneira modular, acrescentando a LSH os axiomas da bidimensionalidade. De fato, todos os axiomas de LSH são axiomas de LSH2, com exceção do axioma LS, que é um teorema (Proposição 3.5.3). Ou seja, LSH2 estende LSH. Assim, para provar a completude de LSH2, vamos considerar o modelo $\mathcal{M}^\Gamma$ e a assinalação G^Γ (definidos na prova da completude de LSH) e provar que, quando Γ é um CCM em LSH2, então a estrutura $\mathcal{E}^\Gamma$ é um quadrado e G^Γ é bidimensional.

Proposição 3.6.1 *Seja Σ um CCM. Temos que $\mathsf{I}^\Sigma = \{\Delta^\Sigma_{(x,x)} : x \in \mathsf{Var}\}$.*

Prova:

$$
\begin{aligned}
(\subseteq)\quad \Delta^\Sigma_{(x,y)} \in \mathsf{I}^\Sigma &\Longrightarrow \iota\delta \in \Delta^\Sigma_{(x,y)} && (\text{def } \mathsf{I}^\Sigma)\\
&\Longrightarrow @_{(x,y)}\iota\delta \in \Sigma && (\text{def } \Delta^\Sigma_{(x,y)})\\
&\Longrightarrow @_{(x,x)}(y,y) \in \Sigma && (\text{Ponte } \iota\delta)\\
&\Longrightarrow @_{(y,y)}(x,x) \in \Sigma && (\text{Troca})\\
&\Longrightarrow @_{(x,y)}(x,x) \in \Sigma && (\text{Coordenadas, Nome})\\
&\Longrightarrow (x,x) \in \Delta^\Sigma_{(x,y)} && (\text{def } \Delta^\Sigma_{(x,y)})\\
&\Longrightarrow \Delta^\Sigma_{(x,y)} = \Delta^\Sigma_{(x,x)} && (\text{Lema 3.3.2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(\supseteq)\ \ x \in \mathsf{Var} &\Longrightarrow @_{(x,x)}(x,x) \in \Sigma && (\mathsf{Nome})\\
&\Longrightarrow @_{(x,x)}\iota\delta \in \Sigma && (\mathsf{Ponte}\ \iota\delta)\\
&\Longrightarrow \iota\delta \in \Delta^{\Sigma}_{(x,x)} && (\text{def } \Delta^{\Sigma}_{(x,x)})\\
&\Longrightarrow \Delta^{\Sigma}_{(x,x)} \in \mathsf{I}^{\Sigma} && (\text{def } \mathsf{I}^{\Sigma})\ \blacksquare
\end{aligned}
$$

Lema 3.6.1 *Se* Σ *for CCM em* LSH2, *então* $\mathcal{E}^{\Sigma}$ *será (isomorfo a) um quadrado.*

Prova: A função $h : S^{\Sigma} \to \mathsf{I}^{\Sigma}\times\mathsf{I}^{\Sigma}$ tal que $h(\Delta^{\Sigma}_{(x,y)}) = (\Delta^{\Sigma}_{(x,x)}, \Delta^{\Sigma}_{(y,y)})$ é um isomorfismo da estrutura $\mathcal{E}^{\Sigma}$ no quadrado $\langle \mathsf{I}^{\Sigma}\rangle$:

injetividade)

$$
\begin{aligned}
h(\Delta^{\Sigma}_{(x,y)}) = h(\Delta^{\Sigma}_{(z,w)}) &\Longrightarrow (\Delta^{\Sigma}_{(x,x)}, \Delta^{\Sigma}_{(y,y)}) = (\Delta^{\Sigma}_{(z,z)}, \Delta^{\Sigma}_{(w,w)}) && (\text{def } h)\\
&\Longrightarrow (x,x) \in \Delta^{\Gamma}_{(z,z)} \text{ e } (y,y) \in \Delta^{\Sigma}_{(w,w)} && (\text{Lema 3.3.2})\\
&\Longrightarrow @_{(z,z)}(x,x), @_{(w,w)}(y,y) \in \Sigma && (\text{def } \Delta^{\Sigma}_{(x,y)})\\
&\Longrightarrow @_{(z,w)}(x,y) \in \Sigma && (\mathsf{Coordenadas})\\
&\Longrightarrow (x,y) \in \Delta^{\Sigma}_{(x,y)} && (\text{def } \Delta^{\Sigma}_{(x,y)})\\
&\Longrightarrow \Delta^{\Sigma}_{(x,y)} = \Delta^{\Sigma}_{(z,w)} && (\text{Lema 3.3.2})
\end{aligned}
$$

h preserva identidade)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{I}^{\Sigma}(\Delta^{\Sigma}_{(x,y)}) &\Longleftrightarrow \iota\delta \in \Delta^{\Sigma}_{(x,y)} && (\text{def } \mathsf{I}^{\Sigma})\\
&\Longleftrightarrow @_{(x,y)}\iota\delta \in \Sigma && (\text{def } \Delta^{\Sigma}_{(x,y)})\\
&\Longleftrightarrow @_{(x,x)}(y,y) \in \Sigma && (\mathsf{Ponte}\ \iota\delta 2)\\
&\Longleftrightarrow (y,y) \in \Delta^{\Sigma}_{(x,x)} && (\text{def } \Delta^{\Sigma}_{(x,x)})\\
&\Longleftrightarrow \Delta^{\Sigma}_{(x,x)} = \Delta^{\Sigma}_{(y,y)} && (\text{Lema 3.3.2})
\end{aligned}
$$

h preserva reversão)

$$
\begin{aligned}
\mathsf{R}^{\Sigma}(\Delta^{\Sigma}_{(x,y)}, \Delta^{\Sigma}_{(z,w)}) &\Longleftrightarrow \otimes(z,w) \in \Delta^{\Sigma}_{(x,y)} && (\text{Lema 3.3.3})\\
&\Longleftrightarrow @_{(x,y)} \otimes (z,w) \in \Sigma && (\text{def } \Delta^{\Sigma}_{(x,y)})\\
&\Longleftrightarrow (w,z) \in \Delta^{\Sigma}_{(x,y)} && (\mathsf{Ponte} \otimes 2)\\
&\Longleftrightarrow @_{(x,y)}(w,z) \in \Sigma && (\text{def } \Delta^{\Sigma}_{(x,y)})\\
&\Longleftrightarrow @_{(x,x)}(w,w) \wedge @_{(y,y)}(z,z) \in \Sigma && (\mathsf{Coordenadas})\\
&\Longleftrightarrow (w,w) \in \Delta^{\Sigma}_{(x,x)} \text{ e } (z,z) \in \Delta^{\Sigma}_{(y,y)} && (\text{def } \Delta^{\Sigma}_{(x,y)})\\
&\Longleftrightarrow \Delta^{\Sigma}_{(x,x)} = \Delta^{\Sigma}_{(w,w)} \text{ e } \Delta^{\Sigma}_{(y,y)} = \Delta^{\Sigma}_{(z,z)} && (\text{Lema 3.3.2})
\end{aligned}
$$

h preserva composição)

Seja t uma variável nova. Temos que:

Coordenadas	1	$@_{(x,t)}(z,w) \leftrightarrow @_{(x,x)}(z,z) \wedge @_{(t,t)}(w,w)$
Coordenadas	2	$@_{(t,y)}(u,v) \leftrightarrow @_{(t,t)}(u,u) \wedge @_{(y,y)}(v,v)$
Nomeação	3	$@_{(t,t)}(u,u) \wedge @_{(t,t)}(w,w) \rightarrow @_{(u,u)}(w,w)$
1,2,3	4	$@_{(x,t)}(z,w) \wedge @_{(t,y)}(u,v) \rightarrow$ $@_{(x,x)}(z,z) \wedge @_{(y,y)}(v,v) \wedge @_{(u,u)}(w,w)$
4,Colagem $\circ 2$	5	$@_{(x,y)}((z,w) \circ (u,v)) \rightarrow$ $@_{(x,x)}(z,z) \wedge @_{(y,y)}(v,v) \wedge @_{(u,u)}(w,w)$
Ponte $\circ 2$	6	$@_{(x,u)}(z,w) \wedge @_{(u,y)}(u,v) \rightarrow @_{(x,y)}((z,w) \circ (u,v))$
Coordenadas	7	$@_{(x,u)}(z,w) \leftrightarrow @_{(x,x)}(z,z) \wedge @_{(u,u)}(w,w)$
Coordenadas	8	$@_{(u,y)}(u,v) \leftrightarrow @_{(u,u)}(u,u) \wedge @_{(y,y)}(v,v)$
Nome	9	$@_{(u,u)}(u,u)$
6,7,8,9,Teq	10	$@_{(x,x)}(z,z) \wedge @_{(y,y)}(v,v) \wedge @_{(u,u)}(w,w) \rightarrow$ $@_{(x,y)}((z,w) \circ (u,v))$
5,10	11	$@_{(x,y)}((z,w) \circ (u,v)) \leftrightarrow$ $@_{(x,x)}(z,z) \wedge @_{(y,y)}(v,v) \wedge @_{(u,u)}(w,w)$ (*)

Assim:

$$
\begin{array}{lll}
\mathsf{C}^{\Sigma}(\Delta^{\Sigma}_{(x,y)}, \Delta^{\Sigma}_{(z,w)}, \Delta^{\Sigma}_{(u,v)}) & & \\
\iff (z,w) \circ (u,v) \in \Delta^{\Sigma}_{(x,y)} & & \text{(Lema 3.3.3)} \\
\iff @_{(x,y)}(z,w) \circ (u,v) \in \Sigma & & (\text{def } \Delta^{\Sigma}_{(x,y)}) \\
\iff @_{(x,x)}(z,z), @_{(y,y)}(v,v), @_{(u,u)}(w,w) \in \Sigma & & (*) \\
\iff (x,x) \in \Delta^{\Sigma}_{(z,z)}, (y,y) \in \Delta^{\Sigma}_{(v,v)}, (u,u) \in \Delta^{\Sigma}_{(w,w)} & & (\text{def } \Delta^{\Sigma}_{(x,y)}) \\
\iff \Delta^{\Sigma}_{(x,x)} = \Delta^{\Sigma}_{(z,z)}, \Delta^{\Sigma}_{(y,y)} = \Delta^{\Sigma}_{(v,v)}, \Delta^{\Sigma}_{(u,u)} = \Delta^{\Sigma}_{(w,w)} & & \text{(Lema 3.3.2)} \ \blacksquare
\end{array}
$$

Dada uma estrutura de setas $\mathcal{E} = \langle S, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I} \rangle$, uma assinalação G em $\mathcal{E}$, uma seta $A \in S$ e uma fórmula α, escrevemos $\mathcal{E}, A, G \models \alpha$ quando, para qualquer modelo enraizado $\langle \mathcal{M}, A \rangle$ baseado em $\mathcal{E}$, temos que $\mathcal{M}, A, G \models \alpha$; escrevemos $\mathcal{E}, G \models \alpha$ quando, para qualquer seta $A \in S$, temos que $\mathcal{E}, A, G \models \alpha$.

Proposição 3.6.2 *Seja $\mathcal{E} = \langle \mathcal{U} \rangle$ um quadrado e G uma assinalação em $\mathcal{E}$. Temos que G é bidimensional se, e somente se, $\mathcal{E}, G \models$ Comp $\wedge$ Id.*

Prova:

($\Longrightarrow$) Suponhamos que G seja bidimensional. Seja $g : \mathsf{Var} \rightarrow \mathcal{U}$ tal que $G = G_g$ e $a, b \in \mathcal{U}$.

