

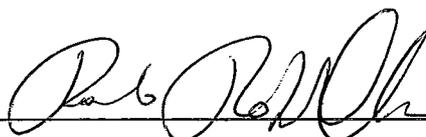
EQUILÍBRIO DE STACKELBERG EM SISTEMAS DE POTÊNCIA AC

- UM ALGORITMO DE PONTOS NÃO-INTERIORES -

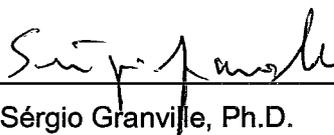
Maria de Luján Latorre

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENSÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

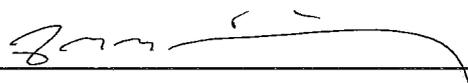
Aprovada por:



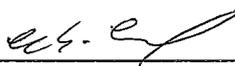
Prof. Paulo Roberto Oliveira, Dr. Ing.



Dr. Sérgio Granville, Ph.D.



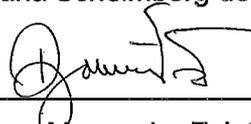
Prof. José Mario Martinez, D. Sc.



Dr. Mário Veiga Ferraz Pereira, D. Sc.



Prof. Susana-Scheimberg de Makler, D. Sc.



Prof. Djalma Mosqueira Falcão, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ- BRASIL

MARÇO DE 2002

LATORRE, MARIA DE LUJÁN

Equilíbrio de Stackelberg em Sistemas de  
Potência AC – Um Algoritmo de Pontos  
Não-Interiores [Rio de Janeiro] 2002

IX, 124 p, 29.7 cm. (COPPE/UFRJ, D.Sc.,  
Engenharia de Sistemas e Computação, 2002)

Tese – Universidade Federal do Rio de  
Janeiro, COPPE

1. Equilíbrio de Stackelberg, Mercado Energia,  
Programação Matemática de Dois Níveis  
I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

A mis abuelos Ángela y José  
(In memorium)

## AGRADECIMENTOS

O desenvolvimento deste trabalho me permitiu um maior aprofundamento de conhecimentos em programação matemática em dois níveis e modelagem de mercados de energia, e não posso deixar de mencionar aqueles que contribuíram para que isso acontecesse.

Em primeiro lugar a meu marido Evandro pela sua compreensão e pelo seu carinho que tanto ajudaram durante todo este tempo. Um agradecimento especial também pelas inúmeras correções de texto.

A minha mãe e a minha irmã Mônica que sempre estiveram presentes apesar da distância.

A meu orientador e amigo Sérgio Granville pela sua colaboração, apoio e paciência que requerem um trabalho de tese de doutorado.

Ao professor Paulo Roberto Oliveira pela sua co-orientação e a possibilidade de intercâmbio com a Coppe que permitiram a concretização deste trabalho.

Ao professor José Mario Martinez pelas suas sugestões e comentários, os quais enriqueceram este trabalho e conduziram para a sua finalização.

A Edgardo cujas discussões foram muito valiosas.

A minha amiga Cláudia e a todos meus amigos do Cepel e PSR pela paciência, carinho e amizade mostrados durante todo este tempo.

A todos aqueles que de alguma forma ajudaram e deram sugestões na diagramação e correção do texto.

Gostaria de agradecer ao Centro de Pesquisas de Energia Elétrica - Cepel pela disponibilidade de instalações e horas de trabalho que permitiram o desenvolvimento da maior parte deste trabalho.

Finalmente agradeço ao Dr. Mário Veiga Pereira - PSR Consultoria - cuja compreensão e disponibilidade de tempo permitiram a conclusão desta tese.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.).

## O EQUILÍBRIO DE STACKELBERG EM SISTEMAS DE POTÊNCIA AC - UM ALGORITMO DE PONTOS NÃO-INTERIORES -

Maria de Luján Latorre

Março/2002

Orientadores: Paulo Roberto Oliveira

Sérgio Granville

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Este trabalho descreve um algoritmo numérico para a resolução do problema de equilíbrio monopolista de Stackelberg, aplicado ao modelo não linear de sistemas de potência. O desenvolvimento desta tese foi motivado pela introdução da competição no mercado de energia, e a necessidade de modelar as interações entre os participantes no novo ambiente competitivo, considerando o sistema elétrico como uma rede interligada através de seu sistema de transmissão. O equilíbrio de Stackelberg é modelado matematicamente como um problema de programação matemática de dois níveis e representado pela sua formulação de K.K.T.. O enfoque desta dissertação de tese foi o desenvolvimento de um algoritmo – método penalizado e de pontos não-interiores - para a resolução desta formulação de K.K.T.. Exemplos numéricos, em sistemas elétricos de pequeno a médio porte, permitem simular o exercício de poder de mercado praticado pelas firmas dominantes.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.).

THE STACKELBERG EQUILIBRIA APPLIED TO AC POWER SYSTEMS  
- A NON-INTERIOR POINT ALGORITHM -

Maria de Luján Latorre

March/2002

Advisors: Paulo Roberto Oliveira

Sérgio Granville

Department: Systems and Computation Engineering

This work describes a numerical algorithmic for solving the monopolist Stackelberg equilibria problem, applied to the AC power system model. The motivation of this thesis was the introduction of competition on energy market and the need to model participants' interaction in the new competitive environment, considering the electrical system as an interconnected network through its transmission system. The Stackelberg equilibria is modeled as a bi-level mathematical problem and represented by its K.K.T. formulation. The focus of this thesis was the development of an algorithm – penalized and non-interior point method - to solve the K.K.T. formulation. Numerical examples, from short to medium-size electrical systems, simulate the market power practiced for dominant firms.

# ÍNDICE

<b>CAPÍTULO 1.....</b>	<b>1</b>
<b>1 INTRODUÇÃO.....</b>	<b>1</b>
<b>CAPÍTULO 2.....</b>	<b>5</b>
<b>2 PROBLEMA ELÉTRICO – EQUILÍBRIO DE MERCADO.....</b>	<b>5</b>
2.1 INTRODUÇÃO .....	5
2.2 MODELOS DE EQUILÍBRIO DE MERCADO.....	7
2.2.1 <i>Equilíbrio de Nash</i> .....	7
2.2.2 <i>Equilíbrio de Cournot</i> .....	10
2.2.3 <i>Equilíbrio de Bertrand</i> .....	11
2.2.4 <i>Equilíbrio de Stackelberg</i> .....	13
2.3 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA – MODELOS DE EQUILÍBRIO NO MERCADO DE ENERGIA .....	15
<b>CAPÍTULO 3.....</b>	<b>20</b>
<b>3 PROBLEMAS MATEMÁTICOS COM RESTRIÇÕES DE EQUILÍBRIO (PMRE).....</b>	<b>20</b>
3.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA.....	20
3.2 FORMULAÇÃO DE KARUSH-KUHN-TUCKER.....	21
3.3 EXEMPLOS DE PMRE .....	25
3.3.1 <i>Equilíbrio de Stackelberg</i> .....	25
3.3.2 <i>Problemas de Dois Níveis</i> .....	26
3.4 COMPLEXIDADE DO PMRE.....	28
3.4.1 <i>Análise Numérica – Exemplo 1</i> .....	28
3.4.2 <i>Análise Numérica – Exemplo 2</i> .....	29
3.4.3 <i>Não Regularidade da Formulação de K.K.T.</i> .....	30
3.5 FUNÇÃO DE MÉRITO .....	32
<b>CAPÍTULO 4.....</b>	<b>37</b>
<b>4 EQUILÍBRIO DE MERCADO EM SISTEMAS DE POTÊNCIA .....</b>	<b>37</b>
4.1 EQUILÍBRIO DE COURNOT – FLUXO DE POTÊNCIA DC .....	37
4.1.1 <i>Formulação do Problema</i> .....	37
4.1.2 <i>Método de Resolução</i> .....	41
4.1.3 <i>Algoritmo de Solução</i> .....	42
4.2 EQUILÍBRIO DE STACKELBERG – FLUXO DE POTÊNCIA AC .....	43

<b>CAPÍTULO 5.....</b>	<b>51</b>
<b>5 UM ALGORITMO DE SOLUÇÃO PARA O EQUILÍBRIO DE STACKELBERG APLICADO AO MODELO AC DE SISTEMAS DE POTÊNCIA.....</b>	<b>51</b>
5.1 MODELO MATEMÁTICO .....	51
5.1.1 <i>Formulação de K.K.T. - Equilíbrio de Stackelberg.....</i>	<i>51</i>
5.1.2 <i>Penalização de Fischer-Burmeister .....</i>	<i>53</i>
5.1.3 <i>Condições de Otimalidade .....</i>	<i>55</i>
5.2 MÉTODO DE SOLUÇÃO .....	60
5.2.1 <i>Inicialização.....</i>	<i>60</i>
5.2.2 <i>Cálculo dos Elementos da Matriz.....</i>	<i>61</i>
5.2.3 <i>Resolução do Sistema de Equações.....</i>	<i>61</i>
5.2.4 <i>Busca Linear.....</i>	<i>63</i>
5.2.5 <i>Atualização de Variáveis e Parâmetros.....</i>	<i>65</i>
5.2.6 <i>Crítério de Convergência.....</i>	<i>66</i>
<b>CAPÍTULO 6.....</b>	<b>67</b>
<b>6 RESULTADOS NUMÉRICOS .....</b>	<b>67</b>
6.1 ASPECTOS COMPUTACIONAIS .....	67
6.2 CASOS EXEMPLO .....	69
6.2.1 <i>Sistema 1.....</i>	<i>69</i>
6.2.2 <i>Sistema 2.....</i>	<i>73</i>
6.2.3 <i>Sistema 3.....</i>	<i>81</i>
<b>CAPÍTULO 7.....</b>	<b>89</b>
<b>7 CONCLUSÕES E ESTUDOS FUTUROS.....</b>	<b>89</b>
7.1 CONCLUSÕES .....	89
7.2 ESTUDOS FUTUROS.....	90
7.2.1 <i>Equilíbrio de Nash em Mercados Duopolistas.....</i>	<i>90</i>
7.2.2 <i>Equilíbrio de Cournot em Sistemas de Potência AC.....</i>	<i>91</i>
7.2.3 <i>Propostas de Resolução do Problema de Equilíbrio de Cournot.....</i>	<i>92</i>
<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....</b>	<b>94</b>
<b>APÊNDICE A.....</b>	<b>98</b>
<b>A ELEMENTOS DA MATRIZ SOLUÇÃO .....</b>	<b>98</b>

<b>APÊNDICE B</b> .....	<b>103</b>
<b>B ESTRUTURA DA MATRIZ</b> .....	<b>103</b>
B.1 ESTRUTURA DE ESPARSIDADE .....	104
<i>B.1.1 Estrutura da Light Border</i> .....	<i>105</i>
<i>B.1.2 Estrutura Básica da Heavy Border</i> .....	<i>107</i>
<i>B.1.3 Estrutura da HB - Geração de Potência Ativa Grupo Seguidor</i> .....	<i>109</i>
<i>B.1.4 Estrutura da HB - Geração de Potência Reativa Grupo Seguidor</i> .....	<i>112</i>
<i>B.1.5 Estrutura da HB – Monitoramento de Fluxo em Circuitos</i> .....	<i>115</i>
B.2 DIMENSIONAMENTO DO PROBLEMA .....	120
<b>APÊNDICE C</b> .....	<b>123</b>
<b>C SISTEMA DE 24 BARRAS</b> .....	<b>123</b>
<b>APÊNDICE D</b> .....	<b>124</b>
<b>D SISTEMA DE 118 BARRAS</b> .....	<b>124</b>

# CAPÍTULO 1

## 1 INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, diversos países têm passado (ou ainda estão passando) por um importante processo de reestruturação do seu setor elétrico, com o objetivo de introduzir mudanças significativas no sistema de regulação e competição do mercado. Em muitos países, a reestruturação contém incentivos para a participação de agentes privados na produção de energia, tarefa esta que foi, na maioria dos casos, exercida pelo poder do Estado.

A processo de reestruturação do setor de energia elétrica no Brasil tem, como principal característica, a desverticalização do sistema, de tal forma que as atividades de geração, transmissão, distribuição e comercialização sejam desempenhadas de forma independente. No novo modelo tem-se um mercado competitivo e, para viabilizar a competição, é necessário garantir aos participantes livre acesso aos sistemas de transmissão e distribuição. O livre acesso à transmissão deve ser feito de uma maneira não discriminatória, tendo como restrição natural o limite de carregamento dos circuitos.

Para o bom funcionamento do mercado, três instrumentos básicos foram considerados necessários no processo de reestruturação do sistema elétrico brasileiro:

- Controle da operação do sistema, realizada pelo Operador Nacional do Sistema (ONS);
- Criação de um Mercado Atacadista de Energia (MAE), junto à figura de um operador de mercado, representado pela ASMAE (Administradora de Serviços no Mercado Atacadista de Energia);
- Criação de um agente regulador, representado pela ANEEL (Agência Nacional de Energia Elétrica).

No caso brasileiro, onde o despacho é centralizado, o ONS é responsável pelo planejamento, a programação e o despacho da operação no sistema interligado, viabilizando a operação do sistema a um custo mínimo e atendendo os requisitos básicos de qualidade e segurança.

Na nova estrutura da indústria elétrica implantada no Brasil, os compradores e vendedores poderão estabelecer negócios livremente no Mercado Atacadista de Energia (MAE). Os preços do mercado (*spot*) são calculados, para cada período de contabilização, a partir do custo marginal do sistema. Toda a energia produzida é vendida ao preço *spot* no MAE, e toda a energia consumida é comprada ao preço *spot* no MAE.

Com o processo de reestruturação do setor elétrico, apareceu uma necessidade iminente de desenvolvimento de modelos matemáticos, para adaptabilidade às novas condições de regulamentação e a representação da competitividade no mercado de energia. Os modelos de equilíbrio, provenientes de teoria de jogos, surgiram como o caminho natural para tal desafio. Este trabalho tem por objetivo o estudo de um de tais modelos, mais especificamente o equilíbrio monopolista de Stackelberg. Um algoritmo numérico para pesquisa de possíveis soluções de equilíbrio é desenvolvido, levando em consideração não somente as demandas e as gerações do sistema, como também o sistema elétrico como uma rede interligada através de seu sistema de transmissão.

O Capítulo 2 começa com a apresentação de uma revisão bibliográfica dos principais modelos de equilíbrio aplicados ao mercado de energia. A formulação, no contexto de teoria de jogos, dos modelos de equilíbrio de Nash, de Cournot, de Bertrand e de Stackelberg é apresentada. Uma análise comparativa permite identificar a diferença de comportamento entre o modelo competitivo de Cournot e o modelo monopolista representado pelo equilíbrio de Stackelberg.

O Capítulo 3 introduz a formulação analítica do problema de Programação Matemática com Restrições de Equilíbrio (PMRE), representado por um problema de otimização, onde parte das restrições é definida por desigualdades variacionais paramétricas. A possibilidade da definição destas desigualdades variacionais (DV), como um problema tradicional de otimização, permite a obtenção de uma formulação matematicamente equivalente ao PMRE, que denominaremos formulação de Karush-Kuhn-Tucker (K.K.T.). Analiticamente, ela é obtida substituindo o subproblema de desigualdades variacionais paramétricas pelas condições de otimalidade de primeira ordem, entre elas as condições de folgas complementares, de um problema de otimização associado. Uma peculiaridade desta *formulação de K.K.T.* é a não regularidade do seu conjunto de soluções, conseqüência

direta da inclusão das condições de folgas complementares como restrições do problema de otimização principal. A penalização de Fischer-Burmeister é apresentada como uma abordagem alternativa para o tratamento de tais restrições de folgas complementares. Propriedades são estabelecidas, sob as quais a formulação de K.K.T. pode ser resolvida como um problema tradicional de programação não linear, obtido penalizando determinadas restrições na função objetivo do problema principal.

O Capítulo 4 apresenta a descrição matemática de cada um dos elementos que compõem o equilíbrio de Stackelberg, aplicado ao modelo não linear AC de sistemas de potência, com funções objetivo, variáveis e restrições. O capítulo começa apresentando uma modelagem de um equilíbrio competitivo, o equilíbrio de Cournot, aplicado a sistemas de potência linearizados (modelo DC), estudado pela primeira vez por Hogan et al. [1]. O trabalho deles analisa, entre outros, o impacto do sistema de transmissão e da topologia da rede elétrica, na manipulação de mercado por agentes estrategicamente localizados. A proposta desta tese é a análise do comportamento dos agentes estratégicos representados pelas grandes firmas no equilíbrio monopolista de Stackelberg. A complexidade inerente aos problemas de dois níveis, que representam matematicamente o equilíbrio de Stackelberg, se encontra neste caso acrescida da não linearidade da modelagem AC do sistema de transmissão. Uma peculiaridade dos problemas matemáticos de dois níveis aplicados a sistemas de potência é a inclusão de variáveis duais do problema do nível inferior na função objetivo do problema principal (preço *spot* do sistema), diferenciando-os da formulação tradicional dos problemas de dois níveis, os quais contêm somente variáveis primais no problema do nível superior.

O Capítulo 5 pode ser considerado o capítulo principal desta tese. Nele é apresentado um algoritmo numérico para a resolução do problema de equilíbrio de Stackelberg no contexto do modelo não linear AC de sistemas de potência. Este forma parte de uma classe de problemas matemáticos formulados analiticamente como problemas de programação matemática de dois níveis. O capítulo começa com a formulação matemática de K.K.T. para o equilíbrio de Stackelberg, onde o subproblema de otimização do nível inferior é substituído pelas suas condições de otimalidade de primeira ordem, entre elas as condições de folgas complementares associadas às restrições de canalização. Desta forma, o problema de dois níveis foi transformando em um problema tradicional problema de programação

não linear onde as condições de folgas complementares do subproblema do nível inferior serão tratadas através de uma penalização equivalente - a penalização de Fischer-Burmeister. Uma vez definido o problema principal, as condições de otimalidade de primeira ordem do mesmo são estabelecidas transformando a solução de um problema de otimização na resolução de um sistema de equações não lineares. O algoritmo de solução proposto é baseado em um processo iterativo e pode ser considerado como um algoritmo *de pontos não interiores*, no sentido que as restrições de canalização serão somente satisfeitas na sua convergência. A cada iteração, o sistema de equações é resolvido via uma aproximação de primeira ordem de Newton-Raphson sendo o passo incremental determinado por uma busca linear nas funções de mérito que definem as penalizações de Fischer-Burmeister. Peculiaridades dos sistemas elétricos, como as interligações do sistema de transmissão, são exploradas no tratamento da esparsidade da matriz solução.

O Capítulo 6 contém resultados numéricos para 3 casos exemplos de pequeno a médio porte. O primeiro estudo é baseado em um sistema de três barras, o qual facilita o entendimento do problema e permite a visualização gráfica de seus resultados. A análise do poder de mercado exercido pelas grandes firmas no modelo monopolista do equilíbrio de Stackelberg é simulado em sistemas elétricos de 24 e 118 barras. Comparações de resultados do problema de dois níveis com um modelo baseado em minimização de custos permitem simular o comportamento das grandes firmas dentro de um ambiente competitivo.

A dissertação é finalizada no Capítulo 7 onde as principais características do algoritmo e conclusões do comportamento do poder de mercado no modelo de equilíbrio de Stackelberg são apresentados. Temas de pesquisa para futuros desenvolvimentos são também sugeridos.

## **CAPÍTULO 2**

### **2 PROBLEMA ELÉTRICO – EQUILÍBRIO DE MERCADO**

#### **2.1 Introdução**

O setor elétrico representa uma parcela importante na atividade econômica de um país, onde uma maior eficiência nessa indústria se traduz em um aumento substancial no benefício social da população. Este pode ser considerado como um dos motivos pelos quais a privatização e regulamentação do setor elétrico têm sido foco de interesse e intenso estudo durante as duas últimas décadas.

A introdução da competição no setor elétrico começou com os processos de privatização e reestruturação em diversos países, como Chile (1978), Reino Unido (1990), Argentina (1992), Noruega (1992), Colômbia (1993), Nova Zelândia (1994) e diversas partes de Estados Unidos, entre elas o estado da Califórnia (1997).

Com a introdução da competição no mercado, a operação do sistema elétrico deixa de depender do tradicional esquema de minimização de custos e passa a estar diretamente relacionado à maximização do lucro individual de cada firma. Cada firma tentará maximizar seu próprio superávit (valor de mercado de seu produto menos o custo de operação) levando em conta um determinado risco, o comportamento dos demais competidores rivais, assim como fatores externos (restrições na rede de transmissão, por exemplo) que poderão influenciar as condições de competição do mercado. Como um resultado da interação entre todos estes fatores, o comportamento do sistema elétrico pode ser caracterizado por um equilíbrio econômico de mercado.

O mercado elétrico tem determinadas peculiaridades que o diferenciam de outros tipos de mercados, e que podem permitir o exercício do poder de mercado por parte de alguns de seus participantes. A operação do sistema determina que os fluxos de potência na rede elétrica devem obedecer à segunda lei de Kirchoff (ver [2] e Capítulo 4 desta tese para maiores detalhes). Uma implicação desta lei é que, quando a potência é transportada entre dois pontos no sistema de transmissão, a transferência de potência poderá seguir por todos os possíveis caminhos paralelos disponíveis entre eles. Dessa forma, a comercialização de

potência entre um fornecedor e um comprador localizados em diferentes pontos da rede poderá produzir fluxo de potência adicional em todas as linhas do sistema de transmissão do sistema. Este fenômeno, conhecido como *loop flow*, traz um impacto direto sobre a capacidade de transmissão disponível para outras possíveis transações. Assim, a capacidade de transportar potência entre dois pontos da rede depende não somente da capacidade de transmissão das linhas interligando os pontos, como da capacidade total de geração e demanda da rede e do ponto de operação corrente. O limite físico da capacidade dos circuitos, que pode levar a congestionamento em determinados pontos da rede, poderá alterar significativamente o comportamento do mercado de energia e permitir o exercício de poder de mercado por parte de alguns de seus participantes.

A literatura que estuda do comportamento do mercado de energia pode ser classificada em termos dos *mecanismos de mercado* a serem simulados, da *modelagem da rede elétrica*, do tipo de *interações entre os participantes* do mercado e da *duração do período* de estudo. Em relação à *estrutura do mercado*, a maioria dos modelos estudados pressupõe que o processo de oferta é supervisionado por um Operador do Sistema Independente, o qual determina a operação do sistema (minimizando custos ou maximizando benefício social), de modo tal a manter condições básicas de qualidade e segurança do mesmo. Em termos do *modelo da rede elétrica*, muitos estudos desconsideram as restrições de transmissão e suas leis físicas. Isto implica em deixar de analisar uma possibilidade inerente de poder de mercado que estas restrições podem proporcionar. Os modelos que consideram estas restrições podem ser classificados em modelos linearizados DC e modelos não lineares AC. Associados aos modelos que estudam otimização de oferta existem, normalmente, um *período de oferta* no qual eles se baseiam. Tal período diferencia os modelos aplicados aos sistemas que estudam a oferta ótima para o próximo dia de aqueles modelos que fazem um estudo temporal, assumindo que a oferta ótima imediata pode não vir a ser a melhor oferta em um determinado horizonte de tempo. A última classificação se refere ao tipo de *interação entre os participantes* rivais. A abordagem mais freqüentemente encontrada na literatura representa modelos de equilíbrio competitivo não cooperativos, mais especificamente o equilíbrio de Nash. Como casos particulares deste modelo podemos mencionar os modelos de equilíbrio de Cournot e de Bertrand. O primeiro deles modela uma situação de equilíbrio onde a competitividade é representada por oferta de quantidades,

cada firma estratégica escolhe sua quantidade de produção de energia de forma a maximizar seu lucro, assumindo como conhecidas as decisões das demais firmas. O modelo de equilíbrio de Bertrand é considerado um modelo de competição mais intensa, onde as ofertas por parte das grandes firmas são baseadas em preços no lugar de quantidades de produção, e as ofertas dos demais participantes são assumidamente conhecidas pelos participantes rivais. Tanto o modelo de equilíbrio de Bertrand como o de Cournot representam modelos de equilíbrio para sistemas oligopolistas, com um número finito de firmas participantes no mercado. Um exemplo de modelo não competitivo e monopolista é o equilíbrio de Stackelberg, no qual o grupo *líder*, representado, por exemplo, por um grupo de firmas agrupadas em um cartel, pode fazer manipulação de preços e/ou capacidades de geração/transmissão de forma a maximizar seu próprio lucro.

Antes de apresentar os principais trabalhos da literatura que estudam o poder de mercado para diferentes modelos de equilíbrio aplicados a sistemas elétricos particulares, são introduzidos brevemente os conceitos gerais de equilíbrio de Nash, equilíbrio de Cournot, equilíbrio de Bertrand e equilíbrio de Stackelberg no contexto de teoria de jogos.

## **2.2 Modelos de Equilíbrio de Mercado**

### **2.2.1 Equilíbrio de Nash**

Na formulação do equilíbrio de Nash no contexto de teoria de jogos, cada jogador escolherá sua estratégia de forma simultânea; esta simultaneidade não significa que eles atuem ao mesmo tempo, e sim que cada um fará sua escolha com as escolhas dos demais participantes do jogo predefinidas. O benefício de cada jogador será uma consequência de sua escolha e das estratégias dos demais participantes. Podemos dizer que o equilíbrio de Nash estabelece uma convenção entre os participantes do jogo, onde a estratégia determinada por cada jogador deve ser a melhor resposta às soluções dadas pelos outros jogadores, e nenhum jogador tentará se desviar de sua própria estratégia. Estes jogos se encontram dentro de uma classe denominada jogos estáticos, onde a função que determina o lucro de cada jogador é conhecida por todos os outros participantes.

Antes de apresentar a definição matemática do equilíbrio de Nash e suas principais propriedades, estabeleceremos a seguir as definições da representação normal e das estratégias estritamente dominadas para um problema geral de teoria de jogos.

### Definição 2.1

Dado um conjunto  $n$  de jogadores, suas estratégias definidas por  $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$ , onde  $S_i$  representa o conjunto de estratégias do jogador  $i$  e  $u_i(s_1, s_2, \dots, s_n)$  o lucro da firma  $i$ , dado um conjunto de estratégias  $(s_1, s_2, \dots, s_n)$  com  $s_i \in S_i, \forall i = 1, \dots, n$ . A representação da *forma normal* do jogo  $G$  é definida por  $G = \{S_1, S_2, \dots, S_n; u_1, u_2, \dots, u_n\}$ .

### Definição 2.2

Seja  $G = \{S_1, S_2, \dots, S_n; u_1, u_2, \dots, u_n\}$  a representação da forma normal do jogo, e  $s_i'$  e  $s_i''$  duas estratégias viáveis para o jogador  $i$  ( $s_i'$  e  $s_i''$  pertencem a  $S_i$ ). A estratégia  $s_i'$  é *estritamente dominada* pela estratégia  $s_i''$  se, para cada combinação das estratégias dos outros jogadores, o lucro de  $s_i'$  é estritamente menor que o lucro para a estratégia  $s_i''$ :

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i', s_{i+1}, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s_i'', s_{i+1}, \dots, s_n) \\ \forall (s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n) \in (S_1, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_n)$$

A noção de equilíbrio de Nash, definida a seguir, estabelece que um jogador não terá incentivo para se desviar de sua estratégia dadas as estratégias dos outros participantes. Se uma solução de um problema resulta em um conjunto de estratégias que não representa um equilíbrio de Nash, existirá ao menos um jogador que terá incentivo para se desviar de sua solução, tentando aumentar seu próprio lucro.

### Definição 2.3

Na representação da forma normal do jogo  $G$  definida por  $G = \{S_1, S_2, \dots, S_n; u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , um conjunto de estratégias  $(s_1^*, s_2^*, \dots, s_n^*)$  é um *equilíbrio de Nash* se, para cada jogador  $i$ ,  $s_i^*$  é a melhor resposta do jogador  $i$  às estratégias especificadas pelos outros jogadores  $(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$ . Mais especificamente:

$$u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i^*, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*) \geq u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$$

para cada estratégia viável  $s_i$  em  $S_i$ . Equivalentemente,  $s_i^*$  pode ser pensada como a solução do seguinte problema de otimização:

$$\max_{s_i \in S_i} u_i(s_1^*, \dots, s_{i-1}^*, s_i, s_{i+1}^*, \dots, s_n^*)$$

O equilíbrio de Nash definido acima pode ser considerado com um equilíbrio *homogêneo e não cooperativo*. *Homogêneo* no sentido que todos os participantes tem acesso à mesma informação em relação às estratégias dos outros participantes, e sua própria estratégia é escolhida dependendo somente sob esta informação. *Não cooperativo* porque a formulação não leva em consideração junção de estratégias por parte de alguns participantes em prejuízo dos outros.

Nas proposições a seguir são enunciadas as principais propriedades que estabelecem a relação entre uma solução de equilíbrio de Nash, e a eliminação iterativa de estratégias estritamente dominadas, baseadas na Definição 2.2 acima. Uma análise mais profunda e detalhada destas propriedades pode ser encontrada em [3].

### ***Proposição 2.1***

Dada a representação normal do jogo  $G = \{S_1, S_2, \dots, S_n; u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , se a eliminação iterativa das estratégias *estritamente dominadas* elimina todas as estratégias salvo  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$ , então estas estratégias são a única solução para o equilíbrio de Nash.

### ***Proposição 2.2***

Dada a representação normal do jogo  $G = \{S_1, S_2, \dots, S_n; u_1, u_2, \dots, u_n\}$ , se as estratégias  $(s_1^*, \dots, s_n^*)$  são um equilíbrio de Nash, então elas sobreviverão à eliminação iterativa das estratégias *estritamente dominadas*.

Observe-se que o conceito de equilíbrio de Nash é um conceito mais restrito que o conceito de eliminação sucessiva de estratégias estritamente dominadas. Uma solução que representa um equilíbrio de Nash sobrevive à eliminação sucessiva de estratégias estritamente dominadas. Por outro lado, sobreviver à eliminação sucessiva de estratégias estritamente dominadas não necessariamente significa estar na presença de um equilíbrio de Nash.

A seguir serão apresentados os modelos de equilíbrio de Cournot e Bertrand para mercados duopolistas, os quais podem ser considerados como casos particulares do modelo de equilíbrio Nash.

### 2.2.2 Equilíbrio de Cournot

Augustin Cournot, um economista francês de início do século XIX, formulou um modelo clássico de teoria de jogos no contexto específico de problemas de duopólio, e foi um predecessor da formulação de equilíbrio de Nash enunciada no item anterior.

Considere-se um mercado duopolista com  $q_1$  e  $q_2$  as quantidades associadas às firmas 1 e 2, respectivamente. Seja  $q := q_1 + q_2$  a quantidade agregada,  $P(q_1, q_2) := a - (q_1 + q_2)$  o preço de equilíbrio do mercado com “a” constante e  $C_i(q_i) := cq_i$  (com  $c > a$ ) o custo de produção da firma  $i$ , para  $i=1,2$ . Assume-se que as firmas escolhem suas quantidades simultaneamente. Para uma maior facilidade de acesso à informação, sejam os dados do mercado representados na Tabela 2.1.

Descrição	Dados
Quantidade Firma $i$ ( $i=1,2$ )	$q_i$
Quantidade Agregada	$q := q_1 + q_2$
Preço de Equilíbrio	$P(q) := a - (q_1 + q_2)$ (a dado)
Custo de Produção Firma $i$ ( $i=1,2$ )	$C_i(q_i) := cq_i$ ( $c > a$ )

Tabela 2.1 – Dados do Mercado Duopolista Nash-Cournot

No contexto de equilíbrio de Nash, seja este problema definido em sua *forma normal* com seus *jogadores* definidos pelas duas firmas, a *estratégia* de cada firma  $i$  como a quantidade que ela pode produzir  $q_i \geq 0$  e  $S_i := [0, \infty)$  e seu *lucro* definido como  $u_i(q_i, q_j) = q_i [P(q_i, q_j) - c] = q_i [a - (q_i + q_j) - c]$  para  $i=1,2$  ( $j=2,1$ ). Seja esta representação normal resumida na Tabela 2.2.

Descrição Dados	Representação Normal
Número de Jogadores	$n := 2$
Conjunto de Estratégias Firma $i$ ( $i=1,2$ )	$S_i := [0, \infty)$
Lucro Firma $i$ ( $i,j=1,2$ )	$u_i(q_i, q_j) := q_i [a - (q_i, q_j) - c]$
Forma Normal	$G := \{S_1, S_2; u_1, u_2\}$

Tabela 2.2 – Representação Normal Equilíbrio Nash-Cournot

Referindo-se ao equilíbrio de Nash, um par de quantidades  $(q_1^*, q_2^*)$  é um equilíbrio de Nash-Cournot se, para cada firma  $i$ ,  $q_i^*$  é solução do seguinte problema de otimização:

$$\text{Max}_{0 \leq q_i < \infty} u_i(q_i, q_j^*) = \text{Max}_{0 \leq q_i < \infty} q_i [a - (q_i + q_j^*) - c] \quad i=1,2 \quad (j=2,1) \quad (2.1)$$

Assumindo-se que  $q_j^* < a - c$  (como será mostrado ser válido mais na frente), as condições de otimalidade de primeira ordem para (2.1) representam condições necessárias e suficientes para a firma  $i$ , com solução igual a:

$$q_i = 1/2 (a - q_j^* - c) \quad i=1,2 \quad (j=2,1) \quad (2.2)$$

Assim, se o par  $(q_1^*, q_2^*)$  é um equilíbrio de Nash-Cournot, de (2.2) resultam as quantidades escolhidas iguais a:

$$q_1^* = 1/2 (a - q_2^* - c) \quad (2.3)$$

$$q_2^* = 1/2 (a - q_1^* - c) \quad (2.4)$$

Resolvendo (2.3)-(2.4) obtém-se a solução ótima, representada em função dos dados do problema, como a seguir:

$$q_1^* = q_2^* = (a - c) / 3 \quad (2.5)$$

Resultando, assim, a quantidade agregada e o lucro de cada firma iguais a:

$$q_1^* + q_2^* = 2/3 (a - c) \quad (\text{quantidade agregada}) \quad (2.6)$$

$$u_1^*(q_1^*, q_2^*) = u_2^*(q_1^*, q_2^*) = (a - c)^2 / 9 \quad (\text{lucro cada firma}) \quad (2.7)$$

### 2.2.3 Equilíbrio de Bertrand

O modelo de equilíbrio de Bertrand para mercados duopolistas se diferencia do modelo de equilíbrio de Cournot na escolha, por parte das firmas participantes, de ofertas de preços em lugar de ofertas de quantidades. Em ambos os modelos, a noção de equilíbrio considerada é representada por um modelo de equilíbrio de Nash, como definido no início desta seção.

Sejam as firmas 1 e 2, com preços  $p_1$  e  $p_2$  e quantidade demandada, do produto produzido pela firma  $i$ , definida por:

$$q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j \quad i=1,2 \quad (j=1,2)$$

onde  $b > 0$ . O custo marginal do sistema é  $c$  ( $c < a$ ), com as firmas 1 e 2 atuando de forma simultânea. Analogamente ao modelo duopolista de Cournot, sejam os dados do equilíbrio duopolista de Bertrand resumidos na Tabela 2.3.

Descrição	Dados
Preço Firma $i$ ( $i=1,2$ )	$p_i$
Quantidade Demandada Firma $i$ ( $i,j=1,2$ )	$q_i(p_i, p_j) := a - p_i + bp_j$ ( $a$ dado, $b > 0$ )
Custo Marginal Sistema	$C$

Tabela 2.3 – Dados do Mercado Duopolista Nash-Bertrand

Na busca do equilíbrio de Nash, seja o problema definido na sua *forma normal*, com 2 jogadores e suas estratégias definidas pelos diferentes preços, onde estes não podem assumir valores negativos. Assim, o conjunto de estratégias para cada firma  $i$  é restrito a  $S_i := [0, \infty)$ , com  $s_i := p_i$  para  $i=1,2$ . O lucro de cada firma é definido por:

$$u_i(p_i, p_j) = q_i(p_i, p_j)[p_i - c] = [a - p_i + bp_j][p_i - c] \quad i=1,2 \quad (j=2,1)$$

A *forma normal* do equilíbrio de Nash-Bertrand é resumida na Tabela 2.4.

Descrição Dados	Representação Normal
Número de Jogadores	$n:=2$
Conjunto de Estratégias Firma $i$ ( $i=1,2$ )	$S_i := [0, \infty)$
Lucro Firma $i$ ( $i,j=1,2$ )	$u_i(p_i, p_j) := [a - p_i + bp_j][p_i - c]$
Forma Normal	$G := \{S_1, S_2, u_1, u_2\}$

Tabela 2.4 – Representação Normal Equilíbrio Nash-Bertrand

Assim, o par  $(p_1^*, p_2^*)$  é um equilíbrio de Nash-Bertrand se, para cada  $i$ , o preço  $p_i^*$  é solução do seguinte problema de otimização:

$$\text{Max}_{0 \leq p_i < \infty} u_i(p_i, p_j^*) = \text{Max}_{0 \leq p_i < \infty} [a - p_i + bp_j^*][p_i - c] \quad (i=1,2) \quad (j=2,1) \quad (2.8)$$

A solução de (2.8) é dada por:

$$p_i^* = 1/2(a + bp_j^* + c) \quad (i=1,2) \quad (j=2,1)$$

Portanto, um par  $(p_1^*, p_2^*)$  é um equilíbrio de Nash-Bertrand se os preços das firmas 1 e 2, respectivamente, satisfazem as seguintes equações:

$$p_1^* = 1/2(a + bp_2^* + c) \quad (2.9)$$

$$p_2^* = 1/2(a + bp_1^* + c) \quad (2.10)$$

Resolvendo (2.9)-(2.10) resulta a seguinte solução para o equilíbrio duopolista de Nash-Bertrand:

$$p_1^* = p_2^* = (a + c)/(2 - b)$$

O modelo de equilíbrio de Stackelberg, como introduzido no próximo item, propõe um modelo dinâmico no qual as firmas tomam suas decisões de forma seqüencial, diferentemente dos modelos de equilíbrio estático de Nash-Cournot e Nash-Bertrand.

