MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO EXTERIOR PARA O PROBLEMA DA DESIGUALDADE VARIACIONAL

Jurandir de Oliveira Lopes

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Prof. Regina Sandra Burachik, Ph.D.

Prof. Susana Scheimberg de Makler, D. Sc.

Prof. Paulo Roberto de Oliveira, Dr. Ing.

Prof. Alfredo Noel Iusem, Ph.D.

Prof. Luis Mauricio Graña Drummond, Ph.D.

Prof. Mikhail Solodov, Ph.D.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JULHO DE 2002

LOPES, JURANDIR DE OLIVEIRA

Métodos de Aproximação Exterior para o Problema da Desigualdade Variacional [Rio de Janeiro] 2002

X, 54 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computacão, 2002)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1 - Problema da Desigualdade Variacional

2 - Método de Aproximação Exterior

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

“Nada vem de graça,
tudo tem seu preço...”

- Aos meus pais Dionísio e Eulália.

- Aos meus irmãos e sobrinhos.

Agradecimentos

- A minha orientadora Regina Sandra Burachik pelas sugestões, colaborações e crédito em mim depositado.

- Aos demais componentes da banca examinadora: Susana Scheimberg, Paulo Roberto, Alfredo Iusem, Luis Mauricio e Mikhail Solodov pelas sugestões dadas que contribuíram para melhoria desta tese.

- Aos amigos de fé Gilvan, Paulinho e Alfredo Wagner pela amizade, pelas valiosas conversas em Matemática (Otimização) e pelo convívio durante a minha estada no Rio de Janeiro

- Aos professores do Departamento de Matemática da UFPI, pelo apoio. Em especial aos professores João Xavier da Cruz Neto, João Benício de Melo Neto e Barnabé Pessoa Lima pelo apoio e incentivo.

- Aos professores do Programa de Engenharia de Sistemas e Computação da COPPE/UFRJ. Em especial Regina Burachik, Susana Scheimberg, Paulo Roberto e Nelson Maculan pela amizade e pelos conhecimentos transmitidos.

- A todos os amigos que direta ou indiretamente me ajudaram em mais esta conquista. Em especial Vera, Guzman, Rodrigo, Rosely, Denise, Patrícia, Ana, Tibérius, Elder, Rafael, Gabriel, Herinque, Mara, Claúdio, Moisés e Socorrinha.

- Em especial ao amigo Geci pela amizade e por colaborações dadas neste trabalho.

- Aos funcionários do PESC, a saber: Claudia, Solange, Lucia, Sueli, Mercedes, Sônia, Lourdes, Gercina, Ana, Patrícia, Mara, Julio, Adilson, Ari, Fred, Julio Assunção e David pela amizade e pela ajuda em todas as ocasiões.

- Ao professor Benar Svaiter(IMPA) por contribuições dadas neste trabalho.

- Ao PICDT-CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

MÉTODOS DE APROXIMAÇÃO EXTERIOR PARA O PROBLEMA DA DESIGUALDADE VARIACIONAL

Jurandir de Oliveira Lopes

Julho/ 2002

Orientador: Regina Sandra Burachik

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Neste trabalho foram desenvolvidos métodos de aproximação exterior para resolver o problema da desigualdade variacional associado a um operador monótono maximal T e a um conjunto de restrições C em um espaço de Banach reflexivo. O problema de otimização convexa é um caso particular do problema da desigualdade variacional, onde T é o subdiferencial da função convexa a ser minimizada. Nesta tese o conjunto de restrições é do tipo semi-infinito. Para este problema propomos dois tipos de algoritmos de aproximação exterior. No primeiro, provamos otimalidade dos pontos fracos de acumulação. No segundo, provamos convergência fraca a uma solução do problema, além disso, se o espaço é uniformemente convexo, a convergência é forte.

Estudamos um caso particular importante onde o conjunto de restrições é um poliedro do espaço Euclidiano. Para este caso, propomos um algoritmo do tipo proximal inviável, e provamos convergência global a uma solução do problema.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

OUTER APPROXIMATION METHODS FOR THE VARIATIONAL INEQUALITY PROBLEM

Jurandir de Oliveira Lopes

July/2002

Advisor: Regina Sandra Burachik

Department: Systems and Computation Engineering

In this work we develop outer approximation methods for solving the variational inequality problem associated to a maximal monotone T and a closed and convex set contained in a reflexive Banach space. The convex optimization problem is a particular case of the variational inequality problem, where T is the subdifferential of the convex function to be minimized. In this thesis the constraint set is of the type semi-infinite. For this problem we propose two types of outer approximation algorithms. In the first one, we prove optimality of weak accumulation points. In the second one, we prove weak convergence to a solution, furthermore, if the space is uniformly convex, the convergence is strong.

We study the important particular case where the constraint set is a polyhedron of the Euclidean space. For this case we propose of infeasible proximal type algorithm, and we prove global convergence to a solution.

Índice

Introdução

Sejam B um espaço de Banach reflexivo real, B^* seu dual topológico, $C \subset B$ um conjunto convexo, fechado e não vazio, e $T: B \to \mathcal{P}(B^*)$ um operador monótono maximal.

O problema clássico da desigualdade variacional associado a T e C, chamado de $DV(T, C)$, é definido por:

$$(P) \qquad \begin{cases} \text{Achar } x^* \in C \text{ tal que exista } u^* \in T(x^*) \text{ com} \\ \langle u^*, x - x^* \rangle \geq 0 \ \forall \ x \in C, \end{cases}$$

onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $B^* \times B$.

Um caso particular, é quando T é o subdiferencial de $f: B \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ onde f é uma função própria, convexa e semicontínua inferior, isto é, o Problema (P) reduz-se ao problema de minimização não suave com restrições:

$$(P_0) \qquad\qquad \min_{x \in C} f(x).$$

O Problema (P) é equivalente a:

$$\text{Encontrar } x^* \in C \text{ tal que } 0 \in (T + N_C)(x^*),$$

onde N_C é o operador normalizador de C, o qual definiremos adiante. Do mesmo modo, (P_0) pode ser reescrito como:

$$\text{Encontrar } x^* \in C \text{ tal que } 0 \in (\partial f + N_C)(x^*).$$

O problema de encontrar zeros de um operador possui muitas aplicações importantes na física, por exemplo: teoria de lubrificação, o problema de filtração, o problema de obstáculo, e.t.c. (para uma descrição completa destes problemas, ver [KS80]).

Existem na literatura uma variedade de métodos utilizados para resolver os Problemas (P) e (P_0). Dentre eles existem os métodos:

(a) Viáveis (ver por exemplo [CZ92, CT93, Eck93, IST94, AH95, BI98, ATBT99b, CIZ99]).

(b) Inviáveis (ver por exemplo [Kel60, Kap68, Top70, EZ71, BF76, Top82, DM95, Com00, YKMF01]).

O objetivo desta tese é desenvolver métodos de aproximação exterior para resolver o Problema (P) quando o conjunto de restrições C é do tipo semi-infinito, isto é,

$$C := \{x \in B |\ g(x,y) \leq 0\ \forall y \in Y\}, \tag{0.1}$$

onde o conjunto Y e a função $g\colon B \times\ Y \to I\!R$ satisfazem as seguintes propriedades:

(G_1) Y fracamente compacto contido em um espaço de Banach reflexivo real;

(G_2) $g(\cdot, y)$ convexa e semicontínua inferior $\forall\ y \in Y$;

(G_3) $g(\cdot,\cdot)$ fracamente contínua.

Existe um grande número de aplicações para o qual o conjunto restrições é da forma (0.1) (ver, por exemplo [Dan67, BM73]). Este tipo de formulação foi estudado em Blankenship e Falk [BF76] para $B = I\!R^n$ e para um espaço de Banach reflexivo geral em [Com00]. Os métodos estudados em [BF76, Com00] pertencem a familia dos "métodos de aproximação exterior". Algoritmos deste tipo existem há 4 décadas, tendo sido introduzidos por Cheney e Goldstein [CG59] e Kelley [Kel60] na forma de algoritmos de planos de corte. A idéia básica desses métodos é trocar (P_0) por uma seqüência de problemas (P_n) nos quais o conjunto das restrições C^n *contém* o conjunto original C. Mais especificamente, um método de aproximação exterior pode ser visto como um método que gera uma seqüência $\{x^n\}$ que converge para uma solução do problema original sem exigir que x^n pertença ao conjunto C. Os métodos de aproximação exterior considerados em [BF76, Com00] são aplicados para resolver o problema de otimização convexa (P_0). Nestes trabalhos, os resultados de existência e convergência são estabelecidos sob a hipótese de limitação do conjunto de restrições.

Nossa primeira proposta é resolver o problema (P), com C dado em (0.1). Para isto, estendemos o método proposto por [BF76] de três maneiras. Primeiro, estendemos para um espaço de Banach reflexivo geral em vez de espaço Euclidiano. Segundo, resolvemos o Problema (P), o qual é uma generalização do Problema (P_0). Terceiro, substituimos a hipótese de limitação de C por outras hipóteses. Essas hipóteses são, ou uma condição de Slater para C, ou que a seqüência $\{x^k\}$ não se "afaste muito" do conjunto C. Todas estas hipóteses serão formalizadas no Capítulo 2.

Consideremos agora o problema $DV(T, C)$ com restrições lineares, isto é,

$$C := \{x \in I\!R^n |\ Ax \leq b\}, \tag{0.2}$$

onde A é a matriz $m \times n$ com $m \geq n$.

Vários métodos de tipo proximal generalizados foram propostos para resolver Problema (P) e (P_0) com C dado em (0.2) (ver, por exemplo, [IST94, AH95, Teb97]). Auslender e Haddou [AH95] propuseram um algoritmo baseado na distância *tipo-entropia*. Recentemente, Auslender, Teboulle e Ben-Tiba [ATBT99b, ATBT99a] propuseram algoritmos baseados na regularização de tipo *log-quadrática*. A hipótese de que o conjunto C tenha interior topológico não vazio é crucial para este tipo de método, do contrário o método pode não estar definido. Burachik e Svaiter [BS01b] propuseram um método de ponto proximal usando estas distâncias *log-quadráticas* para resolver Problema (P) no caso em que $C = \mathbb{R}^n_+$. Os autores substituiram o critério de erro somável pelo critério de erro relativo. Nesses trabalhos, mostra-se, sob hipóteses razoáveis, convergência global. Yamashita et al. [YKMF01] propuseram um método usando distâncias *log-quadráticas* para resolver o Problema (P_0) sem supor interior topológico não vazio. Esse método consiste em substituir o problema original por uma seqüência de problemas (P^k), cujo conjunto de restrições tem sempre interior não vazio, onde em cada problema (P^k) eles aplicam uma regularização de tipo *log-quadrática*. Em [YKMF01], sob hipóteses de somabilidade dos paramêtros foi provado que a seqüência gerada converge a uma solução do problema original. Nossa segunda proposta é generalizar o método proposto por Yamashita et al. [YKMF01] para resolver o Problema (P), onde utilizaremos o mesmo tipo de critério de erro proposto em [BS01b]. Mostramos sob hipóteses similares às utilizadas em [YKMF01] convergência global a uma solução do $DV(T, C)$.

A estrutura desta tese é bem simples. No Capítulo 1, apresentaremos vários resultados clássicos e definições aos quais faremos referência ao longo do trabalho.

No Capítulo 2, definiremos o Algorimo 2.1.1, o qual é plicado para resolver o problema da desigualdade variacional semi-infinita, mostramos a sua boa definição e otimalidade dos pontos de acumulação sob a hipótese de limitação de C. Definiremos também o Algorimo 2.2.1, que é aplicado para resolver o mesmo problema com "pequenas" perturbações no conjunto C sem exigir limitação para o mesmo. Mostramos a boa definição do método. A convergência é estabelecida sob as seguintes hipóteses: Condição de Slater, e neste caso mostramos a otimalidade dos pontos de acumulação. A segunda hipótese é a de que os iterados não se "afastem muito" do conjunto C (formalizaremos esta hipótese no Capítulo 2). Sob esta hipótese mostramos convergência fraca a uma solução do $DV(T, C)$ e além disso, se B é uniformente convexo, mostramos que a convergência é forte.

No Capítulo 3, definiremos o Algoritmo 3.1.1, o qual é aplicado para resolver o problema da desigualdade variacional com restrições lineares. Mostramos para este algoritmo a sua boa definição e a sua convergência a uma solução do $DV(T, C)$.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Neste capítulo, citaremos algumas definições e resultados de convexidade, log-quadrática e operadores monótonos maximais, indispensáveis para os nossos estudos.

De agora em diante, B é um espaço de Banach reflexivo real com norma denotada por $\|\cdot\|$ ou $\|\cdot\|_B$, B^* seu dual topológico (com norma denotada por $\|\cdot\|_*$ ou $\|\cdot\|_{B^*}$) e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denotando o produto dual em $B^* \times B$ (isto é, $\langle\phi, x\rangle = \phi(x)$ para todo $\phi \in B^*$ e todo $x \in B$).