Comp) Seja $x, y, z \in \mathsf{Var}$.

$$\begin{array}{rlll} \mathcal{E},(a,b),G \models (x,y) & \Longrightarrow & g(x)=a \text{ e } g(y)=b & (\text{def} \models) \\ & \Longrightarrow & g(z)=c,\ g(x)=a \text{ e } g(y)=b & (g \text{ fç},\ c \in \mathcal{U}) \\ & \Longrightarrow & \mathcal{E},(a,c),G \models (x,z) \text{ e } \mathcal{E},(c,b),G \models (z,y) & (\text{def} \models,\ c \in \mathcal{U}) \\ & \Longrightarrow & \mathcal{E},(a,b),G \models (x,z) \circ (z,y) & (\text{def} \models) \end{array}$$

Id) Seja $x \in \mathsf{Var}$.

$$\begin{array}{rlll} \mathcal{E},(a,b),G \models (x,x) & \Longrightarrow & g(x)=a \text{ e } g(x)=b & (\text{def} \models) \\ & \Longrightarrow & a=b & (g \text{ fç}) \\ & \Longrightarrow & \mathcal{E},(a,b),G \models \iota\delta & (\text{def} \models) \end{array}$$

($\Longleftarrow$) Suponhamos que $\mathcal{E}, G \models \mathsf{Comp} \wedge \mathsf{Id}$. Vamos mostrar que $G = G_g$, onde $g : \mathsf{Var} \to \mathcal{U}$ tal que $g(x) = \Pi_1 G(x,x)$ e que, portanto, G é bidimensional. (Π_1 é a projeção que fornece a primeira coordenada de um par, i.e., dados $a, b \in \mathcal{U}$, $\Pi_1(a,b) = a$.)

Seja $x, y \in \mathsf{Var}$. Suponhamos que $G(x,x) = (a,b)$ e $G(y,y) = (c,d)$. Daí, $\mathcal{E},(a,b),G \models (x,x)$ e $\mathcal{E},(c,d),G \models (y,y)$. Como $\mathcal{E},G \models \mathsf{Id}$, temos que $\mathcal{E},(a,b),G \models \mathsf{Id}$ e $\mathcal{E},(c,d),G \models \mathsf{Id}$. Logo, $a = b$ e $c = d$. Assim, $G(x,x) = (a,a)$ e $G(y,y) = (c,c)$. Como $\mathcal{E},G \models \mathsf{Comp}$ e $\mathcal{E},(a,a),G \models (x,x)$, temos que $\mathcal{E},(a,a),G \models (x,y) \circ (y,x)$. Logo, existe $e \in \mathcal{U}$ tal que $G(x,y) = (a,e)$ (1). Analogamente, $\mathcal{E},(b,b),G \models (y,x) \circ (x,y)$. Logo, existe $f \in \mathcal{U}$ tal que $G(x,y) = (f,b)$ (2). De (1) e (2) temos que $G(x,y) = (a,b)$. Além disso, $G_g(x,y) = (g(x), g(y)) = (\Pi_1 G(x,x), \Pi_1 G(y,y)) = (a,b)$. Portanto, $G = G_g$. ∎

Lema 3.6.2 *Se Σ for CCM em* LSH2, *então G^{Σ} será bidimensional.*

Prova: A estrutura e a assinalação induzidas por Σ, $\langle \mathcal{E}^{\Sigma}, G^{\Sigma} \rangle$, satisfazem os axiomas Comp e Id. Logo, pela Proposição 3.6.2, G^{Σ} é bidimensional. ∎

Teorema 3.6.1 (Existência de Modelos) *Todo conjunto consistente de fórmulas de* LSH2 *é satisfeito em um modelo quadrado enraizado com uma assinalação bidimensional.*

Prova: Dado um conjunto consistente Γ, estenda Γ a um CCM nomeado com testemunhas Σ (Lema de Lindenbaum estendido, como em LSH). Pelas Proposições 3.6.2 e 3.6.1, temos que $\mathcal{E}^{\Sigma}$ é um quadrado e G^{Σ} é uma assinalação bidimensional. Seja (x, y) um nome de Σ. Pelo Lema da Satisfabilidade (de LSH), temos que $\mathcal{M}^{\Sigma}, \Delta^{\Sigma}_{(x,y)}, G^{\Sigma} \models \Sigma$. ∎

Finalmente, como um corolário do Lema da Existência de Modelos, temos o Teorema da Completude.

Teorema 3.6.2 (Completude) *Se* $\Gamma \models_{\mathrm{LSH2}} \alpha$, *então* $\Gamma \vdash_{\mathrm{LSH2}} \alpha$.

3.7 Expressividade

Vamos agora mostrar que LSH2 e LPO são equipolentes em meio de expressão [Mar01]. Para obter esse resultado, apresentamos traduções de LSH2 para LPO e vice-versa, que relacionam fórmulas nas duas linguagens que possuem o mesmo significado. Nesta seção, utilizamos a notação algébrica para a linguagem de LS, introduzida no Capítulo 1.

Definição Sejam x e y variáveis novas. A tradução T_{xy} : LSH2 $\rightarrow$ LPO é definida recursivamente como segue:

1. $T_{xy}(r) = Rxy$
2. $T_{xy}(0) = \bot$
3. $T_{xy}(1) = \top$
4. $T_{xy}(1') = x \approx y$
5. $T_{xy}((u, v)) = u \approx x \wedge v \approx y$
6. $T_{xy}(\alpha^{-}) = \neg T_{xy}(\alpha)$
7. $T_{xy}(\alpha^{\smile}) = T_{yx}(\alpha)$
8. $T_{xy}(@_{(u,v)}\alpha) = \exists zw(z \approx u \wedge w \approx v \wedge T_{zw}(\alpha))$
9. $T_{xy}(\downarrow_{(u,v)} \alpha) = \exists uv(u \approx x \wedge v \approx y \wedge T_{xy}(\alpha))$
10. $T_{xy}(\alpha \cdot \beta) = T_{xy}(\alpha) \wedge T_{xy}(\beta)$
11. $T_{xy}(\alpha + \beta) = T_{xy}(\alpha) \vee T_{xy}(\beta)$
12. $T_{xy}(\alpha; \beta) = \exists z(T_{xz}(\alpha) \wedge T_{zy}(\beta))$

Proposição 3.7.1 *$(a,b) \in \alpha^{[\mathcal{Q},G_g]}$ se, e somente se, $\mathcal{Q} \models T_{xy}(\alpha)\ [(a/x)(b/y)g]$.*

Prova: Por indução na estrutura de α. ∎

Definição Sejam x e y variáveis novas. A tradução H_{xy} : LPO $\rightarrow$ LSH2 é definida recursivamente como segue:

1. $H_{xy}(Ruv) = @_{(u,v)}r$
2. $H_{xy}(x \approx y) = 1'$
3. $H_{xy}(y \approx x) = 1'$
4. $H_{xy}(x \approx x) = 1$
5. $H_{xy}(y \approx y) = 1$
6. $H_{xy}(x \approx v) = (v,v);1$
7. $H_{xy}(v \approx x) = (v,v);1$
8. $H_{xy}(u \approx y) = 1;(u,u)$
9. $H_{xy}(y \approx u) = 1;(u,u)$
10. $H_{xy}(u \approx v) = @_{(u,u)}(v,v)$
11. $H_{xy}(\neg\phi) = (H_{xy}(\phi))^{-}$
12. $H_{xy}(\phi \wedge \psi) = H_{xy}(\phi) \cdot H_{xy}(\psi)$
13. $H_{xy}(\phi \vee \psi) = H_{xy}(\phi) + H_{xy}(\psi)$
14. $H_{xy}(\exists x\phi) = 1;H_{xy}(\phi)$
15. $H_{xy}(\exists y\phi) = H_{xy}(\phi);1$
16. $H_{xy}(\exists v\phi) = \downarrow_{(z,w)}(1;\downarrow_{(v,w)}@_{(z,w)}H_{xy}(\phi))$, onde z e w são variáveis novas.

Proposição 3.7.2

$$\mathcal{Q} \models \phi\ [(a/x)(b/y)g]$$

se, e somente se,

$$(a,b) \in (H_{xy}(\phi))^{[\mathcal{Q},(a/x)(b/y)g]}.$$

Prova: Por indução na estrutura de ϕ. ∎

Capítulo 4

Lógica de Setas com Bifurcação

Neste capítulo, apresentamos a Lógica Modal da Bifurcação (LSB), i.e., a contraparte modal da Álgebra com Operador de Bifurcação (AOB), seguindo os passos percorridos para a definição da Lógica de Setas (LS) a partir da Álgebra Relacional (AR), conforme apresentado no Capítulo 1. Mostramos que, estendendo LS para obter LSB (proposta em [BV99] por M. Benevides e P.A.S. Veloso), da mesma forma *como* AR é estendida para AOB, obtemos uma axiomatização das estruturas relacionais (com operador de bifurcação) quadradas. Mostramos também que LSB é equipolente em meios de expressão à Lógica de Primeira Ordem (LPO).

Nossas principais contribuições nesse capítulo são a prova da completude de LSB, a axiomatização do quadrado em LSB e a prova de que LSB é equipolente em meios de expressão a LPO. Esses resultados foram publicados em [FBVVV01, FVBVV01a, FVBVV01b, FVVVB02b].

4.1 Álgebras com Operador de Bifurcação

Como vimos no Capítulo 1, o Teorema de Monk é um resultado negativo sobre o problema da axiomatização das álgebras relacionais representáveis. Vimos também que existem maneiras de obter resultados positivos neste domínio, por exemplo, admitindo axiomatizações não-equacionais, ou, no contexto modal, axiomatizações não-ortodoxas. Outra solução pode ser obtida considerando-se o acréscimo de operadores não-lógicos, como o operador de bifurcação, por exemplo.

Nesta seção, apresentamos uma pequena descrição da teoria das álgebras com operador de bifurcação. Uma abordagem aprofundada pode ser encontrada nos artigos [VH91, Vel96, Vel97, Gyu97, KN97, FBH97, HFBV97] e no livro [Fri02].

4.1.1 Os problemas da finitização e da algebrização

Álgebras com operador de bifurcação foram motivadas na busca por um cálculo de relações que fosse adequado para a especificação e construção de programas [HV91]. Nesta seção, vamos apresentar dois problemas envolvendo a teoria das álgebras relacionais, que também podem ser utilizados como uma motivação para o estudo das álgebras com operador de bifurcação.

O *problema da finitização* [Nem91] é a questão de saber se a razão para a não axiomatização finita da classe das álgebras relacionais representáveis é causada apenas pela escolha das operações envolvidas na definição da classe. Lembre que ARR $= \mathbf{ISP}(\text{ARP})$. Esta identidade apresenta uma caracterização das álgebras relacionais representáveis em termos de álgebras relacionais especiais. De fato, por esta identidade, podemos obter álgebras relacionais representáveis através dos seguintes passos:

1. Escolha uma família F de álgebras relacionais plenas.

2. Faça o produto $\mathbf{P}F$.

3. Tome uma subestrutura de $\mathbf{P}F$.

4. Tome uma imagem isomorfa da subestrutura que você escolheu.

Assim, podemos considerar as álgebras relacionais plenas como o material básico para a construção de álgebras relacionais representáveis. Mas as álgebras relacionais plenas são estruturas cujas operações são escolhidas arbitrariamente como as operações booleanas e as operações peirceanas. E estas não são, absolutamente, as únicas operações conjuntistas concretas sobre relações que poderiam ser consideradas [Jón91]. Portanto, podemos perguntar o que aconteceria se modificássemos as estruturas na base da construção das álgebras relacionais representáveis. Em particular, poderíamos obter classes finitamente axiomatizáveis "aumentando" o tipo de similaridade das álgebras relacionais plenas.