### 2.2.4 Equilíbrio de Stackelberg

O modelo de equilíbrio proposto por Stackelberg (1934) para mercados duopolistas, diferente dos modelos de equilíbrio de Bertrand e Cournot, considera que as firmas participantes tomam suas decisões de forma seqüencial, onde a firma dominante (grupo *líder*) toma suas decisões primeiro e a firma subordinada (grupo *seguidor*) determina sua estratégia em segundo lugar. Será assumido, como no modelo de Cournot, que as firmas escolhem quantidades; um raciocínio análogo pode ser desenvolvido para um equilíbrio de Stackelberg baseado em preços no lugar de quantidades. O problema pode ser definido na seguinte seqüência:

- 1) A firma 1 escolhe uma quantidade  $q_1 \geq 0$ ;
- 2) A segunda firma observa a estratégia da firma 1,  $q_1$ , e escolhe uma quantidade  $q_2 \geq 0$ ;
- 3) O lucro da firma  $i$  é dado por:  $u_i(q_i, q_j) = q_i [P(q_i, q_j) - c] = q_i [a - (q_i + q_j) - c]$  com  $a$ ,  $c$  e  $q_i$  ( $i=1,2$ ) como definidos anteriormente no modelo de equilíbrio duopolista de Cournot.

Para resolver o problema de equilíbrio de Stackelberg, seja a reação da firma 2, dada uma determinada quantidade  $q_1$  previamente determinada pela firma 1:

$$\text{Max}_{0 \leq q_2 < \infty} u_2(q_1, q_2) = \text{Max}_{0 \leq q_2 < \infty} q_2 [a - q_1 - q_2 - c]$$

com solução igual a:

$$q_2(q_1) = 1/2(a - q_1 - c) \quad (2.11)$$

assumindo que  $q_1 < a - c$ .

Considerando-se que a firma 1 pode antecipar a quantidade  $q_2(q_1)$  a ser escolhida pela firma 2, o problema da firma 1 pode ser redefinido como:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{0 \leq q_1 < \infty} u_1(q_1, q_2(q_1)) &= \text{Max}_{0 \leq q_1 < \infty} q_1 [a - q_1 - (q_2(q_1)) - c] \\ &= \text{Max}_{0 \leq q_1 < \infty} q_1 [a - q_1 - c] / 2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Resolvendo (2.12) e a seguir (2.11) resulta a seguinte solução para o equilíbrio de Stackelberg proposto:

$$q_1^* = (a - c) / 2 \text{ e } q_2^* = (a - c) / 4 \quad (2.13)$$

De (2.13) obtém-se a produção agregada e as remunerações de cada firma:

$$q_1^* + q_2^* = 3/4 (a - c) \quad (\text{quantidade agregada}) \quad (2.14)$$

$$u_1^*(q_1^*, q_2^*) = (a - c)^2 / 8 \quad (\text{lucro firma 1}) \quad (2.15)$$

$$u_2^*(q_1^*, q_2^*) = (a - c)^2 / 16 \quad (\text{lucro firma 2}) \quad (2.16)$$

Uma importante análise para visualizar o comportamento dos agente nos diferentes modelos de mercado é a comparação das soluções dos problemas de equilíbrio de Stackelberg e de Nash-Cournot. Pode-se observar, comparando as quantidades agregadas para os problemas (2.6) e (2.14), respectivamente, que a solução agregada do equilíbrio de Cournot é menor que a solução agregada de Stackelberg e, conseqüentemente, o preço de mercado resultará menor no equilíbrio de Stackelberg. Mesmo assim, a firma 1 lucra mais na formulação de Stackelberg, onde tem privilégio de decisão, em relação à solução de equilíbrio de Nash-Cournot, onde as duas firmas estão na mesma situação de privilégio (comparar (2.15) e (2.7)). Por sua vez, a firma 2 lucrará menos na solução de Stackelberg se comparada com a solução do equilíbrio de Nash-Cournot (ver (2.16) e (2.7)).

Uma vez estabelecidos os principais conceitos de teoria de jogos que servem de base para a definição de modelos de equilíbrio na nova reestruturação do setor elétrico, sejam a seguir referências de trabalhos existentes na literatura que simulam modelos de equilíbrio aplicados a diferentes mercado de energia. Entre as principais abordagens dos autores, podemos mencionar a análise do poder de mercado exercido por determinados agentes, a proposta de alternativas para contornar tais comportamentos e a determinação da estratégia de oferta ótima de uma determinada firma em um ambiente competitivo.

### 2.3 Revisão Bibliográfica – Modelos de Equilíbrio no Mercado de Energia

Entre os trabalhos que estudam o poder do mercado de energia, podemos destacar o de Green and Newbery [4]. Este trabalho foi um dos primeiros artigos da literatura que mostraram claramente o poder do mercado de energia sem levar em consideração as interligações do sistema de transmissão. Nele, o equilíbrio do mercado de energia dentro do contexto do sistema inglês é simulado através de um equilíbrio de Nash não cooperativo. Através do estudo, foi concluído que com somente duas grandes firmas competidoras (National Power and PowerGen), não se pode esperar um mercado realmente competitivo. Uma alternativa para uma maior competição do mercado é sugerida pelos autores, subdividindo o sistema de geração em cinco companhias com a mesma capacidade de produção.

Em [5], Hogan introduziu o conceito de contrato de congestionamento da transmissão (CCT). Este contrato pode ser definido como o direito de transporte (por parte do proprietário) de uma determinada quantidade de potência entre dois pontos da rede elétrica. Associado a este direito de transmissão, existe um preço definido como a diferença dos preços *spot* entre tais pontos da rede (ex: preço *spot* nó demanda menos preço *spot* nó geração) pago ao proprietário pelo seu montante de direito de transmissão. O autor argumenta e mostra, através de exemplos numéricos, que os CCT representam uma forma de se prevenir do efeito de *loop flow*, fenômeno característico dos sistemas elétricos, onde a entrega de potência entre dois pontos da rede segue por diversos caminhos paralelos.

Em [6], Borenstein e Bushnell fizeram uma análise do mercado de eletricidade desregulado da Califórnia. Eles simularam a competição no mercado de energia, baseados em dados históricos, e concluíram que na presença de restrições de transmissão entre o nordeste e o sudeste da Califórnia, a elasticidade de demanda é de extrema importância na determinação do poder de mercado. Eles argumentam que investir em tecnologia que aumente a elasticidade da demanda, em vez de diminuir a concentração do mercado dividindo as companhias geradoras existentes na área, como sugerido por Green and Newbery [4], pode ser uma forma de diminuir/inibir o exercício de poder de mercado por parte das grandes companhias.

No trabalho apresentado em [1], Hogan modelou o problema de equilíbrio de mercado de energia como um equilíbrio de Cournot, onde diversas firmas estratégicas tentam maximizar seu próprio benefício tomando as estratégias (quantidades de oferta de energia) das demais firmas dominantes como dados. Os participantes do mercado podem ser divididos em dois tipos, firmas estratégicas (ou grandes firmas) e participantes competitivos (ou firmas menores). Os participantes competitivos tomam as estratégias das grandes firmas como dados e determinam o preço do mercado minimizando seu custo de produção. Por sua parte, as grandes firmas determinam sua estratégia ótima, maximizando seu lucro, antecipando as respostas das firmas menores e tomando as estratégias das outras grandes firmas como dados. O modelo matemático, do ponto de vista de uma determinada firma estratégica, corresponde a um problema de programação matemática de dois níveis, transformado em um problema de programação não linear tradicional, substituindo o subproblema das firmas menores pelas suas condições de otimalidade de primeira ordem. O equilíbrio competitivo de Nash-Cournot, solução na qual nenhuma firma terá incentivo para se desviar de sua estratégia ótima sem decréscimo de seu próprio benefício, é encontrado via um método iterativo onde a estratégia ótima para cada firma dominante é determinada por um tradicional pacote de programação não linear (Minos5). A modelagem da rede elétrica corresponde ao modelo linearizado DC, considerando-se restrições de transmissão e a possibilidade de contratos de congestionamento de transmissão (CCT) como sugerido em [5]. Os autores concluíram que, na presença de restrições de transmissão, as grandes firmas têm possibilidade de exercício de poder de mercado, aproveitando-se de sua posição estratégica, explorando as limitações da rede, aumentando/diminuindo sua produção e influenciando em seu próprio benefício os preços de mercado.

Em [1] é simulado o comportamento dos participantes no mercado de energia desregulado através dos conceitos de teoria de jogos, considerando os modelos cooperativos e não cooperativos. Um mercado totalmente desregulado é modelado, onde cada participante define as curvas de oferta para um operador centralizado. Em um modelo de competição perfeita, todos os participantes tratarão de maximizar seus lucros cooperando com o operador, obtendo-se assim a solução ideal de equilíbrio, representando o benefício máximo para o sistema (modelo não cooperativo). Quando restrições externas alteram as condições para uma competição perfeita, alguns participantes podem achar mais lucrativo

se agruparem (modelo cooperativo), coordenando estratégias de ofertas de preços e dividindo os benefícios, de forma tal a aumentar seu próprio lucro. Para alguns participantes, redes restritas podem ser mais interessantes e lucrativas que redes em condições de perfeita competição.

Um modelo aplicado à análise do mercado de eletricidade da Espanha é apresentado em [7]. O trabalho descreve uma metodologia que simula o comportamento do mercado de energia através de um método iterativo, que conduz a um equilíbrio de mercado baseado em uma generalização dos equilíbrios de Bertrand e de Cournot. O método iterativo é dinâmico, no sentido que, a cada iteração, os participantes podem modificar suas quantidades e refinar suas ofertas (diminuir seus preços) baseados nas respostas de produção e preço dos outros participantes do mercado. A carga é considerada inelástica e dividida em dois períodos (leve e pesada). Os estudos apresentados mostram que, na configuração da rede com carga leve, o modelo é mais competitivo e as firmas tentam ajustar seus preços de forma a atender seu despacho mínimo e evitar o custo de *start-up*. Nos períodos de carga pesada, o modelo se apresenta menos competitivo e, dependendo da porcentagem de produção, alguns dos participantes podem se comportar como competidores marginais, ofertando sua produção próxima de custo de operação e tratando de produzir o máximo de potência possível, apesar do inerente decréscimo do preço do mercado.

O trabalho em [8] estuda o comportamento estratégico dos agentes de mercado para sistemas hidrotérmicos de forma geral. O autor modelou o equilíbrio competitivo de Bertrand, um equilíbrio baseado em ofertas de preços, para sistemas térmicos e analisou o problema de manipulação de preços por parte de seus participantes.

Em [9] é estudado o comportamento estratégico por parte das companhias geradoras em um ambiente competitivo. O autor faz uma análise do poder de mercado em sistemas hidrotérmicos, baseado em um modelo de equilíbrio oligopolista de Cournot. Mecanismos mitigatórios, como níveis mínimos de contratação, são apresentados como uma possibilidade que permite contornar a manipulação de mercado por parte dos participantes.

O trabalho de [10]-[11] apresenta um modelo que avalia o comportamento das companhias geradoras, onde o preço é determinado por leilão em um mercado atacadista de energia.

Nele, as geradoras submetem suas ofertas assumindo seus custos já internalizados, suas cargas constantes e o número de geradores e curvas de distribuição conhecidos por todos os integrantes do mercado. A estratégia de oferta ótima para uma determinada firma é estabelecida resolvendo um conjunto de equações diferenciais, derivado das condições necessárias que determinam a maximização de seu lucro esperado. Os autores concluem que uma determinada companhia pode ter incentivo para aumentar suas ofertas acima de seu custo de operação, com sua margem de benefício dependente da probabilidade de ser despachada. Esta probabilidade depende, por sua vez, do seu próprio custo de operação, da função de distribuição de custo dos outros participantes, da demanda do sistema e do número de participantes ofertando no mercado de energia.

Em [12] é apresentado um algoritmo baseado em teoria de jogos (equilíbrio de Nash), simulando um mercado oligopolista, considerando o sistema elétrico interligado através de sua rede de transmissão. Os participantes do mercado podem ser classificados em dois grupos: as firmas estratégicas e os participantes competitivos. As firmas estratégicas determinarão sua curva de oferta ótima através de variações contínuas de seus coeficientes, de forma a maximizar seu próprio lucro, tomando as curvas de oferta dos demais participantes estratégicos como dados. Do ponto de vista de uma determinada firma estratégica, o problema de encontrar sua estratégia ótima pode ser modelado matematicamente como um problema de programação matemática de dois níveis, onde ela determina sua curva de oferta ótima antecipando o comportamento dos participantes competitivos. Estes, por sua vez, resolvem um problema de mínimo despacho parametrizado nas soluções da grande firma, considerando o sistema de transmissão como um sistema de potência linearizado (modelo DC). O equilíbrio competitivo de Nash, considerando um número finito de companhias estratégicas participando do mercado, é encontrado através de um método iterativo, onde a curva de oferta ótima de cada grande firma é determinada via um algoritmo de pontos interiores penalizado, proposto pelos próprios autores.

O modelo apresentado em [13] corresponde a um problema de decisão de ofertas, do ponto de vista de uma companhia geradora que se encontra inserida em um mercado competitivo. Cada companhia geradora faz uma previsão da demanda e dos parâmetros de oferta (preço e quantidade) das demais companhias participantes do mercado. Dado o nível de incerteza,

o problema de decisão é formulado matematicamente como um método de otimização estocástica discreto - um processo de decisão de Markov. A estratégia ótima é calculada de forma a maximizar o retorno esperado dentro de um horizonte de tempo predeterminado.

O trabalho em [14] é focado no sistema de eletricidade da Noruega, onde é responsabilidade de cada companhia geradora o planejamento da geração. No novo mercado desregulado, o objetivo de cada companhia é determinar o seu plano de produção e comercialização de energia de forma a maximizar seu próprio lucro. Dadas as características altamente hidrológicas do sistema elétrico da Noruega (99% da produção de energia é hidrelétrica), existe uma dependência temporal diretamente associada ao preço da energia, a qual deve ser levada em consideração na hora de determinar a oferta ótima. Este trabalho apresenta um modelo de otimização estocástica que simula diferentes cenários para formação de preços, em um horizonte de planejamento predeterminado, de forma a maximizar o lucro esperado de uma determinada companhia.

O trabalho em [15] apresenta uma ferramenta alternativa para a determinação das estratégias de oferta das companhias geradoras, dentro de um ambiente competitivo. Estas ofertas são representadas por curvas lineares, cujos coeficientes são escolhidos de forma a maximizar o benefício da própria companhia, levando em consideração seus custos de operação, as restrições do sistema e antecipando o comportamento de suas companhias rivais. O operador do sistema determinará o despacho ótimo, dadas as curvas de ofertas fornecidas pelas companhias geradoras, minimizando o pagamento por parte do grupo consumidor. Dadas as incertezas no comportamento das firmas rivais, o problema, do ponto de vista de uma companhia geradora, é formulado matematicamente como um processo de otimização estocástica com dois métodos desenvolvidos para sua resolução: uma simulação de Monte Carlo e um método baseado em otimização. Exemplos numéricos mostram o exercício de poder de mercado por parte das companhias geradoras, o que permite elevar o “Market Clearing Price” (preço do gerador mais caro despachado para atender à demanda), a níveis acima de valores competitivos. A demanda elástica, sensível a variações de preço, se apresenta como uma alternativa para contornar tais manipulações e evitar aumentos abusivos no preço do mercado.

## CAPÍTULO 3

### 3 PROBLEMAS MATEMÁTICOS COM RESTRIÇÕES DE EQUILÍBRIO (PMRE)

Neste capítulo serão introduzidas a definição e principais propriedades dos Problemas Matemáticos com Restrições de Equilíbrio (PMREs). Estes problemas modelam problemas de otimização onde, todas as suas restrições, ou partes dela, são definidas por desigualdades variacionais paramétricas. Uma formulação equivalente, que denominaremos *formulação de Karush-Kuhn-Tucker (K.K.T.)*, é deduzida, substituindo-se o problema de desigualdades variacionais por um conjunto de restrições que correspondem, em determinadas ocasiões, às condições de otimalidade de primeira ordem de um tradicional problema de otimização. O problema de equilíbrio de Stackelberg, assim como os problemas de programação em dois níveis, serão introduzidos como casos particulares dos PMREs.

#### 3.1 Formulação Matemática do Problema

Um Problema Matemático com Restrições de Equilíbrio (PMRE) é um problema de otimização, com dois conjuntos de variáveis  $x$  e  $y$ , tal que algumas (ou todas) suas restrições estão definidas por desigualdades variacionais paramétricas (DV), com  $y$  como variável primária e  $x$  como parâmetro. Analiticamente, ele pode ser definido como:

$$\text{Min}_{x,y} f(x, y) \tag{3.1}$$

$$\text{s.a } (x, y) \in Z \tag{3.1a}$$

$$y \in S(x) \tag{3.1b}$$

onde:

$$x \in \mathfrak{R}^n;$$

$$y \in \mathfrak{R}^m;$$

$$f: \mathfrak{R}^{n+m} \rightarrow \mathfrak{R};$$

$Z \subseteq \mathfrak{R}^{n+m}$  é um conjunto não vazio e fechado;

$$F: \mathfrak{R}^{n+m} \rightarrow \mathfrak{R};$$

$C: \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m$  é uma multifunção, tal que  $C(x) \subseteq \mathfrak{R}^m$  é um conjunto convexo e fechado  $\forall x \in \mathfrak{R}^n$ ;

$S(x)$  é o conjunto de soluções do problema de desigualdades variacionais,  $DV(F(x,\cdot),C(x))$ , definido por  $F(x,\cdot)$  e  $C(x)$ . Matematicamente,  $y \in S(x)$  se e somente se  $y \in C(x)$  e satisfaz o seguinte conjunto de desigualdades:

$$(v-y)^T F(x,y) \geq 0, \forall v \in C(x);$$

$$X \equiv \{x \in \mathfrak{R}^n : (x,y) \in Z \text{ para algum } y \in \mathfrak{R}^m\}, \text{ onde } X \text{ representa a projeção de } Z \text{ em } \mathfrak{R}^n.$$

A função  $f$  é a função objetivo principal a ser otimizada,  $F$  é a função de equilíbrio do problema interno,  $Z$  é a região viável do problema do nível superior e  $C(x)$  define as restrições da variável  $y$  para cada  $x \in X$ . Será assumido que  $X \subseteq \text{dom}(C)$ .

A região viável de (3.1) é definida por  $\Omega$ :

$$\Omega \equiv \{(x,y) \in \mathfrak{R}^{n+m} : (x,y) \in Z \text{ com } y \in S(x)\} \quad (3.2)$$

O termo *restrições de equilíbrio* se refere às restrições  $y \in S(x)$ . Tais restrições servem para representar situações de equilíbrio, em aplicações de engenharia e economia, modeladas matematicamente através de desigualdades variacionais paramétricas.

Uma vez definida a formulação analítica do PMRE, serão apresentadas a seguir as propriedades e definições necessárias para a dedução da *formulação de Karush-Kuhn-Tucker (K.K.T.)*. Este desenvolvimento segue o trabalho de Gibbons et al. [16], o qual serve de referência para os teoremas aqui citados.

### 3.2 Formulação de Karush-Kuhn-Tucker

Nesta seção introduziremos uma formulação equivalente ao Problema Matemático com Restrições de Equilíbrio definido em (3.1), que denominaremos *formulação de Karush-Kuhn-Tucker (K.K.T.)*. Tal formulação consistirá em substituir o conjunto de soluções do problema de Desigualdades Variacionais paramétricas por um outro conjunto de restrições que definem, sob determinadas hipóteses, as condições de otimalidade de primeira ordem de um problema de otimização associado. A *formulação de K.K.T.* pertence a uma subclasse dos PMRE e, naturalmente, condições adicionais na definição de seus elementos (funções objetivo, conjuntos viáveis e restrições) deverão ser requeridas para a obtenção de tal equivalência.

Vamos começar representando o conjunto  $C(x)$  associado às DV na formulação (3.1) como um conjunto finito de desigualdades convexas. Para cada  $x \in X$ , seja  $C(x)$  definido por:

$$C(x) \equiv \{y \in \mathfrak{R}^m : g(x, y) \leq 0\} \quad (3.3)$$

onde  $g: \mathfrak{R}^{n+m} \rightarrow \mathfrak{R}^1$  é continuamente diferenciável e  $g_i(x, \cdot)$  convexa para cada  $x \in X$  e  $i=1 \dots l$ .

Associado a  $C(x)$ , define-se a aplicação  $M: \mathfrak{R}^{n+m} \rightarrow \mathfrak{R}^1$ , onde, dado  $(x, y) \in \mathfrak{R}^{n+m}$ ,  $M(x, y)$  é dado pelo conjunto de multiplicadores  $\lambda \in \mathfrak{R}_+^1$  tal que:

$$F(x, y) + \sum_{i=1, l} \lambda_i \nabla_y g_i(x, y) = 0 \quad (3.4a)$$

$$\lambda_i g_i(x, y) = 0 \quad i=1, \dots, l \quad (3.4b)$$

$$\lambda_i \geq 0, g_i(x, y) \leq 0 \quad i=1, \dots, l \quad (3.4c)$$

Uma representação mais simples de  $M(x, y)$  pode ser obtida a partir da definição do *conjunto de índices das restrições ativas* de  $g$ :

$$I(x, y) \equiv \{i : g_i(x, y) = 0\}$$

para  $(x, y) \in \text{Gr}(C)$  (gráfico de  $C$ ).

Assim, o conjunto de multiplicadores  $M(x, y)$  satisfazendo (3.4a-c), pode ser resumido a:

$$M(x, y) = \{\lambda \in \mathfrak{R}_+^1 : F(x, y) + \sum_{i \in I(x, y)} \lambda_i \nabla_y g_i(x, y) = 0, \lambda_j = 0, \forall j \notin I(x, y)\} \quad (3.5)$$

Antes de apresentar os teoremas que estabelecem a equivalência entre a formulação geral dos Problemas Matemáticos com Restrições de Equilíbrio e a *formulação de K.K.T.*, define-se a seguir uma *restrição de qualificação sobre seqüências limitadas* no conjunto de soluções viáveis  $\Omega$  do problema principal.

### **Definição 3.1**

A Restrição de Qualificação por Seqüências Limitadas (RQSL) é válida em  $\Omega$  se, dada uma seqüência convergente  $\{(x^k, y^k)\}$  em  $\Omega$ , para cada  $k$  existe um vetor de multiplicadores  $\lambda^k \in M(x^k, y^k)$ , tal que  $\{\lambda^k\}$  é limitada.

### **Teorema 3.1**

Sejam  $F$  e  $g_i$  ( $i=1,\dots,l$ ) contínuas,  $Z$  um conjunto fechado e cada  $g_i(x, \cdot)$  convexa para todo  $x \in X$ . Assumimos que  $\nabla_y g_i(x, y)$  existe e é contínuo para todo  $(x, y)$  em um conjunto aberto contendo  $\Omega$ , e que RQSL é válida em  $\Omega$  para  $M$  definida em (3.5). Então temos que:

- a) O problema (3.1) é equivalente ao seguinte problema de otimização nas variáveis  $(x, y, \lambda)$ :

$$\text{Min}_{x, y} f(x, y) \quad (3.6)$$

$$\text{s.a } x, y \in Z \quad (3.6a)$$

$$F(x, y) + \sum_{i=1, l} \lambda_i \nabla_y g_i(x, y) = 0 \quad (3.6b)$$

$$\lambda \geq 0, g(x, y) \leq 0, \quad \lambda^t g(x, y) = 0 \quad (3.6c)$$

Se  $(x^*, y^*)$  é um mínimo global de (3.1), logo para cada  $\lambda^* \in M(x^*, y^*)$ ,  $(x^*, y^*, \lambda^*)$  é um mínimo global de (3.6). Inversamente, se existe  $\lambda^* \in M(x^*, y^*)$  tal que  $(x^*, y^*, \lambda^*)$  é um mínimo global de (3.6), então o par  $(x^*, y^*)$  é um mínimo global de (3.1).

- b) Se  $Z$  é compacto, logo existe algum  $c > 0$  tal que (3.1) é equivalente no mesmo sentido a:

$$\text{Min}_{x, y} f(x, y) \quad (3.7)$$

$$\text{s.a } x, y, \lambda \in Z \times (B(0, c) \cap \mathfrak{R}_l^+) \quad (3.7a)$$

$$F(x, y) + \sum_{i=1, l} \lambda_i \nabla_y g_i(x, y) = 0 \quad (3.7b)$$

$$g(x, y) \leq 0, \quad \lambda^t g(x, y) = 0 \quad (3.7c)$$

A formulação (3.6) será, de agora em diante, denominada *formulação de Karush-Kuhn-Tucker (K.K.T.)* do Problema Matemático com Restrições de Equilíbrio. Voltaremos a esta formulação em maiores detalhes na seção 3.3.2.

### **Teorema 3.2**

Seja  $Z$  um subconjunto arbitrário de  $\mathfrak{R}^{n+m}$  e  $X$  a projeção de  $Z$  em  $\mathfrak{R}^n$ . Seja  $g_i(x, \cdot)$  ( $i=1 \dots l$ ) convexa para cada  $x \in X$  e a restrição de qualificação RQSL válida para  $z^* \in \Omega$ . O par

$z^*=(x^*,y^*)$  é um mínimo local de (3.1) se e somente se para cada  $\lambda^* \in M(x^*,y^*)$ ,  $(x^*,y^*,\lambda^*)$  é um mínimo local de:

$$\text{Min}_{x,y} f(x,y) \quad (3.8)$$

$$\text{s.a } x,y \in Z \quad (3.8a)$$

$$F(x,y) + \sum_{i=1,l} \lambda_i \nabla_y g_i(x,y) = 0 \quad (3.8b)$$

$$\lambda \geq 0, g(x,y) \leq 0, \lambda^t g(x,y) = 0 \quad (3.8c)$$

### ***Teorema 3.3***

Seja  $Z$  um conjunto fechado e  $f, g, F$  e  $\nabla_y g_i$  contínuas ( $i=1\dots l$ ). Seja  $\Omega_{KKT} \subseteq \mathcal{R}^{n+m} \times \mathcal{R}_+^l$  a região viável de (3.6).

- a) Se existe  $(x^0, y^0, \lambda^0) \in \Omega_{KKT}$  tal que o conjunto  $\{(x,y,\lambda) \in F_{KKT} : f(x,y) \leq f(x^0, y^0)\}$  é limitado, então o problema (3.6) tem uma solução ótima;
- b) Se RQSL é válida em  $\Omega$ , cada  $g_i(x, \cdot)$  ( $i=1\dots l$ ) é convexa e existe  $(x^0, y^0) \in \Omega$  tal que o conjunto  $\{(x,y) \in \Omega : f(x,y) \leq f(x^0, y^0)\}$  é limitado, então o problema (3.1) tem uma solução ótima.

Nos primeiros dois teoremas foram estabelecidas condições que permitiram caracterizar os Problemas Matemáticos com Restrições de Equilíbrio como tradicionais problemas de otimização, descrevendo as condições de equilíbrio definidas pelas DV através de um sistema de equações não lineares equivalente. No teorema 3.3, condições necessárias permitem garantir a existência de solução tanto da *formulação de K.K.T.* como dos PMREs.

Na próxima seção, dois casos particulares de Problemas Matemáticos com Restrições de Equilíbrio serão estudados. O primeiro deles define a noção econômica do equilíbrio de Stackelberg [17], e pode ser considerado a origem da formulação dos PMREs. A programação matemática em dois níveis, um segundo exemplo de PMREs, é considerada o caminho natural para descrever situações da vida real que possuem uma ordem hierárquica predeterminada, entre eles o próprio problema de equilíbrio de Stackelberg.

### 3.3 Exemplos de PMRE

#### 3.3.1 Equilíbrio de Stackelberg

O problema tradicional de equilíbrio de Stackelberg, no contexto de teoria de jogos, é composto por um número finito de jogadores, alguns deles atuando em conjunto (que chamaremos grupo *líder*), e os restantes subordinados a estes (que denominaremos grupo *seguidor*). As diretrizes dadas pelos integrantes do grupo *líder* serão descritas através da variável  $x$ , enquanto as variáveis de decisão do grupo *seguidor* serão representadas pelo vetor  $y$ . As restrições  $y \in S(x)$  estipulam que, para cada diretriz  $x$  dada pelo grupo *líder*, o grupo *seguidor* escolherá uma resposta  $y$ , a qual será uma solução de um problema de decisão modelado pelas desigualdades variacionais paramétricas  $DV(F(x, \cdot), C(x))$ .

Uma vez definidos os jogadores e suas prioridades, o problema econômico do equilíbrio de Stackelberg será determinar um vetor de diretrizes ótimas do grupo *líder*  $x^{opt}$ , junto com um vetor de equilíbrio de respostas do grupo *seguidor*  $y^{equ} \in S(x^{opt})$ , de forma tal a minimizar a função objetivo do grupo *líder*  $f(x, y)$ , satisfazendo as condições de otimalidade  $(x, y) \in Z$ . Analiticamente, ele pode ser definido como a seguir:

$$\text{Min}_{x, y} f(x, y) \quad (3.9)$$

$$\text{s.a } x, y \in Z \quad (3.9a)$$

$$y \in S(x) \quad (3.9b)$$

que corresponde à formulação geral do Problema Matemático com Restrições de Equilíbrio, (3.1).

Alguns refinamentos e variações do modelo de equilíbrio de Stackelberg, apresentado em (3.9), têm sido propostos. Entre eles podemos destacar dois problemas extremos: o equilíbrio de Stackelberg forte

$$\text{Min}_x f_{\text{forte}}(x) \equiv \inf_{y \in S(x)} f(x, y) \quad (3.10)$$

$$\text{s.a } x \in X \quad (3.10a)$$

e o equilíbrio de Stackelberg débil

$$\text{Min}_x f_{\text{debil}}(x) \equiv \sup_{y \in S(x)} f(x, y) \quad (3.11)$$

$$\text{s.a } x \in X \tag{3.11a}$$

Na definição do equilíbrio de Stackelberg forte, o grupo *líder* é otimista, no sentido que assume que os participantes do grupo *seguidor* irão atuar da forma mais favorável a beneficiá-lo. É implicitamente assumido que, para cada estratégia  $x \in X$  do grupo *líder*, as reações de  $y \in S(x)$  do grupo *seguidor* vão contribuir para minimizar a função objetivo do grupo *líder*  $f(x,y)$ . Este modelo corresponde exatamente à formulação (3.9). A situação oposta é representada pelo equilíbrio de Stackelberg débil. Esta abordagem corresponde a um ponto de vista pessimista por parte do grupo *líder*, no qual ele assume que o grupo *seguidor* atuará da forma menos favorável e ele se prevenirá contra isso. Estas duas formulações de equilíbrio serão equivalentes no caso particular que o conjunto de soluções  $S(x)$  do grupo *seguidor* seja univocamente determinado para cada  $x \in X$ .

Observe que, na definição geral do problema (3.9) e seus refinamentos (3.10) e (3.11), os integrantes do grupo *líder* têm um certo privilégio em relação aos integrantes do grupo *seguidor*, no sentido que o grupo *líder* tem como antecipar as reações do grupo *seguidor* e, baseado nisso, selecionar suas próprias estratégias. Os integrantes do grupo *seguidor* atuam assim de forma subordinada às estratégias escolhidas pelo grupo *líder*.

### 3.3.2 Problemas de Dois Níveis

A programação em dois níveis é um ramo da programação matemática utilizada para descrever problemas de otimização, onde a região viável é definida inteira ou parcialmente pelo conjunto de soluções de um segundo problema, parametrizado pelas variáveis do primeiro. Este tipo de formulação é adequado para modelar problemas que requerem uma determinada ordem hierárquica, onde as ações do problema do nível superior delimitam as ações do problema do nível inferior, e são, por sua vez, influenciadas pelas decisões deste último. Analiticamente, eles são definidos como:

$$\text{Min}_{x,y} f(x,y) \tag{3.12}$$

$$\text{s.a } (x,y) \in Z \tag{3.12a}$$

$$\text{onde } y \text{ é solução de} \tag{3.12b}$$

$$\text{Min}_y \theta(x,y) \tag{3.12c}$$

$$\text{s.a } y \in C(x) \quad (3.12d)$$

Veremos no decorrer desta seção como este problema de programação matemática em dois níveis pode ser considerado como um caso particular dos Problemas Matemáticos com Restrições de Equilíbrio (PMREs), e de onde vem a origem da denominação *formulação de K.K.T.*

Seja a função  $F(x, \cdot)$  em (3.1), representando o gradiente parcial em relação à segunda variável de uma determinada função  $C^1$ ,  $\theta: \mathfrak{R}^{n+m} \rightarrow \mathfrak{R}$  tal que  $F(x, y) = \nabla_y \theta(x, y)$   $\forall (x, y) \in \text{Gr}(C) = \{(x, y) \in \mathfrak{R}^{n+m} : y \in C(x)\}$ . Neste caso, a desigualdade variacional  $DV(F(x, \cdot), C(x))$ , para cada  $x$  fixo, representa o conjunto de condições estacionárias do seguinte problema de otimização na variável  $y$ :

$$\text{Min}_y \theta(x, y) \quad (3.13)$$

$$\text{s.a } y \in C(x) \quad (3.13a)$$

Se  $C(x)$  é convexo e  $\theta(x, \cdot)$  é convexa, o conjunto de soluções ótimas de (3.13), definido por  $\text{argmin}\{\theta(x, y) : y \in C(x)\}$ , define o conjunto de soluções  $S(x)$  do problema de desigualdades variacionais paramétricas:  $DV(\nabla_y \theta(x, y), C(x))$ .

Nestas condições, o problema de programação em dois níveis (3.12) pode ser formulado matematicamente como um Problema Matemático com Restrições de Equilíbrio (PMRE):

$$\text{Min}_{x, y} f(x, y) \quad (3.14)$$

$$\text{s.a } (x, y) \in Z \quad (3.14a)$$

$$y \in S(x) \quad (3.14b)$$

Por outro lado, considerando que  $S(x)$  define, para cada  $x$  fixo, o conjunto de soluções do problema de otimização em (3.12c-d), (3.12) pode agora ser formulado como um tradicional problema de programação matemática:

$$\text{Min}_{x, y} f(x, y) \quad (3.15)$$

$$\text{s.a } x, y \in Z \quad (3.15a)$$

$$\nabla_y \theta(x, y) + \sum_{i=1, l} \lambda_i \nabla_y g_i(x, y) = 0 \quad (3.15b)$$

$$\lambda \geq 0, g(x, y) \leq 0, \quad \lambda^t g(x, y) = 0 \quad (3.15c)$$

onde o subproblema de otimização do nível inferior foi representado pelas suas condições de otimalidade de primeira de (3.13), conhecidas como condições de Karush-Kuhn-Tucker.

Os Problemas Matemáticos com Restrições de Equilíbrio são, de forma geral, problemas de difícil solução. Parte de sua complexidade está relacionada à dependência hierárquica entre seus elementos, definida implicitamente no conjunto de soluções  $S(x)$ . Será objetivo da próxima seção analisar, em parte, peculiaridades destes problemas.

### 3.4 Complexidade do PMRE

Os Problemas Matemáticos com Restrições de Equilíbrio podem ser considerados, em geral, problemas de difícil solução. Suas dificuldades são diversas, e entre elas podemos mencionar a não diferenciabilidade das soluções do problema do nível inferior, a não convexidade do conjunto viável do problema geral, a não unicidade do conjunto solução do subproblema do nível inferior e a não regularidade do conjunto de soluções na sua *formulação de K.K.T.* Cada uma destas particularidades será analisada a seguir, através de exemplos numéricos e um estudo analítico na avaliação da não regularidade intrínseca da *formulação de K.K.T.*

#### 3.4.1 Análise Numérica – Exemplo 1

O objetivo neste item será mostrar a não diferenciabilidade do conjunto solução do subproblema do nível inferior ( $S(x)$ ) e a não convexidade do conjunto de soluções viáveis do problema principal ( $\Omega$ ). Para isso, seja o seguinte problema de dois níveis:

$$\begin{aligned} & \underset{x,y}{\text{Min}} f(x, y) \\ & \text{s.a } 0 \leq x \leq 4 \\ & \quad \text{onde } y \text{ é solução de} \\ & \quad \underset{y}{\text{Min}} (-y) \\ & \quad \text{s.a } y \in C(x) \end{aligned}$$

onde  $C(x) \equiv \{y \in \mathfrak{R}_+ : y \leq -x+2, y \leq x-3\}$ .