1.1 Convexidade

Lembramos que a topologia forte sobre B é aquela induzida pela norma e a fraca sobre B é aquela que torna contínuos os elementos de B^*. Mais precisamente,

Definição 1.1.1 *Seja $\{x^n\} \subset B$, dizemos que:*

1. *A seqüência $\{x^n\} \subset B$ converge fortemente para $x \in B$ ($x^n \to x$) se e somente se $\lim_{n\to\infty} \|x^n - x\| = 0$.*

2. *A seqüência $\{x^n\} \subset B$ converge fracamente para $x \in B$ ($x^n \rightharpoonup x$) se e somente se $\lim_{n\to\infty}\langle x^*, x^n\rangle = \langle x^*, x\rangle$ para todo $x^* \in B^*$.*

A partir de agora denotaremos $W(x^k) :=$ o conjunto dos pontos de acumulação fracos da seqüência $\{x^k\}$.

Seja f uma função real sobre um espaço de Banach real. A definição a seguir sobre continuidade fraca de f está conforme [Vai73].

Definição 1.1.2 *Seja $f: B \to I\!R$, f é dita fracamente contínua em $x \in B$ se $\forall$ seqüência $\{x^n\} \subset B$, tal que*

$$x^n \rightharpoonup x \implies \lim f(x^n) = f(x).$$

Portanto, f é fracamente contínua em B se f é fracamente contínua em cada $x \in B$.

Proposição 1.1.1 *Sejam $f: K \subset B \to I\!R$ uma função fracamente semicontínua inferior (semicontínua superior), e K um conjunto limitado e fracamente fechado. Então f atinge seu mínimo (máximo) em K.*

Prova. Ver [Vai73]. □

Definição 1.1.3 (Ver [Bre83, Página 51]) *Dizemos que B é* uniformente convexo *se $\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0$ tal que*

$$\forall\; x, y \in B, \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1 \text{ e } \|x-y\| > \varepsilon \;\Rightarrow\; \left\|\frac{x+y}{2}\right\| < 1-\delta.$$

Proposição 1.1.2 (Ver [Bre83, Proposição III.30]) *Assuma que B seja uniformente convexo. Se $\{y^k\}$ é uma seqüência que converge fracamente para y^* e* $\limsup \|y^k\| \leq \|y^*\|$, *então $\{y^k\}$ converge fortemente para y^*.*

Introduziremos a seguir, dois resultados técnicos sobre seqüências de números reais não-negativos que precisaremos para a análise de convergência.

Lema 1.1.1 *Sejam* $\{\sigma_k\}$ *e* $\{\beta_k\}$ *seqüências de números reais não negativos satisfazendo:*

(i) $\sigma_{k+1} \leq \sigma_k + \beta_k$;

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \beta_k < \infty$.

Então a seqüência $\{\sigma_k\}$ *converge.*

Prova. Ver [Pol87]. □

Lema 1.1.2 *Sejam* $\{\lambda_k\}$ *uma seqüência de números reais positivos, e* $\{a_k\}$ *uma seqüência de números reais. Faça* $\sigma_k := \sum_{j=1}^{k} \lambda_j$ *e* $b_k := {\sigma_k}^{-1} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j$. *Se* $\sigma_k \to \infty$, *então*

(i) $\liminf_{k\to\infty} a_k \leq \liminf_{k\to\infty} b_k \leq \limsup_{k\to\infty} b_k \leq \limsup_{k\to\infty} a_k$;

(ii) *Se* $\lim_{k\to\infty} a_k = a < \infty$, *então* $\lim_{k\to\infty} b_k = a$.

Prova. (i) Ver [Lem95], (ii) segue-se imediatamente de (i). □

A definição a seguir está conforme [RB98].

Definição 1.1.4 *Seja* $f\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, *a* função horizonte f_∞ *é definida por*

$$f_\infty(d) = \inf\{\liminf_{n\to\infty} f(t_n x_n)/t_n | t_n \to +\infty, x_n \to d\}.$$

Quando f *é convexa, própria e semicontínua inferior temos que*

$$f_\infty(d) = \lim_{w\to\infty} \frac{f(x+wd) - f(x)}{w},$$

para quaisquer $x \in domf$.

Definição 1.1.5 *Seja $C \subset B$ convexo, fechado e não vazio em B. A função $\delta_C(x): B \to I\!R \cup \{\infty\}$ definida por*

$$\delta_C(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in C, \\ +\infty & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

é dita função indicadora *de C, onde δ_C é convexa, própria e semicontínua inferior.*

Definição 1.1.6 *Seja $C \subset B$ um conjunto convexo, fechado e não vazio. A* distância *a C, $d(\cdot, C): B \to I\!R$ é dada por*

$$d(x, C) = \inf_{y \in C} \|x - y\|_B,$$

portanto $d(\cdot, C)$ é convexa e contínua.

Lema 1.1.3 *Sejam $C = \{x \in I\!R^n |\ Ax \leq b\}$ e $C^k = \{x \in I\!R^n |\ Ax \leq b + \delta^k\}$ onde A é matriz $m \times n$ com $m \geq n$ e $b, \delta^k \in I\!R^m$. Dado $x^k \in C^k$ existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$D(x^k, C) = \|p^k - x^k\| \leq \alpha \|\delta^k\|$$

onde p^k é projeção de x^k em C.

Prova. Ver Lema de Hoffman [Hof52]. □

1.2 Regularização Log-quadrática

Definiremos, abaixo, uma familia de regularizações que será de muita importância para nossos estudos. Este tipo de regularização foi introduzido por Auslender, Teboulle e Ben-Tiba em [ATBT99b, ATBT99a].

Considere a função $\varphi: I\!R \to (-\infty, +\infty)$, definida por

$$\varphi(t) = \mu h(t) + \frac{\nu}{2}(t-1)^2$$

onde h é uma função convexa, própria e semicontínua inferior satisfazendo as seguintes propriedades adicionais:

1. h é duas vezes continuamente diferenciável sobre $int(domh) = (0, +\infty)$;

2. h é estritamente convexa sobre seu domínio;

3. $\lim_{t\to 0^+} h'(t) = -\infty$;

4. $h(1) = h'(1) = 0$ e $h''(1) > 0$;

5. Para todo $t > 0$,

$$h''(1)(1 - \frac{1}{t}) \leq h'(t) \leq h''(1)(t-1), \tag{1.1}$$

onde os parâmetros ν, μ são tais que

$$\nu > \mu h''(1) > 0.$$

Agora, definiremos a distância *log-quadrática* $d_\varphi(w,z)$, dada por

$$d_\varphi(w,z) := \begin{cases} \sum_{i=1}^n z_i^2 \varphi(\frac{w_i}{z_i}) & \text{se } (w,z) \in I\!R^n_{++} \times I\!R^n_{++}, \\ +\infty & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

O lema a seguir é de grande importância para a análise de convergência, e será usado adiante. Para facilitar a notação defina

$$\theta := \nu + \rho\mu \; \tau := \nu - \rho\mu \text{ e } \rho := h''(1). \tag{1.2}$$

Lema 1.2.1 *Para quaisquer* $w, z \in I\!R^n_{++}$ *e* $v \in I\!R^n_{+}$,

(i) $\langle \nabla_1 d_\varphi(w,z), w - v\rangle \geq \frac{\theta}{2}(\|w-v\|^2 - \|z-v\|^2) + \frac{\tau}{2}\|w-z\|^2$;

(ii) $\langle v, \nabla_1 d_\varphi(w,z)\rangle \leq \theta\|v\|\|w-z\|$.

Prova. (i) Ver [AH95]. (ii) $\varphi(t) = \mu h(t) + \frac{\nu}{2}(t-1)^2 \implies \varphi'(t) = \mu h'(t) + \nu(t-1)$, por (1.1) temos que $\varphi'(t) \leq (\nu + \rho\mu)(t-1)$. Logo para todo $i = 1, 2, ..., n$, e fazendo $t = \frac{w_i}{z_i}$ temos que

$$v_i z_i \varphi'(\frac{w_i}{z_i}) \leq \theta v_i z_i (\frac{w_i}{z_i} - 1).$$

Portanto,

$$\langle v, \nabla_1 d_\varphi(w, z)\rangle \leq \theta\langle v, w - z\rangle.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz, obtemos

$$\langle v, \nabla_1 d_\varphi(w, z)\rangle \leq \ \theta\|v\|\|w - z\|.$$

□

1.3 Operadores Monótonos Maximais

Para um operador arbitrário ponto-conjunto $T\colon B \to \mathcal{P}(B^*)$, lembramos as seguintes definições:

Domínio de T:

- $D(T) := \{x \in B | T(x) \neq \emptyset\}$

Gráfico de T:

- $G(T) := \{(x, v) \in B \times B^* | v \in T(x)\}$

Imagem de T:

- $Im(T) := \{v \in B^* | v \in T(x) \text{ para algum } x \in B\}$

Definição 1.3.1 *Um operador* $T\colon B \to \mathcal{P}(B^*)$ *é* monótono *se*

$$\langle u - v, x - y\rangle \geq 0,$$

para todo $x, y \in B$ *e para todo* $u \in T(x)$,$v \in T(y)$. *Um operador monótono é dito* maximal *se para qualquer outro operador monótono* $\widetilde{T}$ *tal que* $\widetilde{T}(x) \supseteq T(x)\ \forall\ x \in B$, *é verdadeiro que* $\widetilde{T} = T$.

O resultado a seguir é usado para assegurar a maximalidade da soma de operadores monótonos maximais. Denote por $intA$ e irA o interior topológico e o interior relativo de A, respectivamente.

Proposição 1.3.1 (Ver [Roc76, Teorema 1]) *Sejam* $T_1, T_2: B \to \mathcal{P}(B^*)$

operadores monótonos maximais. Se ocorrer uma das condições abaixo:

(i) $D(T_1) \cap int(D(T_2)) \neq \emptyset$;

(ii) $irD(T_1) \cap irD(T_2) \neq \emptyset$ e B de dimensão finita.

Então $T_1 + T_2$ é um operador monótono maximal.

Definição 1.3.2 *Seja* $C \subset B$ *um conjunto convexo, fechado e não vazio. O operador* $N_C: B \to \mathcal{P}(B^*)$ *definido por*

$$N_C(x) = \begin{cases} \{w \in B^* | \langle w, z - x\rangle \leq\ 0\ \forall z \in C\} & se\ x \in C, \\ \emptyset & caso\ contrário, \end{cases}$$

é dito operador normalizador *de* C.

Verifica-se que $N_C(\cdot)$ é o subdiferencial da função indicadora $\delta_C(\cdot)$ (ver Definição 1.1.5), e portanto é um operador monótono maximal (ver [Roc70a]), assim como $D(N_C) = C$. Além disso, $v \in N_C(x) = 0$ se, e somente se $x \in intC$.

Definição 1.3.3 *O* problema da desigualdade variacional *associado a* T *e* C, *denotado* $DV(T, C)$, *onde* $T: B \to \mathcal{P}(B^*)$ *é monótono maximal e* C *é um conjunto convexo, fechado e não vazio, é definido por:*

$$DV(T, C) \qquad \begin{cases} Achar\ x^* \in C\ tal\ que\ exista\ u^* \in T(x^*)\ com \\ \langle u^*, x - x^*\rangle \geq 0\ \forall\ x \in C. \end{cases}$$

De agora em diante, denotaremos $S :=$ o conjunto de soluções do $DV(T, C)$.

O resultado seguinte é de verificação imediata.

Proposição 1.3.2 *As soluções do $DV(T, C)$ são precisamente os zeros de $T + N_C$.*

Teorema 1.3.1 *Seja $f: I\!R^n \longrightarrow I\!R \cup \{+\infty\}$ uma função convexa, própria com $dom(f)$ aberto, diferenciável no seu domínio e $f_\infty(d) = +\infty \quad \forall\ d \neq 0$. Seja A uma matriz $m \times n$ com $m \geq n$ e posto n, $b \in I\!R^m$ com $(b - A(I\!R^n)) \cap dom(f) \neq \emptyset$. Defina h(x):=f(b-Ax), seja $T: I\!R^n \to \mathcal{P}(I\!R^n)$ um operador monótono maximal tal que $D(T) \cap dom(h) \neq \emptyset$, e defina*

$$U(x) := \begin{cases} T(x) + \nabla h(x) & se\ x \in D(T) \cap D(\nabla h), \\ \emptyset & caso\ contrário. \end{cases}$$

Então $\nabla h(x)$ é sobrejetivo. Além disso existe x solução da equação

$$0 \in U(x),$$

o qual é único se f é estritamente convexa sobre seu domínio.

Prova. Ver [AH95]. □

As duas definições a seguir serão usadas para os nossos resultados de existência e podem ser encontradas em [Bre76, BS01a].

Definição 1.3.4 *Um operador T é dito regular* (ver [Bre76], propriedade $(*)$) *se*

$$\forall\ u \in R(T)\ and\ \forall\ y \in D(T), \qquad \sup_{(z,v)\in G(T)} \langle v - u, y - z\rangle < \infty.$$

Definição 1.3.5 *Um operador monótono $T: B \to \mathcal{P}(B^*)$ é dito coercivo* (ver [Bre76]) *se $D(T)$ é limitado, ou para todo $y_0 \in D(T)$*

$$\lim_{||y|| \to +\infty} \frac{\langle v, y - y_0\rangle}{||y||} = +\infty \quad \forall\ (v, y) \in G(T)$$

.

