UMA NOVA CLASSE DE ALGORITMOS PROXIMAIS PARA O PROBLEMA DE COMPLEMENTARIEDADE NÃO-LINEAR

Geci José Pereira da Silva

TESE SUBMETIDA AO CORPO DOCENTE DA COORDENAÇÃO DOS PROGRAMAS DE PÓS-GRADUAÇÃO DE ENGENHARIA DA UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO DE JANEIRO COMO PARTE DOS REQUISITOS NECESSÁRIOS PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE DOUTOR EM CIÊNCIAS EM ENGENHARIA DE SISTEMAS E COMPUTAÇÃO.

Aprovada por:

Prof. Paulo Roberto Oliveira, Dr. Ing.

Prof. Maria Helena Cautiero Horta Jardim, D. Sc.

Prof. Orizon Pereira Ferreira, D. Sc.

Prof. Ronaldo Alves Garcia, PhD.

Prof. Susana Scheimberg de Makler, D. Sc.

RIO DE JANEIRO, RJ - BRASIL

JUNHO DE 2002

SILVA, GECI JOSÉ PEREIRA DA

Uma Nova Classe de Algoritmos Proximais Para o Problema de Complementariedade Não-Linear [Rio de Janeiro] 2002

IX, 36 p. 29,7 cm (COPPE/UFRJ, D.Sc., Engenharia de Sistemas e Computacão, 2002)

Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro, COPPE

1 - Método Ponto Proximal

2 - Regularização

3 - P e P_0-funções

I. COPPE/UFRJ II. Título (série)

"Há vários motivos para não amar uma pessoa,
e somente um para amar e este prevalece."
(Carlos Drumonnd de Andrade)

- Aos meus pais, as minhas avós, a minha esposa Rosely e ao meu filho Bruno.
- À memória de meu amigo Prof. Dr. Raimundo Rodrigues Ferreira.

Agradecimentos

- Ao Paulo Roberto Oliveira que além de sua orientação, incentivo e respeito me acolheu num momento dificil do meu programa de doutorado, serei sempre grato.

- Em especial a Rosely Maria Barbosa Goes pela sua paciência em ouvir-me e pelas sugestões dadas neste trabalho, que foi de fundamental importância.

- Aos professores e funcionários do Programa de Engenharia de Sistemas e Computação da COPPE/UFRJ que também contribuíram diretamente ou indiretamente para que este trabalho se realizasse. Em especial, Maculan, Regina, Susana e Maria Helena

- A banca examinadora: Ronaldo, Maria Helena, Orizon e Susana pelas sugestões dadas.

- Aos colegas do Departamento de Matemática e Estatística da UFG, que assumiram minha carga horária durante o tempo que estive realizando o doutorado.

- A CAPES, pelo apoio financeiro.

- Não posso deixar de mencionar que, teria sido impossível chegar ao fim da luta sem o constante suporte emocional e afetivo de minha companheira Rosely para vencer os inúmeros momentos de incertezas. E o carinho, a alegria e tudo de bom que meu filho Bruno me proporciona.

- A minha família que sempre me apoiou dando seu afeto e carinho.

- Aos familiares do minha esposa, em especial ao Sr. Edivaldo e Dona Elia pela confiança e carinho.

- A todos os meus parentes, que sempre me apoiaram.

- A todos os amigos que direta ou indiretamente me ajudaram em mais esta conquista, em especial a Marina Tuyako, irmã do coração.

  - Aos amigos Sandra e José Arnaldo pela hospitalidade e pelo carinho de sempre.
  - A família Magalhães pelo apoio de sempre.
  - Aos amigos da UFRJ, em especial Vera, Gilvan, Rodrigo, Paulinho e Jurandir que sempre estiveram presentes.
  - Aos amigos do Impa, em especial ao Ari, nosso irmão de coração, e ao Rolando, amigo eterno.
  - A Alexandrina por cuidar do meu filho Bruno de forma tão carinhosa e dedicada nos momentos em que estivemos ausentes.
  - Ao pessoal do Prédio da Rua Moura Brasil-47, onde moramos durante o doutorado. Em especial ao Paulo, Paula, Marcelo e Cristina.
  - Ao Rio de Janeiro: "Minha alma canta/ Vejo o Rio de Janeiro/ Estou morrendo de saudades/ Rio teu mar praias sem fim/ Rio, você foi feito pra mim/ Cristo Redentor/ Braços abertos sobre a Guanabara/ Este samba é só porque/ Rio, eu gosto de você/ ..." (Tom Jobim, Samba do Avião).

Resumo da Tese apresentada à COPPE/UFRJ como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Doutor em Ciências (D.Sc.)

UMA NOVA CLASSE DE ALGORITMOS PROXIMAIS PARA O PROBLEMA DE COMPLEMENTARIEDADE NÃO-LINEAR

Geci José Pereira da Silva

Julho/2002

Orientador: Paulo Roberto Oliveira

Programa: Engenharia de Sistemas e Computação

Consideramos novos métodos de regularização proximal com métrica váriavel para resolver o problema de complementariedade não-linear com P_0-funções. Estabelecemos propriedades de convergência global quando o conjunto solução do problema de complementariedade não-linear é não-vazio e limitado. Além disso, sem assumir a limitação do conjunto solução, mostramos que a sequência exata gerada por um dos algoritmos forma uma sequência minimizante para a função Lagrangiano implícita.

Abstract of Thesis presented to COPPE/UFRJ as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Science (D.Sc.)

A NEW CLASS OF PROXIMAL ALGORITHMS FOR THE NONLINEAR COMPLEMENTARITY PROBLEM

Geci José Pereira da Silva

July/2002

Advisor: Paulo Roberto Oliveira

Department: Systems and Computation Engineering

We consider new variable metric proximal regularization method for solving the nonlinear complementarity problem for P_0 functions. We establish global convergence properties under the condition that the solution set of nonlinear complementarity problem is nonempty and bounded. Moreover, without assuming the boundedness of the solution set, we show that the exact sequence generated by a of algorithhm form a minimization sequence for the implicit Lagrangian function.

Índice

Capítulo 1

Introdução

Nesta tese, apresentamos algoritmos para resolver o problema de complementariedade não-linear, $(PCN(F))$, que constitui em encontrar $x \in I\!R^n$ tal que

$$x \geq 0, \quad F(x) \geq 0, \quad x^T F(x) = 0, \tag{1.1}$$

onde $F : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ é uma P_0-função. Lembramos que F é uma P_0-função se para quaisquer x, y em $I\!R^n$ com $x \neq y$

$$\max_{x_i \neq y_i} (x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) \geq 0.$$

Note que as P_0-funções incluem a classe das funções monótonas. Aplicações do PCN podem ser encontradas em otimização, economia, engenharia e etc (veja [4], [13], [9] e [10]).

Existem vários métodos para resolver o PCN, veja [13]. Aqui, consideramos métodos de regularização, que são usados para resolver problemas mal postos. De forma rápida, um problema mal posto pode ser difícil para resolver pois pequenos erros nos cálculos podem levar a uma solução totalmente errada.

Para a classe de P_0-funções, Facchinei e Kanzow [7] consideraram a regularização de Tikhonov. Este esquema consiste em resolver uma sequência de problemas de complementariedade $PCN(F^k)$, onde $F^k(x) := F(x) + c_k x$ e c_k é um parâmetro positivo convergindo a zero. Já Yamashita, Imai e Fukushima [25] consideraram uma regularização proximal, sugerida inicialmente por Martinet [17] e depois estudado por Rockafellar [23] para o caso monótono, que é obtida da seguinte forma: dada a iterada atual x^k, eles consideram $F^k(x) := F(x)+c_k(x-x^k)$, onde c_k é um parâmetro positivo que não necessariamente converge a zero. Nos casos acima, se F é uma P_0-função continuamente diferenciável e o conjunto solução do $PCN(F)$ é limitado eles provam convergência global, com hipóteses convenientes sobre os parâmetros c_k's.

Observamos que, nos casos acima, se F é uma P_0-função, então F_k é uma P-função, isto é, para quaisquer $x, y \in I\!R^n$, com $x \neq y$,

$$\max_i \{(x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y))\} > 0.$$

Portanto o subproblema $PCN(F^k)$ é melhor tratável do que o $PCN(F)$, pois terá no máximo uma solução.