Para  $x \in [0,4]$ ,  $C(x) \neq \emptyset$  se e somente se  $x \in [0,2] \cup [3,4]$ , representado na Figura 3.1 pelas semi-retas com origem em pontos nos segmentos A-B e C-D, respectivamente:

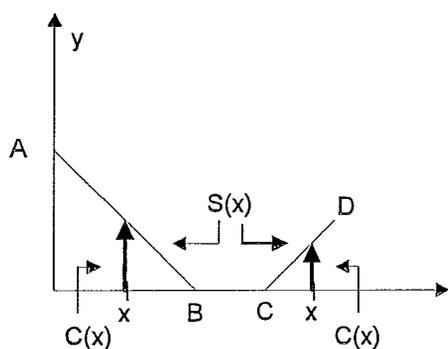


Figura 3.1 – Exemplo 1

sendo  $A=(0,2)$ ,  $B=(2,0)$ ,  $C=(3,0)$  e  $D=(4,1)$ .

Observe que, dado  $x \in [0,2] \cup [3,4]$ , o conjunto solução para o problema do nível inferior é definido por:

$$S(x) = \begin{cases} -x + 2 & \text{se } x \in [0,2] \\ x - 3 & \text{se } x \in [3,4] \end{cases} \quad (3.16)$$

resultando, assim, a região viável  $\Omega$  do problema principal igual a:

$$\Omega \equiv \{(x, -x+2) : x \in [0,2]\} \cup \{(x, x-3) : x \in [3,4]\} \quad (3.17)$$

que nada mais é que a união dos segmentos A-B e C-D na Figura 3.1.

Analisando (3.16) e (3.17) e observando a representação gráfica de  $S(x)$  e  $\Omega$  na Figura 3.1, podemos facilmente concluir a não diferenciabilidade de  $S(x)$  e a não convexidade do conjunto de soluções viáveis  $\Omega$ .

### 3.4.2 Análise Numérica – Exemplo 2

Seja agora um segundo exemplo de programação matemática em dois níveis:

$$\text{Min}_{x,y} f(x, y)$$

$$\text{s.a } x \geq 0$$

onde  $y$  é solução de

$$\text{Min}_y (-y^2 + 1)$$

$$\text{s.a } y \in C(x)$$

onde  $C(x) \equiv \{y \in \mathfrak{R} : |y| \leq 1\}$ .

Vimos, no Exemplo 1, que o conjunto de soluções do subproblema do nível inferior  $S(x)$ , era univocamente determinado para cada  $x \in \mathfrak{R}$ . Mostraremos neste exemplo que esta não é uma regra geral no comportamento dos problemas matemáticos em dois níveis.

Para cada  $x \geq 0$ ,  $C(x)$  é definido pelo segmento vertical  $y \in [-1, 1]$  no gráfico na Figura 3.2.

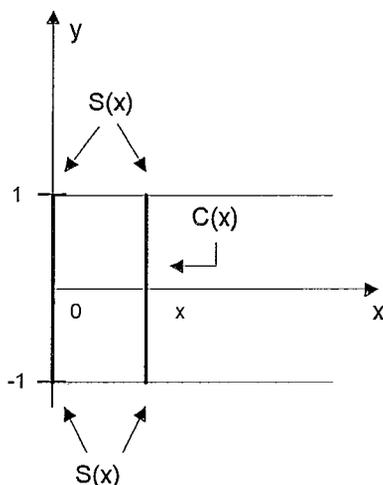


Figura 3.2 – Exemplo 2

A função objetivo do subproblema do nível inferior,  $(-y^2+1)$ , atinge seu mínimo em dois pontos neste intervalo, a saber  $y=1$  e  $y=-1$ . Assim, para cada  $x \geq 0$ ,  $S(x)$  resulta igual a  $\{1, -1\}$ , e vemos através deste exemplo a não unicidade da solução do subproblema do nível inferior.

### 3.4.3 Não Regularidade da Formulação de K.K.T.

Seja, por conveniência, o problema de dois níveis reproduzido a seguir:

$$\text{Min}_{x,y} f(x, y) \tag{3.18}$$

$$\text{s.a } (x, y) \in Z \tag{3.18a}$$

$$\text{onde } y \text{ é solução de} \tag{3.18b}$$

$$\text{Min}_y \theta(x, y) \tag{3.18c}$$

$$\text{s.a } y \in C(x) \tag{3.18d}$$

e sua *formulação de K.K.T.* dada por:

$$\text{Min}_{x,y} f(x, y) \tag{3.19}$$

$$\text{s.a } x, y \in Z \quad (3.19a)$$

$$\nabla_y \theta(x, y) + \sum_{i=1, l} \lambda_i \nabla_y g_i(x, y) = 0 \quad (3.19b)$$

$$\lambda \geq 0, g(x, y) \leq 0, \lambda^t g(x, y) = 0 \quad (3.19c)$$

Como já mencionado, a *formulação de K.K.T.* transforma o conjunto de restrições, definido pelo subproblema de otimização do nível inferior (3.18c-d), em um conjunto de restrições dado pelas suas condições de otimalidade de primeira ordem (3.19b-c). A maior dificuldade desta estratégia está diretamente relacionada às restrições de folgas complementares (3.19c), à dependência linear dos gradientes dos pares de restrições ativas ( $\lambda_i=0, \lambda_i g_i(x, y)=0$ ) e ( $g_i(x, y)=0, \lambda_i g_i(x, y)=0$ ) para cada  $i=1 \dots l$ . Como na solução ótima, para cada  $i$  um destes pares de condições se satisfaz, o conjunto de possíveis soluções do problema de dois níveis (3.19a-c) não pode se dizer regular. Assim, devido à inerente não regularidade destes problemas, a utilização de tradicionais métodos de programação não linear pode não ser adequada para resolvê-los. Tais algoritmos exploram, na sua maioria, as condições de otimalidade de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker, transformando um tradicional problema de otimização na resolução de um sistema de equações, assumindo-se regularidade (independência linear dos gradientes das restrições ativas) no conjunto de soluções ótimas.

A alta complexidade destes problemas e suas inúmeras aplicações práticas motivou a pesquisa e desenvolvimento, tanto no aspecto teórico como prático, de propriedades e algoritmos específicos para sua solução.

Observe que, mesmo na formulação mais simples de programação em dois níveis (3.12) (problemas com funções objetivo e restrições lineares), incluem-se não linearidades na *formulação de K.K.T.* (3.15), o que inviabiliza a utilização direta de algoritmos de programação linear para resolvê-los. Do tratamento diferenciado das condições de folgas complementares têm surgido possíveis modelos de resolução, entre os quais podemos mencionar: modelos separáveis, programação linear mista e modelos de penalidade. Os modelos separáveis transformam a *formulação de K.K.T.* em uma formulação equivalente contendo somente restrições lineares, mas possuem a desvantagem de incluírem não

diferenciabilidade ao problema. A programação linear mista, com a inclusão de variáveis binárias, transforma o conjunto de restrições de folgas complementares num conjunto de restrições lineares inteiras. Algoritmos de “branch-and-bound” são utilizados para a resolução de ambos os modelos. Uma forma indireta de tratar as restrições de folga complementares é introduzi-las na função objetivo do problema principal como um termo penalidade. Um estudo detalhado de problemas de programação linear em dois níveis pode ser encontrado em [18].

Em [19] são estudados aspectos teóricos dos Problemas Matemáticos com Restrições de Equilíbrio, para problemas de programação não linear de forma geral. Os autores apresentam uma formulação equivalente do PMRE via normalização quadrática das restrições de folga complementares, e estabelecem propriedades que sugerem, na presença de não-degeneração da solução, algoritmos baseados em métodos Lagrangeano Aumentado como uma alternativa para sua resolução. Em [20], um algoritmo de pontos interiores de direções viáveis é generalizado para a resolução da *formulação de K.K.T.* do problema de dois níveis, na hipótese também de não-degeneração da solução. Um algoritmo penalizado, baseado na *formulação de K.K.T.*, o qual trata indiretamente as restrições de folgas complementares, introduzindo-as na função objetivo do problema principal através de um termo penalizado, é apresentado em [1]. A formulação geral dos PMREs e um estudo detalhado de suas principais propriedades foi abordado em [16].

Para finalizar o capítulo, serão apresentadas duas formas equivalentes de tratar o conjunto de restrições definido pelas folgas complementares.

### 3.5 Função de Mérito

Seja o conjunto de restrições definido pelas folgas complementares da *formulação de K.K.T.* resumido a:

$$a \geq 0, b \geq 0 \text{ e } a^t b = 0 \text{ onde } a \in \mathfrak{R}^n \text{ e } b \in \mathfrak{R}^n.$$

A seguir, duas formas equivalentes de tratar este conjunto de restrições serão apresentadas:

Seja a primeira delas obtida através da seguinte função de mérito:

$$\begin{aligned} \varphi_1: \mathfrak{R}^2 &\rightarrow \mathfrak{R} \text{ convexa tal que:} \\ (a,b) \quad \varphi_1(a,b) &\equiv \sqrt{a^2 + b^2} - a - b \end{aligned} \tag{3.20}$$

Esta função foi utilizada pela primeira vez por Fischer [21] para transformar as condições de K.K.T de um problema de programação não linear em um simples sistema de equações. O próprio Fischer [22] atribuiu a definição desta função a Burmeister, e ela é hoje conhecida como formulação de Fischer-Burmeister.

Esta função  $\varphi_1$  satisfaz a seguinte importante propriedade:

$$\text{Mín}(a,b) = 0 \Leftrightarrow \varphi_1(a,b) = 0$$

Observe, por outro lado, que:

$$a b = 0, a \geq 0 \text{ e } b \geq 0 \Leftrightarrow \min(a,b) = 0,$$

Assim, utilizando esta função de mérito para substituir as folgas complementares da *formulação de K.K.T.* do problema de dois níveis, obtemos a seguinte formulação equivalente a (3.15):

$$\text{Mín}_{x,y} f(x,y)$$

$$\text{s.a } x, y \in Z$$

$$\nabla_y \theta(x,y) + \sum_{i=1,l} \lambda_i \nabla_y g_i(x,y) = 0$$

$$\varphi_1(\lambda_i, -g_i(x,y)) = 0 \forall i = 1 \dots l$$

ou equivalentemente:

$$\text{Min}_{x,y} f(x,y) \tag{3.21}$$

$$\text{s.a } x, y \in Z \tag{3.21a}$$

$$\nabla_y \theta(x,y) + \sum_{i=1,l} \lambda_i \nabla_y g_i(x,y) = 0 \tag{3.21b}$$

$$\sqrt{\lambda_i^2 + g_i^2(x,y)} - \lambda_i + g_i(x,y) = 0 \forall i = 1 \dots l \tag{3.21c}$$

Em [23], Quintana et al. propuseram um algoritmo de *pontos não interiores*, utilizando funções de mérito na forma (3.20) para o tratamento das condições de folgas complementares, para a resolução do clássico problema de Fluxo de Potência Ótimo.

Uma segunda função de mérito, de interesse específico no desenvolvimento deste trabalho, é a função conhecida como penalização de Fischer-Burmeister:

Seja  $\varphi_2: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R}$  tal que:

$$(a,b) \quad \varphi_2(a,b) \equiv a + b - \sqrt{a^2 + b^2} + p \max(0,a) \max(0,b)$$

onde  $p > 0$  é um parâmetro dado. Esta função tem a seguinte propriedade:

$$\varphi_2(a,b) = 0 \Leftrightarrow ab = 0, a \geq 0 \text{ e } b \geq 0$$

Utilizando a equivalência acima e no mesmo raciocínio aplicado à função  $\varphi_1$ , uma formulação equivalente a (3.15) é obtida, substituindo as condições de folga complementares do problema do nível inferior pela sua formulação equivalente em função de  $\varphi_2$ , obtendo-se assim:

$$\text{Min}_{x,y} f(x,y) \tag{3.22}$$

$$\text{s.a } x, y \in Z \tag{3.22a}$$

$$\nabla_y \theta(x,y) + \sum_{i=1,l} \lambda_i \nabla_y g_i(x,y) = 0 \tag{3.22b}$$

$$\lambda_i - g_i(x,y) - \sqrt{\lambda_i^2 + g_i^2(x,y)} + p \max(0, \lambda_i) \max(0, -g_i(x,y)) = 0 \quad \forall i = 1 \dots l \tag{3.22c}$$

Observe-se que tanto em (3.21) como em (3.22) as restrições de canalização associadas às folgas complementares desapareceram, sendo automaticamente satisfeitas através de  $\varphi_1$  e  $\varphi_2$ , respectivamente. Essa é uma das principais propriedades destas funções de mérito, e permite trabalhar com uma formulação equivalente, transformando as restrições de folgas complementares em um conjunto somente com restrições de igualdade.

O problema na forma (3.22) será denominado *Formulação de K.K.T. Penalizada*. Veremos, na próxima seção, o comportamento e complexidade dos algoritmos de tipo Newton-Raphson na resolução direta deste tipo de penalizações.

### 3.5.1.1 Complexidade da Formulação de K.K.T. Penalizada

Seja o problema (3.22) escrito, equivalentemente, como:

$$\text{Min}_{x,y} f(x,y) \tag{3.23}$$

$$\text{s.a } x, y \in Z \tag{3.23a}$$

$$\nabla_y \theta(x,y) + \sum_{i=1,l} \lambda_i \nabla_y g_i(x,y) = 0 \tag{3.23b}$$

$$\begin{aligned} \lambda_i - g_i(x, y) - \sqrt{\lambda_i^2 + g_i^2(x, y)} + \\ p_i \lambda_i (-g_i(x, y)) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, l \end{aligned} \quad (3.23c)$$

onde:

$$p_i = \begin{cases} p & \text{se } \lambda_i \geq 0 \text{ e } g_i(x, y) \leq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall i = 1, \dots, l$$

Escrevendo as condições de otimalidade de primeira ordem de K.K.T. para (3.23), chega-se a um sistema de equações não lineares, incluindo as próprias condições de folgas complementares-penalizadas (3.23c). Sem perda de generalidade e por simplicidade de notação, estas condições podem ser expressadas, para cada  $i=1, \dots, l$ , como:

$$a + b - \sqrt{a^2 + b^2} + pab = 0 \quad (3.24)$$

Assumindo-se que, durante uma iteração do processo iterativo, “a” encontra-se na fronteira de sua região viável ( $a=0$ ), e “b” é estritamente positivo ( $b>0$ ), um algoritmo baseado na aproximação de primeira ordem de Newton-Raphson encontrará um novo passo incremental  $(\Delta a, \Delta b)$ , satisfazendo:

$$\begin{aligned} (1 - a / \sqrt{a^2 + b^2} + pb)\Delta a + \\ (1 - b / \sqrt{a^2 + b^2} + pa)\Delta b = -(a + b - \sqrt{a^2 + b^2} + pab) \end{aligned}$$

resultando  $\Delta a$  igual a:

$$\begin{aligned} \Delta a = [-(a + b - \sqrt{a^2 + b^2} + pab) - \\ (1 - b / \sqrt{a^2 + b^2} + pa)\Delta b] / (1 - a / \sqrt{a^2 + b^2} + pb) \end{aligned}$$

Por substituição direta da hipótese  $a=0$ , obtém-se o passo incremental  $\Delta a=0$ :

$$\Delta a = [-(b - \sqrt{b^2}) - (1 - b / \sqrt{b^2})\Delta b] / (1 + pb) = 0 \quad (3.25)$$

De (3.25) pode-se deduzir que: algoritmos baseados na aproximação de primeira ordem de Newton-Raphson para resolver problemas de programação não linear, cujas restrições são parcialmente definidas por equações da forma (3.23c), podem ter problemas numéricos durante o processo iterativo, uma vez que alguma de suas variáveis atinja a fronteira da

região viável. Uma forma de se evitar este comportamento é relaxar o lado direito das restrições (3.24), por um valor  $\varepsilon$  diferente de zero ( $\varepsilon \neq 0$ ):

$$a + b - \sqrt{a^2 + b^2} + pab = \varepsilon \quad (3.26)$$

sendo  $\varepsilon$  penalizado na função objetivo, a qual denominaremos *penalização de Fischer-Burmeister relaxada*.

Pela aproximação linear de primeira ordem de Newton-Raphson, o passo incremental nas variáveis  $a$  e  $b$  para (3.26) corresponde a:

$$\begin{aligned} (1 - a / \sqrt{a^2 + b^2} + pb)\Delta a + \\ (1 - b / \sqrt{a^2 + b^2} + pa)\Delta b = -(a + b - \sqrt{a^2 + b^2} + pab - \varepsilon) \end{aligned}$$

Através de manipulações algébricas, e levando em consideração que  $a=0$ , chega-se a:

$$\Delta a = \varepsilon / (1 + pb) \quad (3.27)$$

Pode ser concluído, observando (3.27), como perturbações no lado direito das condições de folgas complementares penalizadas (3.23c) podem introduzir, na proximidade da fronteira da região viável (definida pelas equações de canalização do problema do grupo *seguidor*), um melhor condicionamento nos algoritmos iterativos tipo Newton-Raphson.

## CAPÍTULO 4

### 4 EQUILÍBRIO DE MERCADO EM SISTEMAS DE POTÊNCIA

Este capítulo descreverá dois modelos de equilíbrio de mercado aplicados a sistemas de potência, considerando o sistema elétrico como uma rede interligada através de seu sistema de transmissão. A primeira abordagem segue o trabalho de Hogan [1], que propõe um algoritmo para a solução do equilíbrio oligopolista de Nash-Cournot, para o modelo linearizado (modelo DC) de sistemas de potência. Em seguida, o modelo matemático e cada um dos elementos que descrevem o equilíbrio de Stackelberg em sistemas de potência AC - objetivo de estudo desta tese - são apresentados.

#### 4.1 Equilíbrio de Cournot – Fluxo de Potência DC

O trabalho de Hogan [1] foi um dos primeiros na literatura a abordar a influência do poder de mercado associada às restrições do sistema de transmissão. Sejam, a seguir, a formulação matemática do problema e o algoritmo de solução por ele proposto.

##### 4.1.1 Formulação do Problema

Sejam os participantes do mercado de energia divididos em dois grupos: firmas estratégicas (ou grandes firmas) agrupadas no conjunto  $E$  e firmas menores (ou participantes secundários) agrupadas no conjunto  $S$ . Os integrantes das firmas dominantes serão as grandes empresas geradoras e consumidores de grande porte que têm algum poder de mercado, enquanto os participantes secundários serão representados por geradores de menor porte e pequenos centros de demanda. As grandes firmas determinarão suas produções, as demandas dos geradores e as cargas sob seu controle comprando e vendendo no mercado de energia ao preço *spot* do sistema. Por sua vez, os participantes secundários acharão um equilíbrio competitivo restrito às decisões das grandes firmas, e serão os determinantes do preço do mercado.

O problema de otimização para um determinado participante  $i \in E$ , integrante do grupo das grandes firmas, corresponde a um problema de dois níveis e pode ser formulado analiticamente como:

$$\text{Max}_{x_i, \lambda} f_i(x_i, \lambda) \quad (4.1)$$

$$\text{onde } y \text{ é solução de} \quad (4.1a)$$

$$\text{Max}_y f_s(y) \quad (4.1b)$$

$$\text{s.a } g(x_i, x_{E/i}, y) = 0 \quad (4.1c)$$

$$h(x_i, x_{E/i}, y) \leq 0 \quad (4.1d)$$

onde  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $y \in \mathfrak{R}^m$  e  $\lambda \in \mathfrak{R}^1$ , representando  $\lambda$  o multiplicador de Lagrange associado às restrições de igualdade (4.1c). As funções  $f_i: \mathfrak{R}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{R}$  e  $f_s: \mathfrak{R}^m \rightarrow \mathfrak{R}$  têm por objetivo, respectivamente, maximizar o lucro do participante  $i$  da grande firma e o benefício do grupo secundário  $S$ . As restrições de igualdade  $g: \mathfrak{R}^{n+m} \rightarrow \mathfrak{R}^1$  correspondem às equações de balanço da potência ativa em cada nó da rede, e as desigualdades  $h: \mathfrak{R}^{n+m} \rightarrow \mathfrak{R}^p$  representam limites físicos e/ou operacionais do sistema. Segue-se uma descrição detalhada de cada um destes elementos.

□ Função objetivo do participante  $i$  da grande firma

O participante  $i$  tentará maximizar seu próprio benefício, tomando as cargas e gerações dos demais participantes das grandes firmas (que denotaremos por  $E/i$ ) como dados. O objetivo da firma  $i$  será maximizar seu benefício definido pelo valor da carga que ele controla:  $B_i(p_i) - \lambda^1 p_i$ , o valor da geração que ele provê  $\lambda^1 p_{g_i} - C_i(p_{g_i})$  e seu Contrato de Congestionamento da Transmissão  $\lambda^1 CCT_i$ .

O Contrato de Congestionamento da transmissão tratado no trabalho de Hogan é inspirado no modelo do mercado energia da PJM (Pennsylvania-New Jersey-Maryland Interconnection). Neste mercado, na presença de congestionamento na transmissão, seus participantes poderão estar expostos a grandes oscilações de preços entre os diferentes sub-mercados. Suponha que exista uma companhia geradora no sub-mercado  $i$  que possui um contrato para atender uma carga no sub-mercado  $j$ . De acordo com as regras de mercado, o gerador vende sua produção no preço *spot* no sub-mercado  $i$  e, para atender seu contrato, compra energia ao preço *spot* no sub-mercado  $j$ . Para se prevenir contra possíveis variações de preço entre os sub-mercados, ele pode recorrer aos Contratos de Congestionamento de Transmissão (CCT). Tal contrato é um instrumento financeiro entre o agente e o proprietário do sistema de transmissão, pelo

qual seu detentor recebe, após um pagamento prévio fixo, o montante contratado multiplicado pela diferença de custos marginais entre os sub-mercados  $(\lambda_j - \lambda_i)$ . Analiticamente, o Contrato de Congestionamento da Transmissão pode ser representado por:

$$\lambda^t \text{CCT}_k$$

onde:

$\lambda$  n-vetor de custos marginais nas barras

$\text{CCT}_k$  n-vetor definido por  $t(-e_i + e_j)$  onde  $t$  é igual ao montante contratado

$e_i$  n-vetor cujas componentes são iguais a zero exceto o valor unitário na posição  $i$

Para maiores detalhes de Contratos de Congestionamento da Transmissão ver [1]-[24].

Analiticamente, a função objetivo do participante  $i$  pode ser representada por:

$$f_i(p l_i, p g_i, \lambda) = B_i(p l_i) - \lambda^t p l_i - C_i(p g_i) + \lambda^t p g_i + \lambda^t \text{CCT}_i$$

onde:

$n$  número de barras do sistema

$p l_i$  n-vetor de demanda do participante  $i$

$p g_i$  n-vetor de geração de potência ativa do participante  $i$

$\lambda$  n-vetor preço de equilíbrio do mercado (preço *spot* do sistema), variável dual associada às restrições de igualdade (4.1 c)

$B_i(p l_i)$  função benefício de carga do participante  $i$

$C_i(p g_i)$  função custo de geração de potência ativa do participante  $i$

$\text{CCT}_i$  n-vetor de montante de Contrato de Congestionamento da Transmissão do participante  $i$

□ Função objetivo do grupo secundário

$$f_s(p l_s, p g_s) = B_s(p l_s) - C_s(p g_s)$$

onde:

$pl_s$  n-vetor de demanda dos participantes do grupo secundário

$pg_s$  n-vetor de geração de potência ativa dos participante do grupo secundário

$B_s(pl_s)$  função benefício de carga dos participantes do grupo secundário

$C_s(pg_s)$  função custo de geração de potência ativa dos participantes do grupo secundário

#### □ Restrições do grupo secundário

Como já mencionado, o modelo da rede elétrica que esta sendo considerado corresponde à aproximação linearizada do modelo de fluxo de carga, sendo as restrições do problema do segundo nível (4.1 b-d) representadas por:

$$(pl_i - pg_i) + \sum_{e=1, E/i} (pl_e - pg_e) + \sum_{s=1, S} (pl_s - pg_s) + f = 0$$

$$f = A^t p$$

$$p = BA\theta$$

$$p_{\min} \leq p \leq p_{\max}$$

onde:

$E/i$  conjunto de elementos das firmas estratégicas menos o participante  $i$

$S$  conjunto de elementos dos participantes do grupo secundário

$pl_e$  n-vetor de demanda dos participantes das firmas estratégicas

$pg_e$  n-vetor de geração de potência ativa dos participante das firmas estratégicas

$nc$  número de circuitos do sistema

$f$  n-vetor de balanço de potência nas barras (demanda – geração)

$A$  matriz ( $nc \times n$ ) de incidência com elementos 0, 1 e -1, representando as interconexões da rede de transmissão

$p$   $nc$ -vetor de fluxo nos circuitos

$b$   $nc$ -vetor de susceptância dos circuitos

$B$  matriz ( $nc \times nc$ ) diagonal, com elementos diagonais definidos pelos vetor de susceptância dos circuitos

$\theta$	n-vetor de ângulo de tensão nas barras
$p_{\min}$	nc-vetor de capacidade mínima dos circuitos
$p_{\max}$	nc-vetor de capacidade máxima dos circuitos

#### 4.1.2 Método de Resolução

O método de resolução proposto por Hogan [1] é baseado na *formulação de K.K.T.* do problema de dois níveis (4.1), parametrizado no vetor de demandas e gerações  $x_{E/i}$  dos participantes as demais firmas estratégicas. Esta *formulação de K.K.T.* é obtida substituindo-se o subproblema dos participantes secundários (4.1b-d) diretamente pelas suas condições de otimalidade de primeira ordem.

Seja, para a dedução da *formulação de K.K.T.*, o Lagrangreano do subproblema do nível inferior (4.1b-d) definido por:

$$L_s(y, \lambda, \mu) = f_s(y) - \lambda^t g(x_i, x_{E/i}, y) - \mu^t h(x_i, x_{E/i}, y)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são as variáveis duais associadas às restrições (4.1c) e (4.1d) respectivamente. Impondo-se as condições de otimalidade de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker do subproblema do grupo *seguidor* resulta o seguinte sistema de equações não lineares:

$$(\nabla_y L_s) : \partial_y f_s(y) - \lambda^t \nabla_y g(x_i, x_{E/i}, y) - \mu^t \nabla_y h(x_i, x_{E/i}, y) = 0 \quad (4.2)$$

$$(\nabla_\lambda L_s) : g(x_i, x_{E/i}, y) = 0 \quad (4.3)$$

$$h(x_i, x_{E/i}, y) \leq 0 \quad (4.4)$$

$$\mu^t h(x_i, x_{E/i}, y) = 0 \quad (4.5)$$

$$\mu \geq 0 \quad (4.6)$$

Substituindo-se o conjunto de soluções do grupo *seguidor* (4.1) por (4.2)-(4.6), obtém-se a *formulação de K.K.T.* para o problema de equilíbrio de um determinado participante i:

$$\text{Max}_{x_i, \lambda} f_i(x_i, \lambda) \quad (4.7)$$

$$\text{s.a. } \partial_y f_s(y) - \lambda^t \nabla_y g(x_i, x_{E/i}, y) - \mu^t \nabla_y h(x_i, x_{E/i}, y) = 0 \quad (4.7a)$$

$$g(x_i, x_{E/i}, y) = 0 \quad (4.7b)$$

$$h(x_i, x_{E/i}, y) \leq 0 \quad (4.7c)$$

$$\mu^t h(x_i, x_{E/i}, y) = 0 \quad (4.7d)$$

$$\mu \geq 0 \quad (4.7e)$$

O problema, do ponto de vista de uma firma estratégica  $i$ , corresponde a determinar o vetor de demandas e gerações ( $x_i$ ) que maximizem seu próprio lucro, tomando como conhecidos o vetor de demandas e gerações das outras grandes firmas ( $x_{E/i}$ ) e antecipando as possíveis soluções do problema das firmas menores ( $y, \lambda$ ). Por sua vez, os participantes secundários tomam as estratégias das grandes firmas ( $d_E, g_E$ ) como dados, atuam como receptores de preço e acham seu equilíbrio restrito a tal solução. O problema de equilíbrio de Nash-Cournot corresponde a achar uma solução de equilíbrio ( $x^*_E$ ) comum para todas as grandes firmas participantes do mercado, onde nenhuma delas tenha incentivo para se desviar de sua solução ( $x^*_i$ ) sem uma possível perda de competitividade. Na próxima seção será apresentado o algoritmo proposto por Hogan [1] para resolução de tal problema de equilíbrio.

### 4.1.3 Algoritmo de Solução

O algoritmo proposto por Hogan [1] resolve o problema de dois níveis (4.7), para cada participante  $i \in E$ , penalizando as condições de folga complementares (4.7c-e) na função objetivo do problema principal. Analiticamente:

$$\text{Max}_{x_i, \lambda} f_i(x_i, \lambda) - t\varepsilon^2 \quad (4.8)$$

$$\text{s.a } \partial_y f_s(y) - \lambda^t g(x_i, x_{E/i}, y) - \mu^t h(x_i, x_{E/i}, y) = 0 \quad (4.8a)$$

$$g(x_i, x_{E/i}, y) = 0 \quad (4.8b)$$

$$h(x_i, x_{E/i}, y) \leq 0 \quad (4.8c)$$

$$\mu^t h(x_i, x_{E/i}, y) = \varepsilon \quad (4.8d)$$

$$\mu \geq 0 \quad (4.8e)$$

Dado  $t > 0$ , uma solução de versão relaxada (4.8) é encontrada utilizando o pacote de programação não linear MINOS5 [25]. Tal algoritmo de solução é aplicado sucessivamente a (4.8), para valores crescentes do parâmetro de penalização  $t$ , até encontrar-se uma solução aproximada de (4.7) para  $\varepsilon$  suficientemente pequeno.

Uma solução de equilíbrio de Nash-Cournot para um grupo finito de grandes firmas é encontrada, resolvendo (4.7) repetidamente, para cada participante  $i \in E$ . Um ponto  $(d^*, g^*)$  será considerado uma solução de equilíbrio se, para cada participante  $i$ ,  $(d^*_i, g^*_i)$  é uma solução de (4.7) dado  $(d^*_{E/i}, g^*_{E/i})$ .

Considere-se agora que o problema de equilíbrio de mercado consiste de somente um único participante estratégico, os restantes pertencendo ao conjunto de participantes secundários. Tais grupos serão denominados, respectivamente, de grupo *líder* e grupo *seguidor*. Nestas condições, o problema de dois níveis na formulação (4.1) (com  $E = \{1\}$ ) corresponde ao equilíbrio de Stackelberg aplicado a sistemas de potência linearizados. É importante observar a diferença entre os modelos de equilíbrio aplicados aos sistemas de potência em um mercado competitivo e a formulação matemática geral dos modelos de equilíbrio apresentado no capítulo anterior. Observe-se que, no equilíbrio de Stackelberg para sistemas de potência linearizados, as variáveis duais do subproblema do nível inferior (preço *spot* do sistema) formam parte da função objetivo do problema principal. De acordo com a seção 3.3.2, na formulação tradicional de programação em dois níveis somente variáveis primais do problema formam parte da função objetivo do problema do nível superior. Uma formulação equivalente para o equilíbrio de Stackelberg (4.1) pode ser obtida, substituindo-se o subproblema do nível inferior pela sua formulação primal-dual equivalente (ver [26]). Através de manipulação algébrica, é possível transformar (4.1) em um tradicional problema de programação em dois níveis, com o preço *spot* do sistema formando parte das variáveis primais da nova formulação do problema. Para maiores detalhes ver [27].

Na próxima seção será introduzido o problema de equilíbrio de Stackelberg para a representação completa do sistema de potência, modelo AC, onde as equações não lineares que representam a primeira Lei de Kirchoff são incluídas diretamente no conjunto de soluções viáveis.

## 4.2 Equilíbrio de Stackelberg – Fluxo de Potência AC

A representação matemática para a configuração do mercado de energia, com uma única firma formando parte do grupo *líder*, aplicado ao modelo de fluxo de potência AC, define o seguinte problema de dois níveis:

$$\text{Max}_{x,\lambda} f_1(x, \lambda) \quad (4.9)$$

$$\text{s.a } x_l \leq x \leq x_u \quad (4.9a)$$

$$\text{onde } y \text{ é solução de} \quad (4.9b)$$

$$\text{Max}_y f_2(y) \quad (4.9c)$$

$$\text{s.a } g(x, y) = 0 \quad (4.9d)$$

$$h(x, y) \leq 0 \quad (4.9e)$$

Observe que (4.9) pode ser considerado como uma generalização de (4.1), no sentido que será considerada a representação AC da rede, para  $E=\{1\}$  com  $E \setminus 1 = \emptyset$  e  $S=\{2\}$  e onde, sem perda de generalidade, os sub-índices associados às variáveis  $x_E$  não foram incluídos.

As variáveis  $x \in \mathcal{R}^n$ ,  $y \in \mathcal{R}^m$  e  $\lambda \in \mathcal{R}^l$ , onde  $\lambda$  representa o multiplicador de Lagrange (preço *spot* do sistema), associado às restrições de igualdade do problema do grupo *seguidor*. As funções  $f_1: \mathcal{R}^{n+l} \rightarrow \mathcal{R}$  e  $f_2: \mathcal{R}^m \rightarrow \mathcal{R}$  têm por objetivo maximizar o lucro do grupo *líder* e o benefício do grupo *seguidor*, respectivamente. As restrições de igualdade  $g: \mathcal{R}^{n+m} \rightarrow \mathcal{R}^l$  correspondem às equações de balanço da potência ativa e reativa em cada nó da rede. As restrições de desigualdade  $h: \mathcal{R}^{n+m} \rightarrow \mathcal{R}^p$  representam restrições funcionais, como monitoramento de fluxo nos circuitos e restrições de canalização, representando limites físicos e/ou operacionais do sistema. A seguir se apresenta uma descrição detalhada de cada um destes elementos: funções objetivo, variáveis e restrições.

#### □ Função objetivo do grupo *líder*

O objetivo do grupo *líder* será maximizar seu próprio lucro, dadas as restrições de seus próprios componentes (limites de suas fontes geradoras e restrições sobre atendimento à demanda) e o equilíbrio de mercado das firmas menores. As grandes firmas poderão lucrar com a venda de energia a preços altos e a compra a preços baixos, ao valor determinado pelo preço *spot* do sistema. Sua função objetivo pode ser expressada como:

$$f_1(p_{l_1}, p_{g_1}, \lambda) = B_1(p_{l_1}) - \lambda^t p_{l_1} + \lambda^t p_{g_1} - C_1(p_{g_1}) \quad (4.10)$$

onde:

$n$  número de barras do sistema

$p_{l1}$  n-vetor de carga ativa do grupo *líder*

$pg_1$  n-vetor de geração de potência ativa do grupo *líder*

$\lambda$  preço de equilíbrio do mercado, preço *spot*, definido pela variável dual associada à restrição (4.9d)

$B_1(p_{l1})$  função benefício de carga do grupo *líder*

$C_1(pg_1)$  função custo de geração de potência ativa do grupo *líder*

A primeira parcela do lado direito da equação (4.10) ( $B_1(p_{l1}) - \lambda^t p_{l1}$ ), indica o lucro dos centros de demanda, representado pela diferença entre a função benefício de carga e o preço de mercado que eles pagam pelo consumo de energia. Os termos restantes, que contribuem à função objetivo na formulação (4.10) ( $\lambda^t pg_1 - C_1(pg_1)$ ), representam o lucro das unidades geradoras (preço de mercado de seus produtos menos custos de produção).

□ Restrições de canalização do grupo *líder*

$$pg_{1,\min} \leq pg_1 \leq pg_{1,\max}$$

$$pl_{1,\min} \leq p_{l1} \leq pl_{1,\max}$$

onde:

$pg_{1,\min}$  n-vetor de geração de potência ativa mínima do grupo *líder*

$pg_{1,\max}$  n-vetor de geração de potência ativa máxima do grupo *líder*

$pl_{1,\min}$  n-vetor de carga ativa mínima do grupo *líder*

$pl_{1,\max}$  n-vetor de carga ativa máxima do grupo *líder*

□ Função objetivo do grupo *seguidor*

O problema do grupo *seguidor* pode ser considerado como um caso particular de um fluxo de potência ótimo AC, onde as variáveis dos integrantes do grupo *líder* são parâmetros conhecidos. Seus integrantes não têm controle do preço de mercado, e seu objetivo será a maximização da função que represente o benefício econômico de seus integrantes, representada por:

$$f_2(p_{l2}, pg_2) = B_2(p_{l2}) - C_2(pg_2)$$

onde:

$pl_2$  n-vetor de carga ativa do grupo *seguidor*

$pg_2$  n-vetor de geração de potência ativa do grupo *seguidor*

$B_2(pl_2)$  função benefício de carga do grupo *seguidor*

$C_2(pg_2)$  função custo de geração de potência ativa do grupo *seguidor*

Os integrantes do segundo nível receberam pelos seus produtos ao valor de mercado, determinado pelo custo marginal de curto prazo (ou preço *spot* do sistema). Podemos observar que, para um determinado valor do preço de mercado  $\lambda$ , o lucro das unidades geradores resulta  $\lambda^t pg_2 - C_2(pg_2)$ , enquanto para as barras de carga teremos o lucro representado por  $B_2(pl_2) - \lambda^t pl_2$ . Para os integrantes do grupo *seguidor*, a maximização do benefício econômico equivale à maximização dos seus lucros, para um preço de mercado  $\lambda$  predeterminado.