Lema 1.3.1 *Se $\widetilde{T}$ é coercivo então dado $\overline{x} \in D(\widetilde{T})$ existe U limitado tal que $U \supseteq (\widetilde{T} + N_C)^{-1}(0)\ \forall\ C \ni \overline{x}$.*

Prova. Dado $\overline{x} \in D(\widetilde{T})$, defina $U := S_\varphi(\lambda) = \{x \in B|\ \varphi(x) \leq \lambda\}$ para $\lambda \geq 0$ onde $\varphi(x) = \inf_{u \in \widetilde{T}(x)} \langle u, x - \overline{x}\rangle$. Note que: se $x^* \in S\ \Rightarrow\ \varphi(x^*) \leq 0$. Além disso, $\varphi(\overline{x}) = 0$. Portanto $U \supseteq (\widetilde{T} + N_C)^{-1}(0)\ \forall\ C \ni \overline{x}$.

Agora provaremos que U é limitado. Provaremos então que, $S_\varphi(\lambda)$ é limitado. De fato, se existe $\lambda \geq 0$ tal que $S_\varphi(\lambda)$ não seja limitado, então existe $\{x^k\} \subseteq S_\varphi(\lambda)$ com $\|x^k\| \to +\infty$ e $\inf_{u \in \widetilde{T}(x^k)} \langle u, x^k - \overline{x}\rangle \leq \lambda$. Portanto existe $u^k \in \widetilde{T}(x^k)$ tal que $\langle u^k, x^k - \overline{x}\rangle \leq \lambda + 1$, logo

$$\lim_{\|x^k\| \to +\infty} \frac{\langle u^k, x^k - \overline{x}\rangle}{\|x^k\|} \leq \lim_{\|x^k\| \to +\infty} \frac{\lambda + 1}{\|x^k\|} = 0,$$

para $(u^k, x^k) \in G(T)$. E isto é uma contradição, pois $\widetilde{T}$ é coercivo. $\square$

Teorema 1.3.2 (Ver [Bre76]) *Se T é coercivo então T é regular.*

Teorema 1.3.3 (Ver [Bre76]) *Se T é coercivo, então T é sobrejetivo.*

A definição a seguir está conforme [BS99].

Definição 1.3.6 . *Seja T um operador monótono maximal e $\varepsilon \geq 0$, definiremos* ε-extensão *de T por:*

$$T^\varepsilon(x) := \{v \in B^*|\ \langle v - w, x - y\rangle \geq -\varepsilon\ \forall\ y \in B, w \in T(y)\}.$$

A relação $T^0 = T$ é verdadeira. Além disso, para $\varepsilon' \geq \varepsilon \geq 0$, temos $T^\varepsilon(x) \subset T^{\varepsilon'}(x)$. Em particular, para cada $\varepsilon \geq 0$, temos $T(x) \subset T^\varepsilon(x)$.

A discussão sobre a maximalidade de operatores monótonos e suas propriedades de sobrejetividade requer a introdução da aplicação de dualidade. Asplund [Asp67] mostrou que, quando B é um espaço de Banach reflexivo, existe uma norma equivalente em B a qual é Gâteaux diferenciável em toda parte exceto na origem e cuja norma associada em B^* é Gâteaux diferenciável em toda parte exceto na origem. Para simplificar a notação, supomos de agora em diante que essa é a norma em B. Usaremos a notação $\|\cdot\|$ para essa norma em B e sua norma associada em B^*. Denote por J o Gâteaux gradiente da função $\varphi(x) := \frac{1}{2}\|x\|^2$. Portanto, J é a *aplicação de dualidade*, a qual associa a cada $x \in B$ um único $J(x) \in B^*$ tal que

$$\langle J(x), x\rangle = \|x\|^2 = \|J(x)\|^2. \tag{1.3}$$

Proposição 1.3.3 *Seja B um espaço de Banach reflexivo real e $J: B \to B^*$ a aplicação de dualidade definida em* (1.3). *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

(i) *$J(-x) = -J(x)$ e $J(\lambda x) = \lambda J(x)$ $\forall \lambda > 0$;*

(ii) *Seja $w = J(x)$, então $\langle w, z - x\rangle \leq \frac{1}{2}(\|z\|^2 - \|x\|^2)$ $\forall z \in B$;*

(iii) *Se $\widetilde{T}$ é monótono maximal , então $\forall \lambda > 0$, $\widetilde{T} + \lambda J$ é monótono maximal e sobrejetivo, e $(\widetilde{T} + \lambda J)^{-1}$ é injetivo e monótono maximal.*

Prova. O item (i) segue-se de (1.3) e (ii) do fato que $J(\cdot) = \partial(\frac{1}{2}\|x\|^2)$. Para provar (iii), note que a Proposição 1.3.1 garante a monotonicidade maximal de $\widetilde{T} + \lambda J$. A sobrejetividade de $\widetilde{T} + \lambda J$ e as afirmações sobre $(\widetilde{T} + \lambda J)^{-1}$ seguem-se de [Roc70b, Proposição 1]. $\square$

Proposição 1.3.4 *Sejam $T_0, T_1: B \to \mathcal{P}(B^*)$ operadores monótonos maximais tais que:*

(a) T_0 é regular;

(b) $D(T_0) \cap D(T_1) \neq \emptyset$ and $R(T_0) = B^*$;

(c) $T_0 + T_1$ *é monótono maximal.*

Então $R(T_0 + T_1) = B^*$.

Prova. Ver [BS01a]. □

Definição 1.3.7 *Seja* T *um operador monótono maximal.*

(i) T *é estritamente monótono se* $\langle v - u, y - z\rangle = 0$ *com* $v \in T(y)$,$u \in T(z)$ *implica que* $y = z$.

(ii) T *é paramonótono se* $\langle v - u, y - z\rangle = 0$ *com* $y, z \in B$, $v \in T(y), u \in T(z)$, *implica que* $u \in T(y), v \in T(z)$.

É fácil ver que (i) $\Rightarrow$ (ii).

Proposição 1.3.5 *Sejam* T *um operador paramonótono e* $\overline{x}$ *solução do* $DV(T, C)$. *Suponha também que* $x^* \in C$ *é tal que existe um elemento* $u^* \in T(x^*)$ *com* $\langle u^*, x^* - \overline{x}\rangle \leq 0$. *Então* x^* *é também solução do* $DV(T, C)$.

Prova. Ver [BI98]. □

A definição seguinte, está conforme [Bro76].

Definição 1.3.8 . *Seja* B *um espaço de Banach reflexivo real e* $T: B \to \mathcal{P}(B^*)$ *tal que* $D(T)$ *é convexo e fechado.* T *é dito pseudomonótono se, e somente se, satisfaz a seguinte condição:*

Para toda seqüência $\{(x^k, u^k)\} \subseteq G(T)$, *satisfazendo*

(a) $\{x^k\}$ *converge fracamente para* $x^* \in D(T)$;

(b) $\limsup_k \langle u^k, x^k - x^*\rangle \leq 0$,

então para cada $w \in D(T)$ existe um elemento $u^* \in T(x^*)$, tal que

$$\langle u^*, x^* - w\rangle \leq \liminf_k \langle u^k, x^k - w\rangle.$$

Pode ser mostrado que quando $T = \partial f$ para alguma função convexa f ou T ponto-ponto e contínuo, então T é pseudomonótono.

Capítulo 2

Problema da Desigualdade Variacional Semi-Infinita

Neste capítulo, apresentaremos os Algoritmos (2.1.1) e (2.2.1), e mostraremos que os mesmos estão bem definidos. Para o primeiro mostraremos que todo ponto limite fraco é solução do $DV(T, C)$ e para o segundo mostraremos que a seqüência toda converge fracamente a uma solução do $DV(T, C)$, sob hipóteses adequadas. Além disso, sob a hipótese de B ser uniformemente convexo, provaremos que o segundo algoritmo converge fortemente.

Sejam $T: B \to \mathcal{P}(B^*)$ um operador monótono maximal, B um espaço de Banach reflexivo real e C um conjunto, definido por

$$C := \{x \in B | \ g(x, y) \leq 0 \ \forall y \in Y\}, \tag{2.1}$$

onde o conjunto Y e a função $g: B \times \ Y \to I\!R$ satisfazem as seguintes propriedades:

(G_1) Y fracamente compacto contido em um espaço de Banach reflexivo real;

(G_2) $g(\cdot, y)$ convexa e semicontínua inferior $\ \forall \ y \in Y$;

(G_3) $g(\cdot, \cdot)$ fracamente contínua.

No decorrer deste capítulo serão consideradas as seguintes hipóteses:

(H_1) $D(T) \cap int(C) \neq \emptyset$ ou $int(D(T) \cap C \neq \emptyset$;

(H_2) T paramonótono e pseudomonótono com domínio fechado;

(H_3) $S \neq \emptyset$.

2.1 Algoritmo 2.1.1

Agora podemos formalizar o nosso primeiro algoritmo. Para isto, usaremos a seguinte notação:

- Y^k um subconjunto finito de Y;
- $C^k := \{x \in B|\ g(x,y) \leq 0\ \forall\ y \in Y^k\}$;

Algoritmo 2.1.1

Iniciação: *Escolha* $Y^1 \subset Y$ *finito e não vazio.*

Iteração: *Para* $k = 1, 2, ...,$

Passo 1. *Dado* C^k, *achar* x^k *solução de* P^k.

$$(P^k) \qquad \begin{cases} \text{Achar } x^k \in C^k \text{ tal que } \exists\ u^k \in T(x^k) \text{ com} \\ \langle u^k, x - x^k \rangle \geq 0\ \forall\ x \in C^k \end{cases}$$

Passo 2. *Para* x^k *obtida em Passo* 1., *resolva o* A^k.

$$(A^k) \qquad \begin{cases} \text{Achar } y^{k+1} \in Y \text{ tal que} \\ y^{k+1} \in \arg\max_{y \in Y}\ g(x^k, y). \end{cases}$$

Passo 3. (Teste de parada e atualização de Y^k): *Se* $g(x^k, y^{k+1}) \leq 0$, *pare. Caso contrário, defina*

$$Y^{k+1} := Y^k \cup \{y^{k+1}\}. \tag{2.2}$$

Passo 4. *Faça* $k := k + 1$ *e retorne para* 1.

Observação 2.1.1 *Como foi mencionado na introdução, os autores de* [BF76] *propuseram um método de aproximação exterior* (P_0) *para* (2.1) . *O método acima é uma adaptação do algoritmo deles para o problema da desigualdade variacional.*

Observação 2.1.2 *Da estrutura do algoritmo acima, temos que* $Y^k \subset Y^{k+1}$*, assim*

$$C \subset \cdots \subset C^{k+1} \subset C^k \subset \cdots \subset C^1.$$

Além disso C^k *é convexo para todo* k.

Observação 2.1.3 *Se* y^{k+1}*, a solução do* A^k *obtida no Passo* 2*, satisfaz*

$$g(x^k, y^{k+1}) \leq 0,$$

então é verdadeiro que $g(x^k, y) \leq 0$ *para todo* $y \in Y$*, isto é,* $x^k \in C$*. Pelo Passo* 1*,*

$$\langle u^k, x - x^k \rangle \geq 0 \ \forall \ x \in C.$$

Então x^k *é uma solução do* Problema (P)*. Isto justifica o critério de parada no Passo* 3.

2.1.1 Boa definição

Nesta seção, mostraremos a boa de definição do Algoritmo 2.1.1.

Proposição 2.1.1 *Suponha que* C^1 *seja limitado ou* T *coercivo. Então o Algoritmo (2.1.1) está bem definido.*

Prova. Defina o operador $T_k := T + N_{C^k}$. Para todo k é verdadeiro que:

(1) $D(T_k) = D(T) \cap D(N_{C^k}) = D(T) \cap C^k \neq \emptyset$ por (H_1) e Observação 2.1.2.

(2) $T_k = T + N_{C^k}$ é monótono maximal por (H_1) e Proposição 1.3.1.

Se C^1 é limitado então pela Observação 2.1.2, $D(T_k)$ é limitado, logo T_k é coercivo. Portanto pelo Teorema 1.3.3, T_k é sobrejetivo. Isto implica que o Algoritmo 2.1.1 está bem definido neste caso.

Agora suponha que T é coercivo. Neste caso T é regular pelo Teorema 1.3.2. Por outro lado, $R(T) = B^*$ pelo Teorema 1.3.3. Já que (2) acima é verdadeira, segue-se da Proposição 1.3.4 que T_k é sobrejetivo. Portanto P^k possui solução. Como $g(\cdot, \cdot)$ é fracamente contínua e Y é fracamente compacto, A^k possui solução, como queriamos provar. $\square$

Agora estamos em condições de apresentar o nosso primeiro resultado de convergência deste capítulo. Indicamos que este resultado é uma extensão para o $DV(T, C)$ de [BF76, Teorema 2.1].

2.1.2 Análise de convergência

Nesta seção, mostraremos que os pontos de acumulação da seqüência gerada pelo Algoritmo 2.1.1 são soluções do $DV(T, C)$.

Teorema 2.1.1 *Seja $\{x^k\}$ uma seqüência gerada pelo Algoritmo 2.1.1. Suponha verdadeiros (H_1) e (H_2). Suponha também que uma das seguintes condições seja verdadeira:*

(a) C^1 *limitado;*

(b) T *coercivo.*

Então todo ponto de acumulação fraco é uma solução do $DV(T, C)$.