Logo é natural considerarmos outros tipos de regularizações. Assim, apresentamos uma regularização proximal com métrica váriavel para resolver o problema de complementariedade não-linear com P_0-funções, ou seja, dado $x^k > 0$, consideramos a regularização F^k de F, como

$$F^k(x) := F(x) + c_k(X^k)^{-r}(x - x^k), \tag{1.2}$$

onde $(X^k)^{-r}$ é definida por $(X^k)^{-r} = diag\{(x_1^k)^{-r}, \cdots, (x_n^k)^{-r}\}$, $r \geq 1$ e c_k é um parâmetro positivo. Claramente, nossa motivação é a métrica natural, subjacente aos métodos de ponto interior: para $r = 1$ (respectivamente $r = 2$) $(X^k)^{-1}$ (respectivamente, $(X^k)^{-2}$) é a Hessiana da função barreira $xln(x)$ (respectivamente, $-ln(x)$). Veja o trabalho recente de Oliveira, G. L. e Oliveira, P. R. [20] que apresentam, para resolver um problema de otimização com restrições positivas, uma família de métodos do tipo proximal com métrica variável, onde o núcleo quadrático é substituído pela métrica $G(x) = X^{-r}$.

Apresentamos dois algoritmos. Para o primeiro algoritmo (Algoritmo 5.1.1), que é de certa forma exato, provamos convergência supondo que o conjunto solução do $PCN(F)$ é não-vazio e limitado e F apenas uma P_0-função contínua. Provamos também, sem considerar o conjunto solução do $PCN(F)$ limitado, que a sequência exata gerada pelo algoritmo é minimizante para a função Lagrangiano implícita, que é uma função de mérito para o $PCN(F)$. Lembramos que uma função $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função de mérito para o $PCN(F)$ se satisfaz a seguinte condição, $g(x) \geq 0$ e $g(x) = 0$ se, e somente se, x é solução do $PCN(F)$. Para o segundo algoritmo (Algoritmo 5.2.1), que é inexato e portanto com possibilidades de implementação, usando o Teorema do Passo da Montanha mostramos que o método converge globalmente se F é uma P_0-função continuamente diferenciável e o conjunto solução do $PCN(F)$ é não-vazio e limitado. Facchinei [6] dá condições necessárias e suficientes para o conjunto solução do $PCN(F)$ ser limitado.

A tese é organizada da seguinte forma: No capítulo 2, revisamos algumas definições e resultados. No capítulo 3, consideramos reformulações equivalentes ao problema de complementariedade. No capítulo 4, apresentamos uma família de regularizações para a função e operadores correspondentes e estudamos suas propriedades. Finalmente, no capítulo 5, apresentamos os algoritmos e mostramos as propriedades de convergência.

Capítulo 2

Preliminares

2.1 Introdução

Neste capítulo faremos um resumo dos conceitos necessários ao desenvolvimento dos capítulos seguintes. As demonstrações serão, em princípio, todas elas referenciadas.

2.2 Símbolos e Notações

Ao longo desta tese adotaremos a seguinte simbologia:

$I\!R^n = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n); x_i \in I\!R, i = 1, \ldots, n\}$: espaço vetorial euclideano;

Dado $x \in I\!R^n$, $x \geq 0$ ($x > 0$) significa que $x_i \geq 0$ (respectivamente, $x_i > 0$) para $i = 1, \ldots, n$;

$I\!R^n_+ = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n); x_i \geq 0, i = 1, \ldots, n\}$;

$I\!R^n_{++} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n); x_i > 0, i = 1, \ldots, n\}$;

Dados $x, y \in I\!R^n$, $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$: produto interno canônico em $I\!R^n$;

Dado $x \in I\!R^n$, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$: norma euclideana em $I\!R^n$;

Dada $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, consideramos $H(x) = (H_1(x), H_2(x), \ldots, H_n(x))$;

∇: gradiente de uma função real definida em $\mathbb{R}^n$.

Denotamos por $[\cdot]$ a projeção ortogonal sobre $\mathbb{R}^n_+$, a qual está bem definida pois $\mathbb{R}^n_+$ é um cone convexo fechado. Para $x \in \mathbb{R}^n$ temos que $[x]_+ = ([x_1]_+, [x_2]_+, \ldots, [x_n]_+)$, onde $[x_i]_+ = max\{0, x_i\}$. Uma das propriedades de projeção que usaremos é a não-expansividade, i.e, dados $x, y \in \mathbb{R}^n$ temos que $\|[x]_+ - [y]_+\| \leq \|x - y\|$. Para maiores detalhes sobre projeção indicamos a referência [15].

2.3 P e P_0-propriedades

Para facilitar a leitura repetimos algumas definições, já comentadas na introdução, relacionadas a uma aplicação $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$.

Definição 2.3.1 *Uma aplicação $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é dita ser uma*

1. *P_0-função se, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ com $x \neq y$,*

$$\max_{x_i \neq y_i} (x_i - y_i)(H_i(x) - H_i(y)) \geq 0;$$

2. *P-função se, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$ com $x \neq y$,*

$$\max_i \{(x_i - y_i)(H_i(x) - H_i(y))\} > 0;$$

3. *função monótona se,*

$$\langle H(x) - H(y), x - y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Note que a classe das funções monótonas está contida na classe das P_0-funções, a classe das funções estritamente monótonas está contida na classe das P-funções, cada P-função é uma P_0-função e toda P-função é injetiva. Uma boa referência para P e P_0-função é o artigo de Moré e Rheinboldt [19], que contém exemplos e referências de aplicações desta classe de funções.

A próxima proposição será útil para mostramos a unicidade de solução para o problema regularizado.

Proposição 2.3.1 *Se $H : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ é uma P-função, então o $PCN(H)$ tem no máximo uma solução.*

Demonstração. Como H é uma P-função, ela é injetiva e, portanto se o $PCN(H)$ tem solução ela é única. ∎

O seguinte resultado é útil para mostrarmos a existência de solução para o problema regularizado. Sua prova foi usada em vários trabalhos, por exemplo, [7], [22] e [24].

Lema 2.3.1 *Seja $H : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ uma P_0-função contínua e $\{u^k\}$ uma sequência em $I\!R^n$ tal que $\|u^k\| \to \infty$. Então existe uma subsequência, que escreveremos sem perda de generalidade como $\{u^k\}$, e um índice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que uma das seguintes condições ocorre:*

(i) *$u_i^k \to \infty$ e $\{H_i(u^k)\}$ é limitada inferiormente, ou*

(ii) *$u_i^k \to -\infty$ e $\{H_i(u^k)\}$ é limitada superiormente.*

Demonstração. Definindo o conjunto de índices

$$J := \{j \in \{1, \cdots, n\} | \{u_j^k\} \text{ é ilimitada.}\},$$

temos que J é não-vazio, pois $\{u^k\}$ é ilimitada. Rearranjando os termos, se necessário, podemos supor que $|u_j^k| \longrightarrow \infty$ para todo $j \in J$. Defina a sequência limitada $\{v^k\}$ por

$$v_j^k := \begin{cases} 0 & \text{if} j \in J \\ u_j^k & \text{if} j \notin J, \end{cases}.$$

Como H é uma P_0-função e $u^k \neq v^k$, temos que existe um índice $i \in J$ tal que

$$u_i^k[H_i(u^k) - H_i(v^k)] = (u_i^k - v_i^k)[H_i(u^k) - H_i(v^k)] \geq 0.$$

Note que quando $|u_i^k| \rightarrow \infty$ temos dois casos possíveis a serem analisados. Supondo, primeiro, que $u_i^k \rightarrow \infty$, então da desigualdade acima (assumindo que $u_i^k > 0$) segue que $H_i(u^k)$ é limitada inferiormente pois H_i é contínua e $\{v^k\}$ é limitada, provando assim a parte **(i)**. Agora, supondo que $u_i^k \rightarrow -\infty$, a desigualdade acima mostra (assumindo que $u_i^k < 0$) que $H_i(u^k)$ é limitada superiormente, provando assim a parte **(ii)**. ∎

2.4 O Teorema de Banach-Mazur

A coercividade será útil para mostrarmos a existência de solução dos problemas regularizados.