Para estender o tipo de similaridade, podemos tentar expandir as álgebras relacionais plenas com novas operações, de maneira uniforme, a fim de definir novas classes e verificar se são finitamente axiomatizáveis. Como queremos axiomatização finita, devemos escolher uma quantidade finita de operações. Mais especificamente, temos:

PROBLEMA DA FINITIZAÇÃO Determinar se existe uma quantidade finita de operações *naturais* $f_1, \ldots, f_m$ sobre relações que podem ser adicionadas ao tipo das álgebras relacionais plenas de modo que $\mathbf{ISP}\{\langle Re(\mathcal{U}), f_1, \ldots f_m\rangle : \mathcal{U}$ é um conjunto$\}$, a classe assim obtida, seja uma variedade finitamente axiomatizável.

Esta abordagem é motivada pelo fato de que existem vários exemplos conhecidos de classes não finitamente axiomatizáveis de estruturas similares com expansões finitamente axiomatizáveis [Nem91].

O outro problema que vamos considerar diz respeito à relação entre a teoria das álgebras relacionais e a lógica de primeira ordem.

Em seu artigo de 1941, Tarski discute o problema de fundamentar rigorosamente o cálculo das relações binárias. Em primeiro lugar, ele considera uma extensão da lógica de primeira ordem pela introdução de variáveis de dois tipos: *indivíduos* $(x, y, z, \ldots)$ e *relações* $(R, S, T, \ldots)$. As *fórmulas atômicas* são da forma $x\ r\ y$ e $r = s$, onde x, y são variáveis de indivíduos e r, s são termos construídos sobre o alfabeto: $+, \cdot, ;, -, \smile, 0, 1, 1', R, S, T, \ldots$. As *fórmulas* são construídas da maneira usual a partir das fórmulas atômicas sobre o alfabeto: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \forall, \exists$. Um certo conjunto de axiomas é dado e o conjunto dos teoremas que podem ser provados a partir destes axiomas é o que Tarski define como sendo a *Teoria Elementar das Relações Binárias.*

Tarski define o *Cálculo das Relações Binárias* como o conjunto de teoremas da Teoria Elementar que possuem exclusivamente a ocorrência de variáveis relacionais. Desta forma, os modelos padrão do cálculo são exatamente as álgebras relacionais de conjuntos.

Ao examinar a expressividade do cálculo das relações, Tarski pergunta se toda propriedade de relações, relação entre relações e etc que pode ser definida na teoria elementar pode ser expressa no cálculo de relações. Sua resposta para esta questão é negativa. De acordo com ele, mesmo uma expressão simples como

$$\forall x \forall y \forall z \exists u (R(x,u) \wedge R(y,u) \wedge R(z,u))$$

não pode ser expressa no cálculo de relações.

Dado que a teoria elementar é uma extensão da lógica de primeira ordem, o problema da expressividade levantado por Tarski leva à seguinte questão [VH91, Nem91]:

PROBLEMA DA ALGEBRIZAÇÃO DE LPO Determinar se é possível estender finitamente o Cálculo das Relações Binárias de modo a obter uma teoria algébrica que tenha, com LPO, a mesma relação que as álgebras booleanas têm com a lógica sentencial.

As classes de álgebras tratadas a seguir contribuem para a solução de ambos os problemas definidos acima.

4.1.2 Álgebras com Operador de Bifurcação

Uma classe de extensões das álgebras relacionais surge do exame do papel que as relações binárias podem desempenhar na formalização do processo de programação. Além das operações booleanas e peirceanas, a aplicação das álgebras relacionais ao processo de computação tem levado à consideração de outras operações. Vejamos um exemplo desta situação, conforme [HFBV97].

Considere o problema de testar se uma dada palavra é um palíndromo. Este problema só pode ser resolvido por um autômato que seja capaz de armazenar uma cópia de seus dados. Podemos, então, considerar que um programa para resolver este problema deve ser capaz de duplicar dados. Uma solução possível seria:

Passo 1. Faça duas cópias da palavra de entrada, sendo uma o reverso da outra.

Passo 2. Compare as duas palavras obtidas no Passo 1. Se forem iguais, a resposta é SIM. Caso contrário, a resposta é NÃO.

Para resolver o problema da maneira acima, devemos ter disponíveis as operações de reversão e de duplicação de palavras.

Se estamos utilizando álgebras relacionais, a operação de duplicação deve ser uma relação que recebe um objeto α como entrada e produz duas cópias de α como saída. Para reter o aspecto binário das relações é necessário considerar em nosso universo de objetos $\mathcal{U}$ tais objetos como pares $[\alpha, \alpha]$. Assim, a relação de duplicação pode ser descrita por

$$d = \{(\alpha, [\alpha, \alpha]) : \alpha \in \mathcal{U}\}.$$

De modo a considerar tais pares como objetos de nosso universo, $\mathcal{U}$ deve ser fechado para a operação $[\,]$, de pareamento. Neste sentido, $\mathcal{U}$ pode ser visto como uma estrutura $\langle \mathcal{U}, [\,] \rangle$, e não meramente como um conjunto de pontos. Este aspecto estruturado de nosso universo torna natural a introdução de *operações estruturadas* sobre relações binárias, ou seja, aquelas que levam em conta o caráter estruturado de certos elementos de $\mathcal{U}$. Dentre estas, uma que tem recebido um papel de destaque, devido a sua frutífera utilização na aplicação das álgebras relacionais na programação, é chamada *bifurcação* ("fork").

A operação de bifurcação é uma nova operação binária ∇ sobre relações.

Definição Sejam R e S relações binárias. A *composição de R e S pelo operador de bifurcação* é a relação binária definida do seguinte modo:

$$R \nabla S = \{\langle \alpha, [\beta, \gamma] \rangle : \alpha R \beta \text{ e } \alpha S \gamma\}.$$

A presença do operador de bifurcação permite descrever alguns comportamentos interessantes das relações, principalmente do ponto de vista da programação. Em particular, a partir do operador de bifurcação, podemos definir a função duplicação d. De fato, $d = Id \nabla Id$. E, assim, descrever algebricamente a solução do problema do palíndromo.

Como nosso domínio estruturado $\mathcal{U}$ está munido de uma função de pareamento, é natural que consideremos a existência de operações de projeção associadas, isto é, de relações π e ρ satisfazendo:

$$\pi = \{\langle [\alpha, \beta], \alpha \rangle : \alpha, \beta \in \mathcal{U}\},$$

$$\rho = \{\langle [\alpha, \beta], \beta \rangle : \alpha, \beta \in \mathcal{U}\}.$$

Também estas operações podem ser definidas a partir do operador de bifurcação. De fato, se E é a relação máxima em $\mathcal{U}$, temos $\pi = (I_{\mathcal{U}} \nabla E)^{-1}$ e $\rho = (E \nabla I_{\mathcal{U}})^{-1}$. A recíproca também é verdadeira, ou seja, a operação de bifurcação pode ser definida a partir das projeções. De fato, temos $R \triangledown S = (R \mid \pi^{-1}) \cap (S \mid \rho^{-1})$. As projeções, portanto, poderiam ter sido escolhidas como primitivas.

É importante observar que, enquanto o par (x, y) possui o significado usual da Teoria dos Conjuntos, o par $[x, y]$ é o resultado de uma operação estrutural sobre o domínio. Para esta nova operação de pareamento, a única exigência é que ela seja injetiva.

A classe das álgebras com operador de bifurcação de conjuntos com $\star$ é definida como segue.

Definição Uma AOBC$\star$ é uma estrutura $\langle \mathcal{A}, \mathcal{U}, \cup, \cap, |, \nabla, -, ^{-1}, \emptyset, E, I_{\mathcal{U}}, \star \rangle$, bi-sortida, com domínios $\mathcal{A}$ e $\mathcal{U}$, onde:

i) $\langle \mathcal{A}, \cup, \cap, |, -, ^{-1}, \emptyset, E, I_{\mathcal{U}} \rangle$ é uma álgebra de relações de conjuntos com supremo E,

ii) A relação $\star : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ é uma função injetiva quando restrita a E,

iii) $R \nabla S = \{(x, \star(y, z)) : xRy \text{ e } xSz\}$.

Definição A classe das *álgebras com operador de bifurcação de conjuntos*, AOBC, é definida como a classe dos redutos de álgebras em AOBC$\star$ ao tipo de similaridade $\langle \cup, \cap, |, \nabla, -, ^{-1}, \emptyset, E, I_{\mathcal{U}} \rangle$.

Definição A classe das *álgebras com operador de bifurcação representáveis* é definida como AOBR $=$ **I**(AOBC), onde **I** denota a operação de tomar cópias isomorfas.

Definição Uma álgebra $\langle \mathcal{A}, +, \cdot, ;, \triangledown, ^{-}, ^{\smile}, 0, 1, 1' \rangle$ é uma *álgebra com operador de bifurcação* se:

AOB0) $\langle \mathcal{A}, +, \cdot, ;, ^{-}, ^{\smile}, 0, 1, 1' \rangle$ é uma AR, chamada *reduto relacional* de $\mathcal{A}$.

Para cada $r, s \in \mathcal{A}$, temos:

AOB1) $r \triangledown s = (r; (1' \triangledown 1)) \cdot (s; (1 \triangledown 1'))$.

AOB2) $(r \triangledown s); (t \triangledown q)^{\smile} = (r; t^{\smile}) \cdot (s; q^{\smile})$.

AOB3) $[(1' \triangledown 1)^{\smile} \triangledown (1 \triangledown 1')^{\smile}] + 1' = 1'$.

Denotamos por AOB a classe das álgebras com operador de bifurcação.

Existe uma relação direta entre álgebras relacionais projetivas e álgebras com operador de bifurcação.

Definição Dada $\langle \mathcal{A}, +, \cdot, ;, \triangledown, ^{-}, ^{\smile}, 0, 1, 1' \rangle$, uma álgebra com operador de bifurcação, as relações $\pi = (1' \triangledown 1)^{\smile}$ e $\rho = (1 \triangledown 1')^{\smile}$ são chamadas *primeira* e *segunda projeção* de $\mathcal{A}$, respectivamente.

Em qualquer álgebra com operador de bifurcação, estas relações possuem o comportamento de projeções.

Lema 4.1.1 *As relações π e ρ são elementos funcionais.*

Lema 4.1.2 *As relações π e ρ são tais que $\pi^{\smile}; \rho = 1$.*

Teorema 4.1.1 *O reduto relacional de uma álgebra com operador de bifurcação é uma álgebra quasi-projetiva.*

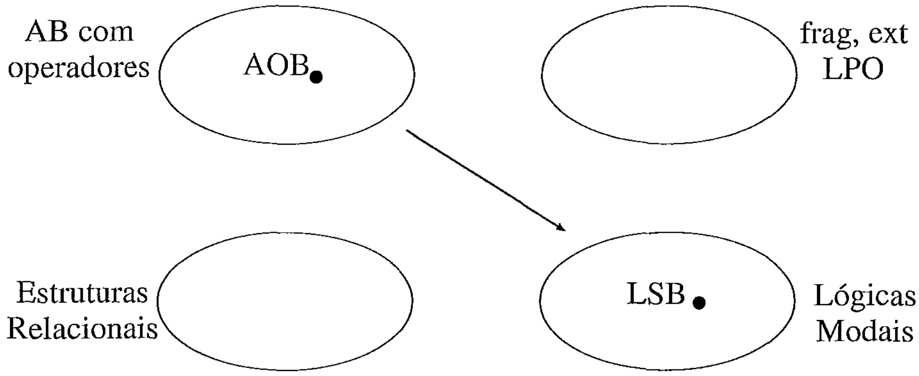
Corolário 4.1.1 *O reduto relacional de uma álgebra com operador de bifurcação é uma álgebra relacional representável.*

Baseados nos resultados acima, M.F. Frias, A.M. Haeberer e P.A.S. Veloso provaram que os axiomas do operador de bifurcação asseguram a representabilidade das álgebras com operador de bifurcação na classe das álgebras com operador de bifurcação próprias [FHV97].