□ Restrições de igualdade do grupo *seguidor*

As equações básicas do problema de fluxo de potência correspondem à Primeira Lei de Kirchhoff que estabelece que a potência líquida injetada em cada nó da rede deve ser igual à soma das potências nos componentes internos que tem o nó especificado como um de seus extremos. Isto corresponde a impor a conservação das potências ativa e reativa em cada nó da rede e pode ser representado matematicamente como a seguir:

□ Equações de Balanço de Potência Ativa

$$\sum_{j=1,n} p(i,j) = pg_2(i) - pl_2(i) + pg_1(i) - pl_1(i) \quad \forall i=1,\dots,n$$

□ Equações de Balanço de Potência Reativa

$$\sum_{j=1,n} q(i,j) = qg_2(i) - ql_2(i) + qg_1(i) - ql_1(i) + V^2(i)bsh(i) \quad \forall i=1,\dots,n$$

onde:

$p(i,j)$  ij-ésima componente da matriz  $n \times n$  de fluxo ativo associado ao circuito, interligando a barra  $i$  à barra  $j$ . Assume-se  $p(i,j)=0$ , na inexistência do circuito

$pg_2(i)$  i-ésima componente do n-vetor de geração de potência ativa do grupo *seguidor*

- $p_{l2}(i)$   $i$ -ésima componente do n-vetor de carga ativa do grupo *seguidor*
- $pg_1(i)$   $i$ -ésima componente do n-vetor de geração de potência ativa do grupo *líder*
- $pl_1(i)$   $i$ -ésima componente do n-vetor de carga ativa do grupo *líder*
- $q(i,j)$   $ij$ -ésima componente da matriz  $n \times n$  de fluxo reativo associado ao circuito, interligando a barra  $i$  à barra  $j$ . Assume-se  $q(i,j)=0$ , na inexistência do circuito
- $qg_2(i)$   $i$ -ésima componente do n-vetor de geração de potência reativa do grupo *seguidor*
- $ql_2(i)$   $i$ -ésima componente do n-vetor de carga reativa do grupo *seguidor*
- $qg_1(i)$   $i$ -ésima componente do n-vetor de geração de potência reativa do grupo *líder*
- $ql_1(i)$   $i$ -ésima componente do n-vetor de carga reativa do grupo *líder*
- $V(i)$   $i$ -ésima componente do n-vetor módulo de tensão
- $bsh(i)$   $i$ -ésima componente do n-vetor de shunt

Os elementos das  $n \times n$  matrizes de fluxos ativos e reativos interligando, as barras do sistema, obedecem as seguintes equações:

$$p(i, j) = a^2(i, j)V^2(i)g(i, j) - a(i, j)V(i)V(j)[g(i, j)\cos(\Delta\theta(i, j) + \varphi(i, j)) + b(i, j)\text{sen}(\Delta\theta(i, j) + \varphi(i, j))]$$

$$p(j, i) = V^2(j)g(i, j) - a(i, j)V(i)V(j)[g(i, j)\cos(\Delta\theta(i, j) + \varphi(i, j)) - b(i, j)\text{sen}(\Delta\theta(i, j) + \varphi(i, j))]$$

$$q(i, j) = -a^2(i, j)V^2(i)[b(i, j) + b_{sh}(i, j)] - a(i, j)V(i)V(j)[g(i, j)\text{sen}(\Delta\theta(i, j) + \varphi(i, j)) - b(i, j)\cos(\Delta\theta(i, j) + \varphi(i, j))]$$

$$q(j, i) = -V^2(i)[b(i, j) + b_{sh}(i, j)] + a(i, j)V(i)V(j)[g(i, j)\text{sen}(\Delta\theta(i, j) + \varphi(i, j)) + b(i, j)\cos(\Delta\theta(i, j) + \varphi(i, j))]$$

onde:

$\theta(i)$   $i$ -ésima componente do n-vetor ângulo de tensão

$\Delta\theta(i, j)$   $ij$ -ésima componente da matriz  $n \times n$  de diferenças angulares  $\theta_i - \theta_j$

$a(i,j)$   $ij$ -ésima componente da matriz  $n \times n$  que define o tap do transformador associado ao circuito interligando a barra  $i$  à barra  $j$ . Assume-se  $a(i,j)=0$ , na inexistência do circuito

$\varphi(i,j)$   $ij$ -ésima componente da matriz  $n \times n$  que define o ângulo de defasamento associado ao circuito interligando a barra  $i$  à barra  $j$ . Assume-se  $\varphi(i,j)=0$ , na inexistência do circuito

$g(i,j)$   $ij$ -ésima componente da matriz  $n \times n$  que define a condutância série associada ao circuito interligando a barra  $i$  à barra  $j$ . Assume-se  $g(i,j)=0$ , na inexistência do circuito

$b(i,j)$   $ij$ -ésima componente da matriz  $n \times n$  que define a susceptância série associada ao circuito interligando a barra  $i$  à barra  $j$ . Assume-se  $b(i,j)=0$ , na inexistência do circuito

$b_{sh}(i,j)$   $ij$ -ésima componente da matriz  $n \times n$  que define a susceptância shunt associada ao circuito interligando a barra  $i$  à barra  $j$ . Assume-se  $b_{sh}(i,j)=0$ , na inexistência do circuito

□ Restrições de desigualdade do grupo *seguidor*

As restrições de desigualdade correspondem a restrições de canalização nas variáveis e restrições funcionais como, por exemplo, a capacidade máxima de transferência nas linhas de transmissão. Estas restrições refletem limites de operação dos equipamentos ou alguma política operativa específica, sendo modeladas como a seguir:

$$V_{\min} \leq V \leq V_{\max}$$

$$pg_{2,\min} \leq pg_2 \leq pg_{2,\max}$$

$$pl_{2,\min} \leq pl_2 \leq pl_{2,\max}$$

$$qg_{2,\min} \leq qg_2 \leq qg_{2,\max}$$

$$ql_{2,\min} \leq ql_2 \leq ql_{2,\max}$$

$$-p_{\max} \leq p \leq p_{\max}$$

onde:

$V_{\min}$	n-vetor módulo de tensão mínima
$V_{\max}$	n-vetor módulo de tensão máxima
$pg_{2,\min}$	n-vetor de geração de potência ativa mínima do grupo <i>seguidor</i>
$pg_{2,\max}$	n-vetor de geração de potência ativa máxima do grupo <i>seguidor</i>
$pl_{2,\min}$	n-vetor de carga ativa mínima do grupo <i>seguidor</i>
$pl_{2,\max}$	n-vetor de carga ativa máxima do grupo <i>seguidor</i>
$qg_{2,\min}$	n-vetor de geração de potência reativa mínima do grupo <i>seguidor</i>
$qg_{2,\max}$	n-vetor de geração de potência reativa máxima do grupo <i>seguidor</i>
$ql_{2,\min}$	n-vetor de carga reativa mínima do grupo <i>seguidor</i>
$ql_{2,\max}$	n-vetor de carga reativa máxima do grupo <i>seguidor</i>
$p_{\max}$	matriz nxn de capacidade máxima nos circuitos

O algoritmo apresentado no próximo capítulo propõe um método de solução para o problema de equilíbrio de Stackelberg aplicado ao modelo AC de sistemas de potência.

No decorrer desta pesquisa, várias estratégias foram implementadas para a resolução do problema acima, começando pelo desenvolvimento de dois algoritmos de pontos interiores para resolvê-lo. O primeiro deles correspondeu à implementação direta, em um tradicional algoritmo de pontos interiores primal-dual (ver [28], [29] e [30]), da *formulação de K.K.T.* (3.19). Foi comprovada uma certa instabilidade numérica do algoritmo, devido à não regularidade do conjunto de folgas complementares, na proximidade da solução ótima. Uma alternativa para evitar a inclusão direta de tais condições, no conjunto de restrições que definem as soluções viáveis do problema, foi o desenvolvimento de um algoritmo tipo barreira logarítmica (ver [31]). As restrições de canalização de cada subproblema foram penalizadas nas suas respectivas funções objetivo (grupo *líder* e grupo *seguidor*). Esta abordagem introduz parâmetros de penalização diferenciados, nas funções objetivo de cada subgrupo. A maior dificuldade encontrada neste método foi a atualização destes

parâmetros. A sua interdependência não parece trivial e pode ocasionar problemas numéricos, levando à divergência do algoritmo.

A utilização de dois reconhecidos pacotes de programação não linear (um algoritmo de pontos interiores primal-dual [32] e um método Lagrangeano aumentado [19]-[33]), submetidos à resolução direta da *formulação de K.K.T.* de nosso problema de dois níveis, formou parte de uma segunda etapa de nossa pesquisa. Os resultados obtidos a partir deles confirmaram nossa experiência, representada por uma certa instabilidade numérica na proximidade da fronteira definida pelas restrições de canalização do problema do grupo *seguidor*. A terceira etapa e última deste trabalho correspondeu ao desenvolvimento do algoritmo de *pontos não interiores*, apresentado no próximo capítulo, proposta desta dissertação de tese. A introdução de perturbações no lado direito das condições de folga complementares do problema do grupo *seguidor*, acompanhadas de penalizações na função objetivo do problema do grupo *líder*, permitem evitar a não regularidade intrínseca da *formulação de K.K.T.* do problema de dois níveis.

## CAPÍTULO 5

### 5 UM ALGORITMO DE SOLUÇÃO PARA O EQUILÍBRIO DE STACKELBERG APLICADO AO MODELO AC DE SISTEMAS DE POTÊNCIA

Este capítulo representa a base central desta tese, e nele será apresentado um algoritmo de solução para a *formulação de K.K.T.* do problema de equilíbrio de Stackelberg, aplicado à representação não linear AC de sistemas de potência. O algoritmo proposto pode ser classificado, em primeiro lugar, como um algoritmo de *pontos inviáveis*, uma vez que o processo iterativo define pontos que estão fora da superfície definida pelo conjunto de restrições de igualdade. As restrições de canalização, formando parte das condições de folga complementares, e tratadas através da penalização de Fischer-Burmeister, não são explicitamente impostas durante o processo iterativo, sendo automaticamente satisfeitas na convergência. Isto introduz outra peculiaridade ao algoritmo, classificando-o como um método de *pontos não interiores*. Por último, ele pode ser incluído dentro da classe dos *métodos de penalizações*, levando em consideração que as condições de folgas complementares do subproblema do nível inferior serão relaxadas e penalizadas na função objetivo do problema do nível superior.

O capítulo começa apresentando o desenvolvimento analítico do método de solução, a partir da *formulação de K.K.T. penalizada* do problema de dois níveis, substituindo as condições de folgas complementares do problema do grupo *seguidor* pela penalização equivalente de Fischer-Burmeister. As condições de otimalidade deste problema são estabelecidas e o seu método de solução descrito em detalhes.

#### 5.1 Modelo Matemático

##### 5.1.1 Formulação de K.K.T. - Equilíbrio de Stackelberg

Acompanhando o desenvolvimento do capítulo anterior (seção 4.2 – formulação (4.9)), o equilíbrio de Stackelberg aplicado ao modelo AC de sistemas de potência pode ser modelado pelo seguinte problema de programação em dois níveis:

$$\text{Min}_{x,\lambda} f_1(x, \lambda) \quad (5.1)$$

$$\text{s.a } x_l \leq x \leq x_u \quad (5.1a)$$

onde  $\lambda$  é solução de (5.1b)

$$\text{Min}_y f_2(y) \quad (5.1c)$$

$$\text{s.a } z(x, y) = 0 \quad (5.1d)$$

$$y_l \leq y \leq y_u \quad (5.1e)$$

onde  $x \in \mathfrak{R}^n$ ,  $y \in \mathfrak{R}^m$  e  $\lambda \in \mathfrak{R}^1$ , sendo  $\lambda$  o multiplicador de Lagrange associado às restrições de igualdade  $z: \mathfrak{R}^{n+m} \rightarrow \mathfrak{R}^1$ , do problema do segundo nível. Sem perda de generalidade, o problema é expresso em termos de minimizações. Manipulações algébricas, acompanhadas da inclusão de variáveis de folga, permitem descrever as restrições do problema do grupo *seguidor* (composto originalmente por igualdades/desigualdades não lineares e restrições de canalização), em um conjunto formado somente por restrições de igualdade e de canalização.

Seja o primeiro passo para a obtenção da *formulação de K.K.T.* de (5.1), a definição do Lagrangeano do problema do segundo nível (5.1c-e):

$$L_2(y, \lambda, \pi_{1y}, \pi_{2y}) = f_2(y) + \lambda^t z(x, y) - \pi_{1y}^t (y - y_l) - \pi_{2y}^t (y_u - y) \quad (5.2)$$

com  $\pi_{1y}$  e  $\pi_{2y} \in \mathfrak{R}^m$ . Da teoria de programação não linear [34], sabe-se que  $(y, \lambda, \pi_{1y}, \pi_{2y})$  é um ponto estacionário do problema do grupo *seguidor*, se satisfaz as seguintes condições de otimalidade de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker:

$$(\nabla_y L_2) : \partial_y f_2(y) + \lambda^t \nabla_y z(x, y) - \pi_{1y}^t + \pi_{2y}^t = 0 \quad (5.3)$$

$$(\nabla_\lambda L_2) : z(x, y) = 0 \quad (5.4)$$

$$\pi_{1y}^t (y - y_l) = 0 \quad (5.5)$$

$$\pi_{1y} \geq 0, \quad y - y_l \geq 0 \quad (5.6)$$

$$\pi_{2y}^t (y_u - y) = 0 \quad (5.7)$$

$$\pi_{2y} \geq 0, \quad y_u - y \geq 0 \quad (5.8)$$

sendo as restrições (5.5)-(5.8) conhecidas como condições de folgas complementares.

Por substituição direta de (5.3)-(5.8) em (5.1c-e) obtém-se a *formulação de K.K.T.* para o problema de dois níveis (5.1). Analiticamente:

$$\text{Min}_{x,\lambda} f_1(x, \lambda) \quad (5.9)$$

$$\text{s.a } x_l \leq x \leq x_u \quad (5.9a)$$

$$\partial_y f_2(y) + \lambda^t \nabla_y z(x, y) - \pi_{1y}^t + \pi_{2y}^t = 0 \quad (5.9b)$$

$$z(x, y) = 0 \quad (5.9c)$$

$$\pi_{1y}^t (y - y_l) = 0 \quad (5.9d)$$

$$\pi_{1y} \geq 0, \quad y - y_l \geq 0 \quad (5.9e)$$

$$\pi_{2y}^t (y_u - y) = 0 \quad (5.9f)$$

$$\pi_{2y} \geq 0, \quad y_u - y \geq 0 \quad (5.9g)$$

A obtenção de uma formulação equivalente do problema (5.9), utilizando funções de mérito (penalização de Fischer-Burmeister) para reescrever as condições de folgas complementares (5.9d-g), será detalhada na próxima seção.

### 5.1.2 Penalização de Fischer-Burmeister

O conjunto de restrições de folgas complementares (5.9d-e) pode ser desmembrado componente a componente como:

$$(\pi_{1y})_j (y - y_l)_j = 0, \quad (\pi_{1y})_j \geq 0 \text{ e } (y - y_l)_j \geq 0 \quad \forall j=1, \dots, m \quad (5.10)$$

Aplicando a penalização de Fischer-Burmeister relaxada (ver seção 3.5.1.1), este conjunto de equações pode ser aproximado por:

$$\begin{aligned} (\pi_{1y})_j + (y - y_l)_j - \sqrt{(\pi_{1y})_j^2 + (y - y_l)_j^2} + \\ p_y \max((\pi_{1y})_j, 0) \max((y - y_l)_j, 0) = \varepsilon_{1j} \end{aligned} \quad \forall j=1, \dots, m \quad (5.11)$$

onde,  $p_y > 0$  é um parâmetro dado e  $\varepsilon_{1j} \in \mathfrak{R} \quad \forall j=1, \dots, m$ . Por conveniência de notação, reescrevemos (5.11) como:

$$\begin{aligned} (\pi_{1y})_j + (y - y_l)_j - \sqrt{(\pi_{1y})_j^2 + (y - y_l)_j^2} + \\ (p_{1y})_j (\pi_{1y})_j (y - y_l)_j = \varepsilon_{1j} \end{aligned} \quad \forall j=1, \dots, m \quad (5.12)$$

onde:

$$(p_{1y})_j = \begin{cases} p_y & \text{se } (\pi_{1y})_j \geq 0 \text{ e } (y - y_l)_j \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall j=1, \dots, m$$

Seguindo o mesmo raciocínio de (5.10)-(5.12) para o conjunto de equações (5.9f-g), obtém-se uma formulação relaxada para as restrições de folgas complementares, associadas ao limite superior na variável  $y$ :

$$\begin{aligned} (\pi_{2y})_j + (y_u - y)_j - \sqrt{(\pi_{2y})_j^2 + (y_u - y)_j^2} + & \quad \forall j=1, \dots, m \\ (p_{2y})_j (\pi_{2y})_j (y_u - y)_j = \varepsilon_{2j} & \quad (5.13) \end{aligned}$$

onde:

$$(p_{2y})_j = \begin{cases} p_y & \text{se } (\pi_{2y})_j \geq 0 \text{ e } (y_u - y)_j \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \forall j=1, \dots, m$$

e  $\varepsilon_{2j} \in \mathfrak{R}$ ,  $\forall j=1, \dots, m$ .

Estas penalizações nos permitem transformar um conjunto formado por restrições de igualdade e de canalização, em um conjunto somente com restrições de igualdade. Substituindo-se (5.9d-g) por (5.12)-(5.13), obtém-se a seguinte formulação que denominaremos *formulação de K.K.T. penalizada relaxada*:

$$\text{Min}_{x, \lambda} f_1(x, \lambda) \quad (5.14)$$

$$\text{s.a } x_l \leq x \leq x_u \quad (5.14a)$$

$$\partial_y f_2(y) + \lambda^t \nabla_y z(x, y) - \pi_{1y}^t + \pi_{2y}^t = 0 \quad (5.14b)$$

$$z(x, y) = 0 \quad (5.14c)$$

$$\begin{aligned} (\pi_{1y})_j + (y - y_l)_j - \sqrt{(\pi_{1y})_j^2 + (y - y_l)_j^2} + & \quad \forall j=1, \dots, m \\ (p_{1y})_j (\pi_{1y})_j (y - y_l)_j = \varepsilon_{1j} & \quad (5.14d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\pi_{2y})_j + (y_u - y)_j - \sqrt{(\pi_{2y})_j^2 + (y_u - y)_j^2} + & \quad \forall j=1, \dots, m \\ (p_{2y})_j (\pi_{2y})_j (y_u - y)_j = \varepsilon_{2j} & \quad (5.14e) \end{aligned}$$

a qual pode ser escrita também como:

$$\text{Min}_{x, \lambda} f_1(x, \lambda) \quad (5.15)$$

$$\text{s.a } x_l \leq x \leq x_u \quad (5.15a)$$

$$\partial_y f_2(y) + \lambda^t \nabla_y z(x, y) - \pi_{1y}^t + \pi_{2y}^t = 0 \quad (5.15b)$$

$$z(x, y) = 0 \quad (5.15c)$$

$$\pi_{1y} + (y - y_l) - Q_m(\pi_{1y}, y - y_l) + \Pi_{1y}(Y - Y_l)p_{1y} = \varepsilon_1 \quad (5.15d)$$

$$\pi_{2y} + (y_u - y) - Q_m(\pi_{2y}, y_u - y) + \Pi_{2y}(Y_u - Y)p_{2y} = \varepsilon_2 \quad (5.15e)$$

onde:

$Q_m(a, b)$  define um  $m$ -vetor, dados  $a$  e  $b \in \mathfrak{R}^m$ , com componentes definidas por  
 $(Q_y(a, b))_j = \sqrt{a_j^2 + b_j^2} \quad \forall j=1, \dots, m$

$\Pi_{1y}$  matriz diagonal  $m \times m$  com elementos diagonais iguais a  $(\pi_{1y})_j \quad \forall j=1, \dots, m$

$(Y - Y_l)$  matriz diagonal  $m \times m$  com elementos diagonais iguais a  $(y - y_l)_j \quad \forall j=1, \dots, m$

$\Pi_{2y}$ : matriz diagonal  $m \times m$  com elementos diagonais iguais a  $(\pi_{2y})_j \quad \forall j=1, \dots, m$

$(Y_u - Y)$  matriz diagonal  $m \times m$  com elementos diagonais iguais a  $(y_u - y)_j \quad \forall j=1, \dots, m$

$\varepsilon_1$   $m$ -vetor que define, componente a componente, as relaxações das condições de folgas complementares associadas ao limite inferior em  $y$

$\varepsilon_2$   $m$ -vetor que define, componente a componente, as relaxações das condições de folgas complementares associadas ao limite superior em  $y$

O desenvolvimento de (5.1) a (5.15) permitiu transformar um problema com ordem hierárquica preestabelecida (5.1), em um tradicional problema de otimização. Na próxima seção se estabelecem as condições de otimalidade de primeira ordem para esta *formulação de K.K.T. penalizada relaxada*, com os associados às perturbações das condições de folga complementares ( $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ ), penalizados na função objetivo do problema do nível superior.

### 5.1.3 Condições de Otimalidade

Seja, por conveniência, o problema de dois níveis (5.15) reproduzido a seguir.

$$\text{Min}_{x, \lambda} f_1(x, \lambda) \quad (5.16)$$

$$\text{s.a } z(x, y) = 0 \quad (5.16a)$$

$$\partial_y f_2(y) + \lambda^t \nabla_y z(x, y) - \pi_{1y}^t + \pi_{2y}^t = 0 \quad (5.16b)$$

$$\pi_{1y} + (y - y_l) - Q_m(\pi_{1y}, y - y_l) + \Pi_{1y}(Y - Y_l)p_{1y} - \varepsilon_1 = 0 \quad (5.16c)$$

$$\pi_{2y} + (y_u - y) - Q_m(\pi_{2y}, y_u - y) + \Pi_{2y}(Y_u - Y)p_{2y} - \varepsilon_2 = 0 \quad (5.16d)$$

$$x - x_l \geq 0 \quad (5.16e)$$

$$x_u - x \geq 0 \quad (5.16f)$$

Observe-se que uma solução estacionária para o problema (5.16) equivalerá a uma solução para (5.9) quando  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ . Para atingir tal objetivo, penalizações associadas às perturbações  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  serão incluídas na função objetivo do problema do nível superior, transformando (5.16) em uma seqüência de subproblemas parametrizados em  $t$ , como a seguir:

$$\text{Min}_{x, \lambda} f_1(x, \lambda) + t(\varepsilon_1^t \varepsilon_1 + \varepsilon_2^t \varepsilon_2) \quad (5.17)$$

$$\text{s.a } z(x, y) = 0 \quad (5.17a)$$

$$\partial_y f_2(y) + \lambda^t \nabla_y z(x, y) - \pi_{1y}^t + \pi_{2y}^t = 0 \quad (5.17b)$$

$$\pi_{1y} + (y - y_l) - Q_m(\pi_{1y}, y - y_l) + \Pi_{1y}(Y - Y_l)p_{1y} - \varepsilon_1 = 0 \quad (5.17c)$$

$$\pi_{2y} + (y_u - y) - Q_m(\pi_{2y}, y_u - y) + \Pi_{2y}(Y_u - Y)p_{2y} - \varepsilon_2 = 0 \quad (5.17d)$$

$$x - x_l \geq 0 \quad (5.17e)$$

$$x_u - x \geq 0 \quad (5.17f)$$

onde  $t > 0$  é um parâmetro dado.

Seja o Lagrangeano do problema (5.17) definido por:

$$L_1(x, y, \lambda, \pi_{1y}, \pi_{2y}, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \pi_{1x}, \pi_{2x}, \varepsilon_1, \varepsilon_2) = \quad (5.18)$$

$$f_1(x, \lambda) + t(\varepsilon_1^t \varepsilon_1 + \varepsilon_2^t \varepsilon_2)$$

$$- \beta_1^t z(x, y)$$

$$- \beta_2^t [\partial_y^t f_2(y) + \nabla_y^t z(x, y) \lambda - \pi_{1y} + \pi_{2y}]$$

$$- \beta_3^t [\pi_{1y} + (y - y_l) - Q_m(\pi_{1y}, y - y_l) + \Pi_{1y}(Y - Y_l)p_{1y} - \varepsilon_1]$$

$$- \beta_4^t [\pi_{2y} + (y_u - y) - Q_m(\pi_{2y}, y_u - y) + \Pi_{2y}(Y_u - Y)p_{2y} - \varepsilon_2]$$

$$-\pi_{1x}^t(x - x_1) - \pi_{2x}^t(x_u - x)$$

onde  $\beta_1 \in \mathfrak{R}^1$ ,  $\beta_2 \in \mathfrak{R}^m$ ,  $\beta_3 \in \mathfrak{R}^m$ ,  $\beta_4 \in \mathfrak{R}^m$ ,  $\pi_{1x} \in \mathfrak{R}^n$ ,  $\pi_{2x} \in \mathfrak{R}^n$ .

Seja  $(x, y, \lambda, \pi_{1y}, \pi_{2y}, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \pi_{1x}, \pi_{2x}, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  um ponto estacionário de (5.17), as seguintes condições de otimalidade de primeira ordem devem ser satisfeitas:

$$(\partial_x L_1) : \partial_x f_1(x, \lambda) - \beta_1^t \nabla_x z(x, y) - \beta_2^t \lambda^t \nabla_{yx}^2 z(x, y) - \pi_{1x}^t + \pi_{2x}^t = 0 \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} (\partial_y L_1) : & -\beta_1^t \nabla_y z(x, y) \\ & -\beta_2^t [\partial_y^2 f_2(y) + \lambda^t \nabla_y^2 z(x, y)] \\ & -\beta_3^t [I_m - \nabla_y Q_m(\pi_{1y}, y - y_1) + \Pi_{1y} P_{1y}] \\ & -\beta_4^t [-I_m - \nabla_y Q_m(\pi_{2y}, y_u - y) - \Pi_{2y} P_{2y}] = 0 \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} (\partial_\lambda L_1) : & \partial_\lambda f_1(x, \lambda) \\ & -\beta_2^t \nabla_y^t z(x, y) = 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} (\partial_{\pi_{1y}} L_1) : & \beta_2^t \\ & -\beta_3^t [I_m - \nabla_{\pi_{1y}} Q_m(\pi_{1y}, y - y_1) + (Y - Y_1) P_{1y}] = 0 \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} (\partial_{\pi_{2y}} L_1) : & -\beta_2^t \\ & -\beta_4^t [I_m - \nabla_{\pi_{2y}} Q_m(\pi_{2y}, y_u - y) + (Y_u - Y) P_{2y}] = 0 \end{aligned} \quad (5.23)$$

$$(\partial_{\beta_1} L_1) : -z(x, y) = 0 \quad (5.24)$$

$$(\partial_{\beta_2} L_1) : -[\partial_y^t f_2(y) + \nabla_y^t z(x, y) \lambda - \pi_{1y} + \pi_{2y}] = 0 \quad (5.25)$$

$$\begin{aligned} (\partial_{\beta_3} L_1) : & -[\pi_{1y} + (y - y_1) - Q_m(\pi_{1y}, y - y_1) + \Pi_{1y} (Y - Y_1) p_{1y} \\ & - \varepsilon_1] = 0 \end{aligned} \quad (5.26)$$

$$\begin{aligned} (\partial_{\beta_4} L_1) : & -[\pi_{2y} + (y_u - y) - Q_m(\pi_{2y}, y_u - y) + \Pi_{2y} (Y_u - Y) p_{2y} \\ & - \varepsilon_2] = 0 \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$(\partial_{\varepsilon_1} L_1) : 2t\varepsilon_1 + \beta_3 = 0 \quad (5.28)$$

$$(\partial_{\varepsilon_2} L_1) : 2t\varepsilon_2 + \beta_4 = 0 \quad (5.29)$$

$$\pi_{1x}^t(x - x_1) = 0, \pi_{1x} \geq 0 \text{ e } (x - x_1) \geq 0 \quad (5.30)$$

$$\pi_{2x}^t(x_u - x) = 0, \pi_{2x} \geq 0 \text{ e } (x_u - x) \geq 0 \quad (5.31)$$

onde:

- $I_m$  matriz identidade  $m \times m$   
 $P_{1y}$  matriz diagonal  $m \times m$  com elementos diagonais  $(p_{1y})_j \forall j=1, \dots, m$   
 $P_{2y}$  matriz diagonal  $m \times m$  com elementos diagonais  $(p_{2y})_j \forall j=1, \dots, m$

As restrições (5.30)-(5.31) representam as condições de folgas complementares, devido à presença das restrições de canalização do problema do grupo *líder*. Da utilização de funções de mérito, seguindo um procedimento análogo ao tratamento das condições de folgas complementares do subproblema do nível inferior (ver seção 5.1.2), obtém-se a penalização de Fischer-Burmeister para (5.30)-(5.31), definidas, respectivamente, por  $H_1$  e  $H_2$  a seguir:

$$\begin{aligned}
 H_1(x, \pi_{1x}) &= \pi_{1x} + (x - x_l) - Q_u(\pi_{1x}, x - x_l) + \\
 &\quad \Pi_{1x}(X - X_l)p_{1x} = 0
 \end{aligned} \tag{5.32}$$

$$\begin{aligned}
 H_2(x, \pi_{2x}) &= \pi_{2x} + (x_u - x) - Q_u(\pi_{2x}, x_u - x) + \\
 &\quad \Pi_{2x}(X_u - X)p_{2x} = 0
 \end{aligned} \tag{5.33}$$

onde:

- $\Pi_{1x}$  matriz diagonal  $n \times n$  com elementos diagonais iguais a  $(\pi_{1x})_i \forall i=1, \dots, n$   
 $(X-X_l)$  matriz diagonal  $n \times n$  com elementos diagonais iguais a  $(x-x_l)_i \forall i=1, \dots, n$   
 $\Pi_{2x}$  matriz diagonal  $n \times n$  com elementos diagonais iguais a  $(\pi_{2x})_i \forall i=1, \dots, n$   
 $(X_u-X)$  matriz diagonal  $n \times n$  com elementos diagonais iguais a  $(x_u-x)_i \forall i=1, \dots, n$   
 $p_x$  um parâmetro  $> 0$  dado

$$p_{1x} \text{ com cada componente igual a } (p_{1x})_i = \begin{cases} p_x & \text{se } (\pi_{1x})_i \geq 0 \text{ e } (x - x_l)_i \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$\forall i=1, \dots, n$

$$p_{2x} \text{ com cada componente igual a } (p_{2x})_i = \begin{cases} p_x & \text{se } (\pi_{2x})_i \geq 0 \text{ e } (x_u - x)_i \geq 0 \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$\forall i=1, \dots, n$

Substituindo (5.30)-(5.31) respectivamente por (5.32)-(5.33), obtém-se a seguinte formulação equivalente das condições de otimalidade de primeira ordem para o problema (5.17):

$$(\partial_x L_1) : \partial_x f_1(x, \lambda) - \beta_1^t \nabla_x z(x, y) - \beta_2^t \lambda^t \nabla_{yx}^2 z(x, y) - \pi_{1x}^t + \pi_{2x}^t = 0 \tag{5.34}$$

$$\begin{aligned}
(\partial_y L_1) : & -\beta_1^t \nabla_y z(x, y) \\
& -\beta_2^t [\partial_y^2 f_2(y) + \lambda^t \nabla_y^2 z(x, y)]
\end{aligned} \tag{5.35}$$

$$\begin{aligned}
& -\beta_3^t [I_m - \nabla_y Q_m(\pi_{1y}, y - y_l) + \Pi_{1y} P_{1y}] \\
& -\beta_4^t [-I_m - \nabla_y Q_m(\pi_{2y}, y_u - y) - \Pi_{2y} P_{2y}] = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\partial_\lambda L_1) : & \partial_\lambda f_1(x, \lambda) \\
& -\beta_2^t \nabla_y^t z(x, y) = 0
\end{aligned} \tag{5.36}$$

$$\begin{aligned}
(\partial_{\pi_{1y}} L_1) : & \beta_2^t \\
& -\beta_3^t [I_m - \nabla_{\pi_{1y}} Q_m(\pi_{1y}, y - y_l) + (Y - Y_l) P_{1y}] = 0
\end{aligned} \tag{5.37}$$

$$\begin{aligned}
(\partial_{\pi_{2y}} L_1) : & -\beta_2^t \\
& -\beta_4^t [I_m - \nabla_{\pi_{2y}} Q_m(\pi_{2y}, y_u - y) + (Y_u - Y) P_{2y}] = 0
\end{aligned} \tag{5.38}$$

$$(\partial_{\beta_1} L_1) : -z(x, y) = 0 \tag{5.39}$$

$$(\partial_{\beta_2} L_1) : -[\partial_y^t f_2(y) + \nabla_y^t z(x, y) \lambda - \pi_{1y} + \pi_{2y}] = 0 \tag{5.40}$$

$$\begin{aligned}
(\partial_{\beta_3} L_1) : & -[\pi_{1y} + (y - y_l) - Q_m(\pi_{1y}, y - y_l) + \Pi_{1y} (Y - Y_l) p_{1y} \\
& - \varepsilon_1] = 0
\end{aligned} \tag{5.41}$$

$$\begin{aligned}
(\partial_{\beta_4} L_1) : & -[\pi_{2y} + (y_u - y) - Q_m(\pi_{2y}, y_u - y) + \Pi_{2y} (Y_u - Y) p_{2y} \\
& - \varepsilon_2] = 0
\end{aligned} \tag{5.42}$$

$$(\partial_{\varepsilon_1} L_1) : 2t\varepsilon_1 + \beta_3 = 0 \tag{5.43}$$

$$(\partial_{\varepsilon_2} L_1) : 2t\varepsilon_2 + \beta_4 = 0 \tag{5.44}$$

$$\begin{aligned}
H_1(x, \pi_{1x}) : & \pi_{1x} + (x - x_l) - Q_n(\pi_{1x}, x - x_l) + \\
& \Pi_{1x} (X - X_l) p_{1x} = 0
\end{aligned} \tag{5.45}$$

$$\begin{aligned}
H_2(x, \pi_{2x}) : & \pi_{2x} + (x_u - x) - Q_n(\pi_{2x}, x_u - x) + \\
& \Pi_{2x} (X_u - X) p_{2x} = 0
\end{aligned} \tag{5.46}$$

Uma solução do sistema de equações acima, para  $t \geq 0$  dado, pode ser considerada como uma solução aproximada do problema de equilíbrio de Stackelberg original (5.1). A próxima seção apresenta um método de solução para o problema de dois níveis (5.1), resolvendo iterativamente (5.34)-(5.46), explorando características próprias do sistema elétrico e possibilitando, assim, simplificações da matriz solução.

## 5.2 Método de Solução

O algoritmo proposto encontrará, a cada iteração e para cada parâmetro  $t > 0$ , uma solução aproximada da *formulação de K.K.T. penalizada* (5.17), via uma aproximação de primeira ordem de Newton-Raphson (N-R). A evolução do processo iterativo convergirá (para valores crescentes de  $t$ ) a um ponto estacionário para o problema de dois níveis (5.1). O algoritmo de solução proposto consiste das seguintes etapas:

E1) Inicialização;

E2) Cálculo dos elementos da matriz. Determinação do Jacobiano e resíduos associados ao sistema de equações (5.34)-(5.46);

E3) Resolução do sistema de equações resultante de E2) para o cálculo do vetor de incrementos das variáveis primais e duais;

E4) Busca linear;

E5) Atualização de variáveis e parâmetros;

E6) Teste de Convergência

Se convergiu então

Pare

senão

Volte a E2).

Serão detalhados, a seguir, aspectos estruturais do algoritmo e os principais critérios adotados na sua implementação.

### 5.2.1 Inicialização

As variáveis e parâmetros do problema podem ser classificados nos seguintes grupos: grupo de variáveis primais  $(x, y, \lambda, \pi_{1y}, \pi_{2y})$ , grupo de variáveis duais  $(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \pi_{1x}, \pi_{2x})$ , grupo de variáveis de relaxação  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  e grupo de parâmetros  $(p_x, p_y, t)$ . Os valores iniciais atribuídos às variáveis primais  $x$  e  $y$  são extraídos dos próprios dados da rede elétrica. As variáveis restantes foram inicializadas como  $(\lambda=0, \pi_{1y}=1, \pi_{2y}=1, \beta_1=1, \beta_2=1, \beta_3=1, \beta_4=1, \pi_{1x}=1, \pi_{2x}=1)$ , após exaustivos testes numéricos. Os seguintes valores foram considerados apropriados para a inicialização dos parâmetros:  $p_x=50.0$ ,  $p_y=5.0$  e  $t=50$ . As variáveis de

relaxação  $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  começaram o processo iterativo a partir de:  $\varepsilon_1 = -1/(2t)$  e  $\varepsilon_2 = -1/(2t)$ , com valores dependentes do parâmetro  $t$ .

## 5.2.2 Cálculo dos Elementos da Matriz

Seja o sistema de equações (5.34)-(5.46) representado, de forma geral, por:

$$F(z) = 0 \quad (5.47)$$

onde  $F(z)$  define o conjunto total de restrições e  $z = (x, y, \lambda, \pi_{1y}, \pi_{2y}, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \pi_{1x}, \pi_{2x}, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$  é o vetor de variáveis do problema.