Definição 2.4.1 *Uma função $H : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ é coerciva se, para qualquer sequência $\{u^k\}$ com $\|u^k\| \longrightarrow \infty$, implicar que $\|H(u^k)\| \longrightarrow \infty$.*

A prova do próximo lema segue direto da definição acima.

Lema 2.4.1 *Considere uma função contínua $H : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

(i) *H é coerciva;*

(ii) *H é própria, i.e, a imagem inversa $H^{-1}(C)$ de qualquer conjunto compacto C em $\mathbb{R}^n$ é compacto;*

(iii) *os conjuntos de nível da aplicação $x \longmapsto \|H(x)\|$ são limitados, i.e., para qualquer constante $\beta \geq 0$, o conjunto $\{x; \|H(x)\| \leq \beta\}$ é limitado.*

O próximo teorema é um resultado clássico de Banach e Mazur ([2], Teorema 5.1.4), aqui colocado na forma que é pertinente para nosso uso.

Teorema 2.4.1 *Se $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ é uma função contínua, localmente injetiva e coerciva, então H é um (sobre) homeomorfismo do $\mathbb{R}^n$.*

2.5 Teorema do Passo da Montanha

Usaremos o próximo teorema para estabelecer convergência global para o algoritmo inexato, que é uma versão do Teorema do Passo da Montanha (veja, Teorema 9.2.7 em [21]).

Teorema 2.5.1 *Seja $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função continuamente diferenciável e coerciva. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto e não-vazio e m o mínimo de f na fronteira (compacta) de S, isto é, $m := \min_{x \in \partial S} f(x)$. Se existe $a \in S$ e $b \notin S$ tal que $f(a) < m$ e $f(b) < m$, então existe um $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $\nabla f(c) = 0$ e $f(c) \geq m$.*

2.6 Semicontinuidade Exterior

Definição 2.6.1 *Dizemos que uma função* $H : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *é univalente se é contínua e injetiva, e fracamente univalente se existe uma sequência de funções univalentes* $H_k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$*, tal que* H_k *converge uniformemente a* H *sobre cada subconjunto limitado do* $\mathbb{R}^n$*.*

Observe que cada P-função contínua é univalente. Agora, supondo que H é uma P_0-função contínua, temos, definindo $H_k(x) := H(x) + \varepsilon_k x$, onde $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \longrightarrow 0$ quando $k \longrightarrow \infty$, que H_k é uma P-função para todo k, portanto injetiva, e H_k converge uniformemente a H sobre cada subconjunto limitado do $\mathbb{R}^n$, deste modo segue que toda P_0-função contínua é fracamente univalente.

Na prova da convergência do algoritmo exato, necessitaremos do seguinte resultado de semicontinuidade exterior que pode ser obtido em [22].

Teorema 2.6.1 *Seja* $G : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *fracamente univalente e suponha que, para um* $q^* \in \mathbb{R}^n$, $G^{-1}(q^*)$ *é não-vazio e compacto. Então para qualquer* $\varepsilon > 0$*, existe um* $\delta > 0$ *tal que para cada função fracamente univalente* H *e para cada vetor* q *com*

$$\sup_{\Omega} \|H(x) - G(x)\| < \delta, \quad \|q - q^*\| < \delta$$

temos que

$$\emptyset \neq H^{-1}(q) \subseteq G^{-1}(q^*) + \varepsilon \mathcal{B}$$

onde $\mathcal{B}$ *denota a bola aberta unitária em* $\mathbb{R}^n$ *e* $\Omega := G^{-1}(q^*) + \varepsilon\mathcal{B}$*. Além disso,* $H^{-1}(q)$ *e* $G^{-1}(q)$ *são não-vazios, conexos e uniformemente limitados para* q *numa vizinhança de* q^**.*

Capítulo 3

Reformulações equivalentes para o $PCN(F)$

Neste capítulo consideramos duas reformulações equivalentes para o Problema de Complementariedade Não-linear, as quais usaremos nos capítulos posteriores. Existem outras reformulações equivalentes para o Problema de Complementariedade Não-linear e uma boa referência é o artigo de Harker e Pang [13].

3.1 A função mínimo

Nesta seção consideramos uma reformulação equivalente para o PCN, usando a função mínimo [1]. Para isso definiremos a seguinte classe de funções:

Definição 3.1.1 *Dizemos que a função $\eta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função-PCN se satisfaz a seguinte condição*

$$\eta(a,b) = 0 \iff a \geq 0, \quad b \geq 0 \quad e \quad ab = 0. \tag{3.1}$$

Definindo $\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$\theta(a,b) := \min\{a,b\}, \tag{3.2}$$

temos que θ é uma função-PCN.

É fácil ver que

$$\theta(a,b) = a - [a-b]_+,$$

onde $[a]_+ := \max\{a, 0\}$.

Assim, definindo o operador $\Theta : I\!\!R^n \longrightarrow I\!\!R^n$ por

$$\Theta(x) := x - [x - F(x)]_+ = \begin{bmatrix} x_1 - [x_1 - F_1(x)]_+ \\ x_2 - [x_2 - F_2(x)]_+ \\ \vdots \\ x_n - [x_n - F_n(x)]_+ \end{bmatrix}, \tag{3.3}$$

temos que

$$\Theta(x) = \begin{bmatrix} \theta(x_1, F_1(x)) \\ \theta(x_2, F_2(x)) \\ \vdots \\ \theta(x_n, F_n(x)) \end{bmatrix}. \tag{3.4}$$

O próximo lema dá uma reformulação equivalente para o Problema de complementariedade Não-linear.

Lema 3.1.1 *Seja F uma função de $I\!\!R^n$ em $I\!\!R^n$. Então x^* é uma solução do $PCN(F)$ se, e somente se, x^* é solução do sistema de equações $\Theta(x) = 0$.*

Demonstração. Supondo que x^* é uma solução do $PCN(F)$, temos que $x_i^* \geq 0$, $F_i(x^*) \geq 0$ e $x_i^* F_i(x^*) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Portanto de (3.4) temos, usando o fato que θ é uma função-PCN, que x^* é solução da equação $\Theta(x) = 0$. Reciprocamente, supondo que x^* é solução da equação $\Theta(x) = 0$, temos usando (3.4) que $\theta(x_i^*, F_i(x^*)) = 0$ para $i = 1, \ldots, n$ e, portanto, usando o fato que θ é uma função-PCN, segue que x^* é uma solução do $PCN(F)$. ∎

A próxima proposição estabelece propriedades P e P_0 do operador Θ, definido por (3.4).

Proposição 3.1.1 *Seja $F : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ uma P-função (P_0-função). Então Θ é uma P-função (P_0-função).*

Demonstração. Assuma que F é uma P-função. Então para $x \neq y$, existe um índice i tal que

$$(x_i - y_i)[F_i(x) - F_i(y)] > 0.$$

Sem perda de generalidade, assumindo que $x_i > y_i$ temos que $F_i(x) > F_i(y)$. Mostraremos que $(x_i - y_i)[\Theta_i(x) - \Theta_i(y)] > 0$. Suponha que isto não ocorre, então $\Theta_i(x) \leq \Theta_i(y)$ o que significa que

$$x_i - [x_i - F_i(x)]_+ \leq y_i - [y_i - F_i(y)]_+. \tag{3.5}$$

Mostraremos que a desigualdade acima não pode ocorrer. Os valores possíveis para $x_i - [x_i - F_i(x)]_+$ são

(1) x_i se $x_i - F_i(x) \leq 0$, e

(2) $F_i(x)$ se $x_i - F_i(x) > 0$;

e, os valores possíveis de $y_i - [y_i - F_i(y)]_+$ são

(a) y_i se $y_i - F_i(y) \leq 0$, e

(b) $F_i(y)$ se $y_i - F_i(y) > 0$.

Considerando todos os valores possíveis acima, mostraremos que a desigualdade

$$x_i - [x_i - F_i(x)]_+ \leq y_i - [y_i - F_i(y)]_+$$

não poderá ocorrer.