Teorema 4.1.2 (Frias-Baum-Haeberer-Veloso, 1995) AOB *é representável.*

Para alguma discussão sobre este teorema em um certo contexto da teoria da representação envolvendo classes concretas e abstratas, consulte [Gyu97]. Para uma discussão sobre como as álgebras com operador de bifurcação fornecem uma solução para o problema da algebrização de LPO, consulte [FBH97].

Figura 4.1:



4.2 Lógica de Setas com Bifurcação

Vamos agora definir uma lógica modal associada a AOB, que chamamos LSB, seguindo o caminho percorrido no caso de LS e estendendo as definições e resultados (Figura 4.1).

Definição O *alfabeto* de LSB consiste de:

1. O alfabeto de LS;
2. Um operador modal binário ∇ (operador de bifurcação).

As *fórmulas* de LSB são as fórmulas de LS acrescidas das seguintes:

$$\alpha := \alpha_1 \nabla \alpha_2.$$

O dual do operador de bifurcação é defindo por $\alpha \underline{\nabla} \beta = (\alpha^- \nabla \beta^-)^-$.

As estruturas de interpretação para LSB são extensões das estruturas que fornecem a semântica de Kripke para LS.

Definição Uma *estrutura com bifurcação* é uma quíntupla $\mathcal{E} = \langle S, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I} \rangle$ onde:

i) $\langle S, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I} \rangle$ é uma estrutura de setas,

ii) $\mathsf{B} \subseteq S^3$, relação de *bifurcação*.

Definição Um *modelo com bifurcação* é um par $\mathcal{M} = \langle \mathcal{E}, V \rangle$, onde $\mathcal{E} =$

$\langle S, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I}\rangle$ é uma estrutura com bifurcação e V é uma valoração que associa subconjuntos de S a letras sentenciais, $V : \mathsf{LP} \to 2^S$.

Um *modelo enraizado com bifurcação* $\langle \mathcal{M}, A\rangle$ é um modelo com bifurcação $\mathcal{M}$ com uma seta destacada A.

Nas condições da definição, dizemos que $\mathcal{M}$ é um modelo com bifurcação *baseado* em $\mathcal{E}$ e que a estrutura com bifurcação $\mathcal{E}$ é a *base* de $\mathcal{M}$. Escrevemos, também, $\mathcal{M} = \langle S, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I}, V\rangle$ e $\langle \mathcal{M}, A\rangle = \langle S, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I}, V, A\rangle$.

Definição O *significado* de uma fórmula α em um modelo de LSB $\mathcal{M}$ é definido como em LS, pelo acréscimo da seguinte cláusula:
$(\alpha \triangledown \beta)^{\mathcal{M}} = \{A \in S :$ existem $x \in \alpha^{\mathcal{M}}$ e $y \in \beta^{\mathcal{M}}$ tais que $\mathsf{B}(A, x, y)\}$.

Assim, as condições de satisfabilidade de uma fórmula em um modelo de LSB enraizado $\langle \mathcal{M}, A\rangle$ são dadas como em LS, com o acréscimo da seguinte cláusula:
$\mathcal{M}, A \models \alpha \triangledown \beta$ se, e somente se, existem $B, C \in S$ tais que $\mathsf{B}(A, B, C)$, $\mathcal{M}, B \models \alpha$ e $\mathcal{M}, C \models \beta$.

Definição Uma fórmula α é *conseqüência* de um conjunto de fórmulas Γ, denotado por $\Gamma \models_{\mathrm{LSB}} \alpha$, quando, para qualquer modelo com bifurcação enraizado $\langle \mathcal{M}, A\rangle$, temos que $\mathcal{M}, A \models \Gamma$ acarreta $\mathcal{M}, A \models \alpha$.

Definição Uma fórmula α é *válida*, denotado por $\models_{\mathrm{LSB}} \alpha$, quando $\emptyset \models_{\mathrm{LSB}} \alpha$.

Novamente, esta semântica define uma lógica normal.

Proposição 4.2.1 (Distributividade) *Sejam α, β e γ fórmulas. Temos que:*
i) $\models_{\mathrm{LSB}} (\alpha \to \beta) \underline{\triangledown}\, \gamma \to (\alpha \underline{\triangledown}\, \gamma \to \beta \underline{\triangledown}\, \gamma)$
ii) $\models_{\mathrm{LSB}} \gamma \underline{\triangledown}\, (\alpha \to \beta) \to (\gamma \underline{\triangledown}\, \alpha \to \gamma \underline{\triangledown}\, \beta)$

Proposição 4.2.2 (Necessitação) *Sejam α e β fórmulas. Temos que:*
i) Se $\models_{\mathrm{LSB}} \alpha$*, então* $\models_{\mathrm{LSB}} \alpha \underline{\triangledown}\, \beta$.
ii) Se $\models_{\mathrm{LSB}} \alpha$*, então* $\models_{\mathrm{LSB}} \beta \underline{\triangledown}\, \alpha$.

Axiomática

Conforme foi feito no caso de LS, vamos tomar a axiomática apresentada para AOB como uma axiomática para LSB.

Axiomas

Normal-A) *Axiomas para uma lógica modal estendida normal.*

LS) *Axiomas para* LS.

LSB1) $r \triangledown s \leftrightarrow (r; (1' \triangledown 1)) \cdot (s; (1 \triangledown 1'))$

LSB2) $(r \triangledown s); (t \triangledown q)^{\smile} \leftrightarrow (r; t^{\smile}) \cdot (s; q^{\smile})$

LSB3) $((1' \triangledown 1)^{\smile} \triangledown (1 \triangledown 1')^{\smile}) + 1' \leftrightarrow 1'$

Regras de Inferência

Normal-R) *Regras para uma lógica modal estendida normal.*

Definimos *teorema* e *prova* como em LS. O conjunto dos teoremas de LSB será denotado $Cn(\text{LSB})$.

Uma propriedade deste sistema dedutivo é dada pelo Teorema da Dedução.

Teorema 4.2.1 (da Dedução) *Se* $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{\text{LSB}} \beta$, *então* $\Gamma \vdash_{\text{LSB}} \alpha \to \beta$.

Dada a axiomática para LSB, temos especificada uma classe de estruturas com bifurcação, que chamamos EB, constituída por todas as estruturas com bifurcação $\mathcal{E}$ tais que $\mathcal{E} \models \alpha$, para qualquer axioma α (Figura 4.2).

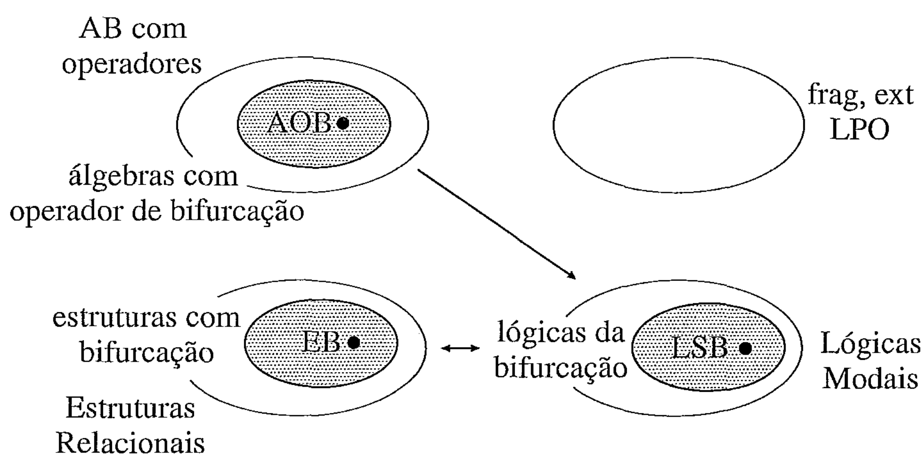
O sistema axiomático apresentado é correto com relação a EB.

Teorema 4.2.2 (Corretude) *Se* $\Gamma \vdash_{\text{LSB}} \alpha$, *então* $\Gamma \models_{\text{EB}} \alpha$.

A completude do sistema é uma conseqüência do teorema da completude de Sahlqvist [SV89], pois os axiomas de LSB são fórmulas de Sahlqvist e EB é a classe de modelos dos correspondentes de primeira ordem dos axiomas de LSB.

Teorema 4.2.3 (Completude) *Se* $\Gamma \models_{\text{EB}} \alpha$, *então* $\Gamma \vdash_{\text{LSB}} \alpha$.

Figura 4.2:



Agora podemos voltar ao domínio das álgebras com operador de bifurcação, retornando ao ponto de partida. Nesse ponto, temos uma diferença importante entre LSB e LS (Figura 4.3).

Como no caso de setas, podemos obter álgebras com operador de bifurcação a partir de estruturas em EB, calculando as álgebras de complexos destas estruturas.

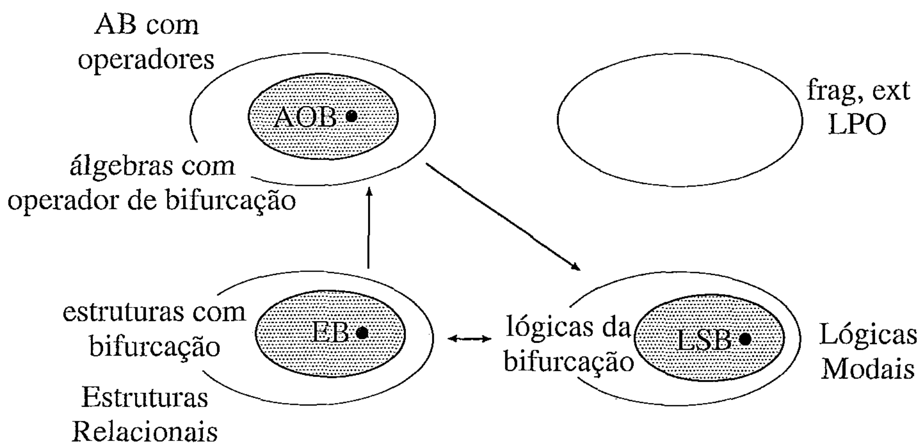
Definição Seja $\mathcal{E} = \langle S, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I}\rangle$ uma estrutura com bifurcação. A *álgebra dos complexos* de $\mathcal{E}$ é $Cm\mathcal{E} = \langle 2^S, \cup, \cap, f_{\mathsf{B}}, f_{\mathsf{C}}, -, f_{\mathsf{R}}, \emptyset, S, f_{\mathsf{I}}\rangle$, onde f_{C}, f_{R} e f_{I} são definidas como em LS e $f_{\mathsf{B}}(X,Y) = \{A \in S : \mathsf{B}(A,x,y)$ para $x \in X$ e $y \in Y\}$.

O fecho da classe dos complexos de estruturas com bifurcação por isomorfismos, subálgebras e produtos diretos arbitrários é, exatamente, a classe das álgebras com operador de bifurcação. A prova deste teorema está baseada nos lemas a seguir, cujas provas são análogas às provas dos lemas correspondentes no caso de LS.

Lema 4.2.1 *Para qualquer α e qualquer modelo enraizado com bifurcação $\langle \mathcal{M}, A\rangle$ baseado em uma estrutura de setas $\mathcal{E} \in$ EB, temos que $\mathcal{M}, A \models \alpha$ se, e somente se, $A \in V(\alpha)$.*

Lema 4.2.2 *Para qualquer α e β e qualquer estrutura com bifurcação $\mathcal{E} \in$ EB, $\mathcal{E} \models \alpha \leftrightarrow \beta$ se, e somente se, $Cm\mathcal{E} \models \alpha \approx \beta$.*

Figura 4.3:



Lema 4.2.3 CmEB $\subseteq$ AOB.