O método de solução é baseado na resolução do sistema de equações (5.47), por uma aproximação linear de primeira ordem de cada um de seus elementos - método de Newton-Raphson. Dado um ponto  $z$ , acha-se um passo incremental  $\Delta z = (\Delta x, \Delta y, \Delta \lambda, \Delta \pi_{1y}, \Delta \pi_{2y}, \Delta \beta_1, \Delta \beta_2, \Delta \beta_3, \Delta \beta_4, \Delta \pi_{1x}, \Delta \pi_{2x}, \Delta \varepsilon_1, \Delta \varepsilon_2)$ , a partir da resolução do seguinte sistema de equações:

$$H(z)\Delta z = -F(z) \quad (5.48)$$

onde  $H(z)$  é definido pelo Jacobiano das restrições que definem (5.47).

Um cálculo detalhado de cada um dos elementos em (5.48), Jacobiano e resíduos das restrições, para o sistema de equações (5.34)-(5.46), é anexado no *Apêndice A*.

## 5.2.3 Resolução do Sistema de Equações

A resolução do sistema de equações (5.48) utiliza uma fatoração da matriz  $H(z)$  baseada em uma estrutura de elementos diagonais, apresentada pela primeira vez por Tinney [35]. Explorando características próprias das restrições que governam os sistemas de potência, as variáveis do sistemas serão agrupadas em blocos diagonais (1x1) (**Light Border**) e blocos diagonais (2x2) (**Heavy Border**), de forma a evitar singularidades. Assim, a estrutura da matriz solução  $H(z)$  pode ser particionada como:

$$H(z) = \begin{bmatrix} \text{LB} & \text{LB}_1 \\ \text{LB}_1^t & \text{HB} \end{bmatrix}$$

onde:

LB e  $\text{LB}_1$  descrevem os elementos da Light Border

HB descreve os elementos da Heavy Border

Baseado neste particionamento, o sistema de equações (5.48) pode ser representado por:

$$\begin{bmatrix} \text{LB} & \text{LB}_1 \\ \text{LB}_1^t & \text{HB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_{\text{LB}} \\ \Delta z_{\text{HB}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F(z_{\text{LB}}) \\ -F(z_{\text{HB}}) \end{bmatrix}$$

onde:

$\Delta z_{\text{LB}}$  vetor de incrementos associado às variáveis de LB;

$\Delta z_{\text{HB}}$  vetor de incrementos associado às variáveis de HB;

$F(z_{\text{LB}})$  resíduo associado às variáveis de LB;

$F(z_{\text{HB}})$  resíduo associado às variáveis de HB;

e resolvido de acordo com as seguintes etapas:

P1) Eliminam-se os elementos abaixo da diagonal, correspondentes a  $\text{LB}_1^t$ ; obtendo-se o seguinte sistema de equações equivalente:

$$\begin{bmatrix} \text{LB} & \text{LB}_1 \\ \phi & \text{HB} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta z_{\text{LB}} \\ \Delta z_{\text{HB}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F(z_{\text{LB}}) \\ -F(z_{\text{HB}}) \end{bmatrix} \quad (5.49)$$

onde:

$$\text{HB} := \text{HB} - (\text{LB}_1^t \text{LB}^{-1} \text{LB}_1)$$

$$F(z_{\text{HB}}) := F(z_{\text{HB}}) - (\text{LB}_1^t \text{LB}^{-1} F(z_{\text{LB}}))$$

P2) Resolve-se o sistema de equações correspondente às linhas da Heavy Border e calculam-se as atualizações de suas variáveis  $\Delta z_{\text{HB}}$ .

Dado que HB é uma matriz simétrica em estrutura, a resolução do subsistema de equações:

$$\text{HB} \Delta z_{\text{HB}} = -F(z_{\text{HB}}) \quad (5.50)$$

em (5.49) é baseada em uma fatoração LU esparsa por blocos (2x2). Seja HB representada por:

$$HB = L_{HB} D_{HB} L_{HB}^t$$

onde  $L_{HB}$  é a matriz triangular inferior formada por blocos (2x2) com diagonal unitária e  $D_{HB}$  é uma matriz diagonal formada por blocos (2x2).

Com esta representação de HB, a resolução do sistema (5.50) pode ser processada nas seguintes etapas:

a) Calcula-se  $y$  tal que  $(L_{HB} D_{HB}) y = -F(z_{HB})$ ;

b) Resolve-se  $L_{HB}^t (\Delta z_{HB}) = y$  por retro substituição.

A ordenação da matriz HB para tal fatoração é baseada no critério de Tinney II, Tinney [35]. Realiza-se uma fatoração simbólica de tal forma que, a cada passo, é escolhida a linha com o menor número de elementos na estrutura montada durante a fatoração.

P3) Calculam-se as atualizações das variáveis integrantes de LB,  $\Delta z_{LB}$ , baseadas nas atualizações de variáveis associadas a linhas de HB, obtidas de P2):

$$\Delta z_{LB} = LB^{-1}(-F(z_{LB}) - LB_1^t \Delta z_{HB})$$

O *Apêndice B* descreve em detalhes este particionamento da matriz, e cada um de seus elementos, para um sistema elétrico com duas barras interligadas através de uma linha de transmissão.

#### 5.2.4 Busca Linear

Apesar da penalização de Fischer-Burmeister garantir, teoricamente, a viabilidade das restrições de canalização na solução do problema (com  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ ), nas aplicações computacionais o controle do tamanho do passo na atualização das variáveis tem mostrado uma maior estabilidade numérica. A busca linear implementada neste trabalho é definida por uma forma simplificada da busca linear de Armijo, aplicada às funções de mérito que modelam as penalizações de Fischer-Burmeister.

### 5.2.4.1 Busca Linear de Armijo

A idéia por trás de toda busca linear é escolher, dado um ponto  $\underline{a}$  e uma direção de incremento  $\underline{\Delta a}$ , o tamanho do passo incremental  $\underline{\alpha}$ , tal que atualizações na forma  $\underline{a} + \underline{\alpha}\underline{\Delta a}$  possibilitem uma maior eficiência na convergência do algoritmo. A regra da busca de Armijo escolhe um passo incremental  $\underline{\alpha}$ , garantindo, em primeiro lugar, que ele não seja muito grande e, em segundo lugar, que ele não seja muito pequeno. Para auxiliar tal objetivo, define-se a seguinte função  $\xi$  em  $\underline{\alpha}$ :

$$\xi(\alpha) = \varphi(\underline{a} + \alpha \underline{\Delta a})$$

onde  $\varphi$  é uma função a ser minimizada.

Será considerado que o passo incremental  $\underline{\alpha}$  não é muito grande se:

$$\xi(\alpha) \leq \xi(0) + \varepsilon \xi'(0)\alpha \quad (5.51)$$

com  $\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ) um valor predefinido.

Em segundo lugar,  $\underline{\alpha}$  obedecerá à imposição de não ser muito pequeno se, multiplicando-o por um valor  $\eta > 1$  (ex.  $\eta=2$ ), garante-se que a restrição (5.51) não seja mais atendida. Esta condição traduz-se analiticamente como:

$$\xi(\eta\alpha) > \xi(0) + \varepsilon \xi'(0)\eta\alpha$$

Nas implementações práticas, simplificações destas regras são desenvolvidas. O passo incremental começa com um valor arbitrário  $\alpha$ ; se ele satisfaz (5.51), então  $\alpha$  é multiplicado (dividido) repetidamente por um valor  $\eta$  ( $\eta=2$  ou  $\eta=10$ , por exemplo) até tal restrição não ser mais satisfeita, sendo escolhido o penúltimo valor de  $\alpha$ .

Na próxima seção define-se a função de mérito  $\varphi$  a ser minimizada, para o caso específico do problema de equilíbrio de Stackelberg em estudo.

### 5.2.4.2 Busca Linear associada à Penalização de Fischer-Burmeister

Baseado na penalização de Fischer-Burmeister, dois grupos de funções de mérito foram introduzidas neste capítulo. O primeiro deles está associado às condições de folga complementares relaxadas do grupo *seguidor* (5.17c-d), e o segundo às condições de folga complementares do grupo *líder* (5.32)-(5.33), reproduzidas por conveniência a seguir:

$$\gamma_1(y, \pi_{1y}, \varepsilon_1) = \pi_{1y} + (y - y_l) - Q_m(\pi_{1y}, y - y_l) + \Pi_{1y}(Y - Y_l)p_{1y} - \varepsilon_1$$

$$\gamma_2(y, \pi_{2y}, \varepsilon_2) = \pi_{2y} + (y_u - y) - Q_m(\pi_{2y}, y_u - y) + \Pi_{2y}(Y_u - Y)p_{2y} - \varepsilon_2$$

$$\chi_1(x, \pi_{1x}) = \pi_{1x} + (x - x_l) - Q_n(\pi_{1x}, x - x_l) + \Pi_{1x}(X - X_l)p_{1x}$$

$$\chi_2(x, \pi_{2x}) = \pi_{2x} + (x_u - x) - Q_n(\pi_{2x}, x_u - x) + \Pi_{2x}(X_u - X)p_{2x}$$

A função  $\varphi$ , que acompanhará a busca linear de Armijo, é definida como a soma das normas quadradas destas funções de mérito. Ela é analiticamente expressa por:

$$\begin{aligned} \varphi(y, \pi_{1y}, \pi_{2y}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, x, \pi_{1x}, \pi_{2x}) = & \| \gamma_1(y, \pi_{1y}, \varepsilon_1) \|^2 + \\ & \| \gamma_2(y, \pi_{2y}, \varepsilon_2) \|^2 + \\ & \| \chi_1(x, \pi_{1x}) \|^2 + \| \chi_2(x, \pi_{2x}) \|^2 \end{aligned}$$

A aplicação do critério de busca de Armijo à função  $\varphi$  é uma peça fundamental no algoritmo de *pontos não interiores* proposto.

### 5.2.5 Atualização de Variáveis e Parâmetros

Uma vez determinado o tamanho do passo ( $\alpha_{bl}$ ) pela busca linear de Armijo, se procede à atualização das variáveis e parâmetros do problema. Dado o vetor de variáveis primais e duais  $\underline{z}$  e seu passo incremental  $\underline{\Delta z}$ , o novo ponto será determinado por:

$$z := z + \alpha_{bl} \Delta z$$

Para garantir a viabilidade das condições de folga complementares do subproblema do grupo *seguidor*, restrições (5.15d-e) com  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ , o parâmetro de penalização  $\underline{t}$  assume valores crescentes durante o processo iterativo, acompanhando o seguinte critério:

Se ( $\alpha_{bl} \geq 0.5$ ) então:

$$t := t + 50/0.5$$

senão:

$$t := t + 50/0.75$$

### 5.2.6 Critério de Convergência

Um ponto  $z=(x,y,\lambda,\pi_{1y},\pi_{2y},\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\pi_{1x},\pi_{2x})$  será considerado uma solução de equilíbrio para o problema de dois níveis (5.1), se o sistema de equações (5.43)-(5.55) é satisfeito para  $(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$  suficientemente pequenos.

Escolhem-se valores de  $\rho$  e  $\tau$  apropriados, tal que os resíduos no lado direito do sistema de equações (5.48)  $(F(z))$  e as relaxações das condições de folgas complementares do problema do grupo *seguidor* ( $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$ ) sejam menores ou iguais a tais tolerâncias.

Em termos do sistema de equações (A.21) (ver apêndice A), estas condições podem ser expressadas analiticamente como:

$$r_{\beta_1} < \rho, r_{\beta_2} < \rho, r_{\beta_3} < \rho \text{ e } r_{\beta_4} < \rho$$

$$\varepsilon_1 < \tau \text{ e } \varepsilon_2 < \tau.$$

Valores apropriados de  $\rho$  e  $\tau$  serão apresentados nos casos exemplos do próximo capítulo.

## CAPÍTULO 6

### 6 RESULTADOS NUMÉRICOS

Neste capítulo serão apresentados resultados numéricos para três diferentes sistemas testes, de pequeno a médio porte, com a finalidade de validar o *algoritmo de pontos não interiores* proposto no Capítulo 5, e mostrar a ação do poder de mercado exercido pelos grandes agentes. Para cada um dos casos exemplos será analisada a evolução do algoritmo e o seu compromisso entre viabilidade e otimalidade.

Cada sistema teste começa pela simulação de um problema de mínimo custo de geração, com todos os seus participantes formando parte do grupo *seguidor*. Um segundo exercício considera que determinados geradores se encontram em uma posição privilegiada no mercado, fazendo parte de grandes companhias geradoras. Os participantes do grupo *lider* tentarão maximizar seu lucro (remuneração – custo de produção), influenciando o preço final do mercado. Mostraremos como, na presença de restrições de transmissão, o poder de mercado pode ainda ser acentuado, levando a uma maior margem de lucro para estes participantes.

Antes de iniciar a análise dos casos exemplo, vejamos algumas considerações computacionais referentes ao algoritmo proposto.

#### 6.1 Aspectos Computacionais

O algoritmo de solução foi desenvolvido na linguagem de programação Fortran 77, utilizando precisão dupla na definição de suas variáveis. Um processador Pentium II de 400 MHz e 64 MB de memória RAM foi utilizado para a obtenção dos resultados.

Acompanhando o algoritmo apresentado do Capítulo 5, seção 5.2, os seguintes aspectos computacionais podem ser destacados.

##### □ Tolerâncias

Durante a evolução do algoritmo, a proximidade  $\epsilon$  das variáveis a seus limites é reduzida gradualmente, levando em consideração o comportamento da função de busca linear de Armijo. Inicialmente  $\epsilon$  assume um valor igual a  $5.0e-03$ , e vai diminuindo a

cada iteração, até atingir seu valor mínimo na proximidade da convergência,  $\varepsilon=5.0e-08$ .

#### □ Busca Linear

O tamanho do passo  $\alpha_{bl}$  é determinado através de uma busca linear simplificada de Armijo, consistindo em:

- Inicializar  $\alpha_{bl}=0.5$ ,  $\eta_{bl}=0.05$ ,  $\varepsilon_{bl}=0.2$
- Decidir a direção de busca (referir-se à seção 5.2.4):

$$\alpha_{bl} := \operatorname{argmin}_{(\alpha_{bl,l}; \alpha_{bl,u})} (\xi(\alpha_{bl,l}), \xi(\alpha_{bl,u}))$$

onde:

$$\alpha_{bl,l} := \alpha_{bl} - \eta_{bl} \text{ e } \alpha_{bl,u} := \alpha_{bl} + \eta_{bl}$$

- Calcular o passo incremental máximo:

Acrescentar (diminuir)  $\alpha_{bl}$  pelo fator  $\eta_{bl}$  enquanto  $\xi(\alpha_{bl}) \leq \xi(0) + \varepsilon_{bl} \xi'(0) \alpha_{bl}$  e  $0 < \alpha_{bl} \leq 1$

#### □ Parâmetros

Associado ao *algoritmo de pontos não interiores*, existe um parâmetro  $\underline{t}$  (inicializado como  $\underline{t}=50$ ), o qual penaliza as relaxações das condições de folgas complementares do subproblema do grupo *seguidor*, na função objetivo do problema principal. À medida que o processo iterativo evolui, e dependendo da atualização do passo dado pela busca linear de Armijo, este parâmetro vai sendo incrementado até atingir seu valor máximo (igual a 5000). Esta correção no valor de  $\underline{t}$  permite garantir a viabilidade de tais condições de folga na convergência do algoritmo.

#### □ Critério de Convergência

Uma solução do algoritmo será considerado um ponto de equilíbrio para o problema de Stackelberg (5.1), quando a resolução do sistema de equações (A.21) (ver Apêndice A) seja satisfeita para valores de  $\rho$  e  $\tau$  (ver seção 5.2.6) suficientemente pequenos. Foram considerados satisfatórios valores de  $\rho, \tau = 1.e-02$  e  $\rho, \tau = 1.e-02$ , dependendo do caso exemplo. Para problemas menores, como será o caso do sistema de 3 barras, é necessário às vezes impor uma tolerância mais restrita, para obter uma maior precisão na convergência do algoritmo.

## 6.2 Casos Exemplo

O objetivo do estudo destes casos exemplo será analisar o comportamento do algoritmo, e avaliar a influência do sistema de transmissão na determinação do preço do mercado de energia. Serão apresentados três casos exemplos com 3, 24 e 188 barras, representados, respectivamente, pelos sistemas 1, 2 e 3 a seguir.

### 6.2.1 Sistema 1

O sistema 1 corresponde a um sistema elétrico com 3 barras geradoras, uma barra de carga e 2 linhas de transmissão. Uma carga inelástica de 150 MW encontra-se localizada na primeira barra. Serão apresentados quatro resultados diferentes. No primeiro caso será considerada a solução de um problema tradicional de mínimo custo de geração, com seus 3 geradores pertencentes ao grupo *seguidor*. Neste primeiro caso não serão levadas em consideração restrições de capacidade de transmissão. O segundo caso exemplo corresponderá a incluir a barra número 1 como participante do grupo *líder*, na mesma configuração da rede elétrica. O terceiro e o quarto casos mostrarão como o grupo *líder* pode se beneficiar de sua posição estratégica, dadas certas características próprias da rede, como restrições de capacidade de geração ( $P_i$ ) e de transmissão ( $T_{i \rightarrow j}$ ). O custo de operação dos geradores é modelado por uma função linear definida por  $C(p_{gi}) = \alpha_i * p_{gi}$  ( $i=1,2,3$ ), para cada um dos quatro sistemas testes. A Tabela 6.1 resume os principais elementos de cada caso: a primeira coluna identifica o número do caso, a segunda e terceira indicam o conjunto de geradores pertencentes ao grupo *líder* e ao grupo *seguidor*, respectivamente. As colunas  $\alpha_i$  e  $P_i$  (para  $i=1,2,3$ ) definem os valores dos custos e capacidade de geração por barra. As últimas duas colunas indicam as restrições de capacidade de transmissão ativadas nos circuitos interligando a barra  $i$  à barra  $j$ .

#Caso	Líder	Seguidor	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\alpha_3$	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$T_{1 \rightarrow 2}$	$T_{1 \rightarrow 3}$
Caso 1	-	1,2,3	1	2	3	1000	1000	1000	-	-
Caso 2	1	2,3	1	2	3	1000	1000	1000	-	-
Caso 3	1	2,3	1	2	3	1000	50	1000	-	-
Caso 4	1	2,3	1	2	3	1000	50	1000	40	-

Tabela 6.1 – Definição Casos Exemplos do Sistema 1

Seja a solução para o sistema teste do Caso 1 representada na Figura 6.1, onde  $p_l$  indica a carga em cada barra,  $p_g$  a geração de potência ativa e  $\lambda$  o seu custo marginal (preço *spot*).

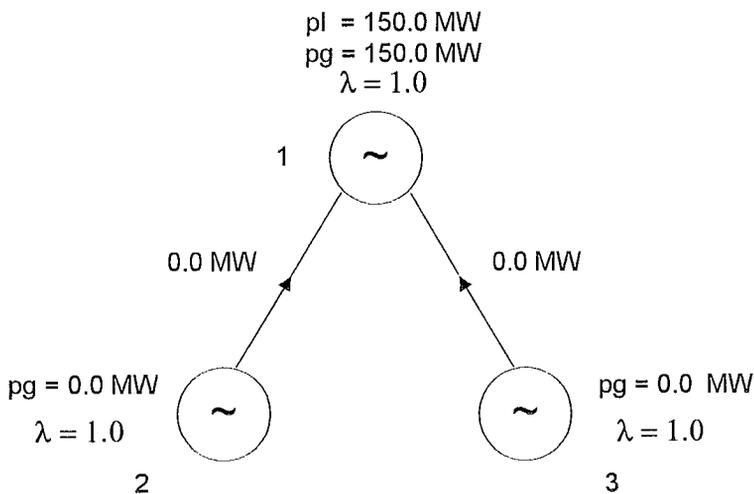


Figura 6.1 – Solução Cas o 1

O custo de operação para o grupo *seguidor*, e o lucro para cada gerador, são apresentados na Tabela 6.2, que corresponde à solução de um tradicional problema de fluxo de potência ótimo, o qual minimiza o custo de operação do sistema.

Descrição	Cálculo	Valor
Custo Gerador #1	$C(p_{g1}) = \alpha_1 p_{g1}$	150.0 \$/MWh
Custo Gerador #2	$C(p_{g2}) = \alpha_2 p_{g2}$	0.0 \$/MWh
Custo Gerador #3	$C(p_{g3}) = \alpha_3 p_{g3}$	0.0 \$/MWh
Lucro Gerador #1	$L(1) = \lambda(1) p_{g1} - C(p_{g1})$	0.0 \$/MWh
Lucro Gerador #2	$L(2) = \lambda(2) p_{g2} - C(p_{g2})$	0.0 \$/MWh
Lucro Gerador #3	$L(3) = \lambda(3) p_{g3} - C(p_{g3})$	0.0 \$/MWh

Tabela 6.2 – Custo vs. Lucro Caso 1 do Sistema 1

No Caso 2, o gerador na barra 1 foi incluído no grupo *líder*, sendo que os geradores associados às barras 2 e 3 permanecem em uma situação menos privilegiada, formando parte do grupo *seguidor*. Seja, para este caso exemplo, a solução representada na sua forma gráfica na Figura 6.2. A relação dos custos e lucros para cada participante é apresentada na Tabela 6.3.

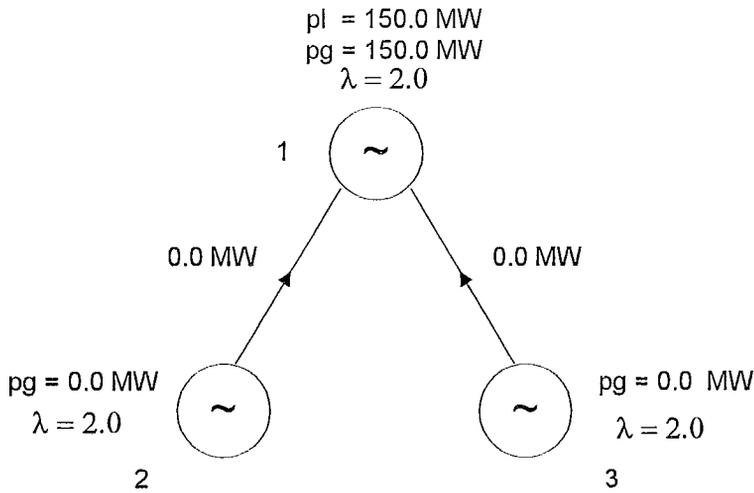


Figura 6.2 – Solução Caso 2

Observe-se, neste caso exemplo, como o grupo *líder* se beneficiou, se comparado ao Caso 1. Sua posição estratégica permitiu-lhe exercer poder de mercado, aumentando o preço da energia e obtendo um acréscimo no seu lucro, apesar de manter o mesmo montante de geração. A mudança do custo marginal nas barras, de  $\lambda=1$  (no Caso 1) para  $\lambda=2$  (no Caso 2), deve-se a uma redução numericamente imperceptível do montante de geração de potência ativa do gerador associado ao grupo *líder*. Tal diminuição faz com que o preço *spot* seja determinado pelo gerador localizado na segunda barra, cujo custo de operação é igual a 2.

Descrição	Cálculo	Valor
Custo Gerador #1	$C(p_{g1}) = \alpha_1 p_{g1}$	150.0 \$/MWh
Custo Gerador #2	$C(p_{g2}) = \alpha_2 p_{g2}$	0.0 \$/MWh
Custo Gerador #3	$C(p_{g3}) = \alpha_3 p_{g3}$	0.0 \$/MWh
Lucro Gerador #1	$L(1) = \lambda(1) p_{g1} - C(p_{g1})$	150.0 \$/MWh
Lucro Gerador #2	$L(2) = \lambda(2) p_{g2} - C(p_{g2})$	0.0 \$/MWh
Lucro Gerador #3	$L(3) = \lambda(3) p_{g3} - C(p_{g3})$	0.0 \$/MWh

Tabela 6.3 – Custo vs. Lucro Caso 2 do Sistema 1

No terceiro caso, uma restrição extra na capacidade de geração na segunda barra foi introduzida ( $P_2=50$ ). A solução de equilíbrio do problema de Stackelberg foi alterada, como representado na Figura 6.3. Essa restrição extra beneficia o gerador do grupo *líder*, o

qual influencia novamente o preço de mercado, aumentando ainda mais seu lucro, apesar do decréscimo em seu montante de geração (ver Tabela 6.4). Novamente, a mudança no custo marginal na barra 1, de  $\lambda=2$  (no Caso 2) para  $\lambda=3$  (no Caso 3), deve-se a mudanças imperceptíveis na geração de potência ativa no gerador associado à segunda barra. O gerador localizado na terceira barra (com custo  $\alpha_3=3$ ) passa a ser o determinante do preço *spot* nas barras.

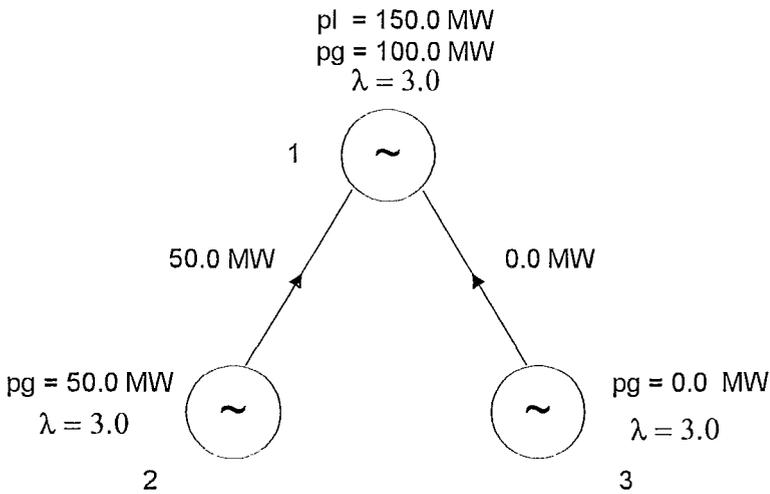


Figura 6.3 – Solução Caso 3

Descrição	Cálculo	Valor
Custo Gerador #1	$C(p_{g1}) = \alpha_1 p_{g1}$	100.0 \$/MWh
Custo Gerador #2	$C(p_{g2}) = \alpha_2 p_{g2}$	100.0 \$/MWh
Custo Gerador #3	$C(p_{g3}) = \alpha_3 p_{g3}$	0.0 \$/MWh
Lucro Gerador #1	$L(1) = \lambda(1) p_{g1} - C(p_{g1})$	200.0 \$/MWh
Lucro Gerador #2	$L(2) = \lambda(2) p_{g2} - C(p_{g2})$	50.0 \$/MWh
Lucro Gerador #3	$L(3) = \lambda(3) p_{g3} - C(p_{g3})$	0.0 \$/MWh

Tabela 6.4 – Custo vs. Lucro Caso 3 do Sistema 1

O quarto e último caso a ser analisado corresponde ao Caso 3, com uma restrição extra de capacidade (40 MW), imposta na linha de transmissão conectando as barras 1 e 2. Seja a solução para o Caso 4 representada na Figura 6.4, e seus custos/lucros resumidos na Tabela 6.5. Observe-se que a capacidade de transmissão no circuito 1→2 impôs restrições no gerador associado à barra número 2, no valor de 10 MW, que passaram a ser gerados pelo grupo *líder*. O preço *spot* passou a ser determinado pelo gerador na segunda barra, com

custo  $\alpha_2=2$ . A diferenciação de preços no sistema é compensada pela restrição de transmissão no circuito 1→2, sendo o preço de transmissão definido por  $\lambda(3)-\lambda(2)=1$ .

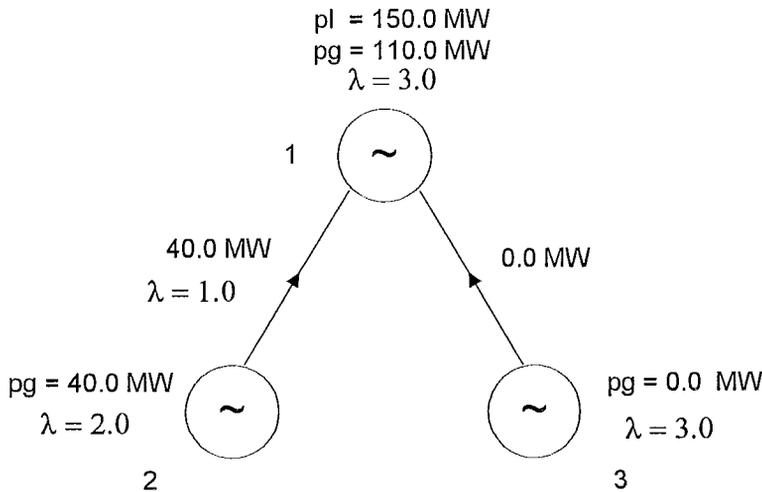


Figura 6.4 – Solução Caso 4

Descrição	Cálculo	Valor
Custo Gerador #1	$C(p_{g1})=\alpha_1 p_{g1}$	110.0 \$/MWh
Custo Gerador #2	$C(p_{g2})=\alpha_2 p_{g2}$	80.0 \$/MWh
Custo Gerador #3	$C(p_{g3})=\alpha_3 p_{g3}$	0.0 \$/MWh
Lucro Gerador #1	$L(1)=\lambda(1) p_{g1} - C(p_{g1})$	220.0 \$/MWh
Lucro Gerador #2	$L(2)=\lambda(2) p_{g2} - C(p_{g2})$	0.0 \$/MWh
Lucro Gerador #3	$L(3)=\lambda(3) p_{g3} - C(p_{g3})$	0.0 \$/MWh

Tabela 6.5 – Custo vs. Lucro Caso 4 do Sistema 1

### 6.2.2 Sistema 2

O segundo sistema elétrico a ser analisado corresponde a um sistema com 24 barras, 38 circuitos e 11 unidades geradoras. Cinco diferentes casos exemplo serão estudados; o primeiro deles corresponde à solução de um fluxo de potência ótimo, com todos os geradores formando parte do grupo *seguidor*. No segundo caso exemplo, o gerador associado à barra 13 passa a formar parte do grupo *líder*. O terceiro deles corresponde exatamente ao segundo caso, onde restrições extras de capacidade de transmissão ( $T_{i \rightarrow j}$ ) foram impostas nas suas interligações (90 MW no circuito 13→23 e 500 MW no circuito 14→16). Os dois últimos são baseados, respectivamente, na modelagem da rede para o

segundo e terceiro caso, sendo que dois geradores (localizados nas barras 15 e 22) deixam de formar parte do grupo *seguidor* e passam a integrar o grupo *líder*. A Tabela 6.6 apresenta um sumário para estes sistemas exemplo. O diagrama de fluxo da rede elétrica foi anexado no Apêndice C.

#Caso	Gerador Líder	$R_{13 \rightarrow 23}$ (MW)	$R_{14 \rightarrow 16}$ (MW)
Caso 1	-	-	-
Caso 2	13	-	-
Caso 3	13	90	500
Caso 4	13,15,22	-	-
Caso 5	13,15,22	90	500

Tabela 6.6 – Definição Casos Exemplos do Sistemas 2

Em todos os casos exemplo, os geradores têm por custo de operação uma função linear definida por  $C(p_{gi}) = \alpha_i \cdot p_{gi}$ . Os geradores associados às barras 1, 2 e 7 são os mais caros, com seus custos de geração ( $\alpha_i=2$ ) duas vezes os custos ( $\alpha_i=1$ ) dos outros participantes. A Tabela 6.7 associa, a cada unidade geradora, sua capacidade e seu custo de produção.

# Gerador	Capacidade (MW)	Custo ( $\alpha_i$ )
1, 2, 7	500.00	2
13, 15, 16, 18, 21, 22, 23	1000.00	1

Tabela 6.7 – Dados de Geração do Sistema 2

Para o primeiro caso exemplo será apresentada uma tabela, mostrando a evolução do processo iterativo no compromisso entre a maximização de lucro por parte do grupo *líder*, a minimização de custo de geração do grupo *seguidor* e a viabilidade do problema, na forma:

# Iteração	Alfa-BL	Mismat (MW)	Mismat (MVar)	Custo Seg.	Lucro Líder

A coluna # *Iteração* corresponde ao número da iteração corrente e *Alfa-BL* representa o tamanho do passo determinado pela busca linear de Armijo. Os valores presentes nas colunas *Mismat(MW)* e *Mismat(MVar)* definem a máxima violação das restrições

associadas aos controles de potência ativa (balanço de potência ativa na barra, restrições de capacidade de transmissão e condições de otimalidade de primeira ordem do problema do grupo *seguidor*) e potência reativa do sistema (balanço de potência reativa na barra e condições de otimalidade de primeira ordem do problema do grupo *seguidor*). As duas últimas colunas correspondem, respectivamente, às funções objetivo do problema do grupo *seguidor* (minimização custo de operação) e do grupo *líder* (maximização do lucro).

Os resultados, para cada caso exemplo (montante de geração, custo de operação dos participantes do grupo *seguidor* e lucro para os participantes do lucro *líder*), serão apresentados em tabelas na forma abaixo, sendo o significado de cada coluna auto-explicativo.

# Gerador	$\lambda$ (Preço)	Geração (MW)		Lucro (\$/MWh)	
		Líder	Seguidor	Líder	Seguidor
Total:					

Uma análise comparativa de resultados, entre os diferentes casos exemplo, permitirá mostrar a influência que os participantes do grupo *líder* exercem na operação do sistema.

A Tabela 6.8 apresenta a evolução da convergência para o Caso 1. Dado que não existem firmas dominantes participando do mercado, o valor da função objetivo do grupo *líder* é sempre igual a zero (coluna *Lucro Líder* = 0.00). Durante o processo iterativo existe um compromisso entre atingir a viabilidade (colunas *Mismatch MW* e *Mismatch MVar*) e minimizar o custo de operação do sistema (coluna *Custo Seg.*). Observe que, sendo o algoritmo um método de pontos inviáveis, suas restrições de igualdade somente serão satisfeitas na sua convergência. O tamanho do passo incremental (coluna *Alfa-BL*) corresponde, em quase todas as iterações, ao seu valor inicial (*Alfa-BL*=0.5). Para este primeiro caso, a busca linear de Armijo não influencia significativamente as atualizações determinadas pela aproximação linear de primeira ordem de Newton-Raphson. A Tabela 6.9 apresenta seus resultados.

# Iteração	Alfa-BL	Mismat(MW)	Mismat(MVAr)	Custo Seg.	Lucro Líder
1	0.50	0.26E+04	0.12E+04	0.50E+04	0.00
2	0.50	0.14E+04	0.66E+03	0.40E+04	0.00
3	0.50	0.71E+03	0.20E+03	0.34E+04	0.00
4	0.50	0.38E+03	0.11E+03	0.32E+04	0.00
5	0.50	0.21E+03	57.	0.31E+04	0.00
6	0.50	0.11E+03	28.	0.30E+04	0.00
7	0.50	64.	12.	0.30E+04	0.00
8	0.50	36.	6.4	0.30E+04	0.00
9	0.50	20.	4.8	0.29E+04	0.00
10	0.55	11.	2.4	0.29E+04	0.00
11	0.55	6.0	38.	0.29E+04	0.00
12	0.55	3.1	17.	0.29E+04	0.00
13	0.55	1.6	7.6	0.29E+04	0.00
14	0.50	0.84	3.4	0.29E+04	0.00
15	0.55	5.2	1.7	0.29E+04	0.00
16	0.55	2.4	0.77	0.29E+04	0.00
17	0.55	1.1	0.35	0.29E+04	0.00
18	0.55	0.52	0.16	0.29E+04	0.00
19	0.55	0.25	0.70E-01	0.29E+04	0.00
20	0.45	0.12	0.31E-01	0.29E+04	0.00
21	0.50	1.2	0.81E-02	0.29E+04	0.00
22	0.55	1.2	0.81E-02	0.29E+04	0.00
23	0.55	0.53	0.31E-02	0.29E+04	0.00
24	0.55	0.24	0.86E-03	0.29E+04	0.00
25	0.55	0.11	0.80E-03	0.29E+04	0.00
26	0.55	0.22E-01	0.80E-03	0.29E+04	0.00

Tabela 6.8 – Convergência Caso 1 do Sistema 2

# Gerador	$\lambda$ (Preço)	Geração (MW)		Lucro (\$/MWh)	
		Líder	Seguidor	Líder	Seguidor
1	1.1571	-	0.00	-	0.00
2	1.1580	-	0.00	-	0.00
7	1.2937	-	0.00	-	0.00
13	1.0053	-	1000.00	-	5.30
15	1.0000	-	592.78	-	0.00
16	1.0000	-	596.67	-	0.00
18	1.0000	-	327.68	-	0.00
21	0.9999	-	0.00	-	0.00
22	0.9999	-	0.00	-	0.00
23	1.0000	-	415.51	-	0.00
Total:		-	2932.64	-	5.30

Tabela 6.9 – Solução Caso 1 do Sistema 2

A Tabela 6.10 apresenta os resultados para o segundo caso exemplo. Observe que o participante pertencente ao grupo *líder* (#Gerador: 13) se beneficia de sua posição estratégica, diminuindo seu montante de geração (de 1000 MW no Caso 1 para 463.11 MW

no Caso 2) e lucrando com o aumento do preço *spot* na barra (de  $\lambda_{13}=1.0053$  no Caso 1 para  $\lambda_{13}=1.0545$  no Caso 2).