(i) Supondo que ocorram (1) e (a), temos de (3.5) que $x_i \leq y_i$, o que é uma contradição.

(ii) Supondo que ocorram (1) e (b), temos de (3.5) que $x_i \leq F_i(y)$. Como $x_i > y_i$, isto implica que $y_i < F_i(y)$, contradizendo a condição para ocorrer (b).

(iii) Supondo que ocorram (2) e (a), temos de (3.5) que $F_i(x) \leq y_i$. Mas, por (a), $y_i \leq F_i(y)$ implicando que $F_i(x) \leq F_i(y)$, o que é uma contradição.

(iv) Finalmente, supondo que ocorram (2) e (b), temos de (3.5) que $F_i(x) \leq F_i(y)$, o que é uma contradição.

Portanto, para quaisquer $x \neq y$ em $I\!R^n$ existe um índice i tal que

$$(x_i - y_i)[\Theta_i(x) - \Theta_i(y)] > 0,$$

provando que Θ é uma P-função. Um argumento similar mostra que Θ é uma P_0-função. ∎

Da prova acima observamos que, se F é uma P-função e $x \neq y$ existe um índice i tal que

$$(x_i - y_i)[F_i(x) - F_i(y)] > 0.$$

Então, para o mesmo índice i temos que

$$(x_i - y_i)[\Theta_i(x) - \Theta_i(y)] > 0.$$

3.2 A função de Fischer-Burmeister

Nesta seção, consideramos uma reformulação equivalente para o PCN, usando a função de Fischer-Burmeister [12], $\varphi : I\!R^2 \longrightarrow I\!R$, definida por

$$\varphi(a, b) = a + b - \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{3.6}$$

A função de Fischer-Burmeister é uma função-PCN. De fato, se $\varphi(a,b)=0$, então $0 \leq \sqrt{a^2+b^2} = a+b$. Assim, elevando ambos os lados ao quadrado temos que $(a+b)^2 = a^2+b^2$, o que implica que $ab=0$. E, portanto a prova segue usando o fato que $a+b \geq 0$. Reciprocamente, suponha que $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $ab=0$. Usando o fato que $ab=0$, segue que $\sqrt{a^2+b^2} = |a+b|$. Portanto como $a \geq 0$ e $b \geq 0$ temos que $\varphi(a,b) = a+b-\sqrt{a^2+b^2} = 0$.

Esta função foi introduzida por Fischer [11] e desenvolve um papel central em vários métodos tipo Newton não-suave para a solução do PCN, veja por exemplo [3], [5] e [8]. Aqui, no entanto, usaremos esta função como uma ferramenta teórica. Para este fim, definimos o operador $\Phi : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ por

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} \varphi(x_1, F_1(x)) \\ \varphi(x_2, F_2(x)) \\ \vdots \\ \varphi(x_n, F_n(x)) \end{bmatrix}, \tag{3.7}$$

onde F é uma função de $I\!R^n$ em $I\!R^n$.

O próximo lema dá uma reformulação equivalente para o Problema de complementariedade Não-linear.

Lema 3.2.1 *Seja F uma função de $I\!R^n$ em $I\!R^n$. Então, $x^* \in I\!R^n$ é solução do $PCN(F)$ se, e somente se, x^* é solução do sistema de equações $\Phi(x)=0$.*

Demonstração. Se $x^* \in I\!R^n$ é uma solução do $PCN(F)$, então para todo $i=1,\ldots,n$, temos que

$$x_i^* \geq 0, \quad F_i(x^*) \geq 0 \quad \text{e} \quad x_i^* F_i(x^*) = 0.$$

Portanto,

$$(x_i^* + F_i(x^*))^2 = (x_i^*)^2 + (F_i(x^*))^2,$$

implicando que $\varphi(x_i, F_i(x)) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Reciprocamente, suponha que $\Phi(x) = 0$, então $\varphi(x_i, F_i(x)) = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Assim, de (3.1) segue que

$$x_i^* \geq 0, \quad F_i(x^*) \geq 0 \quad \text{e} \quad x_i^* F_i(x^*) = 0,$$

para todo $i = 1, \ldots, n$. Portanto, x^* é solução do $PCN(F)$. ■

Considerando o operador Φ dado acima, definimos a função de mérito, $\phi : I\!R^n \longrightarrow I\!R$, para o $PCN(F)$ como

$$\phi(x) = \frac{1}{2}\|\Phi(x)\|^2.$$

A próxima proposição enumera algumas propriedades do operador e da função de mérito definidos acima.

Proposição 3.2.1 *As seguintes afirmações são válidas:*

1. *Se F é continuamente diferenciável, então a função de mérito ϕ é continuamente diferenciável em $I\!R^n$.*

2. *Se F é uma P_0-função, então cada ponto estacionário de ϕ é uma solução do $PCN(F)$.*

Demonstração. Veja [7] ■

O próximo lema é um resultado técnico, e sua demonstração pode ser encontrada em [14].

Lema 3.2.2 *Sejam* $\{a^k\}$ *e* $\{b^k\}$ *duas sequências em* $I\!R$. *Se uma das condições seguintes ocorrer*

(i) $a^k \longrightarrow +\infty$ *e* $b^k \longrightarrow +\infty$;

(ii) $a^k \longrightarrow -\infty$;

(iii) $b^k \longrightarrow -\infty$.

Então, $|\varphi(a^k, b^k)| \longrightarrow +\infty$.

A próxima proposição estabelece propriedades P e P_0 do operador Φ, definido por (3.7).

Proposição 3.2.2 *Seja* $F : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ *uma* P*-função (*P_0*-função). Então* Φ *é uma* P*-função (*P_0*-função).*

Demonstração. Assuma que F é uma P-função. Então para $x \neq y$, existe um índice i tal que

$$(x_i - y_i)[F_i(x) - F_i(y)] > 0.$$

Mostraremos que para o mesmo índice i,

$$(x_i - y_i)[\Phi_i(x) - \Phi_i(y)] > 0.$$

Sem perda de generalidade, assumimos que $x_i > y_i$ e mostraremos que $\Phi_i(x) - \Phi_i(y) > 0$. Assuma o contrário, $\Phi_i(x) \leq \Phi_i(y)$, e coloque por simplicidade, $\alpha = x_i$, $\beta = y_i$, $\gamma = F_i(x)$ e $\delta = F_i(y)$. Temos que $\alpha > \beta$ e $\gamma > \delta$. Agora, $\Phi_i(x) \leq \Phi_i(y)$ implica que

$$(\alpha - \beta) + (\gamma - \delta) \leq \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} - \sqrt{\beta^2 + \delta^2}.$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, simplificando, e usando a desigualdade

$$(\alpha - \beta)(\gamma - \delta) > 0,$$

temos

$$\sqrt{\alpha^2 + \gamma^2}\sqrt{\beta^2 + \delta^2} < \alpha\beta + \delta\gamma.$$

Elevando ao quadrado a desigualdade acima, segue que $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 < 0$, o que é uma contradição. Portanto, Φ é uma P-função. A propriedade P_0 segue de forma análoga. ∎

Capítulo 4

Regularização proximal variável

Neste capítulo apresentamos uma nova regularização proximal com métrica variável a um parâmetro para uma função F de $I\!R^n$ em $I\!R^n$, e, de forma análoga ao capítulo anterior definimos os operadores correspondentes à função regularizada e estudamos suas propriedades.

4.1 Regularização da função F

Dada uma função $F : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$, $x^k \in I\!R^n$, $x^k > 0$, $r \in I\!R$, $r \geq 1$, definimos a regularização de F, $F^k : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$, como

$$F^k(x) := F(x) + c_k(X^k)^{-r}(x - x^k), \tag{4.1}$$

onde $(X^k)^{-r}$ é definida por $(X^k)^{-r} = diag\{(x_1^k)^{-r}, \ldots, (x_n^k)^{-r}\}$ e c_k é um parâmetro positivo.

A próxima proposição mostra que se F é uma P_0-função, então, pela Proposição 2.3.1, item **(c)**, o problema regularizado $PCN(F^k)$, tem no máximo uma solução e portanto é melhor tratável do que o $PCN(F)$.