Lema 4.2.4 AOBP $\subseteq$ CmEB.

Prova:

Dada uma álgebra $\langle \mathcal{A}, \cup, \cap, |, \nabla, -, ^{-1}, \emptyset, E, Id_{\mathcal{U}} \rangle \in$ AOBP, com $\mathcal{A} \subseteq 2^{\mathcal{U}\times\mathcal{U}}$, E máximo em $\mathcal{A}$ e operação de pareamento $\star : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, considere a estrutura $\mathcal{E} = \langle E, Bif, Comp, Rev, Id \rangle$, com $Bif(a,b)(a_1,b_1)(a_2,b_2)$ se, e somente se, $a = a_1 = a_2$ e $b = \star(b_1, b_2)$, e $Comp$, Rev e Id definidas como no caso de LS. Tem-se que $\mathcal{A} = Cm\mathcal{E}$. ∎

Teorema 4.2.4 *Sejam* **I** *e* **S** *as operações de tomar cópias isomorfas e subálgebras, respectivamente. Temos que* **ISP**(CmEB) = AOB.

Prova:

Pelo Lema 4.2.3, temos que CmEB $\subseteq$ AOB. Daí, **ISP**(CmEB) $\subseteq$ **ISP**(AOB) = AOB. Pelo Lema 4.2.4, AOBP $\subseteq$ CmEB. Daí, **ISP**(AOBP) $\subseteq$ **ISP**(CmEB). Pelo Teorema 4.1.2, AOB = **ISP**(AOBP). Logo, AOB $\subseteq$ **ISP**(CmEB). ∎

Completude para EBC

O teorema da representação para AOB nos permite apresentar uma outra semântica para LSB, mais concreta, baseada em domínios estruturados.

Definição Um *domínio estruturado* sobre um conjunto não-vazio $\mathcal{U}$ é um par $\langle \mathcal{A}, \star \rangle$, onde $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$ e $\star : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ é uma função injetiva quando restrita a $\mathcal{A}$, chamada *pareamento.*

Uma *estrutura com bifurcação de conjuntos* é uma estrutura com bifurcação $\mathcal{E} = \langle \mathcal{A}, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I} \rangle$, onde $\langle \mathcal{A}, \star \rangle$ é um domínio estruturado sobre um conjunto $\mathcal{U}$.

Note que é suficiente definir um domínio estruturado para especificar uma estrutura com bifurcação de conjuntos. A classe das estruturas com bifurcação de conjuntos será denotada por EBC.

A relação de conseqüência, quando restrita a EBC, será denotada por $\models_{\text{EBC}}$.

Teorema 4.2.5 (Completude para EBC) *Se* $\Gamma \models_{\text{EBC}} \alpha$, *então* $\Gamma \vdash_{\text{LSB}} \alpha$.

A completude da LSB com relação a EBC é provada com base nos seguintes lemas.

Lema 4.2.5 *Se* Γ *for um conjunto consistente, então existirá um modelo com bifurcação enraizado* $\langle \mathcal{M}, A \rangle$ *baseado em uma estrutura em* EBC *tal que* $\mathcal{M}, A \models \Gamma$.

Vamos provar esse lema usando a completude de LSB com relação a EB e o teorema da representação para AOB. Para passar de EB para AOB, usamos a construção de álgebras de complexos. Para retornar, usamos a construção de estruturas relacionais induzidas.

Definição Seja $\langle \mathcal{A}, \cup, \cap, |, \nabla, -, ^{-1}, \emptyset, E, Id_{\mathcal{U}} \rangle$ uma estrutura em EBC com domínio estruturado $\langle \mathcal{A}, \star \rangle$ sobre $\mathcal{U}$. A estrutura com bifurcação *induzida* por $\mathcal{A}$, denotada por $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$, é definida por $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} = \langle E, \mathsf{B}, \mathsf{C}, \mathsf{R}, \mathsf{I} \rangle$.

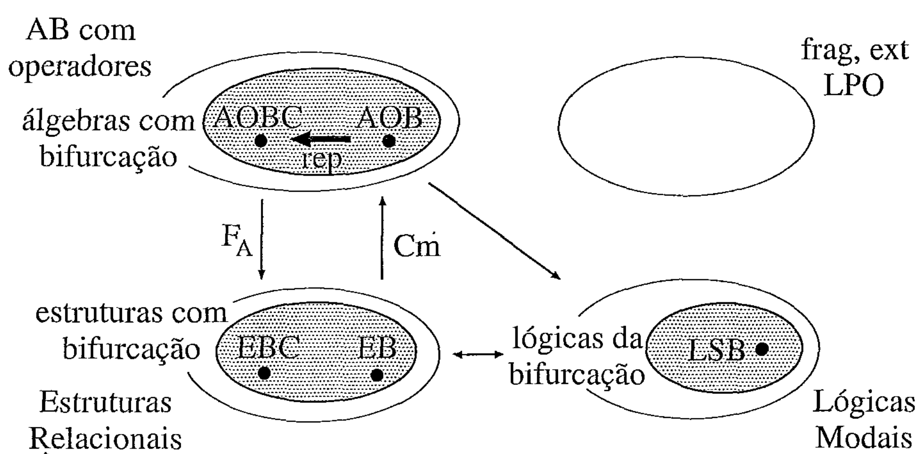
Note que cada assinalação de valor para as variáveis $V : \mathsf{Var} \to \mathcal{A}$ pode ser vista como uma valoração $V : \mathsf{LP} \to 2^E$ das letras sentenciais em conjuntos de setas na estrutura $\mathcal{E}_{\mathcal{A}}$.

Lema 4.2.6 *Qualquer que seja* $\langle \mathcal{A}, \cup, \cap, |, \nabla, -, ^{-1}, \emptyset, E, Id_{\mathcal{U}} \rangle \in$ EBC, *com domínio estruturado* $\langle \mathcal{A}, \star \rangle$, *assinalação* $V : \mathsf{Var} \to \mathcal{A}$, *e* $A \in E$, *temos que* $\langle \mathcal{E}_{\mathcal{A}}, V \rangle, A \models \alpha$ *se, e somente se,* $A \in V(\alpha)$.

Lema 4.2.7 $\mathcal{E}_{\mathrm{AOBC}} = \mathrm{EBC}$.

Lema 4.2.8 $\mathrm{S}(Cm\mathrm{EBC}) = \mathrm{AOBC}$.

Figura 4.4:



Prova (do Lema 4.2.5): Seja Γ um conjunto consistente. Pelo teorema da completude para EB temos um modelo com bifurcação enraizado $\langle \mathcal{M}, A \rangle$ baseado em $\mathcal{E} \in$ EB tal que $\mathcal{M}, A \models \Gamma$. Pelo Lema 4.2.1, temos que $A \in V(\alpha)$, para cada $\alpha \in \Gamma$ (com $\mathcal{M} = \langle \mathcal{E}, V \rangle$). Pelo Teorema 4.1.2, temos uma álgebra $\mathcal{A} \in$ AOBC tal que $h : Cm\mathcal{E} \cong \mathcal{A}$. Assim, $h(A) \in V \circ h(\alpha)$, para cada $\alpha \in \Gamma$. Pelo Lema 4.2.6, temos que $\langle \mathcal{E}_{\mathcal{A}}, V \circ h \rangle, h(A) \models \alpha$, para cada $\alpha \in \Gamma$. Logo, temos um modelo com bifurcação enraizado $\langle \mathcal{M}', A' \rangle = \langle \langle \mathcal{E}_{\mathcal{A}}, V \circ h \rangle, h(A) \rangle$ baseado em $\mathcal{E}_{\mathcal{A}} \in$ EBC (pelo Lema 4.2.7), tal que $\mathcal{M}', A' \models \Gamma$ (Figura 4.4). ∎

4.3 Quadrado em LSB

A estrutura com bifurcação $\mathcal{E} = \langle \mathcal{U} \times \mathcal{U}, Bif, Comp, Rev, Id \rangle$, com operação de pareamento $\star : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, definida na prova do Lema 4.2.4, será chamada *quadrado*. A classe dos quadrados será denotada por QD.

Note a ambigüidade de nomenclatura e notação. Estamos chamando *quadrados* tanto as estruturas de setas $\mathcal{E} = \langle \mathcal{U} \times \mathcal{U}, Comp, Rev, Id \rangle$ quanto as estruturas com bifurcação $\mathcal{E} = \langle \mathcal{U} \times \mathcal{U}, Bif, Comp, Rev, Id \rangle$, com operação de pareamento $\star : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$. Denotamos por QD tanto a classe das estruturas de setas que são quadrados, quanto a classe das estruturas com fork que são quadrados.

Como já dissemos no Capítulo 1, QD não é axiomatizável em LS. No entanto, em LSB, temos uma axiomatização para QD.

Na verdade, os axiomas de LSB axiomatizam QD. Ou, dito de outro modo, QD pode ser usado, no lugar de EB ou de EBC, para dar semântica para LSB. Em LSB, não é possível distinguir entre EB, EBC e QD.

Ou seja:

Teorema 4.3.1 *Qualquer que seja a fórmula α em* LSB, *temos que* QD $\models \alpha$ *se, e somente se,* EB $\models \alpha$.

A prova deste teorema está baseada no Lema 4.2.2, no Teorema 4.2.4 e no seguinte lema:

Lema 4.3.1 AOBP $= Cm$QD.

Prova:

Conseqüência direta das definições de álgebra com operador de bifurcação quadradra, quadrado e álgebra de complexos. ∎

Prova (do Teorema 4.3.1):

Temos que AOBP e AOB são indistinguíveis por identidades. Isto é, para qualquer identidade $\alpha \approx \beta$, temos que AOBP $\models \alpha \approx \beta$ se, e somente se, AOB $\models \alpha \approx \beta$. Daí e dos Lemas 4.2.2 e 4.3.1, e do Teorema 4.2.4, temos a prova do teorema. ∎

Assim, a axiomática para LSB caracteriza QD, pois a teoria (modal da bifurcação) de QD é axiomatizada por LSB: $Th_{\mathrm{LSB}}(\mathrm{QD}) = Cn(\mathrm{LSB})$. Não temos, no entanto, que a classe de modelos de LSB é QD: $Mod(\mathrm{LSB}) = \mathrm{EB}$.

Completude

Conforme comentamos anteriormente, podemos utilizar a classe dos quadrados para dar semântica para LSB. Definimos, então:

Definição Um *modelo enraizado quadrado com bifurcação* é um modelo enraizado com bifurcação baseado em um quadrado.

Definição Dizemos que um conjunto de fórmulas Γ é *satisfeito* em um modelo enraizado quadrado com bifurcação $\mathcal{M}, A$, denotado por $\mathcal{M}, A \models \Gamma$, se, para toda fórmula $\alpha \in \Gamma$, temos que $\mathcal{M}, A \models \alpha$.

Definição Seja Γ um conjunto de fórmulas e α uma fórmula. Dizemos que α é *conseqüência* de Γ, denotado por $\Gamma \models \alpha$, se, para todo quadrado $\mathcal{Q}$, toda valoração V em $\mathcal{Q}$ e toda seta A de $\mathcal{Q}$, temos que $\langle \mathcal{Q}, V\rangle, A \models \Gamma$ acarreta $\langle \mathcal{Q}, V\rangle, A \models \alpha$.

Assim, temos:

Teorema 4.3.2 (Completude para QD) *Se* $\Gamma \models_{\mathrm{QD}} \alpha$, *então* $\Gamma \vdash_{\mathrm{LSB}} \alpha$.