# Gerador	$\lambda$ (Preço)	Geração (MW)		Lucro (\$/MWh)	
		Líder	Seguidor	Líder	Seguidor
1	1.1905	-	0.00	-	0.00
2	1.1917	-	0.00	-	0.00
7	1.3370	-	0.00	-	0.00
13	1.0545	463.11	-	25.24	-
15	1.0000	-	630.28	-	0.00
16	1.0000	-	749.97	-	0.00
18	1.0000	-	326.26	-	0.00
21	0.9999	-	0.00	-	0.00
22	0.9999	-	0.00	-	0.00
23	1.0000	-	778.29	-	0.00
Total:		463.11	2484.80	25.24	0.00

Tabela 6.10 – Solução Caso 2 do Sistema 2

A Tabela 6.11 apresenta os preços, montante de geração e lucro para o terceiro caso exemplo do sistema de 24 barras. Na presença de restrições de transmissão, o exercício de poder de mercado por parte do participante associado ao grupo *líder* (#Gerador: 13) é ainda mais acentuado. Ele aumenta seu montante de geração em 24% (de 463.11 MW no Caso 2 para 572.10 MW no Caso 3), o que, acompanhado do aumento do preço da energia (de  $\lambda_{13}=1.0545$  no Caso 2 para  $\lambda_{13}=2.0934$  no Caso 3), lhe permitiu um aumento de 2478% no seu lucro. O gerador associado à barra 7, com custo de operação mais elevado (duas vezes o custo dos geradores até o momento operando no sistema), deve ser despachado de forma a atender a demanda, aumentando, conseqüentemente, o preço *spot* nas barras.

# Gerador	$\lambda$ (Preço)	Geração (MW)		Lucro (\$/MWh)	
		Líder	Seguidor	Líder	Seguidor
1	1.9930	-	0.00	-	0.00
2	2.0001	-	0.00	-	0.00
7	2.0000	-	154.78	-	0.00
13	2.0934	572.10	-	625.53	-
15	1.0178	-	1000.00	-	17.80
16	1.0000	-	462.26	-	0.00
18	1.0000	-	312.87	-	0.00
21	1.0000	-	251.74	-	0.00
22	0.9997	-	0.00	-	0.00
23	1.0000	-	172.78	-	0.00
Total:		572.10	2354.43	625.53	17.80

Tabela 6.11 – Solução Caso 3 do Sistema 2

A Tabela 6.12 apresenta os resultados para o quarto caso exemplo. Ele corresponde à mesma modelagem da rede elétrica do Caso 2, sendo que dois de seus participantes (# Gerador: 15 e 22) deixaram de formar parte do grupo *seguidor* e passaram a integrar o grupo *líder*. Pode ser observado, comparando as Tabelas 6.10 e 6.12, uma redistribuição na geração de potência ativa no sistema. Na passagem do Caso 2 para o Caso 4, obteve-se uma diminuição de aproximadamente 20% no montante de geração do grupo *líder*, a qual deveu ser compensada pelos integrantes do grupo *seguidor*. O lucro do grupo *líder* foi garantido pelo aumento do preço *spot* na barra 13, passando de  $\lambda_{13}=1.0545$  no Caso 2 para  $\lambda_{13}=1.0685$  no Caso 4.

# Gerador	$\lambda$ (Preço)	Geração (MW)		Lucro (\$/MWh)	
		Líder	Seguidor	Líder	Seguidor
1	1.2091	-	0.00	-	0.00
2	1.2102	-	0.00	-	0.00
7	1.3578	-	0.00	-	0.00
13	1.0685	368.31	-	25.23	-
15	1.0174	0.00	-	0.00	-
16	1.0052	-	1000.00	-	5.20
18	1.0000	-	377.14	-	0.00
21	1.0000	-	306.67	-	0.00
22	1.0005	0.00	-	0.00	-
23	1.0000	-	906.18	-	0.00
Total:		368.31	2589.99	25.23	5.20

Tabela 6.12 – Solução Caso 4 do Sistema 2

Os resultados para o último caso exemplo deste sistema são apresentados na Tabela 6.13. O Caso 5 equivale eletricamente ao Caso 3 com três participantes, no lugar de um, integrando o grupo *líder*. Uma redistribuição de geração no sistema, que correspondeu a um aumento de 58 % na produção dos participantes do grupo líder (#Gerador: 13 e 15), manteve a hegemonia do grupo *líder*, com um acréscimo de aproximadamente 5% no seu lucro. A saída do gerador número 15 do grupo *seguidor*, representou uma perda total de lucro para este grupo, passando de 17.8 \$/MWh no Caso 3 para 0 \$/MWh no caso corrente.

# Gerador	$\lambda$ (Preço)	Geração (MW)		Lucro (\$/MWh)	
		Líder	Seguidor	Líder	Seguidor
1	1.9930	-	0.00	-	0.00
2	2.0002	-	0.00	-	0.00
7	2.0000	-	153.80	-	0.00
13	2.0898	590.83	-	643.89	-
15	1.0357	316.74	-	11.31	-
16	1.0000	-	814.58	-	0.00
18	1.0000	-	313.23	-	0.00
21	1.0000	-	550.02	-	0.00
22	0.9997	0.00	-	0.00	-
23	1.0000	-	186.06	-	0.00
Total:		907.57	2017.69	655.19	0.00

Tabela 6.13 – Solução Caso 5 do Sistema 2

A Tabela 6.14 relaciona os resultados para estes cinco casos exemplos, montante de geração e lucros para ambos os grupos (*líder* e *seguidor*) participando no mercado. Os gráficos da Figuras 6.6 e 6.7 permitem visualizar estes resultados. É importante observar como o grupo *líder* mantém ou aumenta seu lucro com a entrada de novos participantes (Caso 2→Caso 4 e Caso 3→Caso 5). Ele ainda se aproveita da presença de restrições físicas da rede elétrica em seu próprio benefício (Caso 2→Caso 3 e Caso 4→Caso 5).

#Caso	Geração (MW)		Lucro (\$/MWh)	
	Líder	Seguidor	Líder	Seguidor
Caso 1	0.00	2932.64	0.00	5.30
Caso 2	463.11	2484.80	25.24	0.00
Caso 3	572.10	2354.43	625.53	17.80
Caso 4	368.31	2589.99	25.23	5.20
Caso 5	907.57	2017.69	655.19	0.00

Tabela 6.14 – Soluções Comparativas do Sistema 2

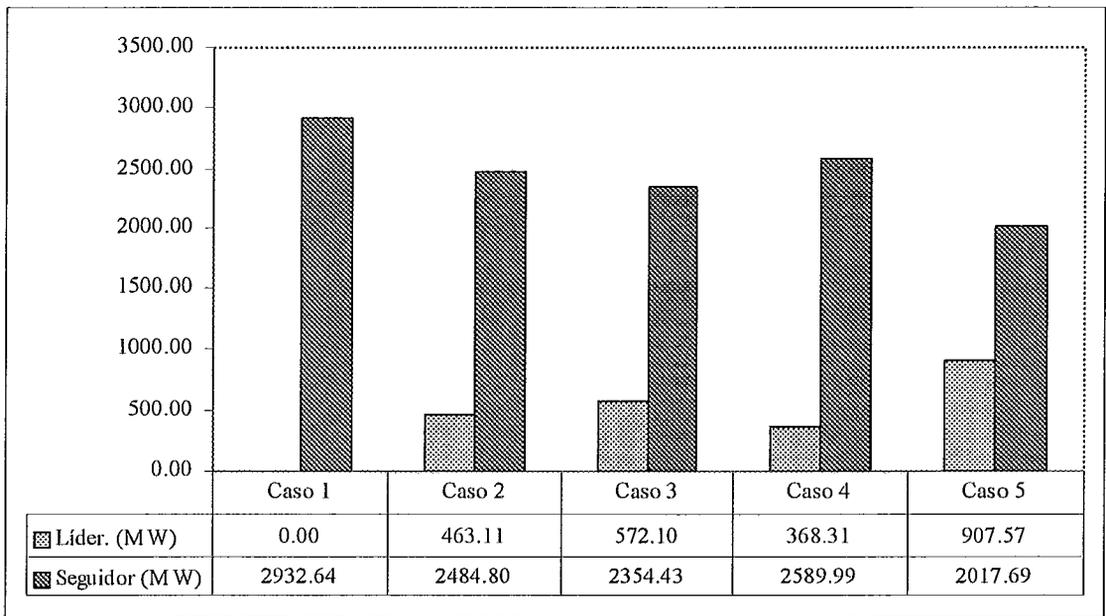


Figura 6.5 – Sumário de Montante de Geração para o Sistema 2

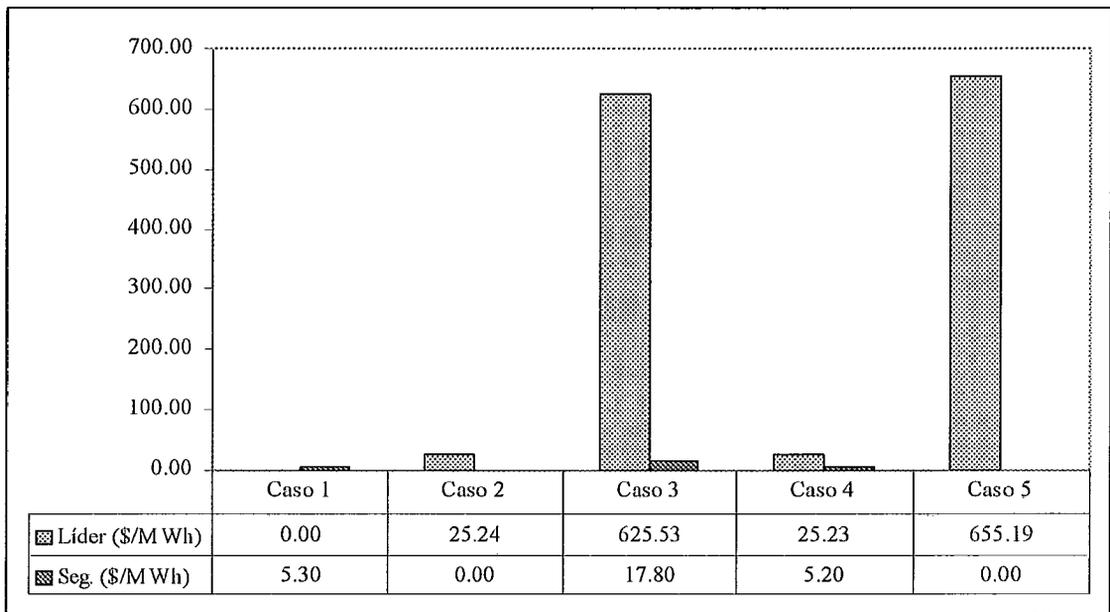


Figura 6.6 – Sumário de Lucros para o Sistema 2

O estudo do sistema de 24 barras finaliza na Tabela 6.15, com um pequeno sumário apresentando número total de iterações, tempo de processamento, número total de variáveis

do problema e número de elementos diferentes de zero de sua matriz Heavy Border, associado ao algoritmo de *pontos não interiores*.

#Caso	# Iterações	Tempo CPU (segundos)	# Total de Variáveis	# Elementos Heavy Border
Caso 1	26	1.04	408	1092
Caso 2	48	1.98	405	1087
Caso 3	69	2.91	421	1117
Caso 4	76	3.08	399	1077
Caso 5	38	1.54	415	1107

Tabela 6.15 – Sumário Casos Exemplos do Sistema 2

### 6.2.3 Sistema 3

O terceiro sistema elétrico a ser estudado corresponde a um sistema com 118 barras, 179 circuitos e 34 geradores. Quatro diferentes casos exemplo serão analisados. Os dois primeiros correspondem à simulação de um problema de minimização de custo de geração (com todos os participantes integrando o grupo *seguidor*), com e sem restrições de capacidade nas linhas de transmissão. O terceiro caso modela um problema de dois níveis, com as unidades geradoras associadas às barras 4, 46 e 80 pertencentes ao grupo *líder*. O quarto caso considera a mesma hierarquização dos geradores deste último caso, acrescido de restrições de capacidade nos circuitos. Em todos os casos testes os geradores associados às barras 8, 10 e 49 representam as unidades mais caras, com custos duas vezes maiores que os geradores restantes. Sua função custo é representada por uma curva linear na forma  $C(p_{gi}) = \alpha_i p_{gi}$ .

As Tabelas 6.16 e 6.17 apresentam um sumário de dados para estes quatro casos testes, com a divisão de seus participantes entre grupo *líder* e grupo *seguidor*, restrições de capacidade (geração e transmissão) e custos de operação. Uma configuração geral da rede, com suas barras, unidades geradoras e interligações encontra-se no Apêndice D.

#Caso	Gerador Líder	R <sub>8→30</sub> (MW)	R <sub>25→26</sub> (MW)	R <sub>17→113</sub> (MW)	R <sub>65→68</sub> (MW)
Caso 1	-	-	-	-	-
Caso 2	-	100	102	100	100
Caso 3	4, 46, 80	-	-	-	-
Caso 4	4, 46, 80	100	102	100	100

Tabela 6.16 – Definição Casos Exemplos do Sistemas 3

# Gerador	Capacidade (MW)	Custo ( $\alpha_i$ )
4,59,61	200	10
8	300	20
10	500	20
12,24,31,40,42	100	10
73,90,91,112,113	100	10
25	300	10
26	400	10
27,46,54,87,99	150	10
103,107,111,116	150	10
49	250	20
65,66,69	450	10
72	40	10
80	550	10
89	700	10
100	350	10

Tabela 6.17 – Dados de Geração do Sistema 3

Para estes casos exemplos será apresentada uma análise comparativa de resultados, a qual colocará em evidência a influência dos participantes do grupo *líder* na operação deste sistema. Similarmente a sistema de 24 barras, cada caso teste é acompanhado por uma tabela com montante de geração (em MW) e lucro (em \$/MWh), por unidade geradora participando no mercado.

As Tabela 6.18 e 6.19 apresentam os resultados para os dois primeiros casos exemplos. Da comparação de resultados dos Casos 1 e 2 observa-se uma pequena variação no distribuição de geração no sistema, devido à inclusão das restrições de capacidade de transmissão. Observe-se que, em ambos os casos, os geradores sendo despachados correspondem as unidades mais econômicas do mercado (#Gerador: 8, 10 e 49 têm geração nula), com um aumento imperceptível no custo de operação do sistema, passando de 41808.4 \$/MWh (=10\$ \* 4180.84MWh) no Caso 1 para 41834.6 \$/MWh (=10\$ \* 4183.46MWh) no Caso 2.

Por outro lado, a inclusão de restrições de capacidade de transmissão provocou uma diferenciação de preços no sistema, proporcionando uma maior margem de lucro aos participantes do grupo *seguidor* (de 493.87 \$/MWh no Caso 1 para 1465.41 \$/MWh no Caso 2).

# Gerador	$\lambda$ (Preço)	Geração (MW)		Lucro (\$/MWh)	
		Líder	Seguidor	Líder	Seguidor
4	10.5153	-	200.00	-	103.06
8	10.5343	-	0.00	-	0.00
10	10.5343	-	0.00	-	0.00
12	10.7927	-	100.00	-	79.27
24	10.0000	-	53.84	-	0.00
25	9.9477	-	0.00	-	0.00
26	10.0000	-	297.21	-	0.00
27	10.0164	-	150.00	-	2.46
31	10.1148	-	100.00	-	11.48
40	10.4722	-	100.00	-	47.22
42	10.3992	-	100.00	-	39.92
46	10.0117	-	150.00	-	1.75
49	10.2966	-	0.00	-	0.00
54	10.6284	-	150.00	-	94.26
59	10.2419	-	200.00	-	48.38
61	10.0739	-	200.00	-	14.78
65	10.0244	-	450.00	-	10.98
66	10.0000	-	204.85	-	0.00
69	10.0000	-	157.41	-	0.00
72	10.0000	-	26.70	-	0.00
73	10.0000	-	82.10	-	0.00
80	10.0000	-	320.91	-	0.00
87	10.0000	-	29.55	-	0.00
89	10.0000	-	218.42	-	0.00
90	10.1129	-	100.00	-	11.29
91	10.0000	-	49.51	-	0.00
99	10.0000	-	41.99	-	0.00
100	10.0000	-	180.10	-	0.00
103	10.0000	-	72.25	-	0.00
107	10.0000	-	87.54	-	0.00
111	10.0000	-	21.40	-	0.00
112	10.0000	-	87.06	-	0.00
113	10.2457	-	100.00	-	24.57
116	10.0296	-	150.00	-	4.44
Total:		-	4180.84	-	493.87

Tabela 6.18 – Solução Caso 1 do Sistema 3

# Gerador	$\lambda$ (Preço)	Geração (MW)		Lucro (\$/MWh)	
		Líder	Seguidor	Líder	Seguidor
4	13.8219	-	200.00	-	764.38
8	14.4565	-	0.00	-	0.00
10	14.4565	-	0.00	-	0.00
12	13.6107	-	100.00	-	361.07
24	10.0000	-	74.50	-	0.00
25	9.9808	-	0.00	-	0.00
26	10.0000	-	274.04	-	0.00
27	10.0875	-	150.00	-	13.13
31	10.2941	-	100.00	-	29.41
40	10.5785	-	100.00	-	57.85
42	10.4655	-	100.00	-	46.55
46	10.0388	-	150.00	-	5.82
49	10.3094	-	0.00	-	0.00
54	10.6333	-	150.00	-	95.00
59	10.2449	-	200.00	-	48.98
61	10.0771	-	200.00	-	15.42
65	10.0264	-	450.00	-	11.88
66	10.0000	-	228.99	-	0.00
69	10.0000	-	160.27	-	0.00
72	10.0000	-	26.84	-	0.00
73	10.0000	-	82.37	-	0.00
80	10.0000	-	319.36	-	0.00
87	10.0000	-	29.54	-	0.00
89	10.0000	-	218.36	-	0.00
90	10.1125	-	100.00	-	11.25
91	10.0000	-	49.50	-	0.00
99	10.0000	-	41.99	-	0.00
100	10.0000	-	180.06	-	0.00
103	10.0000	-	72.25	-	0.00
107	10.0000	-	87.54	-	0.00
111	10.0000	-	21.40	-	0.00
112	10.0000	-	87.06	-	0.00
113	10.0000	-	79.39	-	0.00
116	10.0312	-	150.00	-	4.68
Total:		-	4183.46	-	1465.41

Tabela 6.19 – Solução Caso 2 do Sistema 3

A Tabela 6.20 apresenta os resultados para o terceiro caso exemplo, onde três participantes originalmente pertencentes ao grupo *seguidor* (# Gerador: 4, 46 e 80) passam a integrar o grupo *líder*. Observe-se que estes geradores somavam um lucro de 104.81 \$/MWh no Caso 1 e passaram a incrementá-lo em 48% no Caso 3, chegando a obter um total de 156.11 \$/MWh. Os participantes do grupo *líder* influenciaram a operação do sistema, diminuindo

seu montante de geração (de 670.19 MW no Caso 1 para 431.51 no Caso 3) e induzindo a uma variação de preços em seu próprio benefício.

# Gerador	$\lambda$ (Preço)	Geração (MW)		Lucro (\$/MWh)	
		Líder	Seguidor	Líder	Seguidor
4	10.5279	200.01	-	105.59	-
8	10.5472	-	0.00	-	0.00
10	10.5472	-	0.00	-	0.00
12	10.8056	-	100.00	-	80.56
24	10.0000	-	54.32	-	0.00
25	9.9451	-	0.00	-	0.00
26	10.0000	-	306.03	-	0.00
27	10.0180	-	150.01	-	2.70
31	10.1197	-	100.00	-	11.97
40	10.5172	-	100.00	-	51.72
42	10.4579	-	100.00	-	45.79
46	10.4173	72.16	-	30.11	-
49	10.3743	-	0.00	-	0.00
54	10.6741	-	150.00	-	101.12
59	10.2682	-	200.00	-	53.64
61	10.0975	-	200.00	-	19.50
65	10.0425	-	450.01	-	19.13
66	10.0000	-	314.93	-	0.00
69	10.0000	-	230.37	-	0.00
72	10.0000	-	27.08	-	0.00
73	10.0000	-	84.18	-	0.00
80	10.1281	159.35	-	20.41	-
87	10.0000	-	30.78	-	0.00
89	10.0000	-	227.69	-	0.00
90	10.1114	-	100.00	-	11.14
91	10.0000	-	50.30	-	0.00
99	10.0000	-	57.13	-	0.00
100	10.0000	-	200.97	-	0.00
103	10.0000	-	72.24	-	0.00
107	10.0000	-	87.52	-	0.00
111	10.0000	-	21.40	-	0.00
112	10.0000	-	87.06	-	0.00
113	10.2560	-	100.00	-	25.60
116	10.0657	-	150.00	-	9.85
Total:		431.52	3752.02	156.11	432.72

Tabela 6.20 – Solução Caso 3 do Sistema 3

Os resultados para o último caso exemplo são apresentados na Tabela 6.21. O Caso 4 corresponde, em primeiro lugar, ao Caso 2 onde três unidades geradoras (#Gerador: 4, 46 e 80), pertencentes originalmente ao grupo *seguidor*, passaram a integrar o grupo *líder*. Em segundo lugar ele pode ser definido a partir do Caso 3 acrescido de restrições de capacidade

de transmissão. Na passagem do Caso 2 para o Caso 4 observa-se um aumento de lucro de 118% dos participantes do grupo *líder*, passando de 770.20 \$/MWh para 1680.07 \$/MWh. A presença de restrições de transmissão provocara uma maior variação de preços nas barras do sistema, e permitiram, aos participantes do grupo *líder*, uma maior margem de lucro se comparada à obtida na passagem do Caso 1 para o Caso 3 (de 48%).

# Gerador	$\lambda$ (Preço)	Geração (MW)		Lucro (\$/MWh)	
		Líder	Seguidor	Líder	Seguidor
4	18.4862	191.07	-	1621.46	-
8	19.9985	-	0.00	-	0.00
10	19.9986	-	0.00	-	0.00
12	17.5355	-	100.00	-	753.55
24	10.0000	-	98.35	-	0.00
25	10.0000	-	185.87	-	0.00
26	10.0000	-	54.67	-	0.00
27	10.1962	-	150.00	-	29.43
31	10.5344	-	100.00	-	53.44
40	10.7468	-	100.00	-	74.68
42	10.6007	-	100.00	-	60.07
46	10.4561	75.47	-	34.42	-
49	10.4031	-	0.00	-	0.00
54	10.6746	-	150.00	-	101.19
59	10.2582	-	200.00	-	51.64
61	10.0850	-	200.00	-	17.00
65	10.0229	-	450.00	-	10.31
66	10.0000	-	313.13	-	0.00
69	10.0000	-	290.05	-	0.00
72	10.0000	-	27.23	-	0.00
73	10.0000	-	84.52	-	0.00
80	10.1532	157.92	-	24.19	-
87	10.0000	-	31.00	-	0.00
89	10.0000	-	229.47	-	0.00
90	10.1103	-	100.00	-	11.03
91	10.0000	-	50.46	-	0.00
99	10.0000	-	60.23	-	0.00
100	10.0000	-	205.11	-	0.00
103	10.0000	-	72.23	-	0.00
107	10.0000	-	87.51	-	0.00
111	10.0000	-	21.39	-	0.00
112	10.0000	-	87.05	-	0.00
113	10.0000	-	69.25	-	0.00
116	10.0959	-	150.00	-	14.39
Total:		424.46	3767.52	1680.07	1176.72

Tabela 6.21 – Solução Caso 4 do Sistema 3

Por um outro lado, na comparação do Caso 4 com o Caso 3, observa-se um aumento de lucro do grupo *líder* de mais de 900%, obtidos a partir da redução no montante de geração e aumento do preço da energia. Destas duas últimas comparações pode ser evidenciado o exercício de poder de mercado por parte dos participantes do grupo *líder*, acentuado pelas limitações físicas do sistema de transmissão.

Os totais para cada caso exemplo, montante de geração e lucro (grupo *líder* e grupo *seguidor*) são representados na Tabela 6.22 e nos gráficos associados às Figuras 6.7 e 6.8.

#Caso	Geração (MW)		Lucro (\$/MWh)	
	Líder	Seguidor	Líder	Seguidor
Caso 1	0.00	4180.84	0.00	493.87
Caso 2	0.00	4183.46	0.00	1465.41
Caso 3	431.52	3752.02	156.11	432.72
Caso 4	424.46	3767.52	1680.07	1176.72

Tabela 6.22 – Soluções Comparativas do Sistema 3

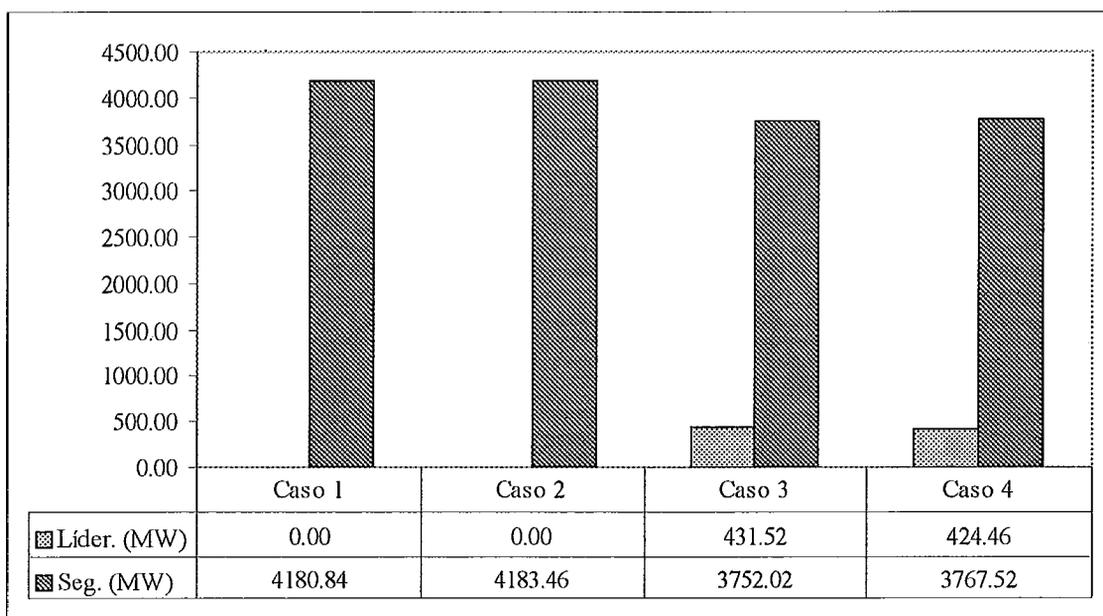


Figura 6.7 – Sumário do Montante de Geração no Sistema 3

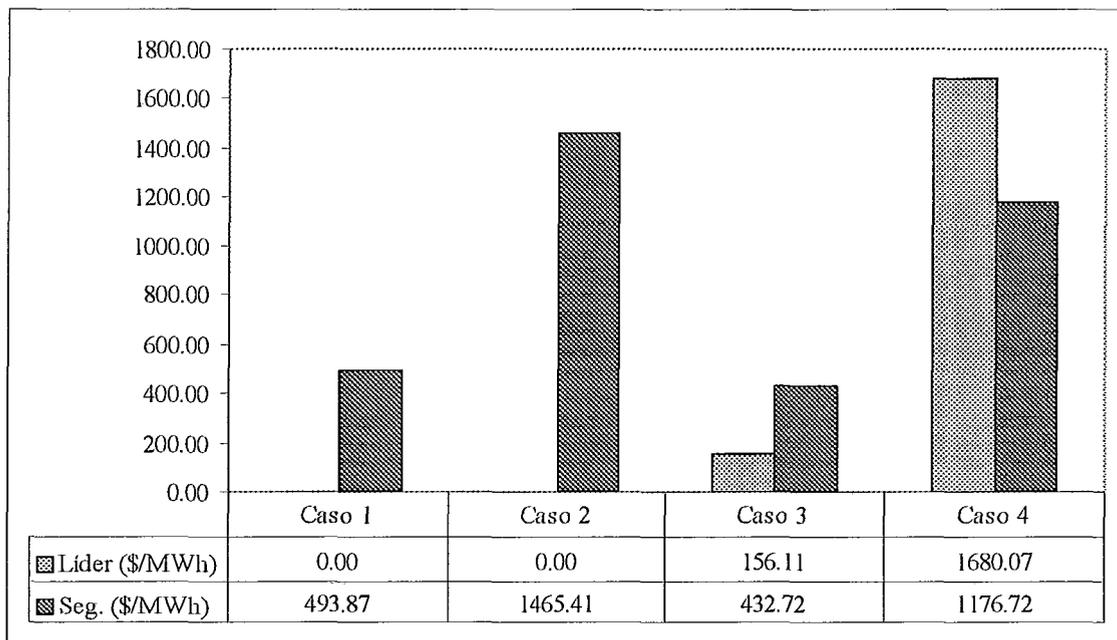


Figura 6.8 – Sumário de Lucros para o Sistema 3

Finalizando a análise destes quatro casos exemplo é apresentado um sumário com número total de iterações, tempo de processamento e dimensões dos problemas na Tabela 6.23 abaixo.

#Caso	# Iterações	Tempo CPU (segundos)	# Total de Variáveis	# Elementos Heavy Border
Caso 1	34	6.65	1824	5092
Caso 2	89	17.68	1856	5152
Caso 3	29	5.65	1815	5077
Caso 4	60	11.86	1847	5137

Tabela 6.23 – Sumário Casos Exemplos do Sistema 3

## CAPÍTULO 7

### 7 CONCLUSÕES E ESTUDOS FUTUROS

Este trabalho teve por objetivo o desenvolvimento, e implementação computacional, de um algoritmo de simulação do problema de equilíbrio de Stackelberg, aplicado ao modelo AC de sistemas de potência. O algoritmo de *pontos não interiores penalizado* resolve a *formulação de K.K.T.* deste problema de programação matemática de dois níveis. Neste capítulo serão apresentadas as principais conclusões extraídas de sua análise computacional, assim como sugestões e encaminhamento para pesquisas futuras.

#### 7.1 Conclusões

No desenvolvimento desta tese, e através dos diferentes testes numéricos, puderam ser observadas algumas peculiaridades do problema de dois níveis, e extraídas as seguintes conclusões:

- Tradicionais algoritmos de programação não linear podem não ser apropriados para a resolução da *formulação de K.K.T.* do problema de programação matemática em dois níveis. Soluções intermediárias, durante a evolução do processo iterativo, podem levar à não regularidade do conjunto de soluções, provocando um mal condicionamento da matriz solução e conseqüente divergência do algoritmo;
- Termos de relaxação das condições de folgas complementares do problema do *seguidor* introduzem robustez ao algoritmo. Eles se apresentam como uma alternativa para evitar a não regularidade intrínseca da *formulação de K.K.T.* em um ponto de equilíbrio;
- Atualizações crescentes do parâmetro, penalizando as relaxações das restrições de folga complementares do problema do grupo *seguidor*, na função objetivo do problema do grupo *líder*, garantem como solução um ponto de equilíbrio de Stackelberg;
- A inclusão de uma função de busca linear, definida em função da penalização de Fischer-Burmeister, auxilia na convergência e introduz uma maior estabilidade numérica ao algoritmo;

- Posicionamento estratégico das firmas dominantes, acompanhado de restrições de capacidade de transmissão, influenciam a determinação de preços no mercado de energia e levam ao exercício do poder de mercado por parte das grandes firmas.

Uma vez estabelecidas as principais características do algoritmo, serão sugeridas, na próxima seção, linhas de pesquisa baseadas na continuação de nosso desenvolvimento.

## 7.2 Estudos Futuros

O problema de equilíbrio de Cournot, aplicado ao modelo não linear de sistemas de potência, pode ser formulado como um equilíbrio duopolista de Nash, onde o subproblema de cada grande firma é formulado como um equilíbrio de Stackelberg parametrizado. Na próxima seção se apresenta a formulação geral do equilíbrio Nash com duas firmas participando no mercado.

### 7.2.1 Equilíbrio de Nash em Mercados Duopolistas

A formulação geral do equilíbrio de Nash, para mercados duopolistas, pode ser representada pelos seguintes problemas de otimização:

$$\begin{array}{ll} \text{Min } f_1(x_1, x_2) & \text{Min } f_2(x_1, x_2) \\ \text{s.a. } g_1(x_1, x_2) = 0 & \text{s.a. } g_2(x_1, x_2) = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} (P_1) \\ (P_2) \end{array} \quad (7.1)$$

Um ponto  $(x_1^*, x_2^*)$  representa um equilíbrio de Nash, se  $(x_1^*, x_2^*)$  é solução de  $(P_1)$  parametrizado em  $x_2^*$ , e  $(x_1^*, x_2^*)$  é solução de  $(P_2)$  parametrizado em  $x_1^*$ .

Matematicamente:

$$f_1(x_1^*, x_2^*) \leq f_1(x_1, x_2^*) \quad \forall x_1 / g_1(x_1, x_2^*) = 0 \quad (7.2)$$

$$f_2(x_1^*, x_2^*) \leq f_2(x_1^*, x_2) \quad \forall x_2 / g_2(x_1^*, x_2) = 0 \quad (7.3)$$

As funções do Lagrangeano para  $(P_1)$  e  $(P_2)$  são definidas, respectivamente, por  $L_1(\cdot)$  e  $L_2(\cdot)$ :

$$L_1(x_1, x_2^*, \lambda_1) = f_1(x_1, x_2^*) - \lambda_1^t g_1(x_1, x_2^*) \quad (7.4)$$

$$L_2(x_1^*, x_2, \lambda_2) = f_2(x_1^*, x_2) - \lambda_2^t g_2(x_1^*, x_2) \quad (7.5)$$

Impondo-se as condições de otimalidade de primeira ordem de Karush-Kuhn-Tucker a (P<sub>1</sub>) e (P<sub>2</sub>), obtém-se o seguinte conjunto de equações não lineares:

$$\nabla_{x_1} L_1(x_1, x_2^*) : \nabla_{x_1} f_1(x_1, x_2^*) - \lambda_1^t \nabla_{x_1} g_1(x_1, x_2^*) = 0 \quad (7.6)$$

$$\nabla_{\lambda_1} L_1(x_1, x_2^*) : g_1(x_1, x_2^*) = 0 \quad (7.7)$$

$$\nabla_{x_2} L_2(x_1^*, x_2) : \nabla_{x_2} f_2(x_1^*, x_2) - \lambda_2^t \nabla_{x_2} g_2(x_1^*, x_2) = 0 \quad (7.8)$$

$$\nabla_{\lambda_2} L_2(x_1^*, x_2) : g_2(x_1^*, x_2) = 0 \quad (7.9)$$

Sob determinadas condições, uma solução de equilíbrio de Nash  $(x_1^*, x_2^*)$  para o problema (7.1) pode ser deduzida resolvendo-se o sistema de equações complementares (7.6)-(7.9) acima.

Um caso particular deste problema é representado pelo equilíbrio de Cournot aplicado ao modelo não linear de sistemas de potência, como apresentado no próximo item.

## 7.2.2 Equilíbrio de Cournot em Sistemas de Potência AC

Seja o mercado de energia integrado por duas grandes firmas formando parte do grupo *lider*, e participantes menores integrantes do grupo *seguidor*. O conjunto de variáveis pertencentes às duas grandes firmas é representado por  $x_1$  e  $x_2$ , enquanto  $y$  define o conjunto de variáveis dos participantes secundários. Um ponto  $(x_1^*, x_2^*, y^*)$  será uma solução de equilíbrio de Cournot se resolve, conjuntamente, os seguintes problemas de otimização:

$$\begin{array}{ll} \text{Min}_{x_1, \lambda_1} f_{1,1}(x_1, \lambda_1) & \text{Min}_{x_2, \lambda_2} f_{1,2}(x_2, \lambda_2) \\ \text{s.a } x_{1,l} \leq x_1 \leq x_{1,u} & \text{s.a } x_{2,l} \leq x_2 \leq x_{2,u} \\ \text{onde } \lambda_1 \text{ é solução de } (Pc_1) & \text{onde } \lambda_2 \text{ é solução de } (Pc_2) \quad (7.10) \\ \text{Min}_y f_2(y) & \text{Min}_y f_2(y) \\ \text{s.a } z(x_1, x_2^*, y) = 0 & \text{s.a } z(x_1^*, x_2, y) = 0 \\ y_l \leq y \leq y_u & y_l \leq y \leq y_u \end{array}$$

Observe-se que uma solução de (7.10) pode ser pensada como um caso particular do equilíbrio de Nash (7.1), onde o problema de equilíbrio dominante  $(Pc_1$  e  $Pc_2)$ , para cada

firma dominante, corresponde a um equilíbrio de Stackelberg, considerando-se a solução da outra grande firma como um parâmetro conhecido.