Prova. Se (a) ocorre, pela Observação 2.1.2, $\{x^k\}$ é limitada. Se (b) ocorre, pelo Lema 1.3.1 para qualquer $\overline{x} \in D(T) \cap C$ existe U limitado tal que $U \supseteq (T + N_{C^k})^{-1}(0)$ $\forall\ k$, logo a seqüência $\{x^k\} \subseteq U$ é limitada. Escolha uma subseqüência

$\{x^{k_j}\}$ de $\{x^k\}$ convergindo fracamente para x^*. Provaremos que $x^* \in C$. Assuma por absurdo que $x^* \notin C$. Logo, existe $y^* \in Y$ tal que

$$g(x^*, y^*) > 0. \tag{2.3}$$

Extraindo uma subseqüência de $\{x^{k_j}\}$, se necessário, podemos garantir que a seqüência $\{y^{k_j+1}\}$ converge fracamente para $\widehat{y}$, por compacidade fraca de Y. Para k_j suficientemente grande, a continuidade fraca de g garante que

$$g(x^{k_j}, y^*) > 0. \tag{2.4}$$

Por definição de y^{k_j+1},

$$g(x^{k_j}, y^{k_j+1}) \geq g(x^{k_j}, y^*) > 0. \tag{2.5}$$

Passando ao limite em (2.5) e usando (2.3) temos que

$$g(x^*, \widehat{y}) \geq g(x^*, y^*) > 0. \tag{2.6}$$

Agora como $x^{k_{j+1}} \in C^{k_{j+1}}$, temos que $g(x^{k_{j+1}}, y) \leq 0 \ \forall \ y \in Y^{k_{j+1}}$. Sendo $k_{j+1} \geq k_j + 1$ temos que $Y^{k_{j+1}} \supset Y^{k_j+1}$.

Assim

$$g(x^{k_{j+1}}, y^{k_j+1}) \leq 0. \tag{2.7}$$

Usando o fato de que $x^{k_{j+1}} \rightharpoonup x^*$ e $y^{k_j+1} \rightharpoonup \widehat{y}$, e passando ao limite em (2.7), temos que

$$g(x^*, \widehat{y}) \leq 0. \tag{2.8}$$

Combinando (2.6) e (2.8) chegamos a uma contradição, portanto $x^* \in C$.

A seguir provaremos que todo ponto de acumulação fraco é solução do $DV(T, C)$. Seja $x^* \in W(x^k)$ um ponto de acumulação fraco e tome uma subseqüência $\{x^{k_j}\}$

convergindo fracamente para x^*. Sendo x^{k_j} uma solução de P^{k_j}, temos que

$$\langle u^{k_j}, x^{k_j} - x\rangle \leq 0 \ \forall x \in C^{k_j} \ \forall \ k_j. \tag{2.9}$$

Então pela Observação 2.1.2 obtemos

$$\langle u^{k_j}, x^{k_j} - x\rangle \leq 0 \ \forall x \in C \text{ e } \forall \ k_j. \tag{2.10}$$

Usando (2.10) e o fato de que $x^* \in C$,

$$\langle u^{k_j}, x^{k_j} - x^*\rangle \leq 0 \ \forall \ k_j. \tag{2.11}$$

Isto implica que

$$\limsup_j \langle u^{k_j}, x^{k_j} - x^*\rangle \leq 0, \text{ com } x^{k_j+1} \rightharpoonup x^* \text{ e } \ u^{k_j} \in T(x^{k_j}). \tag{2.12}$$

Tome $\overline{x} \in S$. Pela pseudomonotonicidade de T, concluimos que para $\overline{x}$ existe $u^* \in T(x^*)$ tal que

$$\liminf_j \langle u^{k_j}, x^{k_j} - \overline{x}\rangle \geq \langle u^*, x^* - \overline{x}\rangle. \tag{2.13}$$

Como $\overline{x} \in C$, de (2.10) temos que

$$\liminf_j \langle u^{k_j}, x^{k_j} - \overline{x}\rangle \leq 0. \tag{2.14}$$

Combinando as duas últimas desigualdades, obtemos que

$$\langle u^*, x^* - \overline{x}\rangle \leq 0. \tag{2.15}$$

Finalmente, pela paramonotonicidade de T e Proposição 1.3.5, concluimos que $x^* \in S$. □

Sob hipóteses adicionais sobre g e Y, obtemos convergência finita do Algoritmo 2.1.1. A prova abaixo segue os mesmos passos que [BF76, Corólario 2.1].

Corolário 2.1.1 *Suponha verdadeiras as hipóteses do Teorema 2.1.1. Em adição a* (G_1), (G_2) *e* (G_3), *suponha também que:*

(G_4) $g(x, \cdot)$ *é convexa* $\forall\ x \in B$;

(G_5) Y *um politopo.*

Então Algoritmo 2.1.1 converge em um número finito de passos.

Prova. Suponha que Algoritmo 2.1.1 não convirja em um número finito de passos. Por (G_4) e (G_5) cada solução do A^k ocorre nos vértices de Y, os quais são finitos. Logo existem dois índices k, s tais que $s > k$ com $y^{k+1} = y^{s+1}$. Desta forma, como

$$s > k \ \Rightarrow\ Y^{k+1} \subseteq Y^s. \tag{2.16}$$

Sabemos que $g(x^s, y) \leq 0\ \forall\ y \in Y^s$, logo

$$g(x^s, y^{k+1}) \leq 0 \tag{2.17}$$

Por outro lado, como supomos que o algoritmo não tem terminação finita e portanto não para em Passo 3, temos

$$g(x^s, y^{k+1}) = g(x^s, y^{s+1}) > 0. \tag{2.18}$$

Logo, combinando as últimas duas desigualdades chegamos a uma contradição. Portanto o algoritmo termina num número finito de passos. $\square$

O seguinte exemplo se enquadra dentro das condições do corolário acima.

Exemplo 2.1.1

$$(P) \qquad \begin{cases} \min f(x_1) = -x_1 \\ s.a \begin{cases} g(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 - x_3 \leq 0\ \forall\ (x_2, x_3)\ \in Y; \\ Y = \{(x_2, x_3) |\ x_2, x_3 \geq 0\ \ e\ x_2 + x_3 \leq 1\}. \end{cases} \end{cases}$$

O problema (P) é equivalente a:

$$(P_1) \qquad \begin{cases} \text{Achar } x_1{}^* \in C = \{x_1 |\ g(x_1, x_2, x_3) \leq 0 \ \forall \ (x_2, x_3) \ \in Y\} \\ \text{tal que } 0 \in (\partial f + N_C)(x_1{}^*). \end{cases}$$

Aplicaremos o Algoritmo 2.1.1 para resolver problema (P_1).

Escolha $Y^1 = \{(1,0)\}$, o que implica $C^1 = \{x_1 |\ x_1 \leq 1\}$, daí temos que

$$N_{C^1}(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_1 < 1; \\ [0, \infty) & \text{se } x_1 = 1; \\ \emptyset & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Como $\partial f(x_1) = -1 \ \forall \ x_1 \in I\!R$, então o primeiro passo é encontar $x_1^1 \in C^1$ tal que

$$0 \in (\partial f + N_C)(x_1^1)$$

Logo $x_1^1 = 1$.

Agora o segundo passo é encontar y^2 tal que

$$y^2 = \arg \max_{(x_2, x_3) \in Y} g(1, x_2, x_3)$$

logo $y^2 = (0,0)$. Como $g(1,0,0) = 1 > 0$ então defina o conjunto $Y^2 = \{(1,0),(0,0)\}$ e retorne ao Passo 1.

Assim $C^2 = \{x_1 |\ x_1 \leq 0\}$, daí temos que

$$N_{C^2}(x_1) = \begin{cases} 0 & \text{se } x_1 < 0; \\ [0, \infty) & \text{se } x_1 = 0; \\ \emptyset & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Queremos agora encontar $x_1^2 \in C^2$ tal que

$$0 \in (\partial f + N_C)(x_1^2)$$

Logo $x_1^2 = 0$. Agora, encontraremos y^3, onde

$$y^3 = \arg \max_{(x_2, x_3) \in Y} g(0, x_2, x_3).$$

Assim $y^3 = (0,0)$. Pelo Passo 3, como $g(0,0,0) = 0$, o algoritmo para nesta iteração.

Portanto $x_1^2 = 0$ é a solução do *Problema* (P).

2.2 Algoritmo 2.2.1

No Algoritmo 2.1.1, a existência e limitação dos iterados requer limitação de C. No método que apresentaremos a seguir, tiraremos a hipótese de limitação e definiremos cada subproblema de tal maneira que os iterados sempre existam. Mais precisamente, em cada subproblema faremos uma regularização "tipo Tikhonov" de T. Tais regularizações exigem sempre que o paramêtro de regularização convirja a zero, a fim de estabelecer a convergência do método. Para a definição dos problemas perturbados, consideramos a função $h(x) := \max_{y \in Y} g(x,y)$, a qual é convexa e fracamente contínua. Considere também o operador

$$T_\lambda(x) := T(x) + \lambda J(x - x^0),$$

onde J é a *aplicação de dualidade* dada em (1.3).

Definição 2.2.1 . *Dados* λ , $\beta \in I\!R_{++}$, $\tilde{x}(\lambda, \beta, x^0)$ *é dita uma solução aproximada do* $DV(T, C)$ *se:*

(1) $\exists\, \widetilde{C} \supseteq C$ *e* $\tilde{x} \in \widetilde{C}$ *tal que* $\tilde{x}$ *seja solução do* $DV(T_\lambda, \widetilde{C})$*;*

(2) $h(\tilde{x}) \leq \beta$.

Observação 2.2.1 *Se as hipóteses do Teorema 2.1.1 valem, então um conjunto* $\widetilde{C}$ *e um ponto* $\tilde{x}$ *verificando* (1) *e* (2) *da Definição 2.2.1 podem ser obtidos através do Algoritmo 2.1.1. Mais precisamente, escolha* $\lambda, \beta > 0$ *e* $x^0 \in B$ *fixo, e considere* $\{x^k\}$ *uma seqüência gerada pelo Algoritmo 2.1.1 para resolver* $DV(T_\lambda, C)$. *Tome uma subseqüência* $\{x^{k_j}\} \subseteq \{x^k\}$ *convergido fracamente para* x^*. *Então existe* $k_0 \in I\!N$ *tal que* $h(x^{k_j}) \leq \beta$ *para todo* $k_j \geq k_0$ *e* $x^{k_j} \in C^{k_j} \supseteq C$. *Desta forma podemos escolher* $\widetilde{C} := C^{k_0}$ *e* $\tilde{x} := x^{k_0}$ *como uma solução aproximada do* $DV(T, C)$.

Algoritmo 2.2.1

Iniciação: *Escolha* $x^0 \in B$.

Iteração: *Para* $k = 1, 2, ...,$

Passo 1. *Tome* $\lambda_k, \beta_k > 0$ *e encontre uma solução aproximada* $\widetilde{x}^k(\lambda_k, \beta_k, x^0)$ *do* $DV(T, C)$;

Passo 2. *Se* $\widetilde{x}^k = x^0$ *e* $x^0 \in C$, *pare. Caso contrário,*

Passo 3. *Faça* $k := k + 1$ *e retorne para* 1.

Observação 2.2.2 *Na Proposição 2.2.1 provaremos a boa definição do Algoritmo 2.2.1 sem precisar supor limitação de* C.

Observação 2.2.3 *Um importante caso em que as condições do Teorema 2.1.1 não são satisfeitas é o problema de programação linear quando o conjunto de restrições é ilimitado. Neste caso,* $\widetilde{C}^k$ *requerido em Passo* 1. *pode ser obtido tal como segue. O conjunto restrição desse problema é dado por* $C = \{x \in I\!R^n |\ Ax \leq b\}$, *onde* A *é uma matriz* $m \times n$ *e* $b \in I\!R^m$. *Sejam* $\lambda_k > 0$, $\beta_k > 0$, *os paramêtros do Passo* 1. *Tome* $\widetilde{C}^k = \{x \in I\!R^n |\ Ax \leq b + \beta_k e\}$ *onde* $e = (1, .., 1)^T$. *É claro que* $\widetilde{C}^k \supseteq C$ *e* $h(x) \leq \beta_k\ \forall x \in \widetilde{C}^k$.

Observação 2.2.4 *Quanto ao critério de parada em Passo* 2, *se* $\widetilde{x}^k = x^0$ *e* $x^0 \in C$, *temos que*

$$0 \in T_{\lambda_k}(x^0) + N_{\widetilde{C}}(x^0) = T(x^0) + \lambda_k(x^0 - x^0) + N_{\widetilde{C}}(x^0) = T(x^0) + N_{\widetilde{C}}(x^0).$$

Então x^0 *é solução do* $DV(T, \widetilde{C})$, *e portanto* x^0 *é também solução do* $DV(T, C)$.

2.2.1 Boa definição

Nesta seção mostraremos a boa definição Algoritmo 2.2.1.

Proposição 2.2.1 *Suponha verdadeiro* (H_1). *Então o Algoritmo 2.2.1 está bem definido.*

Prova. Defina o operador $S_{\lambda_k}(x) := T(x) + N_{\widetilde{C}}(x) + \lambda_k J(x - x^0)$. Para todo k é verdadeiro que:

(1) $D(S_{\lambda_k}) = D(T) \cap D(N_{\widetilde{C}}) = D(T) \cap \widetilde{C} \neq \emptyset$ do fato que $\widetilde{C} \supseteq C$ e (H_1).

(2) $T + N_{\widetilde{C}}$ é monótono maximal pela Proposição 1.3.1.