Proposição 4.1.1 *Se F é uma P_0-função, então F^k é uma P-função.*

Demonstração. Como F é uma P_0-função, para quaisquer $x \neq y$ em $\mathbb{R}^n$, existe um índice i tal que

$$(x_i - y_i)[F_i(x) - F_i(y)] \geq 0. \tag{4.2}$$

Mostraremos que $(x_i - y_i)[F_i^k(x) - F_i^k(y)] > 0$, provando assim que F^k é uma P-função. Usando a definição de F^k, temos que

$$\begin{aligned}(x_i - y_i)[F_i^k(x) - F_i^k(y)] &= (x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) + \\ &+ c_k(x_i - y_i)[\sum_{j=1}^{n}(X^k)_{ij}^{-r}(x_j - y_j)] \\ &= (x_i - y_i)(F_i(x) - F_i(y)) + c_k(x_i^k)^{-r}(x_i - y_i)^2.\end{aligned}$$

Agora, usando (4.2) e os fatos que $x_i \neq y_i$, $x_i^k > 0$ e $c_k > 0$ temos que $(x_i - y_i)[F_i^k(x) - F_i^k(y)] > 0$. ∎

4.2 Regularização para o operador mínimo

Considerando a regularização de F, $F^k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, dada em (4.1), definimos de forma análoga a (3.3) o operador $\Theta^k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, como

$$\Theta^k(x) := x - [x - F^k(x)]_+ = \begin{bmatrix} \theta(x_1, F_1^k(x)) \\ \theta(x_2, F_2^k(x)) \\ \vdots \\ \theta(x_n, F_n^k(x)) \end{bmatrix}, \tag{4.3}$$

onde $\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida por (3.2).

Definimos também a função de mérito correspondente $\psi^k : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ como

$$\psi^k(x) = \frac{1}{2}\|\Theta^k(x)\|^2. \tag{4.4}$$

A proposição seguinte é uma consequência direta da Proposição 3.1.1.

Proposição 4.2.1 *Se F é uma P_0-função, então Θ^k é uma P-função.*

Demonstração. Pela Proposição 4.1.1 temos que F^k é uma P-função. Portanto, pela Proposição 3.1.1, segue que Θ^k é uma P-função. ∎

A próxima proposição estabelece a existência de solução para problema regularizado, $PCN(F^k)$.

Proposição 4.2.2 *Se F é uma P_0-função contínua, então Θ^k é coerciva.*

Demonstração. Seja $\{u^j\}$ uma sequência qualquer tal que $\|u^j\| \longrightarrow \infty$. Como F é uma P_0-função contínua temos, pelo Lema 2.3.1, que existe uma subsequência, que escreveremos sem perda de generalidade como $\{u^j\}$, e um índice i tal que uma das seguintes condições ocorre:

(i) $u_i^j \to \infty$ e $\{F_i(u^j)\}$ é limitada inferiormente, ou

(ii) $u_i^j \to -\infty$ e $\{F_i(u^j)\}$ é limitada superiormente.

Pela definição de F^k temos que

$$\theta(u_i^j, F_i^k(u^j)) = u_i^j - [u_i^j - F_i(u^j) - c_k(x_i^k)^{-r}(u_i^j - x_i^k)]_+. \tag{4.5}$$

Assim, supondo que ocorra (i), mostraremos que nas duas possibilidades para a igualdade acima,

$$\theta(u_i^j, F_i^k(u^j)) \longrightarrow \infty.$$

(a) Se $u_i^j - F_i(u^j) - c_k(x_i^k)^{-r}(u_i^j - x_i) \leq 0$, então de (4.5) temos que $\theta(u_i^j, F_i^k(u^j)) = u_i^j$, e portanto, $\theta(u_i^j, F_i^k(u^j)) \longrightarrow \infty$;

(b) Se $u_i^j - F_i(u^j) - c_k(x_i^k)^{-r}(u_i^j - x_i^k) > 0$, então de (4.5) temos que

$$\theta(u_i^j, F_i^k(u^j)) = F_i(u^j) + c_k(x_i^k)^{-r}u_i^j - c_k(x_i^k)^{-r}x_i^k.$$

Como $\{F_i(u^j)\}$ é limitada inferiormente e $c_k(x_i^k)^{-r}x_i^k$ é uma constante, então $\theta(u_i^j, F_i^k(u^j)) \longrightarrow \infty$.

Logo, segue que se ocorrer (i) temos que $\|\Theta^k(u^j)\| \longrightarrow \infty$. De forma análoga mostra-se que se ocorrer (ii), $\|\Theta^k(u^j)\| \longrightarrow \infty$. ∎

O próximo teorema mostra a unicidade de solução para o $PCN(F^k)$ supondo que F é uma P_0-função contínua.

Teorema 4.2.1 *Se $F : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ é uma P_0-função contínua e $F^k : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ é definida como em* (4.1), *então o sistema de equações $\Theta^k(x) = 0$ tem solução única.*

Prova. Como F é uma P_0-função, temos pela Proposição 4.2.1 que Θ^k é uma P-função, e, portanto injetiva. Agora, como F é uma P_0-função contínua temos pela Proposição 4.2.2 que Θ^k é coerciva. Portanto, pelo Teorema 2.4.1 temos que Θ^k é um homeomorfismo em $I\!R^n$ e, assim $\Theta^k(x) = 0$ tem solução única. ∎

Observe que, pelo Lema 3.1.1 e Teorema acima segue que o $PCN(F^k)$ tem solução única.

4.3 Regularização para o operador Fischer-Burmeister

Nesta seção consideramos o operador de Fischer-Burmeister e a função de mérito para o problema regularizado definidos, respectivamente, por

$$\Phi^k(x) = \begin{bmatrix} \varphi(x_1, F_1^k(x)) \\ \vdots \\ \varphi(x_n, F_n^k(x)) \end{bmatrix}$$

e

$$\phi^k(x) = \frac{1}{2}\|\Phi^k(x)\|^2,$$

onde F^k é definida por (4.1) e φ é definida por (3.6).

A próxima proposição estabelece existência de solução para o problema regularizado.

Proposição 4.3.1 *Suponha que F é uma P_0-função contínua. Então Φ^k é coercivo.*

Demonstração. Seja $\{u^j\}$ uma sequência qualquer tal que $\|u^j\| \longrightarrow \infty$. Como F é uma P_0-função contínua temos, pelo Lema 2.3.1, que existe uma subsequência, que escreveremos sem perda de generalidade como $\{u^j\}$, e um índice i tal que uma das seguintes condições ocorre:

(i) $u_i^j \to \infty$ e $\{F_i(u^j)\}$ é limitada inferiormente, ou

(ii) $u_i^j \to -\infty$ e $\{F_i(u^j)\}$ é limitada superiormente.

Pela definição de F^k, temos que

$$F_i^k(u^j) = F_i(u_i^j) + c_k(x_i^k)^{-r}u_i^j - c_k(x_i^k)^{1-r}.$$

Logo, se ocorrer (i) temos que $F_i^k(u^j) \longrightarrow \infty$ quando $j \longrightarrow \infty$. Assim, do Lema 3.2.2 segue que $|\varphi(u_i^j, F_i^k(u^j))| \longrightarrow \infty$ quando $j \longrightarrow \infty$. Portanto, Φ^k é coercivo. Agora, se ocorrer (ii), segue diretamente do Lema 3.2.2 que $|\varphi(u_i^j, F_i^k(u^j))| \longrightarrow \infty$ quando $j \longrightarrow \infty$, provando assim que Φ^k é coercivo. ∎

Para finalizar este capítulo, mostraremos que o sistema de equações $\Phi^k(x) = 0$ tem solução única quando F é uma P_0-função contínua.

Teorema 4.3.1 *Se $F : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ é uma P_0-função contínua e $F^k : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ é definida como em* (4.1)*, então o sistema de equações $\Phi^k(x) = 0$ tem solução única.*

Prova. Como F é uma P_0-função, temos pela Proposição 3.2.2, que Φ^k é uma P-função, e, portanto injetiva.