Representando cada subproblema em (7.10) pela sua *formulação de K.K.T. penalizada relaxada* (na forma (5.17)), obtêm-se os seguintes sub-problemas:

$$\text{Min}_{x_1, \lambda_1} f_{1,1}(x_1, \lambda_1) + t(\varepsilon_1^t \varepsilon_1 + \varepsilon_2^t \varepsilon_2) \quad (7.11)$$

$$\text{s.a } x_{1,l} \leq x_1 \leq x_{1,u} \quad (7.11a)$$

$$\partial_y f_2(y) + \lambda_1^t \nabla_y z(x_1, x_2^*, y) - \pi_{1y}^t + \pi_{2y}^t = 0 \quad (7.11b)$$

$$z(x_1, x_2^*, y) = 0 \quad (7.11c)$$

$$\pi_{1y} + (y - y_l) - Q_m(\pi_{1y}, y - y_l) + \Pi_{1y}(Y - Y_l)p_{1y} = \varepsilon_1 \quad (7.11d)$$

$$\pi_{2y} + (y_u - y) - Q_m(\pi_{2y}, y_u - y) + \Pi_{2y}(Y_u - Y)p_{2y} = \varepsilon_2 \quad (7.11e)$$

e

$$\text{Min}_{x_2, \lambda_2} f_{1,2}(x_2, \lambda_2) + t(\varepsilon_1^t \varepsilon_1 + \varepsilon_2^t \varepsilon_2) \quad (7.12)$$

$$\text{s.a } x_{2,l} \leq x_2 \leq x_{2,u} \quad (7.12a)$$

$$\partial_y f_2(y) + \lambda_1^t \nabla_y z(x_1^*, x_2, y) - \pi_{1y}^t + \pi_{2y}^t = 0 \quad (7.12b)$$

$$z(x_1^*, x_2, y) = 0 \quad (7.12c)$$

$$\pi_{1y} + (y - y_l) - Q_m(\pi_{1y}, y - y_l) + \Pi_{1y}(Y - Y_l)p_{1y} = \varepsilon_1 \quad (7.12d)$$

$$\pi_{2y} + (y_u - y) - Q_m(\pi_{2y}, y_u - y) + \Pi_{2y}(Y_u - Y)p_{2y} = \varepsilon_2 \quad (7.12e)$$

No próximo item são sugeridos desenvolvimentos de modelos explorando estas formulações penalizadas.

### 7.2.3 Propostas de Resolução do Problema de Equilíbrio de Cournot

Baseado na nossa experiência computacional, extensões de nosso trabalho são sugeridas para a resolução do problema de equilíbrio de Cournot – modelo AC de sistemas de potência.

- Desenvolvimento de um algoritmo iterativo que resolva, para cada firma dominante, um modelo de equilíbrio de Stackelberg (penalizado na solução de equilíbrio da outra

grande firma), utilizando o algoritmo de *pontos não interiores* - proposta desta dissertação de tese;

- Desenvolvimento de um algoritmo que resolva o sistema de equações complementares resultante da imposição das condições de otimalidade de primeira ordem para cada subproblema parametrizado, (7.11) e (7.12);
- Extensão do algoritmo de Cournot, considerado numericamente mais robusto, para um equilíbrio de Nash, com um número finito de firmas dominantes participantes no mercado.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Hogan, W. W. “A Market Power Model with Strategic Interaction in Electricity Networks”, <http://ksghome.harvard.edu/~whogan.cbg.ksg/>.
- [2] Monticelli A., *Fluxo de Carga em Redes de Energia Elétrica*, Editora Edgard Blücher, São Paulo, 1983.
- [3] Gibbons, R., *Game Theory for Applied Economists*, Princeton University Press, New Jersey, 1992.
- [4] Green R. J. and Newbery D. M. “Competition in the British Electricity Spot Market”, *Journal of Political Economy*, v. 100, pp. 929-953, 1992.
- [5] Hogan, W. W. “Contract Networks for Electric Power Transmission”, *Journal of Regulatory Economics*, pp. 211-242, 1992.
- [6] Borenstein, S., Bushnell, J., Kahn, E. and Stoff S. “Market Power in California Electricity Markets”, *Utilities Policy*, v. 5, pp. 219-236, 1995.
- [7] Otero-Novas, I, Meseguer C., Battle C and Alba J. J. “A Simulation Model for a Competitive Generation Market”. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 15, pp. 250-256, February 2000.
- [8] Kelman, R. *Esquemas Competitivos em Sistemas Hidrotérmicos: Eficiência Econômica e Comportamento Estratégico*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, Agosto 1999.
- [9] Barroso, L. A. N. *Esquemas Competitivos em Sistemas Hidrotérmicos: Comportamento Estratégico de Agentes Geradores em Ambiente de Mercado*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, Maio 2000.
- [10] Hao S. “A Study of Basic Bidding Strategy in Clearing Pricing Auctions”, *PICA 99*, 16-21 May 1999, pp. 55-60.
- [11] Hao S. “A Study of Basic Bidding Strategy in Clearing Pricing Auctions”. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 15, pp. 975-980, August 2000.

- [12] Hobbs B. H. Metzler C. B. and Jong-hi Pang. "Strategy Gaming Analysis for Electric Power Systems: An MPEC Approach". *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 15, pp. 638-645, May 2000.
- [13] Song H, Liu C., Lawarrée J. and Dahlgreen R. W. "Optimal Electricity Supply Bidding by Markov Decision Process". *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 15, pp. 618-624, May 2000.
- [14] Fosso O.B., Gjelsvik A, Haugstad A, Mo B. and Wangensteen I. "Generation scheduling in a deregulated system. The Norwegian case" *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 14, pp.75-81, February 1999.
- [15] Fushuan W. and Kumar D. "Optimal Bidding Strategies and Modeling of Imperfect Information Among Competitive Generators" *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 16, pp.15-21, February 2001.
- [16] Luo Z.Q., Pang J. S. and Ralph D. *Mathematical Programming with Equilibrium Constraints*, N.Y. Cambridge Univ. Press, 1996.
- [17] Stackelberg, H. V., *The Theory of Market Economy*, Oxford University Press, Oxford, 1952.
- [18] Campêlo, M. *Programação Linear em Dois Níveis: Uma Abordagem Teórica e Computacional*, Tese de D.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1999.
- [19] Martinez J.M. and Andreani R. "On the solution of mathematical programming problems with equilibrium constraints", To appear in *Mathematical Methods of Operations Research*.
- [20] Herskovits J. and Leontiev A "New Optimality Conditions and an Algorithm for Bilevel Programming", In *50<sup>o</sup> SBA*, 1999.
- [21] Fischer A. "A special Newton-type optimization method", *Optimization* 24, pp. 269-284, 1992.
- [22] Fischer A. "A Newton type method for positive semidefinite linear complementary problems", *Journal of Optimization Theory and Applications* 86, pp. 585-608, 1995.

- [23] Quintana V. H. and Torres G. L. “Optimal Power Flow by Interior and Non-Interior Point Methods for Nonlinear Programming”, .....
- [24] Harvey S. M, Hogan, W. W. and Pope S. L. “Transmission Capacity Reservation and Transmission Congestion Contract”, <http://ksghome.harvard/>.
- [25] MINOS5, Desenvolvido por Murtagh B. A. “University of New South Wales” e Gill P. E., Murray W., Saunders M. A. e Wright M.H. “Systems Optimization Laboratory - Stanford University”.
- [26] Chvátal V., *Linear Programming*, W. H. Freeman and Company, NewYork/San Francisco, 1983.
- [27] Marcia.
- [28] Granville S., “Optimal Reactive Dispatch Through Interior Point Method”, *IEEE PES*, No 93, February 1993.
- [29] Latorre, M. de L. *Aplicação do Método de Pontos Interiores Primal-Dual para a Resolução do Problema de Fluxo de Potência Ótimo*, Tese de M.Sc., COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, RJ, Brasil, 1995.
- [30] Latorre M.L., Oliveira M.L., Soto J.O. and Granville S., “Voltage Collapse and the Optimal Power Flow Problem in Power Systems”, *Bulk Power System Dynamics and Control IV – Re-structuring*, August 24-28, Santorini, Greece.
- [31] Wright M., “Interior Methods for Constrained Optimization”, *Acta Numérica*, pp: 341-407, 1991.
- [32] Vanderbei R. J. and Shanno D. F. “An interior-point algorithm for nonconvex nonlinear programming”. *Computational Optimization and Applications*, v. 13, pp. 231-252, 1999.
- [33] Krejic N., Martinez J. M., Mello M. P. and Pilotta E. V. “Validation of an Augmented Lagrangian algorithm with a Gauss-Newton Hessian approximation using a set of hard-spheres problems”. *Computational Optimization and Applications*, v. 16, pp. 247-263, 2000.

- [34] Bazarra M.S., Sharali H.D. and Shetty C.M. "Nonlinear Programming: Theory and Algorithm", Wiley, 2<sup>nd</sup> Edition, November 1992.
- [35] Tinney W.F. e Walker J.W. "Direct Solutions of Sparse Network Equations by Optimally Ordered Triangular Factorization Procced", *IEEE Transactions on PAS* 55:1801-1897, 1967.

## APÊNDICE A

### A Elementos da Matriz Solução

Dado o sistema de equações (5.34)-(5.46) e um ponto  $z=(x,y,\lambda,\pi_{1y},\pi_{2y},\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4,\pi_{1x},\pi_{2x},$

$\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ , uma aproximação linear de primeira ordem de N-R encontra um passo incremental  $\Delta z=(\Delta x,\Delta y,\Delta \lambda,\Delta \pi_{1y},\Delta \pi_{2y},\Delta \beta_1,\Delta \beta_2,\Delta \beta_3,\Delta \beta_4,\Delta \pi_{1x},\Delta \pi_{2x},\Delta \varepsilon_1,\Delta \varepsilon_2)$ , a partir da resolução do seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} H_{xx} \Delta x + H_{xy} \Delta y + J_{\beta_1 x}^t \Delta \beta_1 + H_{x\lambda} \Delta \lambda + J_{\beta_2 x}^t \Delta \beta_2 + \\ H_{x\pi_{1x}} \Delta \pi_{1x} + H_{x\pi_{2x}} \Delta \pi_{2x} \end{aligned} = -(\partial_x L_1) \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} H_{xy}^t \Delta x + H_{yy} \Delta y + J_{\beta_1 y}^t \Delta \beta_1 + H_{y\lambda} \Delta \lambda + J_{\beta_2 y}^t \Delta \beta_2 + \\ H_{y\pi_{1y}} \Delta \pi_{1y} + J_{\beta_3 y}^t \Delta \beta_3 + H_{y\pi_{2y}} \Delta \pi_{2y} + J_{\beta_4 y}^t \Delta \beta_4 \end{aligned} = -(\partial_y L_1) \quad (\text{A.2})$$

$$J_{\beta_1 x} \Delta x + J_{\beta_1 y} \Delta y = -(\partial_{\beta_1} L_1) \quad (\text{A.3})$$

$$H_{x\lambda}^t \Delta x + H_{y\lambda}^t \Delta y + J_{\beta_2 \lambda}^t \Delta \beta_2 = -(\partial_{\lambda} L_1) \quad (\text{A.4})$$

$$J_{\beta_2 y} \Delta y + J_{\beta_2 \lambda} \Delta \lambda + J_{\beta_2 \pi_{1y}} \Delta \pi_{1y} + J_{\beta_2 \pi_{2y}} \Delta \pi_{2y} = -(\partial_{\beta_2} L_1) \quad (\text{A.5})$$

$$H_{y\pi_{1y}}^t \Delta y + J_{\beta_2 \pi_{1y}} \Delta \beta_2 + H_{\pi_{1y}\pi_{1y}} \Delta \pi_{1y} + J_{\beta_3 \pi_{1y}}^t \Delta \beta_3 = -(\partial_{\pi_{1y}} L_1) \quad (\text{A.6})$$

$$J_{\beta_3 y} \Delta y + J_{\beta_3 \pi_{1y}} \Delta \pi_{1y} + J_{\beta_3 \varepsilon_1} \Delta \varepsilon_1 = -(\partial_{\beta_3} L_1) \quad (\text{A.7})$$

$$H_{y\pi_{2y}}^t \Delta y + J_{\beta_2 \pi_{2y}} \Delta \beta_2 + H_{\pi_{2y}\pi_{2y}} \Delta \pi_{2y} + J_{\beta_4 \pi_{2y}}^t \Delta \beta_4 = -(\partial_{\pi_{2y}} L_1) \quad (\text{A.8})$$

$$J_{\beta_4 y} \Delta y + J_{\beta_4 \pi_{2y}} \Delta \pi_{2y} + J_{\beta_4 \varepsilon_2} \Delta \varepsilon_2 = -(\partial_{\beta_4} L_1) \quad (\text{A.9})$$

$$J_{\beta_3 \varepsilon_1}^t \Delta \beta_3 + H_{\varepsilon_1 \varepsilon_1} \Delta \varepsilon_1 = -(\partial_{\varepsilon_1} L_1) \quad (\text{A.10})$$

$$J_{\beta_4 \varepsilon_2}^t \Delta \beta_4 + H_{\varepsilon_2 \varepsilon_2} \Delta \varepsilon_2 = -(\partial_{\varepsilon_2} L_1) \quad (\text{A.11})$$

$$H_{1,x} \Delta x + H_{1,\pi_{1x}} \Delta \pi_{1x} = -(H_1) \quad (\text{A.12})$$

$$H_{2,x} \Delta x + H_{2,\pi_{2x}} \Delta \pi_{2x} = -(H_2) \quad (\text{A.13})$$

onde:

$$H_{xx} = \partial_x^2 f_1(x, \lambda) - \beta_1^t \nabla_x^2 z(x, y) - \beta_2^t \lambda^t \nabla_{yx^2}^3 z(x, y)$$

$$\begin{aligned}
H_{xy} &= -\beta_1^t \nabla_{xy}^2 z(x, y) - \beta_2^t \lambda^t \nabla_{y^2 x}^3 z(x, y) \\
J_{\beta_1 x} &= -\nabla_x z(x, y) \\
H_{x\lambda} &= \partial_{x\lambda}^2 f_1(x, \lambda) - \beta_2^t \nabla_{yx}^2 z(x, y) \\
J_{\beta_2 x}^t &= -\lambda^t \nabla_{yx}^2 z(x, y) \\
H_{x\pi_{1x}} &= -I_n \\
H_{x\pi_{2x}} &= I_n \\
H_{yy} &= -\beta_1 \nabla_y^2 z(x, y) - \nabla_y [\beta_2^t (\partial_y^2 f_2(y) + \lambda^t \nabla_y^2 z(x, y))] + \\
&\quad \beta_3 [\nabla_y^2 Q_m(\pi_{1y}, y - y_1)] + \beta_4 [\nabla_y^2 Q_m(\pi_{2y}, y_u - y)] \\
J_{\beta_{1y}} &= -\nabla_y z(x, y) \\
H_{y\lambda} &= -\beta_2^t \nabla_y^2 z(x, y) \\
J_{\beta_{2y}} &= -[\partial_y^2 f_2(y) + \nabla_y^2 z(x, y)\lambda] \\
H_{y\pi_{1y}} &= \beta_3 \nabla_{y\pi_{1y}}^2 Q_m(\pi_{1y}, y - y_1) - B_3 P_{1y} \\
J_{\beta_{3y}} &= -[I_m - \nabla_y Q_m(\pi_{1y}, y - y_1) + \Pi_{1y} P_{1y}] \\
H_{y\pi_{2y}} &= \beta_4 \nabla_{y\pi_{2y}}^2 Q_m(\pi_{2y}, y_u - y) - B_4 P_{2y} \\
J_{\beta_{4y}} &= -[I_m - \nabla_y Q_m(\pi_{2y}, y_u - y) - \Pi_{2y} P_{2y}] \\
B_3 &\text{ é definida como uma matriz diagonal } m \times m, \text{ com elementos diagonais iguais} \\
&\text{ a } (\beta_3)_j \forall j=1, \dots, m \\
B_4 &\text{ é definida como uma matriz diagonal } m \times m, \text{ com elementos diagonais iguais} \\
&\text{ a } (\beta_4)_j \forall j=1, \dots, m \\
J_{\beta_{2\lambda}} &= -\nabla_y^t z(x, y) \\
J_{\beta_{2\pi_{1y}}} &= I_m \\
J_{\beta_{2\pi_{2y}}} &= -I_m \\
H_{\pi_{1y}\pi_{1y}} &= \beta_3 [\nabla_{\pi_{1y}\pi_{1y}}^2 Q_m(\pi_{1y}, y - y_1)] \\
J_{\beta_{3\pi_{1y}}} &= -[I_m - \nabla_{\pi_{1y}} Q_m(\pi_{1y}, y - y_1) + (Y - Y_1) P_{1y}]
\end{aligned}$$

$$J_{\beta_3 \varepsilon_1} = I_m$$

$$H_{\pi_{2y} \pi_{2y}} = \beta_4 [\nabla_{\pi_{2y} \pi_{2y}}^2 Q_m(\pi_{2y}, y_u - y)]$$

$$J_{\beta_4 \pi_{2y}} = -[I_m - \nabla_{\pi_{2y}} Q_m(\pi_{2y}, y_u - y) + (Y_u - Y)P_{2y}]$$

$$J_{\beta_4 \varepsilon_2} = I_m$$

$$H_{\varepsilon_1 \varepsilon_1} = 2tI_m$$

$$H_{\varepsilon_2 \varepsilon_2} = 2tI_m$$

$$H_{1,x} = [I_n - \nabla_x Q_n(\pi_{1x}, x - x_1) + \Pi_{1x} P_{1x}]$$

$P_{1x}$  é definida como uma matriz diagonal  $n \times n$ , com elementos diagonais iguais a  $(p_{1x})_i \forall i=1, \dots, n$

$$H_{1, \pi_{1x}} = [I_n - \nabla_{\pi_{1x}} Q_n(\pi_{1x}, x - x_1) + (X - X_1)P_{1x}]$$

$$H_{2,x} = [-I_n - \nabla_x Q_n(\pi_{2x}, x_u - x) - \Pi_{2x} P_{2x}]$$

$P_{2x}$  é definida como uma matriz diagonal  $n \times n$ , com elementos diagonais iguais a  $(p_{2x})_i \forall i=1, \dots, n$

$$H_{1, \pi_{2x}} = [I_n - \nabla_{\pi_{2x}} Q_n(\pi_{2x}, x_u - x) + (X_u - X)P_{2x}]$$

Simplificações na matriz solução associada a (A.1)-(A.13) podem ser obtidas através de pequenas manipulações algébricas. De (A.10) e (A.11) é possível obter  $\Delta \varepsilon_1$  e  $\Delta \varepsilon_2$  em função de  $\Delta \beta_3$  e  $\Delta \beta_4$ , como:

$$\Delta \varepsilon_1 = (H_{\varepsilon_1 \varepsilon_1})^{-1} [-(\partial_{\varepsilon_1} L_1) - J_{\beta_3 \varepsilon_1}^t \Delta \beta_3] \quad (A.14)$$

$$\Delta \varepsilon_2 = (H_{\varepsilon_2 \varepsilon_2})^{-1} [-(\partial_{\varepsilon_2} L_1) - J_{\beta_4 \varepsilon_2}^t \Delta \beta_4] \quad (A.15)$$

Analogamente,  $\Delta \pi_{1x}$  e  $\Delta \pi_{2x}$  são deduzidos em função de  $\Delta x$ , a partir de (A.12) e (A.13):

$$\Delta \pi_{1x} = (H_{1, \pi_{1x}})^{-1} [-(H_1) - H_{1,x} \Delta x] \quad (A.16)$$

$$\Delta \pi_{2x} = (H_{2, \pi_{2x}})^{-1} [-(H_2) - H_{2,x} \Delta x] \quad (A.17)$$

Substituindo-se  $\Delta \varepsilon_1$  e  $\Delta \varepsilon_2$  em (A.7) e (A.9), respectivamente, por (A.14) e (A.15), as seguintes modificações são introduzidas no sistema de equações de Newton-Raphson (A.1)-(A.13):

$$J_{\beta_3 y} \Delta y + J_{\beta_3 \pi_{1y}} \Delta \pi_{1y} + Z_{\beta_3 \beta_3} \Delta \beta_3 = -(\partial_{\beta_3} L_1 - J_{\beta_3 \varepsilon_1} (H_{\varepsilon_1 \varepsilon_1})^{-1} \partial_{\varepsilon_1} L_1) \quad (A.18)$$

$$J_{\beta_4 y} \Delta y + J_{\beta_4 \pi_{2y}} \Delta \pi_{2y} + Z_{\beta_4 \beta_4} \Delta \beta_4 = -(\partial_{\beta_4} L_1 - J_{\beta_4 \varepsilon_2} (H_{\varepsilon_2 \varepsilon_2})^{-1} \partial_{\varepsilon_2} L_1) \quad (\text{A.19})$$

onde:

$$Z_{\beta_3 \beta_3} = -J_{\beta_3 \varepsilon_1} (H_{\varepsilon_1 \varepsilon_1})^{-1} J_{\beta_3 \varepsilon_1}^t$$

$$Z_{\beta_4 \beta_4} = -J_{\beta_4 \varepsilon_2} (H_{\varepsilon_2 \varepsilon_2})^{-1} J_{\beta_4 \varepsilon_2}^t$$

Analogamente, substituindo  $\Delta \pi_{1x}$  e  $\Delta \pi_{2x}$  em (A.1), respectivamente, por (A.16) e (A.17), obtém-se:

$$\begin{aligned} H_{xx} \Delta x + H_{xy} \Delta y + J_{\beta_{1x}}^t \Delta \beta_1 + H_{x\lambda} \Delta \lambda + J_{\beta_{2x}}^t \Delta \beta_2 \\ = -(\partial_x L_1 - H_{x\pi_{1x}} (H_{1,\pi_{1x}})^{-1} H_1 - H_{x\pi_{2x}} (H_{2,\pi_{2x}})^{-1} H_2) \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

onde:

$$H_{xx} = H_{xx} - H_{x\pi_{1x}} (H_{1,\pi_{1x}})^{-1} H_{1,x} - H_{x\pi_{2x}} (H_{2,\pi_{2x}})^{-1} H_{2,x}$$

Das reformulações contidas nos passos (A.14)-(A.20), o sistema de equações (A.1)-(A.13) pode ser escrito de forma matricial como a seguir:

$$\begin{bmatrix} H_{xx} & H_{xy} & J_{\beta_{1x}}^t & H_{x\lambda} & J_{\beta_{2x}}^t & \phi & \phi & \phi & \phi \\ H_{xy}^t & H_{yy} & J_{\beta_{1y}}^t & H_{y\lambda} & J_{\beta_{2y}}^t & H_{y\pi_{1y}} & J_{\beta_{3y}}^t & H_{y\pi_{2y}} & J_{\beta_{4y}}^t \\ J_{\beta_{1x}} & J_{\beta_{1y}} & \phi \\ H_{x\lambda}^t & H_{y\lambda}^t & \phi & \phi & J_{\beta_{2\lambda}}^t & \phi & \phi & \phi & \phi \\ J_{\beta_{2x}} & J_{\beta_{2y}} & \phi & J_{\beta_{2\lambda}} & \phi & J_{\beta_{2\pi_{1y}}}^t & \phi & J_{\beta_{2\pi_{2y}}}^t & \phi \\ \phi & H_{y\pi_{1y}}^t & \phi & \phi & J_{\beta_{2\pi_{1y}}} & H_{\pi_{1y}\pi_{1y}} & J_{\beta_{3\pi_{1y}}}^t & \phi & \phi \\ \phi & J_{\beta_{3y}} & \phi & \phi & \phi & J_{\beta_{3\pi_{1y}}} & Z_{\beta_3 \beta_3} & \phi & \phi \\ \phi & H_{y\pi_{2y}}^t & \phi & \phi & J_{\beta_{2\pi_{2y}}} & \phi & \phi & H_{\pi_{2y}\pi_{2y}} & J_{\beta_{4\pi_{2y}}}^t \\ \phi & J_{\beta_{4y}} & \phi & \phi & \phi & \phi & \phi & J_{\beta_{4\pi_{2y}}} & Z_{\beta_4 \beta_4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x \\ \Delta y \\ \Delta \beta_1 \\ \Delta \lambda \\ \Delta \beta_2 \\ \Delta \pi_{1y} \\ \Delta \beta_3 \\ \Delta \pi_{2y} \\ \Delta \beta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_{\beta_1} \\ r_\lambda \\ r_{\beta_2} \\ r_{\pi_{1y}} \\ r_{\beta_3} \\ r_{\pi_{2y}} \\ r_{\beta_4} \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

onde:

$$r_x = -(\partial_x L_1 - H_{x\pi_{1x}} (H_{1,\pi_{1x}})^{-1} H_1 - H_{x\pi_{2x}} (H_{2,\pi_{2x}})^{-1} H_2)$$

$$r_y = -(\partial_y L_1)$$

$$r_{\beta_1} = -(\partial_{\beta_1} L_1)$$

$$r_{\lambda} = -(\partial_\lambda L_1)$$

$$r_{\beta 2} = -(\partial_{\beta 2} L_1)$$

$$r_{\pi_{1y}} = -(\partial_{\pi_{1y}} L_1)$$

$$r_{\beta 3} = -(\partial_{\beta 3} L_1) - J_{\beta 3 \varepsilon_1} (H_{\varepsilon_1 \varepsilon_1})^{-1} \partial_{\varepsilon_1} L_1$$

$$r_{\pi_{2y}} = -(\partial_{\pi_{2y}} L_1)$$

$$r_{\beta 4} = -(\partial_{\beta 4} L_1 - J_{\beta 4 \varepsilon_2} (H_{\varepsilon_2 \varepsilon_2})^{-1} \partial_{\varepsilon_2} L_1)$$

sendo  $\Delta \varepsilon_1$ ,  $\Delta \varepsilon_2$ ,  $\Delta \pi_{1x}$  e  $\Delta \pi_{2x}$  calculados a partir da solução de (A.21) como a seguir:

$$\Delta \varepsilon_1 = (H_{\varepsilon_1 \varepsilon_1})^{-1} [-(\partial_{\varepsilon_1} L_1) - J_{\beta 3 \varepsilon_1}^t \Delta \beta_3] \quad (\text{A.22})$$

$$\Delta \varepsilon_2 = (H_{\varepsilon_2 \varepsilon_2})^{-1} [-(\partial_{\varepsilon_2} L_1) - J_{\beta 4 \varepsilon_2}^t \Delta \beta_4] \quad (\text{A.23})$$

$$\Delta \pi_{1x} = (H_{1, \pi_{1x}})^{-1} [-(H_1) - H_{1,x} \Delta x] \quad (\text{A.24})$$

$$\Delta \pi_{2x} = (H_{2, \pi_{2x}})^{-1} [-(H_2) - H_{2,x} \Delta x] \quad (\text{A.25})$$

Da resolução do sistema de equações (A.21) e (A.22)-(A.25), resulta uma direção de acréscimo (ou decréscimo)  $\Delta z = (\Delta x, \Delta y, \Delta \lambda, \Delta \pi_{1y}, \Delta \pi_{2y}, \Delta \beta_1, \Delta \beta_2, \Delta \beta_3, \Delta \beta_4, \Delta \pi_{1x}, \Delta \pi_{2x}, \Delta \varepsilon_1, \Delta \varepsilon_2)$ , partindo-se de um dado ponto  $z = (x, y, \lambda, \pi_{1y}, \pi_{2y}, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \pi_{1x}, \pi_{2x}, \varepsilon_1, \varepsilon_2)$ .

## APÊNDICE B

### B Estrutura da Matriz

Será analisada neste item a estrutura da matriz dada pela equação (A.21). A fatoração da matriz será baseada em uma estrutura de elementos diagonais, (1x1) e (2x2), de forma a evitar singularidades.

Os grupos de variáveis primais  $(x,y,\lambda,\pi_{1y},\pi_{2y})$  e variáveis duais  $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ , na resolução do sistema de equações (A.21), podem ser subdivididos nas seguintes classes:

- Variáveis primais do problema do grupo *seguidor* ( $y$ )

Representadas pelo módulo de tensão e o ângulo de tensão em todas as barras da rede elétrica. Também formam parte desta classe as variáveis associadas às unidades geradoras (geração de potência ativa e geração de potência reativa) dos integrantes do grupo *seguidor*.

- Variáveis duais do problema do grupo *seguidor*  $(\lambda,\pi_{1y},\pi_{2y})$

Formam parte destas variáveis os multiplicadores de Lagrange  $\lambda$ , associados às restrições de balanço de potências ativa e reativa em cada nó da rede, e as variáveis duais  $(\pi_{1y},\pi_{2y})$  associadas às restrições de canalização das variáveis primais ( $y$ ) do problema do grupo *seguidor*

- Variáveis primais do problema do grupo *líder* ( $x$ )

Definidas pela variável  $x$  associada às unidades geradoras (geração de potência ativa) do problema do grupo *líder*

- Variáveis duais do problema do grupo *líder*  $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$

Correspondem aos multiplicadores de Lagrange associados às condições de otimalidade de primeira ordem do problema do grupo *seguidor*  $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ .

Considere-se o caso mais simples, onde as restrições  $z(x,y)$  na formulação (5.1) definem somente as restrições de balanço de potência ativa e balanço de potência nas barras. Na *formulação de K.K.T.* do problema de dois níveis (5.16), cada nó da rede contribui com quatro equações nas restrições do problema, duas delas associadas aos balanços de potência

ativa e potência reativa (5.16a), e as duas restantes associadas às condições de otimalidade de primeira ordem do subproblema do nível inferior (5.16b). Podem-se considerar o ângulo nodal ( $y=\theta$ ) como a variável associada ao balanço de potência ativa, o módulo de tensão ( $y=V$ ) como a variável associada ao balanço de potência reativa, e os multiplicadores de Lagrange ( $\lambda=\lambda_\theta$  e  $\lambda=\lambda_V$ ) associados, respectivamente, às condições de otimalidade de primeira ordem nas restrições de balanço de potência ativa e reativa. Agrupando estas quatro variáveis em pares com os multiplicadores de Lagrange ( $\beta_1=\beta_\theta, \beta_1=\beta_V, \beta_2=\beta_{\lambda_\theta}$  e  $\beta_2=\beta_{\lambda_V}$ ) do problema do grupo *líder*, obtêm-se os seguintes quatro pares de variáveis:  $(\theta, \beta_\theta)$ ,  $(V, \beta_V)$ ,  $(\lambda_\theta, \beta_{\lambda_\theta})$  e  $(\lambda_V, \beta_{\lambda_V})$ . Existem, adicionalmente, no sistema de equações (A.21), dois pares de variáveis associados às condições de folgas complementares do problema do grupo *seguidor*:  $(\pi_{1y}=\pi_{1v}, \beta_3=\beta_{\pi_{1v}})$  e  $(\pi_{2y}=\pi_{2v}, \beta_4=\beta_{\pi_{2v}})$ , para cada nó da rede.

Pode-se então concluir que as linhas da matriz principal no sistema de equações (A.21) podem ser reordenadas, obtendo-se uma estrutura em blocos diagonais (1x1), formadas pelas linhas associadas à variável  $x$ , e blocos diagonais (2x2):  $(\theta, \beta_{1\theta})$ ,  $(V, \beta_{1V})$ ,  $(\lambda_\theta, \beta_{\lambda_\theta})$ ,  $(\lambda_V, \beta_{\lambda_V})$ ,  $(\pi_{1v}, \beta_{\pi_{1v}})$  e  $(\pi_{2v}, \beta_{\pi_{2v}})$ , compostos por uma variável primal e uma variável dual, respectivamente.

Na próxima seção será considerada a estrutura completa da matriz, elemento a elemento, para um sistema com duas barras e uma linha de interligação entre as mesmas.

## B.1 Estrutura de Esparsidade

Como visto na seção anterior, as variáveis que formam parte da estrutura da matriz podem ser divididas em aquelas que aparecem associadas a multiplicadores de Lagrange formando blocos diagonais (2x2) e as restantes que entram na estrutura da matriz com blocos diagonais (1x1). Baseado nestas observações, as colunas e linhas da matriz, no sistema de equações (A.21), são permutadas e agrupadas, obtendo-se a seguinte partição:

**HB (Heavy Border):** formada por linhas e colunas associadas aos blocos diagonais (2x2)

**LB (Light Border):** contendo os elementos restantes da matriz

Para compreender melhor esta estrutura, seja o sistema elétrico na Figura B.1, formado por duas barras, uma linha de transmissão entre as mesmas e um gerador de potência ativa pertencendo ao grupo *líder*, associado à barra número 1.



Figura B.1 – Sistema de duas barras

Neste sistema, teremos os termos da HB e da LB agrupados, respectivamente, como a seguir:

*Elementos da HB*: correspondem a 6 pares de variáveis para cada barra, totalizando 12 blocos diagonais (2x2):  $(\theta_1, \beta_{\theta 1})$ ,  $(V_1, \beta_{V 1})$ ,  $(\theta_2, \beta_{\theta 2})$ ,  $(V_2, \beta_{V 2})$ ,  $(\lambda_{\theta 1}, \beta_{\lambda \theta 1})$ ,  $(\lambda_{V 1}, \beta_{\lambda V 1})$ ,  $(\lambda_{\theta 2}, \beta_{\lambda \theta 2})$ ,  $(\lambda_{V 2}, \beta_{\lambda V 2})$ ,  $(\pi_{1V 1}, \beta_{\pi 11})$ ,  $(\pi_{2V 1}, \beta_{\pi 21})$ ,  $(\pi_{1V 2}, \beta_{\pi 12})$  e  $(\pi_{2V 2}, \beta_{\pi 22})$ .

*Elementos da LB*: corresponde à geração de potência ativa na barra número 1,  $pg_1$ , formando um único bloco diagonal (1x1).

Baseado nestas observações, é mostrada, na Figura B.2, a estrutura da matriz resultante para o sistema de duas barras da Figura B.1. Dada a simetria em estrutura da matriz, somente os elementos diferentes de zero da triangular superior da mesma foram representados, onde  $\underline{h}$  corresponde a termos da Hessiana do Lagrangeano da *formulação de K.K.T.* do problema de dois níveis, e  $\underline{j}$  a termos do Jacobiano das restrições.

A seguir, serão analisados cada um dos termos desta matriz em separado.

### B.1.1 Estrutura da Light Border

Os elementos diagonais da LB correspondem a blocos (1x1) definidos por:

$$\square \text{ Bloco diagonal } 1 \times 1 - pg_1: \quad H_{pg_1 \, pg_1}$$

onde:

$$H_{pg_1 \, pg_1} = H_{pg_1 \, pg_1} - H_{pg_1 \, \pi_1 \, pg_1} (H_{1, \pi_1 \, pg_1})^{-1} H_{1, pg_1} - H_{pg_1 \, \pi_2 \, pg_1} (H_{2, \pi_2 \, pg_1})^{-1} H_{2, pg_1}$$



Os elementos fora da diagonal, para este controle, relacionam a dependência entre a geração de potência ativa do grupo *líder*, representada por  $pg_1$ , e variáveis pertencentes à HB.

□ *Linha associada ao bloco diagonal 1x1 ( $pg_1$ )*

$\beta_{\theta i}$	...	...	$\lambda_{\theta i}$	$\beta_{\lambda \theta i}$
$J_{\beta_{\theta i} pg_1}$	...	...	$H_{pg_1 \lambda_{\theta i}}$	

Figura B.3 – Variável geração potência ativa líder

### B.1.2 Estrutura Básica da Heavy Border

Antes de descrever cada um dos elementos que definem a matriz HB, é importante analisar a inversibilidade de seus blocos diagonais 2x2.

□ *Bloco diagonal 2x2 – ( $\theta_i, \beta_{\theta i}$ ):* 
$$\begin{bmatrix} H_{\theta_i \theta_i} & J_{\theta_i \beta_{\theta i}}^t \\ J_{\theta_i \beta_{\theta i}} & \phi \end{bmatrix} \quad i=1,2$$

□ *Bloco diagonal 2x2 – ( $V_i, \beta_{V_i}$ ):* 
$$\begin{bmatrix} H_{V_i V_i} & J_{V_i \beta_{V_i}}^t \\ J_{V_i \beta_{V_i}} & \phi \end{bmatrix} \quad i=1,2$$

□ *Bloco diagonal 2x2 – ( $\lambda_{\theta i}, \beta_{\lambda \theta i}$ ):* 
$$\begin{bmatrix} \phi & J_{\lambda_{\theta i} \beta_{\lambda \theta i}}^t \\ J_{\lambda_{\theta i} \beta_{\lambda \theta i}} & \phi \end{bmatrix} \quad i=1,2$$

□ *Bloco diagonal 2x2 – ( $\lambda_{V_i}, \beta_{\lambda V_i}$ ):* 
$$\begin{bmatrix} \phi & J_{V_i \beta_{\lambda V_i}}^t \\ J_{V_i \beta_{\lambda V_i}} & \phi \end{bmatrix} \quad i=1,2$$

□ *Bloco diagonal 2x2 – ( $\pi_{ij}, \beta_{\pi ij}$ ):* 
$$\begin{bmatrix} H_{\pi_{ij} \pi_{ij}} & J_{\beta_{\pi ij} \pi_{ij}}^t \\ J_{\beta_{\pi ij} \pi_{ij}} & Z_{\beta_{\pi ij} \beta_{\pi ij}} \end{bmatrix} \quad i,j=1,2$$

Observe-se que cada um destes blocos diagonais (2x2) é inversível e, conseqüentemente, o agrupamento de variáveis na HB encontra-se bem definido.

Sejam, a seguir, os elementos de cada uma destas linha da matriz, agrupadas em pares de variáveis.