A existência e unicidade de $\tilde{x}^k$ segue-se do Teorema1.3.3(iii), aplicado a $\widetilde{T} = T + N_{\widetilde{C}}$. □

2.2.2 Análise de convergência

Nesta seção mostraremos dois resultados de convergência da seqüência gerada pelo Algoritmo 2.2.1. O primeiro resultado, exige condição de Slater para C e uma certa relação entre os parâmetros λ_k e β_k. Com isto garantimos que todo ponto limite fraco é solução do $DV(T, C)$. O segundo resultado, exige que a distância entre os iterados x^k e o conjunto C seja "suficientemente pequena". Com isto garantimos que o limite fraco é solução do $DV(T, C)$. E sob a hipótese de convexidade uniforme em B garantimos a convergência forte.

Lembramos que a condição de Slater usual requer a existência de um ponto x^0 tal que $g(x^0, y) < 0$ para todo $y \in Y$. Contudo, usando a fato de que Y é fracamente compacto, temos que, se vale a condição de Slater, então

$$\exists\ \alpha > 0 \text{ tal que } g(x^0, y) \leq -\alpha\ \forall\ y \in Y. \tag{2.19}$$

O resultado abaixo será nosso primeiro passo para estabelecer a convergência do Algoritmo 2.2.1. Veremos neste resultado que, para estabelecer a convergência do método, é necessário que os "paramêtros de inviabilidade" β_k convirjam a zero estritamente mais rápido do que os "paramêtros de regularização" λ_k.

Proposição 2.2.2 *Seja $\{\widetilde{x}^k\}$ uma seqüência gerada pelo Algoritmo 2.2.1 e suponha a condição de Slater para C. Suponha verdadeiros (H_2), (H_3) e ainda que $\lambda_k \to 0, \beta_k \to 0$ com $\lim \frac{\beta_k}{\lambda_k} \leq \gamma < 1$. Então $\{\widetilde{x}^k\}$ é limitada e $W(\widetilde{x}^k) \subset C$.*

Prova. Sejam x^0 e α como em (2.19). Sendo $\lim \frac{\beta_k}{\lambda_k} \leq \gamma < 1$ e $\lim_k \lambda_k \to 0$ existe $k_0 \in I\!N$ tal que

$$\frac{\lambda_k}{\alpha} < 1 \text{ e } 0 < \beta_k \leq \frac{\alpha\lambda_k}{\alpha - \lambda_k} \;\forall\; k > k_0. \tag{2.20}$$

Defina $x^k := \widetilde{x}^k + \frac{\lambda_k}{\alpha}(x^0 - \widetilde{x}^k)$. Afirmamos que $x^k \in C$ para todo $k > k_0$. Pela convexidade de h e definição de x^k,

$$h(x^k) \leq \frac{\lambda_k}{\alpha} h(x^0) + (1 - \frac{\lambda_k}{\alpha}) h(\widetilde{x}^k) \;\forall\; k > k_0$$

Usando (2.19) e fato de que $\widetilde{x}^k$ é uma solução aproximada, obtemos para todo $k > k_0$ que

$$h(x^k) \leq \frac{\lambda_k}{\alpha}(-\alpha) + (1 - \frac{\lambda_k}{\alpha})\beta_k$$

Agora usando (2.20) para todo $k > k_0$ obtemos

$$h(x^k) \leq \frac{\lambda_k}{\alpha}(-\alpha) + (1 - \frac{\lambda_k}{\alpha})(\frac{\alpha\lambda_k}{\alpha - \lambda_k}) = -\lambda_k + \lambda_k = 0. \tag{2.21}$$

Portanto $\{x^k\} \subseteq C$ para todo $k > k_0$, como havíamos afirmado.

A solução aproximada $\widetilde{x}^k$ é tal que

$$u^k + \eta^k + \lambda_k J(\widetilde{x}^k - x^0) = 0, \text{com } u^k \in T(\widetilde{x}^k),\; \eta^k \in N_{\widetilde{C}}(\widetilde{x}^k),$$

Pela definição do operador normalizador, temos

$$\langle u^k, x - \widetilde{x}^k \rangle \geq \lambda_k \langle J(x^0 - \widetilde{x}^k), x - \widetilde{x}^k \rangle \;\forall\; x \in \widetilde{C}. \tag{2.22}$$

Se $\overline{x} \in S$, então existe $\overline{u} \in T(\overline{x})$ tal que

$$\langle \overline{u}, y - \overline{x} \rangle \geq 0 \ \forall y \in C. \tag{2.23}$$

Pela monotonicidade de T, temos

$$\langle \overline{u}, \overline{x} - \tilde{x}^k \rangle \geq \langle u^k, \overline{x} - \tilde{x}^k \rangle. \tag{2.24}$$

Substituido $\overline{x}$ em (2.22) e combinando com (2.24) obtemos

$$\langle \overline{u}, \overline{x} - \tilde{x}^k \rangle \geq \lambda_k \langle J(x^0 - \tilde{x}^k), \overline{x} - \tilde{x}^k \rangle. \tag{2.25}$$

Usando a Proposição 1.3.3-(ii) para $z = x^0 - \overline{x}$ e $x = x^0 - \tilde{x}^k$ obtemos

$$\langle J(x^0 - \tilde{x}^k), \overline{x} - \tilde{x}^k \rangle \geq \frac{1}{2}(\|x^0 - \tilde{x}^k\|^2 - \|x^0 - \overline{x}\|^2) \tag{2.26}$$

Combinando (2.25) e (2.26) temos

$$\langle \overline{u}, \overline{x} - \tilde{x}^k \rangle \geq \frac{\lambda_k}{2}(\|x^0 - \tilde{x}^k\|^2 - \|x^0 - \overline{x}\|^2). \tag{2.27}$$

Tome $k > k_0$ e use (2.23) para $y = x^k$ para concluir que $\langle \overline{u}, x^k - \overline{x} \rangle \geq 0$. Somando e subtraindo $\tilde{x}^k$ nesta desigualdade, temos que

$$\langle \overline{u}, x^k - \tilde{x}^k \rangle \geq \langle \overline{u}, \overline{x} - \tilde{x}^k \rangle. \tag{2.28}$$

Usando a definição de x^k e combinando (2.27) e (2.28) temos que

$$\frac{\lambda_k}{\alpha}\langle \overline{u}, x^0 - \tilde{x}^k \rangle \geq \frac{\lambda_k}{2}(\|x^0 - \tilde{x}^k\|^2 - \|x^0 - \overline{x}\|^2). \tag{2.29}$$

Dividindo por $\lambda_k > 0$, obtemos que

$$\frac{1}{\alpha}\langle \overline{u}, \tilde{x}^k - x^0 \rangle + \frac{1}{2}(\|x^0 - \tilde{x}^k\|^2 - \|x^0 - \overline{x}\|^2) \leq 0 \tag{2.30}$$

O lado esquerdo da inequação (2.30) é uma função convexa quadrática em $\tilde{x}^k$ com coeficiente quadrático positivo , logo a seqüência $\{\tilde{x}^k\}$ tem que ser limitada.

Seja $\{\tilde{x}^{k_j}\} \subseteq \{\tilde{x}^k\}$ uma subseqüência convergindo fracamente para x^*. Por definição de $\tilde{x}^{k_j}$ temos que $h(\tilde{x}^{k_j}) \leq \beta_{k_j}$, sendo h fracamente contínua e $\beta_k \to 0$, obtemos $h(x^*) \leq 0$. Portanto $x^* \in C$. □

Agora estamos com condições de estabelecer o nosso primeiro resultado de convergência.

Teorema 2.2.1 *Seja $\{\tilde{x}^k\}$ uma seqüência gerada pelo Algoritmo 2.2.1 e suponha verdadeiros (H_2) e (H_3). Suponha também que λ_k, β_k e x^0 satisfaçam as hipóteses da Proposição 2.2.2. Então todo ponto de acumulação de $\{\tilde{x}^k\}$ é solução do $DV(T, C)$.*

Prova. A solução aproximada $\tilde{x}^k$ é tal que

$$u^k + \eta^k + \lambda_k J(\tilde{x}^k - x^0) = 0, \text{com } u^k \in T(\tilde{x}^k),\ \eta^k \in N_{\tilde{C}}(\tilde{x}^k).$$

Assim, pela definição do operador normalizador, temos

$$\langle u^k, x - \tilde{x}^k \rangle \geq \lambda_k \langle J(x^0 - \tilde{x}^k), x - \tilde{x}^k \rangle \ \forall\ x \in \tilde{C}. \tag{2.31}$$

Consideramos dois casos:

(i) O Algoritmo 2.2.1 tem terminação finita em um índice k.

Neste caso, temos que $\tilde{x}^k = x^0$ e $\tilde{x}^k \in C$. Do fato de que $C \subseteq \tilde{C}$ e $\tilde{x}^k \in C$ então de (2.31), temos que

$$\langle u^k, x - \tilde{x}^k \rangle \geq 0 \ \forall\ x \in C. \tag{2.32}$$

Neste caso, temos que $\tilde{x}^k \in S$.

(ii) O Algoritmo 2.2.1 não tem terminação finita.

Tome $x^* \in W(\tilde{x}^k)$, então existe uma subseqüência $\{\tilde{x}^{k_j}\} \subseteq \{\tilde{x}^k\}$ convergindo fracamente para x^*.

Usando que $C \subseteq \widetilde{C}$, (2.22), a definição de J e a desigualdade de Cauchy-Schwarz , obtemos que

$$\begin{aligned} \langle u^k, \widetilde{x}^k - x \rangle &\leq \lambda_k \langle J(x^0 - \widetilde{x}^k), \widetilde{x}^k - x \rangle. \\ &\leq \lambda_k \| J(x^0 - \widetilde{x}^k) \| \| \widetilde{x}^k - x \| \\ &= \lambda_k \| x^0 - \widetilde{x}^k \| \| \widetilde{x}^k - x \|, \end{aligned} \tag{2.33}$$

para todo $x \in C$.

Pela Proposição 2.2.2, $x^* \in C$. Agora, usando os fatos de que $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$ e que $\{\widetilde{x}^k\}$ é limitada, em (2.33) obtemos

$$\limsup_{j\to\infty} \langle u^{k_j}, \widetilde{x}^{k_j} - x^* \rangle \leq 0, \tag{2.34}$$

onde $u^{k_j} \in T(x^{k_j})$ e $\widetilde{x}^{k_j} \rightharpoonup x^*$. Por (2.34) a pseudomonotonicidade de T garante que para qualquer $\overline{x} \in S$ existe $u^* \in T(x^*)$ tal que

$$\liminf_{j\to\infty} \langle u^{k_j}, \widetilde{x}^{k_j} - \overline{x} \rangle \geq \langle u^*, x^* - \overline{x} \rangle. \tag{2.35}$$

Da mesma forma, para $\overline{x} \in S$, de (2.33) obtemos

$$\liminf_{j} \langle u^{k_j}, \widetilde{x}^{k_j} - \overline{x} \rangle \leq 0. \tag{2.36}$$

Agora combinando (2.34) e (2.35) temos que

$$\langle u^*, x^* - \overline{x} \rangle \leq 0. \tag{2.37}$$

Finalmente, pela paramonotonicidade de T e a Proposição 1.3.5, temos que $x^* \in S$, como queriamos demonstrar. □

Provaremos agora um segundo resultado relativo à convergência do Algoritmo 2.2.1. Este resultado não requer a condição de Slater. Em lugar desta hipótese, exigiremos que os iterados $\{\tilde{x}^k\}$ "não se afastem muito" do conjunto C. Mais precisamente,

$$d(\tilde{x}^k, C) \leq \theta \lambda_k^r, \tag{2.38}$$

onde $\theta > 0$ e $r > 1$.

Observação 2.2.5 *A hipótese acima pode parecer muito forte. Contudo, no caso do problema de programação linear (veja observação 2.2.3), a condição* (2.38) *pode ser assegurada graças ao Lema de Hoffman (veja Lema 1.1.3). Se* $\tilde{C}^k = \{x \mid Ax \leq b + \beta_k e\}$*, (como em 2.2.3), então* $d(\tilde{x}^k, C) \leq \alpha\beta_k$*, para algum* $\alpha > 0$.

No teorema abaixo provaremos a convergência fraca da seqüência gerada pelo Algoritmo 2.2.1 a uma solução. Mais ainda, caracterizamos este limite como sendo aquele elemento do conjunto de soluções que está mais próximo de x_0. Além disso, se B é uniformente convexo (Ver Definição 1.1.3), a convergência é forte.

Teorema 2.2.2 *Seja* $\{\tilde{x}^k\}$ *uma seqüência gerada pelo Algoritmo 2.2.1. Suponha que valem em* (H_2)*,* (H_3) *e as seguintes condições:*

(a) $\lambda_k \to 0,\ \beta_k \to 0$;

(b) $\{\tilde{x}^k\}$ *satisfaz* (2.38).