Prova:

Como toda estrutura em EBC é uma união de quadrados e as relações Bif, *Comp*, *Rev*, e Id são fechadas em cada quadrado, a completude do sistema com relação a QD é conseqüência da completude de LSB para EBC e do teorema dos submodelos gerados da lógica modal (que vale trivialmente em LSB). ∎

4.4 Expressividade

Nesta seção, mostramos que LSB tem o poder de expressão da linguagem de primeira ordem com um símbolo de função binária $\star$ e símbolos de relação binária como únicos símbolos não lógicos. Essa linguagem de primeira ordem será denotada LPO$\star$.

Para mostrar que LSB e LPO$\star$ são equipolentes em meio de expressão, mostramos que existem traduções de LSB para LPO$\star$ e vice-versa.

Definição A tradução T_{xy} : LSB $\rightarrow$ LPO $\star$ (x, y) é definida recursivamente como segue:

1. $T_{xy}(r) = Rxy$
2. $T_{xy}(0) = \bot$
3. $T_{xy}(1) = \top$
4. $T_{xy}(1') = x \approx y$
5. $T_{xy}(\alpha^{-}) = \neg T_{xy}(\alpha)$
6. $T_{xy}(\alpha^{\smile}) = T_{yx}(\alpha)$
7. $T_{xy}(\alpha \cdot\cdot \beta) = T_{xy}(\alpha) \wedge T_{xy}(\beta)$
8. $T_{xy}(\alpha + \beta) = T_{xy}(\alpha) \vee T_{xy}(\beta)$
9. $T_{xy}(\alpha; \beta) = \exists z(T_{xz}(\alpha) \wedge T_{zy}(\beta))$
10. $T_{xy}(\alpha \triangledown \beta) = \exists y_1 y_2(y \approx y_1 \star y_2 \wedge T_{xy_1}(\alpha) \wedge T_{xy_2}(\beta))$

Proposição 4.4.1 $(a, b) \in \alpha^{\mathcal{M}}$ *se, e somente se,* $\mathcal{M} \models T_{xy}(\alpha)\ [a/x, b/y]$.

Prova: Por indução na estrutura de α. ∎

Como as fórmulas em LSB são interpretadas como relações binárias, para definir a tradução no sentido contrário, precisamos codificar o conjunto de variáveis que ocorrem em uma fórmula de LPO em duas variáveis.

Dada uma fórmula ϕ em LPO, denotamos por $\mathsf{var}(\phi)$ o conjunto das variáveis que ocorrem em ϕ e, por $\mathsf{liv}(\phi)$, o conjunto das variáveis que ocorrem livres em ϕ. Dado um termo t em LPO, denotamos por $\mathsf{var}(t)$ o conjunto das variáveis que ocorrem em t. Denotamos por $(t/x)\phi$ a fórmula obtida de ϕ pela substituição das ocorrências livres da variável x pelo termo t na fórmula ϕ.

Considere o conjunto de variáveis ordenado por $<$. Dado um conjunto de variáveis $\underline{x}$, denotamos por $\mathsf{min}(\underline{x})$ a primeira variável em $\underline{x}$, por $\mathsf{Max}(\underline{x})$ a última variável em $\underline{x}$ e por $\mathsf{prox}(\underline{x})$ a menor variável maior que todas as variáveis em $\underline{x}$ (segundo a ordem considerada para as variáveis).

Definição Seja $\exists y\phi$ em LPO. A *variante alfabética ordenada* de $\exists y\phi$ é $\exists y'\phi(y')$, onde $y' = \mathsf{prox}(\mathsf{var}(\exists y\phi(y)))$.

Vamos utilizar a seguinte notação: $\phi^y := \phi(y/\mathsf{nxt}(\mathsf{vr}(\phi)))$. Assim, a variante alfabética ordenada de $\exists y\phi$ é $\exists\mathsf{prox}(\mathsf{var}(\exists y\phi(y)))\phi^y$.

Em LPO, toda fórmula é equivalente a uma na forma normal de termos reduzidos, uma onde todas as subfórmulas atômicas são das formas $x \approx y$, $f(x_1, \ldots, x_n) \approx y$ ou $R(x_1, \ldots, x_m)$ [EFT84].

Com variáveis ordenadas, temos:

Lema 4.4.1 (Forma normal de termos reduzidos ordenada) *Dada uma fórmula de* LPO$\star$ *existe uma equivalente na forma normal de termos reduzidos com subfórmulas atômicas das formas $x \approx x$ (para qualquer variável x), $x \approx y$ (para quaisquer duas variáveis distintas x e y), $x \star y \approx z$ (para quaisquer três variáveis distintas $x < y < z$), $P(x, y)$ (para quaisquer duas variáveis distintas $x < y$).*

Prova:

Os casos não contemplados pela ordenação podem ser tratados pela igualdade, com variáveis novas selecionadas conforme o necessário. ∎

Definição A *codificação* de um conjunto de variáveis finito não-vazio $\underline{x}$, denotada por $\mathsf{K}(\underline{x})$, é definida indutivamente por:

1. $\mathsf{K}(\{x\}) := x$.
2. $\mathsf{K}(\underline{x} \cup \{y\}) := \mathsf{K}(\underline{x}) \star y$ se $\mathsf{Max}(\underline{x}) < y$.

Assim, se $\underline{x} = \{x_1, \ldots, x_m\}$, então $\mathsf{K}(\underline{x}) = (\cdots(x_1 \star x_2) \star \cdots) \star x_m$ quando $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$.

Podemos usar fórmulas de LSB para extrair variáveis da codificação de um conjunto.

Definição A fórmula *extratora de variáveis* para a variável x_j na codificação $\mathsf{K}(\underline{x})$, denotada por $\varepsilon(\underline{x} \hookrightarrow x_j)$, é definida como segue:

1. $\varepsilon(\underline{x} \hookrightarrow x_j) := \rho$ se $x_j = x_m$
2. $\varepsilon(\underline{x} \hookrightarrow x_j) := \pi \circ \varepsilon(\underline{x} - \{x_m\} \to x_j)$ se $x_j < x_m$.

Proposição 4.4.2 $(\mathsf{K}(\underline{c}), d) \in \mathcal{M}[\varepsilon(\underline{x} \hookrightarrow x_j)]$ *se, e somente se,* $c_j = d$.

Para extrair a codificação de um subconjunto $\underline{x}$ da codificação de $\underline{x} \cup \{y\}$, com $y \notin \underline{x}$, definimos:

Definição A fórmula *extratora de subconjuntos* para a variável $\underline{x}$ na codificação $\underline{x} \cup \{y\}$, com $y \notin \underline{x}$, denotada por $\varepsilon(\underline{x} \cup \{y\} \hookrightarrow \underline{x})$, é definida como segue:

1. $\varepsilon(\underline{x} \cup \{y\} \hookrightarrow \underline{x}) := \pi$ se $y > x_m$
2. $\varepsilon(\underline{x} \cup \{y\} \hookrightarrow \underline{x}) := (\pi \circ \varepsilon(\underline{x} - \{x_m\} \cup \{y\} \hookrightarrow \underline{x} - \{x_m\})) \triangledown \rho$ se $y < x_m$.

Proposição 4.4.3 $(\mathsf{K}(\underline{c} \cup \{d\}), e) \in \mathcal{M}[\varepsilon(\underline{x} \cup \{y\} \hookrightarrow \underline{x})]$ *se, e somente se,* $\mathsf{K}(\underline{c}) = e$.

Podemos agora apresentar a tradução G : LPO$\star$ $\rightarrow$ LSB. Cada fórmula ϕ de LPO$\star$ terá suas variáveis classificadas como variáveis de *entrada*, cujo conjunto será denotado por $\mathsf{e}(\phi)$ e variáveis de *saída*, cujo conjunto será denotado por $\mathsf{s}(\phi)$. Então, iremos traduzir a fórmula ϕ em uma fórmula $G(\phi)$ de LSB, de modo que ϕ e $G(\phi)$ tenham o mesmo significado, i.e., denotem a mesma relação binária, módulo uma classificação das variáveis em ϕ como entrada/saída e uma codificação de $\mathsf{e}(\phi)$ e $\mathsf{s}(\phi)$.

Quanto às fórmulas atômicas, é suficiente traduzir os casos mencionados no Lema 4.4.1, da forma normal de termos reduzidos ordenada. A negação será preservada pela tradução. Quanto às conjunções, vamos facilitar a tradução fazendo um pré-processamento que vai igualar o conjunto de variáveis livres das componentes da conjunção.

Definição Seja ϕ uma fórmula de LPO cujas variáveis livres foram classificadas em variáveis de entrada $\mathsf{e}(\phi)$ e variáveis de saída $\mathsf{s}(\phi)$ e y uma variável. A *pré-conjunção com igualdade* associada a ϕ e y é ${}_y\phi = y \approx y \wedge \phi$, com $\mathsf{e}({}_y\phi) := \{y\} \cup \mathsf{e}(\phi)$ and $\mathsf{s}({}_y\phi) := \mathsf{s}(\phi)$ e y uma variável. A *pós-conjunção com igualdade* associada a ϕ e y é $\phi_y = \phi \wedge y \approx y$, com $\mathsf{e}(\phi_y) := \mathsf{e}(\phi)$ e $\mathsf{s}(\phi_y) := \mathsf{s}(\phi) \cup \{y\}$.

Definição Seja ϕ uma fórmula de LPO cujas variáveis livres foram classificadas em variáveis de entrada $\mathsf{e}(\phi)$ e variáveis de saída $\mathsf{s}(\phi)$ e $\underline{v}$ um conjunto de variáveis. A *pré-conjunção* associada a ϕ e $\underline{v}$ é ${}_{\underline{v}}\phi = y \approx y \wedge \phi$, com $\mathsf{e}({}_{\underline{v}}\phi) := \underline{v} \cup \mathsf{e}(\phi)$ e $\mathsf{s}({}_{\underline{v}}\phi) := \mathsf{s}(\phi)$, definida recursivamente por:

Fórmula ϕ	variáveis de entrada $\mathsf{e}(\phi)$	variáveis de saída $\mathsf{s}(\phi)$	
$x \approx x$	$\{x\}$	$\{x\}$	
$x \approx y$	$\{x\}$	$\{y\}$	
$x \star y \approx z$	$\{x, y\}$	$\{z\}$	
$P(x, y)$	$\{x\}$	$\{y\}$	
$\neg\phi$	$\mathsf{e}(\phi)$	$\mathsf{s}(\phi)$	
${}_y\phi$	$\{y\} \cup \mathsf{e}(\phi)$	$\mathsf{s}(\phi)$	
ϕ_y	$\mathsf{e}(\phi)$	$\mathsf{s}(\phi) \cup \{y\}$	
${}_{\underline{x}}\phi_{\underline{y}}$	$\underline{x} \cup \mathsf{e}(\phi)$	$\mathsf{s}(\phi) \cup \underline{y}$	
$\phi \wedge \psi$	$\mathsf{e}(\phi) \cup \mathsf{e}(\psi)$	$\mathsf{s}(\phi) \cup \mathsf{s}(\psi)$	
$\exists y\phi$	$\mathsf{e}(\phi)$	$\mathsf{s}(\phi)$	quando $y \notin \mathsf{fv}(\phi)$
$\exists y\phi$	$\mathsf{e}(\phi) - \{y\}$	$\mathsf{s}(\phi) - \{y\}$	quando $y \in \mathsf{fv}(\phi)$

1. ${}_{\{x\}}\phi = {}_x\phi$
2. ${}_{y \cup \underline{x}}\phi = {}_y({}_{\underline{x}}\phi)$

A *pós-conjunção* associada a ϕ e $\underline{v}$ é $\phi_{\underline{v}} = \phi \wedge y \approx y$, com $\mathsf{e}(\phi_{\underline{v}}) := \mathsf{e}(\phi)$ and $\mathsf{s}(\phi_{\underline{v}}) := \mathsf{s}(\phi) \cup \underline{v}$, definida recursivamente por:

1. $\phi_{\{x\}} := \phi_x$
2. $\phi_{y \cup \underline{x}} := (\phi_{\underline{x}})_y$

Vamos escrever ${}_{\underline{x}}\phi_{\underline{y}}$ para abreviar $({}_{\underline{x}}\phi)_{\underline{y}}$, com $\mathsf{e}({}_{\underline{x}}\phi_{\underline{y}}) = \underline{x} \cup \mathsf{e}(\phi)$ e $\mathsf{s}({}_{\underline{x}}\phi_{\underline{y}}) = \mathsf{s}(\phi) \cup \underline{y}$.