Agora, como F é uma P_0-função contínua temos, pela Proposição 4.3.1, que Φ^k é coerciva. Portanto, pelo Teorema 2.4.1 segue que Φ^k é um homeomorfismo em $I\!\!R^n$ e assim $\Phi^k(x) = 0$ tem solução única. ■

Capítulo 5

Algoritmos e convergência

Neste capítulo, propomos algoritmos do tipo ponto proximal exato e inexato com métrica variável e mostramos propriedades de convergência.

5.1 Algoritmo exato

Nesta seção usamos o operador mínimo, definido por (4.3), para propomos um algoritmo do tipo proximal exato com métrica variável para resolver o $PCN(F)$, onde $F : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ é uma P_0-função contínua[1]. Mostramos propriedades de convergência sob algumas hipóteses, entre elas, a condição do conjunto solução do $PCN(F)$ ser limitado e, sem considerar esta condição mostramos que a sequência exata forma uma sequência minimizante para a função Lagrangiano implícito, $M : I\!R^n \longrightarrow I\!R_+$, definida por

$$M(x) := \langle x, F(x)\rangle + \frac{\alpha}{2}(\|[x - \frac{1}{\alpha}F(x)]_+\|^2 - \|x\|^2 + \|[F(x) - \frac{1}{\alpha}x]_+\|^2 - \|F(x)\|^2), \quad (5.1)$$

onde $0 < \alpha < 1$ é um escalar dado. A função Lagrangiano implícito foi introduzida por Mangasarian e Solodov [16] e é uma função de mérito para o $PCN(F)$.

[1]Agradecemos ao Prof. M. S. Gowda que sugeriu supor F apenas contínua

A seguir apresentamos o algoritmo exato, em que se utiliza ψ^k, dada por (4.4) como função de mérito.

Algoritmo 5.1.1 **Passo 0:** *Escolha* $c_0 > 0$, $\delta_0 \in (0,1)$ *e* $x^0 \in \mathbb{R}^n_{++}$. *Faça* $k := 0$.

Passo 1: *Dados* $c_k > 0$, $\delta_k \in (0,1)$ *e* $x^k \in \mathbb{R}^n_{++}$, *obtenha* $x^{k+1} \in \mathbb{R}^n_{++}$, $\beta_{k+1} \in (0,1)$ *tais que* $\beta_{k+1} < \beta_k$, $\|\overline{x}^k - x^{k+1}\| \leq \beta_{k+1}$ *e* $\psi^k(x^{k+1})^{\frac{1}{2}} \leq \delta_k$, *onde* $\overline{x}^k$ *é a solução única do* $PCN(F^k)$.

Passo 2: *Escolha* $c_{k+1} > 0$ *e* $\delta_{k+1} \in (0, \delta_k)$. *Faça* $k := k+1$ *e volte ao Passo 1.*

O Algoritmo 5.1.1 está bem definido, pois pelo Teorema 4.2.1 o $PCN(F^k)$ tem solução única e, como ψ^k é contínua temos que para qualquer $\delta_k > 0$, existe um $0 < \beta_{k+1} < \beta_k$ tal que $\psi^k(y)^{\frac{1}{2}} \leq \delta_k$ para qualquer y tal que $\|\overline{x}^k - y\| \leq \beta_{k+1}$, visto que $\psi^k(\overline{x}^k) = 0$.

Para obtermos convergência global do Algoritmo 5.1.1 consideramos as seguintes hipóteses sobre a sequência de parâmetros $\{c_k\}$:

(A) $c_k(X^k)^{-r}(x^{k+1} - x^k) \longrightarrow 0$ se $\{x^k\}$ é limitada e $r \geq 1$;

(B) $c_k(X^k)^s \longrightarrow 0$ se $\{x^k\}$ é ilimitada e $s \leq 0$;

Observamos que não necessariamente c_k necessita ir a zero para a hipótese **B** valer, e isto era necessário no caso proximal clássico estudado por Yamashita, Imai e Fukushima em [25]. Oliveira and Oliveira [20], mostram sobre certas hipóteses sobre c_k e tomando $F(x) = \nabla f(x)$, onde $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaz certas condições, que vale **(A)**.

Retornamos agora as funções associadas à função mínimo, dadas por Θ (3.3), Θ^k (4.3) e ψ^k (4.4). Defina também $\psi(x) = \frac{1}{2}\|\Theta(x)\|^2$.

Agora, usando as hipóteses acima mostraremos que ψ^k converge uniformemente a ψ em compactos.

Lema 5.1.1 *Suponha que vale a hipótese* **B** *e que* $S \subset I\!R^n$ *é um conjunto compacto não-vazio. Se* $\{x^k\}$ *é ilimitada, então para cada* $\varepsilon > 0$, *existe um* k_0 *suficientemente grande tal que para todo* $k \geq k_0$ *temos o seguinte:*

(i)

$$\|\Theta^k(x) - \Theta(x)\| < \varepsilon \quad \textit{para todo} \quad x \in S;$$

(ii)

$$|\psi^k(x) - \psi(x)| < \varepsilon \quad \textit{para todo} \quad x \in S.$$

Demonstração. **(i)** Usando a definição de Θ^k e a não-expansividade da projeção (veja [15], pp. 118), temos, para todo $x \in S$, que

$$\begin{aligned}\|\Theta^k(x) - \Theta(x)\| &= \|[x - F(x)]_+ - [x - (F(x) + c_k(X^k)^{-r}(x - x^k))]_+\| \\ &\leq \|c_k(X^k)^{-r}(x - x^k)\| \leq \|c_k(X^k)^{-r}\|\|x\| + \|c_k(X^k)^{1-r}\|\end{aligned}$$

Assim, fazendo $k \longrightarrow \infty$ na desigualdade acima e usando a hipótese **B** temos que Θ^k converge uniformemente a Θ em S.

(ii) Usando a definição de ψ^k e ψ temos que para todo $x \in S$

$$\begin{aligned}|\psi^k(x) - \psi(x)| &= \frac{1}{2}|\|\Theta^k(x)\|^2 - \|\Theta(x)\|^2| \\ &= \frac{1}{2}|(\|\Theta^k(x)\| - \|\Theta(x)\|)(\|\Theta^k(x)\| + \|\Theta(x)\|)| \\ &\leq \frac{1}{2}(\|\Theta^k(x)\| + \|\Theta(x)\|)(\|\Theta^k(x) - \Theta(x)\|).\end{aligned}$$

Assim, fazendo $k \longrightarrow \infty$ na desigualdade acima e usando a parte **(i)** temos que ψ^k converge uniformemente a ψ em S. ∎

O próximo teorema mostra que a sequência gerada pelo Algoritmo 5.1.1 converge globalmente.

Teorema 5.1.1 *Suponha que F é uma P_0-função contínua, valem as hipóteses* **A** *e* **B** *e que o conjunto de soluções, S^*, do $PCN(F)$ é não-vazio e limitado. Se $\delta_k \longrightarrow 0$, então a sequência $\{x^k\}$ gerada pelo Algoritmo 5.1.1 é limitada e qualquer ponto de acumulação de $\{x^k\}$ é uma solução do $PCN(F)$.*

Prova. Primeiro mostraremos que $\{x^k\}$ é limitada. Suponha que $\{x^k\}$ não é limitada, então existe uma subsequência, $\{x^{k_j}\}$ tal que $||x^{k_j}|| \to \infty$.

Como S^* é limitado, temos que, para qualquer $\delta > 0$, $S := S^* + \delta\mathcal{B}$ é não-vazio, limitado e $x^{k_j} \notin S$ para j suficientemente grande. Assim, pelo Lema 5.1.1, segue que para j suficientemente grande, Θ^{k_j-1} está próximo de Θ no fecho $\overline{S}$ de S, e portanto, pelo Teorema 2.6.1 segue que, $(\Theta^{k_j-1})^{-1}(0) \subseteq (\Theta)^{-1}(0) + \delta\mathcal{B} = S$. Como $\overline{x}^{k_j-1} = (\Theta^{k_j-1})^{-1}(0)$, temos que $\overline{x}^{k_j-1} \in S$, o que é uma contradição.