Então, a seqüência toda converge fracamente para $x \in S$*, onde* x *é tal que*

$$x = \arg\min_{y \in S} \|x^0 - y\|^2.$$

Além disso, se B *é uniformente convexo, a convergência é forte.*

Prova. Primeiro provaremos que a seqüência $\{\tilde{x}^k\}$ é limitada. A solução aproximada $\tilde{x}^k$ é tal que

$$u^k + \eta^k + \lambda_k J(\tilde{x}^k - x^0) = 0, \text{com } u^k \in T(\tilde{x}^k),\ \eta^k \in N_{\tilde{C}}(\tilde{x}^k). \tag{2.39}$$

Se $y \in S$, então existe $v \in T(y)$ tal que

$$\langle v, x - y \rangle \geq 0\ \forall x \in C. \tag{2.40}$$

Usando a Proposição 1.3.3(ii) para $z = x^0 - y$ e $x = x^0 - \tilde{x}^k$, obtemos

$$\|x^0 - y\|^2 \geq \|x^0 - \tilde{x}^k\|^2 + 2\langle J(x^0 - \tilde{x}^k), \tilde{x}^k - y\rangle. \tag{2.41}$$

Defina $A := 2\langle J(x^0 - \tilde{x}^k), \tilde{x}^k - y\rangle$. De (2.39) implica que

$$A = \frac{2}{\lambda_k}(\langle u^k, \tilde{x}^k - y\rangle + \langle \eta^k, \tilde{x}^k - y\rangle).$$

Por definição do operador normalizador, $\langle \eta^k, \tilde{x}^k - y\rangle \geq 0$. Agora ,pela monotonicidade de T temos $\langle u^k, \tilde{x}^k - y\rangle \geq \langle v, \tilde{x}^k - y\rangle$.

Dos dois resultados acima, obtemos que

$$A \geq \frac{2}{\lambda_k}\langle v, \tilde{x}^k - y\rangle. \tag{2.42}$$

Combinando (2.41) e (2.42) vemos que

$$\|x^0 - y\|^2 \geq \|x^0 - \tilde{x}^k\|^2 + \frac{2}{\lambda_k}\langle v, \tilde{x}^k - y\rangle. \tag{2.43}$$

Afirmamos que a seguinte desigualdade vale para todo $y \in S$ e para todo k.

$$\|x^0 - y\|^2 \geq \|x^0 - \tilde{x}^k\|^2 - 2\theta\lambda_k^{r-1}\|v\|. \tag{2.44}$$

De fato, suponha primeiro que $\tilde{x}^k \in C$. Por (2.40) e (2.43) temos que

$$\|x^0 - y\|^2 \geq \|x^0 - \tilde{x}^k\|^2,$$

e portanto (2.44) vale neste caso. Suponha agora que $\tilde{x}^k \notin C$. Seja p^k a projeção de $\tilde{x}^k$ em C. Temos que

$$\begin{aligned} \tfrac{2}{\lambda_k}\langle v, \tilde{x}^k - y\rangle &= \tfrac{2}{\lambda_k}\left[\langle v, \tilde{x}^k - p^k\rangle + \langle v, p^k - y\rangle\right] \\ &\geq \tfrac{2}{\lambda_k}\langle v, \tilde{x}^k - p^k\rangle \geq -\tfrac{2}{\lambda_k}\|v\|\|\tilde{x}^k - p^k\| \\ &\geq -2\theta\lambda_k^{r-1}\|v\|, \end{aligned} \tag{2.45}$$

onde usamos que $p^k \in C$, Cauchy-Schwarz e (2.38). Combinando (2.43) com (2.45), concluimos (2.44). Logo, nossa afirmação é verdadeira e portanto $\{\tilde{x}^k\}$ é limitada.

Seja $\{\tilde{x}^{k_j}\} \subseteq \{\tilde{x}^k\}$ uma subseqüência convergindo fracamente para x^*. Por definição de $\tilde{x}^{k_j}$ temos que $h(\tilde{x}^{k_j}) \leq \beta_{k_j}$. Sendo h fracamente contínua e $\beta_k \to 0$, obtemos $h(x^*) \leq 0$. Portanto $x^* \in C$. Agora, pela demostração do Teorema 2.2.1, concluimos que $\emptyset \neq W(\tilde{x}^k) \subseteq S$.

Provaremos agora que existe um único ponto de acumulação fraco. Já sabemos que $x^* \in S$. Por (2.44) para $k = k_j$ obtemos

$$\begin{aligned}
\|x^0 - y\|^2 &\geq \liminf_{j\to\infty} \left[\|x^0 - \tilde{x}^{k_j}\|^2 - 2\theta{\lambda_{k_j}}^{r-1}\|v\|\right] \\
&\geq \liminf_{j\to\infty} \|x^0 - \tilde{x}^{k_j}\|^2 + \liminf_{j\to\infty} \left[-2\theta{\lambda_{k_j}}^{r-1}\|v\|\right] \\
&= \liminf_{j\to\infty} \|x^0 - \tilde{x}^{k_j}\|^2 \\
&\geq \|x^0 - x^*\|^2,
\end{aligned}$$

onde usamos que a norma é fracamente semicontínua inferiormente (veja [Bre76, Corollary III.8]). Portanto o ponto de acumulação fraco da seqüência é único e é o minimizador de $\|x^0 - \cdot\|^2$ no conjunto S. Agora suponhamos que B é uniformemente convexo. Por (2.44) para $y = x^*$ temos que

$$\limsup_{k\to\infty} \left[2\theta{\lambda_k}^{r-1}\|v\| + \|x^0 - x^*\|^2\right] \;\geq\; \limsup_{k\to\infty} \|x^0 - \tilde{x}^k\|^2.$$

Portanto, concluimos que

$$\|x^0 - x^*\|^2 \geq \limsup_{k\to\infty} \|x^0 - \tilde{x}^k\|^2. \tag{2.46}$$

Como $\{x^0 - \tilde{x}^k\}$ converge fracamente para $x^0 - x^*$, aplicamos Proposição 1.1.2 para concluir que $\{\tilde{x}^k\}$ converge fortemente para x^*. $\square$

Capítulo 3

Problema da Desigualdade Variacional com Restrições Lineares

Neste capítulo, apresentaremos o Algoritmo (3.1.1). Mostraremos sua boa definição e que o ponto limite da seqüência gerada pelo método é solução do $DV(T, C)$.

Sejam $T: I\!R^n \to \mathcal{P}(I\!R^n)$ um operador monótono maximal e C um conjunto poliedral em $I\!R^n$ definido por:

$$C := \{x \in I\!R^n \mid Ax \leq b\} \tag{3.1}$$

onde A é matriz $m \times n, b \in I\!R^m$ e $m \geq n$.

No decorrer deste capítulo serão consideradas as seguintes hipóteses:

(H_1) $irC \cap irD(T) \neq \emptyset$;

(H_2) Posto(A)=n (e portanto, A injetiva);

(H_3) $S \neq \emptyset$.

3.1 Algoritmo 3.1.1

Agora, podemos formalizar nosso algoritmo. Para isto, precisaremos de algumas notações:

(N_1) $C^k = \{x \in I\!R^n |\ Ax \leq b + \delta^k\}$ onde $\delta^k \in I\!R^m_{++}$;

(N_2) Sejam a_i as linhas da matriz A. Para cada $x^k \in C^k$ defina:

$$
\begin{aligned}
y_i^k(x^k) &= b_i + \delta_i^k - \langle a_i, x^k \rangle, \\
y^k(x^k) &= (y_1^k(x^k), y_2^k(x^k), ..., y_m^k(x^k))^T, \\
D(x^k, z^k) &= d_\varphi(y^k(x^k), y^k(z^k)).
\end{aligned}
$$

Observação 3.1.1 *Valem as seguintes afirmações:*

1. *Para cada $x^k \in intC^k, x^{k-1} \in intC^{k-1}$, temos*

$$
\begin{aligned}
\nabla_1 D(x^k, x^{k-1}) &= \textstyle\sum_{i=1}^n (y_i^{k-1}(x^{k-1}))^2 \varphi'\left(\frac{y_i^k(x^k)}{y_i^{k-1}(x^{k-1})}\right)\left(\frac{y_i^k(x^k)}{y_i^{k-1}(x^{k-1})}\right) \\
&= -\textstyle\sum_{i=1}^n a_i y_i^{k-1}(x^{k-1})\varphi'\left(\frac{y_i^k(x^k)}{y_i^{k-1}(x^{k-1})}\right) \\
&= -A^T \nabla_1 d_\varphi\left(y^k(x^k), y^{k-1}(x^{k-1})\right);
\end{aligned}
$$

2. *Se $C \neq \emptyset$ então $C \subset intC^k$.*

No método proposto em [YKMF01] para o problema de otimização convexa (P_0) com C definido como em (3.1), o algoritmo exato na iteração k é dado por: Escolha $\lambda_k > 0, \delta^k > 0$ e $(x^{k-1}, y^{k-1}) \in intC^{k-1} \times I\!R^m_{++}$. Achar $(x, y) \in intC^k \times I\!R^m_{++}$ e $u \in I\!R^n$ tais que

$$
\begin{cases}
u \in \partial f(x), & \\
\lambda_k u + \nabla_1 D(x, x^{k-1}) &= 0, \\
y - (b - Ax) &= \delta^k.
\end{cases}
$$

Como vimos acima, a iteração *exata* consiste em um passo "proximal", e um passo de ajuste da "viabilidade" (terceira equação acima). A versão *inexata* deste algoritmo é dada por:

$$\begin{cases} \widetilde{u} \in \partial_{\varepsilon_k} f(\widetilde{x}), & & \\ \lambda_k \widetilde{u} + \nabla_1 D(\widetilde{x}, x^{k-1}) & = & e^k, \\ \widetilde{y} - (b - A\widetilde{x}) & = & \delta^k. \end{cases} \tag{3.2}$$

O nosso algoritmo, na versão *exata*, consiste em substituir o ∂f por um operador T monótono maximal arbitrário, isto é:

Escolha $\lambda_k > 0, \delta^k > 0$ e $(x^{k-1}, y^{k-1}) \in intC^{k-1} \times I\!R^m_{++}$. Achar $(x, y) \in intC^k \times I\!R^m_{++}$ e $u \in I\!R^n$ tais que

$$\begin{cases} u \in T(x), & & \\ \lambda_k u + \nabla_1 D(x, x^{k-1}) & = & 0, \\ y - (b - Ax) & = & \delta^k. \end{cases} \tag{3.3}$$

O resultado a seguir garante a boa definição dos iterados gerados pelo nosso algoritmo.

Proposição 3.1.1 *Suponha verdadeiros* (H_1) *e* (H_2). *Dados* $\lambda_k > 0, \delta^k > 0$ *e* $(x^{k-1}, y^{k-1}) \in intC^k \times I\!R^m_{++}$, *existe um único par* $(x^k, y^k) \in intC^k \times I\!R^m_{++}$ *satisfazendo* (3.3).

Prova. Defina o operador $\widetilde{T}^k(x) := T^k(x) + {\lambda_k}^{-1} \nabla h(x)$, onde

$$T^k(x) := T(x) + N_{C^k}(x) \text{ e } h(x) := D(x, x^{k-1}).$$

Provaremos que estamos nas hipóteses do Teorema 1.3.1 para $\widetilde{T} = T + N_{C^k}$ e $f(\cdot) = d_\varphi(\cdot, y^{k-1})$. O operador $T + N_{C^k}$ é monótono maximal por (H_1) e o fato de que $C \subseteq C^k$ (estamos usando a Proposição 1.3.1(ii)). A função $d_\varphi(\cdot, y^{k-1})$ é por definição convexa, própria, diferenciável sobre seu domínio ($I\!R^n_{++}$, o qual é aberto) e

$$(d_\varphi)_\infty(d) = +\infty, \ \forall \ d \neq 0.$$

Por (H_2), A possui posto máximo. Além disso, $(b + \delta^k - A(I\!R^n)) \cap dom(d_\varphi) \neq \emptyset$. De fato, sendo $C \neq \emptyset$, para $x \in C$ e $\delta^k \in I\!R^m_{++}$ temos que

$$b + \delta^k - Ax = y > 0, \tag{3.4}$$

e portanto $y \in dom(d_\varphi)$. A última hipótese que falta ser verificada é que $D(T^k) \cap dom(h) \neq \emptyset$ onde $dom(h) = \{x \in I\!R^n | b + \delta^k - Ax > 0\}$. De fato, por (H_1) e pela definição de C^k temos que

$$\emptyset \neq C \cap D(T) \subset C^k \cap D(T) = D(T^k.$$

Então dado $x \in C \cap D(T) \Rightarrow x \in D(T^k)$ e $x \in dom(h)$ por (3.4). Logo as hipóteses do Teorema 1.3.1 são satisfeitas e portanto existe uma solução x da equação

$$0 \in \tilde{T}^k(x) = T(x) + N_{C^k}(x) + \lambda_k{}^{-1}\nabla D(x, x^{k-1}). \tag{3.5}$$

Esta solução é única, pois $d_\varphi(\cdot, y^{k-1})$ é estritamente convexa sobre seu domínio.

Deste modo, existem $u^k \in T(x^k)$, $v^k \in N_{C^k}(x^k)$ e $z^k = \nabla_1 D(x^k, x^{k-1}) = d_\varphi(b + \delta^k - A(x^k), y^{k-1})$, tais que

$$0 = u^k + v^k + z^k. \tag{3.6}$$

Fazendo $b + \delta^k - Ax^k = y^k$ temos que y^k é único. E além disso $y^k \in I\!R^m_{++}$, o que implica $x^k \in intC^k$, daí $v^k = 0$. Deste modo por (3.6) existe um único par $(x^k, y^k) \in intC^k \times I\!R^m_{++}$ satisfazendo

$$\begin{cases} u^k \in T(x^k), & \\ u^k + \lambda^{-1}\nabla_1 D(x^k, x^{k-1}) & = & 0, \\ y^k - (b - Ax^k) & = & \delta^k. \end{cases}$$

□

Como já foi visto, a versão *exata* do nosso método é dada por:

Escolha $\lambda_k > 0, \delta^k > 0$ e $(x^{k-1}, y^{k-1}) \in intC^{k-1} \times I\!R^m_{++}$. Achar $(x, y) \in intC^k \times I\!R^m_{++}$ e $u \in I\!R^n$ tais que

$$\begin{cases} u \in T(x), & \\ \lambda_k u + \nabla_1 D(x, x^{k-1}) & = & 0, \\ y - (b - Ax) & = & \delta^k. \end{cases} \tag{3.7}$$

Para lidar com aproximações, relaxaremos a inclusão e a equação do sistema acima para

$$\begin{cases} \tilde{u} \in T^{\varepsilon_k}(\tilde{x}), & \\ \lambda_k \tilde{u} + \nabla_1 D(\tilde{x}, x^{k-1}) & = & e^k, \\ \tilde{y} - (b - A\tilde{x}) & = & \delta^k. \end{cases} \tag{3.8}$$

Na solução exata, temos $\varepsilon_k = 0$ e $e^k = 0$. Numa solução aproximada teremos ε_k e e^k "pequenos".