A tabela a seguir apresenta a classificação entrada/saída para as variáveis de uma fórmula de LPO na forma normal de termos reduzidos ordenada.

Definição A tradução G : LPO$\star$ $\to$ LSB é definida recursivamente como segue:

1. Para qualquer variável x, temos $G(x \approx x) = 1'$.
2. Para quaisquer variáveis x e y distintas, temos $G(x \approx y) = 1'$
3. Para quaisquer variáveis x, y e z distintas com $x < y < z$, temos $G(x \star y \approx z) = 1'$
4. Para quaisquer variáveis x e y distintas com $x < y$, temos $G(Rxy) = r$
5. Para qualquer fórmula ϕ, temos $G(\neg\phi) = (G(\phi))^-$
6. Para qualquer fórmula ϕ e variável y, temos $GT({}_y\phi) = GT(\phi)$, se $y \in \mathsf{e}(\phi)$.
7. Para qualquer fórmula ϕ e variável y, temos $GT(\phi_y) = GT(\phi)$ se $y \in \mathsf{s}(\phi)$.
8. Para qualquer fórmula ϕ e variável y, temos $GT({}_y\phi) = \varepsilon(\{y\} \cup \mathsf{e}(\phi) \hookrightarrow \mathsf{e}(\phi)) \circ GT(\phi)$ se $y \notin \mathsf{e}(\phi)$.

9. Para qualquer fórmula ϕ e variável y, temos $GT(\phi_y) = GT(\phi) \circ (\otimes\varepsilon(\mathsf{s}(\phi) \cup \{y\} \hookrightarrow \mathsf{s}(\phi)))$ se $y \notin \mathsf{s}(\phi)$.

10. Para quaisquer fórmulas ϕ e ψ, temos $GT(\phi \wedge \psi) = GT({}_{\mathsf{e}(\psi)}\phi_{\mathsf{s}(\psi)}) \wedge GT({}_{\mathsf{e}(\phi)}\psi_{\mathsf{s}(\phi)})$.

11. Para qualquer fórmula ϕ e variável $y \notin \mathsf{liv}(\phi)$, temos $GT(\exists y\phi) = GT(\phi)$.

12. Para qualquer fórmula ϕ e variável $y \in \mathsf{liv}(\phi)$, temos $GT(\exists y\phi) = (\otimes\pi) \circ GT({}_{y'}\phi^{y}{}_{y'}) \circ \pi$.

Proposição 4.4.4 *Dada uma fórmula ϕ de* LPO$\star$ *com $m > 0$ variáveis livres classificadas como variáveis de entrada $\mathsf{e}(\phi) = \underline{x}$ e variáveis de saída $\mathsf{s}(\phi) := \underline{y}$, se $\mathcal{M} \models K(\underline{x}) \approx z[\underline{a}, c]$ e $\mathcal{M} \models K(\underline{y}) \approx w[\underline{b}, d]$, então $\mathcal{M} \models \phi(\underline{x}, \underline{y})[\underline{a}, \underline{b}]$ se, e somente se, $(b, d) \in GT(\phi)^{\mathcal{M}}$.*

Prova: Por indução na estrutura de $G(\phi)$. ∎

Conclusão

A Lógica de Setas (LS) se desenvolve no estudo de extensões com maior poder de expressão, para a caracterização de classes de estruturas — tendo a Lógica de Primeira Ordem (LPO) como um parâmetro — e de extensões com maior poder de prova, para a axiomatização de classes de estruturas.

A Lógica de Setas com Bifurcação (LSB) e a Lógica de Setas Híbrida Bidimensional (LSH2) aparecem nesse contexto, como extensões de LS que axiomatizam a classe dos quadrados e que são equipolentes em meios de expressão com LPO. LSB, no entanto, possui vantagens quando comparada a LSH2: além de permitir a utilização dos métodos e técnicas da lógica modal, como LSB não se afasta da álgebra (por ser um sistema ortodoxo), também os métodos e técnicas algébricos podem ser utilizados.

LS é a contraparte modal da Álgebra Relacional (AR) e LSB é a contraparte modal da Álgebra com Operador de Bifurcação (AOB). As principais diferenças entre álgebras relacionais e álgebras com operador de bifurcação são:

— *representação*: enquanto nem todas as álgebras relacionais são representáveis, todas as álgebras com operador de bifurcação o são;

— *axiomatização finita*: a classe das álgebras relacionais representáveis não é finitamente axiomatizável, mas a classe das álgebras com operador de bifurcação representáveis o é;

— *poder de expressão*: a teoria equacional das álgebras relacionais tem o mesmo poder de expressão de um fragmento de LPO com três variáveis, enquanto que a teoria equacional das álgebras com operador de bifurcação tem o poder de expressão de LPO.

Neste trabalho, utilizamos a axiomatização finita das álgebras com operador de bifurcação para definir axiomas para LSB. Obtivemos uma prova de completude bastante simples, utilizando a representabilidade destas álgebras. O poder expressivo de LSB é herdado diretamente do poder expressivo de AOB. Este ponto exemplifica a vantagem de trabalhar com um sistema ortodoxo: como LSB mantém a relação estreita com sua contraparte algébrica, é possível importar resultados de AOB para LSB, como a tradução para LPO. Mas a definição das traduções entre LSB e LPO é bastante simplificada no contexto modal. Este outro ponto exemplifica a vantagem advinda da possibilidade de estudar um mesmo objeto em contextos diferentes.

Queremos observar que raciocinar, no contexto modal, com a semântica quadrada, parece ser muito vantajoso: trabalhamos apenas com relações binárias (e não com relações n-árias, para qualquer n) e com quadrados (álgebras simples) na metalinguagem. A tradução entre AOB, LSB e LPO pode ser utilizada vantajosamente: podemos livremente escolher em qual formalismo expressar e raciocinar sobre o comportamento de entrada/saída de programas, já que é possível transferir propriedades e resultados entre os formalismos.

A seguir apresentamos algumas perspectivas.

- De acordo com [MV97], além da completude, outra questão interessante a ser formulada e respondida é: podemos estender a definição e os resultados sobre o operador de bifurcação para outras dimensões? No caso de uma resposta negativa, como poderíamos modificar o formalismo a fim de obter uma resposta positiva?

- Algumas aplicações de lógica modal à teoria da computação podem ser incrementadas com o operador de bifurcação. Apontamos duas: a lógica dinâmica e a lógica temporal. Estendendo a lógica dinâmica [Har84] com o operador de bifurcação obtemos uma linguagem em que, além da composição seqüencial, do operador de escolha e de iteração, também o paralelismo pode ser modelado. Em [Ven91], Venema considerou uma lógica temporal bidimensional. A introdução do operador de bifurcação nesse contexto permite raciocinar sobre a ramificação do tempo de maneira simples e natural.

- Também deve ser considerada a aplicação de LSB para descrever o comportamento de programas, em uma abordagem similar a de R. Maddux [Mad96], onde o formalismo algébrico de AR é utilizado para dar semântica para linguagens de programação.

- A hibridização padrão da Lógica de Setas não fornece um sistema capaz de axiomatizar o quadrado. No Capítulo 3, apresentamos uma hibridização onde são utilizadas variáveis estruturadas e assinalações como morfismos. Seria interessante investigar se esta abordagem pode dar frutos em outros contextos.

- Tanto LSB quanto a Lógica de Setas Híbrida Bidimensional (LSH2) são extensões de LS equipolentes a LPO. LSB é um sistema ortodoxo e LSH2 não. Uma comparação destes dois sistemas do ponto de vista da adequabilidade como formalismos de especificação e derivação de programas poderia ser obtida a partir de desenvolvimento da teoria da prova de cada um.

Esperamos que LSB, assim como AOB, seja útil como um formalismo para raciocinar sobre o processo de especificação e derivação de programas. Além disso, trazendo AOB para o contexto modal, introduzimos um operador bem conhecido e com propriedades algébricas interessantes. Com isso, esperamos incrementar as aplicações da lógica modal à ciência da computação.

A Lógica de Setas tem sido utilizada para formalizar conceitos em outras áreas, além da ciência da computação: matemática, lingüística, ciência da cognição [MV97, MPM96]. Esperamos que o desenvolvimento da Lógica de Setas com Bifurcação torne possível incrementar as aplicações de Lógica de Setas também nestas outras áreas.

Referências Bibliográficas

[AB01] C. ARECES e P. BLACKBURN, Bringing them all together, *Journal of Logic and Computation* **11**(2001) 657–669.

[ABM01] C. ARECES, P. BLACKBURN e M. MARX, Hybrid logics: characterization, interpolation and complexity, *The Journal of Symbolic Logic* **66**(2001) 977–1010.

[And91] H. ANDRÉKA, *Complexity of Equations Valid in Algebras of relations, Part I: Strong non finitizability, Part II: Finite axiomatizations*, Tese de doutorado, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 1991.

[vBen84] J. VAN BENTHEM, Correspondence theory. In D.M. Gabbay e F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, Vol. 2, D. Reidel, Dordrecht, 1984.

[vBen85] J. VAN BENTHEM, *Modal Logic and Classical Logic*, Bibliopolis, 1985.

[BFHM96] G.A. BAUM, M.F. FRIAS, A.M. HAEBERER e P.E. MARTÍNEZ LÓPEZ, From specifications to programs: a fork-algebraic approach to bridge the gap. In *Proceedings of MFCS'96*, Springer, Crakow, 1996.

[BHSV93] R. BERGHAMMER, A.M. HAEBERER, G. SCHMIDT e P.A.S. VELOSO, Comparing two different approachs to products in abstract relation algebras. In *Proceedings of the Third International*

Conference on Algebraic Methodology and Software Technology, AMAST'93, Springer, 1993, 167–176.

[Bir35] G. BIRKHOFF, On the structure of abstract algebras, *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Vol. 31, 1935, 433–454.

[Bir90] R.S. BIRD, A calculus of functions for program derivation. In D.A. Turner (ed.), *Research Topics in Functional Programming*, The UT Year Programming Series, Cap. 11, Addison-Wesley, 1990, 287–308.

[Bri93] C. BRINK, Power structures, *Algebra Universalis* **30**(1993) 177–216.

[BRV01] P. BLACKBURN, M. DE RIJKE e Y. VENEMA, *Modal Logic*, Cambridge, Cambridge University Press, 2001.

[BS98] P. BLACKBURN e J. SELIGMAN, What are hybrid languages? In *Advances in modal logic*, Vol. 1, M. Kracht, M. de Rijke, H. Wansing e M. Zakharyaschev (eds.), CSLI, Stanford, 1998, 41–62.

[BT98] P. BLACKBURN e M. TZAKOVA, Hybrid completeness, *Logic Journal of the IGPL* **6**(1998) 625–650.

[BV99] M.R.F. BENEVIDES e P.A.S. VELOSO, Axiomatization and Completeness for Fork Modal Logic, *XII Encontro Brasileiro de Lógica*, 1999, 87–94.

[CT51] L.H. CHIN e A. TARSKI, Distributive and modular laws in the arithmetic of relation algebras, *University of California Publications in Mathematics (N.S.)*, Vol. 1, 1951, 341–384.