Agora, mostraremos que qualquer ponto de acumulação de $\{x^k\}$ está em S^*. Como $\{x^k\}$ é limitada, temos da Hipótese **A** e da definição de ψ^k que $|\psi^k(x^{k+1}) - \psi(x^{k+1})| \longrightarrow 0$. Assim, pelo Passo 1 do Algoritmo 5.1.1 e a hipótese que $\delta_k \longrightarrow 0$, temos que $\phi^k(x^{k+1}) \longrightarrow 0$. Portanto, $\phi(x^{k+1}) \longrightarrow 0$, o que significa que todo ponto de acumulação da sequência é uma solução do $PCN(F)$. ∎

A próximo resultado é uma consequência imediata da definição do Algoritmo 5.1.1 e do Teorema acima.

Corolário 5.1.1 *Suponha que F é uma P_0-função contínua, valem as hipóteses* **A** *e* **B** *e que o conjunto de soluções, S^*, do $PCN(F)$ é não-vazio e limitado. Se $\delta_k \longrightarrow 0$ e $\{\beta_k\}$ é obtida de tal forma que $\beta_k \longrightarrow 0$, então todo ponto de acumulação de $\{\overline{x}^k\}$ é solução do $PCN(F)$.*

No teorema a seguir mostraremos que $\overline{x}^k$ é uma sequência minimizante para a função Lagrangiano implícito (5.1) , sem usar a condição do conjunto solução ser limitado.

Teorema 5.1.2 *Suponha que F é uma P_0-função contínua e vale a seguinte hipótese sobre a sequência de parâmetros $\{c_k\}$:*

$$\lim_{k\to\infty} c_k (X^k)^{-r}(\overline{x}^k - x^k) = 0. \tag{5.2}$$

Então, $\{\overline{x}^k\}$ forma uma sequência minimizante para a função Lagrangiano implícito (5.1)*, ou seja,*

$$\lim_{k\to\infty} M(\overline{x}^k) = 0.$$

Prova. Temos a seguinte desigualdade para a função M (veja [26]),

$$M(x) \leq \frac{1-\alpha^2}{2\alpha}\|x - y_\alpha(x)\|^2, \tag{5.3}$$

onde

$$y_\alpha(x) := [x - \frac{1}{\alpha}F(x)]_+.$$

Como $\overline{x}^k$ é a única solução do $PCN(F^k)$, temos, pelo Lema 3.1.1, que

$$\overline{x}^k = [\overline{x}^k - \frac{1}{\alpha}F^k(\overline{x}^k)]_+.$$

Assim, usando a não-expansividade da projeção, temos que

$$\begin{aligned} \|\overline{x}^k - y_\alpha(\overline{x}^k)\| &= \|[\overline{x}^k - \frac{1}{\alpha}F^k(\overline{x}^k)]_+ - [\overline{x}^k - \frac{1}{\alpha}F(\overline{x}^k)]_+\| && (5.4) \\ &\leq \frac{1}{\alpha}\|c_k(X^k)^{-r}(\overline{x}^k - x^k)\|. && (5.5) \end{aligned}$$

Logo, segue de (5.2), (5.3) e (5.4) que

$$\lim_{k\to\infty} M(\overline{x}^k) \leq \frac{1-\alpha^2}{2\alpha^3} \lim_{k\to\infty} \|c_k(X^k)^{-r}(\overline{x}^k - x^k)\|^2 = 0.$$

Como $M(x) \geq 0$, pois é uma função de mérito para o $PCN(F)$, segue que $\{\overline{x}^k\}$ forma uma sequência minimizante para a função Lagrangiano implícito. ∎

5.2 Algoritmo inexato

Nesta seção propomos um algoritmo do tipo proximal inexato com métrica variável para resolver o $PCN(F)$, onde $F : I\!R^n \longrightarrow I\!R^n$ é uma P_0-função continuamente diferenciável. Usamos o operador de Fischer-Burmeister, definido por (3.7), e mostramos propriedades de convergência para o Algoritmo.

Algoritmo 5.2.1 **Passo 0:** *Escolha* $c_0 > 0$, $\delta_0 \in (0,1)$ *e* $x^0 \in I\!R^n_{++}$. *Faça* $k := 0$.

Passo 1: *Dados* $c_k > 0$, $\delta_k \in (0,1)$ *e* $x^k \in I\!R^n_{++}$, *obtenha* $x^{k+1} \in I\!R^n_{++}$ *de tal forma que* $\phi^k(x^{k+1})^{\frac{1}{2}} \leq \delta_k$.

Passo 2: *Escolha* $c_{k+1} > 0$ *e* $\delta_{k+1} \in (0, \delta_k)$. *Faça* $k := k+1$ *e volte ao Passo 1.*

Agora, daremos hipóteses sobre as quais o Algoritmo 5.2.1 converge globalmente para uma solução do $PCN(F)$. A sequência $\{c_k\}$ satisfaz as seguintes condições:

(A) $c_k(X^k)^{-r}(x^{k+1} - x^k) \longrightarrow 0$ se $\{x^k\}$ é limitada;

(B) $c_k(X^k)^s \longrightarrow 0$ se $\{x^k\}$ é ilimitada e $s \leq 0$.

Agora, usando as hipóteses acima mostraremos que ϕ^k converge uniformemente a ϕ em compactos.

Lema 5.2.1 *Suponha que vale a hipótese* **B** *e que* $S \subset I\!R^n$ *é um conjunto compacto não-vazio. Se* $\{x^k\}$ *é ilimitada, então para cada* $\varepsilon > 0$, *existe um* k_0 *suficientemente grande tal que para todo* $k \geq k_0$ *temos que*

$$|\phi^k(x) - \phi(x)| \leq \varepsilon \quad \textit{para todo} \quad x \in S.$$

Demonstração. Para quaisquer a, b, $c \in I\!R$ temos que

$$\begin{aligned} |\varphi(a, b+c) - \varphi(a,b)| &= |\sqrt{a^2 + (b+c)^2} - \sqrt{a^2+b^2} - c| \\ &\leq |\sqrt{a^2 + (b+c)^2} - \sqrt{a^2+b^2}| + |c| \\ &= |\|(a, b+c)\| - \|(a,b)\|| + |c| \\ &\leq \|(0,c)\| + |c| = 2|c|. \end{aligned}$$

Portanto, tomando $a = x_i$, $b = F_i(x)$ e $c = c_k(x_i^k)^{-r}(x_i - x_i^k)$, segue da hipótese **B** que

$$|\varphi(x_i, F_i^k(x)) - \varphi(x_i, F_i(x))| \leq 2|c_k(x_i^k)^{-r}(x_i - x_i^k)| \longrightarrow 0.$$

Como S é compacto e φ, F e F^k são contínuas, temos, para todo i, que

$$\begin{aligned} &|\varphi^2(x_i, F_i^k(x)) - \varphi^2(x_i, F_i(x))| = \\ =\ & |\varphi(x_i, F_i^k(x)) - \varphi(x_i, F_i(x))||\varphi(x_i, F_i^k(x)) + \varphi(x_i, F_i(x))| \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

Assim, segue que ϕ^k converge uniformemente a ϕ em S. ■

Agora podemos provar o teorema de convergência.

Teorema 5.2.1 *Suponha que* F *é uma* P_0*-função continuamente diferenciável, valem as hipóteses* **A** *e* **B** *e que o conjunto de soluções,* S^*, *do* $PCN(F)$ *é não-vazio e limitado. Se* $\delta_k \longrightarrow 0$, *então* $\{x^k\}$ *é limitada e qualquer ponto de acumulação de* $\{x^k\}$ *é uma solução do* $PCN(F)$.

Prova. Primeiro mostraremos que $\{x^k\}$ é limitada. Suponha que $\{x^k\}$ não é limitada, então existe uma subsequência $\{x^k\}_{k\in K}$ tal que $\|x^k\| \to \infty$ quando $k \to \infty$ com $k \in K$.