Observação 3.1.2 *Como foi mencionado na introdução, os autores de* [YKMF01] *propuseram um método de aproximação exterior para* (P_0). *O método acima é uma adaptação do algoritmo deles para o problema da desigualdade variacional.*

O nosso objetivo é substituir este tipo de critério de erro por um critério de erro relativo como aquele utilizado em [BS01b]. Em [BS01b], uma hipótese básica é que $intC \cap D(T) \neq \emptyset$. Nós não faremos esta hipótese, mas para isto precisamos que os conjuntos C^k satisfaçam a hipótese de que $intC^k \cap D(T) \neq \emptyset$.

Definição 3.1.1 . *Sejam* $\sigma \in [0,1)$ *e* $\gamma > 0$. *Dizemos que* $(\tilde{x}, \tilde{u}, \varepsilon_k)$ *verificando* (3.8) *é uma* solução aproximada *do sistema* (3.7) *com tolerância* σ *e* γ *se para* (x, y) *tal que*

$$\begin{cases} \lambda_k \tilde{u} + \nabla_1 D(x, x^{k-1}) & = & 0, \\ y - (b - Ax) & = & \delta^k. \end{cases} \tag{3.9}$$

é verdadeiro que

$$\lambda_k(\varepsilon_k + \langle \tilde{u}, \tilde{x} - x \rangle) \leq \sigma \frac{T}{2} \|y - y^{k-1}\|^2. \tag{3.10}$$

$$\|\tilde{y} - y\| \leq \gamma \|y - y^{k-1}\|. \tag{3.11}$$

Observação 3.1.3 .

(i) *Como o domínio de* $d_\varphi(\cdot, y^{k-1})$ *é* $\mathbb{R}^m_{++}$, *para* $\tilde{x}, \tilde{u}, \varepsilon_k$ *e* x *como na Definição 3.1.1, é verdadeiro que*

$$\tilde{x}, x \in intC^k.$$

(ii) *Se* (x, u) *é uma solução exata de* (3.7), *então* $(x, u, 0)$ *é uma solução aproximada de sistema* (3.7) *com tolerância* σ, γ *para qualquer* $\sigma \in [0, 1)$ *e* $\gamma > 0$, *e neste caso* $e^k = 0$. *Reciprocamente, se* $(\tilde{x}, \tilde{u}, \varepsilon_k)$ *satisfaz* (3.10) *e* (3.11) *com tolerância* $\sigma = 0$ *e* $\gamma > 0$ *arbitrário, então devemos ter* $\varepsilon_k = 0$ *e portanto* (x, u) *é a solução exata de* (3.7). *De fato, como* $\gamma > 0$ *é arbitrário, devemos ter* $y = \tilde{y}$. *Pela injetividade de* A, *resulta* $x = \tilde{x}$, *e como* $\sigma = 0$, *resulta* $\varepsilon_k = 0$

(iii) *Sendo verdadeiros* (H_1) *e* (H_2), *pela Proposição 3.1.1 o sistema* (3.8) *com* $e^k = 0$ *e* $\varepsilon_k = 0$ *tem solução. Portanto, existe solução aproximada.*

Algoritmo 3.1.1

Iniciação: *Escolha* $\overline{\lambda} > 0, \sigma \in [0, 1), \gamma > 0, x^0 \in I\!R^n$ *e* $y^0 \in I\!R^m_{++}$ *tal que* $\delta^0 := y^0 - (b - Ax^0) \in I\!R^m_{++}$.

Iteração: *Para k=1,2,...,*

Passo 1. *Escolha* λ_k *com* $\overline{\lambda} \leq \lambda_k$ *e* $0 < \delta^k < \delta^{k-1}$. *Ache a solução aproximada* $(\tilde{x}^k, \tilde{u}^k, \varepsilon_k)$ *do sistema* (3.7) *com tolerância* σ, γ.

Passo 2. *Obtenha* (x^k, y^k) *tal que*

$$\begin{cases} \lambda_k \tilde{u}^k + \nabla_1 D(x^k, x^{k-1}) & = & 0, \\ y^k - (b - Ax^k) & = & \delta^k. \end{cases} \tag{3.12}$$

Passo 3. *Faça* $k := k + 1$ *e retorne para Passo* 1.

3.1.1 Boa definição

Lembramos que pela Observação 3.1.3(iii), sendo verdadeiros (H_1) e (H_2) o Algoritmo 3.1.1 com critério de aproximação (3.10)-(3.11) está bem definido.

3.1.2 Análise de convergência

Nesta seção, faremos a análise de convergência do Algoritmo 3.1.1. De agora em diante, $\{x^k\}, \{\widetilde{x}^k\}, \{\widetilde{y}^k\}, \{y^k\}, \{\widetilde{u}^k\}, \{\varepsilon_k\}, \{\lambda_k\}$ e $\{\delta_k\}$ são seqüências geradas pelo Algoritmo 3.1.1 com critério de aproximação (3.10)-(3.11). Provaremos que a seqüência $\{x^k\}$ converge a uma solução do $DV(T,C)$ sob hipóteses razoáveis.

A proposição a seguir é de grande importância para a análise de convergência, a qual é conseqüência dos Lemas 1.2.1 e 1.1.3.

Proposição 3.1.2 . *Suponha verdadeiro* (H_3) *e sejam* $\overline{x} \in S$ *e* $\overline{u} \in T(\overline{x})$. *Defina* $\overline{y} = b - A\overline{x}$. *Então, para* $k = 1, 2, ...,$

$$\|y^k - \overline{y}\|^2 \leq \|y^{k-1} - \overline{y}\|^2 - \frac{\tau}{\theta}(1-\sigma)\|y^k - y^{k-1}\|^2 + \frac{1}{2}\|\delta^k\|\|y^k - y^{k-1}\| + \alpha\frac{\tau}{\theta}\lambda_k\|\overline{u}\|\|\delta^k\|, \tag{3.13}$$

onde θ, τ *são como em* (1.2) *e* α *como no Lema 1.1.3*

Prova. Tome $k > 0$. Seja $\widetilde{u}^k \in T^{\varepsilon_k}(\widetilde{x}^k)$, $\forall\ (x,u) \in G(T)$ temos que

$$\lambda_k\langle x - \widetilde{x}^k, u - \widetilde{u}^k\rangle \geq -\lambda_k\varepsilon_k.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \lambda_k\langle x - \widetilde{x}^k, u\rangle &\geq \lambda_k\langle x - \widetilde{x}^k, \widetilde{u}^k\rangle - \lambda_k\varepsilon_k \\ &\geq \lambda_k\langle x - x^k, \widetilde{u}^k\rangle + \lambda_k\langle x^k - \widetilde{x}^k, \widetilde{u}^k\rangle - \lambda_k\varepsilon_k. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Usando (3.9) e (3.10) na desigualdade acima, obtemos

$$\lambda_k\langle x - \widetilde{x}^k, u\rangle \geq \langle x - x^k, -\nabla_1 D(x^k, x^{k-1})\rangle - \sigma\frac{\tau}{2}\|y^k - y^{k-1}\|^2. \tag{3.15}$$

Pela Observação 3.1.1 e (N_2), temos

$$\begin{aligned} \langle x - x^k, -\nabla_1 D(x^k, x^{k-1})\rangle &= \langle x - x^k, A^T\nabla_1 d_\varphi(y^k, y^{k-1})\rangle \\ &= \langle A(x - x^k), \nabla_1 d_\varphi(y^k, y^{k-1})\rangle \\ &= \langle y^k - y, \nabla_1 d_\varphi(y^k, y^{k-1})\rangle - \langle\delta^k, \nabla_1 d_\varphi(y^k, y^{k-1})\rangle. \end{aligned}$$

Combinando a igualdade acima e (3.15), obtemos

$$\lambda_k\langle x-\tilde{x}^k,u\rangle \geq \langle y^k-y,\nabla_1 d_\varphi(y^k,y^{k-1})\rangle - \langle \delta^k,\nabla_1 d_\varphi(y^k,y^{k-1})\rangle - \sigma\frac{\tau}{2}\|y^k-y^{k-1}\|^2.$$

Pelo Lema 1.2.1 segue-se que

$$\lambda_k\langle x-\tilde{x}^k,u\rangle \geq \frac{\theta}{2}(\|y^k-y\|^2-\|y^{k-1}-y\|^2)+\frac{\tau}{2}(1-\sigma)\|y^k-y^{k-1}\|^2-\theta\|\delta^k\|\|y^k-y^{k-1}\|. \tag{3.16}$$

A desigualdade acima é válida em particular para $(x,u)=(\overline{x},\overline{u})$ com $\overline{x}\in S$ e $\overline{y}$ tal que $\overline{y}=b-A\overline{x}$. Portanto

$$\lambda_k\langle \overline{x}-\tilde{x}^k,\overline{u}\rangle \geq \frac{\theta}{2}(\|y^k-\overline{y}\|^2-\|y^{k-1}-\overline{y}\|^2)+\frac{\tau}{2}(1-\sigma)\|y^k-y^{k-1}\|^2-\theta\|\delta^k\|\|y^k-y^{k-1}\|. \tag{3.17}$$

Por outro lado, para $\overline{x}\in S$ existe $\overline{u}\in T(\overline{x})$ tal que

$$\langle \overline{x}-x,\overline{u}\rangle \leq 0 \ \forall\ x\in C.$$

Seja p^k a projeção de $\tilde{x}^k$ sobre C. Como $p^k\in C$, então

$$\langle \overline{x}-p^k,\overline{u}\rangle \leq 0.$$

Assim,

$$\langle \overline{x}-\tilde{x}^k+\tilde{x}^k-pk,\overline{u}\rangle \leq 0,$$

e logo

$$\langle \overline{x}-\tilde{x}^k,\overline{u}\rangle \leq \langle p^k-\tilde{x}^k,\overline{u}\rangle.$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e multiplicando por $\lambda_k>0$, obtemos

$$\lambda_k\langle \overline{x}-\tilde{x}^k,\overline{u}\rangle \leq \lambda_k\|\overline{u}\|\|\tilde{x}^k-p^k\|.$$

Pelo Lema 1.1.3 temos

$$\lambda_k\langle \overline{x}-\tilde{x}^k,\overline{u}\rangle \leq \lambda_k\alpha\|\overline{u}\|\|\delta^k\|, \tag{3.18}$$

para algum $\alpha > 0$. Combinando (3.17) e (3.18), obtemos que

$$\|y^k - \overline{y}\|^2 \leq \|y^{k-1} - \overline{y}\|^2 - \frac{\tau}{\theta}(1-\sigma)\|y^k - y^{k-1}\|^2 + \frac{1}{2}\|\delta^k\|\|y^k - y^{k-1}\| + \frac{\tau}{\theta}\alpha\lambda_k\|\overline{u}\|\|\delta^k\|. \tag{3.19}$$

□

Para garantir a limitação da seqüência, precisaremos de hipóteses adicionais para as seqüências $\{\delta^k\}$ e $\{y^k - y^{k-1}\}$ (essas hipóteses adicionais são similares às exigidas em [YKMF01]).

Corolário 3.1.1 *Suponha verdadeiro* (H_3) *e ainda:*

(H_4) $\sum_{k=1}^{\infty} \|\delta^k\| < \infty$;

(H_5) $\sum_{k=1}^{\infty} \|\delta^k\|\|y^k - y^{k-1}\| < \infty$.

Então para $\overline{x}, \overline{u}, \overline{y}$ *como na Proposição 3.1.2, vale que*

(i) $\{\|y^k - \overline{y}\|\}$ *converge e como conseqüência* $\{y^k\}$ *é limitada;*

(ii) $\lim_k \|y^k - y^{k-1}\| = 0$;

(iii) $\{\|A(x^k - \overline{x})\|\}$ *converge,* $\{\|x^k - \overline{x}\|\}$ *converge e como conseqüência* $\{x^k\}$ *é limitada;*

(iv) $\lim_k \|\tilde{x}^k - x^k\| = 0$;

(v) $\{\tilde{x}^k\}$ *é limitada.*

Prova. (i) De (3.19) temos que

$$\|y^k - \overline{y}\|^2 \leq \|y^{k-1} - \overline{y}\|^2 + \frac{1}{2}\|\delta^k\|\|y^k - y^{k-1}\| + \alpha\frac{\tau}{\theta}\lambda_k\|\overline{u}\|\|\delta^k\| \ \forall\ k. \tag{3.20}$$

Defina

$$\sigma_{k+1} := \|y^k - \overline{y}\|^2 \text{ e } \beta_k := \frac{1}{2}\|\delta^k\|\|y^k - y^{k-1}\| + \alpha\frac{\tau}{\theta}\lambda_k\|\overline{u}\|\|\delta^k\|;$$

Como (3.20) satisfaz as condições exigidas pelo Lema 1.1.1, $\{\|y^k - \overline{y}\|\}$ converge e portanto $\{y^k\}$ é limitada.