□ *Linha associada ao bloco 2x2 ( $\theta_1, \beta_{\theta 1}$ )*

$V_1$	$\beta_{V1}$	$\theta_2$	$\beta_{\theta 2}$	$V_2$	$\beta_{V2}$	$\lambda_{\theta 1}$	$\beta_{\lambda \theta 1}$	$\lambda_{v1}$	$\beta_{\lambda v1}$	$\lambda_{\theta 2}$	$\beta_{\lambda \theta 2}$	$\lambda_{v2}$	$\beta_{\lambda v2}$
$H_{\theta 1 v1}$	$J'_{\beta v1 \theta 1}$	$H_{\theta 1 \theta 2}$	$J'_{\beta \theta 2 \theta 1}$	$H_{\theta 1 v2}$	$J'_{\beta v2 \theta 1}$	$H_{\theta 1 \lambda \theta 1}$	$J'_{\beta \lambda \theta 1 \theta 1}$	$H_{\theta 1 \lambda v1}$	$J'_{\beta \lambda v1 \theta 1}$	$H_{\theta 1 \lambda \theta 2}$	$J'_{\beta \lambda \theta 2 \theta 1}$	$H_{\theta 1 \lambda v2}$	$J'_{\beta \lambda v2 \theta 1}$
$J_{\beta \theta 1 v1}$		$J_{\beta \theta 1 \theta 2}$		$J_{\beta \theta 1 v2}$									

Figura B.4 – Variável ângulo de tensão

□ *Linha associada ao bloco 2x2 ( $V_1, \beta_{V1}$ )*

$\theta_2$	$\beta_{\theta 2}$	$V_2$	$\beta_{V2}$	$\lambda_{\theta 1}$	$\beta_{\lambda \theta 1}$	$\lambda_{v1}$	$\beta_{\lambda v1}$	$\lambda_{\theta 2}$	$\beta_{\lambda \theta 2}$	$\lambda_{v2}$	$\beta_{\lambda v2}$	$\pi_{11}$	$\beta_{\pi 11}$	$\pi_{21}$	$\beta_{\pi 21}$
$H_{V1 \theta 2}$	$J'_{\beta \theta 2 v1}$	$H_{V1 v2}$	$J'_{\beta v2 v1}$	$H_{V1 \lambda \theta 1}$	$J'_{\beta \lambda \theta 1 v1}$	$H_{V1 \lambda v1}$	$J'_{\beta \lambda v1 v1}$	$H_{V1 \lambda \theta 2}$	$J'_{\beta \lambda \theta 2 v1}$	$H_{V1 \lambda v2}$	$J'_{\beta \lambda v2 v1}$	$H_{V1 \pi 11}$	$J'_{\beta \pi 11 v1}$	$H_{V1 \pi 21}$	$J'_{\beta \pi 21 v1}$
$J_{\beta v1 \theta 2}$		$J_{\beta v1 v2}$													

Figura B.5 – Variável módulo de tensão

□ *Linha associada ao bloco 2x2 ( $\lambda_{\theta 1}, \beta_{\lambda \theta 1}$ )*

$\lambda_{v1}$	$\beta_{\lambda v1}$	$\lambda_{\theta 2}$	$\beta_{\lambda \theta 2}$	$\lambda_{v2}$	$\beta_{\lambda v2}$
	$J'_{\beta \lambda v1 \lambda \theta 1}$		$J'_{\beta \lambda \theta 2 \lambda \theta 1}$		$J'_{\beta \lambda v2 \lambda \theta 1}$
$J_{\beta \lambda \theta 1 \lambda v1}$		$J_{\beta \lambda \theta 1 \lambda \theta 2}$		$J_{\beta \lambda \theta 1 \lambda v2}$	

Figura B.6 – Variável multiplicador de Lagrange balanço potência ativa

□ *Linha associada ao bloco 2x2 ( $\lambda_{v1}, \beta_{\lambda v1}$ )*

$\lambda_{\theta 2}$	$\beta_{\lambda \theta 2}$	$\lambda_{v2}$	$\beta_{\lambda v2}$	$\pi_{11}$	$\beta_{\pi 11}$	$\pi_{21}$	$\beta_{\pi 21}$
	$J'_{\beta \lambda \theta 2 \lambda v1}$		$J'_{\beta \lambda v2 \lambda v1}$				
$J_{\beta \lambda v1 \lambda \theta 2}$		$J_{\beta \lambda v1 \lambda v2}$		$J'_{\beta \lambda v1 \pi 11}$		$J'_{\beta \lambda v1 \pi 21}$	

Figura B.7 – Variável multiplicador Lagrange balanço potência reativa

Observe-se que as Figuras B.4-B.7 relacionam os elementos diferentes de zero, na triangular superior da matriz, para os blocos diagonais (2x2) associados aos controles na

primeira barra. A representação dos elementos fora da diagonal, para os restantes blocos diagonais  $(\theta_2, \beta_{\theta_2})$ ,  $(V_2, \beta_{V_2})$ ,  $(\lambda_{\theta_2}, \beta_{\lambda_{\theta_2}})$  e  $(\lambda_{V_2}, \beta_{\lambda_{V_2}})$ , segue um procedimento análogo.

Uma análise similar pode ser desenvolvida, considerando-se o sistema de duas barras da Figura B.1, com um gerador extra pertencente ao grupo *seguidor*. Esta situação está representada na Figura B.8, e será objetivo de estudo do próximo item.



Figura B.8 – Sistema de duas barras

### B.1.3 Estrutura da HB - Geração de Potência Ativa Grupo Seguidor

Seja o caso exemplo da Figura B.8, onde existe uma unidade geradora de potência ativa, associada ao grupo *seguidor*, na barra número 2. Com a inclusão deste controle, seis novas variáveis serão acrescentadas ao problema, três delas correspondendo a variáveis primais  $(pg_2, \pi_{1pg_2}, \pi_{2pg_2})$  e as três restantes a variáveis duais  $(\beta_{pg_2}, \beta_{\pi_{1pg_2}}, \beta_{\pi_{2pg_2}})$ . Sejam cada uma delas definidas a seguir:

- $pg_2$  controle de potência ativa do grupo *seguidor*
- $\pi_{1pg_2}$  variável dual do problema do grupo *seguidor*, associada ao limite inferior de potência ativa
- $\pi_{2pg_2}$  variável dual do problema do grupo *seguidor*, associada ao limite superior de potência ativa
- $\beta_{pg_2}$  multiplicador de Lagrange associado à condição de otimalidade de primeira ordem, obtida derivando-se o Lagrangeano do problema do grupo *seguidor* em relação a  $pg_2$
- $\beta_{\pi_{1pg_2}}$  multiplicador de Lagrange associado à condição de folga complementar imposta sobre o limite inferior em  $pg_2$
- $\beta_{\pi_{2pg_2}}$  multiplicador de Lagrange associado à condição de folga complementar imposta sobre o limite superior em  $pg_2$

Para garantir a inversibilidade da matriz HB, este conjunto de variáveis foi agrupado convenientemente nos seguintes pares:  $(p_{g2}, \beta_{\pi_{1p_{g2}}})$   $(\pi_{1p_{g2}}, \beta_{p_{g2}})$  e  $(\pi_{2p_{g2}}, \beta_{\pi_{2p_{g2}}})$ . Com a inclusão deste controle, novos acoplamentos na matriz principal do sistema de equações (A.21) surgiram, a maioria deles relacionando as novas variáveis, e os restantes acoplando o controle de potência ativa do grupo *seguidor* com linhas já existentes. A Figura B.9 permite visualizar, de forma genérica, tais novos elementos.

$\theta_2$	$\beta_{\theta_2}$	...	$\lambda_{\theta_2}$	$\beta_{\lambda_{\theta_2}}$	...	$p_{g2}$	$\beta_{\pi_{1p_{g2}}}$	$\pi_{1p_{g2}}$	$\beta_{p_{g2}}$	$\pi_{2p_{g2}}$	$\beta_{\pi_{2p_{g2}}}$
		...			...						
		...			...	j					
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
		...			...				j		
		...			...						
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
		...			...	h	j	h	j	h	j
		...			...	j	z	j			
		...			...			h	j	h	j
		...			...			j		j	
		...			...					h	j
		...			...					j	z

Figura B.9 – Estrutura da HB - Geração potência ativa seguidor

Analisemos primeiro a inversibilidade dos novos três blocos diagonais (2x2):

$$\square \text{ Bloco diagonal } 2 \times 2 - (p_{g2}, \beta_{\pi_{1p_{g2}}}): \begin{bmatrix} H_{p_{g2} p_{g2}} & J_{\beta_{\pi_{1p_{g2}} p_{g2}}}^t \\ J_{\beta_{\pi_{1p_{g2}} p_{g2}}} & Z_{\beta_{\pi_{1p_{g2}} p_{g2}}} \end{bmatrix}$$

$$\square \text{ Bloco diagonal } 2 \times 2 - (\pi_{1p_{g2}}, \beta_{p_{g2}}): \begin{bmatrix} H_{\pi_{1p_{g2}} \pi_{1p_{g2}}} & J_{\beta_{p_{g2}} \pi_{1p_{g2}}}^t \\ J_{\beta_{p_{g2}} \pi_{1p_{g2}}} & \phi \end{bmatrix}$$

$$\square \text{ Bloco diagonal } 2 \times 2 - (\pi_{2p_{g2}}, \beta_{\pi_{2p_{g2}}}): \begin{bmatrix} H_{\pi_{2p_{g2}} \pi_{2p_{g2}}} & J_{\beta_{\pi_{2p_{g2}} \pi_{2p_{g2}}}^t \\ J_{\beta_{\pi_{2p_{g2}} \pi_{2p_{g2}}}} & Z_{\beta_{\pi_{2p_{g2}} \pi_{2p_{g2}}}} \end{bmatrix}$$

Uma vez garantida a inversibilidade da matriz HB, serão detalhados a seguir os novos elementos fora de sua diagonal, agrupados por linha.

- *Linha associada ao bloco 2x2 ( $\theta_2, \beta_{\theta_2}$ )*

...	...	$p_{g2}$	$\beta_{\pi_{1pg2}}$	...	...
...	...			...	...
...	...	$J_{\beta_{\theta_2} p_{g2}}$		...	...

Figura B.10 – Variável ângulo de tensão

- *Linha associada ao bloco 2x2 ( $\lambda_{\theta_2}, \beta_{\lambda_{\theta_2}}$ )*

...	...	$\pi_{1pg2}$	$\beta_{pg2}$	...	...
...	...		$J'_{\beta_{pg2} \lambda_{\theta_2}}$	...	...
...	...			...	...

Figura B.11 – Variável multiplicador de Lagrange balanço potência ativa

- *Linha associada ao bloco 2x2 ( $p_{g2}, \beta_{\pi_{1pg2}}$ )*

$\pi_{1pg2}$	$\beta_{pg2}$	...	...	$\pi_{2pg2}$	$\beta_{\pi_{2pg2}}$
$H_{p_{g2} \pi_{1pg2}}$	$J'_{\beta_{pg2} p_{g2}}$	...	...	$H_{p_{g2} \pi_{2pg2}}$	$J'_{\beta_{\pi_{2pg2} p_{g2}}}$
$J_{\beta_{\pi_{1pg2} \pi_{1pg2}}}$		...	...		

Figura B.12 – Variável geração potência ativa seguidor

- *Linha associada ao bloco 2x2 ( $\pi_{1pg2}, \beta_{pg2}$ )*

...	...	$\pi_{2pg2}$	$\beta_{\pi_{2pg2}}$	...	...
...	...	$H_{\pi_{1pg2} \pi_{2pg2}}$	$J'_{\beta_{\pi_{2pg2} \pi_{1pg2}}}$		
...	...	$J_{\beta_{pg2} \pi_{2pg2}}$			

Figura B.13 – Variável dual geração potência ativa seguidor

Um outro controle importante na modelagem AC de sistemas de potência é a geração de potência reativa do grupo *seguidor*. Sua contribuição na estrutura da matriz é similar ao controle de potência ativa do grupo *seguidor*, como veremos na próxima seção.

#### B.1.4 Estrutura da HB - Geração de Potência Reativa Grupo Seguidor

Considere-se o caso exemplo na Figura B.8, com uma unidade extra de potência reativa na barra número 2 pertencente ao grupo *seguidor*. Associado a este controle, definem-se seis novas variáveis, três delas associadas às variáveis primais do problema do grupo *líder* ( $q_{g2}, \pi_{1qg2}, \pi_{2qg2}$ ) e as três restantes associadas às variáveis duais ( $\beta_{qg2}, \beta_{\pi_{1qg2}}, \beta_{\pi_{2qg2}}$ ):

- $q_{g2}$  controle de potência reativa do grupo *seguidor*
- $\pi_{1qg2}$  variável dual do problema do grupo *seguidor*, associada ao limite inferior de potência reativa
- $\pi_{2qg2}$  variável dual do problema do grupo *seguidor*, associada ao limite superior de potência reativa
- $\beta_{qg2}$  multiplicador de Lagrange associado à condição de otimalidade de primeira ordem obtida, derivando-se o Lagrangeano do problema do grupo *seguidor* em relação a  $q_{g2}$
- $\beta_{\pi_{1qg2}}$  multiplicador de Lagrange associado à condição de folga complementar imposta sobre o limite inferior em  $q_{g2}$
- $\beta_{\pi_{2qg2}}$  multiplicador de Lagrange associado à condição de folga complementar imposta sobre o limite superior em  $q_{g2}$

Agrupando convenientemente estas variáveis, surgem três novos pares de blocos diagonais ( $2 \times 2$ ) ( $q_{g2}, \beta_{\pi_{1qg2}}$ ) ( $\pi_{1qg2}, \beta_{qg2}$ ) e ( $\pi_{2qg2}, \beta_{\pi_{2qg2}}$ ). O acoplamento em estrutura entre eles, Figura B.14, é equivalente ao acoplamento introduzido pelo controle de potência ativa entre os blocos ( $p_{g2}, \beta_{\pi_{1pg2}}$ ) ( $\pi_{1pg2}, \beta_{pg2}$ ) e ( $\pi_{2pg2}, \beta_{\pi_{2pg2}}$ ). Na geração de potência reativa, o acoplamento com os blocos já existentes estará ligado às linhas associadas ao módulo de tensão ( $V_2, \beta_{V2}$ ) e ( $\lambda_{V2}, \beta_{\lambda_{V2}}$ ), e não mais às linhas associadas ao ângulo de tensão ( $\theta_2, \beta_{\theta_2}$ ) e ( $\lambda_{\theta_2}, \beta_{\lambda_{\theta_2}}$ ), como foi o caso do controle de geração de potência ativa.

$V_2$	$\beta_{V_2}$	...	$\lambda_{V_2}$	$\beta_{\lambda_{V_2}}$	...	$q_{g2}$	$\beta_{\pi_{1qg2}}$	$\pi_{1qg2}$	$\beta_{qg2}$	$\pi_{2qg2}$	$\beta_{\pi_{2qg2}}$
		...			...						
		...			...	j					
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
		...			...				j		
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
		...			...	h	j	h	j	h	j
		...			...	j	z	j			
		...			...			h	j	h	j
		...			...			j		j	
		...			...					h	j
		...			...					j	z

Figura B.14 – Estrutura da HB - Geração potência reativa seguidor

Sejam, a seguir, cada um dos novos elementos diagonais (2x2) e os valores diferentes de zero na triangular superior da matriz.

$$\square \text{ Bloco diagonal } 2 \times 2 - (q_{g2}, \beta_{\pi_{1qg2}}): \begin{bmatrix} H_{q_{g2} \ q_{g2}} & J^t_{\beta_{\pi_{1qg2}} \ q_{g2}} \\ J_{\beta_{\pi_{1qg2}} \ q_{g2}} & Z_{\beta_{\pi_{1qg2}} \ \beta_{\pi_{1qg2}}} \end{bmatrix}$$

$$\square \text{ Bloco diagonal } 2 \times 2 - (\pi_{1qg2}, \beta_{qg2}): \begin{bmatrix} H_{\pi_{1qg2} \ \pi_{1qg2}} & J^t_{\beta_{qg2} \ \pi_{1qg2}} \\ J_{\beta_{qg2} \ \pi_{1qg2}} & \phi \end{bmatrix}$$

$$\square \text{ Bloco diagonal } 2 \times 2 - (\pi_{2qg2}, \beta_{\pi_{2qg2}}): \begin{bmatrix} H_{\pi_{2qg2} \ \pi_{2qg2}} & J^t_{\beta_{\pi_{2qg2}} \ \pi_{2qg2}} \\ J_{\beta_{\pi_{2qg2}} \ \pi_{2qg2}} & Z_{\beta_{\pi_{2qg2}} \ \beta_{\pi_{2qg2}}} \end{bmatrix}$$

□ *Linha associada ao bloco 2x2 ( $V_2, \beta_{V2}$ )*

...	...	$q_{g2}$	$\beta_{\pi_{1qg2}}$	...	...
-----	-----	----------	----------------------	-----	-----

...	...			...	...
...	...	$J_{\beta_{V2} q_{g2}}$		...	...

Figura B.15 – Variável módulo de tensão

□ *Linha associada ao bloco 2x2 ( $\lambda_{V2}, \beta_{\lambda V2}$ )*

...	...	$\pi_{1qg2}$	$\beta_{qg2}$	...	...
-----	-----	--------------	---------------	-----	-----

...	...		$J'_{\beta_{qg2} \lambda_{V2}}$	...	...
...	...			...	...

Figura B.16 – Variável multiplicador de Lagrange balanço potência reativa

□ *Linha associada ao bloco 2x2 ( $q_{g2}, \beta_{\pi_{1qg2}}$ )*

$\pi_{1qg2}$	$\beta_{qg2}$	...	...	$\pi_{2qg2}$	$\beta_{\pi_{2qg2}}$
--------------	---------------	-----	-----	--------------	----------------------

$H_{qg2 \pi_{1qg2}}$	$J'_{\beta_{qg2} q_{g2}}$	...	...	$H_{qg2 \pi_{2qg2}}$	$J'_{\beta_{\pi_{2qg2}} q_{g2}}$
$J_{\beta_{\pi_{1qg2}} \pi_{1qg2}}$		...	...		

Figura B.17 – Variável geração potência reativa seguidor

□ *Linha associada ao bloco 2x2 ( $\pi_{1qg2}, \beta_{qg2}$ )*

...	...	$\pi_{2qg2}$	$\beta_{\pi_{2qg2}}$	...	...
-----	-----	--------------	----------------------	-----	-----

...	...	$H_{\pi_{1qg2} \pi_{2qg2}}$	$J'_{\beta_{\pi_{2qg2}} \pi_{1qg2}}$		
...	...	$J_{\beta_{qg2} \pi_{2qg2}}$			

Figura B.18 – Variável dual geração potência reativa seguidor

A representação não linear AC de sistemas de potência leva em consideração o sistema como uma rede interligada, com suas próprias limitações físicas e operacionais. Isto corresponde a monitorar, e restringir, o fluxo de potência fluindo pelos circuitos. Na

próxima seção veremos como estas restrições influenciam a resolução do sistema de equações (A.21).

### B.1.5 Estrutura da HB – Monitoramento de Fluxo em Circuitos

Continuando com a análise do sistema exemplo de duas barras (Figura B.1), e acompanhando a formulação introduzida no Capítulo 4 (seção 4.2), a restrição de máxima capacidade no circuito 1→2 pode ser descrita matematicamente como a seguir:

$$-P_{\max} \leq P \leq P_{\max} \quad (\text{B.1})$$

onde:

$P(\theta_1, V_1, \theta_2, V_2)$       fluxo de potência ativa fluindo no circuito 1→2

$P_{\max}$       capacidade máxima permitida (MW) no circuito 1→2

Observe-se que  $P$  é uma expressão dependente de variáveis já definidas. A inclusão de uma variável adicional  $S$  permite transformar a restrição funcional (B.1) em uma restrição de igualdade, e restrições de canalização impostas sobre a própria  $S$ :

$$P(\theta_1, V_1, \theta_2, V_2) - S = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$-P_{\max} \leq S \leq P_{\max} \quad (\text{B.3})$$

As restrições de monitoramento de fluxo em circuitos, assim como as restrições de balanço de potência ativa e reativa em cada nó da rede, formarão parte das restrições do problema do segundo nível. Com a inclusão destas duas novas restrições, quatro variáveis serão diretamente adicionadas ao problema do grupo *seguidor*:  $(S, \lambda_S, \pi_{1S}, \pi_{2S})$ , cada uma delas definida a seguir:

$S$       variável auxiliar de monitoramento de fluxo em circuitos

$\lambda_S$       multiplicador de Lagrange associado à restrição (B.2)

$\pi_{1S}$       variável dual associada ao limite inferior na restrição de canalização (B.3)

$\pi_{2S}$       variável dual associada ao limite superior na restrição de canalização (B.3)

Escrevendo-se as condições de otimalidade de primeira ordem de K.K.T. para o problema do grupo *seguidor*, obtêm-se quatro novas restrições, a serem incluídas nas condições de

viabilidade do problema do grupo *líder*: a restrição original (B.2), a condição de otimalidade de primeira ordem obtida derivando-se o Lagrangeano do problema do grupo *seguidor* em relação a  $\underline{S}$ , e duas condições de folga complementares associadas às restrições de canalização impostas sobre  $\underline{S}$  (restrição (B.3)). Na *formulação de K.K.T.* do problema de dois níveis, existirão naturalmente quatro novas variáveis duais associadas a cada uma destas restrições:

$\beta_S$  multiplicador de Lagrange associado à restrição (B.2)

$\beta_{\lambda_S}$  multiplicador de Lagrange associado à condição de otimalidade obtida derivando-se o Lagrangeano do problema do grupo *seguidor* em relação a  $\underline{S}$

$\beta_{\pi_{1S}}$  multiplicador de Lagrange associado à condição de folga complementar, imposta sobre o limite inferior em  $\underline{S}$

$\beta_{\pi_{2S}}$  multiplicador de Lagrange associado à condição de folga complementar, imposta sobre o limite superior em  $\underline{S}$

Agrupando convenientemente as variáveis primais e duais do grupo *líder*, obtém-se os seguintes quatro blocos diagonais (2x2):  $(S, \beta_S)$ ,  $(\lambda_S, \beta_{\lambda_S})$ ,  $(\pi_{1S}, \beta_{\pi_{1S}})$  e  $(\pi_{2S}, \beta_{\pi_{2S}})$ . As alterações na matriz solução, sistema de equações (A.21), são relacionadas na Figura (B.19).

Observe-se, a seguir, que os blocos diagonais (2x2) estão propriamente definidos, cada um deles correspondendo a uma matriz quadrada inversível.

$$\square \text{ Bloco diagonal } 2 \times 2 - (S, \beta_S): \begin{bmatrix} H_{S S} & J^t_{\beta_S S} \\ J_{\beta_S S} & \phi \end{bmatrix}$$

$$\square \text{ Bloco diagonal } 2 \times 2 - (\lambda_S, \beta_{\lambda_S}): \begin{bmatrix} \phi & J^t_{\lambda_S \beta_{\lambda_S}} \\ J_{\lambda_S \beta_{\lambda_S}} & \phi \end{bmatrix}$$

$$\square \text{ Bloco diagonal } 2 \times 2 - (\pi_{1S}, \beta_{\pi_{1S}}): \begin{bmatrix} H_{\pi_{1S} \pi_{1S}} & J^t_{\beta_{\pi_{1S}} \pi_{1S}} \\ J_{\beta_{\pi_{1S}} \pi_{1S}} & Z_{\beta_{\pi_{1S}} \beta_{\pi_{1S}}} \end{bmatrix}$$



- *Linha associada ao bloco 2x2 ( $\pi_{2S}, \beta_{\pi 2S}$ )*

		S	$\beta_S$	$\lambda_S$	$\beta_{\lambda_S}$
...	...	$H_{\pi 2S}$			$J'_{\beta_{\lambda_S} \pi 2S}$
...	...	$J_{\beta_{\pi 2S}}$			

Figura B.21 – Variável dual limite superior de fluxo em circuitos

- *Linha associada ao bloco 2x2 ( $s, \beta_S$ )*

$\theta_1$	$\beta_{\theta 1}$	$V_1$	$\beta_{V 1}$	$\theta_2$	$\beta_{\theta 2}$	$V_2$	$\beta_{V 2}$
$J_{\beta_S \theta 1}$		$J_{\beta_S V 1}$		$J_{\beta_S \theta 2}$		$J_{\beta_S V 2}$	

Figura B.22 – Variável auxiliar restrição monitoramento de fluxo em circuitos

- *Linha associada ao bloco 2x2 ( $\lambda_S, \beta_{\lambda_S}$ )*

$\theta_1$	$\beta_{\theta 1}$	$V_1$	$\beta_{V 1}$	$\theta_2$	$\beta_{\theta 2}$	$V_2$	$\beta_{V 2}$	$\lambda_{\theta 1}$	$\beta_{\lambda_{\theta 1}}$	$\lambda_{V 1}$	$\beta_{\lambda_{V 1}}$	$\lambda_{\theta 2}$	$\beta_{\lambda_{\theta 2}}$	$\lambda_{V 2}$	$\beta_{\lambda_{V 2}}$
$H_{\lambda_S \theta 1}$		$H_{\lambda_S V 1}$		$H_{\lambda_S \theta 2}$		$H_{\lambda_S V 2}$		$H_{\lambda_S \lambda_{\theta 1}}$		$H_{\lambda_S \lambda_{V 1}}$		$H_{\lambda_S \lambda_{\theta 2}}$		$H_{\lambda_S \lambda_{V 2}}$	

Figura B.23 – Condição K.K.T. restrição monitoramento de fluxo em circuitos

- *Linha associada ao bloco 2x2 ( $\theta_1, \beta_{\theta 1}$ )*

$V_1$	$\beta_{V 1}$	$\theta_2$	$\beta_{\theta 2}$	$V_2$	$\beta_{V 2}$	$\lambda_{\theta 1}$	$\beta_{\lambda_{\theta 1}}$	$\lambda_{V 1}$	$\beta_{\lambda_{V 1}}$	$\lambda_{\theta 2}$	$\beta_{\lambda_{\theta 2}}$	$\lambda_{V 2}$	$\beta_{\lambda_{V 2}}$
$H_{\theta 1 V 1}$		$H_{\theta 1 \theta 2}$		$H_{\theta 1 V 2}$		$H_{\theta 1 \lambda_{\theta 1}}$		$H_{\theta 1 \lambda_{V 1}}$		$H_{\theta 1 \lambda_{\theta 2}}$		$H_{\theta 1 \lambda_{V 2}}$	

Figura B.24 – Variável ângulo de tensão na barra 1

□ *Linha associada ao bloco 2x2 ( $V_1, \beta_{v1}$ )*

$\theta_2$	$\beta\theta_2$	$V_2$	$\beta V_2$	$\lambda_{\theta 1}$	$\beta\lambda_{\theta 1}$	$\lambda_{v1}$	$\beta\lambda_{v1}$	$\lambda_{\theta 2}$	$\beta\lambda_{\theta 2}$	$\lambda_{v2}$	$\beta\lambda_{v2}$
$H_{v1 \theta 2}$		$H_{v1 v2}$		$H_{v1 \lambda_{\theta 1}}$		$H_{v1 \lambda_{v1}}$		$H_{v1 \lambda_{\theta 2}}$		$H_{v1 \lambda_{v2}}$	

Figura B.25 – Variável módulo de tensão na barra 1

□ *Linha associada ao bloco 2x2 ( $\theta_2, \beta_{\theta 2}$ )*

$V_2$	$\beta V_2$	$\lambda_{\theta 1}$	$\beta\lambda_{\theta 1}$	$\lambda_{v1}$	$\beta\lambda_{v1}$	$\lambda_{\theta 2}$	$\beta\lambda_{\theta 2}$	$\lambda_{v2}$	$\beta\lambda_{v2}$
$H_{\theta 2 v2}$		$H_{\theta 2 \lambda_{\theta 1}}$		$H_{\theta 2 \lambda_{v1}}$		$H_{\theta 2 \lambda_{\theta 2}}$		$H_{\theta 2 \lambda_{v2}}$	

Figura B.26 – Variável ângulo de tensão na barra 2

□ *Linha associada ao bloco 2x2 ( $V_2, \beta_{v2}$ )*

$\lambda_{\theta 1}$	$\beta\lambda_{\theta 1}$	$\lambda_{v1}$	$\beta\lambda_{v1}$	$\lambda_{\theta 2}$	$\beta\lambda_{\theta 2}$	$\lambda_{v2}$	$\beta\lambda_{v2}$
$H_{v2 \lambda_{\theta 1}}$		$H_{v2 \lambda_{v1}}$		$H_{v2 \lambda_{\theta 2}}$		$H_{v2 \lambda_{v2}}$	

Figura B.27 – Variável módulo de tensão na barra 2

As restrições de monitoramento de fluxo em circuitos serão tratadas através de um processo de relaxação, adicionando durante o processo iterativo aquela restrição que apresente maior violação. Esta consideração permite reduzir significativamente o número de variáveis e restrições do problema. Sabe-se, da experiência prática, que um número muito pequeno delas realmente atinge seu limite na solução ótima.

Uma vez descrita a matriz em estrutura, para cada um dos principais controles do sistema, será importante conhecer o dimensionamento do problema de dois níveis, assim como o grau de esparsidade da matriz HB na resolução do sistema de equações (A.21). Uma análise detalhada, para um sistema elétrico genérico, é apresentada na próxima seção.

## B.2 Dimensionamento do Problema

Seja um sistema elétrico genérico com:  $n$  barras,  $m$  circuitos,  $p_1$  unidades geradoras de potência ativa pertencentes ao grupo *líder* e  $p_2$  unidades geradoras de potência ativa e potência reativa pertencentes ao grupo *seguidor*. A relação direta entre variáveis e quantidades, na *formulação de K.K.T.* do problema de equilíbrio de Stackelberg, é apresentada na Tabela B.1.

Descrição	Variável	Quantidade
Ângulo de tensão	$\theta$	$n$
Módulo de tensão	$V$	$n$
Multiplicador de Lagrange balanço potência ativa	$\lambda_0$	$n$
Multiplicador de Lagrange balanço potência reativa	$\lambda_V$	$n$
Variável dual limite inferior módulo de tensão	$\pi_{1V}$	$n$
Variável dual limite superior módulo de tensão	$\pi_{2V}$	$n$
Variável dual balanço potência ativa	$\beta_\theta$	$n$
Variável dual balanço potência reativa	$\beta_V$	$n$
Variável dual condição otimalidade de primeira ordem associada ao ângulo de tensão	$\beta_{\lambda_0}$	$n$
Variável dual condição otimalidade de primeira ordem associada ao módulo de tensão	$\beta_{\lambda_V}$	$n$
Variável dual condição de folga complementar limite inferior módulo de tensão	$\beta_{\lambda\pi_{1V}}$	$n$
Variável dual condição de folga complementar limite superior módulo de tensão	$\beta_{\lambda\pi_{2V}}$	$n$
Potência ativa seguidor	$p_{g2}$	$p_2$
Variável dual limite inferior potência ativa seguidor	$\pi_{1p_{g2}}$	$p_2$
Variável dual limite superior potência ativa seguidor	$\pi_{2p_{g2}}$	$p_2$
Variável dual condição otimalidade de primeira ordem associada à potência ativa seguidor	$\beta_{p_{g2}}$	$p_2$

Variável dual condição de folga complementar limite inferior potência ativa seguidor	$\beta_{\pi_1 p g_2}$	$p_2$
Variável dual condição de folga complementar limite superior potência ativa seguidor	$\beta_{\pi_2 p g_2}$	$p_2$
Potência reativa seguidor	$q g_2$	$p_2$
Variável dual limite inferior potência reativa seguidor	$\pi_{1 q g_2}$	$p_2$
Variável dual limite superior potência reativa seguidor	$\pi_{2 q g_2}$	$p_2$
Variável dual condição otimalidade de primeira ordem associada à potência reativa seguidor	$\beta_{q g_2}$	$p_2$
Variável dual condição de folga complementar limite inferior potência reativa seguidor	$\beta_{\pi_1 q g_2}$	$p_2$
Variável dual condição de folga complementar limite superior potência reativa seguidor	$\beta_{\pi_2 q g_2}$	$p_2$
Potência ativa líder	$p g_1$	$p_1$
Variável dual limite inferior potência ativa líder	$\pi_{1 p g_1}$	$p_1$
Variável dual limite superior potência ativa líder	$\pi_{2 p g_1}$	$p_1$

Tabela B.1 – Dimensionamento do problema

Da soma direta dos valores associados à coluna “Quantidade” obtém-se o número de variáveis do problema:  $12n+12p_2+3p_1$ . A matriz HB corresponderá a uma matriz quadrada com  $12(n+p_2)$  linhas/colunas e  $6(n+p_2)$  blocos diagonais (2x2), cada um deles formado por uma variável do problema do grupo *seguidor* e um multiplicador de Lagrange associado ao problema do grupo *líder*.

A esparsidade da Heavy Border é contabilizada na Tabela B.2, a qual pode ser diretamente obtida das Figuras B.2, B.9 e B.10. Os elementos diferentes de zero na triangular superior da matriz totalizam  $E(HB)=16(n+m)+10p_2$  blocos diagonais (2x2). Considerando-se que o número de geradores ( $p_2$ ) e o número de circuitos ( $m$ ) são da ordem do número de barras do sistema  $O(n)$ , pode-se concluir que a matriz HB é esparsa em estrutura, com  $E(HB)=O(n)$  elementos computáveis fora de sua diagonal.

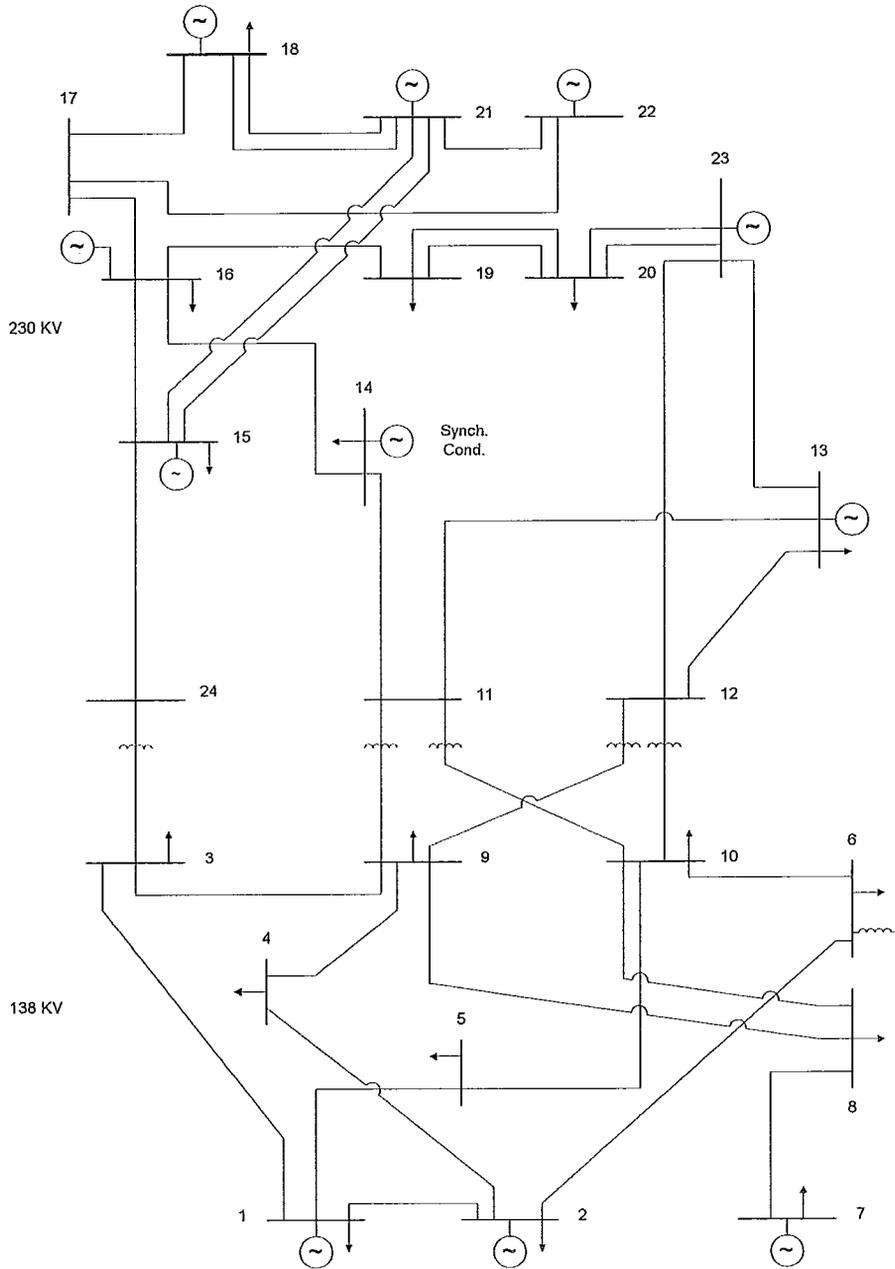
<b>Descrição Bloco (2x2)</b>	<b>Quantidade</b>
Controles associados a barras	$16n$
Controles associados a circuitos	$16m$
Controles associados à geração de potência ativa seguidor	$5p_2$
Controles associados à geração de potência reativa seguidor	$5p_2$

Tabela B.2 – Esparsidade da HB

Uma análise similar permite determinar o dimensionamento do problema e a estrutura de esparsidade da matriz solução para o controle de monitoramento de fluxo em circuitos. O número total de variáveis do sistema de equações é acrescentada em 8, para cada novo circuito no seu limite que entra na estrutura, enquanto o número total de adições na matriz HB corresponde a 15 novos blocos diagonais (2x2) diferentes de zero.

# APÊNDICE C

## C Sistema de 24 Barras



# APÉNDICE D

## D Sistema de 118 Barras