Como S^* é limitado, existe um compacto $S \subset I\!R^n$ não-vazio tal que $S^* \subset int(S)$ e $x^k \notin S$ para $k \in K$, suficientemente grande. Mas, se $x^* \in S^*$, então temos que $\phi(x^*) = 0$. Assim, tomando $\alpha := \min\limits_{x\in\partial S}\phi(x) > 0$, e aplicando o Lema 5.2.1 com $\varepsilon := \frac{\alpha}{4}$ existe um k_0 tal que para todo $k \geq k_0$

$$\phi^k(x^*) \leq \frac{\alpha}{4} \quad \text{e} \quad m := \min_{x\in\partial S}\phi^k(x) \geq \frac{3\alpha}{4}.$$

Do Passo 1 do algoritmo temos $\phi^k(x^{k+1}) \leq \delta_k^2$, portanto, usando a hipótese que $\delta_k \longrightarrow 0$, existe um k_1 tal que para todo $k \geq k_1$, $\phi^k(x^{k+1}) \leq \frac{\alpha}{4}$.

Agora, considerando um índice $k \in K$, fixo suficientemente grande, tal que $k \geq \max\{k_0, k_1\}$ e, colocando $a = x^*$ e $b = x^{k+1}$ temos, pelo Teorema 2.5.1, que existe um $c \in I\!R^n$ tal que $\nabla\phi^k(c) = 0$ e $\phi^k(c) \geq m \geq \frac{3\alpha}{4} > 0$. Assim , c é um ponto estacionário de ϕ^k, mas não é solução do $PCN(F^k)$ contradizendo a Proposição 3.2.1, item 2. Portanto, $\{x^k\}$ é limitada.

Agora, mostraremos que qualquer ponto de acumulação de $\{x^k\}$ está em S^*. Como $\{x^k\}$ é limitada, temos da Hipótese **A** que $\|F^k(x^{k+1}) - F(x^{k+1})\| \longrightarrow 0$, e de forma análoga à prova do Lema 5.2.1 temos que $|\phi^k(x^{k+1}) - \phi(x^{k+1})| \longrightarrow 0$. Assim, pelo Passo 1 do algoritmo e a hipótese que $\delta_k \longrightarrow 0$, temos que $\phi^k(x^{k+1}) \longrightarrow 0$. Portanto, $\phi(x^{k+1}) \longrightarrow 0$, o que significa que todo ponto de acumulação da sequência é uma solução do $PCN(F)$. ∎

Conclusões

Apresentamos uma nova classe de algoritmos para resolver o $PCN(F)$, com resultados de convergência para P_0-funções. Para o Algoritmo 5.1.1, que de certa forma é um algoritmo exato, mostramos convergência global para a sequência gerada pelo algoritmo supondo F apenas contínua e mostramos que a sequência exata gerada pelo algoritmo é minimizante para a função de mérito Lagrangiano implícito sem supor limitação para o conjunto de solução do $PCN(F)$. Para o Algoritmo 5.2.1, que é inexato, provamos convergência global supondo F continuamente diferenciável e de certa forma com hipóteses sobre os parâmetros c_k melhores do que para o método proximal clássico usado por Yamashita, Imai e Fukushima [25].

Como trabalhos futuro, estamos particularmente interessados no comportamento do algoritmo, dependendo do parâmeto $r \geq 1$, também quando aplicado a funções monótonas. Por outro lado, observe que embora as funções mínimo e de Fischer-Burmeister, foram essenciais na nossa análise teórica poderíamos ter escolhido outra função de mérito no passo 1 dos nossos algoritmos de forma a escolher melhor os c_k's. Como uma observação final, seria interessante provar convergência global sem considerar a hipótese do conjunto solução do $PCN(F)$ ser limitado. Outra questão interessante a ser considerada é a implementação do Algoritmo 5.2.1, usando métodos tipo Newton não-suaves.

Referências Bibliográficas

[1] Auslender, A. *Optimisation: Méthodes Numériques*, Paris, Masson, 1976.

[2] Berger, M.S. *Nonlinearity and Funtional Analysis*, New York, Academic Press, 1977.

[3] Clarke, F. H. *Optimization and Nonsmooth Analysis*, New York, John Wiley, 1983.

[4] Cottle, R.W., Pang, J.S. and Stone, R.E. *The Linear Complementarity Problem*, New York, Academic Press, 1988.

[5] De Luca, T., Facchinei, F. and Kanzow, C. "A semismooth equation approach to the solution of nonlinear complementarity problems", *Mathematical Programming*, v. 75, pp. 407-439, 1996.

[6] Facchinei, F. "Structural and stability properties of P_0 nonlinear complementarity problems", *Mathematics of Operations Research*, Vol. 23, pp. 735-745, 1998.

[7] Facchinei, F. and Kanzow, C. "Beyond Monotonicity in regularization methods for nonlinear complementarity problems", *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 37, pp. 1150-1161, 1999.

[8] Facchinei, F. and Soares, J. "A new merit function for nonlinear complementarity problems and a related algorithm", *SIAM Journal of Optimization*, Vol. 7, pp. 225-247, 1997.

[9] Ferris, M.C. and Pang, J.S. "Engineering and economic applications of complementarity problems", *SIAM Review*, Vol. 39, pp. 669-713, 1997.

[10] Ferris, M.C. and Pang, J.S. (eds) *Complementarity and variational problems: State of the art.* Philadelphia, SIAM, 1997.

[11] Fischer, A. "A special Newton-type optimization method", *Optimization*, Vol. 24, pp. 269-284, 1992.

[12] Fischer, A. "Coercivity conditions in nonlinear complementarity problem", *SIAM Rev.*, Vol. 16, pp. 1-16, 1992.

[13] Harker, P.T. and Pang, J.S. "Finite dimensional variational inequality and nonlinear complementarity problems: A survey of theory, algorithms and applications", *Mathematical Programming*, v. 48, pp. 161-220, 1990.

[14] Kanzow, C. "Global convergence properties of some iterative methods for linear complementarity problems", *SIAM Journal of Optimization*, Vol. 6, pp. 326-341, 1996.

[15] Hiriart-Urruty, J-B and Lemaréchal. *Convex Analysis and Minimization Algorithms I.* Berlin Heidelberg, Springer-Verlag, 1993.

[16] Mangasarian, O.L. and Solodov, M.V. "Nonlinear complementarity as unconstrained and constrained minimization", *Mathematical Programming*, v. 62, pp. 277-297, 1993.

[17] Martinet, B. "Regularisation d'inequations variationelles par approximations sucessives", *Revue Française d'Informatique et de Recherche Operationelle*, v. 4, pp. 154-159, 1970.

[18] Moré, J.J. "Coercivity conditions in nonlinear complementarity problem", *SIAM Rev.*, Vol. 16, pp. 1-16, 1974.

[19] Moré, J.J. and Rheinboldt, W.C. "On P- and S-functions and related classes of n-dimensional nonlinear mappings", *Linear Algebra Appl.*, v. 6, pp. 45-68, 1973.

[20] Oliveira, G. L. and Oliveira, P. R. *A new class of proximal interior-point methods for optimization positivity constraints.* Technical Report, PESC/COPPE - Federal University of Rio de Janeiro, Rio de Janeiro,RJ, Brazil, 2002.

[21] Palais, R.S. and Terng, C.L. "Critical point theory and submanifold geometry", 1353 *Lecture Note in Mathematics*, 1988.

[22] Ravindran, G. and Gowda, S. "Regularization of P_0-functions in box variational inequality problems", *SIAM Journal Of Optmization*, v. 11, pp. 748-760, 2000.

[23] Rockafellar, R.T. "Monotone operators and the proximal point algorithm", *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 14, pp. 877-898, 1976.

[24] Tseng, P. "Growth behavior of a class of merit functions for the nonlinear complementarity problem", *Journal of Optimization Theory and Aplications*, v. 89, pp. 17-37, 1996.

[25] Yamashita, N., Imai, I. and Fukushima, M. "The proximal point algorithm for the P_0 complementarity problem". In: M.C. Ferris, O.L. Mangasarian and J.S.

Pang (eds), *Complementarity: Applications, algorithms and extensions*, Boston, Kluwer Academic Publishers, pp. 361-379, 2001.

[26] Yamashita, N., Taji, K. and Fukushima, M. "Unconstrained optimization reformulations of variational inequality problems", *Journal of Optimization Theory and Aplications*, v. 92, pp. 439-456, 1997.