(ii) Segue-se de (i) e da Proposição 3.1.2 que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|y^k - y^{k-1}\|^2 < \infty.$$

E portanto $\lim_{k\to\infty} \|y^k - y^{k-1}\| = 0$.

(iii) Como $y^k - \overline{y} = A(\overline{x} - x^k) + \delta^k$, obtemos que

$$\|y^k - \overline{y}\| - \|\delta^k\| \leq \|A(\overline{x} - x^k)\| \leq \|y^k - \overline{y}\| + \|\delta^k\|$$

Sendo $\{\|y^k - \overline{y}\|\}$ convergente e $\{\|\delta^k\|\}$ convergente a zero então $\{\|A(\overline{x} - x^k)\|\}$ é também convergente. Por (H_2) a função $u \longrightarrow \|u\|_A := \|Au\|$ é uma norma em $I\!R^n$, segue-se que $\{\|x^k - \overline{x}\|\}$ converge e portanto $\{x^k\}$ é limitada.

(iv) De (ii) e de (3.11), segue-se que $\lim_{k\to\infty} \|\tilde{y}^k - y^k\| = 0$. Portanto $\lim_{k\to\infty} \|A(\tilde{x}^k - x^k)\| = 0$, e como consequência $\lim_{k\to\infty} \|\tilde{x}^k - x^k\| = 0$.

(v) Segue-se de (iii) e (iv). □

Mostraremos abaixo que a seqüência $\{x^k\}$ converge a uma solução do $DV(T, C)$.

Teorema 3.1.1 . *Suponha verdadeiros* (H_1), (H_2), (H_3),(H_4) *e* (H_5). *Então a seqüência* $\{x^k\}$ *converge para um ponto de* S.

Prova. Pelo Corólario 3.1.1 $W(\tilde{x}^k) = W(x^k) \neq \emptyset$. Assim, de (3.16) temos que para todo $(x, u) \in G(T)$ vale

$$\langle x - x^k, u\rangle \geq (\lambda_k)^{-1}\left[\frac{\theta}{2}(\|y^k - y\|^2 - \|y^{k-1} - y\|^2) + (1-\sigma)\frac{\tau}{2}\|y^k - y^{k-1}\|^2 - \alpha\theta\|\delta^k\|\|y^k - y \right. \tag{3.21}$$

Do Corolário 3.1.1 (iii) e (ii), temos que $\{x^k\}$ é limitada e $\lim_k \|y^k - y^{k-1}\| = 0$. Usando a identidade

$$\|y^k - y\|^2 - \|y^{k-1} - y\|^2 = \|y^k - y^{k-1}\|^2 + 2\langle y^k - y^{k-1}, y^{k-1} - y\rangle,$$

conclui-se que

$$\lim_{k\to\infty} \|y^k - y\|^2 - \|y^{k-1} - y\|^2 = 0.$$

Seja $\{x^{k_j}\} \subseteq \{x^k\}$ uma subseqüência convergido para x^*. Como $\lambda_k \geq \overline{\lambda} > 0$, então , passando ao limite quando $j \to \infty$ para $k = k_j$ em (3.21), obtemos que

$$\langle x - x^*, u\rangle \geq 0 \;\; \forall\, (x, u) \in G(T). \tag{3.22}$$

Por definição $y^{k_j} = b + \delta^{k_j} - Ax^{k_j}$ com $y^{k_j} > 0$. Passando ao limite quando $j \to \infty$ temos que $y^* = b - Ax^*$ com $y^* \geq 0$. Portanto $Ax^* \leq b$, segue-se que $x^* \in C$. Pela definição de N_C, temos

$$\langle x - x^*, w\rangle \geq 0 \;\; \forall\, (x, w) \in G(N_C). \tag{3.23}$$

Combinando (3.22) e (3.23)

$$\langle x - x^*, u + w\rangle \geq 0 \;\; \forall\, (x, u + w) \in G(T + N_C).$$

Por (H_1) e a Proposição 1.3.1 tem-se que $T + N_C$ é monótono maximal. Portanto $0 \in (T + N_C)(x^*)$, isto é, $x^* \in S$. Então, pelo Corolário 3.1.1(iii) a seqüência $\{\|x^* - x^k\|\}$ converge e tem uma subseqüência que converge a zero, segue-se que toda a seqüência $\{x^k\}$ converge a x^*. □

Conclusões

Nesse trabalho, desenvolvemos métodos de aproximação exterior para o problema da desigualdade variacional semi-infinita e com restrições lineares. Para o primeiro destes métodos, mostramos que os pontos de acumulação fracos da seqüência são solução do $DV(T, C)$ sob a hipótese de limitação de C. Para o segundo, retiramos a hipótese limitação de C, e supomos duas hipóteses adicionais alternativas: Sob a condição de Slater, provamos que os pontos de acumulação fracos da seqüêcia são soluções do $DV(T, C)$; sob a hipótese de que os iterados não se "afastem muito" do conjunto C, e neste caso provamos convergência fraca a uma solução do $DV(T, C)$. Além disso, se B é uniformemente convexo a convergência forte. Para o problema da desigualdade variacional com restrições lineares mostramos que o ponto limite da seqüência gerada pelo método é solução do $DV(T, C)$.

A seguir mencionamos alguns ponto que, naturamente, podem ser objeto de estudo futuro:

1. Para o problema da desigualdade variacional semi-infinita:
   (a) formulação primal-dual;
   (b) taxa de convergência;
2. Para o problema da desigualdade variacional com restrições lineares:
   (a) formulação primal-dual;

(b) taxa de convergência;

(c) extensão dos resultados a outros tipo regularização;

(d) extensão do método para o conjunto de restrições definido por

$$C = \{x \in I\!R^n |\ g_i(x) \leq 0\}\ \forall\ i = 1, 2, ..., n,$$

onde $g_i\colon I\!R^n \longrightarrow I\!R$ são convexas para $i = 1, 2, ..., n$.

Referências Bibliográficas

[AH95] A. Auslender and M. Haddou. An interior proximal method for convex linearly constrained problems and its extension to variational inequalities. *Mathematical Programming*, 71:77–100, 1995.

[Asp67] E. Asplund. Positivity of duality mappings. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 73:200–203, 1967.

[ATBT99a] A. Auslender, M. Teboulle, and S. Ben-Tiba. Interior proximal and multiplier method based on second order homogeneous kernels. *Math. of Operations Research*, 24:645–688, 1999.

[ATBT99b] A. Auslender, M. Teboulle, and S. Ben-Tiba. A logarithmic-quadratic proximal method for variational inequalities. *Computational Optimization and Applications*, 12:31–40, 1999.

[BF76] J. W. Blankenship and J. E. Falk. Infinitely constrained optimization problems. *J. Optim. Theory Appl.*, 19:261–281, 1976.

[BI98] R. S Burachik and A. N. Iusem. Generalized proximal point methods for the variational inequality problem. *SIAM Journal on Control*, 98:197–216, 1998.

[BIS97] R.S Burachik, A. N. Iusem, and B. F. Svaiter. Enlargements of maximal monotone operators with application to variational inequalities. *Set valued Anal*, 5:159–180, 1997.

[BM73] J. Bracken and J. F. McGill. Mathematical programs with optimization problems in the contraints. *Operations Research*, 21(1), 1973.

[Bre71] H. Brezis. Opérateurs monotones maximaux et semigroups de contractions dans les espaces de hilbert. *Université de Paris-CNRS*, 1971.

[Bre76] H. Brezis. A image d'une som d'opérateurs monotones et applications. *Israel Journal of Mathematics*, 7(3):165–186, 1976.

[Bre83] H. Brezis. *Analyse functionnele: Théorie e applications.* Masson, Paris, 1983.

[Bro76] F. E. Browder. Nonlinear operators and nonlinear equation of evolution in banach spaces. proceedings of symposia in pure mathematic. *Journal of the Americam Mathematical Society*, 18, 1976.

[BS99] R.S Burachik and B. F. Svaiter. ε-enlargements of maximal monotone operators in banach spaces. *Set valued Anal*, 7(2):117–132, 1999.

[BS01a] R. S. Burachik and S. M Scheimberg. A proximal point algorithm for the variational inequality problem in banach spaces. *SIAM Journal Control Optim.*, 39(5):1633–1649, 2001.

[BS01b] R. S. Burachik and B. F. Svaiter. A relative error tolerance for a family of generalized proximal point methods. *Mathematics of Operations Research*, 26(4):816–831, 2001.

[CG59] E. W. Cheney and A. A. Goldstein. Newton's method for convex programming and tchebycheff approximation. *Numer. Math.*, 1:253–268, 1959.

[CIZ99] Y. Censor, A. N. Iusem, and S. A. Zenios. An interior point method with bregman functions for the variational inequality problem with paramonotone operators. *J. Optim. Theory Appl.*, 73(3):451–464, 1999.

[Com00] P. L. Combettes. Strong convergence of block-iterative outer approximation methods for convex optimization. *SIAM Journal Control and Optim.*, 38(2):538–565, 2000.

[CT93] G. Chen and M. Teboulle. Convergence analysis of a proximal-like minimization algorithm using bregman functions. *SIAM Journal on Otimization*, 3:538–543, 1993.

[CZ92] Y. Censor and S. A. Zenios. Proximal minimization algorithm with d-functions. *J. Optim. Theory Appl.*, 73(3):451–464, 1992.

[Dan67] J. M. Danskin. *The teory of Max-Min.* Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[DM95] M. A. H. Dempster and R. R. Merkovsky. A pratical geometrically convergent cutting-plane algorthm. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32:631–644, 1995.

[Eck93] J. Eckstein. Nonlinear proximal point algorithms using bregman functions, with applications to convex programming. *Mathematics of Operations Research*, 18:202–226, 1993.

[EZ71] B. C. Eaves and W. I. Zangwill. Generalized cutting-plane algorthms. *SIAM J. Control.*, 9:529–542, 1971.

[Hof52] A. J. Hoffman. On approximate solutions of system of linear inequalities. *Journal of the National Bureau of Standards*, 49:263–265, 1952.

[IST94] A. N. Iusem, B. Svaiter, and M. Teboulle. Entropy-like proximal methods in convex programming. *Math. of Operations Research*, 19:790–814, 1994.

[Ius95] Alfredo Iusem. *Métodos de ponto proximal em otimização.* IMPA, Rio de Janeiro, 1995.

[Kap68] A. A. Kaplan. Determination of teh extremum of linear function on a convex set. *Soviet Math. Dokl.*, 64:269–271, 1968.

[Kel60] J. E. Kelley. The plane-cutting method for solving convex programs. *J. SIAM*, 8:703–712, 1960.

[KS80] D. Kinderlehrer and G. Stampacchia. *An introduction to variational inequalities and their aplication.* Academic press, New York, 1980.

[Lem95] B. Lemaire. On the convergence of some iterative methods for convex minimization. In R. Durier and C. Michelot, editors, *Recent Developments in Optimization*, pages 252–268, Berlim, 1995. Springer-Verlag.

[Mar70] B. Martinet. Regularisation d'inequations variationelles par approximations sucessives. *Revue Française d'Informatique et de Recherche Operationelle*, 4:154–159, 1970.

[Pol87] B. T. Polyak. *Introduction to optimization.* Optimization Software Inc., New York, 1987.

[PS78] D. Pascali and S. Sburlan. *Nonlinear mappings of monotone type.* Editura Academiei, Bucarest, 1978.

[RB98] R. T. Rockafellar and Wets R. J. B. *Variational Analisis.* Springer Verlag, New York, 1998.

[Roc70a] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis.* Princeton University Press, Princeton, 1970.

[Roc70b] R. T. Rockafellar. On the maximality of sums of nonlinear monotone operators. *Transactions of the Amer. Math. Soiety*, 149:75–88, 1970.

[Roc76] R. T. Rockafellar. Monotone operators and the proximal point algorithm. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 14:877–898, 1976.

[Teb97] M. Teboulle. Convergence of proximal-like algorithms. *SIAM Journal om Optimization*, 7:1069–1083, 1997.

[Top70] D. M. Topkis. Cutting-plane methods without nested constraint sets. *Oper. Res.*, 18:404–413, 1970.

[Top82] D. M. Topkis. A cutting-plane algorthm with linear and geometric rates of convergence. *J. Optim. Theory Appl.*, 36:1–22, 1982.

[Vai73] M. M. Vainberg. *Variational method and method of monotone operators in the theory of nonlinear equations.* Halsted Press, New York, 1973.

[Vei67] A. F. Veinott. The supporting hiperplane method for unimodal programming. *Oper. Res.*, 15:147–152, 1967.

[YKMF01] N. Yamashita, C. Kanzow, T. Morimoto, and M. Fukushima. An infeasible interior proximal method for convex programing problems with linear constraints. *J. Nonlinear Convex Analysis*, 2(2):139–156, 2001.

[Zal83] C. Zalinescu. On uniformly convex fonctions. *J. Math. Anal. Appl.*, 95:344–374, 1983.

[Zan69] W. I. Zangwill. *Nonlinear Programming: A unified approach.* Prentice-Hall, New Jersey, 1969.