[EFT84] H.-D. EBBINGHAUS, J. FLUM e W. THOMAS, *Mathematical Logic*, Springer, Berlin, 1984.

[FA94] M.F. FRIAS e N.G. AGUAYO, Natural specifications vs. abstract specifications. In *Proceedings of SOFSEM'94*, Milovy, Czech Republic, 1994, 17–22.

[FAN93] M.F. Frias, N.G. Aguayo e B. Novak, Development of Graph Algorithms with Fork Algebras. In *Proceedings of the XIX Latinamerican Conference on Informatics*, 1993, 529–554.

M.F. Frias, G.A. Baum, A.M. Haeberer e P.A.S. Veloso, Fork algebras are representable, *Bulletin of the Section of Logic* **24**(1995) 64-74.

[FBH97] M.F. Frias, G.A. Baum e A.M. Haeberer, Fork algebras in algebras, logic and computer science, *Fundamenta Informaticæ* **32**(1997) 1–25.

[FBVVV01] R.P. de Freitas, M. Benevides, J.P. Viana, S.R.M. Veloso e P.A.S. Veloso, Axiomatization and completeness for Fork Arrow Logic, *Proceedings of WMF'01*, Rio de Janeiro, 2001, 1–12.

[FG95] M.F. Frias e S.E. Gordillo, Semantic optimization of queries in deductive object-oriented database. In *Proceedings of ADBIS'95*, Springer, 1995, 55–72.

[FHV97] M.F. Frias, A.M. Haeberer e P.A.S. Veloso, A finite axiomatization for fork algebras, *Logic Journal of the IGPL* **5**(1997) 311–319.

[Fri02] M.F. Frias, *Fork Algebras in Algebra, Logic and Computer Science*, Series: Advances in Logic, World Scientific Publishing Co., 2002.

[FV02] R.P. de Freitas e J.P. Viana, A completeness result for Relation Algebra with Binders, Proceedings of WoLLIC'02, *ENTCS* **67**(2002), disponível em `http://www.elsevier.nl/locate/entcs/volume67.html`.

[FVBVV01a] R.P. de Freitas, J.P. Viana, M. Benevides, P.A.S. Veloso e S.R.M. Veloso, Squares in Fork Modal Logic, Proceedings of WoLLIC'01, Brasília, 2001, 77–86.

[FVBVV01b] R.P. de Freitas, J.P. Viana, M. Benevides, P.A.S. Veloso e S.R.M. Veloso, Squares in Fork Arrow Logic, *Journal of Philosophical Logic*, a ser publicado.

[FVVVB02a] R.P. de Freitas, J.P. Viana, P.A.S. Veloso, S.R.M. Veloso e M. Benevides, On Hybrid Arrow Logic, *Proceedings of HyLo@LICS'02*, Copenhagen, 2002, 53–67.

[FVVVB02b] R.P. de Freitas, P.A.S. Veloso, J.P. Viana, S.R.M. Veloso e M. Benevides, *On the Expressive Power of Fork Arrow Logic*, Relatório Técnico ES 583/02, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE-UFRJ, Rio de Janeiro, Junho de 2002.

[Gab81] D.M. Gabbay, An irreflexivity lemma with applications to axiomatizations of conditions on linear frames. In U. Mönnich (ed.), *Aspects of Philosophical Logic*, D. Reidel, 1981, 67–89.

[Gyu97] V. Gyuris, A short proof of representability of fork algebras, *Theoretical Computer Science* **188**(1997) 211–220.

[Har84] D. Harel, Dynamic Logic. In D.M. Gabbay and F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic*, vol. 2, Reidel, Dordrecht, 1984, 497–604.

[Hen77] L. Henkin, The logic of equality, *The American Mathematical Monthly* **84**(1977) 597–612.

[HBS93] A.M. Haeberer, G.A. Baum e G. Schmidt, On the smooth calculation of relational recursive expressions out of first-order nonconstructive specifications involving quantifiers. In *Proceedings of the International Conference on Formal Methods in Programming and their Applications*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 735, Springer, 1993, 281–298.

[HFBV97] A.M. HAEBERER, M.F. FRIAS, G.A. BAUM e P.A.S. VELOSO, Fork Algebras. In C. Brink, W. Kahl e G. Schmidt (eds.), *Relational Methods in Computer Science*, Springer, Vienna, 1997, 54–69.

[Hun33] E.V. HUNTINGTON, New sets of independent postulata for the algebra of logic, with special reference to Whitehead and Russell's Principia Mathematica, *Transactions of The American Mathematical Society* **35**(1933) 274–304, 557–558, 971.

[HV90] A.M. HAEBERER e P.A.S. VELOSO, *Towards a New Algebra of First-Order Logic*, Departamento de Informática, PUC-Rio, Relatório Técnico MCC 18/90, 1990.

[HV91] A.M. HAEBERER e P.A.S. VELOSO, Partial relations for program derivation: adequacy, inevitability and expressiveness. In B. Möller (ed.), *Constructing Programs from Specifications – Proceedings of the IFIP TC2 Working Conference on Constructing Programs from Specifications*, North-Holland, New York, 1991, 319–371.

[Jón59] B. JÓNSSON, Representation of modular lattices and of relation algebras, *Transactions of the American Mathematical Society* **92**(1959) 449–464.

[Jón82] B. JÓNSSON, Varieties of relation algebras, *Algebra Universalis* **15**(1982) 273–298.

[Jón91] B. JÓNSSON, The theory of binary relations. In H. Andréka, J.D. Monk e I. Németi (eds.), *Algebraic Logic, Proc. Conf. Budapest, 1988*, Colloquia Mathematica Society János Bolyai, North-Holland, Amsterdam, 1991, 245–292.

[JT51] B. JÓNSSON e A. TARSKI, Boolean algebras with operators, part I, *American Journal of Mathematics* **73**(1951) 891–939.

[JT52] B. JÓNSSON e A. TARSKI, Boolean algebras with operators, part II, *American Journal of Mathematics* **74**(1952) 127–162.

[KN97] A. Kurucz e I. Németi, *Representability of pairing relation algebras depends on your ontology*, Preprint, Hungarian Academy of Sciences, Budapest, 1997.

[Kri59] S. Kripke, A completeness theorem in modal logic, *The Journal of Symbolic Logic* **24**:1–14, 1959.

[Lem66a] E.J. Lemmon, Algebraic semantics for modal logic I and II, *The Journal of Symbolic Logic* **31**(1):46–65, 1966.

[Lem66b] E.J. Lemmon, Algebraic semantics for modal logic II, *The Journal of Symbolic Logic* **31**(2):191–218, 1966.

[Lyn50] R.C. Lyndon, The representantion of relation algebras, *Annals of Mathematics* **51**:707–729, 1950.

[Lyn56] R.C. Lyndon, The representantion of relation algebras, II, *Annals of Mathematics* **63**(1956) 294–307.

[Lyn61] R.C. Lyndon, Relation algebras and projective geometries, *Michigan Mathematical Journal* **8**(1961) 21–28.

[Mad83] R.D. Maddux, A sequent calculus for relation algebras, *Annals of Pure and Applied Logic* **25**(1983) 73–101.

[Mad91] R.D. Maddux, The origin of relation algebras in the development and axiomatizations of the calculus of relations, *Studia Logica* **50**(1991) 421–455.

[Mad96] R.D. Maddux, Relation-algebraic semantics, *Theoretical Computer Science* **160**(1996)1–85.

[Mar95] M. Marx, *Algebraic Relativization and Arrow Logic.* Tese de doutorado, ILLC Dissertation Series, 1995-3, Institute for Logic, Language and Computation, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam, 1995.

[Mar01] M. MARX, Relation Algebra with Binders, *Journal of Logic and Computation* **11**(2001) 691–700.

[McK82] R. MCKENZIE, Representation of integral relation algebras, *Transactions of the American Mathematical Society* **272**(1982) 501–526.

[Mol91] B. MÖLLER, Relations as Program Develpment Language. In B. Möller (ed.), *Constructiong Programs from Specifications*, Proc. of the IFIP TC2 Working Conf. on Constructiong Programs from Specifications, IFIP WG 2.1, North-Holland, 1991.

[Mon69] J.D. MONK, Nonfinitizability of classes of representable cylindric algebras, *The Journal of Symbolic Logic* **34**(1969) 331–343.

[MPM96] M. MARX, L. PÓLOS e M. MASUCH, *Logic and Multi-Modal Logic*, CSLI Publications, Stanford, 1996.

[MV97] M. MARX e Y. VENEMA, *Multi-Dimensional Modal Logic*, Applied Logic Series, Vol. 4, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997.

[Nem91] I. NÉMETI, Algebraizations of quantifier logics: an overview, *Studia Logica*, L(3/4), 1991, 485–569.

[Orl91] E. ORLOWSKA, Relational interpretation of modal logics. In H. Andréka, J.D. Monk e I. Németi (eds.), *Algebraic Logic, Proceedings Conf. Budapest, 1988*, North-Holland, Amsterdam, 1991, 443–471.

[dRij93] M. DE RIJKE, *Extending Modal Logic*. Tese de doutorado, ILLC Dissertation Series, 1993-4, Institute for Logic, Language and Computation, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam, 1993.

[Seg71] K. SEGERBERG, *An Essay in Classical Modal Logic*, Filosofiska Studies, Vol. 13, Uppsala, 1971.

[Sto36] M.H. STONE, The theory of representations for Boolean algebras, *Transactions of the American Mathematical Society* **40**(1936) 37–111.

[Sto37] M.H. STONE, Applications of the theory of Boolean rings to general topology, *Transactions of the American Mathematical Society* **41**(1937) 375–481.

[SV89] G. SAMBIN e V. VACCARO, A new proof of Sahlqvist's theorem on modal definability and completeness, *The Journal of Symbolic Logic* **54**(1989) 992–999.

[Tar41] A. TARSKI, On the calculus of relations, *The Journal of Symbolic Logic* **6**(1941) 73–89.

[Tar55] A. TARSKI, Contribuitions to the theory of models, III, *Indagationes Mathematicæ* **17**(1955) 56–64.

[Tar56] A. TARSKI, On the foundations of Boolean algebras. In In J.H. Woodger (ed.), *Logic, Semantics, Metamathematics: Papers from 1923 to 1938*, Clarendon Press, Oxford, 1956, 320–341.

[TG87] A. TARSKI e S. GIVANT, *A Formalization of Set Theory Without Variables*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 41, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1987.

[Vel74] P.A.S. VELOSO, *The History of an Error in the Theory of Algebras of Relations*, Dissertação de Mestrado, University of California, Berkeley, 1974.

[Vel96] P.A.S. VELOSO, *On finite and infinite fork algebras and their relational reducts: classification and examples*, Relatório técnico, ES-418/96, Programa de Engenharia de Sistemas e Computação, COPPE-UFRJ, 1996.

[Vel97] P.A.S. VELOSO, *Computer Science and Logic: Fork Algebras*, Relatório Técnico, Departamento de Informática, PUC-Rio, MCC 41/96, C.J.P. Lucena (ed.), 1997.

[Ven91] Y. VENEMA, *Many-Dimensional Modal Logic*. Tese de doutorado, Institute for Logic, Language and Computation, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam, 1991.

[Ven96] Y. VENEMA, A crash course in arrow logic. In [MPM96] 3–34.

[VH91] P.A.S. VELOSO e A.M. HAEBERER, A finitary relational algebra for classical first-order logic, *Bulletim of the Section of Logic* **20**(1991) 52–62.

[Wad75] W. WADGE, *A Complete Natural Deduction System for the Relation Calculus*, Theory of Computation Report 5, University of Warwick, 1975.